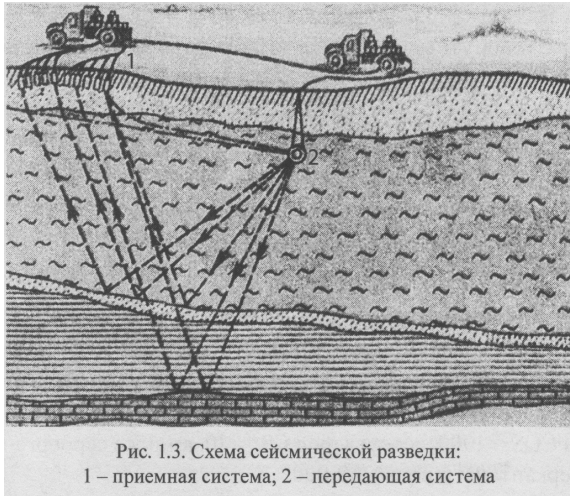


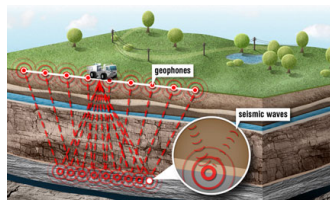
Обработка данных площадных систем наблюдений

М.А. Шишленин, Н.С. Новиков

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН

Семинар "Математические основы цифрового месторождения"
30.01.2019





Используемые подходы :

- Лучевая сейсмическая томография;
- Кинематические методы;
- Методы линеаризации/ Миграции;
- Метод полного обращения волновых полей;

Характерные особенности:

- Наличие опорной модели среды (*априорная* информация);
- Многократное решение задач прямого моделирования (подбор параметров)

Предположим, что рассматривается двумерная прямая задача распространения акустических/сейсмических волн в среде. Параметры расчётной области 2 км x 2 км, шаг сетки = 1 метр. Серия прямых задач решена на кластере на одном узле (12 ядер, MPI). Решение для одного источника занимает 30 минут на 12 ядрах. Решение для 40 источников на одном узле занимает 20 часов. Оценка времени решения 3D задачи 50 000 часов или 6 лет (12 ядер).

Подход И.М. Гельфанда — Б.М. Левитана — М.Г. Крейна

И.М. Гельфанд, Б.М. Левитан (1951), М.Г. Крейн (1954) -

спектральная область

В.А. Марченко (1955) - обратная задача рассеяния

А.С. Алексеев, А.С. Благовещенский, В.Г. Яхно - обратная задача сейсмики

В.Е. Захаров, А.Б. Шабат (1971) - решение уравнения КдФ методами обратной задачи рассеяния

М.И. Белишев (1987), С.И. Кабанихин (1988) – многомерные аналоги
И многие другие (В.Г. Романов, А.В. Баев, В. Gopinath, M. Soni, R. Burridge, W.W. Symes, ...)

Особенности:

- 1) Сведение нелинейной обратной задачи к семейству линейных интегральных уравнений
- 2) Нет многократного решения прямых задач;
- 3) Не требуется *априорная* информация

Обратная задача для уравнения акустики

Рассмотрим семейство задач, зависящее от параметра $\alpha \in \mathbb{R}^2$:

$$u_{tt} - \Delta u + \nabla \ln \rho(x, y) \nabla u = 0, \quad x > 0, \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u|_{t < 0} \equiv 0, \quad (2)$$

$$u_x|_{(+0, y, t; \alpha)} = \delta(t)\delta(y - \alpha). \quad (3)$$

Обратная задача: Восстановить плотность $\rho(x, y)$ по дополнительной информации:

$$u(+0, y, t) = r(y, t; \alpha), \quad t > 0, \quad y, \alpha \in \mathbb{R}^2. \quad (4)$$

Трёхмерный аналог уравнения М.Г. Крейна

Обратная задача (1)-(4) сводится к следующему семейству линейных интегральных уравнений:

$$\Phi(x, t; \alpha) - \frac{1}{2} \int_{-x}^x \left[\int_{\mathbb{R}^2} r_t(\beta, t-s; \alpha) \Phi(x, s; \beta) d\beta \right] ds = \frac{1}{2} \frac{1}{\rho(0, \alpha)}, \quad (5)$$

Here $|t| < x, x > 0, \alpha \in \mathbb{R}^2$.

