

Методы конечных объемов  
для гидродинамических задач в областях  
с не разрешаемыми сеткой границами.  
(01.01.07)

Янбарисов Руслан Маратович

Институт вычислительной математики им. Г.И.Марчука РАН, Москва

Научный руководитель: к.ф.-м.н. Никитин К.Д.

20 октября 2021 г.

# Цели и задачи диссертационной работы

## Цель:

- Разработка и исследование конечно-объемных методов для задач фильтрации и течения жидкостей со свободной поверхностью, позволяющих учитывать неразрешаемые сеткой границы.

## Задачи:

- Предложить и исследовать новые численные методы учета трещин для задач фильтрации, основанные на применении нелинейных конечно-объемных схем дискретизации потоков.
- Разработать численную модель течения вязкопластичной и вязкоэластичной жидкостей со свободной поверхностью.
- Предложить программные реализации разработанных численных моделей и верифицировать их на серии тестовых задач.

# Содержание диссертации

## Содержание:

Введение	5
Глава 1. Монотонный метод вложенных дискретных трещин	14
Глава 2. Численная модель течения неньютоновских несжимаемых жидкостей	71
Заключение	104
Список литературы	106

# Глава 1

## Монотонный метод вложенных дискретных трещин

# Уравнение диффузии в пористой среде с крупными трещинами

Уравнение диффузии в пористой среде:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} q^m &= g^m - q^{mf} && \text{в } \Omega^m \subset \mathbb{R}^3, \\ q^m &= -\mathbb{K}^m \nabla p^m, \\ p^m &= \bar{p} && \text{на } \Gamma_D^m, \\ n \cdot q^m &= \bar{u} && \text{на } \Gamma_N^m, \end{aligned}$$

и трещинах:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} q^f &= g^f + q^{mf} && \text{в } \Omega^f \subset \mathbb{R}^3, \\ q^f &= -\mathbb{K}^f \nabla p^f, \\ p^f &= \bar{p} && \text{на } \Gamma_D^f, \\ n \cdot q^f &= \bar{u} && \text{на } \Gamma_N^f \cup \Gamma_0^f, \end{aligned}$$

# Предположения

- $\Omega^f = \bigcup_{j=1}^{n_f} \Omega_j^f$  – задано  $n_f$  плоских двумерных многоугольников трещин с фиксированным расположением и апертурой.
- $\mathbb{K}^m = (\mathbb{K}^m)^T(x) > 0$  – полный анизотропный тензор проницаемости пористой среды.
- $\mathbb{K}^f = k^f \mathbb{I}$  – изотропный тензор проницаемости в трещине.
- $g^m, g^f$  – источники/стоки в пористой среде и трещинах.
- Расчетные сетки пористой среды – произвольные трехмерные, *не адаптированные к трещинам*.

# Метод вложенных дискретных трещин (EDFM)

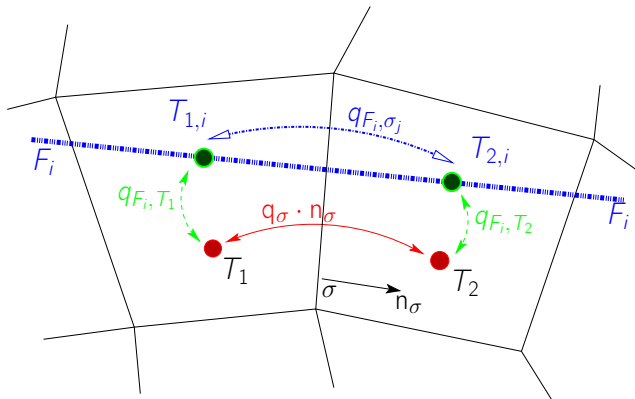


Рис.: Поток Дарси: между ячейками пористой среды  $q_{\sigma} \cdot n_{\sigma}$ , между ячейками пористой среды и трещины  $q_{F_i, T}$ , между виртуальными ячейками трещины  $q_{F_i, \sigma_j}$ .

# Метод вложенных дискретных трещин (EDFM)

$$\underbrace{\sum_{\sigma \in \partial T} \mathbf{q}_{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{\sigma}}_{\text{ячейка-ячейка}} - \underbrace{\sum_{i=1, \dots, n_T} \mathbf{q}_{F_i, T}}_{\text{ячейка-трещина}} = \int_T \mathbf{g}^m dx,$$
$$\underbrace{\sum_{\sigma_j \in \partial T_i} \mathbf{q}_{F_i, \sigma_j}}_{\text{внутрирещ.}} + \underbrace{\sum_{j=1, \dots, n_T} \mathbf{q}_{F_{ij}, T}}_{\text{трещина-трещина}} + \underbrace{\mathbf{q}_{F_i, T}}_{\text{ячейка-трещина}} = \int_{T_i} \mathbf{g}^f dx,$$

$i = 1, \dots, n_T.$

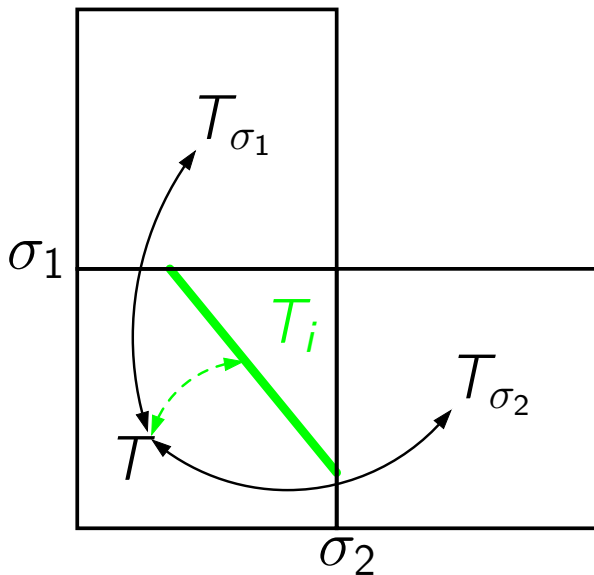


# Метод вложенных дискретных трещин (EDFM; L. Li et al., 2008)

Линейная двухточечная схема для всех типов потоков:

- $q_{F_i, T_1} = \hat{\lambda}_{F_i, T_1} (p_{T_1}^m - p_{T_{1,i}}^f)$  – поток между ячейкой пористой среды  $T_1$  и трещиной  $F_i$ , пересекающей  $T_1$ .
- $q_\sigma \cdot n_\sigma = \hat{\lambda}_\sigma (p_{T_1}^m - p_{T_2}^m)$  – поток между ячейками пористой среды  $T_1$  и  $T_2$  через их общую грань  $\sigma$ .
- $q_{F_i, \sigma_j} = \hat{\lambda}_{F_i, \sigma_j} (p_{T_{2,i},f}^f - p_{T_{1,i},f}^f)$  – поток внутри трещины  $F_i$  между виртуальными ячейками  $T_{1,i}, T_{2,i}$  с общей виртуальной гранью  $\sigma_j$ .
- $q_{F_i, F_j, T} = \hat{\lambda}_{F_i, F_j, T} (p_{T_i}^f - p_{T_j}^f)$  – поток между трещинами  $F_i, F_j$  внутри ячейки  $T$ , пересекаемой обеими трещинами.

# Поток “ячейка-трещина”



# Поток “ячейка-трещина”

$$q_{F_i, T} = \hat{\lambda}_{F_i, T} (p_T^m - p_{T, i}^m).$$

Гармоническое осреднение для мобильностей  $\hat{\lambda}_{F_i, T} = \frac{\lambda_{F_i} \lambda_{T, T_i}}{\lambda_{F_i} + \lambda_{T, T_i}}$ ,  
где <sup>1</sup> :

$$\lambda_{F_i} = A_{T_i} \frac{k_i^f}{w_i/2}, \quad \lambda_{T, T_i} = A_{T_i} \frac{n_{F_i} \cdot \mathbb{K}_T^m n_{F_i}}{\langle d \rangle_{T, F_i}}.$$

$$\langle d \rangle_{T, F_i} = \frac{\int x_{F_i}(x') dx'}{|T|}$$

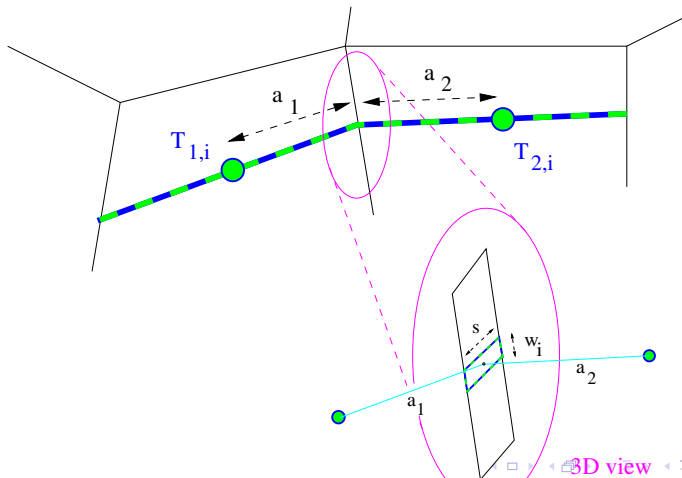
– осредненное расстояние по нормали к трещине до ячейки.

