

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт
вычислительной математики им. Г.И.Марчука Российской академии наук

На правах рукописи

УДК 519.63

Янбарисов Руслан Маратович

**Методы конечных объемов
для гидродинамических задач в областях
с не разрешаемыми сеткой границами**

Специальность 1.1.6 –
«Вычислительная математика»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

к. ф.-м. н.

К.Д. Никитин

Москва – 2021

Оглавление

Введение	5
Глава 1. Монотонный метод вложенных дискретных трещин для задач многофазной фильтрации	14
1.1. Введение	14
1.2. Математическая модель однофазной фильтрации в трещино- ватой пористой среде	16
1.3. Монотонный метод вложенных дискретных трещин для задачи однофазной фильтрации	17
1.3.1. Поток между пористой средой и трещиной	21
1.3.2. Поток внутри пористой среды	22
1.3.3. Поток внутри трещины	24
1.3.4. Поток между пересекающимися трещинами	25
1.3.5. Анализ монотонных модификаций EDFM	26
1.4. Монотонный проекционный метод вложенных дискретных тре- щин	28
1.4.1. Поток между пористой средой и трещиной	29
1.4.2. Поток внутри пористой среды	30
1.4.3. Анализ монотонного pEDFM	31
1.5. Численные эксперименты	33
1.5.1. Тест на неотрицательность	34
1.5.2. Тест на дискретный принцип максимума	37
1.5.3. Тест на сходимость	44
1.5.4. Тест на однофазную фильтрацию и перенос примеси в по- ристой среде с блокирующими трещинами	47

1.5.5. Тест на однофазную фильтрацию и перенос примеси в анизотропной пористой среде с трещинами различных проводимостей	49
1.5.6. Тест на масштабируемость метода	55
1.6. Монотонный метод вложенных дискретных трещин для задач двухфазной фильтрации	60
1.6.1. Математическая модель двухфазной фильтрации	60
1.6.2. Монотонный метод вложенных дискретных трещин	62
1.6.3. Численный эксперимент	64
1.7. Выводы	69
1.8. Описание комплексов программ	69

Глава 2. Численная модель течения неньютоновских несжимаемых жидкостей	73
2.1. Введение	73
2.2. Математическая модель течения несжимаемой неньютоновской жидкости со свободной поверхностью	76
2.2.1. Уравнения течения несжимаемой жидкости	76
2.2.2. Вязкопластичная жидкость	79
2.2.3. Вязкоэластичная жидкость Олдройда	80
2.2.4. Модель вязкоэластичного материала Олдройда–нео-Гука	81
2.3. Численный метод	85
2.3.1. Обновление положения свободной поверхности	86
2.3.2. Неявная схема решения уравнений течения жидкости	87
2.3.3. Дискретизация эластичных слагаемых и тензора структуры	90
2.4. Верификация численных моделей	92
2.4.1. Падение вязкоэластичной капли на твердую поверхность	93
2.4.2. Осциллирующая капля из неньютоновской жидкости	95

2.4.3. Прорыв дамбы с вязкопластичной жидкостью	99
2.4.4. Компрессия многоклеточного сфероида из биоматериала . .	101
2.5. Выводы	104
Заключение	106
Публикации автора по теме диссертации	107
Список литературы	108

Введение

Настоящая работа посвящена исследованию и построению численных методов решения задач фильтрации и гидродинамики с границами, не разрешенными расчетной сеткой.

Актуальность работы. При численном моделировании задач фильтрации и гидродинамики возникает необходимость корректного учета внутренних границ и поверхностей, которые могут быть как статическими, так и динамическими. Примерами таких поверхностей могут служить трещины в пористых фильтрационных средах, поверхности раздела сред при однофазных течениях жидкостей со свободной поверхностью. Подходы учета внутренних границ можно разделить на явный (граница разрешается адаптивной расчетной сеткой, используются лагранжевые методы отслеживания) и неявный (граница разрешается вложенными сетками, используются эйлеровы методы отслеживания).

В данной работе предлагаются численные методы решения задач однофазной и двухфазной фильтрации и гидродинамики несжимаемых неньютоновских жидкостей, использующих неявный подход учета внутренних границ. В задачах фильтрации в трещиноватых пористых средах такими вложенными границами являются крупные трещины, моделируемые вложенными сетками, в то время как в задачах течения жидкостей – свободная граница, задаваемая неявно с помощью глобально определенной функции уровня.

Задачи многофазной фильтрации представляют большой интерес в связи с наличием в естественно-трещиноватых коллекторах значительной доли мировых запасов углеводородов. Такие коллекторы часто являются слоистыми и неоднородными. С вычислительной точки зрения, после процедуры осреднения числовых характеристик коллекторов (апскейлинга), это при-

водит к анизотропным, неоднородным полям пористости и проницаемости, выклиниванию слоев и др. Это приводит к дополнительным требованиям к численным методам решения подобных задач и построения расчетных сеток. Использование структурированных сеток в подобных задачах становится практически невозможным. Широко распространено использование сеток угловых точек (Corner Point Grid), сеток Вороного и др. (в [8] представлен обзор широко используемых классов сеток). Для решения задач фильтрации часто применяются методы, основанные на конечно-объемных и конечно-элементных схемах дискретизации ввиду их малых требований на сетки.

Для некоторых постановок математических моделей однофазной и двухфазной фильтрации было доказано наличие дискретного принципа максимума для решения [9—12]. Выполнение ДПМ для дискретного решения является важным свойством численного метода, поскольку в этом случае не могут возникать нефизичные источники и/или стоки [13].

Во многих практических задачах для расчетных сеток не выполнено условие К-ортогональности, т.е. потоки Дарси через грани сетки не сонаправлены вектору, соединяющему точки коллокации давлений. Это приводит к тому, что использование линейной двухточечной схемы дискретизации потока (TPFA, Two-Point Flux Approximation), являющейся стандартным выбором для конечно-объемного моделирования многофазной фильтрации ввиду ее надежности и простоты реализации, вносит постоянную ошибку, не уменьшающуюся с измельчением сетки [14]. В связи с этим необходимо использование схем дискретизации, не обладающих таким недостатком. В данной работе используются нелинейные конечно-объемные схемы, учитывающие анизотропию среды и обладающие свойствами монотонности: нелинейная двухточечная схема, сохраняющая неотрицательность дискретного решения [15], и нелинейная многоточечная компактная схема, гарантирующая выполнение

дискретного принципа максимума для дискретного решения в случае его наличия в непрерывной задаче [16].

Крупные трещины различных проницаемостей в пористых коллекторах приводят к неоднородностям в многофазных течениях. Течения в проводящих трещинах происходит значительно быстрее, чем в окружающей пористой среде, а блокирующие трещины являются барьерами для течений. Для корректного учета особенностей и описания течений в подобных задач требуются специальные подходы.

При изучении нестационарных течений вязкоэластичных несжимаемых жидкостей важными критериями является устойчивость, высокий порядок аппроксимации схемы, низкая численная вязкость. Для эффективного решения подобных задач требуются динамические сетки, сгущающиеся к особенностям задачи. Широко распространенным методом решения уравнений Навье-Стокса течения несжимаемой жидкости является метод проекции, основанный на работах Яненко, Темема, Чорина и др [17–19]. Развитием этого подхода являются схемы SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) и SIMPLER [20], активно применяемые при моделировании течений вязких несжимаемых жидкостей.

Данная работа является развитием методологии, предложенной в [21–23] и реализованной в программном пакете Floctree Тереховым К.М. и Никитиным К.Д. Используются динамически адаптивные расчетные сетки типа восьмиричное дерево с разнесенным расположением неизвестных. Сетки типа восьмидерево являются популярным выбором за счет своей простой прямоугольной структуры и вложенной иерархии [24–27].

Для дискретизации по пространству используются описанные ранее [21; 23] конечно-разностные противоточковые аппроксимации второго и третьего порядка. Для дискретизации по времени уравнений Навье-Стокса, несжимае-

мости и состояния (для вязкоэластичных жидкостей) была разработана полностью неявная схема первого порядка точности. Данный выбор обусловлен особенностями рассматриваемых задач и их параметров, налагающих значительные ограничения на шаг по времени. Использование неявной схемы решения уравнений импульса, несжимаемости и состояния с относительно большим шагом по времени позволяет сохранить как устойчивость метода, так и точность благодаря низкой численной вязкости предложенных ранее схем.

Целью диссертационной работы является разработка и исследование конечно-объемных методов для математических моделей течения неньютоновских жидкостей со свободной поверхностью и фильтрации, позволяющих эффективно учитывать вложенные в сетку границы и получать физически корректные дискретные решения.

Для достижения поставленной цели было необходимо решить следующие **задачи**:

1. Исследовать существующие подходы учета трещин в задачах фильтрации и существующие подходы учета свободной поверхности в задачах течения несжимаемых вязких жидкостей.
2. Разработать и исследовать новые численные методы учета трещин для задач фильтрации, основанные на применении нелинейных конечно-объемных схем дискретизации потоков.
3. Разработать численную модель течения вязкопластичной и вязкоэластичной жидкостей со свободной поверхностью.
4. Разработать программную реализацию предложенных численных моделей и верифицировать ее на серии тестовых задач.

Научная новизна. Впервые были получены следующие результаты:

1. Разработаны и исследованы новые монотонные методы дискретных вложенных трещин, основанных на совмещении метода вложенных дискретных трещин с нелинейными конечно-объемными схемами дискретизации потоков внутри пористой среды.
2. Для двух нелинейных схем сформулированы и доказаны теоремы о сохранении неотрицательности /удовлетворении дискретного принципа максимума переменной давления для задачи диффузии в областях пористой среды и трещин.
3. Предложена и разработана новая математическая модель течения вязкоэластичного материала, основанная на совмещении модели вязкоэластичной жидкости Олдройда-Б и модели нео-Гука гиперупругого твердого тела.

Теоретическая значимость работы состоит в формулировке новых нелинейных конечно-объемных дискретизаций задач однофазной и двухфазной фильтрации в трещиноватой пористой среде, и доказательстве неотрицательности/свойств дискретного принципа максимума для них; в формулировке новой численной модели течения вязкоэластичной материала, основанной на совмещении моделей жидкости Олдройда-Б и гиперупругого твердого тела нео-Гука.

Практическая значимость работы заключается в реализации исследованных моделей диффузии и двухфазной фильтрации в рамках внутреннего симулятора многофазных течений в пористых средах и моделей течения неньютоновских жидкостей со свободной поверхностью в рамках программного пакета Floctree.

Предложенные численные методы решения задач диффузии и двухфазной фильтрации могут быть использованы для решения инженерных задач,

связанных с моделированием нефтедобычи в трещиноватых резервуарах. Разработанный полунявный метод расчета течений вязкопластичных и вязкоэластичных жидкостей может быть использован в самых различных приложениях, таких, как моделирование катастроф и задачи биопринтинга.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Предложены и исследованы новые монотонные методы вложенных дискретных трещин для задач фильтрации, основанные на применении нелинейных конечно-объемных схем дискретизации потока внутри пористой среды.
2. Доказано, что монотонные свойства нелинейных схем, используемых для дискретизации потоков внутри пористой среды (неотрицательность решения при использовании нелинейной двухточечной схемы; наличие дискретного принципа максимума при использовании нелинейной многоточечной компактной схемы), выполняются для дискретного решения задачи диффузии в пористой среде и трещинах.
3. Разработан полунявный метод расчета течений неньютоновских жидкостей (вязкопластичной жидкости Хершеля-Балкли и вязкоэластичной жидкости Олдройда-Б) со свободной поверхностью в трехмерных областях с использованием сеток типа восьмеричное дерево.
4. Предложена и разработана новая математическая модель вязкоэластичного материала, основанная на совмещении моделей гиперэластичного твердого тела нео-Гука и жидкости Олдройда-Б.
5. Численные реализации разработанных методов внедрены в программные пакеты: внутренний симулятор многофазных течений и программный пакет Floctree моделирования течений несжимаемых жидкостей со

свободной поверхностью на динамически перестраиваемых сетках типа восьмиричное дерево.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на совместном научном семинаре ИВМ РАН и Университета Аугсбурга German-Russian Workshop on Numerical Modelling in Geophysics and Biomathematics (Сьон, Швейцария, 2018,2019), на международной конференции 3th International Conference “Multiscale Methods and Large-scale Scientific Computing” (Владивосток, 2019), на международной конференции "Finite Volumes for Complex Applications IX - Methods, Theoretical Aspects, Examples"(проводилась онлайн, 2020), на "XII конференции по математическим моделям и численным методам в биологии и медицине"(проводилась онлайн, 2020), на международном семинаре "KAUST International Seminar on Mathematical Models and Numerical Methods for Flow and Transport in Porous Media"(проводился онлайн, 2021), на конференции "Вычислительная математика и приложения" (Математический центр НТУ Сириус, 2021), на всероссийской конференции молодых ученых-механиков (Сочи, 2021), на научном семинаре ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (2021), на научных семинарах ИВМ РАН.

Публикации. По теме диссертации опубликованы 7 работ [1—7] в рецензируемых изданиях, индексируемых в международных базах данных Scopus и/или Web of Science. Из них 2 работы [5; 6] опубликованы в журналах из списка ВАК по профилю специальности, и 4 опубликованы в международных журналах из первого квартиля [1; 2; 4; 7].

Личный вклад. В работах [2—4] вклад автора заключался в доказательстве теорем для предложенных монотонных методов, разработке и внедрении методов во внутренний симулятор многофазной фильтрации BOSS, проведении численных экспериментов. В работе [1], представляющей собой результат большого сравнительного исследования численных методов реше-

ния задач однофазной фильтрации и переноса в трещиноватых средах, вклад автора заключался в верификации предложенных монотонных методов на серии тестовых задач. В работах [5—7] вклад автора заключался в построении и исследовании новых численных моделей течения вязкопластичных и вязкоэластичных жидкостей со свободной поверхностью, их разработке и внедрении в программный пакет Floctree, верификации моделей на численных и экспериментальных данных из литературы.

Объём и структура диссертации. Настоящая диссертация состоит из введения, двух глав и заключения. Объём диссертации составляет 118 страниц, включая 38 рисунков и 9 таблиц. Список литературы содержит 99 наименований.

Содержание работы. В первой главе предложен подход для решения задач однофазной и двухфазной фильтрации в трещиноватых пористых средах, основанный на совмещении метода вложенных дискретных трещин и нелинейных конечно-объемных схем дискретизации потока внутри пористой среды. Доказаны теоремы о сохранении неотрицательности и удовлетворении дискретному принципу максимума дискретного решения, определенного в пористой среде и трещинах, при использовании нелинейных конечно-объемных схем дискретизации потока, двухточечной монотонной и компактной многоточечной, соответственно. Наличие доказанных монотонных свойств продемонстрировано в численных экспериментах, метод успешно верифицирован в рамках большого сравнительного исследования с большим количеством участников, показаны сходимость метода и его масштабируемость.

Вторая глава посвящена развитию численных моделей неньютоновских жидкостей со свободной поверхностью. Представлены модели вязкопластичной жидкости Хершеля-Балкли и вязкоэластичной жидкости Олдройда-Б, предложена новая модель вязкоэластичного материала, основанная на сов-

мещении моделей жидкости Олдройда-Б с моделью нео-Гука гиперупругого твердого тела. Описана дискретизация управляющих соотношений для данных моделей, пространственная дискретизация основана на использовании конечно-разностных и конечно-объемных схем на динамически адаптивных сетках типа восьмидерево. Модели были верифицированы на численных и реальных экспериментальных данных.

Благодарности. Автор выражает благодарность научному руководителю К.Д.Никитину за помощь, ценные советы и полезные обсуждения. Также автор глубоко признателен Ю.В.Василевскому и К.М.Терехову за замечания, рекомендации и всестороннюю поддержку.

Работа поддержана грантами РНФ 18-71-10111, 19-71-10094, грантом РФФИ 19-31-90110 и Московским центром фундаментальной и прикладной математики (соглашение с Минобрнауки России № 075-15-2019-1624).

Монотонный метод вложенных дискретных трещин для задач многофазной фильтрации

1.1. Введение

Естественно-трещиноватые коллекторы содержат большую долю мировых запасов углеводородов, в связи с чем представляют большой интерес для гидрогеологического моделирования. Такие коллекторы часто содержат связанные сети трещин различных масштабов и проводимостей. Развитие численных моделей течений, способных корректно учитывать как проводящие каналы, суммарный поток по которым может значительно превосходить поток внутри пористой среды, так и барьеры, существенно меняющих направление течения, является актуальным направлением исследований.

Среди наиболее распространённых подходов численного моделирования течений в трещиноватых пористых средах можно выделить следующие: модели эквивалентного континуума [28; 29], модели двойной пористости-двойной проницаемости [30—32], модели дискретных трещин [33; 34], модели вложенных дискретных трещин [35—37].

Для оптимизации численных расчётов с большим количеством трещин, последние часто разделяют по масштабам на мелкие и крупные, где мелкими считаются трещины, длина которых меньше блока расчётной сетки, а крупными – более длинные трещины, пересекающие несколько блоков. При таком разделении мелкие трещины можно учесть через изменение эффективных свойств пористой среды (пористости и проницаемости), в то время как крупные трещины моделируются явным образом [35].

Модель (или метод) вложенных дискретных трещин (Embedded Discrete

Fracture Model, EDFM), рассматриваемая в данной работе, основана на представлении крупных трещин в виде поверхностей, вложенных в расчётную сетку пористой среды. Пористая среда и крупные трещины представляются в виде двух связанных областей. Область пористой среды на дискретном уровне представляется ячейками расчётной сетки с заданными на них эффективными свойствами. Дискретное представление области трещин основано на введении дополнительных степеней свободы в каждой ячейке пористой среды, пересекаемой трещиной. При этом расчётная сетка пористой среды не перестраивается под положение трещин, что отличает этот класс моделей от моделей дискретных трещин. Данная особенность позволяет внедрять модели EDFM для учета трещин в существующие гидрогеологические симуляторы течений, при этом добавляется минимальное необходимое число дополнительных неизвестных. Также преимуществом является то, что данный подход может быть расширен на многофазные и многокомпонентные течения. В частности, EDFM успешно применяется для анализа многофазных течений и задач повышения нефтеотдачи [38; 39], моделирования гидроразрыва пласта и задач геомеханики [40—42].

В оригинальной модели использовались структурированные сетки для пористой среды и линейная двухточечная дискретизация для всех типов потоков [36]. Однако в случае анизотропного тензора проницаемости среды и неортогональных расчётных сеток линейная двухточечная дискретизация не дает аппроксимации для потоков [43].

В этой главе предложен монотонный метод вложенных дискретных трещин, основанный на применении метода конечных объёмов с нелинейными схемами дискретизации потоков внутри пористой среды: монотонной двухточечной схемы или компактной многоточечной схемы с дискретным принципом максимума. Благодаря использованию нелинейных схем дискретиза-

ции потоков производится корректный учет анизотропии среды. Было доказано, что дискретное решение полученной нелинейной задачи для системы “пористая среда + трещины” сохраняет неотрицательность или удовлетворяет дискретному принципу максимума (ДПМ), в зависимости от выбора схемы дискретизации. Удовлетворение ДПМ в задачах многофазной фильтрации в анизотропных средах требуется для получения физически корректного решения.

1.2. Математическая модель однофазной фильтрации в трещиноватой пористой среде

Рассмотрим трещиноватую пористую среду. Будем предполагать, что она может быть представлена в виде двух независимых областей пористой среды и трещин. Тогда течение в трещиноватой пористой среде с неизвестным давлением p задаётся законом сохранения потоков Дарси в каждой из областей:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{q}^m &= g^m + q^{mf} && \text{в } \Omega^m \subset \mathbb{R}^3, \\ \mathbf{q}^m &= -\mathbb{K}^m \nabla p^m && \text{в } \Omega^m, \\ p^m &= \bar{p} && \text{на } \Gamma_D^m, \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}^m &= \bar{u} && \text{на } \Gamma_N^m, \end{aligned} \tag{1.1}$$

в пористой среде (обозначено m) и

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{q}^f &= g^f + q^{fm} && \text{в } \Omega^f \subset \mathbb{R}^2, \\ \mathbf{q}^f &= -\mathbb{K}^f \nabla p^f && \text{в } \Omega^f, \\ p^f &= \bar{p} && \text{на } \Gamma_D^f, \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}^f &= \bar{u} && \text{на } \Gamma_N^f \cup \Gamma_0^f, \end{aligned} \tag{1.2}$$

в среде трещин (обозначено f).

Здесь Ω^m - трёхмерная область с границей $\Gamma^m = \Gamma_D^m \cup \Gamma_N^m$, состоящей из границы $\Gamma_D^m = \bar{\Gamma}_D^m, \Gamma_D^m \neq \emptyset$ с фиксированным давлением и границы Γ_N^m с фиксированным потоком; Ω^f - двумерная область трещин, вложенных в пористую среду Ω^m . Рёбра трещин, $\Gamma^f = \Gamma_D^f \cup \Gamma_N^f \cup \Gamma_0^f$, разделяются на внутренние $\Gamma_0^f \subset \Omega^m$ и рёбра $\Gamma_D^f \subset \Gamma_D^m$ и $\Gamma_N^f \subset \Gamma_N^m$, выходящие на границу Ω^m .

Рассматриваемую математическую модель можно получить осреднением уравнений течения в тонкой трехмерной трещине по ее ширине. Граничными условиями для внутренних границ “рещина-пористая среда” являются непрерывность давлений и потоков в нормальном направлении к трещине с каждой из ее сторон [44]. Это приводит в том числе к возникновению противоположных по знаку потоков $q_{fm} = -q_{mf}$ в уравнениях каждой из сред.

Свойства пористой среды задаются в общем случае анизотропным, неоднородным тензором проницаемости $\mathbb{K}^m = (\mathbb{K}^m)^T > 0$. В среде трещин тензор проницаемости полагается изотропным: $\mathbb{K}^f = k^f \mathbb{I}$, где $\mathbb{I}$ - единичный тензор размера 3×3 .

Слагаемые g^m, g^f соответствуют источникам/стокам, $\bar{p}, \bar{u}$ задают фиксированные давления и потоки на границах. Слагаемые $q^{mf} = -q^{fm}$ соответствуют перетокам между пористой средой и средой трещин. На границе Γ_0^f задаются условия непротекания $\bar{u} = 0$.

1.3. Монотонный метод вложенных дискретных трещин для задачи однофазной фильтрации

Будем рассматривать длинные трещины $L_f \gg h$ (h - размер расчётной сетки в окрестности трещины), поскольку мелкие трещины могут быть учтены изменением локального тензора проницаемости ячеек. Ширина трещин $w_f \ll h$ считается малой, трещина не разрешается на расчётной сетке. В

данной работе каждая трещина $F_i, i = 1, \dots, n_f$ задана плоской двумерной поверхностью Ω_i^f , представленной конформной триангуляцией, с фиксированными расположением и толщиной. Здесь n_f - число трещин, область трещин $\Omega^f = \bigcup_{j=1}^{n_f} \Omega_j^f$.

Рассмотрим полиэдральную расчётную сетку $\mathcal{T}$. Для каждой ее ячейки $T \in \mathcal{T}$ введём неизвестную p_T^m давления в пористой среде, определенную в центре масс T .

Модель вложенных дискретных трещин основана на представлении каждой трещины F_i виртуальными ячейками $T_i = T \cap F_i$ - двумерными многоугольниками пересечения с ячейками расчётной сетки $T \in \mathcal{T}$, не разрешёнными ею. Каждой виртуальной ячейке T_i соответствует определённая в центре масс многоугольника пересечения степень свободы $p_{T,i}^f, i = 1, \dots, n_T$ локального давления трещины. Здесь n_T - количество трещин, пересекающих T . Для поддержания связности виртуальных ячеек вводятся виртуальные грани - отрезки пересечения рёбер и граней $\mathcal{T}$ с F_i . Таким образом, каждой трещине F_i соответствует связный набор степеней свободы виртуальных ячеек. Например, для ячейки T , пересекаемой n_T трещинами $F_i = \Omega_i^f, i = 1, \dots, n_T$, вводится n_T степеней свободы $p_{T,i}^f, i = 1, \dots, n_T$ давления в трещинах F_i , определённые в центрах виртуальных ячеек $T_i = F_i \cap T$.

Для дискретизации уравнений (1.1)-(1.2) в областей пористой среды и трещин используется метод конечных объёмов, применяемый для всех типов потоков, включая потоки между ячейками пористой среды, ячейками пористой среды и трещин, ячейками одной трещины и пересекающихся трещин (рис. 1.1). Это приводит к следующим уравнениям модели для задачи однофазной фильтрации в ячейках T и $T_i, i = 1, \dots, n_T$:

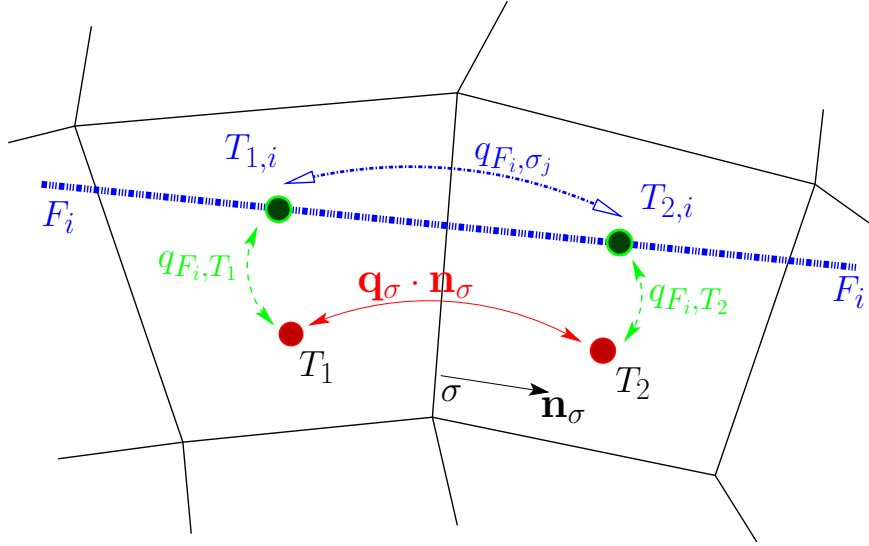


Рис. 1.1. Поток Дарси: между ячейками пористой среды $\mathbf{q}_\sigma \cdot \mathbf{n}_\sigma$ (красным), между ячейками пористой среды и трещины $q_{F_i, T}$ (зеленым), между виртуальными ячейками трещины q_{F_i, σ_j} (синим).

$$\sum_{\sigma \in \partial T} \mathbf{q}_\sigma \cdot \mathbf{n}_\sigma - \sum_{i=1, \dots, n_T} q_{F_i, T} = \int_T g^m d\mathbf{x}, \quad (1.3)$$

$$\sum_{\sigma_j \in \partial T_i} q_{F_i, \sigma_j} + \sum_{j=1, \dots, n_T} q_{F_{i,j}, T} + q_{F_i, T} = \int_{T_i} g^f d\mathbf{x}, \quad i = 1, \dots, n_T, \quad (1.4)$$

где $\mathbf{q}_\sigma \cdot \mathbf{n}_\sigma$ - диффузионный поток между ячейкой T и ее соседом через грань σ , $q_{F_i, T}$ - поток между T и T_i .

Уравнения (1.4) записаны для каждой виртуальной ячейки T_i с потоками q_{F_i, σ_j} внутри трещины через виртуальные грани σ_j ячейки T_i . Также учитываются потоки $q_{F_{i,j}, T}$ между ячейками пересекающихся трещин T_i и $T_j = T \cap F_j$. Отметим, что

$$q_{F_{i,j}, T} = -q_{F_{j,i}, T}.$$

В оригинальной модели вложенных дискретных трещин рассматриваются пористые среды с изотропными тензорами проницаемости, представимые структурированными расчётными сетками. Для всех типов потоков (1.3)-(1.4)

используется линейная двухточечная дискретизация (Two-Point Flux Approximation, TPFA) [36; 38]:

- $q_{F_i, T_1} = \hat{\lambda}_{F_i, T_1} (p_{T_1}^m - p_{T_1, i}^f)$ – поток между ячейкой пористой среды T_1 и трещиной F_i , пересекающей T_1 .
- $\mathbf{q}_\sigma \cdot \mathbf{n}_\sigma = \hat{\lambda}_\sigma (p_{T_1}^m - p_{T_2}^m)$ – поток между ячейками пористой среды T_1 и T_2 через их общую грань σ .
- $q_{F_i, \sigma_j} = \hat{\lambda}_{F_i, \sigma_j} (p_{T_{2,i}, f}^f - p_{T_{1,i}, f}^f)$ – поток внутри трещины F_i между виртуальными ячейками $T_{1,i}, T_{2,i}$ с общей виртуальной гранью σ_j .
- $q_{F_{i,j}, T} = \hat{\lambda}_{F_{i,j}, T} (p_{T_i}^f - p_{T_j}^f)$ – поток между трещинами F_i, F_j внутри ячейки T , пересекаемой обеими трещинами.

Для расчёта постоянных коэффициентов $\hat{\lambda}_*$ используются предварительно посчитанные характеристики пересечения трещин и расчётной сетки, такие, как площадь и центр масс многоугольника трещины внутри ячейки, расстояние между центрами масс ячейки и трещины внутри ячейки, и другие. Поскольку расположение трещин фиксировано, достаточно посчитать характеристики и коэффициенты один раз в начале расчёта.

Уравнения (1.3)-(1.4) для всех ячеек пористой среды T и виртуальных ячеек трещин $T_i = T \cap F_i$ образуют линейную алгебраическую систему уравнений $M\mathbf{p} = \mathbf{f}$ с разреженной матрицей M и вектором из блоков неизвестных $\mathbf{p} = \left(\mathbf{p}^m, \mathbf{p}_1^f, \dots, \mathbf{p}_{n_f}^f \right)^T$, состоящим из вектора неизвестных в пористой среде $\mathbf{p}^m$ и векторов неизвестных в каждой из n_f трещин $\mathbf{p}_i^f, i = 1 \dots n_f$.

Недостатком оригинальной модели EDFM является некорректность применения TPFA для потоков внутри пористой среды при использовании анизотропных тензоров проницаемости и неортогональных сеток. Для получения корректных решений в этих случаях следует использовать другие методы

дискретизации. Например, в работе [45] используются нелинейные конечно-объёмные дискретизации потока в рамках модели дискретных трещин. В [46] в рамках модели EDFM было предложено использовать метод опорных операторов (Mimetic Finite Difference).

В данной работе предлагаются монотонные модификации EDFM, в которых для потоков внутри пористой среды используются нелинейные конечно-объёмные дискретизации.

Подробное описание дискретизации модели EDFM будет представлено в следующих подразделах.

1.3.1. Поток между пористой средой и трещиной

Для каждой ячейки пористой среды T и трещины F_i , пересекающей её, поток между ними дискретизируется с помощью линейной двухточечной схемы:

$$q_{T_i;T} = \hat{\lambda}_{T_i;T}(p_T^m - p_{T,i}^f). \quad (1.5)$$

Для расчета $\lambda_{F_i,T}$ используется подход, предложенный в [36]: коэффициент передаваемости (transmissibility) зависит от характеристик пересечения F_i с T и физических свойств сред, известных в начале расчета, используется гармоническое среднее передаваемостей трещины λ_{F_i} и пористой среды λ_T :

$$\hat{\lambda}_{T_i;T} = A_{T_i} \lambda_{T_i;T} = A_{T_i} \frac{\lambda_{T_i} \lambda_{T,T_i}}{\lambda_{T_i} + \lambda_{T,T_i}},$$

где

$$\lambda_{T,T_i} = \frac{\mathbf{n}_{F_i} \cdot \mathbb{K}_T^m \mathbf{n}_{F_i}}{\langle d \rangle_{T,T_i}}, \quad \lambda_{F_i} = \frac{k_i^f}{w_i/2}.$$

Здесь k_i^f – изотропная проницаемость в трещине F_i , $\langle d \rangle_{T,T_i}$ – среднее по ячейке расстояние от ячейки до трещины [36]:

$$\langle d \rangle_{T,T_i} = \frac{\int_T x_{F_i}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'}{|T|},$$

где x_{F_i} – расстояние от точки до трещины, $|T|$ – объём ячейки.