Решение обратной задачи восстанавливается по решению $\Phi(x, t; \beta)$ уравнения М.Г. Крейна:

$$\rho(x, \beta) = \frac{1}{\rho(0, \beta)} \left[\Phi(x, x-0; \beta) \right]^{-2} \quad (6)$$

Конечномерное приближение

В случае, когда данные $r(\beta, t, \alpha)$ известны в конечном числе точек $\beta = (\beta_{1,i}, \beta_{2,j}), i = 0, \dots, N_1, j = 0, \dots, N_2$, то уравнение (5) может быть приближено конечномерной системой линейных интегральных уравнений:

$$2\Phi^{k,l}(x, t) - h_1 h_2 \int_{-x}^x \sum_{i=0}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} A_{i,j}^{k,l}(t-s) \Phi^{i,j}(x, s) ds = \frac{1}{\rho^{k,l}(x)} \quad (7)$$

Здесь $\Phi^{k,l}(x, t) = \Phi(x, t; \alpha), \rho^{k,l}(x) = \rho(x, \alpha), \alpha = (\alpha_{1,k}, \alpha_{2,l})$, ядро уравнения $A_{i,j}^{k,l}(t-s) = r_t(\beta, t-s; \alpha), \alpha = (\alpha_{1,k}, \alpha_{2,l}), \beta = (\beta_{1,k}, \beta_{2,l})$. После дискретизации можно получить СЛАУ:

$$(2I - h_x h_1 h_2 A) \overline{\Phi} = \overline{G} \quad (8)$$

Матрица системы (8) имеет $2N_x \times N_1 \times N_2$ строк и столбцов и обладает блочно-тёплицевой структурой.

Обращение блочно-тёплицевой матрицы

Рассмотрим матрицу A следующей структуры:

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & \cdots & a_{-n+1} \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_{-n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим задачу вычисления первого и последнего столбцов матрицы A^{-1} .

Пусть A^k - ведущая подматрица порядка $k + 1$. Предположим, что известны вектора x_k, y_k , такие, что:

$$A^k x_k = e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}, A^k y_k = e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Вычислим:

$$A^{k+1} \begin{bmatrix} x_k \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^k & a_{-k} \\ & a_{-k+1} \\ & \vdots \\ a_k & a_{k-1} & \cdots & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^k \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ \epsilon_k^x \end{bmatrix}$$

Здесь $\epsilon_k^x = a_k x_0^k + \cdots + a_1 x_{k-1}^k$.

Аналогично получим:

$$A^{k+1} \begin{bmatrix} 0 \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_k^y \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Тогда вектора x_{k+1}, y_{k+1} можно представить следующим образом:

$$x_{k+1} = \alpha \begin{bmatrix} x_k \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ y_k \end{bmatrix}, y_{k+1} = \gamma \begin{bmatrix} x_k \\ 0 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 0 \\ y_k \end{bmatrix}$$

Коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{bmatrix} 1 & \epsilon_k^y \\ \epsilon_k^x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Получим следующий алгоритм вычислений (В. Воеводин, Е. Тыртышников, 1987):

step $k = 0$:

p_0, q_0 - произвольные блоки, $\tilde{x}_0^0 = a_0^{-1}p_0$, $\tilde{y}_0^0 = a_0^{-1}q_0$.

step $k = 1, 2, \dots, n - 1$:

