

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

*На правах рукописи*

*Шил.*

ШИЛОВ НИКОЛАЙ НИКОЛАЕВИЧ  
**ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ АСИМПТОТИКА УРАВНЕНИЯ ДВОЙНОГО  
КОРНЯ В ИСТИННЫХ АМПЛИТУДАХ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ**

1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы  
программ

АВТОРЕФЕРАТ  
диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
Дучков Антон Альбертович,  
кандидат физико-математических наук

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет» (НГУ).

**Научный руководитель:**

**Дучков Антон Альбертович,**

кандидат физико-математических наук

**Официальные оппоненты:**

???

???

**Ведущая организация:**

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет»

## **Общая характеристика работы**

*Объект исследования:* псевдодифференциальное уравнение двойного корня (англ. «Double Square Root equation», DSR) на предмет получения высокочастотной асимптотики его решений и разработки новых алгоритмов решения задач сейсморазведки методом отражённых волн (МОВ).

*Актуальность:* в теории и практике сейсморазведки важную роль играют асимптотические представления о распространении упругих волн в геологической среде. Основанные на них методы обладают достаточной разрешающей способностью, допускают простую физическую интерпретацию и характеризуются сравнительно низкой вычислительной сложностью. В рамках сейсморазведки МОВ-ОГТ (Метод Отражённых Волн в модификации Общей Глубинной Точки, далее МОВ) асимптотические подходы позволяют восстанавливать скоростное строение среды (скоростной анализ, томография), глубину и форму отражающих границ (миграция), а также их отражательную способность (миграция «в истинных амплитудах», англ. «true-amplitude») за счёт использования систем многократных перекрытий с малым шагом не только по приёмникам, но и по источникам. В данной работе строится новый асимптотический подход к описанию данных сейсморазведки МОВ и рассматриваются прямые и обратные задачи, которые можно решать с его помощью. Метод основан на высокочастотной асимптотике псевдодифференциального уравнения двойного корня (англ. «Double Square Root equation», DSR) в истинных амплитудах. Он накладывает ограничения на сложность рассматриваемой скоростной модели, но при этом обладает и потенциальными преимуществами, связанными с эффективным использованием избыточности данных МОВ, т.к. уравнение DSR позволяет пересчитывать по глубине полный набор данных МОВ в координатах «источник-приемник-время».

*Цель исследования:* расширить набор инструментов сейсморазведки МОВ путём построения высокочастотной асимптотики уравнения DSR в

истинных амплитудах и разработки новых алгоритмов решения прямых и обратных задач на её основе.

*Решаемая задача:* построить высокочастотную асимптотику уравнения DSR в истинных амплитудах и разработать новые алгоритмы решения прямых и обратных задач сейсморазведки МОВ на её основе.

*Теория, методы исследования, фактический материал, программное обеспечение:* поставленная задача решается методами асимптотического анализа волновых полей, гамильтоновой механики, теории возмущений и теории решения обратных задач.

Тестирование разработанных алгоритмов и валидация теоретических результатов осуществлялись на синтетических данных, рассчитанных в авторском пакете лучевого моделирования, в программном пакете «Madagascar» или заимствованных из опубликованных работ других авторов.

Предложенные алгоритмы были реализованы на языке Python с использованием библиотек NumPy, SciPy и Numba. Визуализация результатов осуществлялась с помощью библиотеки Matplotlib. Расчёты производились на персональном компьютерном оборудовании НГУ.

*Защищаемые научные результаты:*

- Разработан новый алгоритм моделирования однократно-отражённых сейсмических волн на основе высокочастотной асимптотики уравнения двойного корня.
- Разработаны численные алгоритмы геометрической миграции сейсмических данных с восстановлением коэффициентов отражения и уточнения скоростной модели геологической среды.
- Разработана программная реализация предложенных алгоритмов.

*Научная новизна:*

- Впервые построена асимптотика уравнения DSR в истинных амплитудах.
- Асимптотика уравнения DSR применена для решения обратной кинематической и динамической задачи сейсморазведки, в том числе методом взаимных точек.

*Личный вклад:*

- Подстановка асимптотического лучевого ряда в уравнение DSR и вывод уравнений, описывающих кинематику и динамику его решений.
- Вывод формул для геометрической миграции с восстановлением коэффициентов отражения.
- Изложение метода взаимных точек в терминах построенной асимптотики.
- Построение устойчивого к ошибкам в данных целевого функционала.
- Практическая реализация инструментов моделирования и инверсии.