1.3.2. Поток внутри пористой среды

Потоки внутри пористой среды дискретизируются нелинейными конечно-объёмными схемами: нелинейной монотонной двухточечной схемой (NTPFA) [15] или нелинейной многоточечной схемой с удовлетворением дискретным принципом максимума, ДПМ (NMPFA) [16; 47].

В целях сравнения в численных экспериментах также будут использоваться линейная двухточечная схема (TPFA) и линейная многоточечная О-схема (MPFA-O) [48].

Построение нелинейных схем основано на поиске триплета для каждой пары ячейка-грань. Триплет - это набор из трех векторов $\mathbf{t}_*$, таких, что для конормального вектора в ячейке $\ell_\sigma = \mathbb{K}^m \mathbf{n}_\sigma$ выполнено

$$\ell_\sigma = \alpha \mathbf{t}_1 + \beta \mathbf{t}_2 + \gamma \mathbf{t}_3, \quad (1.6)$$

с неотрицательными α , β и γ .

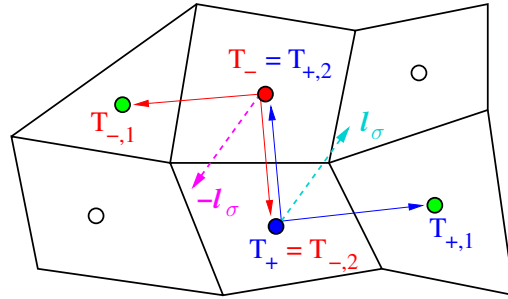


Рис. 1.2. Два представления конормального вектора $\ell_\sigma = \mathbb{K}^m \mathbf{n}_\sigma$ (двумерный случай).

Поскольку нормальная компонента потока представима как производная по направлению конормального вектора ℓ_σ , ее также можно выразить через производные вдоль $\mathbf{t}_*$, аппроксимируемые центральными разностями:

$$q_+ = \alpha'_+ (p_+ - p_{+,1}) + \beta'_+ (p_+ - p_{+,2}) + \gamma'_+ (p_+ - p_{+,3}), \quad (1.7)$$

где для ячейки T_+ коэффициенты α'_+ , β'_+ , γ'_+ отнормированы на $|\mathbf{t}_{+,i}|/|\ell_\sigma|$ из (1.6).

Для ячейки T_- с противоположно направленным конормальным вектором $-\ell_\sigma$ справедливо схожее представление с неотрицательными коэффициентами:

$$q_- = \alpha'_- (p_- - p_{-,1}) + \beta'_- (p_- - p_{-,2}) + \gamma'_- (p_- - p_{-,3}). \quad (1.8)$$

Рассматривается линейная комбинация (1.7) и (1.8) с неотрицательными коэффициентами μ_+ и μ_- :

$$\mathbf{q}_\sigma \cdot \mathbf{n}_\sigma = |\sigma|(\mu_+ q_+ + \mu_- (-q_-)). \quad (1.9)$$

Для сохранения аппроксимации потока необходимо, чтобы линейная комбинация должна быть выпуклой:

$$\mu_+ + \mu_- = 1. \quad (1.10)$$

Второе уравнение на $\mu_\pm$ определяет свойства выводимой схемы:

- Для построения *двухточечной* нелинейной монотонной дискретизации слагаемые в (1.9) от всех ячеек, кроме T_+ , T_- , зануляются::

$$-\mu_+ d_+ + \mu_- d_- = 0, \quad (1.11)$$

где $d_\pm = \alpha'_\pm p_{\pm,1} + \beta'_\pm p_{\pm,2} + \gamma'_\pm p_{\pm,3}$;

- Для построения *многоточечной* нелинейной дискретизации с удовлетворением ДПМ, два представления потоков приравниваются:

$$\mu_+ q_+ = -\mu_- q_-. \quad (1.12)$$

Общая форма записи дискретизации выглядит следующим образом:

$$\mathbf{q}_\sigma \cdot \mathbf{n}_\sigma = M_{\sigma,+} p_+ - M_{\sigma,-} p_- \quad \text{для NTPFA,} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_\sigma \cdot \mathbf{n}_\sigma &= M_{\sigma,-,1} (p_- - p_{-,1}) + M_{\sigma,-,2} (p_- - p_{-,2}) = \\ &= M_{\sigma,+,1} (p_+ - p_{+,1}) + M_{\sigma,+,2} (p_+ - p_{+,2}) \quad \text{для NMPFA,} \end{aligned} \quad (1.14)$$

где коэффициенты $M_* = M_*(p^m)$ могут зависеть от давлений в соседних ячейках. Более подробное описание схем содержится в [15; 16].

1.3.3. Поток внутри трещины

Для дискретизации потоков Дарси внутри трещины F_i между виртуальными ячейками $T_{1,i}$ и $T_{2,i}$ с общей гранью σ используется линейная двухточечная схема:

$$q_{F_i,f} = \hat{\lambda}_{F_i,f} (p_{T_{2,i}}^f - p_{T_{1,i}}^f), \quad (1.15)$$

где коэффициент передаваемости в изотропной среде трещины

$$\hat{\lambda}_{F_i,f} = \frac{k_i^f s w_i}{a_2 + a_1}, \quad (1.16)$$

Здесь w_i – ширина трещины, s – длина отрезка виртуальной грани на σ , и a_1, a_2 – расстояния от центров масс виртуальных ячеек $T_{1,i}$, $T_{2,i}$ до виртуальной грани (рис. 1.3).

Заметим, что, несмотря на то, что тензор проницаемости в трещинах изотропный, двумерная сетка трещины, образованная виртуальными ячейками, в общем случае может быть неортогональной. В этом случае использование линейной схемы дискретизации вносит ошибку аппроксимации, и для её устранения следует применять другие схемы. Однако в дальнейшем для простоты будет использоваться предложенная выше линейная схема.

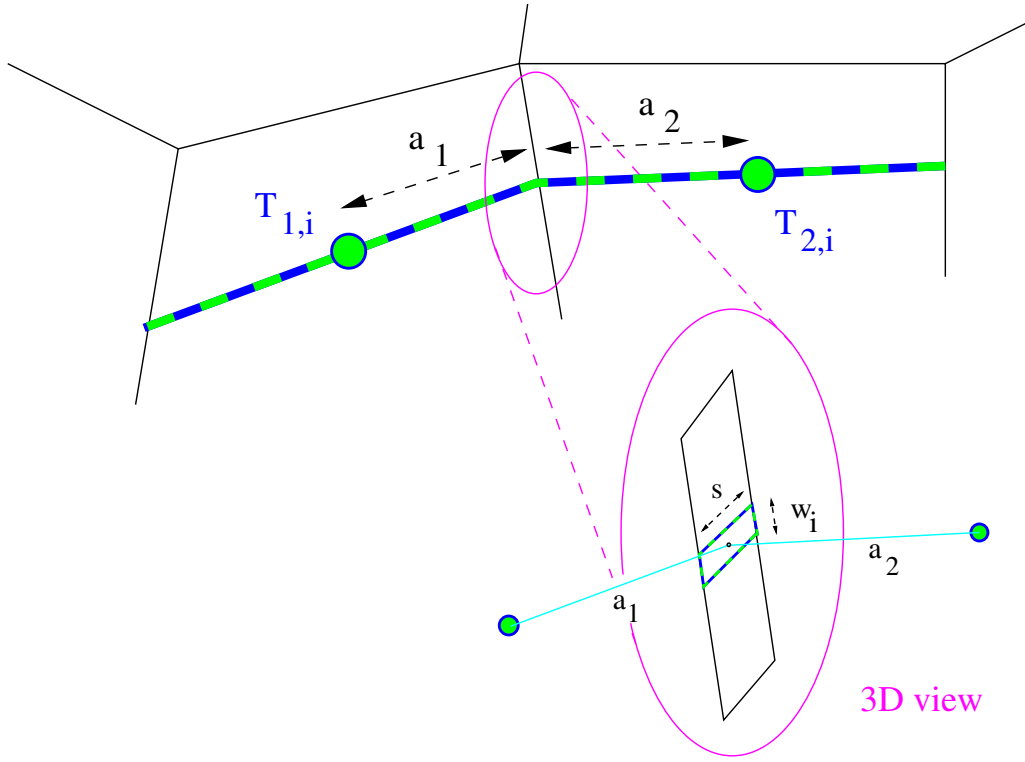


Рис. 1.3. Аппроксимация потока внутри трещины.

1.3.4. Поток между пересекающимися трещинами

Пересечение трещин F_i и F_j может быть представлено отрезком. Для каждой пересекаемой таким отрезком ячейки T поток между F_i и F_j вычисляется следующим образом [49]:

$$q_{T_i;T_j} = A_{T_i;T_j} \lambda_{T_i;T_j}^f (p_i^f - p_j^f), \quad (1.17)$$

где

$$\lambda_{T_i;T_j}^f = \frac{\lambda_{T_i}^f \lambda_{T_j}^f}{\lambda_{T_i}^f + \lambda_{T_j}^f}, \quad \lambda_{T_i}^f = \frac{k_i^f}{a_i}.$$

Здесь w_i – ширина трещины F_i , s – длина отрезка пересечения, $A_{T_i;T_j} = w_i s$ – площадь пересечения. Отрезок пересечения разделяет многоугольник каждой из трещин F_i и F_j внутри ячейки T на два многоугольника. Среднее расстояние a_i от F_i до F_j определяется как полусумма средних расстояний от каждого из двух многоугольников F_i внутри T до отрезка пересечения.

1.3.5. Анализ монотонных модификаций EDFM

Для решения нелинейных систем уравнений, полученных в результате применения описанных выше схем дискретизации, используется метод Ньютона или Пикара.

Справедливы следующие утверждения для решения уравнения диффузии (однофазной фильтрации) методом EDFM с применением NTPFA и NMPFA схем для потоков внутри пористой среды.

Теорема 1. *Пусть для потоков Дарси внутри пористой среды используется нелинейная монотонная двухточечная схема дискретизации, сохраняющая неотрицательность решения, а для решений нелинейных уравнений используется метод Пикара. Тогда метод EDFM из 1.3.2-1.3.4 с потоками Дарси (1.3)-(1.4) сохраняет неотрицательность решения во всей области дискретного решения, включая область трещин.*

Доказательство. В работе [15] было показано, что система нелинейных алгебраических уравнений, полученная в результате применения NTPFA схемы (1.13) для задачи диффузии, и решаемая методом Пикара, задается монотонной матрицей $\mathbf{M}$ с диагональным преобладанием в столбцах. Если нелинейный метод сходится, то неотрицательность решения сохраняется для каждой итерации метода Пикара и для сошедшегося дискретного решения.

Учет степеней свободы трещин и потоков между областями трещин и пористой среды, потоков внутри трещин производится посредством добавления подматриц $\mathbf{M}_{F_i,T}$, $\mathbf{M}_{F_i,f}$ и $\mathbf{M}_{F_{i,j},T}$ размера 2×2 :

$$\mathbf{M}_{F_i,T} = \begin{pmatrix} \lambda_{F_i,T} & -\lambda_{F_i,T} \\ -\lambda_{F_i,T} & \lambda_{F_i,T} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_{F_i,f} = \begin{pmatrix} \lambda_{F_i,f} & -\lambda_{F_i,f} \\ -\lambda_{F_i,f} & \lambda_{F_i,f} \end{pmatrix}, \quad (1.18)$$

$$\mathbf{M}_{F_{i,j},T} = \begin{pmatrix} \lambda_{F_{i,j},T} & -\lambda_{F_{i,j},T} \\ -\lambda_{F_{i,j},T} & \lambda_{F_{i,j},T} \end{pmatrix},$$

в глобальную матрицу $\mathbf{M}$.

Полученная в результате матрица $\mathbf{M}'$, собранная из подматриц выше, остается монотонной матрицей с диагональным преобладанием в столбцах, поэтому все элементы ее обратной матрицы неотрицательны, что влечет сохранение неотрицательности решения дискретного решения. $\square$

Схожая теорема может быть сформулирована и для нелинейной много-точечной схемы с дискретным принципом максимума.

Теорема 2. Пусть для дискретизации потоков Дарси внутри пористой среды используется нелинейная компактная многоточечная схема с ДПМ, а для решений нелинейной системы уравнений применяется метод Пикара. Тогда метод из 1.3.2-1.3.4 с потоками Дарси (1.3)-(1.4) также гарантирует выполнение дискретного принципа максимума во всей области дискретного решения, включая область трещин.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы за тем отличием, что в данной теореме используется строчное диагональное преобладание матрицы, что приводит к тому, что рассматриваемая матрица является M -матрицей. $\square$

Заметим, что доказательства теоремы опирается на использование метода Пикара. Для решения нелинейной системы уравнений также можно использовать метод Ньютона, который часто сходится за меньшее число нелинейных итераций. Для линейных задач решение единственно, и поэтому оба

метода будут сходиться к этому решению. В связи с этим использование метода Ньютона позволяет получить дискретное решение с теми же свойствами монотонности, что и метод Пикара.

1.4. Монотонный проекционный метод вложенных дискретных трещин

Одной из основных проблем метода вложенных дискретных трещин является неспособность корректно учитывать блокирующие трещины.

Проекционный метод вложенных дискретных трещин (projection-based EDFM, pEDFM) является модификацией оригинального метода, предложенной в [50; 51] для решения этой проблемы.

В этом разделе рассматривается модификация метода pEDFM, основанная на применении нелинейной многоточечной схемы дискретизации потока внутри пористой среды. Доказано, что предложенная модификация гарантирует удовлетворение дискретного принципа максимума для дискретного решения во всей области, включая область трещин.

Для дальнейшего изложения необходимо ввести дополнительные обозначения. Для ячейки $T \in \mathcal{T}$ и ее грани σ $T_\sigma^\pm$ – ячейки, содержащие грань σ , $T_\sigma = \begin{cases} T_\sigma^+, & \text{если } T = T_\sigma^-, \\ T_\sigma^-, & \text{если } T = T_\sigma^+ \end{cases}$ – соседняя к T ячейка через грань σ ; $A_{T_i, \sigma}^\perp = |T_i^\sigma \cap \sigma|$ – площадь проекции T_i^σ многоугольника T_i на плоскость грани σ , лежащей внутри σ ; A_{T_i} – площадь трещины F_i внутри ячейки T ; $\mathbf{n}_{F_i}$ – единичный вектор нормали к плоскости трещины.

1.4.1. Поток между пористой средой и трещиной

В общем случае шаблон дискретизации потока между ячейкой трещины $T_i = T \cap F_i$ и пористой средой задается набором степеней свободы пористой среды, называемых далее несоседними и определяемыми ниже.

В методе EDFM присутствует одна несоседняя степень свободы p_T^m в той же ячейке T , в которой определена T_i . В методе рEDFM список несоседних степеней свободы расширяется (рис. 1.4), также включая в себя степени свободы ячеек, соседних через спроецированные грани T , обозначаемые $\mathbf{F}(T, F_i)$. В данной работе для нахождения $\mathbf{F}(T, F_i)$ используется критерий наименьшего расстояния [51] с дополнительной модификацией из [52], называемой методом небольших сдвигов.

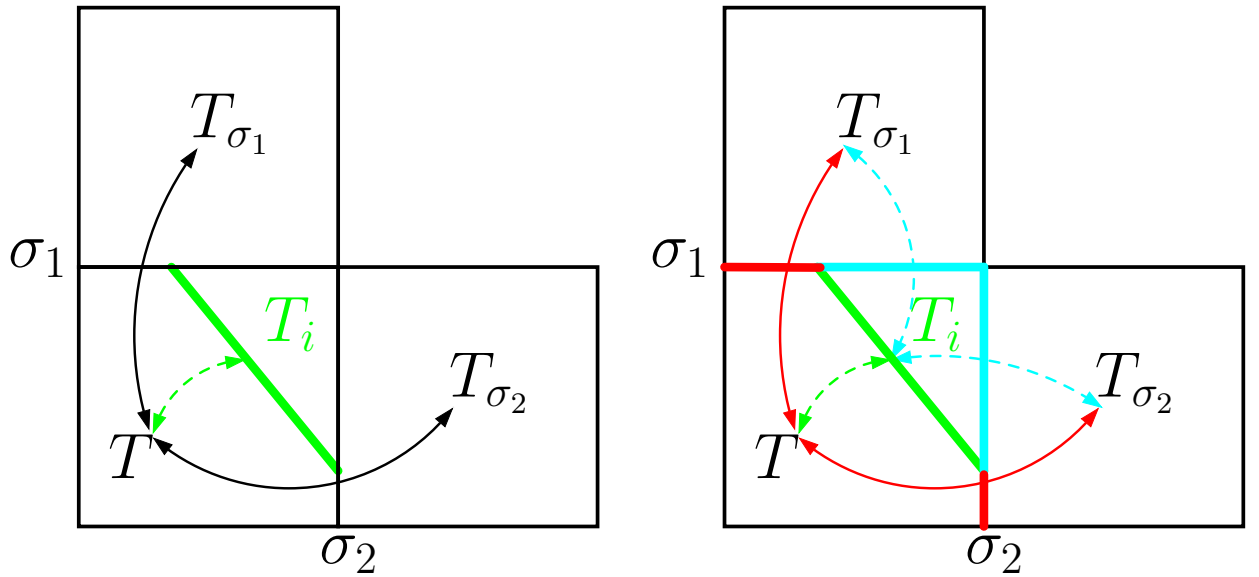


Рис. 1.4. Шаблоны дискретизаций потоков внутри пористой среды и между трещиной и пористой средой, EDFM (слева) и рEDFM(справа). Несоседние связи отмечены зеленым, расширенные связи отмечены синим.

Потоки между T_i и несоседними степенями свободы матрицы дискретизируется линейной двухточечной схемой с гармоническим осреднением передаваемостей трещины и матрицы:

$$q_{T_i;T,\sigma} = A_{T_i,\sigma}^\perp \lambda_{T_i;T,\sigma} (p_{T_i}^f - p_{T,\sigma}^m), \quad (1.19)$$

$$\lambda_{T_i;T,\sigma} = \frac{\lambda_{T_i} \lambda_{T,\sigma,T_i}}{\lambda_{T_i} + \lambda_{T,\sigma,T_i}}, \quad (1.20)$$

где

$$\lambda_{T,\sigma,T_i} = \frac{\mathbf{n}_{F_i} \cdot \mathbb{K}_{T,\sigma}^m \mathbf{n}_{F_i}}{d_{T,\sigma,T_i}}.$$

Здесь $d_{T,\sigma,T_i} = |\mathbf{x}_c(T,\sigma) - \mathbf{x}_c(T_i)|$ – расстояние между центрами масс ячеек.

Отметим, что суммирование по $\sigma \in \partial T$ для потоков в (1.3) дает ненулевые потоки при $\sigma \in \mathbf{F}(T, F_i)$ и $A_{T_i,\sigma}^\perp > 0$.

Определим множество трещин $I_\sigma = \{i : q_{T_i;T,\sigma} \neq 0\}$, для которых грань σ спроецированная. Тогда можно определить спроецированную на σ площадь $A_{\sigma,F_\perp} = \sum_{i \in I_\sigma} A_{T_i,\sigma}^\perp$ трещин. Для сохранения потоков эта площадь исключается из площади между ячейками с общей гранью σ , с этой целью вводится коэффициент относительной площади β_σ , выражающий долю площади грани, не перекрытую близлежащими трещинами:

$$\beta_\sigma = \frac{|\sigma| - A_{\sigma,F_\perp}}{|\sigma|} \quad (1.21)$$

1.4.2. Поток внутри пористой среды

Построение нелинейной схемы дискретизации потока внутри пористой среды следует тому же алгоритму из 1.3.2, что и для метода EDFM. Для компенсации расширенных потоков между средами пористой среды и трещин через спроецированные грани, рассмотренных в предыдущем подразделе, поток внутри пористой среды через спроецированные грани масштабируется на коэффициент относительной площади β_σ из (1.21).

В этом случае общая форма записи дискретизации незначительно отличается от (1.13):

$$\mathbf{q}_\sigma \cdot \mathbf{n}_\sigma = \beta_\sigma (M_{\sigma,+} p_+ - M_{\sigma,-} p_-) \quad \text{для NTPFA,} \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_\sigma \cdot \mathbf{n}_\sigma &= \beta_\sigma (M_{\sigma,-,1} (p_- - p_{-,1}) + M_{\sigma,-,2} (p_- - p_{-,2})) = \\ &= \beta_\sigma (M_{\sigma,+,1} (p_+ - p_{+,1}) + M_{\sigma,+,2} (p_+ - p_{+,2})) \quad \text{для NMPFA,} \end{aligned} \quad (1.23)$$

где коэффициенты $M_* = M_*(p^m)$ могут зависеть от давлений в соседних ячейках.

1.4.3. Анализ монотонного pEDFM

Для метода pEDFM с использованием нелинейной многоточечной схемы с ДПМ справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть для дискретизации потоков Дарси внутри пористой среды используется нелинейная многоточечная схема дискретизации, а для решения нелинейных систем уравнений применяется метод Пикара. Тогда метод pEDFM из разделов 1.3.3, 1.3.4, 1.4.1, 1.4.2 с потоками Дарси (1.3)-(1.4) гарантирует удовлетворение дискретного принципа максимума для дискретного решения во всей области, включая область трещин.

Доказательство.

Доказательство основано на методологии из работы [10].

Заметим, что нелинейная матрица $\mathbf{M}(\mathbf{p}^m)$ может быть построена сборкой подматриц, соответствующих потокам между различными ячейками двух сред.

Учёт потоков между ячейками пористой среды производится добавлением подматриц размера 2×2 (используя общую форму записи (1.23),

$k = 1, 2, 3$) :

$$\mathbf{M}_{\sigma,\pm,k} = \beta_\sigma \begin{pmatrix} M_{\sigma,\pm,k} & -M_{\sigma,\pm,k} \\ -M_{\sigma,\pm,k} & M_{\sigma,\pm,k} \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

Учёт потоков между пористой средой и трещинами, внутри трещины и между различными трещинами производится добавлением соответствующих подматриц $\mathbf{M}_{T_i;\sigma_j}$, $\mathbf{M}_{T_i;T}$, $\mathbf{M}_{T_i;T,\sigma}$ and $\mathbf{M}_{T_i;T_j}$ размера 2×2 :

$$\mathbf{M}_{T_i;T} = A_{T_i} \begin{pmatrix} \lambda_{T_i;T} & -\lambda_{T_i;T} \\ -\lambda_{T_i;T} & \lambda_{T_i;T} \end{pmatrix}, \mathbf{M}_{T_i;\sigma_j} = |\sigma_j| \begin{pmatrix} \lambda_{T_i;\sigma_j} & -\lambda_{T_i;\sigma_j} \\ -\lambda_{T_i;\sigma_j} & \lambda_{T_i;\sigma_j} \end{pmatrix}, \quad (1.25)$$

$$\mathbf{M}_{T_i;T_j} = A_{T_i;T_j} \begin{pmatrix} \lambda_{T_i;T_j} & -\lambda_{T_i;T_j} \\ -\lambda_{T_i;T_j} & \lambda_{T_i;T_j} \end{pmatrix}, \mathbf{M}_{T_i;T,\sigma} = A_{T_i,\sigma}^\perp \begin{pmatrix} \lambda_{T_i;T,\sigma} & -\lambda_{T_i;T,\sigma} \\ -\lambda_{T_i;T,\sigma} & \lambda_{T_i;T,\sigma} \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

в глобальную матрицу $\mathbf{M}$.

Справедливы следующие утверждения:

- Все диагональные элементы $\mathbf{M}(p^m)$ положительны.
- Все недиагональные элементы $\mathbf{M}(p^m)$ неотрицательны.
- Каждая строковая сумма в $\mathbf{M}(p^m)$ неотрицательна и имеется хотя бы одна строка с положительной строчной суммой ($\Gamma_D^m \neq \emptyset$).

Матрица $\mathbf{M}(p^m)$ неприводима, поскольку ее направленный граф сильно связанный. В свою очередь, последнее верно, потому что граф, соответствующий расчётной сетке, сильно связанный, и $\delta_\sigma M_{\sigma,\pm,k} > 0$ в случае, когда $\delta_\sigma \neq 0$. Если же $\delta_\sigma = 0$, направленный граф матрицы $\mathbf{M}(p^m)$ остаётся сильно связанным, поскольку добавление подматриц, соответствующих

нововведённым потокам между пористой средой и трещинами, восстанавливают недостающую связность графа матрицы через строки, соответствующие степеням свободы трещин.

Поэтому, используя результат Следствия 1 из [53], с.85, $\mathbf{M}(p^m)$ является M -матрицей с диагональным преобладанием в строках. Тогда, используя результаты из [54], матрица $\mathbf{M}(p^m)$ удовлетворяет дискретному принципу максимума.

В предположении, что нелинейная система решается методом Пикара, дискретный принцип максимума гарантируется для решения на каждой итерации метода, и, как следствие, для сошедшегося дискретного решения.

□

1.5. Численные эксперименты

В этом разделе рассмотрены эксперименты с описанными выше монотонными методами EDFM и pEDFM, проведено сравнение с другими методами и референтными результатами, продемонстрирована масштабируемость методов при увеличении числа процессоров.

В целях оценки точности и сравнения решений задач фильтрации в численных экспериментах из подразделов 1.5.4, 1.5.5 решается дополнительная задача переноса пассивной примеси с концентрацией c :

$$\phi \frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (c \mathbf{q}) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \times [0, T], \quad (1.27)$$

где ϕ – пористость среды.

На части границы $\partial\Omega_{in}$, на которой в задаче фильтрации заданы условия втока, выставляются условия Дирихле на концентрацию примеси:

$$c = c_D \quad \text{на} \quad \partial\Omega_{in}, \partial\Omega_{in} = \{x \in \partial\Omega : \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} < 0\}. \quad (1.28)$$

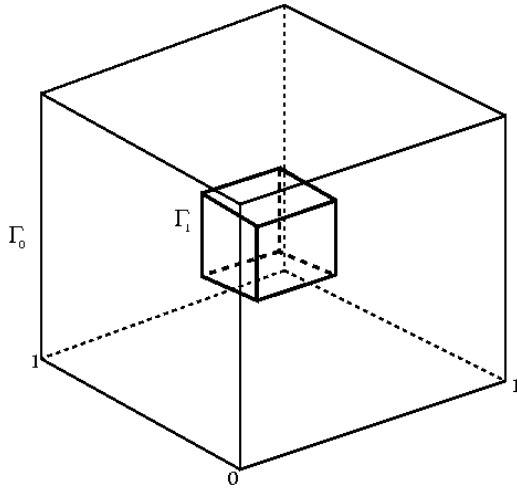
Для дискретизации уравнения переноса по времени применялась неявная схема первого порядка с постоянным шагом Δt :

$$\phi \frac{c^{n+1} - c^n}{\Delta t} + \nabla \cdot (c^{n+1} \mathbf{q}_{filtr}) = 0 \quad (1.29)$$

Неизвестные c определялись в тех же ячейках пористой среды и виртуальных ячейках трещины, что и неизвестные давления. Сохраненные после решения задачи фильтрации потоки всех типов $\mathbf{q}_{filtr}$ применялись для противопотоковой дискретизации первого порядка слагаемого переноса по пространству.

1.5.1. Тест на неотрицательность

Рассматривается следующая постановка теста. Расчётная область – единичный куб $\Omega = \Omega_1 \setminus \Omega_2$, $\Omega_1 = [0, 1]^3$, $\Omega_2 = [0.4, 0.6]^3$ с внутренней кубической полостью. На внешней и внутренней границах куба выставляются граничные условия Дирихле (рис. 1.5).



$$\begin{aligned}
 p|_{\Gamma_0} &= 0, \\
 p|_{\Gamma_1} &= 2; \\
 \mathbb{K} &= R_{xyz} \begin{pmatrix} 300 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_{xyz}^T, \\
 R_{xyz} &= R_z(-\pi/6)R_y(-\pi/4)R_x(-\pi/3).
 \end{aligned}$$

Рис. 1.5. Постановка теста на неотрицательность.

В расчётную область добавлено две проводящие трещины, заданные прямоугольниками (рис. 1.6). Ширина трещин $w_f = 0.01$ одинакова, изотропные проводимости $k_1^f = 5000$, $k_2^f = 50000$.

Непрерывное решение задачи ограничено значениями 0 и 2. Согласно утверждению теоремы 1 дискретное решение, полученное методом EDFM+NTPFA, должно быть неотрицательным.

Для решения дискретной задачи методом EDFM с использованием различных схем для потоков внутри пористой среды (TPFA, MPFA-O, NTPFA) используется кубическая сетка $20 \times 20 \times 20$.

В табл. 1.1 показаны максимумы и минимумы конечно-объёмных решений. Решения, полученные с использованием TPFA и NTPFA, неотрицательны, в то время как решение с использованием MPFA-O отрицательно как в области пористой среды, так и в области трещин. Решение с использованием TPFA содержит постоянную ошибку аппроксимации, поскольку не учтена анизотропия тензора проницаемости (рис. 1.7). Решение, полученное с использованием NTPFA, учитывает анизотропию в силу построения схемы.

На рис. 1.7 представлены дискретные решения в поперечном разрезе

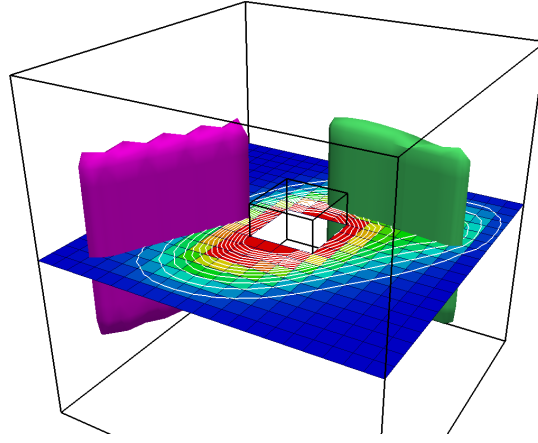


Рис. 1.6. Тест на неотрицательность: расположение трещин.

	$\min_{\Omega^m} p^m$	$\max_{\Omega^m} p^m$	$\min_{\Omega^f} p^f$	$\max_{\Omega^f} p^f$
EDFM+TPFA	9.5e-5	1.7542	0.1861	0.4624
EDFM+NTPFA	1.6e-7	1.9166	0.1398	0.6261
EDFM+MPFA-O	-0.1758	2.0620	-0.0094	0.5949

Таблица 1.1. Тест на неотрицательность: максимумы и минимумы решений в пористой среде и трещинах (заниженные и превышенные значения отмечены красным).

сетки. Области с отрицательным решением закрашены тёмно-синим.

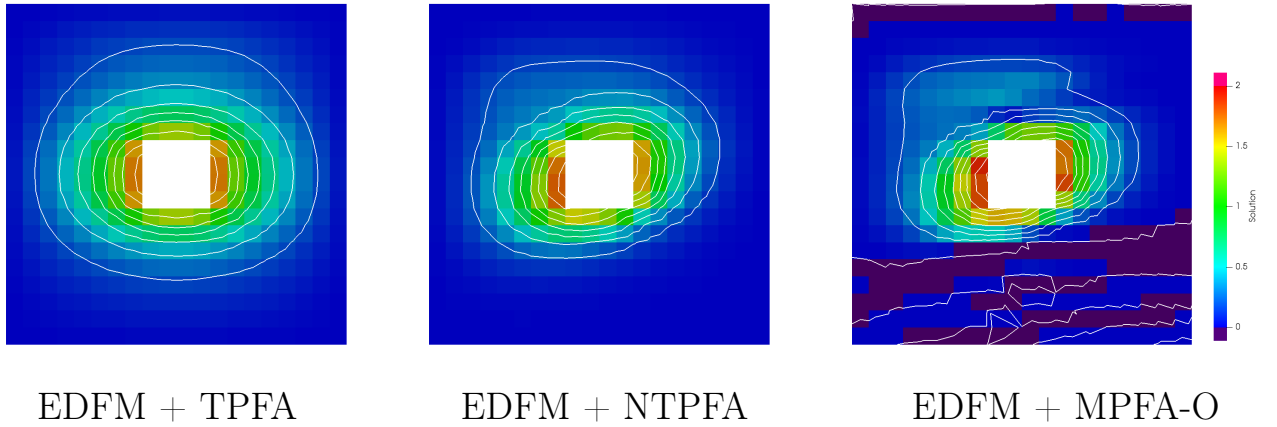


Рис. 1.7. Тест на неотрицательность: дискретные решения в поперечном разрезе сетки. Области с отрицательным решением закрашены тёмно-синим.