---

<sup>1</sup>L.Li, S.H.Lee. *Efficient Field-Scale Simulation of Black Oil in a Naturally Fractured Reservoir Through Discrete Fracture Networks...* –2008.

# Поток внутри трещины

$$q_{F_i,f} = \frac{k_i^f s w_i}{a_1 + a_2} \left( p_{T_{2,i},f}^f - p_{T_{1,i},f}^f \right).$$



# Монотонный EDFM (поток “ячейка-ячейка”)

- нелинейная монотонная двухточечная схема (NTPFA <sup>2</sup>):

$$\mathbf{q}_\sigma \cdot \mathbf{n}_\sigma = M_{\sigma,1} p_{T_1}^m - M_{\sigma,2} p_{T_2}^m;$$

- нелинейная компактная многоточечная схема с дискретным принципом максимума (NMPFA <sup>3</sup>):

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_\sigma \cdot \mathbf{n}_\sigma &= M_{\sigma,-,1} (p_{T_2}^m - p_{T_{2,1}}^m) + M_{\sigma,-,2} (p_{T_2}^m - p_{T_{2,2}}^m) = \\ &= M_{\sigma,+,1} (p_{T_1}^m - p_{T_{1,1}}^m) + M_{\sigma,+,2} (p_{T_1}^m - p_{T_{1,2}}^m). \end{aligned}$$

$M_\sigma = M_\sigma(p^m)$  могут зависеть от давления в соседних ячейках.

---

<sup>2</sup>Danilov A., Vassilevski Y. A monotone nonlinear finite volume method for diffusion equations on conformal polyhedral meshes. – 2009.

<sup>3</sup>Chernyshenko A., Vassilevski Y. A finite volume scheme with the discrete maximum principle for diffusion equations on polyhedral meshes. – 2014.

# Свойства *монотонного* EDFM

Для решения нелинейных систем используется метод Пикара.

## Теорема 1

Монотонный EDFM с NTPFA схемой для потоков Дарси внутри пористой среды *сохраняет неотрицательность решения во всей области дискретного решения, включая область трещин*<sup>4</sup>.

## Теорема 2

Монотонный EDFM с NMPFA схемой для потоков Дарси внутри пористой среды *гарантирует выполнение дискретного принципа максимума во всей области дискретного решения, включая область трещин*<sup>4</sup>.

<sup>4</sup>K.Nikitin & R.Yanbarisov. *Monotone embedded discrete fractures method for flow in porous media*. Journal of Computational and Applied Mathematics 364, 112353, 2020

# Проекционный EDFM (pEDFM; Tene et al., 2017)

- EDFM: некорректный учет низкопроницаемых трещин.
- Проекционный EDFM: **дополнительные потоки** между степенями свободы трещин и пористой среды.

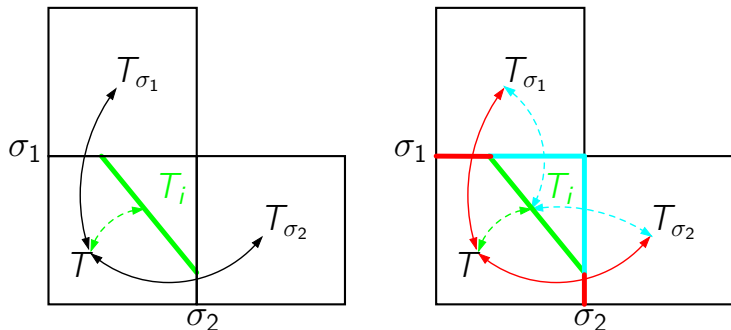


Рис.: Шаблоны для потоков между трещиной и ячейкой пористой среды: EDFM (слева) и pEDFM(справа).

# Стандартный EDFM

$$\underbrace{\sum_{\sigma \in \partial T} q_{\sigma} \cdot n_{\sigma}}_{\text{ячейка-ячейка}} - \underbrace{\sum_{i=1, \dots, n_T} q_{F_i, T}}_{\text{ячейка-трещина}} = \int_T g^m dx,$$

$$\underbrace{\sum_{f \in \partial T_i} q_{F_i, f}}_{\text{внутрирещ.}} + \underbrace{\sum_{j=1, \dots, n_T} q_{F_{ij}, T}}_{\text{трещина-трещина}} + \underbrace{q_{F_i, T}}_{\text{ячейка-трещина}} = \int_{T_i} g^f dx, \quad , i = 1, \dots, n_T.$$



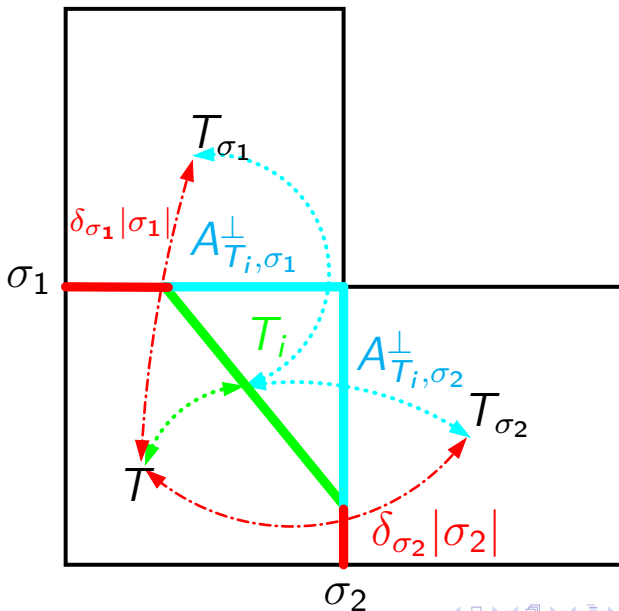
# Проекционный EDFM (pEDFM)

$$\underbrace{\sum_{\sigma \in \partial T} q_{\sigma} \cdot n_{\sigma}}_{\text{ячейка-ячейка}} - \underbrace{\sum_{i=1, \dots, n_T} q_{F_i, T}}_{\text{ячейка-трещина 1}} - \underbrace{\sum_{\sigma \in \partial T} \sum_{i=1, \dots, n_{T\sigma}} q_{F_i, T_{\sigma}}}_{\text{ячейка-трещина 2}} = \int_T g^m dx,$$

$$\underbrace{\sum_{f \in \partial T_i} q_{F_i, f}}_{\text{внутритрещ.}} + \underbrace{\sum_{j=1, \dots, n_T} q_{F_{ij}, T}}_{\text{трещина-трещина}} + \underbrace{q_{F_i, T}}_{\text{ячейка-трещина 1}} + \underbrace{\sum_{\sigma \in \partial T} q_{F_i, T_{\sigma}}}_{\text{ячейка-трещина 2}} = \int_{T_i} g^f dx,$$

$$i = 1, \dots, n_T.$$

# Дополнительные потоки (pEDFM)



## Монотонный проекционный EDFM

Для потока между ячейками пористой среды  $T_1$  и  $T_2$  через их общую грань  $\sigma$  используется:

- нелинейная монотонная двухточечная схема (NTPFA <sup>5</sup>):

$$q_\sigma \cdot n_\sigma = M_{\sigma,1} p_{T_1}^m - M_{\sigma,2} p_{T_2}^m;$$

- нелинейная компактная многоточечная схема с дискретным принципом максимума (NMPFA <sup>6</sup>):

$$\begin{aligned} q_\sigma \cdot n_\sigma &= M_{\sigma,-,1} (p_{T_2}^m - p_{T_2,1}^m) + M_{\sigma,-,2} (p_{T_2}^m - p_{T_2,2}^m) = \\ &= M_{\sigma,+,1} (p_{T_1}^m - p_{T_1,1}^m) + M_{\sigma,+,2} (p_{T_1}^m - p_{T_1,2}^m). \end{aligned}$$

$M_\sigma = M_\sigma(p^m)$  могут зависеть от давления в соседних ячейках.

<sup>5</sup>Danilov A., Vassilevski Y. A monotone nonlinear finite volume method for diffusion equations on conformal polyhedral meshes. – 2009.

<sup>6</sup>Chernyshenko A., Vassilevski Y. A finite volume scheme with the discrete maximum principle for diffusion equations on polyhedral meshes. – 2014.