*Теоретическая и практическая значимость работы:* теоретические результаты данной работы могут быть использованы для применения более продвинутых методов асимптотического анализа к уравнению DSR. Предложенные в работе алгоритмы геометрической миграции и динамической инверсии могут быть полезны для извлечения дополнительной информации из данных метода общей отражающей поверхности (англ. «Common Reflection Surface»), а построенный метод уточнения скоростной модели – для улучшения результатов глубинной миграции.

*Публикации:* материалы диссертации изложены в семи научных работах, в том числе трёх статьях в рецензируемых изданиях, рекомендованных для

публикации результатов диссертаций, и одном свидетельстве о государственной регистрации программы для ЭВМ.

*Апробация:* результаты лично докладывались автором на четырёх международных конференциях: «Международная научная студенческая конференция» (Новосибирск, 2021), «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» (Новосибирск, 2022), «Марчуковские научные чтения 2024» (Новосибирск, 2024, онлайн) и «Days on Diffraction 2025» (Санкт-Петербург 2025, онлайн), а также на всероссийских конференциях «Сейсморазведка в Сибири и за её пределами» (Красноярск, 2023 и 2025). Кроме того, разработанный автором метод уточнения скоростной модели среды был использован командой НГУ в конкурсе по обработке данных сейсморазведки, приуроченном к конференции «Сейсморазведка в Сибири и за её пределами 2024». Командное решение задачи заняло I место в конкурсе.

*Объём и структура работы:*

*Благодарности:* автор выражает искреннюю благодарность своим родителям за их разностороннюю поддержку в годы учёбы и подготовки диссертации, а также д.ф.-м.н. Протасову М.И. и Чеверде В.А. за обсуждение научных результатов и ценные замечания.

### **Содержание работы**

Во **Введении** определяется объект исследования, комментируется актуальность, ставятся цели и научные задачи, описываются этапы и методология исследования, формулируются защищаемые результаты, научная новизна, а также теоретическая и практическая значимость решений и разработок.

В **Главе 1** приводится краткое введение в проблематику, описываются основные допущения, принятые в работе, выполняется обзор приложений уравнения DSR и указывается место авторских исследований среди них.

В **Главе 2** постулируются уравнения, описывающие высокочастотную асимптотику решений уравнения DSR, и строятся их «лучевые» решения. В *разделе 2.1* вводятся основные обозначения. В *разделе 2.2* вводится понятие лучей DSR и строится алгоритм расчёта времени пробега отражённых волн вдоль них. В *разделе 2.3* строится система лучевого трассирования DSR. В *разделе 2.4* приводится решение уравнения, описывающего амплитуду отражённых волн. В *разделе 2.5* исследуются геометрические свойства семейств лучей, упрощающие расчёт амплитуд. В *разделе 2.6* лучевая амплитуда выражается через определитель матрицы перехода к локальным координатам и строится система динамического лучевого трассирования DSR, позволяющая трассировать её вдоль лучей. В *разделе 2.7* приводятся две параметризации лучей DSR, используемые в данной работе. В *разделах 2.8 и 2.9* для введённых систем дифференциальных уравнения ставятся начальные условия, позволяющие моделировать данные однократно-отражённых волн в неоднородных средах с гладкими криволинейными границами.

В **Главе 3** строятся алгоритмы решения обратных задач на основе построенной асимптотики уравнения DSR. В *разделе 3.1* для систем лучевого трассирования и динамического лучевого трассирования DSR ставятся начальные условия на дневной поверхности. В *разделе 3.2* приводятся формулы для восстановления положения и ориентации отражающих площадок, а в *разделе 3.3* – для восстановления коэффициента отражения от них. В *разделах 3.4–3.6* производится анализ чувствительности построенных формул к малым ошибкам в данных и к неточностям в скоростной модели среды. В *разделе 3.7* ставится обратная задача уточнения скоростной модели в линеаризованной постановке, для которой находится оптимальная оценка параметра Тихоновской регуляризации. В *разделе 3.8* эта оценка обобщается на нелинейную постановку обратной задачи.

В **Главе 4** описываются технические детали программной реализации построенных алгоритмов моделирования и инверсии и приводятся результаты

численных экспериментов. В *разделах 4.1–4.3* описывается представление скоростной модели среды, численное интегрирование систем обыкновенных дифференциальных уравнений и алгоритм нелинейной оптимизации, используемые в диссертации. В *разделе 4.4* даётся краткая характеристика программной реализации. В *разделе 4.5* приводятся результаты численных экспериментов, подтверждающих возможность моделирования отражённых волн путём сравнения асимптотики уравнения DSR с конечно-разностным решением волнового уравнения. В *разделе 4.6* промоделированные данные подаются на вход в инверсию и демонстрируется восстановление отражающих площадок вместе с коэффициентами отражения. В *разделах 4.7–4.9* описываются численные эксперименты по уточнению скоростной модели среды. Строится иерархия тестовых моделей, оцениваются ошибки в данных, приводятся результаты инверсии и демонстрируется применимость уточнённых моделей среды для задачи глубинной миграции. В *разделе 4.10* методом L-кривой подтверждается близость полуэвристической оценки параметра регуляризации к оптимальной.