1.5.2. Тест на дискретный принцип максимума

Рассмотрим следующую постановку теста. Расчётная область – единичный куб $\Omega = [0, 1]^3 \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$ с двумя цилиндрическими прорезями $\Omega_1 = [3/11, 4/11] \times [5/11, 6/11] \times [0, 1]$ и $\Omega_2 = [7/11, 8/11] \times [5/11, 6/11] \times [0, 1]$, имитирующими скважины. На внутренних границах $\Gamma_1 = \partial\Omega_1 \cap \Gamma$ и $\Gamma_2 = \partial\Omega_2 \cap \Gamma$ заданы фиксированные давления. На внешней границе квадрата $\Gamma_{out} = \Gamma \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ заданы условия непротекания. Тензор проницаемости пористой среды однородный и анизотропный (рис. 1.8).

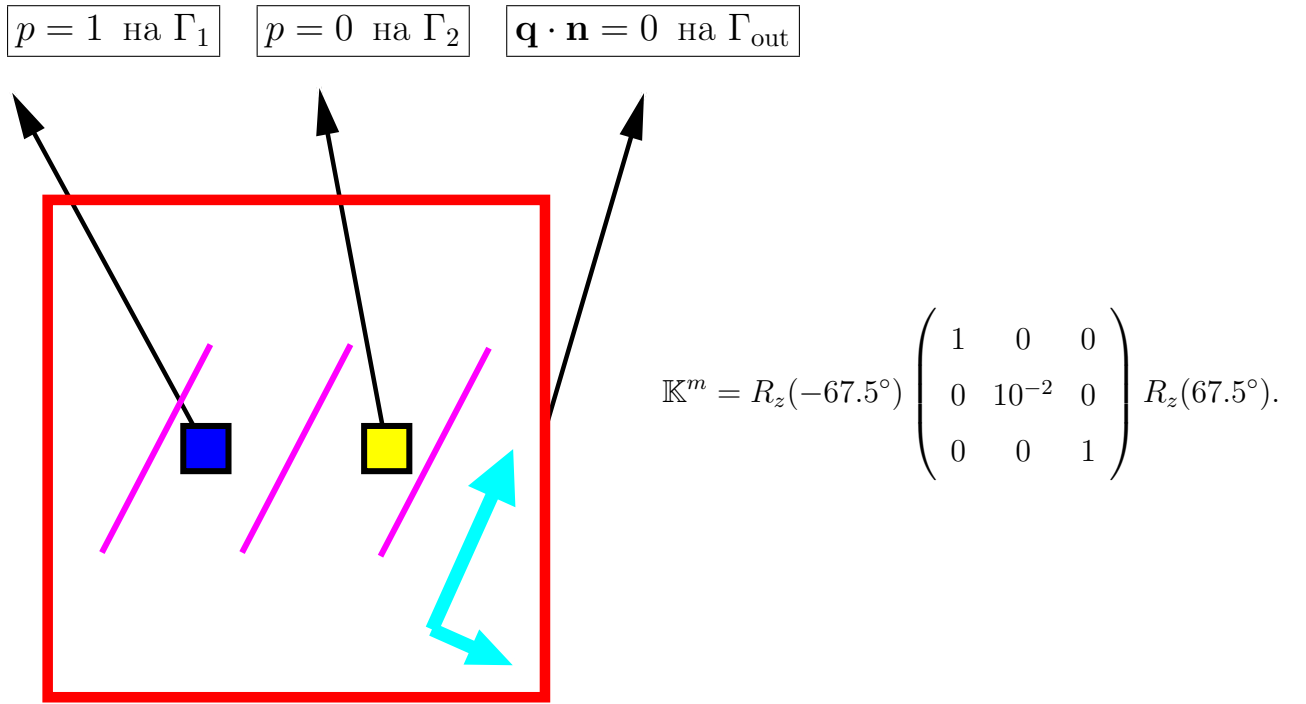


Рис. 1.8. Постановка теста на ДПМ с проводящими трещинами (обозначены фиолетовым).

Согласно дискретному принципу максимума для задачи диффузии с рассматриваемой конфигурацией граничных условий непрерывное решение задачи должно находиться в пределах от 0 до 1.

Дискретное решение также должно удовлетворять этому условию во избежание возникновения нефизичных источников или стоков.

Были проведены численные эксперименты с различными дискретизациями потока внутри пористой среды (TPFA, MPFA-O, NTPFA, NMPFA) для ме-

тодов EDFM и pEDFM.

В первой постановке теста рассматриваются три проводящие трещины (рис. 1.8), заданные вертикальными прямоугольниками. Расположение трещин выбрано таким образом для проверки возможных нарушений ДПМ. Заданы одинаковые для всех трещин апертура $w_f = 0.01$ и изотропная проницаемость $k^f = 1000$.

Для данной конфигурации теста решения были получены методом EDFM на прямоугольной призматической $22 \times 22 \times 1$ сетке.

В табл. 1.2 представлены максимумы и минимумы конечно-объёмных решений. На рис. 1.9 показаны сами решения в поперечном разрезе сетки. Решение, полученное с помощью оригинального метода (EDFM+TPFA) не даёт аппроксимации, однако удовлетворяет ДПМ, т.е. не содержит локальных максимумов/минимумов внутри области пористой среды. Решения с использованием MPFA-O и NTPFA схем нарушают ДПМ как в области пористой среды, так и трещин, несмотря на то, что для остальных типов потоков используется TPFA схема, удовлетворяющая ДПМ. Решение, полученное с помощью NMPFA схемы как удовлетворяет ДПМ, так и учитывает анизотропию тензора проницаемости.

	$\min_{\Omega^m} p^m$	$\max_{\Omega^m} p^m$	$\min_{\Omega^f} p^f$	$\max_{\Omega^f} p^f$
EDFM+TPFA	0.0245	0.9755	0.1376	0.8534
EDFM+NTPFA	0.0063	1.7395	0.1131	1.3636
EDFM+NMPFA	0.0074	0.9925	0.0244	0.9750
EDFM+MPFA-O	-0.0459	1.0442	-0.0015	0.9995

Таблица 1.2. Тест на ДПМ с проводящими трещинами: минимумы и максимумы решений в пористой среде и трещинах. Нарушения ДПМ отмечены красным.

Результаты сходимости нелинейных методов представлены на рис. 1.10.

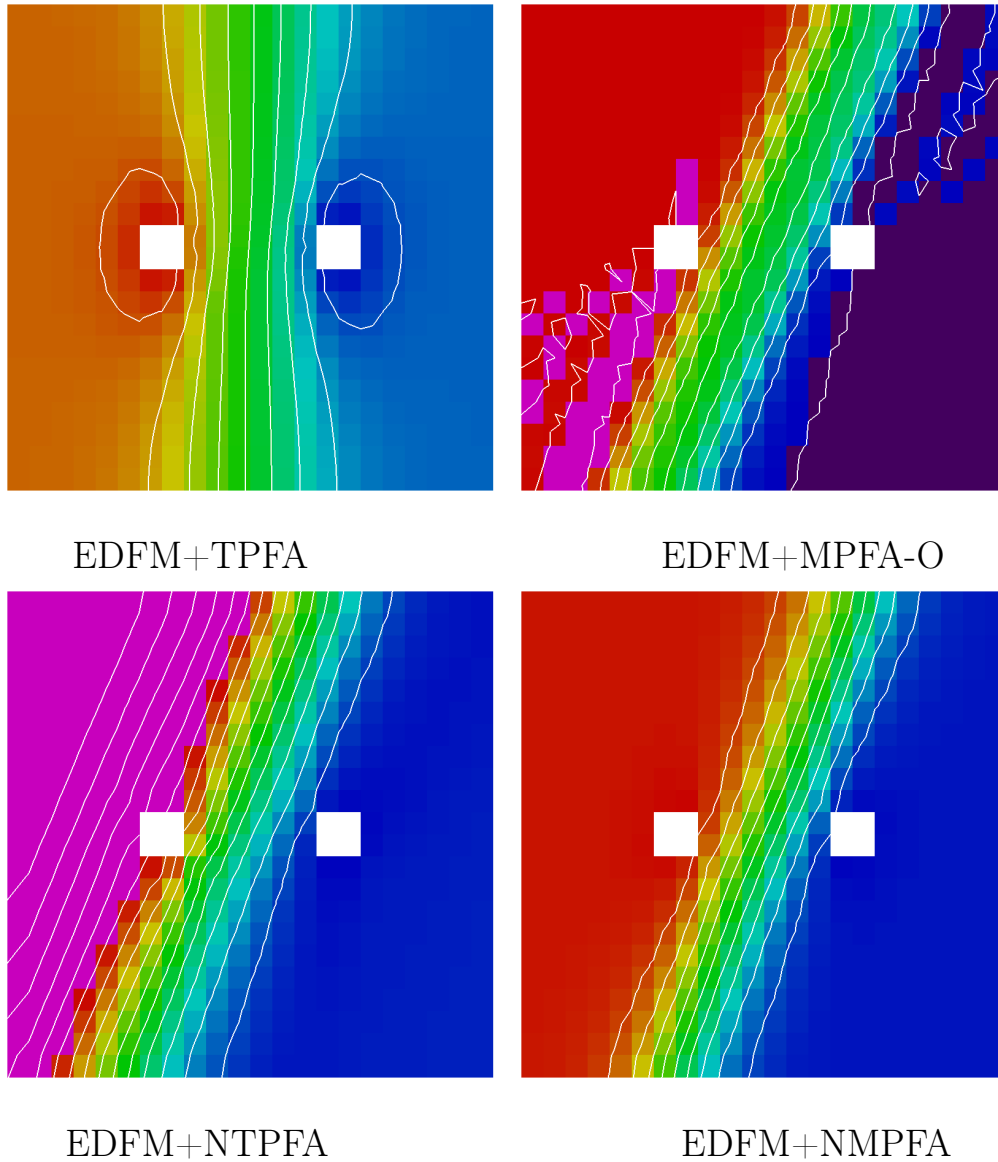


Рис. 1.9. Тест на ДМП с проводящими трещинами: решения в поперечном разрезе сетки (значения меньше 0 и больше 1 отмечены тёмно-синим и розовым).

Линейные схемы сходятся за одну итерацию. Сильная анизотропия тензора проницаемости является основной причиной медленной сходимости нелинейных методов. Метод Ньютона сходится значительно быстрее, чем метод Пикара, сходимость при использовании NTPFA схемы достигается быстрее, чем при использовании NMPFA, независимо от нелинейного метода решения системы уравнений.

Отметим, что, несмотря на то, что использование нелинейных схем дис-

кретизации для линейных задач диффузии может быть вычислительно более затратным, чем при использовании линейных схем, такой выбор имеет больше оснований для решения более сложных нелинейных задач, таких, как задачи двухфазной фильтрации. В этой главе также рассматривается расширение представленной монотонной модели EDFM на задачи двухфазной фильтрации.

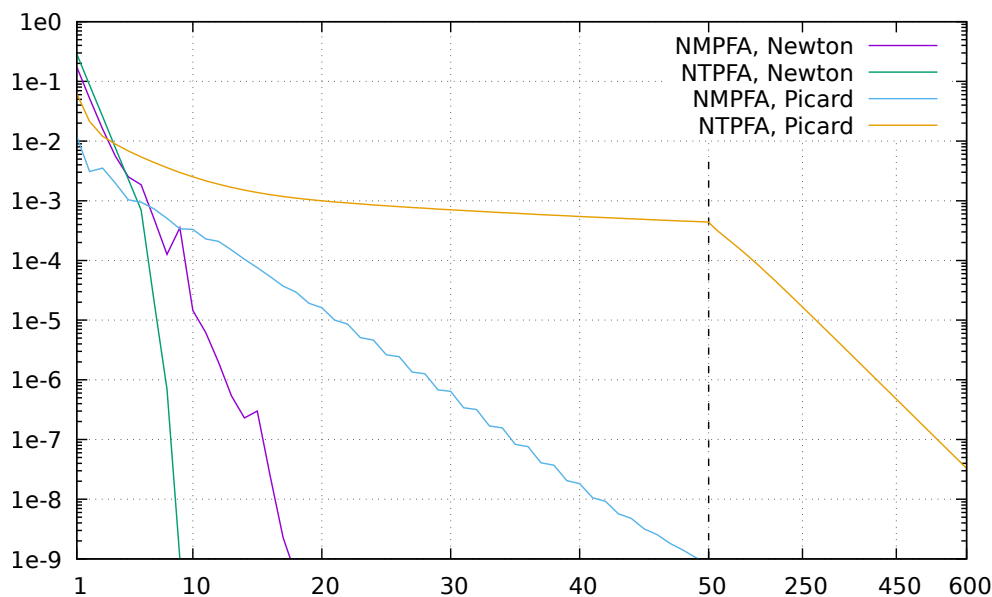


Рис. 1.10. Тест на ДМП для проводящих трещин: сходимость для нелинейных схем.

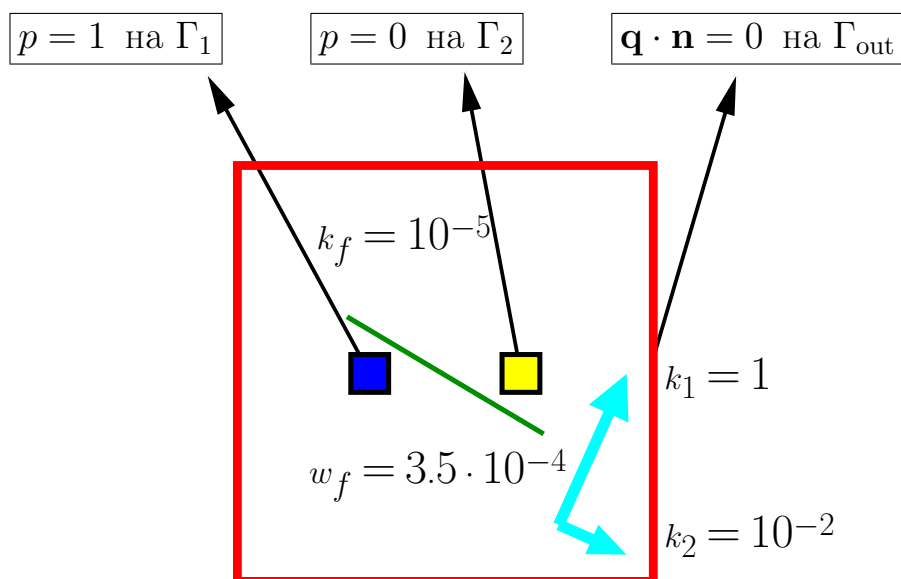


Рис. 1.11. Постановка теста на ДПМ с блокирующей трещиной (обозначена зеленым).

Во второй постановке теста в области расположена одна блокирующая трещина с шириной $w^f = 3.5 \cdot 10^{-4}$ и проницаемостью $k^f = 10^{-5}$. Трещина представлена прямоугольником с угловыми точками $(\frac{3}{11}, \frac{7}{11}, 0)$, $(\frac{8}{11}, \frac{4}{11}, 0)$, $(\frac{3}{11}, \frac{7}{11}, 1)$, $(\frac{8}{11}, \frac{4}{11}, 1)$ (рис. 1.11).

Были проведены эксперименты с различными дискретизациями потока внутри пористой среды (TPFA, MPFA-O, NTPFA, NMPFA) и различными методами учета трещин (EDFM, pEDFM) на прямоугольной призматической сетке $66 \times 66 \times 1$. Дополнительно было посчитано референтное решение задачи фильтрации в неоднородной пористой среде, на треугольной призматической сетке с адаптивным шагом, на которой трещина была разрешена одним слоем тонких ячеек с шагом, равным апертуре трещин $h^f = w^f$. Вдали от трещины был задан средний шаг сетки $h^m = \frac{1}{110}$. Сетка для расчета референтного решения была создана с помощью открытого программного пакета Gmsh.

Решения, полученные разными методами дискретизации, представлены на рис. 1.12. Отметим, что из всех рассматриваемых методов только pEDFM+NMPFA даёт решение, в котором учитывается анизотропия проницаемости, и которое ограничено 0 и 1. Метод EDFM не учитывает блокирующие трещины корректно. Решение методом pEDFM+TPFA не учитывает анизотропию, в то время как остальные результаты не удовлетворяет дискретному принципу максимума (табл. 1.3).

Также был посчитан полный поток через границу Γ_2 (последний столбец табл. 1.3). Поток, полученный методом pEDFM+NMPFA с корректным решением, незначительно отличается от референтного, посчитанного с использованием NMPFA на мелкой сетки с явно разрешённой трещиной, для остальных методов различия с референтным решением значительны.

Для решения нелинейных систем уравнений с целью сравнения скорости сходимости использовались методы Ньютона и Пикара до достижения отно-

сительной невязки $\varepsilon_{rel} = 10^{-7}$, число нелинейных итераций представлено в табл. 1.4. Метод Ньютона сходится значительно быстрее, однако и для него число итераций для сочетания методов pEDFM+NMPFA достаточно велико.

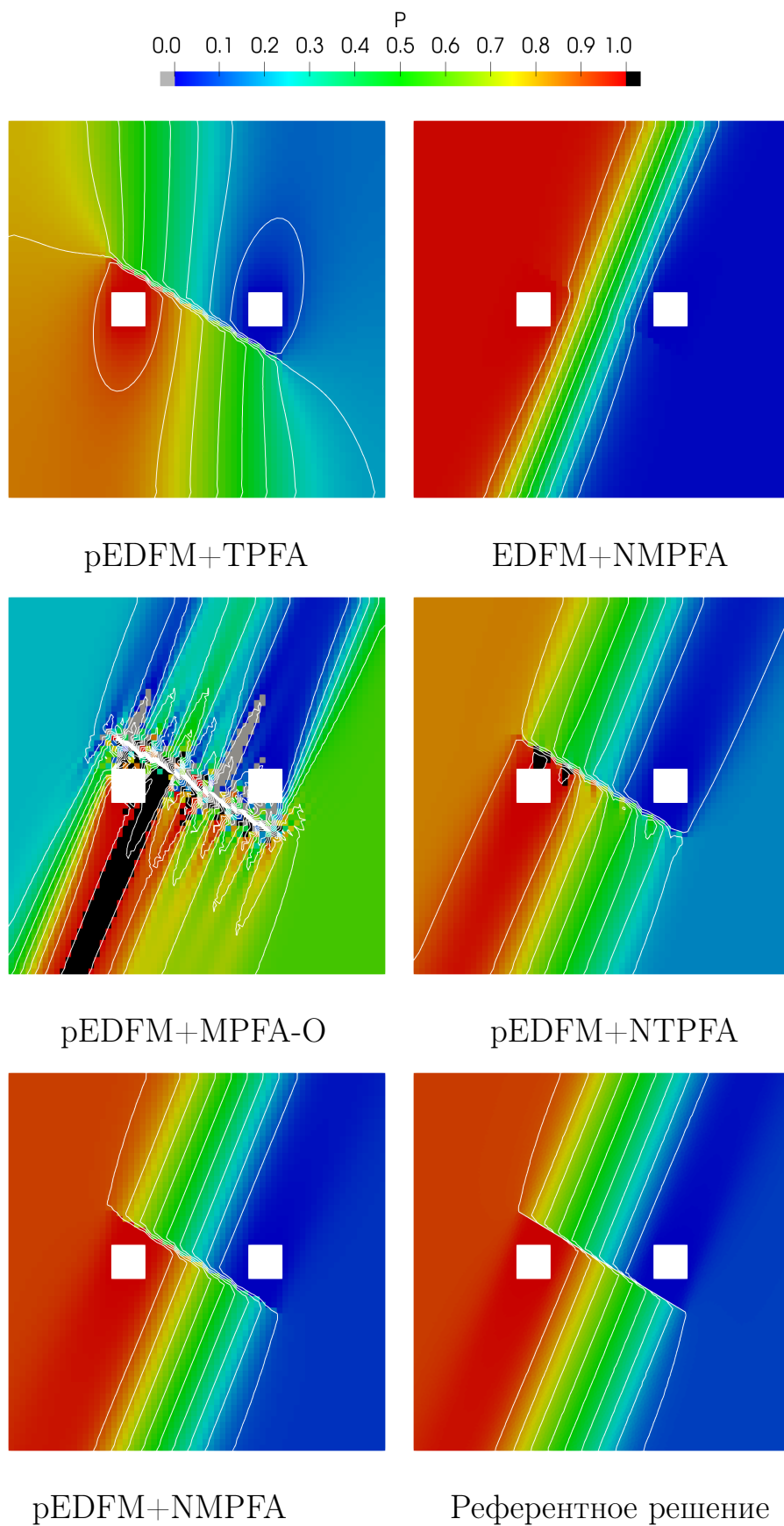


Рис. 1.12. Тест на ДПМ с блокирующей трещиной: решения, полученные различными методами (значения меньше 0 и больше 1 окрашены серым и черным, соответственно).

	$\min_{\Omega^m} p^m$	$\max_{\Omega^m} p^m$	$\min_{\Omega^f} p^f$	$\max_{\Omega^f} p^f$	flux(Γ_2)
pEDFM+...					
TPFA	0.0010	0.9992	0.0054	1.0000	0.2176
MPFA-O	-1.9435	3.1867	-1.9385	2.1828	0.1133
NTPFA	0.0003	1.1247	0.0012	1.0000	0.0442
NMPFA	0.0001	0.9999	0.0008	1.0000	0.0309
EDFM+...					
TPFA	0.0063	0.9954	0.0285	1.0000	0.3278
NMPFA	0.0006	0.9997	0.0019	1.0000	0.0510
Мелкая сетка с явно разрешённой трещиной					
NMPFA	0.0000	1.0000	0.0000	1.0000	0.0260

Таблица 1.3. Тест на ДПМ с блокирующей трещиной: максимумы и минимумы решения в пористой среде и трещинах, полный поток через границу Γ_2 .

Метод	Итерации м. Ньютона	Итерации м. Пикара
pEDFM+NMPFA	131	412
pEDFM+NTPFA	6	309
EDFM+NMPFA	78	333

Таблица 1.4. Тест на ДПМ с блокирующей трещиной: число итераций методами Ньютона и Пикара для различных нелинейных дискретизаций потока внутри пористой среды.

1.5.3. Тест на сходимость

Для проверки метода EDFM на сходимость используется эксперимент, предложенный в [50]. Рассматривается двумерная область пористой среды (единичный квадрат) с единичным тензором проницаемости пористой среды

$\mathbb{K}^m = \mathbb{I}$ и двумя пересекающимися, проводящими трещинами в середине области с изотропными проницаемостями $k_f = 10^8$ (рис. 1.13, слева).

На левой и правой стороне квадрата заданы граничные условия Дирихле $p = 1$ и $p = 0$, соответственно, на верхней и нижней стороне квадрата заданы однородные условия Неймана.

Задача решается на последовательности измельчаемых сеток, найденные решения сравниваются с референтным. Референтное решение получено линейной двухточечной схемой на мелкой прямоугольной призматической (референтной) сетке, с равномерным шагом $h = 1/729$ внутри пористой среды. Трещины разрешались одним слоем тонких ячеек с толщиной h , равной ее апертуре (рис. 1.13, справа).

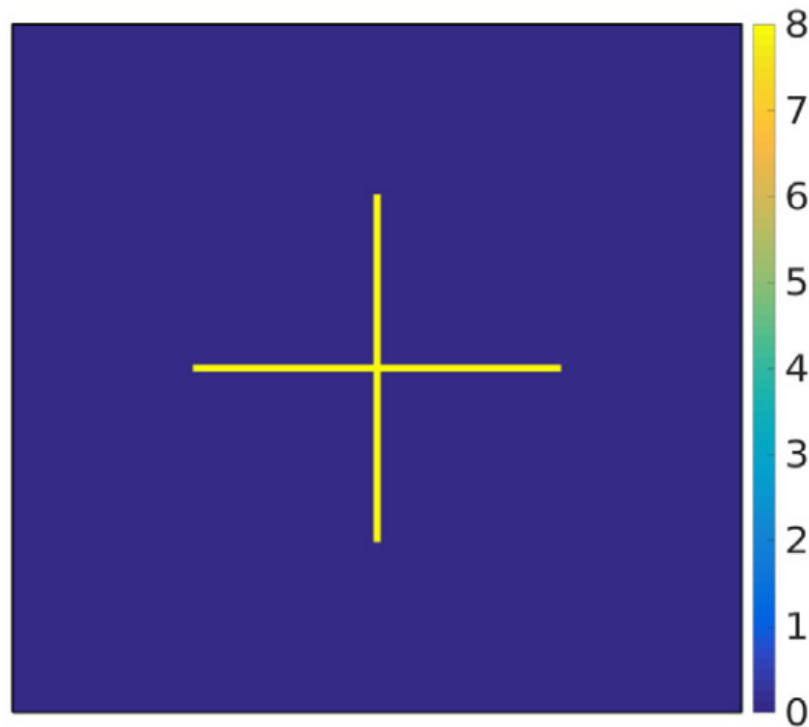


Рис. 1.13. Тест на сходимость. Проницаемости сред в логарифмическом масштабе, $\log_{10}(k)$.

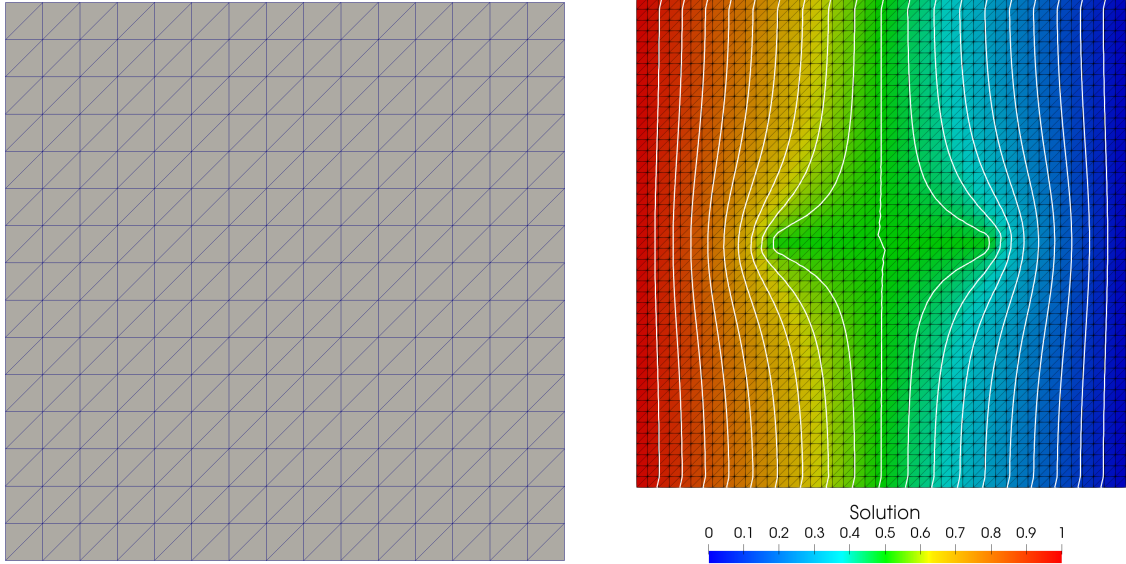


Рис. 1.14. Тест на сходимость: решение методом EDFM+NTPFA на треугольной призматической сетке.

Рассматривалось две последовательности измельчаемых сеток: равномерные квадратные сетки с шагом $h = 1/9, 1/27, 1/81, 1/243$ и треугольные сетки, полученные разрезанием каждой квадратной ячейки вертикальной плоскостью вдоль диагонали квадрата в северо-западном направлении (рис. 1.14, справа). Треугольные сетки не являются $\mathbb{K}$ -ортогональными, что приводит к потере аппроксимации при использовании линейной двухточечной схемы.

Для первой последовательности сеток используется оригинальный метод EDFM+TPFA, поскольку на $\mathbb{K}$ -ортогональных сетках нелинейные схемы дискретизации сводятся к линейной двухточечной схеме. Для второго типа сеток сравниваются результаты, полученные схемами EDFM+TPFA и EDFM+NTPFA.

Ошибки в L_1 -норме представлены в табл. 1.5. Для последовательности решений NTPFA схемой на треугольных призматических сетках наблюдается почти 1^{ый} порядок сходимости, в то время как для решений TPFA схемой сходимости не наблюдается. Для решений на кубических сетках обе схемы

L/h	Куб. сетки	Треуг. призм. сетки	
	TPFA = NTPFA	NTPFA	TPFA
9	0.029888	0.02418	0.0399
27	0.010677	0.00836	0.0300
81	0.00407	0.00301	0.0272
243	0.00153	0.00121	0.02644
order	0.9	0.95	0.12

Таблица 1.5. Ошибки в L_1 -норме для двух типов сеток.

совпадают, наблюдается порядок сходимости, близкий к $1^{\text{ому}}$.

1.5.4. Тест на однофазную фильтрацию и перенос примеси в пористой среде с блокирующими трещинами

Рассматриваемый тест взят из работы [1].

В единичном кубе $\Omega = (0 \text{ м}, 1 \text{ м})^3$ расположено 9 блокирующих трещин (рис. 1.15). Проницаемость пористой среды изотропная и неоднородная, для всех трещин заданы одинаковые апертюра $w_f = 10^{-4} \text{ м}$ и проницаемость $k_f = 10^{-4} \text{ м/с}$. Граница области разделена на три части. На границе вытока $\partial\Omega_h = \{(x, y, z) \in \partial\Omega : x, y, z > 0.875 \text{ м}\}$ задан гидравлический напор $\bar{p} = 1 \text{ м}$. На границе втока $\partial\Omega_{in} = \{(x, y, z) \in \partial\Omega : x, y, z < 0.25 \text{ м}\}$ заданы входной поток $\bar{u} = -1 \text{ м/с}$ и концентрация пассивной примеси $\bar{c} = 1 \text{ м}^{-3}$. На остальной границе заданы условия непротекания.

После нахождения решения задачи фильтрации найденные фильтрационные потоки используются для переноса пассивной примеси. Для задачи переноса пассивной примеси заданы пористости трещин $\varphi^f = 0.01$ и пористой среды $\varphi^m = 0.1$, конечный момент времени $T = 0.25 \text{ с}$ и шаг по времени $\Delta t = T/100$.