## Монотонный проекционный EDFM

Для потока между ячейками пористой среды  $T_1$  и  $T_2$  через их общую грань  $\sigma$  используется:

- нелинейная монотонная двухточечная схема (NTPFA <sup>5</sup>):

$$\mathbf{q}_\sigma \cdot \mathbf{n}_\sigma = \delta_\sigma (M_{\sigma,1} p_{T_1}^m - M_{\sigma,2} p_{T_2}^m);$$

- нелинейная компактная многоточечная схема с дискретным принципом максимума (NMPFA <sup>6</sup>):

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_\sigma \cdot \mathbf{n}_\sigma &= \delta_\sigma (M_{\sigma,-,1} (p_{T_2}^m - p_{T_2,1}^m) + M_{\sigma,-,2} (p_{T_2}^m - p_{T_2,2}^m)) = \\ &= \delta_\sigma (M_{\sigma,+,1} (p_{T_1}^m - p_{T_1,1}^m) + M_{\sigma,+,2} (p_{T_1}^m - p_{T_1,2}^m)). \end{aligned}$$

$M_\sigma = M_\sigma(p^m)$  могут зависеть от давления в соседних ячейках.

<sup>5</sup>Danilov A., Vassilevski Y. A monotone nonlinear finite volume method for diffusion equations on conformal polyhedral meshes. – 2009.

<sup>6</sup>Chernyshenko A., Vassilevski Y. A finite volume scheme with the discrete maximum principle for diffusion equations on polyhedral meshes. – 2014.

# Свойства *монотонного* проекционного EDFM

Для решения нелинейных систем используется метод Пикара. Если он сходится, то для итогового решения верна

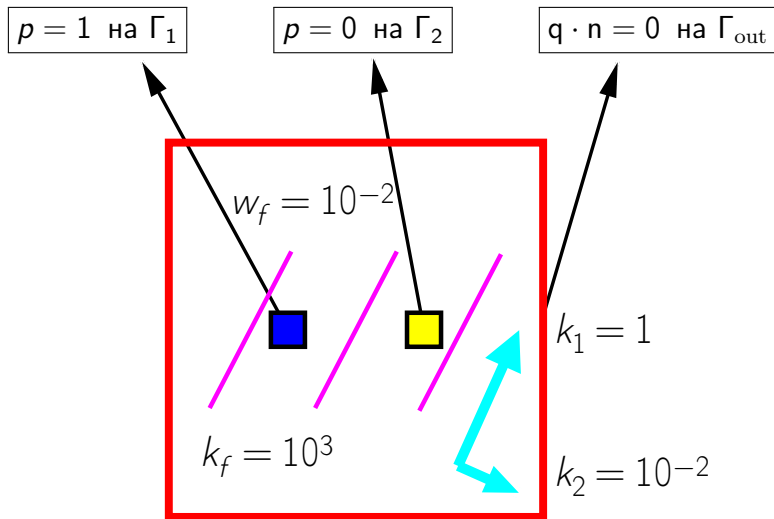
## Теорема 3

Монотонный проекционный EDFM с NMPFA схемой для потоков Дарси внутри пористой среды *гарантирует выполнение дискретного принципа максимума во всей области дискретного решения, включая область трещин*<sup>7</sup>.

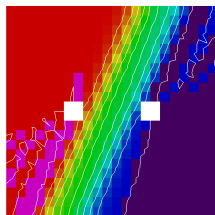
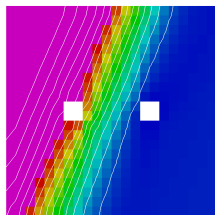
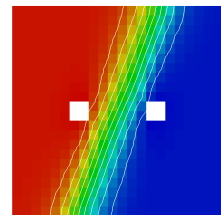
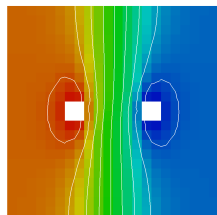
---

<sup>7</sup>R.Yanbarisov & K.Nikitin. *Projection-based monotone embedded discrete fracture method for flow and transport in porous media*. Journal of Computational and Applied Mathematics 392, 113484, 2021

# Тест на дискретный принцип максимума



# Поля давлений, максимумы/минимумы в трещинах и пористой среде



EDFM+TPFA

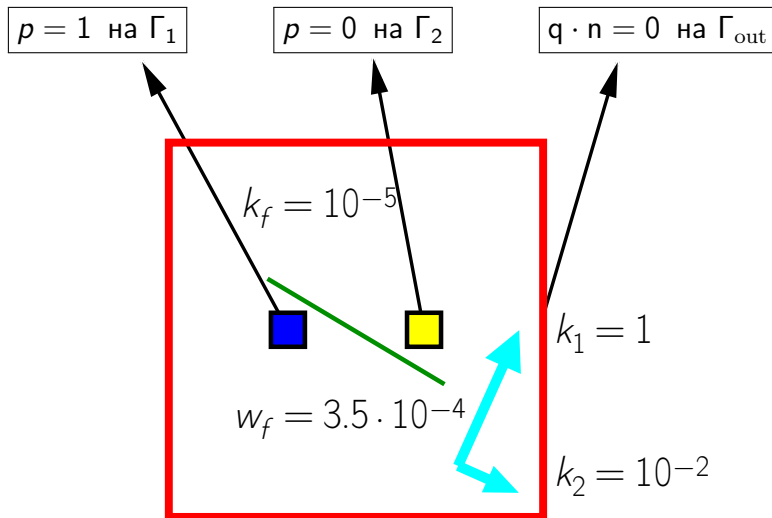
EDFM+NMPFA

EDFM+NTPFA

EDFM+MPFA-O

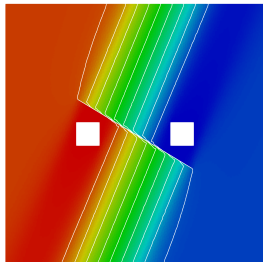
	$\min_{\Omega^m} p^m$	$\max_{\Omega^m} p^m$	$\min_{\Omega^f} p^f$	$\max_{\Omega^f} p^f$
EDFM+TPFA	0.0245	0.9755	0.1376	0.8534
EDFM+NMPFA	0.0074	0.9925	0.0244	0.9750
EDFM+NTPFA	0.0063	1.7395	0.1131	1.3636
EDFM+MPFA-O	-0.0459	1.0442	-0.0015	0.9995

# Тест на дискретный принцип максимума

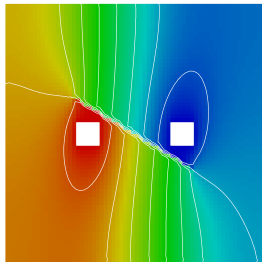




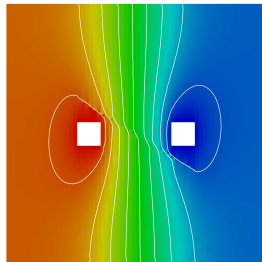
Референтное решение



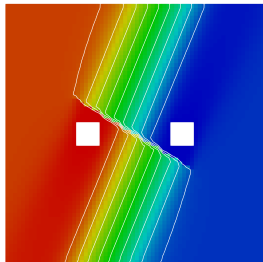
pEDFM+TPFA



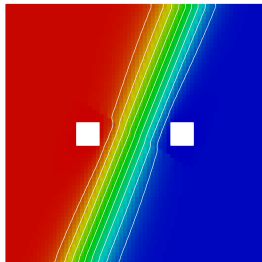
EDFM+TPFA



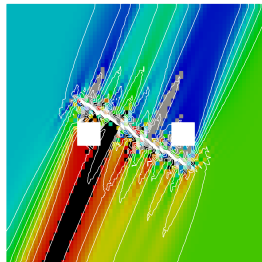
pEDFM+NMPFA



EDFM+NMPFA



pEDFM+MPFA-O



# Тест на сходимость

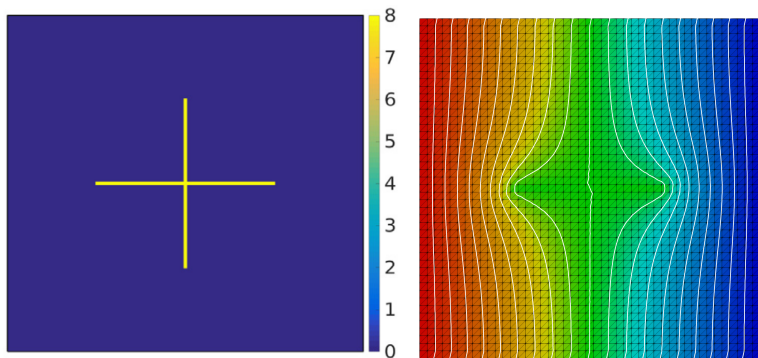


Рис.: Проницаемости сред в логарифмическом масштабе,  $\log_{10}(k)$  (слева). Решение методом EDFM+NTPFA на треугольной призматической сетке (справа).