## **Заключение**

В диссертации приведен вывод асимптотических решений псевдодифференциального уравнения двойного корня в истинных амплитудах и построение алгоритмов решения прямых и обратных задач сейсморазведки МОВ на их основе. Построенный в диссертации метод восстановления коэффициентов отражения не требует геометрической миграции целого набора волновых пакетов. Алгоритм уточнения скоростной модели, основанный на идеях метода взаимных точек, дополнен субоптимальной оценкой параметра регуляризации и весовыми множителями, согласованными с ошибками в данных. Вместе они разрешают основной недостаток метода взаимных точек и позволяют устойчиво строить умеренно-сложные модели, пригодные для проведения глубинной миграции.

Очевидным недостатком построенной асимптотики является ограничение на горизонтальное распространение лучей. Целевые объекты с круто падающими границами могут быть недостаточно освещены субвертикальными лучами, что снизит возможности моделирования и информативность инверсии. Эту трудность можно обойти путём введения системы координат, в которой лучи не становятся горизонтальными. Другим незавершённым направлением исследований является рассмотрение поведения лучей DSR в окрестности каустик (например, с использованием Гауссовых пучков).

С практической точки зрения предложенные методы геометрической миграции в истинных амплитудах и уточнения скоростной модели сильно зависят от точности выделения времен пробега отраженных волн и их производных в сейсмических данных. Автор не ставил целью разрабатывать их самостоятельно, а предполагает, что они уже получены с помощью алгоритмов, описанных в литературе и реализованных в обрабатывающих пакетах.

Наконец, программная реализация выполнена на языке Python, так что при внедрении разработанных алгоритмов в обрабатывающие пакеты потребуется их доработка для повышения вычислительной эффективности.

### **Основные публикации по теме диссертации**

#### *Публикации в рецензируемых научных изданиях из перечня ВАК*

1. Asymptotic Ray Method for the Double Square Root Equation / Shilov N.N., Duchkov A.A. // Journal of Marine Science and Engineering. – 2024. – Т. 12, № 4.
2. Миграционный скоростной анализ по лучевой асимптотике уравнения двойного корня / Шилов Н.Н., Дучков А.А. // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2024. – Т. 27, №1. – С. 108-127.

3. Controlled Directional Reception tomography based on the ray method asymptotics of the Double Square Root equation / Shilov N.N. // Сибирские электронные математические известия. – 2025. – Т. 22, №2. – С. 1350-1370.

*Другие значимые публикации и лично доложенные материалы конференций*

1. Шилов Н.Н. Свидетельство о регистрации программы DSRE CDR 2D / Шилов Н.Н. // Св-во о регистр. прогн. 2023681539; RU; № 2023680182, заявл. 03.10.2023, опубл. 16.10.2023.
2. Шилов Н.Н. Проверка сохранения амплитуд сейсмических волн при продолжении данных по уравнению двойного корня / Шилов Н.Н. // Геология. МНСК-2021: Материалы 59-й Международной научной студенческой конференции, Новосибирск, 12–23 апреля 2021 года. – Новосибирск: Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, 2021. – С. 46.
3. Шилов, Н.Н. Миграционный скоростной анализ по высокочастотной асимптотике уравнения двойного корня / Шилов Н.Н., Дучков А.А. // Сейсморазведка в Сибири и за её пределами : Материалы научно-практической конференции, Красноярск, 14–17 ноября 2023 года. – Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2024. – С. 153-161.
4. Шилов Н.Н. Алгоритм томографической инверсии времен пробега сейсмических волн и их производных с использованием лучевой асимптотики уравнения двойного корня / Шилов Н.Н. // Марчуковские научные чтения 2024: Тезисы Международной конференции, Новосибирск, 07–11 октября 2024 года. Новосибирск: Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 2024. – С. 153.

5. Shilov N.N. A slope tomography algorithm based on the high-frequency asymptotics of the Double Square Root equation / Shilov N.N., Duchkov A.A. // International Conference Days on Diffraction 2025: Abstracts, St. Petersburg, 16–20 June 2025. St. Petersburg Department of V.A. Steklov Institute of Mathematics, 2025. – P. 57.