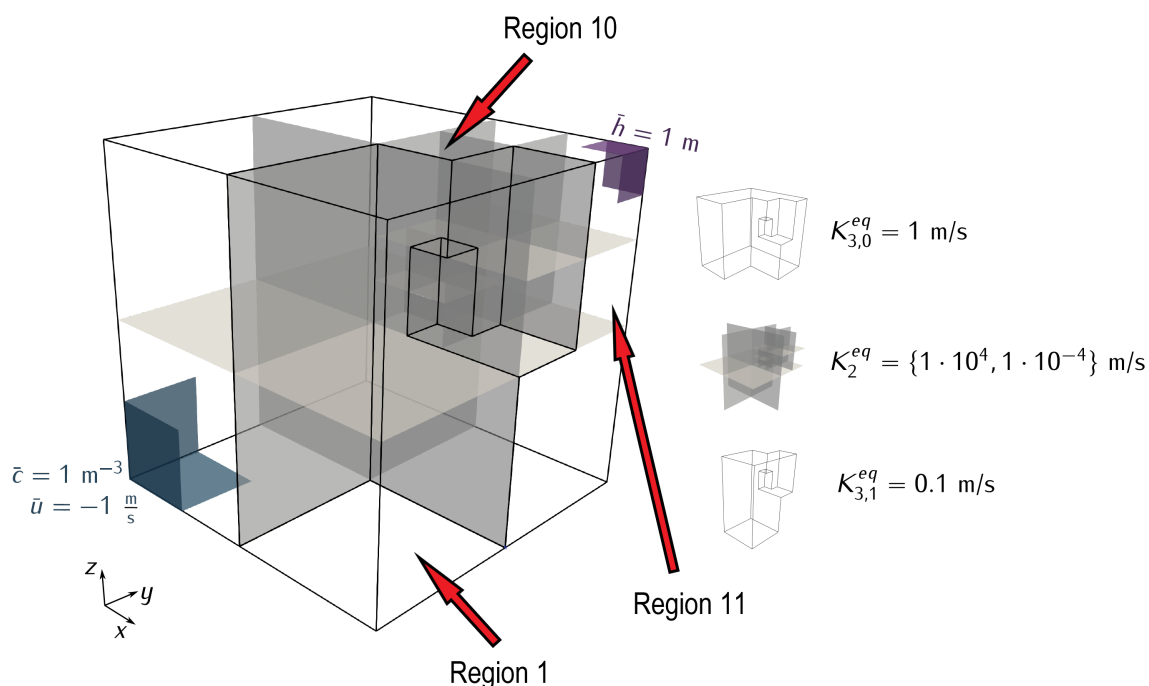


Рис. 1.15. Расчетная область и расположение трещин; распределение проницаемостей (справа). Границы втока и вытока окрашены в синий и фиолетовый соответственно.

Для сравнения результатов с результатами других подходов, принимавших участие в сравнительном тестировании и представленных в открытом доступе [55], требовалось посчитать следующие выходные статистики: гидравлический напор вдоль прямой $(0 \text{ м}, 0 \text{ м}, 0 \text{ м}) - (1 \text{ м}, 1 \text{ м}, 1 \text{ м})$ и среднюю концентрацию трассера для трех подобластей с номерами 1, 10, 11 (рис. 1.15).

Для расчетов использовались последовательность из трех сгущающихся кубических сеток, содержащих 512, 4096 и 32768 ячеек.

На рис. 1.16, 1.17 представлены результаты, полученные с помощью метода pEDFM+TPFA (INM-pEDFM), вместе с результатами групп из Университета Бергена (UiB-MVEM), Университета Штутгарта (USTUTT-MPFA) и Лос-Аламосской Национальной Лаборатории (LANL-MFD).

Можно сделать вывод, что решение представленным в этой работе методом находится в хорошем соответствии с результатами, полученными другими верифицированными методами.

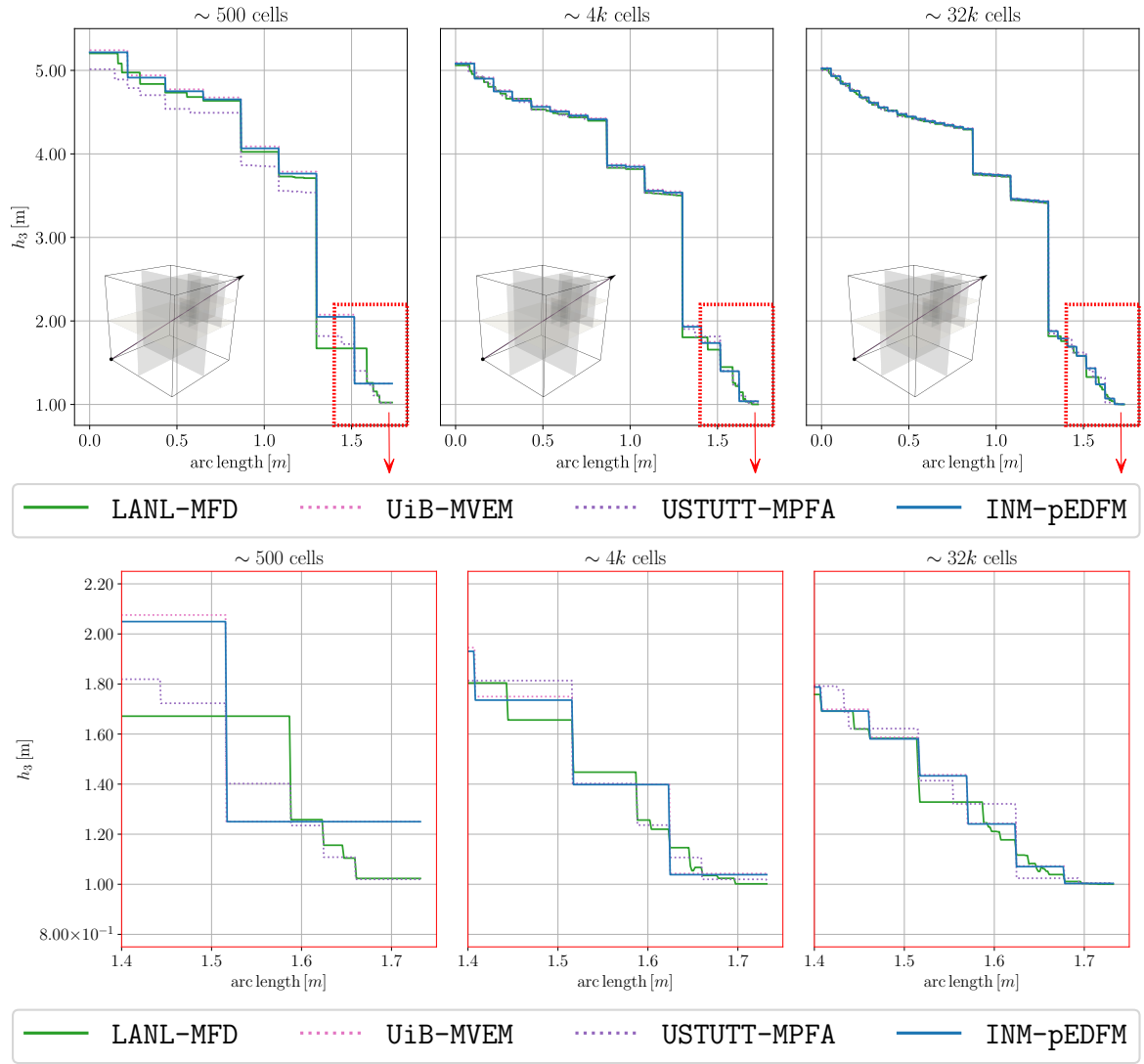


Рис. 1.16. Гидравлический напор вдоль прямой, метод из этой работы – INM-pEDFM (нижний ряд – фокус на нижнем правом угле графика)

1.5.5. Тест на однофазную фильтрацию и перенос примеси в анизотропной пористой среде с трещинами различных проводимостей

Рассматриваемый тест является модификацией теста 4.3 из работы [56].

В единичном кубе расположены 2 блокирующих и 6 проводящих трещин (рис. 1.18, вид сверху).

У всех трещин задана одинаковая апертюра $w_f = 10^{-4}$. Изотропная проницаемость блокирующих трещин $k_b^f = 10^{-4}$, проводящих трещин $k_c^f = 10^4$.

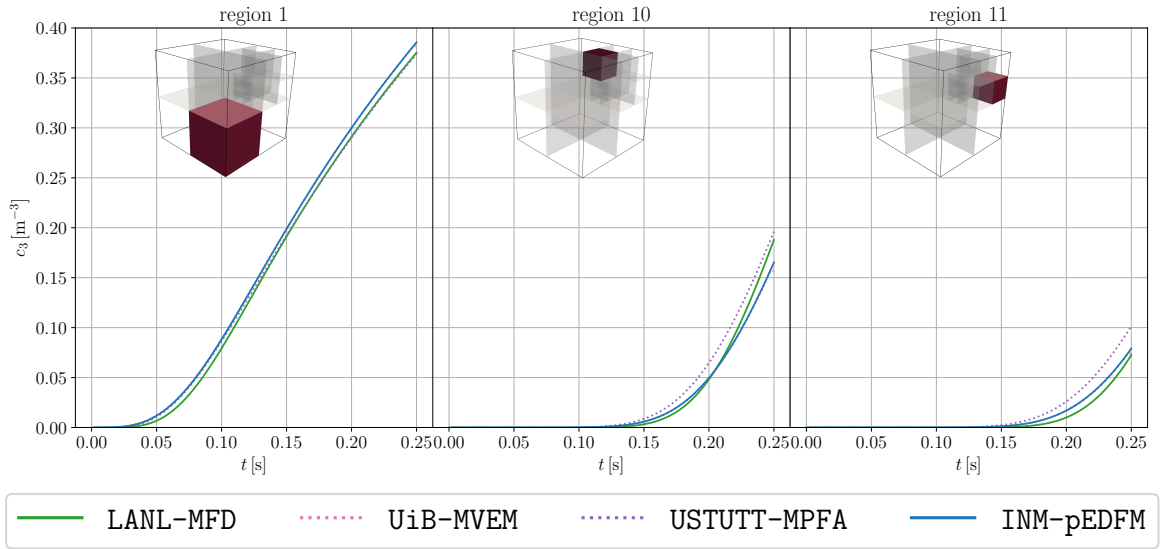


Рис. 1.17. Средняя концентрация трассера в пористой среде, метод из этой работы – INM-pEDFM

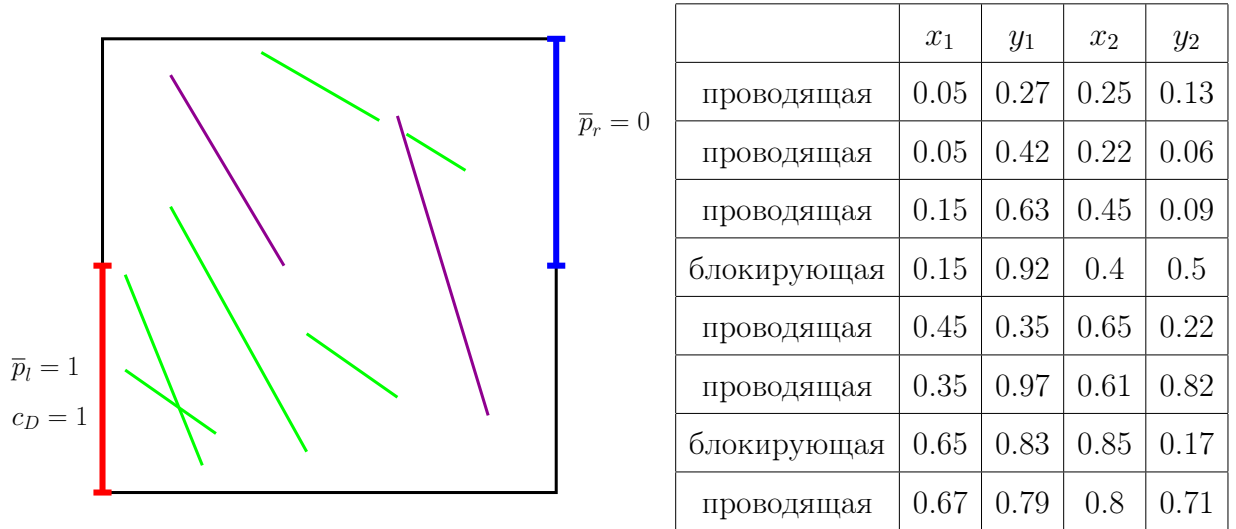


Рис. 1.18. Постановка теста. Блокирующие и проводящие трещины окрашены в фиолетовый и зеленый цвета.

Пористой среде присвоен однородный анизотропный тензор проводимости

$$\mathbb{K}^m = \mathbf{R}_\theta^T \begin{pmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{pmatrix} \mathbf{R}_\theta,$$

где $\mathbf{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица поворота на угол $\theta = \frac{\pi}{4}$ вокруг оси z , $k_x = 10, k_y = 1, k_z = 1$.

Граница области разделена на границу вытока с фиксированным давлением $\partial\Omega_{D,left} = \{(x, y, z) : x = 0, y < 0.5\}$: $p|_{\partial\Omega_{D,left}} = \bar{p}_l = 1$, границу втока с фиксированным давлением $\partial\Omega_{D,right} = \{(x, y, z) : x = 1, y > 0.5\}$: $p|_{\partial\Omega_{D,right}} = \bar{p}_r = 0$, и остальную часть границы с условиями непротекания.

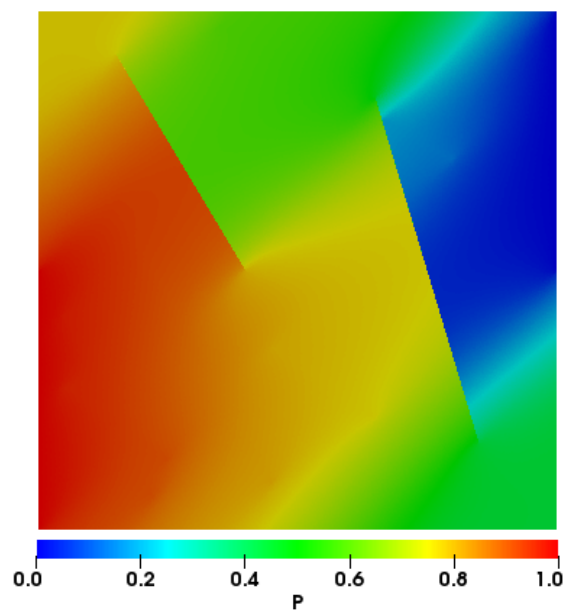
После нахождения решения задачи фильтрации найденные фильтрационные потоки используются для переноса пассивной примеси. Для задачи переноса пассивной примеси заданы концентрация на границе втока $c|_{\partial\Omega_{D,left}} = c_D = 1$, конечный момент времени $T = 0.025$ и шаг по времени $\Delta t = T/10$. Также заданы однородные пористости пористой среды $\varphi_m = 0.1$, блокирующих $\varphi_{fb} = 0.01$ и проводящих $\varphi_{fc} = 0.9$ трещин.

Было проведено 4 расчета. Первый расчет – референтный расчет на мелкой ($\sim 140k$ ячеек) призматической сетке, разрешающей каждую трещину одним слоем тонких трехмерных ячеек. Данный расчет производился со схемой NMPFA для дискретизации потоков в пористой среде. Следующие три расчета проводились на прямоугольно-призматических $74 \times 74 \times 1$ сетках. Вторым и третий расчеты производились с использованием rEDFM и двумя схемами дискретизации потоков в пористой среде, TPFA и NMPFA, соответственно, последний расчет производился методом EDFM+NMPFA.

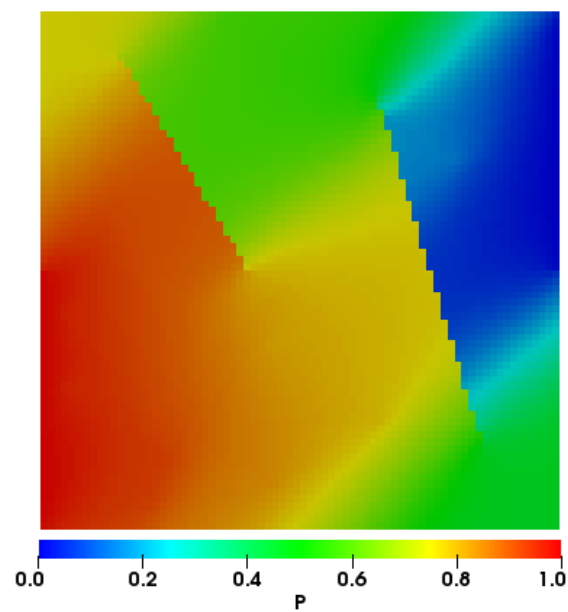
Нелинейные системы решались методом Ньютона до достижения относительной невязки $\varepsilon_{rel} = 10^{-4}$.

Поля давления и концентрации в момент времени $T = 0.025$ представлены на рис. 1.19 и 1.20. Отметим, что решение, полученное методом rEDFM+NMPFA на грубой прямоугольной сетке, практически не отличается от референтного решения. При этом решение, полученное методом

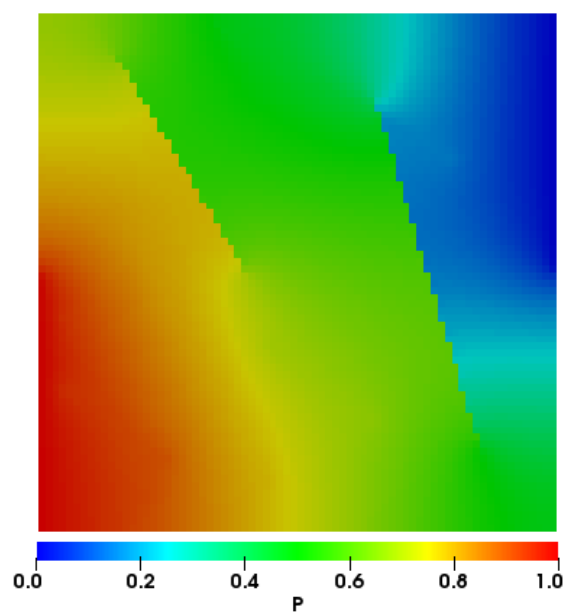
pEDFM+TPFA, в большей степени отличается от референтного решения. Из вида решения, полученного методом EDFM+NMPFA, можно сделать вывод, что EDFM не в состоянии корректно учитывать блокирующие трещины, несмотря на то, что используется схема, улавливающая анизотропию пористой среды.



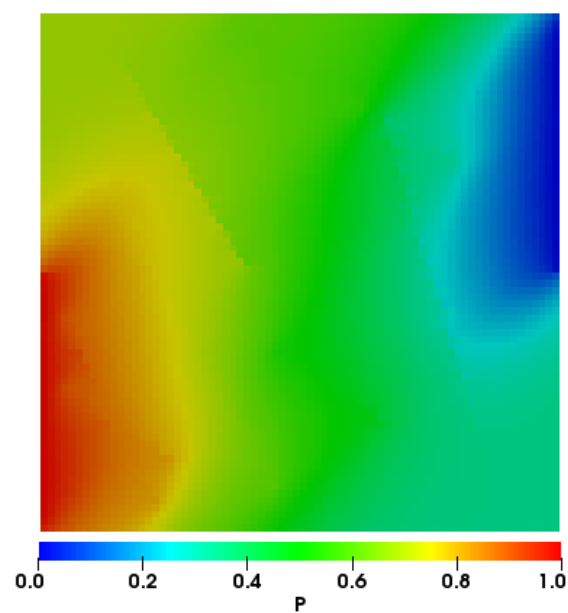
Референтное решение



pEDFM+NMPFA

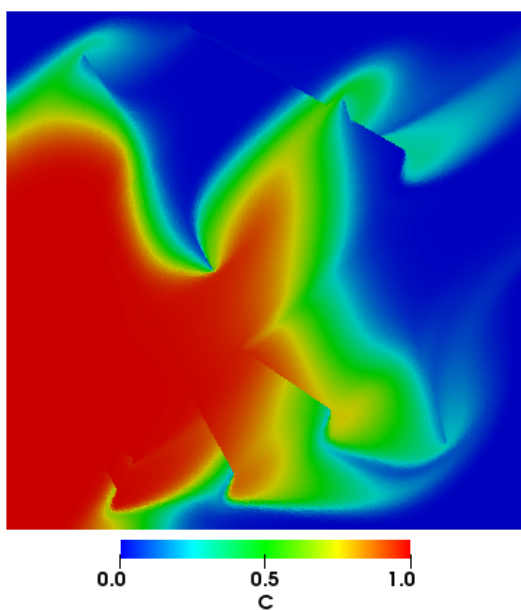


pEDFM+TPFA

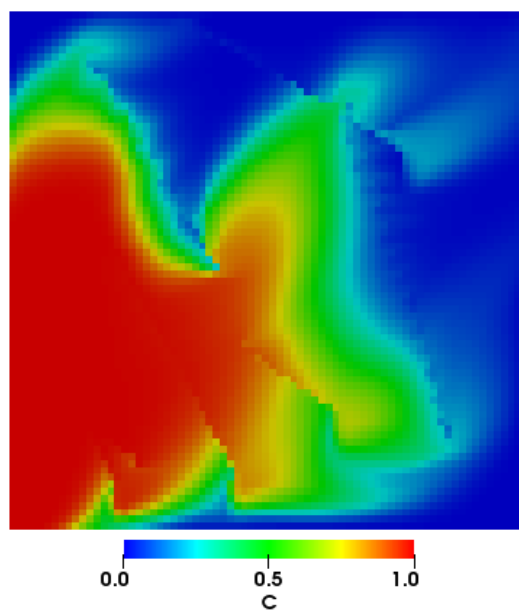


EDFM+NMPFA

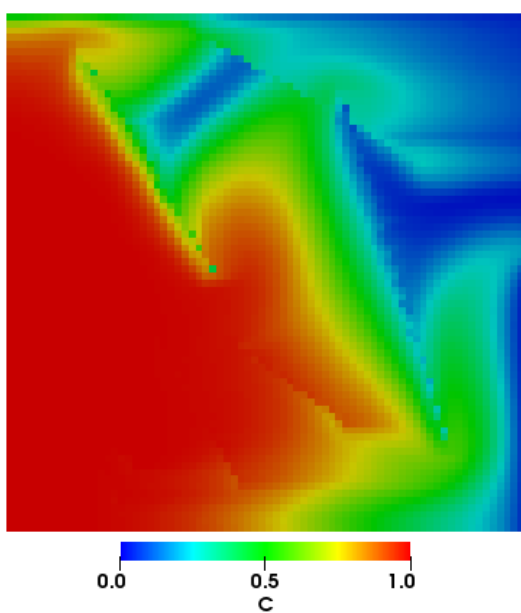
Рис. 1.19. Давление в момент $T = 0.025$.



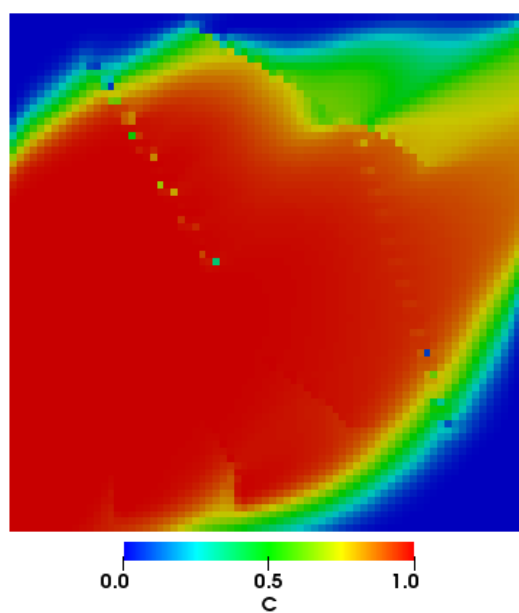
Референтное решение



pEDFM+NMPFA



pEDFM+TPFA



EDFM+NMPFA

Рис. 1.20. Концентрация трасера в момент $T = 0.025$.

1.5.6. Тест на масштабируемость метода

Рассмотрим задачу однофазной фильтрации (с неизвестным гидравлическим напором h) в пористой среде с сетью из 52 крупных проводящих трещин. Сеть трещин получена на основе реальных данных с месторождения и предоставляется в качестве открытых данных в репозитории ¹ для одного из примеров в большом сравнительном исследовании для методов решения задач течений и переноса в областях с трещинами [1].

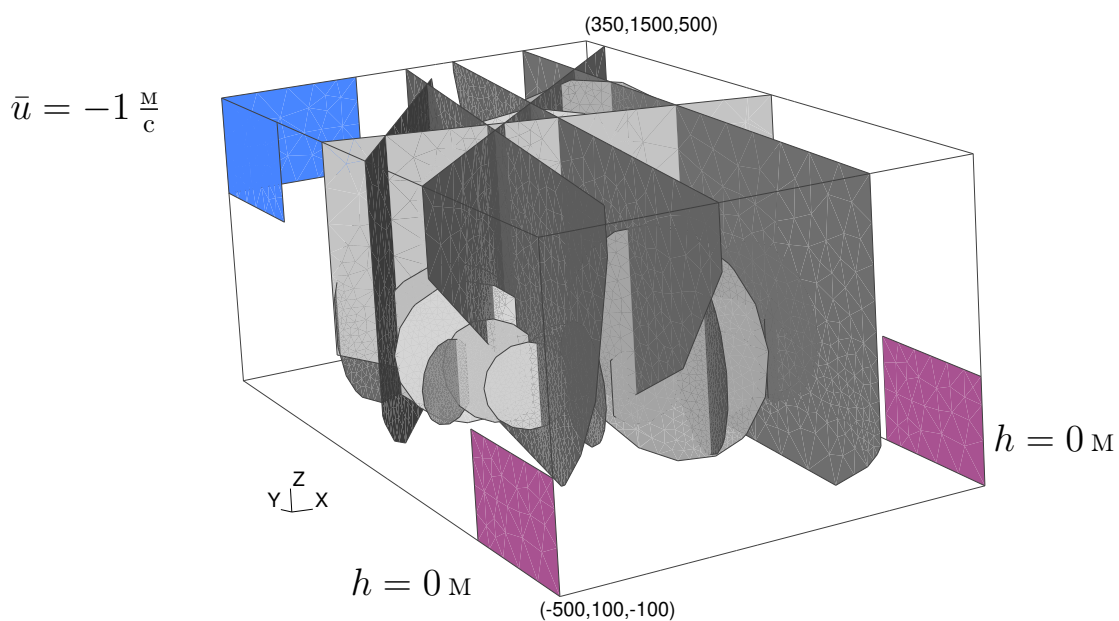


Рис. 1.21. Расчётная область и расположение трещин для задачи field из [1]. На границах расчётной области, в дальнем верхнем углу ($\partial\Omega_{in}$, голубым) задан фиксированный вток $u = -1 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, в ближних нижних углах ($\partial\Omega_{out}$, фиолетовым) задан фиксированный гидравлический напор $h = 0 \text{ м}$.

Расчётная область $\Omega^m = (-500 \text{ м}, 350 \text{ м}) \times (100 \text{ м}, 1500 \text{ м}) \times (-100 \text{ м}, 500 \text{ м})$ представляет собой прямоугольный параллелепипед, расположение трещин представлено на рис. 1.21. Ширина $w_f = 10^{-2} \text{ м}$

¹ <https://git.iws.uni-stuttgart.de/benchmarks/fracture-flow-3d>

и проницаемость всех трещин $\mathbb{K}^f = k^f \mathbb{I}$, $k^f = 10^4 \text{ м}^2$ одинаковы, проницаемость пористой среды $\mathbb{K}^m = k^m \mathbb{I}$, $k^m = 1 \text{ м}^2$ однородна и изотропна. Граница расчётной области $\partial\Omega = \partial\Omega_{in} \cup \partial\Omega_{out} \cup \partial\Omega_N$ разбита на границу втока, вытока и непротекания:

$$\begin{aligned}\partial\Omega_N &= \partial\Omega \setminus (\partial\Omega_{in} \cup \partial\Omega_{out}), \\ \partial\Omega_{in} &= \partial\Omega_{in,0} \cup \partial\Omega_{in,1}, \quad \partial\Omega_{out} = \partial\Omega_{out,0} \cup \partial\Omega_{out,1}, \\ \partial\Omega_{in,0} &= (-500 \text{ м}, -200 \text{ м}) \times \{1500 \text{ м}\} \times (300 \text{ м}, 500 \text{ м}), \\ \partial\Omega_{in,1} &= \{-500 \text{ м}\} \times (1200 \text{ м}, 1500 \text{ м}) \times (300 \text{ м}, 500 \text{ м}), \\ \partial\Omega_{out,0} &= \{-500 \text{ м}\} \times (100 \text{ м}, 400 \text{ м}) \times (-100 \text{ м}, 100 \text{ м}), \\ \partial\Omega_{out,1} &= \{-350 \text{ м}\} \times (100 \text{ м}, 400 \text{ м}) \times (-100 \text{ м}, 100 \text{ м}).\end{aligned}$$

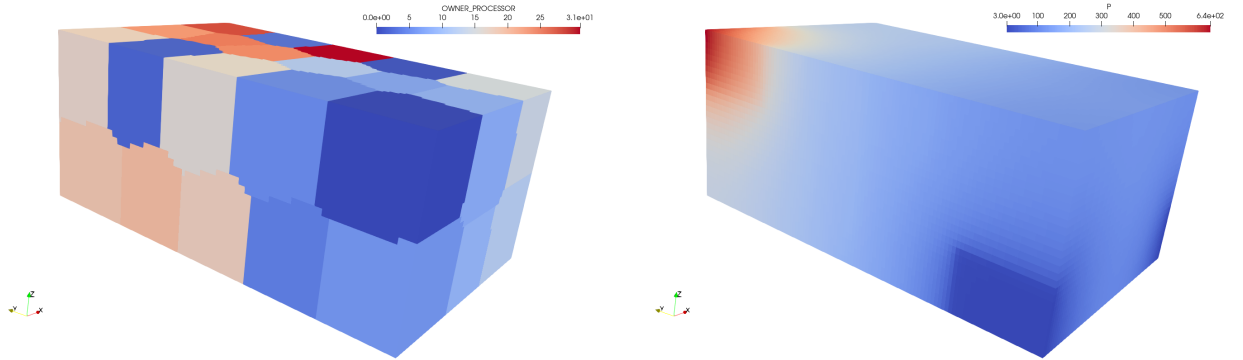


Рис. 1.22. Разбиение расчётной сетки на 32 процессора (слева) и поле решения (справа).

На границе $\partial\Omega_{out}$ задаётся гидравлический напор $h = 0 \text{ м}$, на границе $\partial\Omega_{in}$ задаётся вток $[\mathbb{K}\nabla h]^m \cdot \mathbf{n} = \bar{u} = -1 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Для верификации метода и сравнения результатов с другими дискретизациями требовалось посчитать гидравлический напор вдоль двух прямых $l_1 : (350 \text{ м}, 100 \text{ м}, -100 \text{ м}) \div (-500 \text{ м}, 1500 \text{ м}, 500 \text{ м})$, и $l_2 : (-500 \text{ м}, 100 \text{ м}, -100 \text{ м}) \div (350 \text{ м}, 1500 \text{ м}, 500 \text{ м})$.