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}_k &= a_k \tilde{x}_0^{(k-1)} + a_{k-1} \tilde{x}_1^{(k-1)} + \dots + a_1 \tilde{x}_{k-1}^{(k-1)}, \\
 \tilde{G}_k &= a_{-1} \tilde{y}_0^{(k-1)} + a_{-2} \tilde{y}_1^{(k-1)} + \dots + a_{-k} \tilde{y}_{k-1}^{(k-1)}, \\
 s_k &= -q_{k-1} \tilde{F}_k, \quad t_k = -p_{k-1} \tilde{G}_k, \\
 p_k &= (I - t_k s_k)^{-1} p_{k-1}, \quad q_k = (I - s_k t_k)^{-1} q_{k-1}, \\
 \left[\tilde{x}_0^{(k)}, \tilde{x}_1^{(k)}, \dots, \tilde{x}_k^{(k)} \right]' &= \left[\tilde{x}_0^{(k-1)}, \tilde{x}_1^{(k-1)}, \dots, \tilde{x}_{k-1}^{(k-1)} 0 \right]' + \\
 &+ \left[0, \tilde{y}_0^{(k-1)}, \tilde{y}_1^{(k-1)}, \dots, \tilde{y}_{k-1}^{(k-1)} \right]' s_k; \\
 \left[\tilde{y}_0^{(k)}, \tilde{y}_1^{(k)}, \dots, \tilde{y}_k^{(k)} \right]' &= \left[\tilde{x}_0^{(k-1)}, \tilde{x}_1^{(k-1)}, \dots, \tilde{x}_{k-1}^{(k-1)} 0 \right]' t_k + \\
 &+ \left[0, \tilde{y}_0^{(k-1)}, \tilde{y}_1^{(k-1)}, \dots, \tilde{y}_{k-1}^{(k-1)} \right]';
 \end{aligned} \tag{9}$$

Таким же образом можно получить алгоритм решения линейной системы:

$$A \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \dots \\ z_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

Рассмотрим алгоритм вычисления векторов $z^{(k)}$ - решений усечённой системы $A_k z^{(k)} = b^{(k)}$, где $b^{(k)} = [b_0 b_1, \dots, b_k]'$ - усечённый вектор правой части. Имеем:

$$A^k \begin{bmatrix} z^{(k-1)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_k - 1 \\ \epsilon_k^z \end{bmatrix}$$

Ошибка ϵ_k^z можно убрать, используя вектор y_k .

step k = 0:

$$z_0^{(0)} = a_0^{-1} b_0;$$

step k = 1, 2, ..., n - 1:

$$\epsilon_k = b_k - a_k z_0^{(k-1)} - a_{k-1} z_1^{(k-1)} - \dots - a_1 z_{k-1}^{(k-1)};$$

$$\omega_k = q_k \epsilon_k;$$

$$\begin{aligned} \left[z_0^{(k)}, z_1^{(k)}, \dots, z_k^{(k)} \right]' &= \left[z_0^{(k-1)}, z_1^{(k-1)}, \dots, z_{k-1}^{(k-1)} 0 \right]' + \\ &+ \left[\tilde{y}_0^{(k)}, \tilde{y}_1^{(k)}, \dots, \tilde{y}_k^{(k)} \right]' \omega_k; \end{aligned} \quad (10)$$

Величины q_k , $y^{(k)}$ вычисляются согласно алгоритма (9).

Если A - блочно-тёплицева матрица, состоящая из $n \times n$ блоков размера p , то трудоёмкость данного метода имеет вид $O(n^2 p^3)$

(Для решения дискретного приближения уравнения М.Г. Крейна при всех значениях глубины).

Метод Монте-Карло

Алгоритм Монте-Карло решения интегрального уравнения
Фредгольма вида

$$\varphi(x) = \int_X k(x', x) \varphi(x') dx' + \hat{f}(x) \quad (11)$$

основан на представлении решения уравнения (11) рядом Неймана

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} K^n \hat{f} \quad (12)$$

Рассмотрим задачу вычисления $\varphi(x_0)$ решения уравнения (11) в точке $x = \tilde{x}$: Предположим, что выполнено условие $\rho(K_1) < 1$, где K_1 — интегральный оператор с ядром $|k(y, x)|$. Зафиксируем параметры цепи Маркова так, чтобы они удовлетворяли следующим условиям:

$$\pi(x') \equiv \delta(\tilde{x} - x'), \quad (13)$$

$$p(x', x) \neq 0, \text{ если } k(x', x) \neq 0 \quad (14)$$

И рассмотрим цепь Маркова $x_0, \dots, x_m, \dots$, порожденную заданными параметрами.