# Тест на сходимость

Две последовательности измельчаемых сеток с шагом

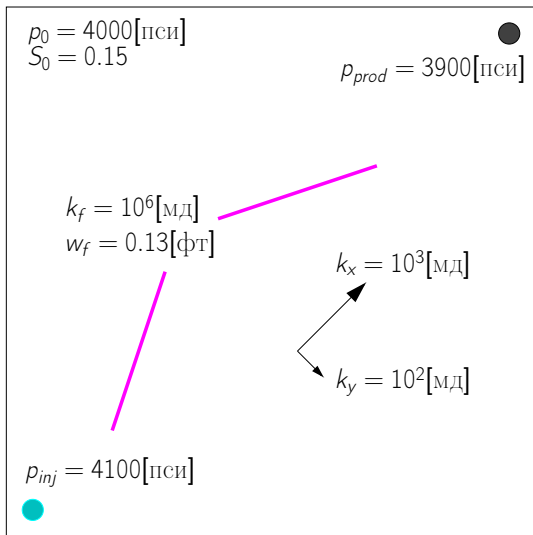
$$h = 1/9, 1/27, 1/81, 1/243:$$

- равномерные квадратные сетки (К-ортогональные сетки, используется EDFM+TPFA)
- равномерные треугольные сетки (не-К-ортогональные сетки, сравниваются результаты EDFM+TPFA и EDFM+NTPFA)

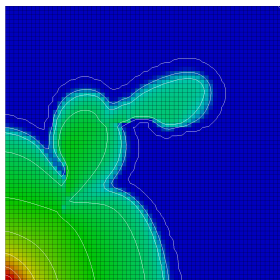
$L/h$	Куб. сетки	Треуг. призм. сетки	
	TPFA = NTPFA	NTPFA	TPFA
9	0.02989	0.02418	0.0399
27	0.01068	0.00836	0.0300
81	0.00407	0.00301	0.0272
243	0.00153	0.00121	0.02644
order	0.9	0.95	—

Таблица: Ошибки в  $L_2$ -норме для двух типов сеток.

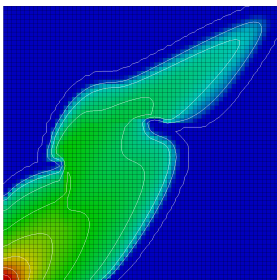
# Постановка теста



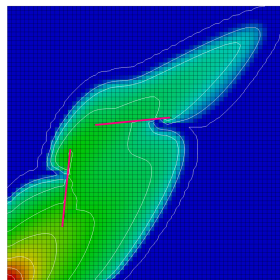
Насыщенность воды ( $T = 45$  дней), времена расчета.



EDFM+TPFA



EDFM+NTPFA



REFERENCE

	$t_{total}$ [c]	$t_{precond}$ [c]	$t_{solver}$ [c]	liters	niters
EDFM+TPFA	316	124	99	46250	1662
EDFM+NTPFA	405	95	188	114375	1635

# Глава 2

## Численная модель течения неньютоновских несжимаемых жидкостей

# Математическая модель

несжимаемая жидкость со свободной поверхностью

Сохранение импульса и массы в области  $\Omega(t) \in \mathbb{R}^3$ ,  $t \in (0, T]$  с границей  $\partial\Omega(t) = \Gamma_D \cup \Gamma(t)$ :

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g} \quad \text{в } \Omega(t)$$
$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$\boldsymbol{\tau}$  – девиаторный тензор напряжений, задающий (нелинейную) реологию жидкости.

Начальные условия:

$$\Omega(0) = \Omega^0, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}^0.$$

Условия прилипания на стенках:

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{на } \Gamma_D.$$

# Математическая модель

вязкопластичная жидкость Хершеля-Балкли

$$\boldsymbol{\tau} = (K|\mathbf{D}|^{n-1} + \tau_s|\mathbf{D}|^{-1}) \mathbf{D} \leftrightarrow |\boldsymbol{\tau}| > \tau_s$$
$$\mathbf{D} = 0 \leftrightarrow |\boldsymbol{\tau}| \leq \tau_s$$

- $|\mathbf{D}| = \left(2 \sum_{1 \leq i, j \leq 3} D_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$  – скорость сдвиговых деформаций,  
 $\mathbf{D} = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2}$  – тензор скоростей деформаций.
- $K$  – индекс согласованности [Па · с<sup>-n</sup>],  $\tau_s$  – предел текучести [Па],  $n$  – индекс течения.

При  $n = 1$   $K$  совпадает с вязкостью жидкости;  $n = 1, \tau_s = 0$  – ньютоновская жидкость.



# Математическая модель

вязкоэластичного материала

Совмещение моделей несжимаемых вязкоэластичной жидкости Олдройда-Б и гиперупругого твердого тела нео-Гука:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &= (1 - \alpha)\boldsymbol{\tau}_1 + \alpha\boldsymbol{\tau}_2, \\ \boldsymbol{\tau}_1 + \lambda_1 \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}_1 &= 2\mu_0(\mathbf{D} + \lambda_2 \overset{\nabla}{\mathbf{D}}), \\ \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}_2 &= 2\frac{\mu_0}{\lambda_1}\mathbf{D},\end{aligned}$$

$0 \leq \alpha \leq 1$  - параметр совмещения моделей,  $\mathbf{D} = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2}$  - тензор скоростей деформаций,  $\mu_0$  - полная вязкость,  $\lambda_1, \lambda_2$  - времена релаксации и задержки жидкости Олдройда.

Производная Олдройда  $\overset{\nabla}{\mathbf{C}}$ :

$$\overset{\nabla}{\mathbf{C}} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{C} - (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{C} - \mathbf{C}(\nabla \mathbf{u})$$

# Математическая модель

вязкоэластичного материала

Реологическое расщепление  $\tau$  на вязкое и эластичное слагаемое:

$$\tau = 2(1 - \alpha)\beta\mu_0 D + \frac{\mu_0}{\lambda_1}(1 - (1 - \alpha)\beta)(A_2 - I)$$

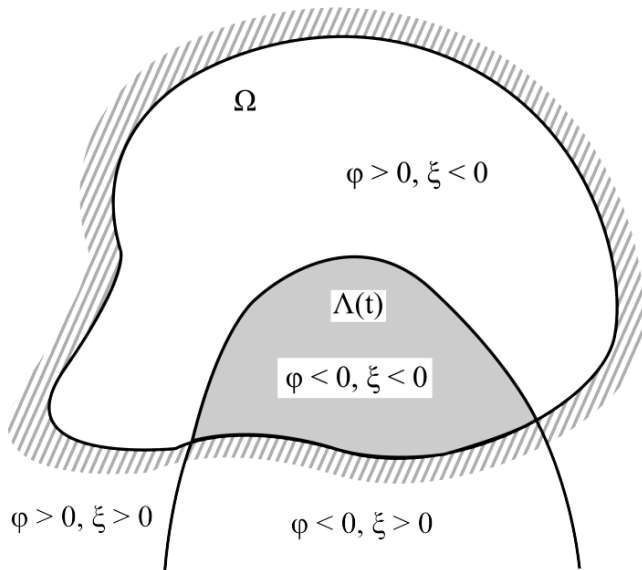
Расщепление  $\tau$  приводит к нестационарному уравнению для  $A_2$ :

$$\dot{A}_2 = \frac{(1 - \alpha)(1 - \beta) I - A_1}{1 - (1 - \alpha)\beta} \frac{1}{\lambda_1},$$

$$\dot{A}_1 = \frac{I - A_1}{\lambda_1},$$

$\beta = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \leq 1$  – параметр задержки модели Олдройда-Б;  $A_1, A_2$  – конформационные тензоры эластичных деформаций.

# Представление свободной поверхности



# Представление свободной поверхности

Неявное отслеживание свободной поверхности  $\Gamma(t)$  функцией уровня:

$$\phi(t, \mathbf{x}) \begin{cases} < 0, & \mathbf{x} \in \Omega(t) \\ > 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega(t)} \\ = 0, & \mathbf{x} \in \Gamma(t) \end{cases} \quad \forall t \in [0, T].$$

Функция уровня для  $t > 0$  удовлетворяет уравнению переноса:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \phi = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^3 \times (0, T].$$

# Граничные условия на свободной поверхности

- Условие баланса сил на  $\Gamma(t)$  :  $-p\mathbf{n}_\Gamma + \boldsymbol{\tau}\mathbf{n}_\Gamma = \zeta\kappa\mathbf{n}_\Gamma$   
разбивается на условия:

$$-p = \zeta\kappa,$$

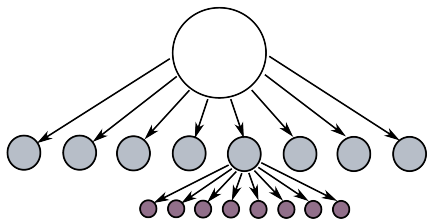
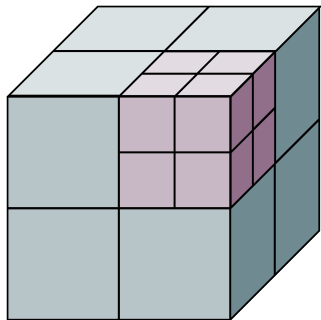
$$\boldsymbol{\tau}\mathbf{n}_\Gamma = \mathbf{0}.$$

$\mathbf{n}_\Gamma$  – вектор внешней нормали к  $\Gamma(t)$ ,

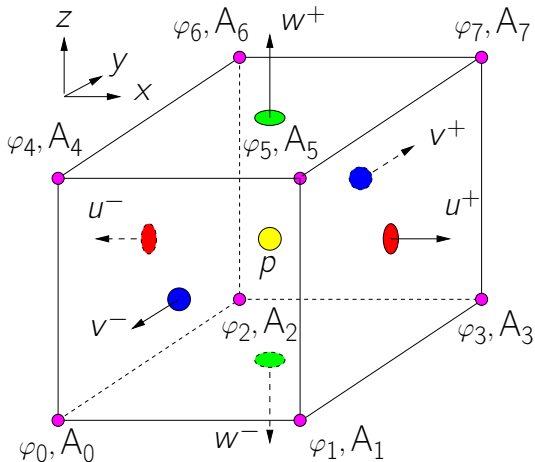
$\kappa$  – сумма главных кривизн на поверхности,

$\zeta$  – коэф-т поверхностного натяжения.