Использовалась расчётная сетка $68 \times 112 \times 30$, состоящая из 228480 прямоугольных параллелепипедов со сторонами $12.5 \text{ м} \times 12.5 \text{ м} \times 20 \text{ м}$. По-

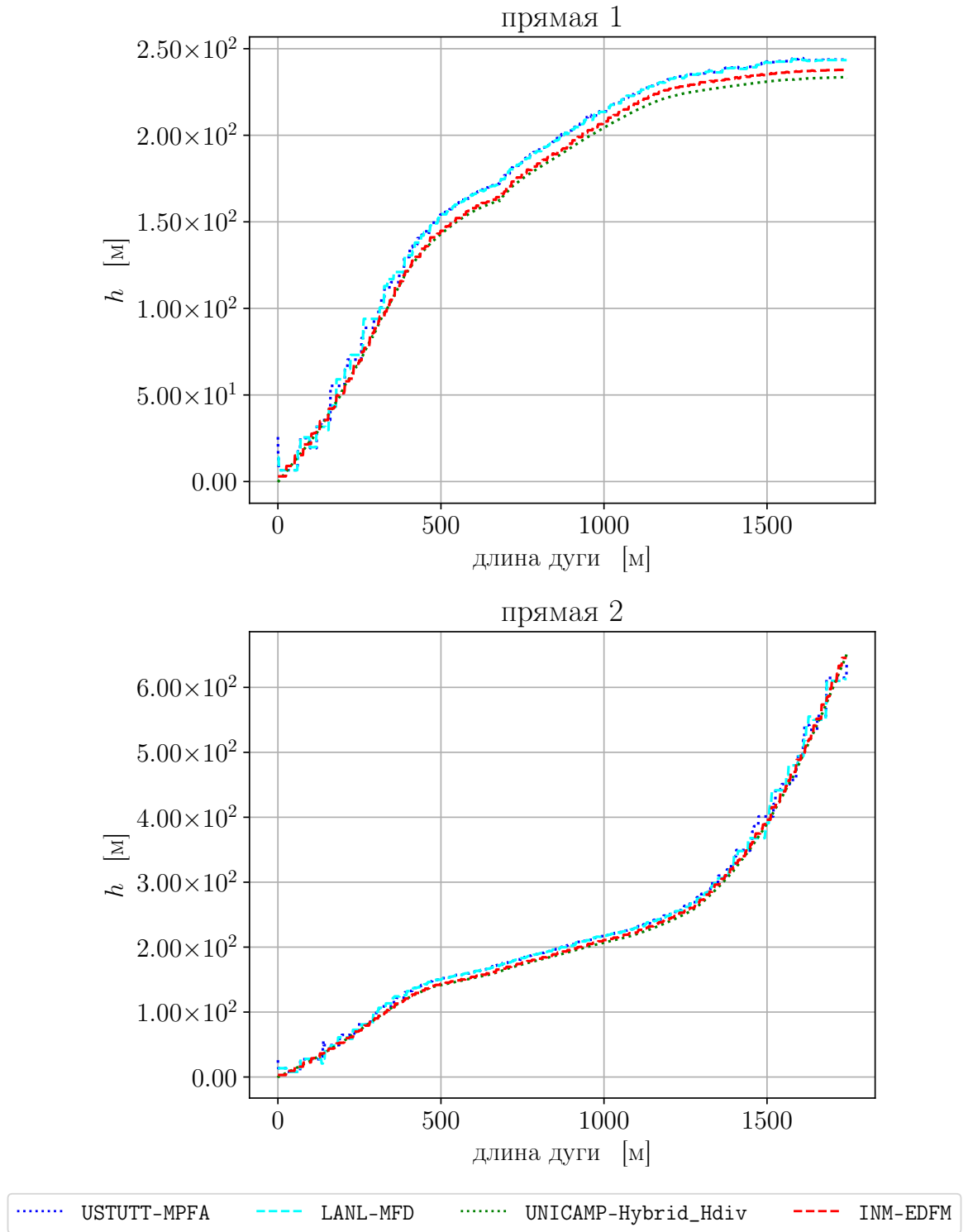


Рис. 1.23. Гидравлический напор вдоль прямых l_1 (слева) и l_2 (справа) для представленного метода (темная прерывистая линия, INM-EDFM) и других методов (результаты взяты из открытого репозитория работы [1]).

сколько тензоры проницаемости сред изотропны, а рассматриваемая сетка

ортогональна, для решения применялся оригинальный метод EDFM.

Для решения систем линейных уравнений использовался итерационный метод BiCGSTAB(l) с предобуславливателем K3BIILU2, основанным на блочной версии метода неполной LU-факторизации второго порядка [57; 58]. Критерием остановки итерационного метода служило падение начальной невязки в $1/\epsilon_{rel}$ раз, $\epsilon_{rel} = 10^{-10}$.

Результаты, полученные в этой работе (рис. 1.23), близки к результатам, полученным другими исследователями с использованием верифицированных методов, что можно считать удовлетворительным результатом.

Таблица 1.6. Времена на: построение матрицы системы t_{mat} , решение системы t_{sol} , обмен данными решения t_{exch} , общее время решения t_{tot} ; число линейных итераций $N_{litters}$, ускорение S .

N_{proc}	t_{mat}	t_{sol}	t_{exch}	t_{tot}	$N_{litters}$	S
1	0.881	3.301	0.322	4.515	83	1
2	0.650	2.270	0.201	3.126	118	1.44
4	0.502	1.239	0.131	1.874	124	2.41
8	0.423	0.848	0.099	1.371	133	3.29
16	0.368	0.482	0.072	0.924	154	4.89
32	0.246	0.274	0.040	0.562	161	8.04
64	0.145	0.160	0.028	0.334	180	13.52
128	0.088	0.112	0.018	0.218	208	20.73

Также были проведены параллельные расчёты с различным числом процессоров. Для разбиения сетки по процессорам использовался метод INNER_KMEANS платформы INMOST, основанный на алгоритме кластеризации k средних. Результаты (времена решения и ускорение) представлены в табл. 1.6. Отметим, что метод ускоряется с увеличением числа процессоров,

полное время на решение задачи падает в 21 раз при увеличении процессоров с 1 до 128.

Дополнительно были проведены параллельные расчёты с использованием монотонной модификации оригинального метода с дискретным принципом максимума для решения, EDFM+NMPFA. Нелинейные системы решались с помощью метода Ньютона до падения относительной невязки в $1/\hat{\epsilon}_{rel}$ раз, $\hat{\epsilon}_{rel} = 10^{-4}$. Поскольку для предложенной выше конфигурации эксперимента нелинейная схема дискретизации сводится к линейной двухточечной схеме, тензор проницаемости в пористой среде изменен на однородный анизотропный, полученный поворотом диагональной матрицы на угол $\theta = \pi/4$ вокруг оси y .

$$\mathbf{K}^m = \mathbf{R}_\theta \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{R}_\theta^T, \mathbf{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Результаты параллельных расчётов (время решения и ускорение) с различным числом процессоров для обновленной конфигурации задачи представлены в табл. 1.7. Отметим, что метод ускоряется и при использовании нелинейных схем дискретизации, полное время на решение задачи падает в 16 раз при увеличении числа процессоров с 1 до 128. Отметим, что среднее время, затраченное на одну нелинейную итерацию, сопоставимо со временем решения линейной задачи.

Несмотря на рост числа линейных итераций, необходимых для достижения заданной точности, время решения линейных систем падает с увеличением числа процессоров.

Таблица 1.7. Времена на: построение матрицы системы t_{mat} , решение системы t_{sol} , обмен данными решения t_{exch} , общее время решения t_{tot} ; число линейных $N_{literals}$ и нелинейных $N_{niterals}$ итераций, ускорение S .

N_{proc}	t_{mat}	t_{sol}	t_{exch}	t_{tot}	$N_{niterals}$	$N_{literals}$	S
1	4.569	12.561	1.447	18.637	4	344	1
2	3.170	7.486	0.901	11.577	4	405	1.61
4	2.314	4.336	0.582	7.242	4	646	2.57
8	2.068	3.075	0.469	5.619	4	689	3.32
16	2.053	1.980	0.384	4.422	4	712	4.21
32	1.607	1.272	0.219	3.102	4	716	6.01
64	0.859	0.642	0.141	1.646	4	789	11.32
128	0.572	0.518	0.090	1.182	4	939	15.77

1.6. Монотонный метод вложенных дискретных трещин для задач двухфазной фильтрации

1.6.1. Математическая модель двухфазной фильтрации

Основные уравнения математической модели двухфазной фильтрации в трещиноватой пористой среде $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ могут быть записаны следующим образом:

1. Сохранение массы каждой фазы:

$$\frac{\partial \rho_\alpha \varphi S_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = q_\alpha, \quad \alpha = w, o. \quad (1.30)$$

2. Закон Дарси:

$$\mathbf{u}_\alpha = -\lambda_\alpha \mathbb{K} (\nabla p_\alpha - \rho_\alpha g \nabla z), \quad \alpha = w, o. \quad (1.31)$$

3. Две фазы заполняют пустоты:

$$S_w + S_o = 1. \quad (1.32)$$

4. Разность давлений фаз равна капиллярному давлению $p_c = p_c(S_w)$:

$$p_o - p_w = p_c. \quad (1.33)$$

Здесь $\mathbb{K}$ – тензор проницаемости, $\varphi(p)$ – пористость, g – гравитационное ускорение, z – глубина относительно некоторого заданного уровня. Для переменных фазы $\alpha = w, o$ введены следующие обозначения: p_α – неизвестное давление, S_α – неизвестная насыщенность, $\mathbf{u}_\alpha$ – неизвестная скорость Дарси; $B_\alpha(p)$ – коэффициент объема пласта, $\rho_\alpha(p) = \rho_{\alpha,0}/B_\alpha(p)$ – плотность, $k_{r\alpha}(S)$ – относительная проницаемость, $\mu_\alpha(p)$ – вязкость, $\lambda_\alpha(p, S) = k_{r\alpha}(S)/\mu_\alpha(p)$ – мобильность, q_α – источник/сток (от нагнетающих/добывающих скважин).

На границах резервуара заданы условия непротекания. Для учета скважин используется формула Писмена [59] – для ячейки пористой среды T с центром $\mathbf{x}_T$, пересеченной скважиной:

$$q_\alpha(\mathbf{x}) = \frac{\rho_\alpha k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} WI \left(p_{bh} - p - \rho_\alpha g(z_{bh} - z) \right) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_T), \quad (1.34)$$

где p_{bh} – забойное давление, z_{bh} – глубина забоя, WI – индекс скважины, который зависит только от свойств среды и не зависит от свойств фаз, δ – дельта-функция.

В качестве неизвестных модели выбраны p_o (давление нефти) и S_w (насыщенность воды). В этом случае остальные переменные могут быть выражены через них и известные входные данные: $p_w = p_o - p_c$, $S_o = 1 - S_w$.

1.6.2. Монотонный метод вложенных дискретных трещин

Область трещиноватого резервуара разбивается на область пористой среды $\Omega^m \subset \mathbb{R}^3$ и трещин $\Omega^f \subset \mathbb{R}^2$, составленную из n_f трещин $\Omega^{f,i}$: $\Omega^f = \bigcup_{i=1}^{n_f} \Omega^{f,i}$.

Закон сохранения масс для каждой из сред Ω^m, Ω^f может быть представлен в следующем виде [51]:

$$\frac{\partial \rho_\alpha \varphi^m S_\alpha^m}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha^{mm}) + \operatorname{div}(\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha^{mf}) = q_\alpha^m, \quad \text{в } \Omega^m, \alpha = w, o, \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial \rho_\alpha \varphi^f S_\alpha^f}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha^{fm}) + \operatorname{div}(\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha^{ff}) = q_\alpha^f, \quad \text{в } \Omega^f, \alpha = w, o, \quad (1.36)$$

где $\mathbf{u}_\alpha^{mm}$ – поток Дарси внутри пористой среды с неизвестными $p^m, S^m, \mathbf{u}_\alpha^{ff}$ – поток Дарси внутри трещин с неизвестными $p^f, S^f, \mathbf{u}_\alpha^{mf} = -\mathbf{u}_\alpha^{fm}$ – поток между пористой средой и трещинами.

Так же, как и для метода EDFM для модели однофазной фильтрации, для каждой ячейки сетки T вводятся неизвестные $p_{\alpha,T}^m, S_{\alpha,T}^m$ и $n_{f,T}$ неизвестных $p_{\alpha,f,i}^f, S_{\alpha,f,i}^f, i = 1, \dots, n_{f,T}$, где $n_{f,T}$ – количество трещин, пересекающих T .

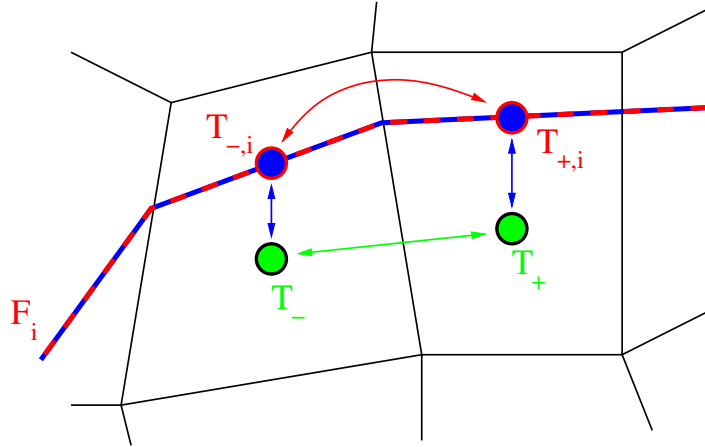


Рис. 1.24. Потоки Дарси для трещины в пористой среде: внутри пористой среды (зеленым), внутри трещин (красным), между пористой средой и трещинами (синим).

Уравнения, записанные для каждой ячейки пористой среды и виртуальных ячеек трещин, образуют нелинейную систему. Для ее дискретизации ис-

пользуется полностью неявный метод по времени и конечно-объемный метод по пространству. Пространственная дискретизация аналогична представленной ранее для модели однофазной фильтрации. Для дискретизации потоковых слагаемых используется противопотоковая дискретизация:

- Для потоков **внутри пористой среды** между ячейками T_+ и T_- используется NTPFA схема [15] для давления и гравитационного слагаемого:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha^{mm}) \approx & \operatorname{upw} \left[\rho_\alpha^{n+1}(p^m) \lambda_\alpha^{n+1}(S^m, p^m), (M_+(p^m)p_+^m - M_-(p^m)p_-^m) \right] \\ & - \operatorname{upw} \left[\rho_\alpha^{n+1}(p^m) \lambda_\alpha^{n+1}(S^m, p^m), (M_+(z)\rho_+gz_+ - M_-(z)\rho_-gz_-) \right]. \end{aligned}$$

- Для потоков **между пористой средой и трещинами** внутри ячейки T используется TPFA схема:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha^{mf}) \approx & \operatorname{upw}_{mf} \left[\rho_\alpha^{n+1}(p) \lambda_\alpha^{n+1}(S, p), M_T^{mf} (p^m - p^f) \right] \\ & - \operatorname{upw}_{mf} \left[\rho_\alpha^{n+1}(p) \lambda_\alpha^{n+1}(S, p), M_T^{mf} (\rho_mgz_m - \rho_fgz_f) \right]. \end{aligned}$$

- Для **потоков внутри трещины** между виртуальными ячейками $T_{-,i}$ и $T_{+,i}$ трещины F_i также используется TPFA схема:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha^{ff}) \approx & \operatorname{upw} \left[\rho_\alpha^{n+1}(p^f) \lambda_\alpha^{n+1}(S^f, p^f), M^{ff} (p_+^f - p_-^f) \right] \\ & - \operatorname{upw} \left[\rho_\alpha^{n+1}(p^f) \lambda_\alpha^{n+1}(S^f, p^f), M^{ff} (\rho_+gz_+ - \rho_-gz_-) \right]. \end{aligned}$$

Здесь $M_\pm(p)$ – коэффициенты нелинейной схемы дискретизации, M^* – коэффициенты метода вложенных дискретных трещин, подробно представленных в 1.2, ‘upw’ – противопотоковые функции:

$$\operatorname{upw}[f(C), v] = \begin{cases} f(C_+)v, & v \geq 0, \\ f(C_-)v, & v < 0, \end{cases} \quad \operatorname{upw}_{mf}[f(C), v] = \begin{cases} f(C_m)v, & v \geq 0, \\ f(C_f)v, & v < 0, \end{cases}$$

Получаемая система алгебраических уравнений нелинейна в силу нелинейности модели двухфазной фильтрации, для ее решения используется метод Ньютона. Использование нелинейной дискретизации потока не вводит значительной дополнительной вычислительной сложности. Несмотря на то, что применяемая нелинейная схема формально двухточечная, ее использование приводит к многоточечному шаблону в матрице якобиана, что в свою очередь приводит к увеличенным затратам на решение линейных систем уравнений (в среднем на 25-100% больше по времени, чем при использовании TRFA схемы) [43].

1.6.3. Численный эксперимент

Рассматривается задача двухфазной фильтрации с одной добывающей, одной нагнетающей скважинами и двумя проводящими трещинами (рис. 1.25) в прямоугольном параллелепипеде $[0, 100] \times [0, 100] \times [0, 10]$ фт.

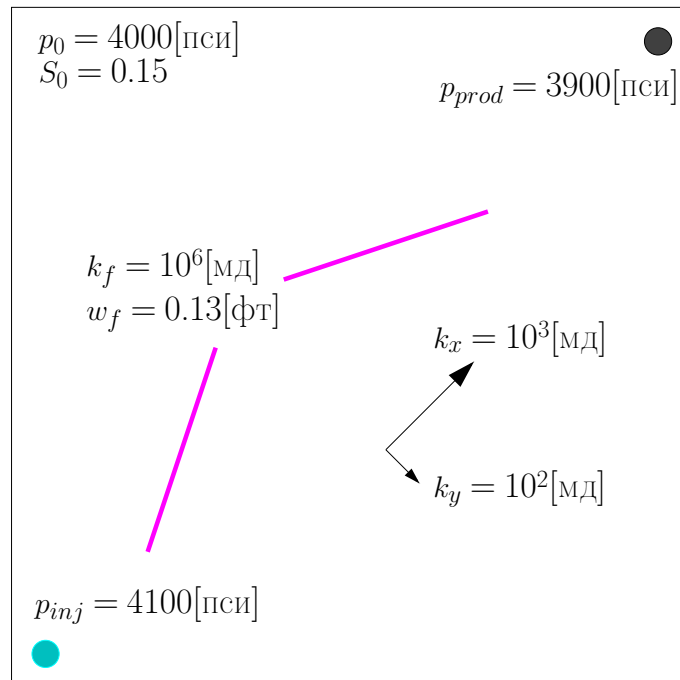


Рис. 1.25. Постановка численного эксперимента для задачи двухфазной фильтрации с двумя трещинами.

Тензор проницаемости пористой среды анизотропный:

$$\mathbb{K}^m = R_z(-\alpha) \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix} R_z(\alpha), \quad R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $k_1 = 10^3$ мД, $k_2 = k_3 = 10^2$ мД, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, пористость среды $\varphi^m = 0.15$.

Изотропный тензор проницаемости в области трещин задан одним параметром $\mathbb{K}^f = k^f \mathbb{I}$, $k^f = 10^6$ мД, апертура $w_f = 0.13$ фт и пористость $\varphi^f = 0.15$ трещин одинакова.

В данной задаче капиллярные силы не учитываются: $p_c(S_w) = 0$. Табличные зависимости относительных проницаемостей $k_{r\alpha}(S_w)$, $\alpha = w, o$ аналогичны численным экспериментам из работы [60].

На нагнетательной и добывающей скважинах заданы забойные давления $p_{inj} = 4100$ пси и $p_{prod} = 3900$ пси. Начальное давление нефти и начальная насыщенность воды во всей области постоянны и равны $p_o|_{t=0} = p_0 = 4000$ пси и $S_w|_{t=0} = S_0 = 0.15$ соответственно.

Модель была запущена с шагом по времени $\Delta t = 1$ день до достижения $T = 90$ дней с целью сравнить решения, полученные тремя различными подходами: 1) первый подход основан на методе EDFM с линейной дискретизацией для всех типов потоков (EDFM+TPFA); 2) второй подход основан на методе EDFM с NTPFA дискретизацией для потоков внутри пористой среды (EDFM+NTPFA); и 3) третий подход основан на изменении расчетной сетки и решении задачи на трехмерной сетке конечно-объемным методом с использованием NTPFA схемы для потоков и явным представлением трещин в виде слоев тонких призматических ячеек (NTPFA).

Для первых двух расчетов использовалась прямоугольная призматическая сетка с $64 \times 64 \times 1$ ячеек в каждом из измерений. Для референтного расчета использовалась более мелкая прямоугольная призматическая сетка

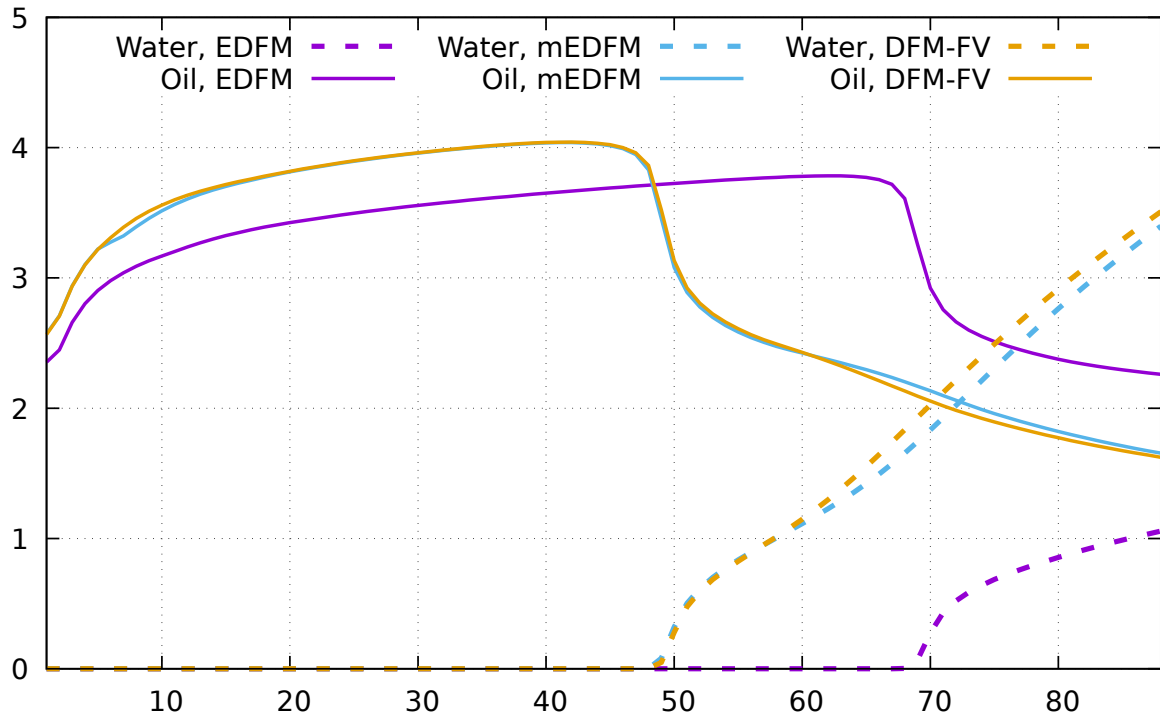


Рис. 1.26. Скорости добычи нефти и воды при использовании методов EDFM+TPFA, EDFM+NTPFA и NTPFA.

с $256 \times 256 \times 1$ ячеек в каждом из измерений.

Скорости добычи воды и нефти с добывающей скважины показаны на рис. 1.26. Методы EDFM+NTPFA и NTPFA дают близкие решения со схожими скоростями добычи и временами прорыва воды, поскольку использование NTPFA схемы на не- $\mathbb{K}$ -ортогональных сетках сохраняет аппроксимацию, в отличие от TPFA схемы: решение методом EDFM+TPFA дает заметно отличающееся решение с большим на 40% временем прорыва воды.

На рис. 1.27 показаны поля давления нефти и насыщенности воды в момент $T = 45$ дней. Можно отметить, что решения, полученные методами EDFM+NTPFA и NTPFA, практически совпадают, в то время как решение, полученное методом EDFM+TPFA, значительно от них отличается. Важно отметить, что для решения задачи методом NTPFA необходимо модифицировать расчетную сетку, чтобы явным образом учесть наличие трещин, что само по себе является отдельной подзадачей и может вносить до-

полнительные трудности в процесс получения решения. В то же время метод EDFM+NTPFA предоставляет альтернативный подход, не требующий изменения сетки.

Также было проведено сравнение численной эффективности методов EDFM+TPFA и EDFM+NTPFA. Для решения систем линейных уравнений применялся предобуславливатель INNER_ILU2 из пакета INMOST, основанный на методе неполной факторизации второго порядка. Матрицы линейных систем, получаемые из дискретизации методом EDFM+NTPFA, являются более плотными, поскольку шаблоны для нелинейных потоков через грань ячейки пористой среды включают в себя больше соседних элементов, чем для линейных схем дискретизаций. Можно предположить, что суммарное время и количество линейных итераций, затрачиваемых на решение методом EDFM+NTPFA, будут больше, чем методом EDFM+TPFA.

	t_{total}	$t_{precond}$	t_{solver}	liters	niters
EDFM+TPFA	316.1	124.4	99.4	46250	1662
EDFM+NTPFA	404.7	94.7	188.4	114375	1635

Таблица 1.8. Задача двухфазной фильтрации: полное время расчета (t_{total}), время на предобуславливание ($t_{precond}$) и решение (t_{solver}) линейных систем уравнений, число линейных (liters) и нелинейных итераций (niters).

Сравнение полного времени расчета, числа линейных и нелинейных итераций представлено в табл. 1.8. Отметим, что полные времена расчета отличаются не более чем на 30%, то есть использование более точного метода EDFM+NTPFA не является слишком затратным с точки зрения вычислений по сравнению с EDFM+TPFA. При этом число нелинейных итераций для обоих методов практически совпадает, что является дополнительным аргументом к использованию EDFM+NTPFA.

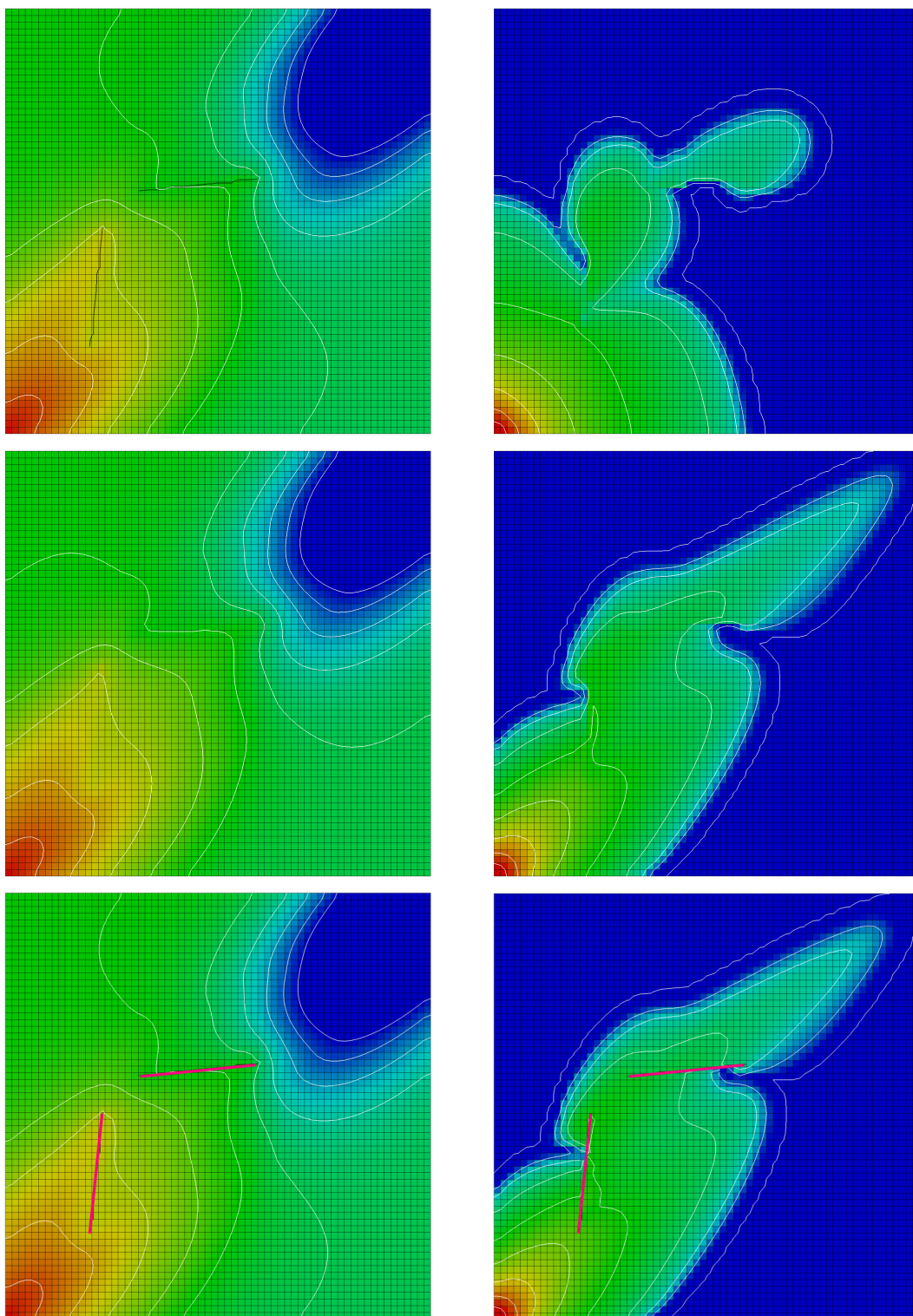


Рис. 1.27. Поля давления нефти (слева) и насыщенности воды (справа) в момент $T = 45$ дней. Сверху: решение методом EDFM; посередине: mEDFM; снизу: референтное решение.

1.7. Выводы

В данной главе предложены монотонные модификации метода вложенных дискретных трещин для решения задач однофазной и двухфазной фильтрации в трещиноватой пористой среде.

Предложенные модификации основаны на совмещении метода вложенных дискретных трещин с нелинейными конечно-объемными дискретизациями потоков внутри пористой среды. Для задачи однофазной фильтрации доказано, что при использовании нелинейных конечно-объемных дискретизаций, сохраняющих неотрицательность решения или соблюдающих дискретный принцип максимума для решения внутри пористой среды, монотонные свойства неотрицательности решения или выполнения дискретного принципа максимума для решения справедливы для решения во всей области, включая область трещин.

Методы реализованы с помощью открытой программной платформы INMOST в рамках внутреннего симулятора многофазных течений, продемонстрирована масштабируемость при увеличении числа процессоров. Проведены численные эксперименты, демонстрирующие выполнение доказанных свойств, наличие сходимости методов при измельчении сетки. Проведена успешная верификация на серии трехмерных численных экспериментов. Показана численная эффективность монотонного метода для задачи двухфазной фильтрации.

1.8. Описание комплексов программ

Описанные выше численные модели были реализованы с помощью открытой программной платформы INMOST [58; 61; 62], представляющей продвинутое инструменты для параллельного численного моделирования на

неструктурированных сетках общего вида, в рамках внутреннего симулятора многофазных течений. Инструментарий платформы использует технологии MPI и OpenMP.

Инструменты для параллельных расчётов, реализованных в INMOST и используемых в разработанных моделях, включают в себя:

- сбалансированное распределение расчётной сетки между процессорами;
- решение разреженных систем линейных уравнений реализованными внутри INMOST масштабируемыми итерационными методами и предобуславливателями;
- инструменты автоматического дифференцирования для нелинейных задач и дискретизаций;
- параллельные структуры данных, позволяющие автоматизировать заполнение и обмен данными между процессорами;
- вспомогательные параллельные процедуры, такие, как сохранение распределённых сеток и другие.

Комплекс программ для численного решения уравнений однофазной и двухфазной фильтрации состоит из модулей, в которых осуществляется вычисление невязок и якобианов для нелинейных методов, итеративные процедуры методов Пикара и Ньютона, нахождение характеристик пересечений полигонов трещин с расчётной сеткой, и другие процедуры.

Диссертантом были реализованы модуль пересечения трещин с расчётной сеткой, модуль дискретизации уравнений однофазной и двухфазной фильтрации в трещиноватой пористой среде с использованием реализованных в стороннем программном комплексе нелинейных двухточечных и многоточечных схем дискретизации потока внутри пористой среды. Теоретической

основой реализованного модуля дискретизации являются описанные в данной главе численные модели фильтрации.

Выходными данными работы модуля пересечения трещин с трехмерной расчетной сеткой являются характеристики пересечения, используемые при построении дискретизации EDFM (площадь полигона трещины внутри ячейки расчетной сетки, среднее нормальное расстояние от ячейки расчетной сетки до трещины и др.). Алгоритм расчета характеристик состоит из нескольких этапов. Первый этап состоит в определении виртуальных (т.е. не разрешенных сеткой) граней трещин в виде набора отрезков на внутренних гранях и ребрах расчетной сетки пористой среды. Данные виртуальные грани и ребра сохраняются для следующего этапа. Второй этап состоит в определении виртуальных степеней свободы для каждой трещины и нахождении коэффициентов передаваемости для линейной двухточечной схемы дискретизации потоков в рамках EDFM. Для каждой ячейки, смежной с сохраненными виртуальными гранями/ребрами этой трещины, производится поиск всех точек ее пересечения с трещиной, после чего данные точки используются для расчетов геометрических характеристик пересечения (площади, расстояния) и коэффициентов передаваемости.