Рассмотрим случайную величину

$$\xi^* = \sum_{i=0}^m Q_i^* \hat{f}(x_i) \quad (15)$$

где веса $Q_0^*, \dots, Q_m^*$ вычисляются следующим образом:

$$Q_0^* = 1, \quad Q_i^* = Q_{i-1}^* \cdot \frac{k(x_m, x_{m-1})}{p(x_m, x_{m-1})} = Q_{i-1}^* \cdot \frac{k(x_m, x_{m-1})}{r(x_m, x_{m-1})(1 - p(x_{m-1}))} \quad (16)$$

Тогда имеет место равенство (С.М. Ермаков, Г.А. Михайлов, 1976):

$$\varphi(\tilde{x}) = E\xi^* = \hat{f}(\tilde{x}) + E \sum_{i=1}^m Q_i^* \hat{f}(x_i) \quad (17)$$

Особенности:

- Нет перехода к линейной системе
- Возможность вычисления оценки решения всех уравнений из семейства М.Г. Крейна за счёт выбора подходящей цепи Маркова
- Естественный подход к параллелизации метода
- Ограничение области применимости сходимостью ряда Неймана

Приближение обратной задачи

Обратную задачу (1)-(4) можно приблизить следующей системой:

$$u_{tt}^{(k)} - \Delta_{x,y} u^{(k)} + \nabla_{x,y} \ln \rho(x, y) \nabla_{x,y} u^{(k)} = 0, \quad (18)$$
$$x > 0, \quad y \in (-\pi, \pi), \quad t > 0, \quad |k| \leq N;$$

$$u^{(k)}|_{t < 0} \equiv 0; \quad (19)$$

$$\frac{\partial u^{(k)}}{\partial x}(+0, y, t) = e^{iky} \delta(t); \quad (20)$$

$$u^{(k)}|_{y=\pi} = u^{(k)}|_{y=-\pi}. \quad (21)$$

обратная задача: восстановить $\rho(x, y)$ по данным:

$$u^{(k)}(0, y, t) = f^{(k)}(y, t). \quad (22)$$

Получаем N -приближение уравнения М.Г. Крейна (5):

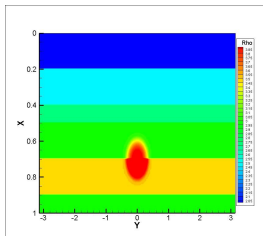
$$2\Phi^{(k)}(x, t) - \sum_{|m| \leq N} \int_{-x}^x f_m^{(k)'}(t-s) \Phi^{(m)}(x, s) ds = G^{(k)}. \quad (23)$$

Здесь $|t| < x$, $|k| \leq N$.

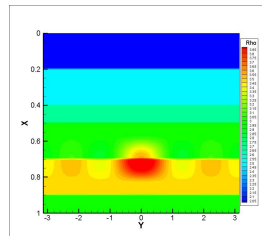
Матричный вид уравнения (23):

$$2\mathbb{E}\vec{\Phi}(x, t) - \int_{-x}^x \mathbb{F}'(t-s) \vec{\Phi}(x, s) ds = \vec{G}, \quad |t| < x. \quad (24)$$

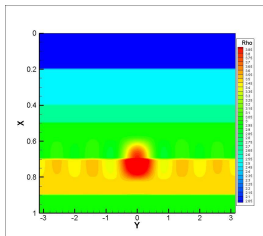
Определение двумерного включения в горизонтально-слоистой среде:



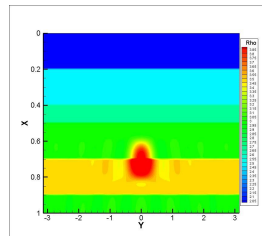
a)



b)

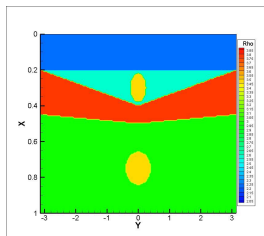


c)

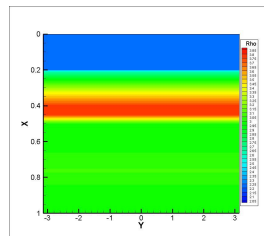


d)

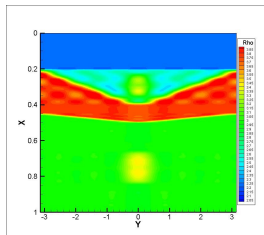
Определение двумерного включения:



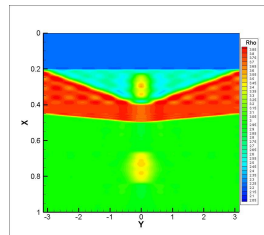
a)



b)



c)



d)

Рис.: a) Точное решение, b) $N_f = 1$, c) $N_f = 11$, d) $N_f = 15$.