# Расчетные сетки типа восьмеричное дерево



# Разнесенное расположение неизвестных



# Численный метод приближенного решения задачи

$u^n, p^n, \varphi^n, \tau^n$  – аппроксимации полей в  $t = t^n$ .

$$\Omega^n = \{x \in \mathbb{R}^3 : \phi^n(x) < 0\}.$$

Нахождение полей в момент  $t^{n+1}$  при известных  $u^n, p^n, \phi^n, \tau^n$  производится в два шага:

- найти новую функцию уровня  $\varphi^{n+1}$  и область  $\Omega^{n+1}$ ;
- решить уравнения импульса, массы (и состояния) для нахождения  $u^{n+1}, p^{n+1}, \tau^{n+1}$ .



# Решение уравнений импульса, массы и состояния

Неявная схема дискретизации

$$\rho \left( \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right]^{n+1} + \left( \widetilde{\mathbf{u}^{n+1}} \cdot \nabla \right) \mathbf{u}^{n+1} \right) - \nabla \cdot \widehat{\boldsymbol{\tau}}^{n+1} + \nabla p^{n+1} = \rho \mathbf{g},$$
$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0,$$

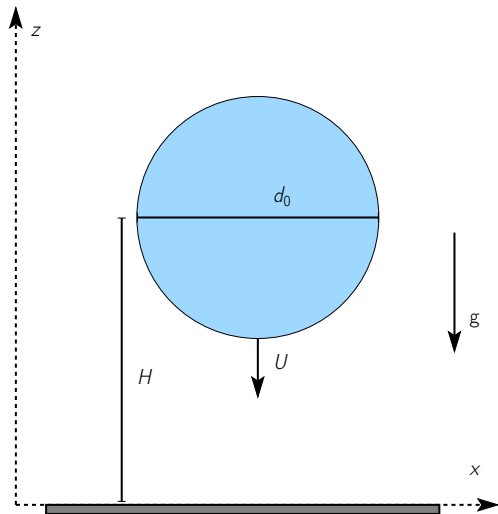
с линеаризацией конвективного слагаемого  $\widetilde{\mathbf{u}^{n+1}} = \mathbf{u}^n + \xi(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1})$  и обратной разностью 2 порядка для дискретизации по времени ( $\xi = \Delta t^n / \Delta t^{n-1}$ ):

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right]^{n+1} = \frac{\alpha_1 \mathbf{u}^{n+1} + \alpha_2 \mathbf{u}^n + \alpha_3 \mathbf{u}^{n-1}}{\Delta t^n}, \quad \alpha_1 = \frac{2\xi + 1}{\xi + 1}, \quad \alpha_2 = -(\xi + 1), \quad \alpha_3 = \frac{\xi^2}{\xi + 1}.$$

# Реализация предложенной технологии

- Исследовательский программный пакет Floctree ([floctree.com](http://floctree.com)): C++, OpenMP, программная платформа INMOST ([inmost.org](http://inmost.org)).
- Авторы и разработчики проекта: к.ф.-м.н. Терехов К.М., к.ф.-м.н. Никитин К.Д., асп. Янбарисов Р.М.
- Координатор проекта: чл.-корр. РАН, проф. Василевский Ю.В.

# Падение вязкоэластичной капли на твердую поверхность



# Падение вязкоэластичной капли на твердую поверхность

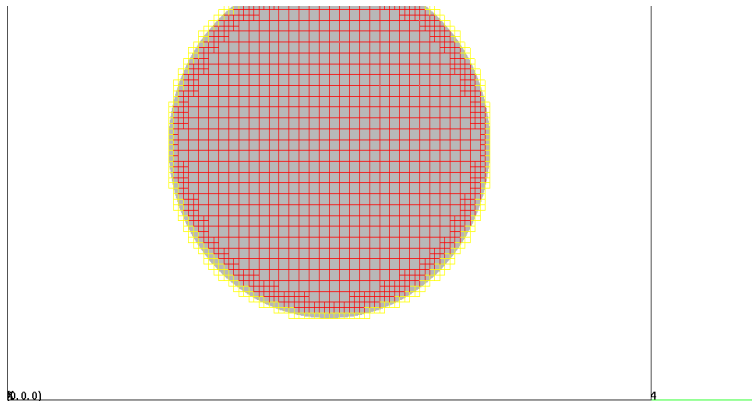


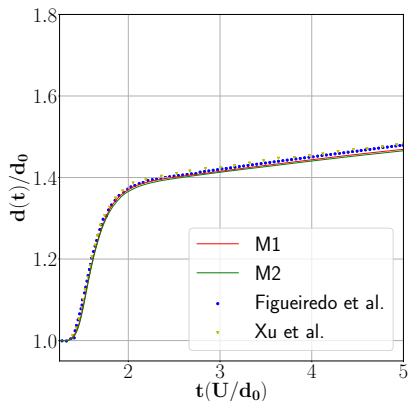
Рис.: Анимация численного эксперимента.

# Падение вязкоэластичной капли на твердую поверхность

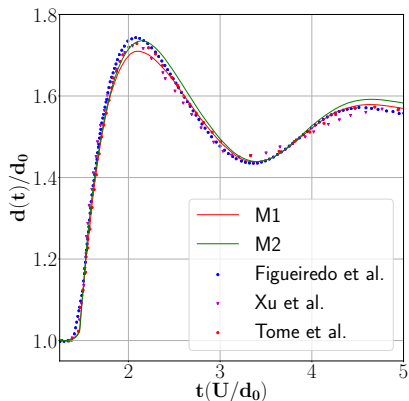
$d_0$ [м]	$H$ [м]	$U$ [м/с]	$\lambda_1$ [с]	$\mu_0$ [Па · с]	$\rho$ [кг/м <sup>3</sup> ]	$g$ [м/с <sup>2</sup> ]
0.02	0.04	1	0.02	4	1000	9.81

- Сравнение безразмерного диаметра капли  $d(t)/d_0$  от безразмерного времени  $t(U/d_0)$  для капли из ньютоновской жидкости и жидкости Олдройда-Б с результатами из литературы.
- Использовались две динамически перестраиваемые расчетные сетки М1 ( $h_{min} = d_0/32, h_{max} = d_0/16$ ) и М2 ( $h_{min} = d_0/64, h_{max} = d_0/32$ ).

# Падение вязкоэластичной капли на твердую поверхность

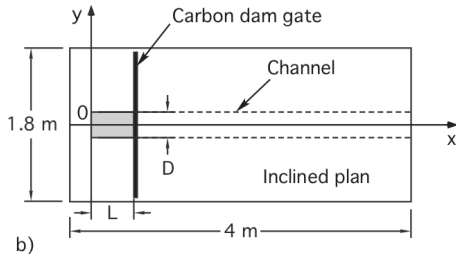
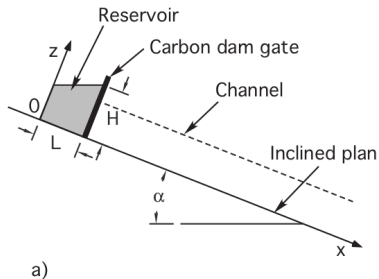


Вязкая жидкость ( $\beta = 1$ )



Вязкоэластичная жидкость ( $\beta = 0.1$ )

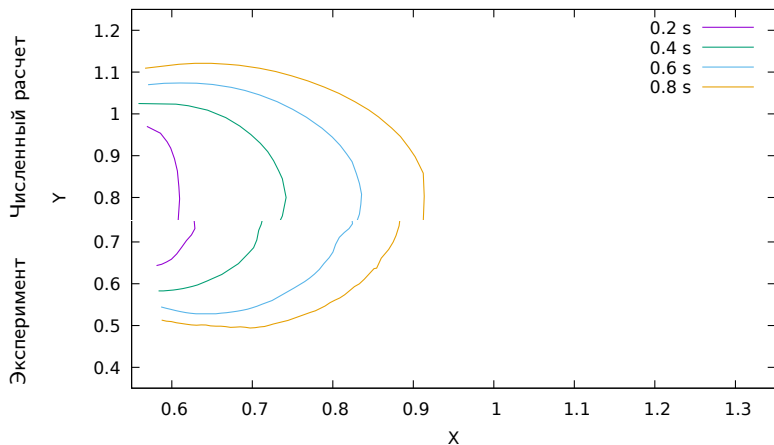
# Прорыв дамбы с вязкопластичной жидкостью <sup>8</sup>