Алгоритм реализации модели можно разбить на этапы. На первом этапе, этапе инициализации, задаются начальные и граничные условия для неизвестной давления (и насыщенности для модели двухфазной фильтрации), рассчитываются коэффициенты передаваемости линейной двухточечной схемы для потоков внутри трещин и между трещинами и ячейками пористой среды, а также нелинейная дискретизация потоков внутри пористой среды. На втором этапе производятся внешние итерации шагов по времени (при решении задач двухфазной фильтрации) и внутренние итерации нелинейного метода Ньютона или Пикара, на каждой из которых производится вычисле-

ние невязки и якобиана. Невязка вычисляется в цикле по граням расчетной сетки и виртуальным граням сетки трещин. Для граней расчетной сетки вычисляется нелинейное выражение для потока. Для виртуальных граней вычисляется линейная двухточечная аппроксимация потоков, включающая в себя неизвестные степени свободы, определенные на трещинах. Якобиан вычисляется автоматически из известного вида невязки с помощью процедур программной платформы INMOST.

Численная модель течения неньютоновских несжимаемых жидкостей

2.1. Введение

Модели течений вязкопластичных и вязкоэластичных жидкостей со свободной поверхностью являются достаточно точными идеализациями многих течений в природе и имеют большой спектр приложений в инженерных задачах. Вязкоэластичность играет большую роль в задачах обработки полимерных жидкостей [63—66]. Течения вязкопластичных жидкостей предлагают адекватное описание течений лавы, снежных оползней и лавин, расплавленного металла, свежего бетона, паст и других концентрированных суспензий в инженерных приложениях. Несмотря на то, что реология таких материалов может быть сложна, модели течения вязкопластичных жидкостей, основанные на уравнениях состояния напряжений и скоростей деформаций, могут предсказывать динамику течения таких жидкостей с разумной точностью [67; 68].

Модели течений неньютоновских жидкостей часто основаны на расширении моделей несжимаемой ньютоновской жидкости, выражаемых через уравнения неразрывности и сохранения импульса. Широко распространенным методом решения уравнений Навье-Стокса течения несжимаемой жидкости является метод проекции, основанный на работах Яненко, Themaма, Чорина и др [17—19]. Развитием этого подхода являются схемы SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) и SIMPLER [20], активно применяемые при моделировании течений вязких несжимаемых жидкостей.

Поверхность раздела между жидкостью и окружающим ее воздухом ча-

сто называют свободной поверхностью. В силу большой разницы в плотностях сред (для воды и воздуха она порядка 1000) инерциальными силами со стороны воздуха пренебрегают, в связи поверхность раздела движется без воздействия внешних сил со стороны воздуха, свободно. Одной из особенностей моделирования течения жидкостей со свободной поверхностью является то, что ее положение необходимо определять наряду с основными неизвестными модели, такими, как скорость и давление внутри жидкости. Для определения положения свободной поверхности используют лагранжевы и эйлеровы подходы, подход с применением частиц.

В методах отслеживания поверхности, основанных на лагранжевом подходе, поверхность явно разрешается узлами сетки, движущимися вместе с поверхностью [69—73]. Недостатком такого подхода является необходимость в регулярном перестроении расчетной сетки для избежания ее запутывания и растяжения ячеек. Другим недостатком являются трудности при реализации данного подхода при топологических изменениях области, таких, как, например, слияние двух капель.

В методах отслеживания поверхности, основанных на эйлеровом подходе, поверхность разрешается неявным образом с помощью глобально определенной функции, для которой решается уравнение переноса по найденному полю скоростей [74—76]. Точность подобного рода методов зависит от точности представления значений переносимой функции, в связи с чем для увеличения точности необходимо адаптивно измельчать сетку в окрестности свободной поверхности. Недостатком этого класса методов является трудность в реализации граничных условий на свободной поверхности, для этих целей часто применяются интерполяции высокого порядка.

Также положение поверхности может определяться с помощью методов частиц [77—79]. В жидкой области создается большое количество частиц с за-

данными атрибутами (положением, массой, скоростью и др.), взаимодействующих между собой согласно predetermined законам, задающим свойства жидкости. Скорости частиц определяются из решения задачи на неподвижной сетке с помощью интерполяции. Недостатком такого подхода является отсутствие непрерывности физических величин при переходе от одной ячейки к другой (что выражается в наличии численного шума), высокая численная вязкость и малая точность при использовании неподвижной эйлеровой сетки.

В данной работе для отслеживания свободной поверхности используется эйлеров подход с использованием функции уровня [24; 76; 80]. Для описания вязкопластичных и вязкоэластичных течений используются часто применяемые в приложениях модели, модели Хершеля-Балкли и Олдройда-Б, соответственно. В частности, модель Олдройда-Б широко используется для сравнительного анализа численных моделей [81—84].

Численный метод приближенного решения уравнений моделей основан на разнесении неизвестных на динамически перестраиваемых сетках типа восьмиричное дерево и полунявном методе решения уравнений переноса жидкой области и системы уравнений сохранения импульса, неразрывности и состояния (для вязкоэластичной жидкости).

Рассматриваемые реализации численных моделей были внедрены в программный комплекс Floctree, в котором ранее была реализована и верифицирована модель течения вязкопластичной жидкости со свободной поверхностью [22]. Предыдущая модель основана на проекционном методе решения уравнений Навье-Стокса и гибридном конечно-объемном/конечно-разностном методе пространственной дискретизации на динамически перестраиваемых сетках типа восьмиричное дерево [21; 85]. Практическая значимость данной работы состоит в реализации модели течения

вязкоэластичной жидкости и переходе от проекционного метода к неявному методу решения уравнений Навье-Стокса, что обеспечивает робастное моделирование течений как вязкоэластичных, так и вязкопластических жидкостей.

Также в рамках предложенного подхода исследуется новая математическая модель течений вязкоэластичной жидкости, основанная на совмещении моделей Олдройда-Б с моделью нео-Гука гиперупругого твердого тела. Результаты верификации описанных моделей с результатами физических и численных экспериментов представлены в последнем разделе.

2.2. Математическая модель течения несжимаемой неньютоновской жидкости со свободной поверхностью

2.2.1. Уравнения течения несжимаемой жидкости

Рассматривается течение несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в ограниченной области $\Omega(t) \in \mathbb{R}^3, t \in (0, T]$, положение которой зависит от времени. Предполагается, что её граница $\partial\Omega(t)$ состоит из статической части Γ_D (твёрдые стенки) и свободной поверхности $\Gamma(t)$.

Законы сохранения импульса и массы могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) &= -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{aligned} \quad \text{в } \Omega(t) \quad (2.1)$$

где $\mathbf{u} = (u, v, w)^T$ – вектор скорости, p – скалярное давление, ρ – постоянная плотность жидкости, $\mathbf{g}$ – вектор гравитационного ускорения, и $\boldsymbol{\tau}$ – девиатор-

ная часть тензора напряжений.

В начальный момент времени $t = 0$ задано положение жидкости и поле скоростей:

$$\Omega(0) = \Omega^0, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}^0. \quad (2.2)$$

На статической границе задано условие Дирихле для скорости жидкости:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_D \quad \text{on} \quad \Gamma_D, \quad (2.3)$$

где $\mathbf{u}_D$ известно. На свободной поверхности $\Gamma(t)$ справедливо кинематическое соотношение:

$$v_\Gamma = \mathbf{u}|_\Gamma \cdot \mathbf{n}_\Gamma, \quad (2.4)$$

где $\mathbf{n}_\Gamma$ – вектор нормали к $\Gamma(t)$, направленный вовне области, v_Γ – скорость на свободной поверхности $\Gamma(t)$ вдоль нормали. Также на свободной поверхности задано условие равенства нулю нормальной компоненты тензора напряжений:

$$-p\mathbf{n}_\Gamma + \boldsymbol{\tau}\mathbf{n}_\Gamma = \zeta\kappa\mathbf{n}_\Gamma - p_{ext}\mathbf{n}_\Gamma \quad \text{on} \quad \Gamma(t), \quad (2.5)$$

где κ – сумма главных кривизн, ζ – коэффициент поверхностного натяжения, p_{ext} – внешнее давление, которое считается равным нулю, $p_{ext} = 0$.

Для того, чтобы отслеживать положение свободной поверхности, $\Gamma(t)$ задаётся неявным образом как поверхность нулевого уровня глобально определенной функции (называемой далее функцией уровня) $\varphi(t, \mathbf{x})$ [76]:

$$\varphi(t, \mathbf{x}) \begin{cases} < 0, & \mathbf{x} \in \Omega(t) \\ > 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega(t)} \\ = 0, & \mathbf{x} \in \Gamma(t) \end{cases} \quad \forall t \in [0, T].$$

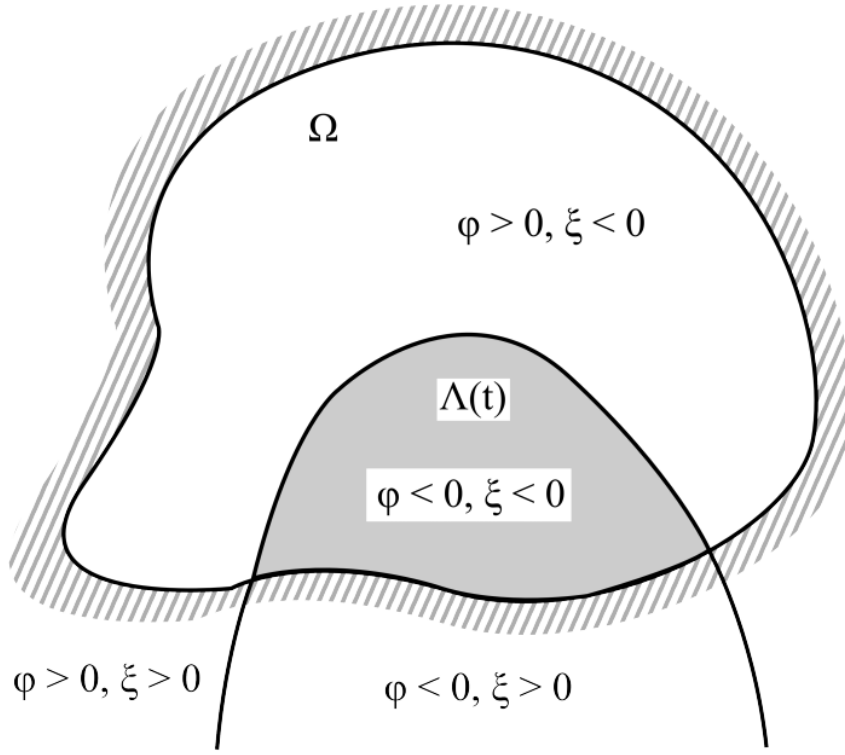


Рис. 2.1. Положение свободной поверхности $\Gamma(t)$ определяется изоуровнем нуля функции уровня $\varphi(t, \mathbf{x})$.

Начальное условие (2.2) определяет $\varphi^0 = \varphi(0, \mathbf{x})$. Функция уровня удовлетворяет уравнению переноса:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \varphi = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^3 \times (0, T], \quad (2.6)$$

где $\tilde{\mathbf{u}}$ – поле скорости жидкости, вынесенное наружу области $\Omega(t)$. Также для удобства на φ часто накладывают дополнительное условие знакового расстояния, выражаемого уравнением эйконала:

$$|\nabla \varphi| = 1. \quad (2.7)$$

Помимо положения границы жидкости, заданной нулевой изоповерхностью функции уровня, через φ также можно выразить внешнюю нормаль $\mathbf{n}_\Gamma = \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|}$ и кривизну свободной поверхности $\kappa = \nabla \cdot \mathbf{n}_\Gamma$.

Реология жидкости определяется с помощью уравнений состояния, записанного в терминах тензора девиаторных напряжений $\boldsymbol{\tau}$. Для дальнейше-

го описания моделей вязкопластичной и вязкоэластичной жидкостей введем обозначение для тензора скоростей деформации: $\mathbf{D} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]$.

2.2.2. Вязкопластичная жидкость

Рассматриваются вязкопластичные жидкости, подчиняющиеся уравнению состояния Хершеля-Балкли:

$$\boldsymbol{\tau} = (K|\mathbf{D}|^{n-1} + \tau_s|\mathbf{D}|^{-1}) \mathbf{D} \leftrightarrow |\boldsymbol{\tau}| > \tau_s, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{0} \leftrightarrow |\boldsymbol{\tau}| \leq \tau_s, \quad (2.9)$$

где $|\mathbf{D}| = \left(2 \sum_{1 \leq i, j \leq 3} \mathbf{D}_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$ – скорость сдвиговых деформаций, K – индекс согласованности, τ_s – предел текучести, n – индекс течения. При $n < 1$ модель описывает псевдопластичную жидкость (её вязкость уменьшается при увеличении $|\mathbf{D}|$), при $n > 1$ – дилатантную жидкость (вязкость увеличивается вместе с ростом $|\mathbf{D}|$). Случай $n = 1$ соответствует модели Бингама, при этом K совпадает с вязкостью жидкости; случай $\tau_s = 0$ соответствует ньютоновской жидкости.

Чтобы избежать неопределённости тензора напряжений в области, задаваемой условием (2.9), в уравнениях (2.8), (2.9) производится регуляризация: $|\mathbf{D}|^{-1}$ заменяется на $|\mathbf{D}|_\epsilon^{-1} = (|\mathbf{D}|^2 + \epsilon^2)^{-\frac{1}{2}}$ с некоторым малым параметром $\epsilon > 0$ [86].

Регуляризация позволяет записать уравнения модели во всей области:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) &= -\nabla p - \nabla \cdot (\mu_\epsilon \mathbf{D}) + \rho \mathbf{g} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{aligned} \quad \text{в } \Omega(t) \quad (2.10)$$

с эффективной вязкостью, зависящей от скоростей сдвига

$$\mu_\epsilon = K|\mathbf{D}|_\epsilon^{n-1} + \tau_s|\mathbf{D}|_\epsilon^{-1}. \quad (2.11)$$

2.2.3. Вязкоэластичная жидкость Олдройда

Рассматриваются вязкоэластичные жидкости, описываемые моделью Олдройда-Б:

$$\boldsymbol{\tau} + \lambda_1 \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = 2\mu_0 (\mathbf{D} + \lambda_2 \overset{\nabla}{\mathbf{D}}), \quad (2.12)$$

где λ_1 – время релаксации, λ_2 – время запаздывания, μ_0 – полная вязкость жидкости. Производная Олдройда $\overset{\nabla}{\mathbf{C}}$ тензора $\mathbf{C}$, определенная следующим образом:

$$\overset{\nabla}{\mathbf{C}} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{C} - (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{C} - \mathbf{C}(\nabla \mathbf{u}) \quad (2.13)$$

учитывает перенос, поворот и растяжение жидкости. Заметим, что $\overset{\nabla}{\mathbf{I}} = -2\mathbf{D}$.

Введём параметр запаздывания $\beta = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, и определим ньютоновскую вязкость $\mu_S = \beta\mu_0$. Также разобьём тензор напряжений на эластичную и вязкую части [81]:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_P + 2\mu_S \mathbf{D}, \quad (2.14)$$

где $\boldsymbol{\tau}_P$ задает эластичную часть тензора напряжений. Параметр $\beta \leq 1$ задаёт отношение ньютоновской вязкости к полной вязкости. При $\beta = 1$ модель задаёт ньютоновскую жидкость.

Подстановка (2.14) в (2.12) позволяет избавиться от $\overset{\nabla}{\mathbf{D}}$ и получить следующее уравнение для эластичного тензора напряжений $\boldsymbol{\tau}_P$:

$$\boldsymbol{\tau}_P + \lambda_1 \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}_P = 2(1 - \beta)\mu_0 \mathbf{D}. \quad (2.15)$$

Далее, введём тензор структуры $\mathbf{A}$, представленный симметричной положительно определённой матрицей размера 3×3 . Тензор структуры описывает макромолекулярную конфигурацию полимерных цепочек эластичной

жидкости. Эластичный тензор напряжений может быть выражен через тензор структуры:

$$\boldsymbol{\tau}_P = \frac{\mu_0}{\lambda_1}(1 - \beta)(\mathbf{A} - \mathbf{I}). \quad (2.16)$$

Из уравнений (2.13), (2.15), (2.16) следует нестационарное уравнение на тензор структуры:

$$\mathbf{A} + \lambda_1 \overset{\nabla}{\mathbf{A}} = \mathbf{I}. \quad (2.17)$$

В результате, управляющие уравнения модели Олдройда-Б, записанные в неизвестных $\mathbf{u}$, p , $\mathbf{A}$, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) - \beta \mu_0 \Delta \mathbf{u} - \mu_0 \lambda_1^{-1} (1 - \beta) \nabla \cdot \mathbf{A} &= -\nabla p + \rho \mathbf{g}, \\ \mathbf{A} + \lambda_1 \overset{\nabla}{\mathbf{A}} &= \mathbf{I}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Предполагается, что в начальный момент времени в жидкости эластичные деформации отсутствуют:

$$\mathbf{A}|_{t=0} = \mathbf{I}. \quad (2.19)$$

На статичной границе Γ_D заданы однородные условия Неймана $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{n}} = 0$. Условие нулевых нормальных напряжений на (2.5) на свободной поверхности $\Gamma(t)$ принимает следующий вид :

$$2\mu_S \mathbf{D}\mathbf{n}_\Gamma + \mu_0 \lambda_1^{-1} (1 - \beta) (\mathbf{A} - \mathbf{I}) \mathbf{n}_\Gamma + p \mathbf{n}_\Gamma = \zeta \kappa \mathbf{n}_\Gamma. \quad (2.20)$$

2.2.4. Модель вязкоэластичного материала Олдройда–нео-Гука

Модель вязкоэластичной жидкости Олдройда-Б, описанная в предыдущем разделе, может быть расширена с помощью добавления дополнительного

слагаемого эластичных напряжений, описываемого моделью нео-Гука несжимаемого вязкоэластичного твердого тела.

У предлагаемой ниже модели имеется соответствующий аналог, модель Зенера линейной изотропной вязкоэластичности твердого тела, также называемой моделью стандартного линейного твердого тела (Standard Linear Solid). В рамках модели Зенера материальная точка твердого тела удовлетворяет следующему уравнению состояния:

$$\sigma(t) = \int_0^t 2G(t-t')\dot{\mathbf{e}}dt' + \mathbf{I} \int_0^t K(t-t')\dot{\varphi}dt'. \quad (2.21)$$

Здесь $\mathbf{e}$ и φ – сдвиговые и объемные деформации, $K(t)$ и $G(t)$ – модули объемных и сдвиговых напряжений, $\dot{}$ означает производную по t' .

В дальнейшем рассматриваются модель несжимаемого твердого тела, в связи с чем объемные деформации φ предполагаются равными нулю, а второе слагаемое уравнения (2.21) исчезает.

Модель Зенера дополняется соотношением для модуля сдвиговых напряжений $G(t)$:

$$G(t) = G_\infty + (G_0 - G_\infty)e^{-\frac{t}{\lambda_1}}, \quad (2.22)$$

Здесь λ_1 – время эластичной релаксации, $G_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} G(t)$ и $G_0 = G(0)$ – длительный и мгновенный модули сдвиговых напряжений. Дополнительными параметрами модели (2.22) являются $\alpha = \frac{G_\infty}{G_0} < 1$ и λ_1 . Отметим, что $G_0 = \frac{\mu_0}{\lambda_1}$.

Временная зависимость $G(t)$ определяется как первым слагаемым типа Гука с постоянным вкладом G_∞ , так и вторым слагаемым с затухающей экспонентой в качестве сомножителя. Для сопоставления модели Зенера с моделью Олдройда-Б, описанной в предыдущем подразделе, последнюю можно записать в интегральной форме [87]:

$$\sigma(t) = \int_0^t \left[\mu_0 \lambda_1^{-1} (1 - \beta) e^{-\frac{t-t'}{\lambda_1}} + 2\beta\mu_0 \delta(t-t') \right] \dot{\mathbf{e}} dt' \quad (2.23)$$

Отметим, что в (2.23) второе слагаемое соответствует вязким напряжениям ($\delta(t)$ - дельта-функция Дирака), а первое слагаемое так же, как и в (2.22), содержит затухающую экспоненту.

Предлагается явным образом модифицировать модель Олдройда разбиением тензора девиаторных напряжений $\boldsymbol{\tau}$ на два слагаемых. Первое слагаемое эластичных напряжений подчиняется закону Олдройда-Б, второе соответствует напряжениям гиперупругого материала нео-Гука:

$$\boldsymbol{\tau} = (1 - \alpha)\boldsymbol{\tau}_1 + \alpha\boldsymbol{\tau}_2, \quad (2.24)$$

$$\boldsymbol{\tau}_1 + \lambda_1 \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}_1 = 2\beta\mu_0(\mathbf{D} + \lambda_2 \overset{\nabla}{\mathbf{D}}), \quad (2.25)$$

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}_2 = 2\frac{\mu_0}{\lambda_1}\mathbf{D}. \quad (2.26)$$

Складывая уравнение (2.25) с (2.26), умноженным на λ_1 , и избавляясь от $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}_1$, можно получить следующее выражение на $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}_2$:

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}_2 = \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} - \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}_1 = \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} - 2\lambda_1 G_0 \overset{\nabla}{\mathbf{D}} + \lambda_1 \overset{\nabla\nabla}{\boldsymbol{\tau}} - 2(1 - \alpha)\lambda_1 \lambda_2 G_0 \overset{\nabla\nabla}{\mathbf{D}} = 2\alpha G_0 \mathbf{D}, \quad (2.27)$$

где $\overset{\nabla\nabla}{\mathbf{C}} := \overset{\nabla}{\overset{\nabla}{\mathbf{C}}}$.

Для упрощения (2.27) разобьем тензор напряжений $\boldsymbol{\tau}$ на эластичную и вязкую части:

$$\boldsymbol{\tau} = 2(1 - \alpha)\beta\mu_0 \mathbf{D} + \boldsymbol{\tau}_P, \quad (2.28)$$

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}_P = 2(1 - (1 - \alpha)\beta) \frac{\mu_0}{\lambda_1} \mathbf{D} + \mathbf{B}_1, \quad (2.29)$$

где $\mathbf{B}_1$ – оставшаяся тензорная часть, подчиняющаяся уравнению:

$$\mathbf{B}_1 + \lambda_1 \overset{\nabla}{\mathbf{B}}_1 = 2(1 - \alpha)(\beta - 1) \frac{\mu_0}{\lambda_1} \mathbf{D}. \quad (2.30)$$

Подстановка $\mathbf{B}_1 = \frac{(1-\alpha)(\beta-1)}{\lambda_1} \frac{\mu_0}{\lambda_1} (\mathbf{A}_1 - \mathbf{I})$ сводит уравнение (2.30) к

$$\overset{\nabla}{\mathbf{A}}_1 = \frac{\mathbf{I} - \mathbf{A}_1}{\lambda_1}. \quad (2.31)$$

Последняя подстановка $\boldsymbol{\tau}_P = (1 - (1 - \alpha)\beta) \frac{\mu_0}{\lambda_1} (\mathbf{A}_2 - \mathbf{I})$ позволяет избавиться от слагаемого с тензором скоростей деформации в (2.29):

$$\overset{\nabla}{\mathbf{A}}_2 = \frac{\mathbf{B}_1}{(1 - (1 - \alpha)\beta) \frac{\mu_0}{\lambda_1}} = \frac{(1 - \alpha)(1 - \beta) \mathbf{I} - \mathbf{A}_1}{1 - (1 - \alpha)\beta} \frac{1}{\lambda_1}. \quad (2.32)$$

Наконец, управляющие соотношения для тензора девиаторных напряжений $\boldsymbol{\tau}$ с неизвестными $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ выглядят следующим образом:

$$\boldsymbol{\tau} = 2(1 - \alpha)\beta\mu_0 \mathbf{D} + (1 - (1 - \alpha)\beta) \frac{\mu_0}{\lambda_1} (\mathbf{A}_2 - \mathbf{I}), \quad (2.33)$$

$$\overset{\nabla}{\mathbf{A}}_2 = \frac{(1 - \alpha)(1 - \beta) \mathbf{I} - \mathbf{A}_1}{1 - (1 - \alpha)\beta} \frac{1}{\lambda_1}, \quad (2.34)$$

$$\overset{\nabla}{\mathbf{A}}_1 = \frac{\mathbf{I} - \mathbf{A}_1}{\lambda_1}. \quad (2.35)$$

Условие отсутствия эластичных деформаций в начальный момент времени приводит к начальным условиям $\mathbf{A}_1|_{t=0} = \mathbf{I}$ и $\mathbf{A}_2|_{t=0} = \mathbf{I}$. Также предполагается, что неизвестные $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ подчиняются одним и тем же граничным условиям: однородным условию Неймана на твердой границе и условию равенства нулю вектора поверхностных сил на свободной границе [5].

Замечание. В случае $\alpha = 0$ модель (2.33)–(2.35) сводится к модели Олдройда

$$\tau = 2\beta\mu_0\mathbf{D} + (1 - \beta)\frac{\mu_0}{\lambda_1}(\mathbf{A}_1 - \mathbf{I}),$$

$$\overset{\nabla}{\mathbf{A}}_1 = \frac{\mathbf{I} - \mathbf{A}_1}{\lambda_1}.$$

Действительно, уравнения (2.34) и (2.35) содержат одну и ту же правую часть $\frac{\mathbf{I} - \mathbf{A}_1}{\lambda_1}$. поэтому, из равенства начальных и граничных условий на $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ следует $\mathbf{A}_1(t) = \mathbf{A}_2(t)$.

2.3. Численный метод

Численный метод для приближенного решения (2.6), (2.10) для вязкопластичной и (2.6), (2.18) для вязкоэластичной жидкостей основан на подходе, предложенном в работах [21; 23; 85] для течений ньютоновских и вязкопластичных жидкостей. Численный метод для приближенного решения модели вязкоэластичного материала (2.6), (2.33), (2.34), (2.35) аналогичен методу решения для модели Олдройда: неизвестные $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ с точностью до постоянного множителя подчиняются тем же уравнениям, граничным и начальным условиям, что и $\mathbf{A}$.

Аппроксимации полей скорости, давления, функции уровня и тензора структуры в момент времени t^n будем обозначать как $\mathbf{u}^n, p^n, \varphi^n, \mathbf{A}^n, \mathbf{A}_1^n, \mathbf{A}_2^n$.

Начальные условия (2.2) задают $\mathbf{u}^0$ и φ^0 . Функция уровня φ^n неявно определяет положение жидкости в момент времени $t = t^n$ посредством определения расчетной области следующим образом: $\Omega^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \varphi^n(\mathbf{x}) < 0\}$.

При известных полях $\mathbf{u}^n, p^n, \varphi^n$ (и $\mathbf{A}^n$ или $\mathbf{A}_1^n, \mathbf{A}_2^n$ для вязкоэластичных жидкостей) метод состоит из двух шагов:

- Найти новую функцию уровня φ^{n+1} и расчетную Ω^{n+1} в момент времени t^{n+1} ,
- Решить уравнения (2.1) в Ω^{n+1} неявным методом по времени для нахождения полей $\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}$ (и $\mathbf{A}^{n+1}$ или $\mathbf{A}_1^{n+1}, \mathbf{A}_2^{n+1}$ для вязкоэластичной жидкости).

Эти шаги описаны в следующих разделах. Предполагается, что расчетная сетка представляет собой сетку типа восьмеричное дерево в ограничивающем кубе, допускающую измельчение и разгрубление (рис. 2.2). Предполагается, что размер соседних через ребро ячеек не может отличаться больше, чем в два раза.

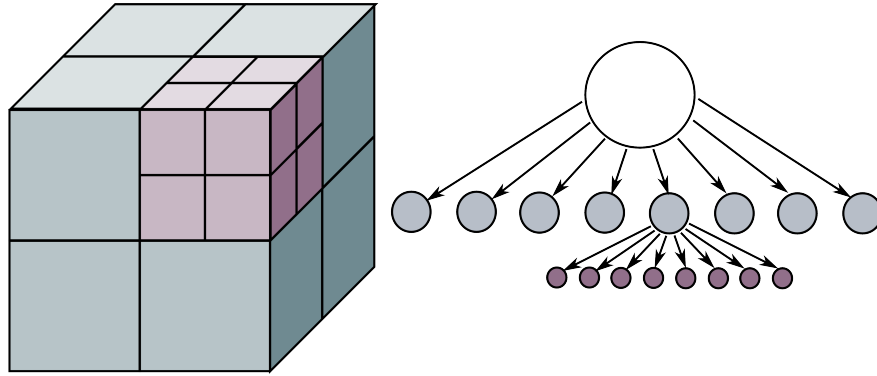


Рис. 2.2. Сетки типа восьмеричное дерево

2.3.1. Обновление положения свободной поверхности

При заданных полях $\mathbf{u}^n$ и φ^n , таких, что $\nabla \cdot \mathbf{u}^n = 0$, $|\nabla \varphi^n| = 1$, мы находим поле φ^{n+1} следующим образом.

- 1: Адаптация сетки. Расчетная сетка измельчается к *предсказываемому* положению нуля функции уровня $\tilde{\varphi}^{n+1}$.
- 2: Перенос свободной поверхности. Уравнения (2.6) решаются полулагранжевым методом с интерполяцией высокого порядка и лимитером [23;

88] , чтобы найти новую функцию уровня φ_d^{n+1} . Измельчение сетки на предыдущем подшаге важно для больших временных шагов, поскольку переносимая жидкая граница может проходить через грубые ячейки сетки, что может привести к потере точности.

- 3: Коррекция объема. Функция уровня обновляется: $\varphi^{n+1} = \varphi_d^{n+1} + \eta$, где η – решение уравнения сохранения объема жидкости $|V(\varphi_d^{n+1} + \eta) - V(\varphi^n)| = 0$. Расчетная область на следующем временном слое Ω^{n+1} и свободная граница Γ^{n+1} задается через $\varphi^{n+1}(x) < 0$ и $\varphi^{n+1}(x) = 0$ соответственно. Подробное описание схемы сохранения объема представлено в работе [89].
- 4: Перестроение сетки. Сетка адаптируется под Γ^{n+1} посредством измельчения и разгрубления ячеек.
- 5: Переинтерполяция. Все дискретные неизвестные отображаются на новую сетку с помощью интерполяции [21].
- 6: Реинициализация. Функция уровня φ^{n+1} обновляется, чтобы удовлетворить уравнению эйконала (2.7), после чего производится дополнительный подшаг коррекции объема [89].

После обновления положения свободной поверхности известны как φ^{n+1} , Ω^{n+1} , так и геометрические характеристики Γ^{n+1} , такие, как внешняя нормаль $\mathbf{n}_\Gamma^{n+1}$ и сумма главных кривизн κ^{n+1} .

2.3.2. Неявная схема решения уравнений течения жидкости

Линеаризованная полудискретная система уравнений (2.1) может быть выписана в общем виде:

$$\rho \left(\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right]^{n+1} + \left(\widetilde{\mathbf{u}^{n+1}} \cdot \nabla \right) \mathbf{u}^{n+1} \right) - \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}^{n+1} + \nabla p^{n+1} = \rho \mathbf{g}, \quad (2.36)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0, \quad (2.37)$$

с экстраполированной скоростью $\widetilde{\mathbf{u}^{n+1}} = \mathbf{u}^n + \xi(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1})$, где $\xi = \Delta t^n / \Delta t^{n-1}$.

Для вязкопластичной жидкости производится линейризация тензора девиаторных напряжений:

$$\hat{\boldsymbol{\tau}}^{n+1} = 2\mu_\epsilon(\widetilde{\mathbf{D}^{n+1}})\mathbf{D}^{n+1}.$$

где μ_ϵ – зависящий от скоростей деформации коэффициент эффективной вязкости (2.11), $\widetilde{\mathbf{D}^{n+1}}$ – тензор скоростей деформации для $\widetilde{\mathbf{u}^{n+1}}$.