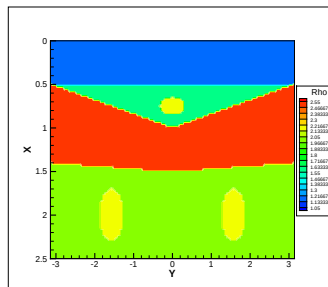
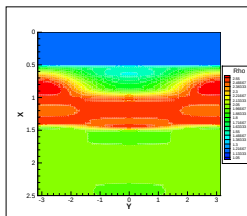
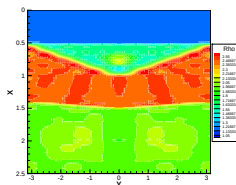


Рис.: Test solution.

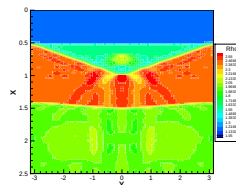
$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1.2, & \text{if } 0 \leq x \leq 0.5; \\ 1.6, & \text{if } x > 0.5, x \leq 1 - \frac{|y|}{2\pi} \\ 2.5, & \text{if } x > 1 - \frac{|y|}{2\pi}, x \leq 1.5 - \frac{|y|}{10\pi} \\ 2.0, & \text{if } x > 1.5 - \frac{|y|}{10\pi} \\ 2.2, & \text{if } (x-1)^2 + \left(\frac{y}{\pi}\right)^2 < 0.01, \\ 2.2, & \text{if } (x-2)^2 + \left(\frac{y \pm \frac{\pi}{2}}{\pi}\right)^2 < 0.01 \end{cases} \quad (25)$$



$$N_F = 1$$

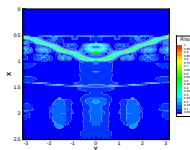


$$N_F = 5$$

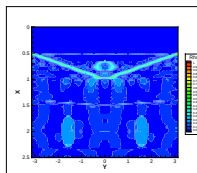


$$N_F = 10$$

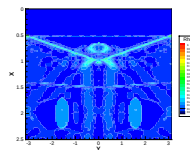
Рис.: Computed solution $\rho_{comp}(x, y)$ for different values of the parameter N_F



$$N_F = 3$$



$$N_F = 6$$

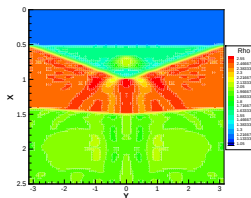


$$N_F = 12$$

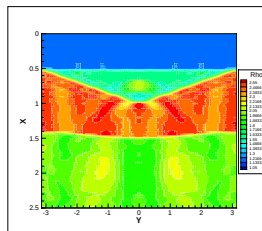
Рис.: Error $|\rho_{Ex} - \rho_{comp}|$ for different values of the parameter N_F

	$N_x = 100$			$N_x = 200$		
	$N_F = 6$	$N_F = 9$	$N_F = 12$	$N_F = 6$	$N_F = 9$	$N_F = 12$
<i>Error</i>	0.335	0.337	0.337	0.301	0.300	0.298
<i>T(sec)</i>	7.32	16.2	26.9	29.0	59.6	95.3
<i>T_(CVM)</i>	72.1	156.4	288.1	639.0	-	-

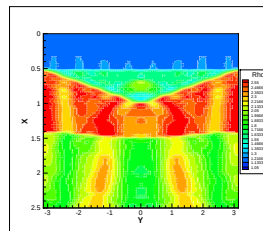
Таблица: Numerical results - Time cost comparison