$L$ [м]	$D$ [м]	$H$ [м]	$\rho$ [кг/м <sup>3</sup> ]	$K$ [Па · с <sup>-n</sup> ]	$n$	$\tau_s$ [Па]
0.51	0.3	0.3	936.8	75.84	0.579	109

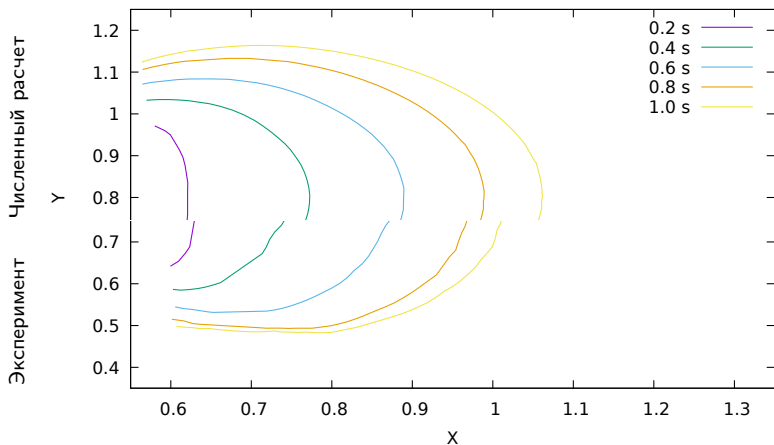
<sup>8</sup>Ancey C., Cochard S. The dam-break problem for Herschel–Bulkley viscoplastic fluids down steep flumes //JNNFM. – 2009.

# Прорыв дамбы, контактная линия, угол наклона плоскости – $\alpha = 0^\circ$

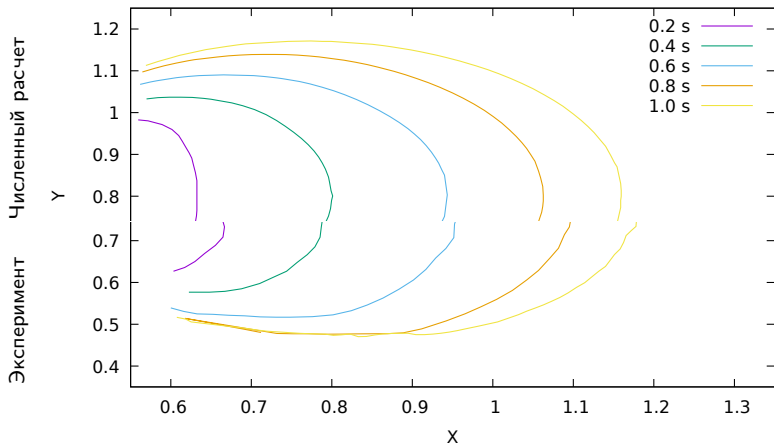




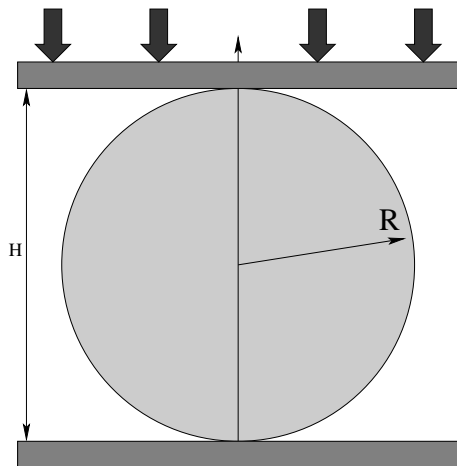
# Прорыв дамбы, контактная линия, угол наклона плоскости – $\alpha = 6^\circ$



# Прорыв дамбы, контактная линия, угол наклона плоскости – $\alpha = 12^\circ$



# Компрессия многоклеточного сфероида



# Компрессия многоклеточного сфероида

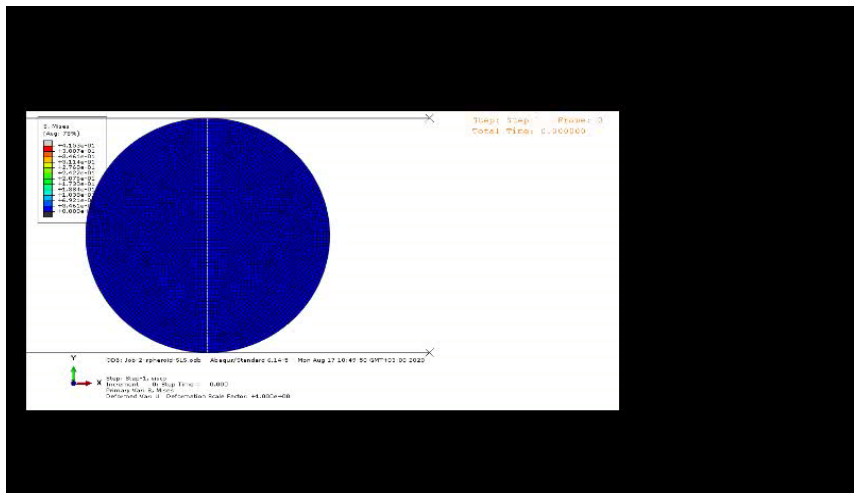


Рис.: Анимация численного эксперимента.

# Описание эксперимента

Эксперимент состоит из трех этапов:

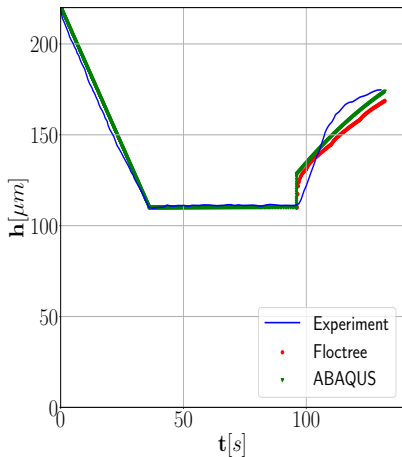
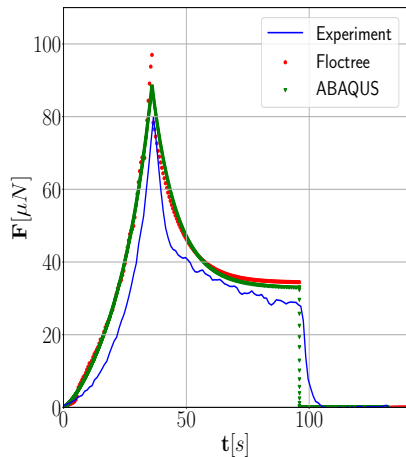
- Этап компрессии (36 сек) – верхняя пластина движется к нижней с постоянной скоростью.
- Этап удержания (60 сек) – пластины неподвижны.
- Этап декомпрессии (36 сек) – верхняя пластина удаляется от нижней.

Выходные данные:

- сила реакции на верхнюю пластину;
- форма и высота сфероида.

$\alpha$	$\beta$	$\lambda_1[\text{с}]$	$\mu_0[\text{кПа} \cdot \text{с}]$	$\rho[\text{кг} \cdot \text{м}^{-3}]$
0.2	0.2	10	30	1000

# Сила реакции (слева) и высота сфероида (справа)



# Распределение напряжений фон Мизеса ( $t = 132$ с)

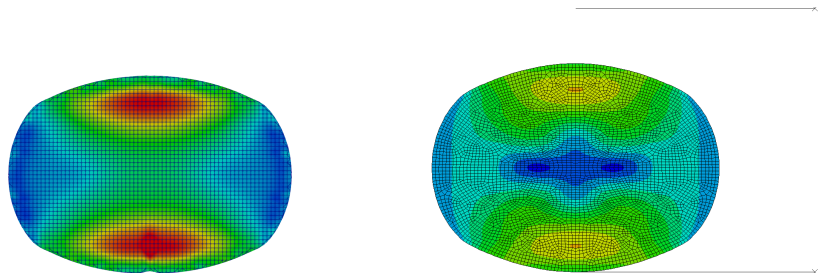


Рис.: Вязкоэластичный материал (Floctree, слева) и твердое тело (ABAQUS, справа).

# Основные результаты диссертации

- 1 Исследована и разработана монотонная численная модель учета трещин в задачах фильтрации в трещиноватых пористых средах.
- 2 Предложена и исследована полуявная численная модель течения неньютоновских несжимаемых жидкостей со свободной границей.
- 3 Предложенные численные модели были реализованы в программных комплексах и верифицированы на серии задач.