Для вязкоэластичной жидкости девиаторные напряжения $\hat{\boldsymbol{\tau}}^{n+1} = \beta\mu_0\mathbf{D}^{n+1} + \frac{\mu_0}{\lambda_1}(1 - \beta)(\mathbf{A}^{n+1} - \mathbf{I})$ зависят от поля $\mathbf{A}^{n+1}$, которое удовлетворяет уравнению состояния:

$$\mathbf{A}^{n+1} + \lambda_1 \left(\left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right]^{n+1} + \left(\widetilde{\mathbf{u}^{n+1}} \cdot \nabla \right) \mathbf{A}^{n+1} - (\nabla \mathbf{u}^n)^T \mathbf{A}^{n+1} - \mathbf{A}^{n+1} (\nabla \mathbf{u}^n) \right) = \mathbf{I}. \quad (2.38)$$

Частная производная по времени дискретизируется с помощью схемы обратных разностей второго порядка:

$$\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right]^{n+1} = \frac{\alpha_1 \mathbf{u}^{n+1} + \alpha_2 \mathbf{u}^n + \alpha_3 \mathbf{u}^{n-1}}{\Delta t^n}, \quad (2.39)$$

$$\alpha_1 = \frac{2\xi + 1}{\xi + 1}, \quad \alpha_2 = -\frac{\xi^2 + 2\xi + 1}{\xi + 1}, \quad \alpha_3 = \frac{\xi^2}{\xi + 1}. \quad (2.40)$$

Дискретизация уравнений (2.36)–(2.38) основана на гибридном конечно-объемном/конечно-разностном методе на сетках типа восьмеричное дерево с разнесенным расположением неизвестных. [21]. Полученные уравнения составляют линейную систему с неизвестными $\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}$ (дополнительно, $\mathbf{A}^{n+1}$

или $\mathbf{A}_1^{n+1}, \mathbf{A}_2^{n+1}$), решаемую итерационными методами. Степени свободы давления определены в центрах ячеек, компоненты вектора неизвестной скорости расположены в центрах граней ячеек таким образом, что на каждой грани хранится нормальная компонента скорости, компоненты тензора структуры хранятся в узлах сетки. Поскольку тензор структуры представляется симметричной матрицей размера 3×3 , в каждом узле хранится 6 компонент.

Конечно-объемная дискретизация инерционных и диффузионных слагаемых основана на введении контрольных объемов V' для граней ячеек F . Контрольный объем V' имеет в сечении грань F и его границы задаются переносом F в нормальном направлении в стороны соседних с F ячеек на половину расстояния соседних ячеек.

Конечно-объемная дискретизация инерционного слагаемого записывается в линеаризованной консервативной форме $\left(\widetilde{\mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla}\right) \mathbf{u}^{n+1} = \nabla \cdot \left(\mathbf{u}^{n+1} \widetilde{\mathbf{u}^{n+1}}\right)$. Например, для компоненты x выражение принимает следующий вид:

$$\nabla \cdot (u^{n+1} \widetilde{\mathbf{u}^{n+1}})(\mathbf{x}_F) \approx |V'|^{-1} \sum_{F' \in \mathcal{F}(V')} |F'| (\widetilde{\mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n}})(\mathbf{x}_{F'}) u^{n+1}(\mathbf{x}_{F'}),$$

где $\mathcal{F}(V')$ – множество граней контрольного объема, $\mathbf{x}_{F'}$ – центр масс грани F' , $\mathbf{n}$ – единичная внешняя к грани нормаль. Конвекционный поток $(\widetilde{\mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n}}) u^{n+1}$ дискретизируется противопотоковыми конечными разностями третьего порядка с использованием интерполяции [21].

Для конечно-объемной дискретизации диффузионного слагаемого также используется контрольный объем V' :

$$\nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{u}^{n+1})(\mathbf{x}_F) \approx |V'|^{-1} \sum_{F' \in \mathcal{F}(V')} |F'| (\mu \nabla_h \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{x}_{F'}),$$

где $\mu = \mu_\epsilon(\widetilde{\mathbf{D}^{n+1}})$ – эффективная вязкость для модели вязкопластичной жидкости, или $\mu = \beta \mu_0 = \text{const}$ – ньютоновская вязкость для модели вязкоэла-

стичной жидкости. Вязкий поток $\mu \nabla_h \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n}$ дискретизируется конечными разностями третьего порядка с использованием интерполяции для каждой компоненты скорости [21].

Конечно-объемная дискретизация уравнения неразрывности (2.37) для ячейки восьмидерева V с гранями $\mathcal{F}(V)$ принимает следующий простой вид:

$$|V|^{-1} \sum_{F \in \mathcal{F}(V)} |F| (\mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{x}_F) = 0. \quad (2.41)$$

Поток $(\mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{x}_F)$ является нормальной компонентой скорости, определенной на гранях $\mathcal{F}(V)$, благодаря размещенному расположению неизвестных.

Градиент давления дискретизируется конечно-разностным методом, основанным на разложении Тейлора и методе наименьших квадратов для восполнения неизвестной линейной функции [23].

Дискретизации эластичных слагаемых и уравнения переноса тензора структуры рассматриваются далее.

2.3.3. Дискретизация эластичных слагаемых и тензора структуры

Слагаемые, содержащие тензор структуры $\mathbf{A}$, входят в уравнения (2.36), (2.38) и включают в себя слагаемое переноса $(\widetilde{\mathbf{u}^{n+1}} \cdot \nabla) \mathbf{A}$, поворота-растяжения $(\nabla \mathbf{u}^n)^T \mathbf{A} - \mathbf{A}(\nabla \mathbf{u}^n)$, и дивергенции тензора

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial A_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial A_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial A_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial A_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial A_{zz}}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

Компоненты x, y, z последнего слагаемого дискретизируются в центрах граней, ортогональных осям x, y, z соответственно. Для этого сначала применяется дискретизация частных производных в узлах сетки, после чего производится осреднение по узлам грани. Частные производные в узлах сетки

аппроксимируются конечными разностями второго порядка. В случае отсутствия степени свободы в шаблоне конечных разностей значение интерполируется с соседних узлов. Например, в рамках обозначений рис. 2.3,

$$\frac{\partial A_{xy}}{\partial x}(\mathbf{x}_V) \approx \frac{r}{(h+r)h} A_{xy}(\mathbf{x}_{1,+}) + \frac{h-r}{hr} A_{xy}(\mathbf{x}_V) - \frac{h}{(h+r)r} A_{xy}(\mathbf{x}_{1,-}), \quad (2.43)$$

где $h = |\mathbf{x}_{1,+} - \mathbf{x}_V|$, $r = |\mathbf{x}_{1,-} - \mathbf{x}_V|$.

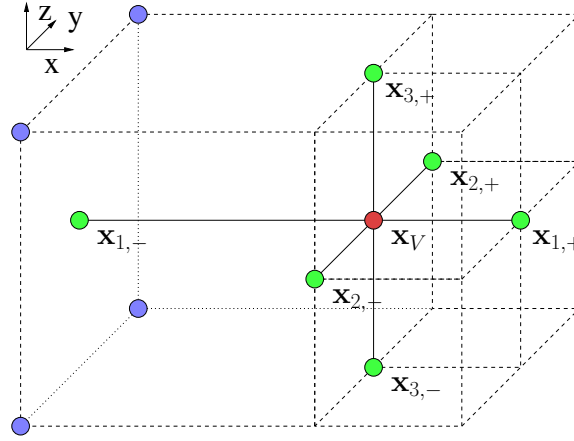


Рис. 2.3. Шаблон дискретизации (зеленым) для частных производных в узле $\mathbf{x}_V$ (красным). Недостающее значение в $\mathbf{x}_{1,-}$ интерполируется с соседних узлов (синим).

Дискретизация частных производных $\mathbf{A}$ в слагаемом переноса $(\widetilde{\mathbf{u}^{n+1}} \cdot \nabla) \mathbf{A}$ производится в центрах граней тем же способом. В это же время нормальные компоненты экстраполированных скоростей $\widetilde{\mathbf{u}^{n+1}}$ определены в центрах граней ячеек.

Выражение для слагаемого поворота/растяжения $\mathbf{M}$ может быть записано через тензор скоростей деформации $\mathbf{D}$ и тензор завихренности $\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^T)$:

$$\mathbf{M} = (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{A} + \mathbf{A}(\nabla \mathbf{u}) = \mathbf{W} \mathbf{A} - \mathbf{A} \mathbf{W} + (\mathbf{A} \mathbf{D} + \mathbf{D} \mathbf{A}),$$

что объясняет выбор имени для слагаемого. Симметричный тензор поворота

та/растяжения $\mathbf{M}$ может быть записан в покомпонентном виде:

$$\begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{zz} \\ M_{xy} \\ M_{xz} \\ M_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u_x A_{xx} + (u_y + v_x) A_{xy} + (u_z + w_x) A_{xz} \\ (u_y + v_x) A_{xy} + 2v_y A_{yy} + (v_z + w_y) A_{yz} \\ (w_x + u_z) A_{xz} + (w_y + v_z) A_{yz} + 2w_z A_{zz} \\ (u_x + v_y) A_{xy} + v_x (A_{xx} + A_{yy}) + v_z A_{xz} + w_x A_{yz} \\ (u_x + w_z) A_{xz} + w_x (A_{xx} + A_{zz}) + v_x A_{yz} + w_y A_{xy} \\ (v_y + w_z) A_{yz} + w_y (A_{yy} + A_{zz}) + u_y A_{xz} + w_x A_{xy} \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

Частные производные u_x, v_y, w_z аппроксимируются в узле $\mathbf{x}_V$ сетки полиномом первого порядка, построенного с помощью метода наименьших квадратов, опорными точками которого выбраны центры ячеек, содержащих узел $\mathbf{x}_V$; в свою очередь, частные производные в этих опорных точках $u_x^h(\mathbf{x}_{c_i}), v_y^h(\mathbf{x}_{c_i}), w_z^h(\mathbf{x}_{c_i})$ аппроксимируются центральными разностями второго порядка. Остальные частные производные скорости (например, u_y) в $\mathbf{x}_V$ аппроксимируются направленной производной линейной функции от двух переменных, построенной с помощью метода наименьших квадратов и определенной на плоскости, ортогональной оси выбранной компоненты (например, плоскости yz). В качестве опорных точек метода используются центры граней, ортогональной оси выбранной компоненты (например, оси x), и ячеек, содержащих узел $\mathbf{x}_V$. Значения компоненты скорости в опорных точках либо известно (для центров выбранных граней), либо может быть получено интерполяцией значений с граней (для центров выбранных ячеек).

2.4. Верификация численных моделей

В этом разделе обсуждаются результаты численных экспериментов для представленных выше моделей. В первом численном эксперименте рассматривается задача падения вязкоэластичной капли Олдройда-Б на твердую стенку

[81; 90]. Второй численный эксперимент основан на задаче колебаний вязкопластичной [22; 91] и вязкоэластичной каплей в вакууме. В третьем эксперименте рассматривается задача прорыва дамбы, заполненной вязкопластичной жидкостью, результаты численной модели сравниваются с реальными данными из работы [92]. В четвертом эксперименте рассматривается задача компрессии многоклеточного сфероиды из мезенхимальных стволовых клеток, результаты расчетов сравниваются с лабораторными данными и данными расчетов конечно-элементного программного пакета моделирования ABAQUS.

2.4.1. Падение вязкоэластичной капли на твердую поверхность

Данный эксперимент был предложен в работе [81] для верификации моделей вязкоэластичных жидкостей со свободной поверхностью.

Постановка теста представлена на рис. 2.4. Сферическая капля с диаметром d_0 падает с высоты H под действием силы тяжести на твердую поверхность. В начальный момент времени капля движется вертикально вниз со скоростью $w = -U$, напряжения $\boldsymbol{\tau}$ отсутствуют; поверхностное натяжение считается равным нулю. После того, как капля ударяется о поверхность, ее диаметр $d(t)$ увеличивается до тех пор, пока эластичные силы не превысят инерционные, после чего капля начнет поджиматься, в диаметр капли – уменьшаться.

Сначала было произведено сравнение результатов с результатами из литературы для падения капли из ньютоновской жидкости. Параметры задачи указаны в табл. 2.1. Модель продолжает свою работу до момента времени $t = 5d_0/U = 0.1\text{с}$. Для расчетов использовались две динамически адаптивные расчетные сетки: сетка М1 с минимальным и максимальным размерами ячеек $h_{min} = d_0/32$, $h_{max} = d_0/16$, и сетка М2 с $h_{min} = d_0/64$, $h_{max} = d_0/32$.

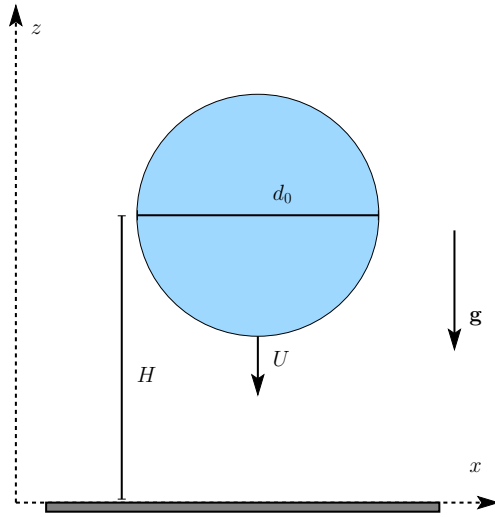


Рис. 2.4. Постановка теста с падающей вязкоэластичной каплей.

$d_0[\text{м}]$	$H[\text{м}]$	$U[\text{м/с}]$	$\lambda_1[\text{с}]$	$\mu_0[\text{Па} \cdot \text{с}]$	$\rho[\text{кг/м}^3]$	$g[\text{м/с}^2]$
0.02	0.04	1.0	0.02	4.0	1000.0	9.81

Таблица 2.1. Параметры для теста с падающей вязкоэластичной каплей.

Зависимость безразмерного диаметра капли $d(t)/d_0$ от времени представлена на рис. 2.5, слева. Полученные результаты находятся в хорошем соответствии с результатами из работ [93; 94].

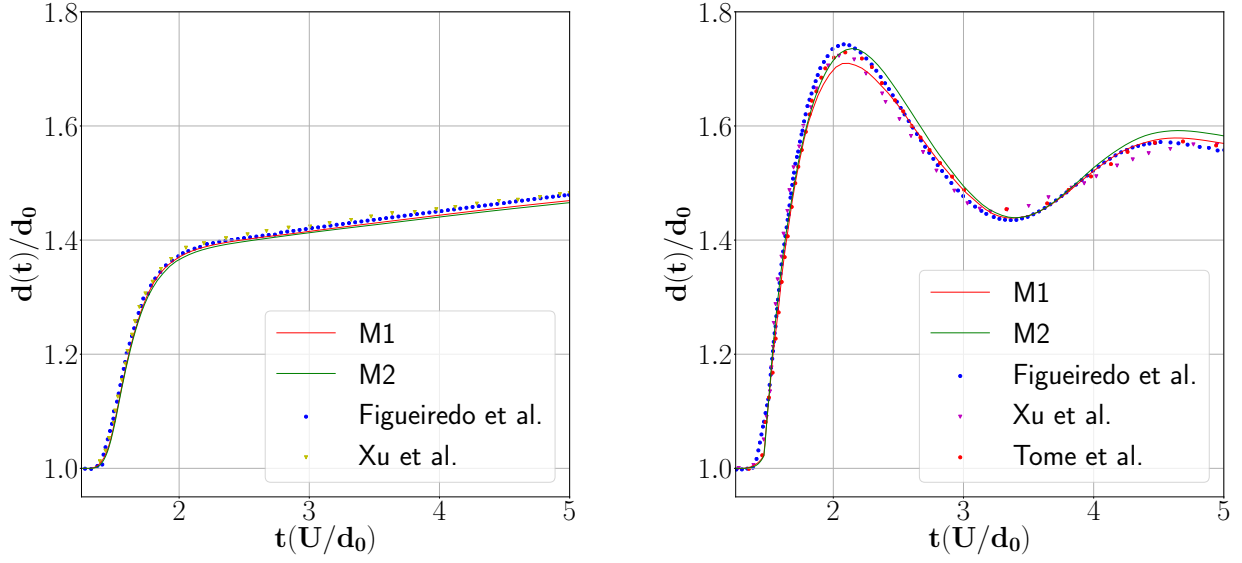


Рис. 2.5. Зависимость диаметра капли от времени для ньютоновской жидкости (слева); вязкоэластичной жидкости с $\beta = 0.1$ (справа).

После успешной верификации на задаче с ньютоновской каплей были произведены расчеты падения вязкоэластичной капли, результаты сравнивались с опубликованными ранее в литературе. Параметр запаздывания равен $\beta = 0.1$, полная вязкость выбрана равной ньютоновской $\mu_0 = 4 \text{ Па} \cdot \text{с}$ в предыдущем эксперименте. Результаты расчетов (рис. 2.5, справа) находятся в хорошем согласии с референтными расчетами [90; 93; 94].

2.4.2. Осциллирующая капля из неньютоновской жидкости

Рассматриваются колебания вязкопластичной и вязкоэластичной капель в вакууме с ненулевым поверхностным натяжением.

В начальный момент капля неподвижна, а ее поверхность отличается от сферической и представлена в сферических координатах следующим образом:

$$r = r_0 \left(1 + \tilde{\epsilon} S_2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \right),$$

где $S_2(\alpha) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}(3\cos\alpha - 1)$ – функция второй сферической гармоники.

Средняя кривизна поверхности капли не постоянна, несбалансированные силы поверхностного натяжения приводят к колебаниям капли. Наличие ненулевой вязкости жидкости ведет к экспоненциальному затуханию колебаний из-за работы диссипативных сил.

Вычислительная область представляет из себя куб $(0, l)^3$ со стороной $l = \frac{10}{3}$, центр капли совпадает с центром куба. Во всех экспериментах задан радиус капли $r_0 = 1$, ее плотность $\rho = 1$ и поверхностное натяжение $\zeta = 1$. Расчетные сетки динамически измельчаются от максимального $h_{max} = \frac{l}{16}$ до минимального размера ячеек $h_{min} = \frac{l}{64}$ в окрестности свободной поверхности капли. Шаг по времени выбран равным $\Delta t = C\sqrt{\frac{\rho}{2\pi\zeta}}h_{min}^{\frac{3}{2}}$, хотя представленный неявный метод не налагает ограничений на него.

В первой серии экспериментов изучаются колебания вязкопластичной капли [22; 91]. Основными статистиками, описывающими колебания вязкой капли, являются период колебаний и скорость затухания. Также для вязкопластичных жидкостей дополнительной статистикой является время остановки колебаний.

В этом эксперименте рассматриваются вязкопластичные жидкости Хершеля-Балкли с индексом течения $n = 1$ (их также называют бингамовскими жидкостями) и изучается влияние значений предела текучести τ_s на время остановки.

Амплитуда возмущений была выбрана равной $\tilde{\epsilon} = 0.3$, параметр согласованности $K = 0.3$.

Вычисленные z -координаты верхней точки капли и кинетическая энергия для различных τ_s показаны на рис. 2.6 слева и справа, соответственно. Из представленных результатов можно видеть, что увеличение предела текучести τ_s ведет к более ранней остановке колебаний.

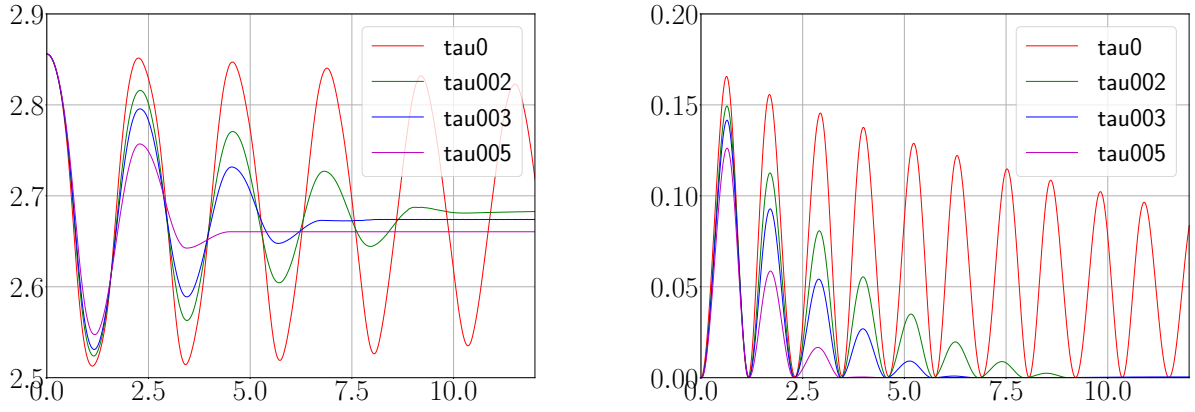


Рис. 2.6. z -координата верхней точки капли (слева) и кинетическая энергия (справа) для бингамовской жидкости с пределами текучести $\tau_s = \{0, 0.02, 0.03, 0.05\}$.

Во второй серии экспериментов изучаются малые колебания вязкоэластичной капли, теоретический анализ которых представлен в работах [95; 96]. Анализ собственных колебаний вязких капель предсказывает монотонное убывание частоты колебаний с увеличением вязкости жидкости. Однако для вязкоэластичных капель, подчиняющихся модели Олдройда-Б, с полной вязкостью $\mu_0 = \mu_S + \mu_P$ существует набор безразмерных параметров (число Онезорге $Oh = \frac{\mu_0}{\sqrt{\zeta} \rho r_0}$ и число Деборы $De = \sqrt{\frac{8\zeta}{\rho r_0^3}} \lambda_1$), при которых частота колебаний ведет себя не монотонно при увеличении полной вязкости [95]. В частности, согласно [97], при $Oh = 0.037$ частота увеличивается при росте числа Деборы от $De = 0$ до $De = 1$, и уменьшается от $De = 1$ до критического значения полной вязкости, при котором форма капли плавно приходит в равновесную сферическую форму без колебаний.

С целью воспроизведения теоретических результатов и их сравнения с результатами из [97], вводятся безразмерные характеристики колебаний, безразмерная частота $Freqless = \sqrt{\frac{\rho r_0^3}{\zeta}} \omega$ и безразмерная скорость затухания $Dampingless = \sqrt{\frac{\rho r_0^3}{\zeta}} d$. Здесь d – коэффициент, полученный аппроксимацией экспонентой $C \exp(-d \cdot t)$ зависимости максимальных за периоды z -координат верхней точки капли от времени, $\omega = \frac{2\pi}{T_1}$ – оценка частоты по посчитанному

численно первому периоду колебаний T_1 .

В данных экспериментах амплитуда колебаний $\tilde{\epsilon} = 0.1$.

Зависимость z -координаты верхней точки капли от времени для различных чисел Дебory De и фиксированных полной вязкости $\mu_0 = 0.01$ и числа Онезорге $Oh = 0.037$ представлена на рис. 2.7. Сравнение посчитанных безразмерных частот и скорости затухания колебаний с опубликованными в [97] результатами представлено на рис. 2.8.

Полученные результаты указывают на то, что модель воспроизводит теоретические результаты немонотонного поведения частоты для жидкости Олдройда-Б. Более того, вычисленные безразмерные характеристики колебаний $Freqless$ и $Dampingless$ близки к оценкам асимптотического анализа и референтным результатам из [97].

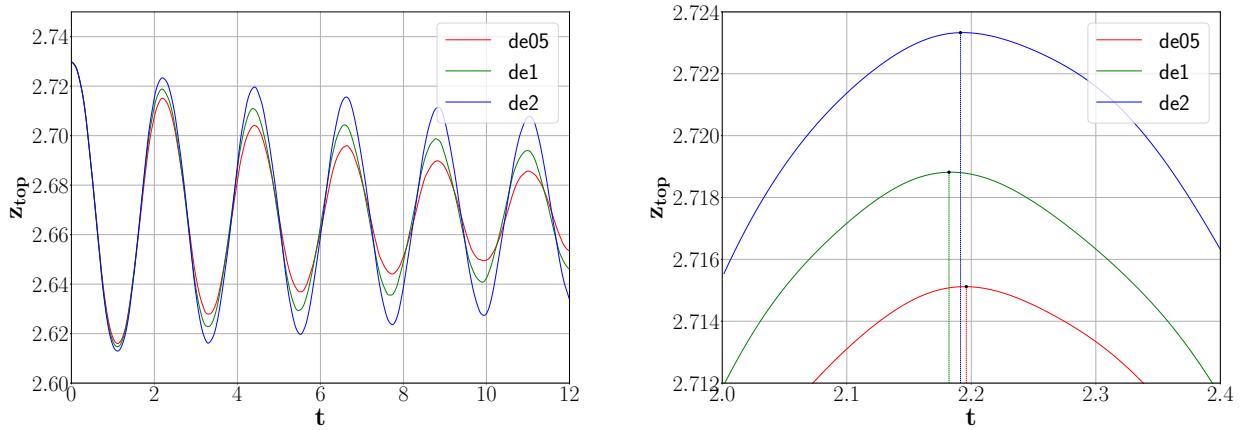


Рис. 2.7. z -координата верхней точки вязкоэластичной капли (слева) с фокусом на пике первого периода (справа): $De = 0.5$ (красным), $De = 1$ (зеленым), $De = 2$ (синим).

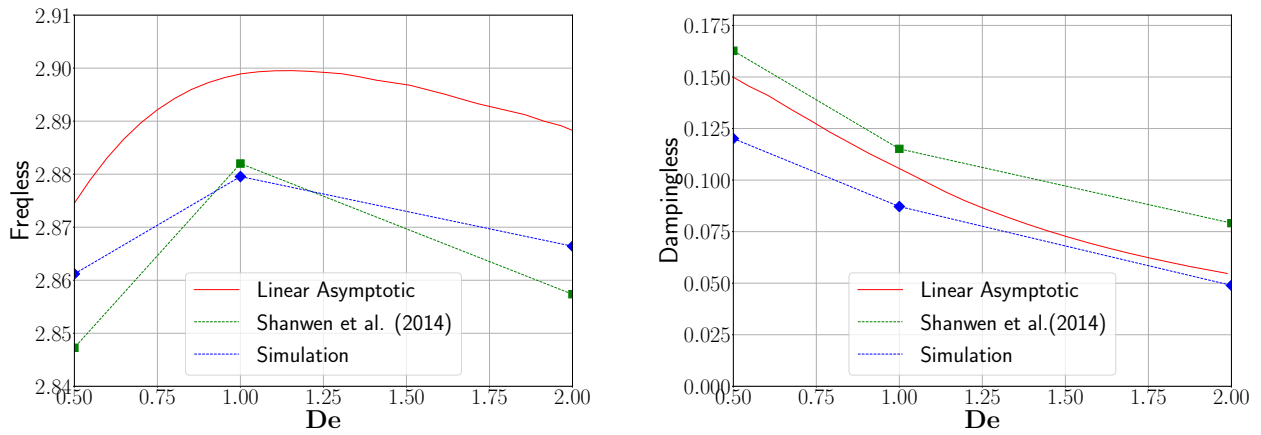


Рис. 2.8. Безразмерные частота (слева) и скорость затухания (справа) для вязкоэластичной капли: асимптотический анализ (красным) и численные результаты из [97] (зеленым), численные результаты из данной работы (синим).

2.4.3. Прорыв дамбы с вязкопластичной жидкостью

В этом разделе рассматривается численный эксперимент, основанный на физической постановке из работы [92]. Прямоугольный резервуар, расположенный на наклонной плоскости, заполнен гелем Carbopol Ultrez 10(0.4%). Резервуар оснащен закрытыми воротами, перпендикулярными к наклонной плоскости. Открытие ворот высвобождает жидкость, которая начинает двигаться под воздействием гравитационных сил.

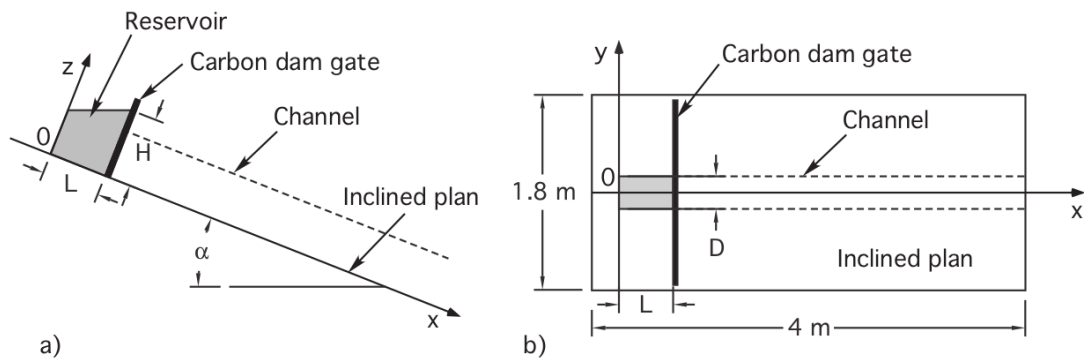


Рис. 2.9. Постановка теста с прорывом дамбы: а) вид сбоку; б) вид сверху (взято из [92]).

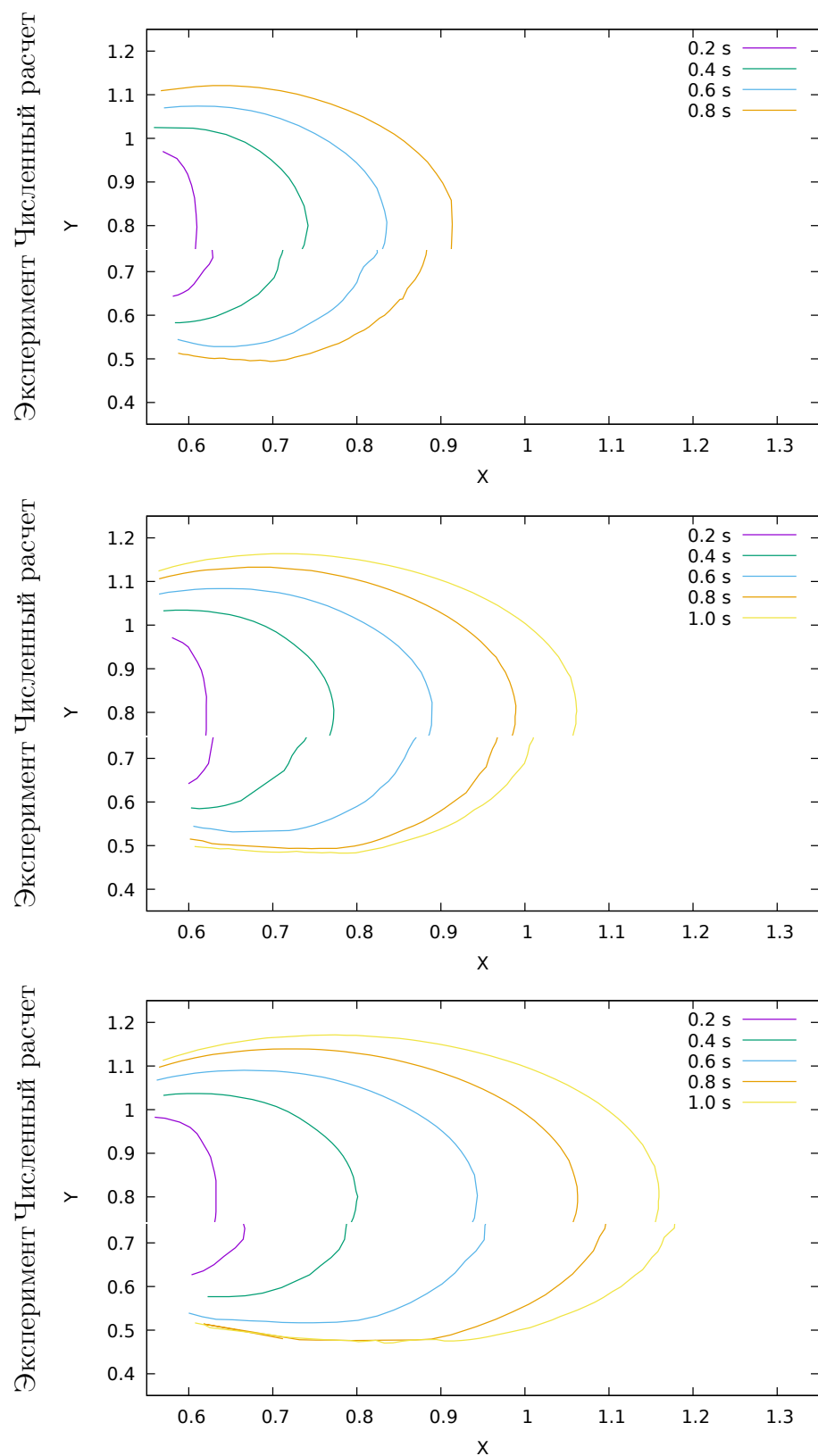


Рис. 2.10. Контактная линия, численный расчет (верхняя половина) и эксперимент (нижняя половина); угол наклона плоскости – $\alpha = 0^\circ$ (вверху), $\alpha = 6^\circ$ (в середине), $\alpha = 12^\circ$ (внизу).