$$N_F = 9, \varepsilon = 1\%$$

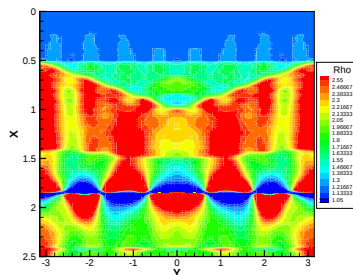


$$N_F = 9, \varepsilon = 1\%$$

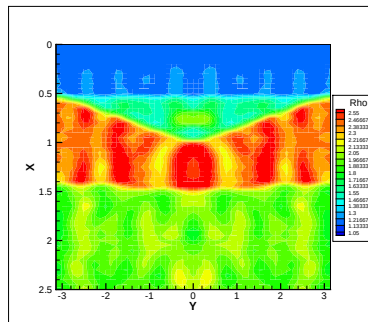


$$N_F = 9, \varepsilon = 2\%$$

Рис.: Noised data



$$\varepsilon = 4\%, N_F = 9, N_x = 100$$



$$\varepsilon = 4\%, N_F = 9, N_x = 50$$

Рис.: Noised data - dependence of the results on the mesh parameters

Заключение

Особенности подхода:

- Сведения нелинейной обратной задачи к решению линейных интегральных уравнений
- Использование блочно-тёплицевой структуры СЛАУ в сочетании со структурой задачи (в ходе решения одной системы получаем решение обратной задачи для всех значений глубины)
- Алгоритм не требует многократного решения прямой задачи

Открытые вопросы:

- Улучшение устойчивости метода
- Переход к использованию реальных данных (решение задачи деконволюции или формулировка новых аналогов)
- Перенос результатов на другие модели распространения волн (определение скорости среды)

References:



S. KABANIKHIN, K. SABELFELD, N. NOVIKOV, M. SHISHLENIN, *Numerical solution of an inverse problem of coefficient recovering for a wave equation by a stochastic projection methods*, Monte Carlo methods and applications, Volume 21, Issue 3, p. 189–203



S. KABANIKHIN, K. SABELFELD, N. NOVIKOV, M. SHISHLENIN, *Numerical solution of the multidimensional Gelfand–Levitan equation*, Journal of Inverse and Ill-posed Problems. Volume 23, Issue 5, p. 439-450



S. KABANIKHIN, N. NOVIKOV, I. OSELEDETS, M. SHISHLENIN , *Fast Toeplitz linear system inversion for solving two-dimensional acoustic inverse problem*, Journal of Inverse and Ill-posed Problems. Volume 23, Issue 6, p. 687-700, 2015



S. KABANIKHIN, M. SHISHLENIN, N. NOVIKOV, *Algorithms of determination of the elastic parameters by using the areal data collection systems (direct linear processing of the seismic data)*, Vestnik Kibernetiki, №2(22), стр. 82-90, 2016 (in Russian)



A.S. ALEKSEEV, *Inverse dynamical problems of seismology*, Some Methods and Algorithms for Interpretation of Geophysical Data. Nauka, Moscow, 1967, pp. 9-84 (in Russian).



I.M. GEL'FAND AND B.M. LEVITAN, *On the determination of a differential equation from its spectral function*, Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. 15, (1951), pp. 309-360 (in Russian).



M.G. KREIN, *Solution of the inverse Sturm-Liouville problem*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 76 (1951), pp. 21-24 (in Russian).



M.G. KREIN, *On a method of effective solution of an inverse boundary problem*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 94 (1954), pp. 987-990 (in Russian).



A.S. BLAGOVESCHENSKI. *The local method of solution of the non-stationary inverse problem for an inhomogeneous string*, Proceedings of the Mathematical Steklov Institute 115 (1971), pp. 28-38 (in Russian).



I. GOHBERG AND A. SEMENCUL, *On the inversion of finite Toeplitz matrices and their continuous analogs*, Mat. Issled. 2, 201–233 (1972).



V.V. VOEVDIN, E.E. TYRTYSHNIKOV, *Computational processes with Toeplitz matrices*, Moscow, Nauka, 1987 (in Russian)



K. SABELFELD, N. LOSHCHINA, *Stochastic iterative projection methods for large linear systems*, Monte Carlo Methods Appl. 16 (2010), 343–359



T. STROHMER AND R. VERSHYNIN, *A randomized Kaczmarz algorithm with exponential convergence*, Journal of Fourier Analysis and Applications, vol. 15 (2009), 262–278.



L. NGUYEN, L. BEILINA, M. KLIBANOV *Reconstruction of the refractive index from experimental backscattering data using a globally convergent inverse method*, Siam Journal of Scientific Computing, Volume 36, Issue 3, pp. 273-293, 2014



L. BEILINA AND M.V. KLIBANOV, *Approximate global convergence and adaptivity for coefficient inverse problems*, Springer, New York, 2012.