# Список публикаций

- Янбарисов Р.М. Параллельный метод вложенных дискретных трещин для моделирования течений в трещиноватых пористых средах // Компьютерные исследования и моделирование, 2021, т. 13, № 4, с. 735-745
- Yanbarisov R. M., Nikitin K. D. Projection-based monotone embedded discrete fracture method for flow and transport in porous media // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2021. – V. 392. – P. 113484 – **Q1**.
- Yanbarisov R. et al. Numerical Modelling of Multicellular Spheroid Compression: Viscoelastic Fluid vs. Viscoelastic Solid // Mathematics. – 2021. – V. 9. – No. 18. – P. 2333 – **Q1**.
- Nikitin K. D., Yanbarisov R. M. Monotone embedded discrete fractures method for flows in porous media // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2020. – V. 364. – P. 112353 – **Q1**.
- Nikitin K., Vassilevski Y., Yanbarisov R. An implicit scheme for simulation of free surface non-Newtonian fluid flows on dynamically adapted grids // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. – 2021. – V. 36. – No. 3. – P. 165-176 – **Q2**.
- Berre I. et al. Verification benchmarks for single-phase flow in three-dimensional fractured porous media // Advances in Water Resources. – 2021. – V. 147. – P. 103759 – **Q1**.
- Nikitin K. D., Yanbarisov R. M. Monotone Embedded Discrete Fracture Method for the Two-Phase Flow Model // International Conference on Finite Volumes for Complex Applications. – Springer, Cham, 2020. – P. 557-564.

## Приложение

# Двухфазная фильтрация

- 1 Сохранение массы каждой фазы:

$$\frac{\partial \rho_\alpha \varphi S_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = q_\alpha, \quad \alpha = w, o. \quad (1)$$

- 2 Закон Дарси:

$$\mathbf{u}_\alpha = -\lambda_\alpha \mathbb{K}(\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \mathbf{g} \nabla z), \quad \alpha = w, o. \quad (2)$$

- 3 Две фазы заполняют пустоты:

$$S_w + S_o = 1. \quad (3)$$

- 4 Разность давлений фаз равна капиллярному давлению  $p_c = p_c(S_w)$ :

$$p_o - p_w = p_c. \quad (4)$$

# Двухфазная фильтрация

Входные параметры задачи:

- $\mathbb{K}$  – тензор абсолютной проницаемости,
- $\varphi(p)$  – пористость,
- $\rho_\alpha(p) = \rho_{\alpha,0}/B_\alpha(p)$  – плотность,
- $B_\alpha(p)$  – коэффициент объема пласта,
- $\lambda_\alpha(p, S) = k_{r\alpha}(S)/\mu_\alpha(p)$  – мобильность,
- $k_{r\alpha}(S)$  – относительная проницаемость,
- $\mu_\alpha(p)$  – вязкость,
- $q_\alpha$  – источники/стоки скважин.

# EDFM для двухфазной фильтрации

- Области  $\Omega^m$  пористой среды и  $\Omega^f$  трещин с неизвестными в пористой среде  $\rho_\alpha^m, S_\alpha^m$  и  $n$  неизвестными в трещинах  $\rho_{\alpha,i}^f, S_{\alpha,i}^f, i = 1 \dots n$ , где  $n$  - число трещин;
- Используется неизменяемая входная сетка для пористой среды и виртуальные сетки для трещин;
- Уравнения метода:

$$\frac{\partial \rho_\alpha \varphi^m S_\alpha^m}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha^{mm}) + \operatorname{div}(\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha^{mf}) = q_\alpha^m, \quad \text{в } \Omega^m, \quad \alpha = w, o,$$

$$\frac{\partial \rho_\alpha \varphi^f S_\alpha^f}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha^{fm}) + \operatorname{div}(\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha^{ff}) = q_\alpha^f, \quad \text{в } \Omega^f, \quad \alpha = w, o.$$

# Двухфазная фильтрация: дискретизация

Полностью неявная схема для решения связанных уравнений.  
Противопотоковая аппроксимация мобильностей.

Для потока внутри пористой среды с нелинейной монотонной двухточечной схемой:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\rho_{\alpha} u_{\alpha}^{mm}) \approx & \operatorname{upw} \left[ \rho_{\alpha}^{n+1}(p^m) \lambda_{\alpha}^{n+1}(S^m, p^m), (M_{+}(p^m) p_{+}^m - M_{-}(p^m) p_{-}^m) \right] \\ & - \operatorname{upw} \left[ \rho_{\alpha}^{n+1}(p^m) \lambda_{\alpha}^{n+1}(S^m, p^m), (M_{+}(z) \rho_{+} g z_{+} - M_{-}(z) \rho_{-} g z_{-}) \right]. \end{aligned}$$

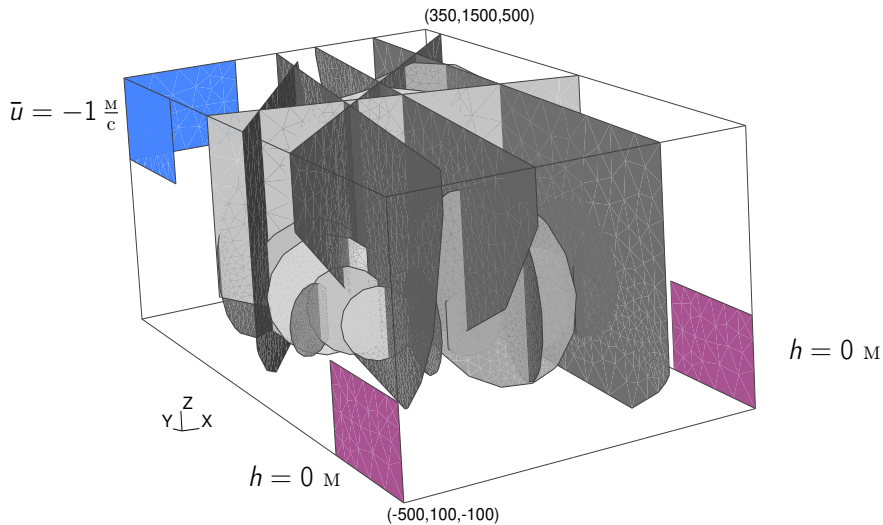
Для потоков между трещиной и пористой средой:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\rho_{\alpha} u_{\alpha}^{mf}) \approx & \operatorname{upw}_{mf} \left[ \rho_{\alpha}^{n+1}(p) \lambda_{\alpha}^{n+1}(S, p), M_T^{mf} (p^m - p^f) \right] \\ & - \operatorname{upw}_{mf} \left[ \rho_{\alpha}^{n+1}(p) \lambda_{\alpha}^{n+1}(S, p), M_T^{mf} (\rho_m g z_m - \rho_f g z_f) \right]. \end{aligned}$$

Для потоков внутри одной трещины:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\rho_{\alpha} u_{\alpha}^{ff}) \approx & \operatorname{upw} \left[ \rho_{\alpha}^{n+1}(p^f) \lambda_{\alpha}^{n+1}(S^f, p^f), M^{ff} (p_{+}^f - p_{-}^f) \right] \\ & - \operatorname{upw} \left[ \rho_{\alpha}^{n+1}(p^f) \lambda_{\alpha}^{n+1}(S^f, p^f), M^{ff} (\rho_{+} g z_{+} - \rho_{-} g z_{-}) \right]. \end{aligned}$$

# Масштабируемость *монотонного* EDFM



# Масштабируемость *монотонного* EDFM

- $\Omega^m = (-500 \text{ м}, 350 \text{ м}) \times (100 \text{ м}, 1500 \text{ м}) \times (-100 \text{ м}, 500 \text{ м})$ .
- Ширина  $w_f = 10^{-2} \text{ м}$  и проницаемость всех трещин  $\mathbb{K}^f = k^f l$ ,  $k^f = 10^4 \text{ м}^2$  одинаковы.
- Проницаемость пористой среды однородна и анизотропна:

$$\kappa^m = R \left( \frac{\pi}{4} \right) D R \left( \frac{\pi}{4} \right)^T, R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Расчетная сетка  $68 \times 112 \times 30$  из 228480 прямоугольных параллелепипедов.
- Итерационный метод BiCGSTAB( $l$ ) с блочным предобуславливателем KZBILU2 методом неполной факторизации второго порядка.
- Метод Ньютона до падения невязки в  $10^4$  раз.

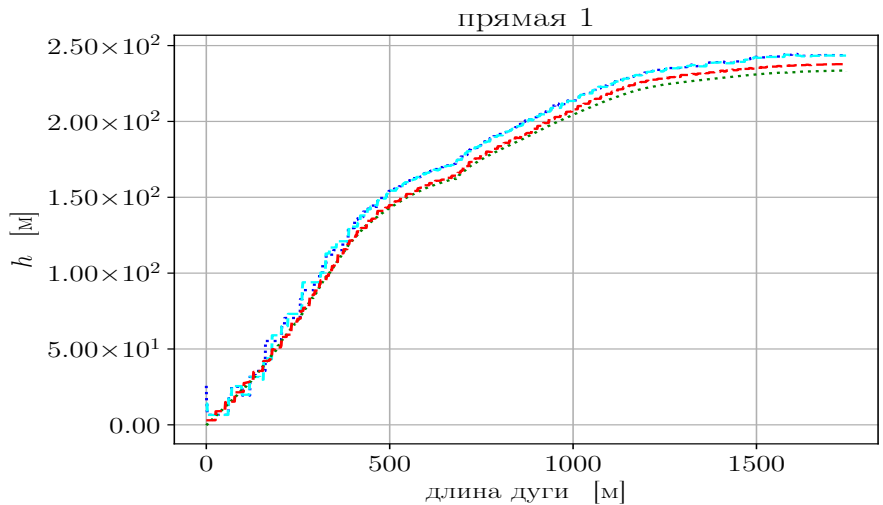


# Масштабируемость *монотонного* EDFM

**Таблица:** Времена на: построение матрицы системы  $t_{mat}$ , решение системы  $t_{sol}$ , обмен данными решения  $t_{exch}$ , общее время решения  $t_{tot}$ ; число линейных  $N_{liters}$  и нелинейных  $N_{niters}$  итераций, ускорение  $S$ .