Параметры проведенного численного эксперимента соответствуют параметрам для физического эксперимента: длина резервуара $X = 0.51$ м, его ширина $Y = 0.3$ м, высота – $Z_0 = 0.3$ м. В [92] были получены оценки на параметры модели Хершеля-Балкли для рассматриваемого геля $K = 75.84 \text{ Па} \cdot \text{с}^{-n}$, $n = 0.579$, $\tau_s = 109 \text{ Па}$. По известному весу геля (43 кг), заполнявшего резервуар, была оценена его плотность $\rho = 936.8 \text{ кг/м}^3$.

В физическом эксперименте ворота поднимались в течение 0.8 с. В постановке численного эксперимента предполагается, что ворота поднимаются в течение этого времени с постоянной скоростью.

На рис. 2.10 представлено сравнение контактных линий, полученных в результате моделирования и экспериментальных данных, для различных углов наклона плоскости $0^\circ, 6^\circ, 12^\circ$. Можно отметить хорошее соответствие экспериментальных и расчетных данных.

2.4.4. Компрессия многоклеточного сфероид из биоматериала

Данная задача была предложена Ефремовым Юрием Михайловичем.

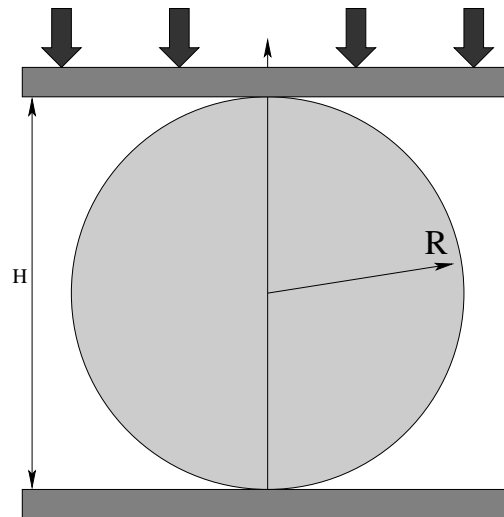


Рис. 2.11. Схема эксперимента по компрессии сфероида

Многоклеточный сфероид радиусом $R = 0.11$ мм, составленный из мезенхимальных стволовых клеток, находится внутри тестовой установки (рис.

2.11), состоящей из верхней и нижней обжимающих стенок, и касается каждой из них в начальный момент времени. Нижняя стенка неподвижна, верхняя стенка может двигаться по направлению к нижней и от нее перпендикулярно оси симметрии установки. Эксперимент состоит из трех последовательных фаз. Во время первой фазы (компрессия) продолжительностью 36 секунд верхняя стенка движется к нижней с постоянной скоростью до тех пор, пока расстояние между стенками не станет равным $\Delta = R$. Во второй фазе (удержание) продолжительностью 60 секунд верхняя стенка неподвижна. В третьей фазе (высвобождение) верхняя стенка движется от нижней с той же по величине скоростью, что и в первой фазе.

В результате физического эксперимента сфероид частично восстанавливает свою форму в третьей фазе, что свидетельствует о наличии вязкоэластичных свойств материала сфероида.

В процессе эксперимента тестовая установка записывала силу реакции, действующую на стенку со стороны сфероида, и z -координату верхней точки сфероида.

Для оценки вязкоэластичных параметров материала использовалось две модели линейной изотропной вязкоэластичности. Первая модель основана на представлении материала в виде вязкоэластичного твердого тела, подчиняющегося уравнениям Зенера (2.21), в то время как вторая модель представляет сфероид вязкоэластичным материалом, задаваемой уравнениями (2.6), (2.33), (2.34), (2.35).

В обоих случаях сила реакции считалась согласно определению:

$$F = \int_S \mathbf{n} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n} dS. \quad (2.45)$$

Здесь S - множество точек контактной поверхности, $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ - полный тензор напряжений, равный $-p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$ для вязкоэластичной жидкости.

Были найдены следующие параметры вязкоэластичных моделей, для которых результаты расчетов близки к экспериментальным данным: $\nu = 0.5$, $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.2$, $E_0 = 9$ кПа, $E_\infty = \alpha E_0 = 1.8$ кПа, $\lambda_1 = 10$ с. В модели вязкоэластичной жидкости поверхностное натяжение не учитывалось.

Для расчетов был рассмотрен сценарий мгновенного исчезновения верхней и нижней стенок в третьей фазе, что не соответствует эксперименту. Использование данного сценария связано с необходимостью дополнения модели жидкости контактными граничными условиями при постепенном удалении верхней стенки в третьей фазе, что является предметом исследований.

На рис. 2.12 представлены вычисленная двумя моделями сила реакции и высота сфероида в сравнении с экспериментальными данными. С целью сравнения двух моделей вязкоэластичности продолжительность третьей фазы в эксперименте с твердым телом была выставлена равной шагу по времени модели вязкоэластичной жидкости, $\Delta t_{release} = 0.25$ с.

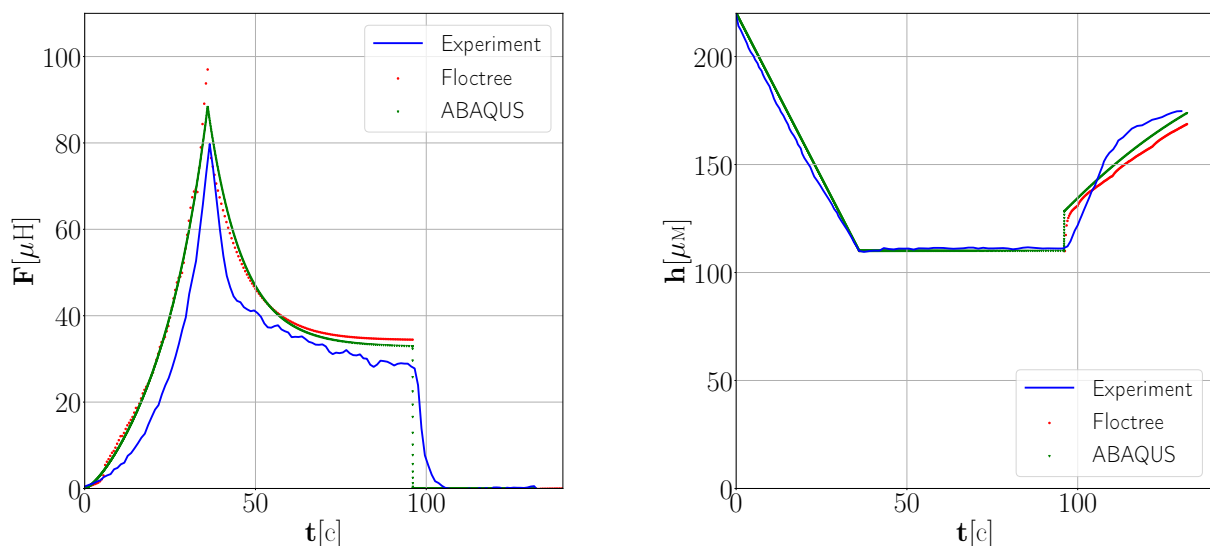


Рис. 2.12. Сила реакции на верхнюю стенку (слева) и высота сфероида (справа), сравнение с экспериментом.

Отметим, что графики силы и высоты обеих моделей достаточно близки. Мгновенное высвобождение стенок в третьей фазе приводит к резкому уве-

личению высоты сфероида в ее начале, за чем следует более медленный по сравнению с экспериментом, постепенный рост сфероида. Также, в отличие от экспериментальных данных, это приводит к мгновенному исчезновению моделируемой силы реакции для обеих моделей в момент времени $t = 96$ с.

Несмотря на схожесть графиков силы реакции и высоты сфероида для двух вязкоэластичных моделей, распределение запасенной эластичной энергии внутри сфероида отличается. На рис. 2.13 представлены распределение напряжений фон Мизеса $q = \sqrt{\frac{3}{2}(\text{dev}[\bar{\sigma}] : \text{dev}[\bar{\sigma}])}$ в конечный момент времени $t = 132$ с. Хотя экспериментально наблюдаемая форма сфероида (показана на заднем плане) практически совпадает с формами, полученными обеими моделями, вычисленное распределение эластичной энергии отличается в центре сфероида.

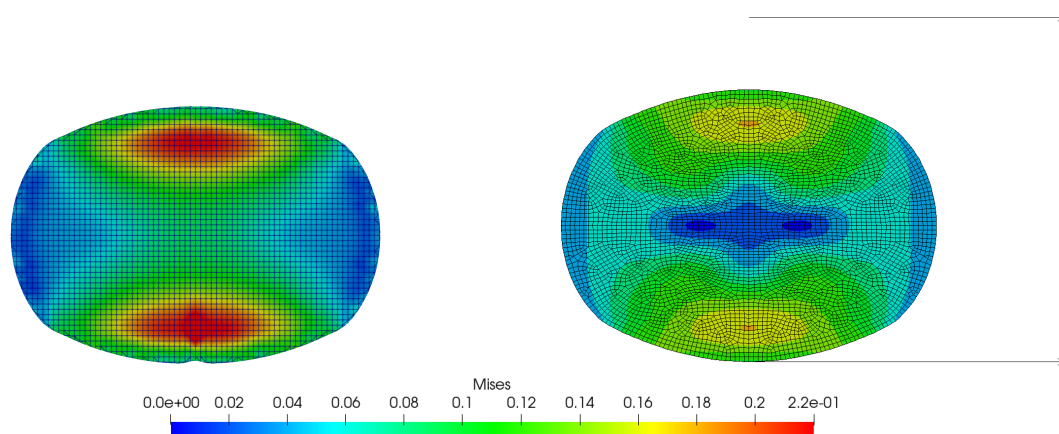


Рис. 2.13. Распределение напряжений фон Мизеса ($t = 132$ с). Вязкоэластичный материал (FlocTree, слева) и твердое тело (ABAQUS, справа).

2.5. Выводы

В этой главе была представлена полунявная численная схема для моделирования неньютоновских жидкостей со свободной поверхностью на динамически адаптируемых сетках типа восьмидереву. Были рассмотрены две часто используемые в приложениях модели неньютоновских жидкостей, мо-

дель Хершеля-Балкли вязкопластичной жидкости и модель Олдройда-Б вязкоэластичной жидкости.

Численные модели были верифицированы на тестовых задачах путем сравнения результатов с экспериментальными и численными результатами из опубликованных ранее работ.

Также для модели вязкоэластичной жидкости Олдройда была предложена модификация, позволяющая с приемлемой точностью моделировать поведение многоклеточных сфероидов из биоматериала при обжатии. Перспективность подобных моделей связана с их возможными приложениями в биопринтинге. Для анализа свойств биоматериалов проводятся эксперименты по разрезанию и слиянию сфероидов, в которых признается значительным наличие у сфероидов макроскопического поверхностного натяжения, присущего жидкостям. Модели вязкоэластичного твердого тела, успешно используемые в таких задачах, как компрессия сфероидов, не в состоянии описывать подобные процессы.

В то же время из-за недостатка подобного рода моделей жидкости для анализа слияния используются полуаналитические модели [98]. Было установлено, что подобные модели могут давать значительные расхождения с экспериментальными результатами слияния сфероидов [99]. Применение предложенной модели для задач слияния сфероидов является предметом будущих исследований.

Заключение

Диссертационная работа посвящена разработке и исследованию численных методов, применяемых для моделирования трехмерных задач фильтрации в пористых средах с полными и неоднородными тензорами проницаемости, и трехмерных задач гидродинамики неньютоновских жидкостей. Главным результатом работы стало построение эффективных численных методов решения задач фильтрации и переноса, реализованных в рамках существующих программных комплексов и их применение для моделирования прикладных задач.

Основная теоретическая ценность работы заключается в формулировке новых методов решения задач однофазной и двухфазной фильтрации в трещиноватой пористой среде, и доказательстве монотонности/свойств дискретного принципа максимума для них.

Практическая ценность работы состоит в реализации в рамках существующих программных комплексов численных методов решения задач однофазной и двухфазной фильтрации, течения неньютоновских жидкостей со свободной поверхностью. Для этой цели использовался открытая программная платформа INMOST.

Реализована параллельная версия монотонного метода вложенных дискретных трещин, что важно для решения задач с большим числом неизвестных.

Решена прикладная задача о компрессии многоклеточных сфероидов из стволовых клеток.

Публикации автора по теме диссертации

1. Verification benchmarks for single-phase flow in three-dimensional fractured porous media / I. Berre [и др.] // *Advances in Water Resources*. — 2021. — т. 147. — с. 103759.
2. *Nikitin K. D., Yanbarisov R. M.* Monotone embedded discrete fractures method for flows in porous media // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. — 2020. — т. 364. — с. 112353.
3. *Nikitin K. D., Yanbarisov R. M.* Monotone Embedded Discrete Fracture Method for the Two-Phase Flow Model // *International Conference on Finite Volumes for Complex Applications*. — Springer. 2020. — с. 557—564.
4. *Yanbarisov R. M., Nikitin K. D.* Projection-based monotone embedded discrete fracture method for flow and transport in porous media // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. — 2021. — т. 392. — с. 113484.
5. *Yanbarisov R., Nikitin K., Vassilevski Y.* An implicit scheme for simulation of free surface non-Newtonian fluid flows on dynamically adapted grids // *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. — 2021. — т. 36, № 3. — с. 165—176.
6. *Янбарисов Р. М.* Параллельный метод вложенных дискретных трещин для течений в трещиноватых пористых средах // *Компьютерные исследования и моделирование*. — 2021. — т. 13, № 5. — с. 735—745.
7. Numerical Modelling of Multicellular Spheroid Compression: Viscoelastic Fluid vs. Viscoelastic Solid / R. Yanbarisov [и др.] // *Mathematics*. — 2021. — т. 9, № 18. — ISSN 2227-7390. — DOI: [10.3390/math9182333](https://doi.org/10.3390/math9182333).

Список литературы

8. Reservoir simulation grids: opportunities and problems / K. Aziz [и др.] // Journal of Petroleum Technology. — 1993. — т. 45, № 07. — с. 658—663.
9. *Sheng Z., Yuan G.* The finite volume scheme preserving extremum principle for diffusion equations on polygonal meshes // Journal of Computational Physics. — 2011. — т. 230, № 7. — с. 2588—2604.
10. *Lipnikov K., Svyatskiy D., Vassilevski Y.* Minimal stencil finite volume scheme with the discrete maximum principle // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 2012. — т. 27, № 4. — с. 369—385.
11. *Новиков К. А.* Принцип максимума для моделей многофазной фильтрации // вычислительные методы и программирование. — 2017. — т. 18, № 2. — с. 138—145.
12. *Svyatskiy D., Lipnikov K.* Second-order accurate finite volume schemes with the discrete maximum principle for solving Richards' equation on unstructured meshes // Advances in water resources. — 2017. — т. 104. — с. 114—126.
13. *Nikitin K., Novikov K., Vassilevski Y.* Nonlinear finite volume method with discrete maximum principle for the two-phase flow model // Lobachevskii J. of Mathematics. — 2016. — т. 37, № 5. — с. 570—581.
14. Use of irregular grid in reservoir simulation / A. Settari, K. Aziz [и др.] // Society of Petroleum Engineers Journal. — 1972. — т. 12, № 02. — с. 103—114.
15. *Danilov A. A., Vassilevski Y. V.* A monotone nonlinear finite volume method for diffusion equations on conformal polyhedral meshes // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. — 2009.

16. *Chernyshenko A., Vassilevski Y.* A finite volume scheme with the discrete maximum principle for diffusion equations on polyhedral meshes // Finite Volumes for Complex Applications VII-Methods and Theoretical Aspects. — Springer, 2014. — с. 197—205.
17. *Яненко Н. Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. — 1967.
18. *Chorin A. J.* Numerical solution of the Navier-Stokes equations // Mathematics of computation. — 1968. — т. 22, № 104. — с. 745—762.
19. *Gresho P. M.* On the theory of semi-implicit projection methods for viscous incompressible flow and its implementation via a finite element method that also introduces a nearly consistent mass matrix. Part 1: Theory // International Journal for Numerical Methods in Fluids. — 1990. — т. 11, № 5. — с. 587—620.
20. *Patankar S. V.* Numerical heat transfer and fluid flow. — CRC press, 2018.
21. *Olshanskii M. A., Terekhov K. M., Vassilevski Y. V.* An octree-based solver for the incompressible Navier–Stokes equations with enhanced stability and low dissipation // Computers & Fluids. — 2013. — т. 84. — с. 231—246.
22. A numerical method for the simulation of free surface flows of viscoplastic fluid in 3D / K. D. Nikitin [и др.] // Journal of Computational Mathematics. — 2011. — с. 605—622.
23. An adaptive numerical method for free surface flows passing rigidly mounted obstacles / K. D. Nikitin [и др.] // Computers & Fluids. — 2017. — т. 148. — с. 56—68.
24. *Losasso F., Fedkiw R., Osher S.* Spatially adaptive techniques for level set methods and incompressible flow // Computers & Fluids. — 2006. — т. 35, № 10. — с. 995—1010.

25. *Nikitin K., Vassilevski Y.* Free surface flow modelling on dynamically refined hexahedral meshes. — 2008.
26. *Popinet S.* An accurate adaptive solver for surface-tension-driven interfacial flows // *Journal of Computational Physics*. — 2009. — т. 228, № 16. — с. 5838—5866.
27. *Sochnikov V., Efrima S.* Level set calculations of the evolution of boundaries on a dynamically adaptive grid // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. — 2003. — т. 56, № 13. — с. 1913—1929.
28. Assigning effective values to simulator gridblock parameters for heterogeneous reservoirs / S. Begg, R. Carter, P. Dranfield [и др.] // *SPE reservoir engineering*. — 1989. — т. 4, № 04. — с. 455—463.
29. *Durlofsky L. J.* Numerical calculation of equivalent grid block permeability tensors for heterogeneous porous media // *Water resources research*. — 1991. — т. 27, № 5. — с. 699—708.
30. *Barenblatt G. I., Zheltov I. P., Kochina I.* Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks [strata] // *Journal of applied mathematics and mechanics*. — 1960. — т. 24, № 5. — с. 1286—1303.
31. The behavior of naturally fractured reservoirs / J. Warren, P. J. Root [и др.] // *Society of Petroleum Engineers Journal*. — 1963. — т. 3, № 03. — с. 245—255.
32. Numerical simulation of water-oil flow in naturally fractured reservoirs / H. Kazemi [и др.] // *Society of Petroleum Engineers Journal*. — 1976. — т. 16, № 06. — с. 317—326.
33. *Kim J.-G., Deo M. D.* Finite element, discrete-fracture model for multiphase flow in porous media // *AIChE Journal*. — 2000. — т. 46, № 6. — с. 1120—1130.

34. *Karimi-Fard M., Durlofsky L. J., Aziz K.* An efficient discrete-fracture model applicable for general-purpose reservoir simulators // SPE journal. — 2004. — т. 9, № 02. — с. 227—236.
35. *Lee S. H., Lough M., Jensen C.* Hierarchical modeling of flow in naturally fractured formations with multiple length scales // Water resources research. — 2001. — т. 37, № 3. — с. 443—455.
36. Efficient field-scale simulation of black oil in a naturally fractured reservoir through discrete fracture networks and homogenized media / L. Li, S. H. Lee [и др.] // SPE Reservoir Evaluation & Engineering. — 2008. — т. 11, № 04. — с. 750—758.
37. *Hajibeygi H., Karvounis D., Jenny P.* A hierarchical fracture model for the iterative multiscale finite volume method // Journal of Computational Physics. — 2011. — т. 230, № 24. — с. 8729—8743.
38. Development of an efficient embedded discrete fracture model for 3D compositional reservoir simulation in fractured reservoirs / A. Moinfar [и др.] // SPE Journal. — 2014. — т. 19, № 02. — с. 289—303.
39. *Xu J., Sun B., Chen B.* A hybrid embedded discrete fracture model for simulating tight porous media with complex fracture systems // Journal of Petroleum Science and Engineering. — 2019. — т. 174. — с. 131—143.
40. An embedded fracture modeling framework for simulation of hydraulic fracturing and shear stimulation / J. H. Norbeck [и др.] // Computational Geosciences. — 2016. — т. 20, № 1. — с. 1—18.
41. *Ren G., Jiang J., Younis R. M.* A Model for coupled geomechanics and multiphase flow in fractured porous media using embedded meshes // Advances in Water Resources. — 2018. — т. 122. — с. 113—130.

42. Embedded discrete fracture modeling for compositional reservoir simulation using corner-point grids / Y. Xu [и др.] // Journal of Petroleum Science and Engineering. — 2019. — т. 177. — с. 41—52.
43. *Nikitin K., Terekhov K., Vassilevski Y.* A monotone nonlinear finite volume method for diffusion equations and multiphase flows // Comput. Geosci. — 2014. — т. 18, № 3. — с. 311—324.
44. *Martin V., Jaffré J., Roberts J. E.* Modeling fractures and barriers as interfaces for flow in porous media // SIAM Journal on Scientific Computing. — 2005. — т. 26, № 5. — с. 1667—1691.
45. Cell-Centered Nonlinear Finite-Volume Methods with Improved Robustness / W. Zhang, M. Al Kobaisi [и др.] // SPE Journal. — 2020. — т. 25, № 01. — с. 288—309.
46. An efficient embedded discrete fracture model based on mimetic finite difference method / X. Yan [и др.] // Journal of Petroleum Science and Engineering. — 2016. — т. 145. — с. 11—21.
47. *Terekhov K. M., Mallison B. T., Tchelepi H. A.* Cell-centered nonlinear finite-volume methods for the heterogeneous anisotropic diffusion problem // J. Comput. Phys. — 2017. — ISSN 10902716.
48. A compact multipoint flux approximation method with improved robustness / I. Aavatsmark [и др.] // Num. Meth. for Part. Diff. Eqs. — 2008. — т. 24, № 5. — с. 1329—1360.
49. Development of a coupled dual continuum and discrete fracture model for the simulation of unconventional reservoirs / A. Moinfar [и др.] // SPE Reservoir Simulation Symposium. — Society of Petroleum Engineers. 2013.
50. Projection-based Embedded Discrete Fracture Model (pEDFM) / M. Tene [и др.] // Adv. Water Resour. — 2017. — т. 105. — с. 205—216.

51. *Jiang J., Younis R. M.* An improved projection-based embedded discrete fracture model (pEDFM) for multiphase flow in fractured reservoirs // *Adv. Water Resour.* — 2017. — т. 109. — с. 267—289.
52. A modified projection-based embedded discrete fracture model (pEDFM) for practical and accurate numerical simulation of fractured reservoir / X. Rao [и др.] // *Journal of Petroleum Science and Engineering.* — 2020. — т. 187. — с. 106852.
53. *Varga R. S.* Iterative analysis. — Springer, 1962.
54. *Stoyan G.* On maximum principles for monotone matrices // *Linear algebra and its applications.* — 1986. — т. 78. — с. 147—161.
55. Call for participation: Verification benchmarks for single-phase flow in three-dimensional fractured porous media / I. Berre [и др.] // *arXiv preprint arXiv:1809.06926.* — 2018.
56. Benchmarks for single-phase flow in fractured porous media / B. Flemisch [и др.] // *Advances in Water Resources.* — 2018. — т. 111. — с. 239—258.
57. *Kaporin I. E., Konshin I. N.* A parallel block overlap preconditioning with inexact submatrix inversion for linear elasticity problems // *Numerical linear algebra with applications.* — 2002. — т. 9, № 2. — с. 141—162.
58. Parallel Finite Volume Computation on General Meshes / Y. Vassilevski [и др.]. — Springer Nature, 2020.
59. *Peaceman D. W.* Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation // *SPE J.* — 1978. — т. 18, № 3. — с. 183—194.
60. *Никитин К. Д.* Нелинейный метод конечных объемов для задач двухфазной фильтрации // *Матем. моделирование.* — 2010. — т. 22, вып. 11. — с. 131—147.

61. INMOST-a software platform and a graphical environment for development of parallel numerical models on general meshes / Y. Vassilevski [и др.] // Moscow State Univ. Publ., Moscow. — 2013.
62. Parallel software platform INMOST: a framework for numerical modeling / A. A. Danilov [и др.] // Supercomputing Frontiers and Innovations. — 2016. — т. 2, № 4. — с. 55—66.
63. *Liang Y., Oztekin A., Neti S.* Dynamics of viscoelastic jets of polymeric liquid extrudate // Journal of non-newtonian fluid mechanics. — 1999. — т. 81, № 1/2. — с. 105—132.
64. *Tanner R. I.* A theory of die-swell revisited // Journal of non-newtonian fluid mechanics. — 2005. — т. 129, № 2. — с. 85—87.
65. *Denn M. M.* Issues in viscoelastic fluid mechanics // Annual Review of Fluid Mechanics. — 1990. — т. 22, № 1. — с. 13—32.
66. Intrinsic route to melt fracture in polymer extrusion: a weakly nonlinear subcritical instability of viscoelastic Poiseuille flow / B. Meulenbroek [и др.] // Physical review letters. — 2003. — т. 90, № 2. — с. 024502.
67. *Coussot P.* Mudflow rheology and dynamics. — Routledge, 2017.
68. *Griffiths R. W.* The dynamics of lava flows // Annual review of fluid mechanics. — 2000. — т. 32, № 1. — с. 477—518.
69. *Crowley W.* FLAG: A free-Lagrange method for numerically simulating hydrodynamic flows in two dimensions // Proceedings of the Second International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics. — Springer. 1971. — с. 37—43.
70. *Hirt C., Cook J., Butler T.* A Lagrangian method for calculating the dynamics of an incompressible fluid with free surface // Journal of Computational Physics. — 1970. — т. 5, № 1. — с. 103—124.

71. *Hirt C. W., Amsden A. A., Cook J.* An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds // Journal of computational physics. — 1974. — т. 14, № 3. — с. 227—253.
72. *Amsden A., Ruppel H., Hirt C.* SALE: A simplified ALE computer program for fluid flow at all speeds : tex. отч. / Los Alamos Scientific Lab., NM (USA). — 1980.
73. *Margolin L., Nichols B.* Momentum-control volumes for finite-difference codes : tex. отч. / Los Alamos National Lab., NM (USA). — 1983.
74. *Harlow F. H., Welch J. E.* Numerical study of large-amplitude free-surface motions // The physics of Fluids. — 1966. — т. 9, № 5. — с. 842—851.
75. *Hirt C. W., Nichols B. D.* Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries // Journal of computational physics. — 1981. — т. 39, № 1. — с. 201—225.
76. *Osher S., Fedkiw R.* Level set methods and dynamic implicit surfaces. т. 153. — Springer Science & Business Media, 2006.
77. *Harlow F. H.* The particle-in-cell computing method for fluid dynamics // Methods Comput. Phys. — 1964. — т. 3. — с. 319—343.
78. *Monaghan J.* Particle methods for hydrodynamics // Computer Physics Reports. — 1985. — т. 3, № 2. — с. 71—124.
79. *Monaghan J. J.* Smoothed particle hydrodynamics // Annual review of astronomy and astrophysics. — 1992. — т. 30, № 1. — с. 543—574.
80. *Adalsteinsson D., Sethian J. A.* The fast construction of extension velocities in level set methods // Journal of Computational Physics. — 1999. — т. 148, № 1. — с. 2—22.

81. A finite difference technique for simulating unsteady viscoelastic free surface flows / M. Tomé [и др.] // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. — 2002. — т. 106, № 2/3. — с. 61—106.
82. *Alves M. A., Oliveira P. J., Pinho F. T.* Benchmark solutions for the flow of Oldroyd-B and PTT fluids in planar contractions // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. — 2003. — т. 110, № 1. — с. 45—75.
83. *Mompean G., Deville M.* Unsteady finite volume simulation of Oldroyd-B fluid through a three-dimensional planar contraction // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. — 1997. — т. 72, № 2/3. — с. 253—279.
84. *Alves M., Pinho F., Oliveira P.* The flow of viscoelastic fluids past a cylinder: finite-volume high-resolution methods // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. — 2001. — т. 97, № 2/3. — с. 207—232.
85. A splitting method for numerical simulation of free surface flows of incompressible fluids with surface tension / K. D. Nikitin [и др.] // Computational Methods in Applied Mathematics. — 2015. — т. 15, № 1. — с. 59—77.
86. *Bercovier M., Engelman M.* A finite-element method for incompressible non-Newtonian flows // Journal of Computational Physics. — 1980. — т. 36, № 3. — с. 313—326.
87. Dynamics of polymeric liquids, volume 2: Kinetic theory / R. B. Bird [и др.]. — Wiley, 1987.
88. A semi-Lagrangian method on dynamically adapted octree meshes / K. M. Terekhov [и др.] // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2015. — т. 30, № 6. — с. 363—380.

89. A splitting method for free surface flows over partially submerged obstacles / K. D. Nikitin [и др.] // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2018. — т. 33, № 2. — с. 95—110.
90. An Oldroyd-B solver for vanishingly small values of the viscosity ratio: Application to unsteady free surface flows / C. Viezel [и др.] // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. — 2020. — т. 285. — с. 104338.
91. *Cheng W., Olshanskii M. A.* Finite stopping times for freely oscillating drop of a yield stress fluid // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. — 2017. — т. 239. — с. 73—84.
92. *Cochard S., Ancey C.* Experimental investigation of the spreading of viscoplastic fluids on inclined planes // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. — 2009. — т. 158, № 1—3. — с. 73—84.
93. Numerical simulation of 3D-unsteady viscoelastic free surface flows by improved smoothed particle hydrodynamics method / X. Xu [и др.] // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. — 2012. — т. 177. — с. 109—120.
94. Numerical investigation of three dimensional viscoelastic free surface flows: impacting drop problem / R. A. Figueiredo [и др.] // Proceedings of 6th European conference on computational fluid dynamics (ECFD VI). т. 5. — 2014. — с. 5368—5380.
95. *Khismatullin D. B., Nadim A.* Shape oscillations of a viscoelastic drop // Physical Review E. — 2001. — т. 63, № 6. — с. 061508.
96. *Brenn G., Teichtmeister S.* Linear shape oscillations and polymeric time scales of viscoelastic drops // Journal of fluid mechanics. — 2013. — т. 733. — с. 504.

97. *Shanwen T., Brenn G.* Numerical study for shape oscillation of free viscoelastic drop using the arbitrary Lagrangian-Eulerian method // The International Conference on Applied Mechanics and Mechanical Engineering. т. 16. — Military Technical College. 2014. — с. 1—21.
98. *Френкель Я.* Вязкое течение кристаллических тел под действием поверхностного натяжения // Физический журнал. — 1945. — т. 9. — с. 385—391.
99. Cell spheroid fusion: beyond liquid drops model / N. V. Kosheleva [и др.] // Scientific reports. — 2020. — т. 10, № 1. — с. 1—15.