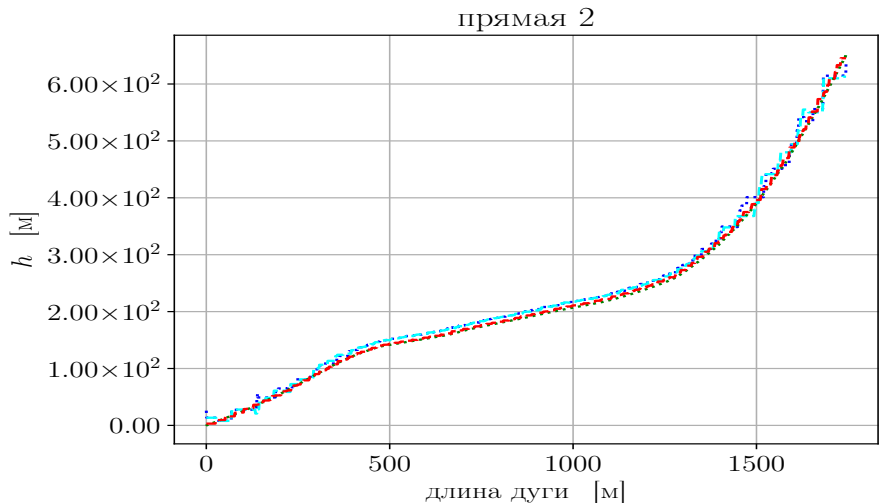
$N_{proc}$	$t_{mat}$	$t_{sol}$	$t_{exch}$	$t_{tot}$	$N_{niters}$	$N_{liters}$	$S$
1	4.569	12.561	1.447	18.637	4	344	1
2	3.170	7.486	0.901	11.577	4	405	1.61
4	2.314	4.336	0.582	7.242	4	646	2.57
8	2.068	3.075	0.469	5.619	4	689	3.32
16	2.053	1.980	0.384	4.422	4	712	4.21
32	1.607	1.272	0.219	3.102	4	716	6.01
64	0.859	0.642	0.141	1.646	4	789	11.32
128	0.572	0.518	0.090	1.182	4	939	15.77

# Гидравлический напор вдоль диагоналей области



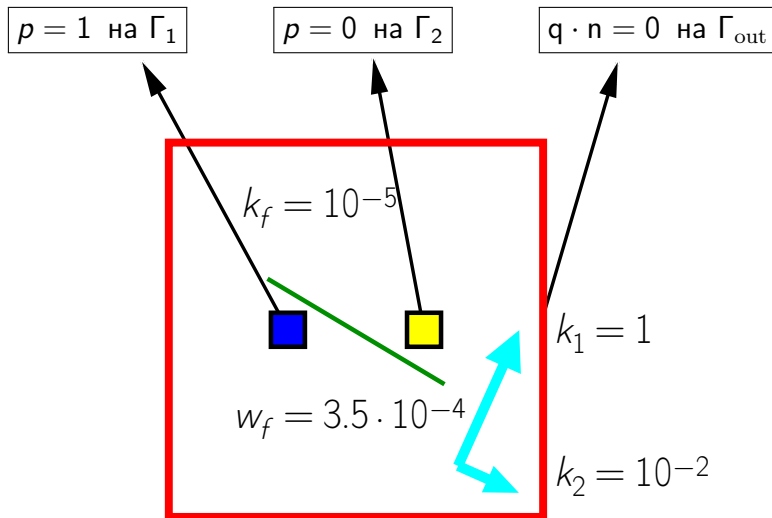
USTUTT-MPFA    LANL-MFD    UNICAMP-Hybrid\_Hdiv    INM-EDFM

# Гидравлический напор вдоль диагоналей области



USTUTT-MPFA    LANL-MFD    UNICAMP-Hybrid\_Hdiv    INM-EDFM

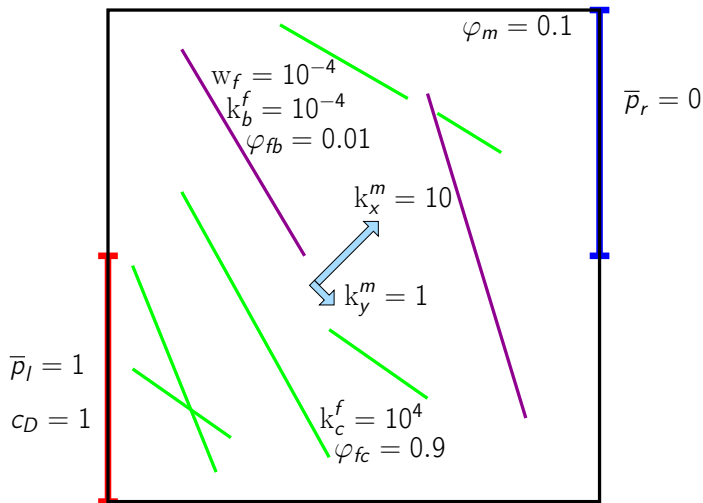
# Тест на дискретный принцип максимума



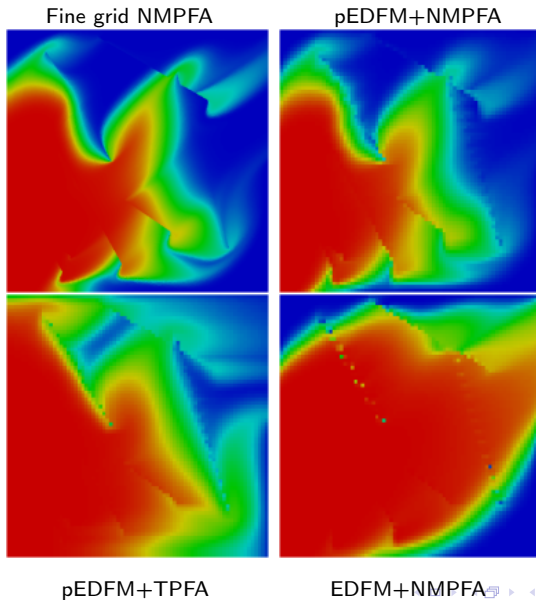
# Максимумы/минимумы решения и число нелинейных итераций

	$\min_{\Omega^m} p^m$	$\max_{\Omega^m} p^m$	$\min_{\Omega^f} p^f$	$\max_{\Omega^f} p^f$	niters	liters
pEDFM+...						
TPFA	0.0010	0.9992	0.0054	1.0000		
MPFA-O	-1.9435	3.1867	-1.9385	2.1828		
NTPFA	0.0003	1.1247	0.0012	1.0000	6	309
NMPFA	0.0001	0.9999	0.0008	1.0000	131	412
EDFM+...						
TPFA	0.0063	0.9954	0.0285	1.0000		
NMPFA	0.0006	0.9997	0.0019	1.0000	78	333
Решение на мелкой сетке с разрешенной трещиной						
NMPFA	0.0000	1.0000	0.0000	1.0000		

# Фильтрация и перенос примеси в анизотропной среде с блокирующими трещинами



# Поле концентраций в $T = 0.025$



## Граничные условия на свободной поверхности

- Условие баланса сил на  $\Gamma(t)$  :  $-p\mathbf{n}_\Gamma + \boldsymbol{\tau}\mathbf{n}_\Gamma = \zeta\kappa\mathbf{n}_\Gamma$   
разбивается на условия:

$$-p = \zeta\kappa, \boldsymbol{\tau}\mathbf{n}_\Gamma = \mathbf{0}.$$

Последнее условие можно переписать в виде:

$$(2(1 - \alpha)\beta\mu_0 D + \frac{\mu_0}{\lambda_1}(1 - (1 - \alpha)\beta)A_2)\mathbf{n}_\Gamma = 0.$$

$\mathbf{n}_\Gamma$  – вектор внешней нормали к  $\Gamma(t)$ ,  $\kappa$  – сумма главных кривизн на поверхности,  $\zeta$  – коэф-т поверхностного натяжения.

- На твердых границах для  $A_1, A_2$  используются однородные условия Неймана:

$$\frac{\partial A_i}{\partial \mathbf{n}} = 0, i = 1, 2.$$