M.I. BELISHEV, *Recent progress in the boundary control method*. Inverse problems, Volume: 23, Issue: 5 Pages: R1-R67, 2007.



M.I. BELISHEV, *Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC method)*, Inverse Problems, Volume: 13, Issue: 5, pp. R1-R45, O 1997.



V.A. MARCHENKO *Restoration of the potential energy by the phase of the dissipated waves*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 104 (1955), pp. 695-698 (in Russian)



S.I. KABANIKHIN AND M.A. SHISHLENIN, *Boundary control and Gel'fand-Levitan-Krein methods in inverse acoustic problem*, J. Inv. Ill-Posed Problems 12 (2), (2004), pp. 125-144.



S.I. KABANIKHIN. *Inverse and ill-posed problems: Theory and applications*, De Gruyter, Berlin–Boston, 2011



S.I. KABANIKHIN AND M.A. SHISHLENIN. *Numerical algorithm for two-dimensional inverse acoustic problem based on Gelfand-Levitan-Krein equation*, Journal of inversed and ill-Posed problems, 18 (2010), 802–814



S.I. KABANIKHIN, *On linear regularization of multi-dimentional inverse problems for hyperbolic equations*, Sov. Math. Dokl. 1990, vol 40, 3, pp. 579-583.



V. G. ROMANOV AND S. I. KABANIKHIN *Inverse Problems for Maxwell's Equations* Utrecht, The Netherlands, VSP, 1994, 249 pp.



S.I. KHABANIKHIN, O. SCHERZER, M.A. SHISHLENIN *Iteration method for a solving a two-dimensional problem for hyperbolic equation*, J. Inv. Ill-posed Problems, 2003, V.11, N 1, p. 1-23



A. KARCHEVSKIY, M. KLIBANOV, L. NGUYEN, N. PANTONG, A. SULLIVAN, *The Krein method and the globally convergent method for experimental data*, Applied Numerical Mathematics 74 (2013), pp. 111–127



N.S. NOVIKOV, M.A. SHISHLENIN, *Comparative analysis of two numerical methods of solving Gelfand–Levitan–Krein equation*, Siberian Electronics Mathematical Reports, Proceedings of the 2nd International scientific school-conference for young scientists "Theory and numerical methods for solving inverse and ill-posed problems pp. 379-393, 2011



Yu. Zavyalov, B. Kvasov, V. Miroshnichenko. *Methods of the spline-functions*. Moscow, Nauka, 1980. (in Russian)

1D seismics

System of equations of the theory of elasticity:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad div} \mathbf{U} + \mu \Delta \mathbf{U} + \text{grad} \lambda \text{div} \mathbf{U} + \sum_{i=1}^3 \text{grad} \mu \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} + \text{grad} U_{x_i} \right) \mathbf{e}_i; \quad (26)$$

Here $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$, $\mathbf{U} = (U_x, U_y, U_z)^T$ - displacement vector.

λ, μ are Lamé parameters, ρ is the density.

We suppose that $\lambda = \lambda(z), \mu = \mu(z), \rho = \rho(z)$.

$v_s^2(z) = \frac{\mu}{\rho}$ - shear wave's velocity, $v_p^2(z) = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$ - plane wave's velocity.

Initial and boundary conditions:

$$\mathbf{U}(x, y, z, t)|_{t < 0} \equiv 0; \quad (27)$$

$$\sigma_z|_{z=0} = \lambda_0 \left[\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right] + 2\mu_0 \frac{\partial U_z}{\partial z} = g_1(x, y, t);$$

$$\tau_{xz}|_{z=0} = \mu_0 \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) = g_2(x, y, t);$$

$$\tau_{yz}|_{z=0} = \mu_0 \left(\frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \right) = g_3(x, y, t); \quad (28)$$

Data of inverse problem:

$$U_x(x, y, 0, t) = f_1(x, y, t); \quad U_y(x, y, 0, t) = f_2(x, y, t); \quad U_z(x, y, 0, t) = f_3(x, y, t) \quad (29)$$

The problem is to recover $\lambda(z), \mu(z), \rho(z)$ from (26)-(29) by given f_1, f_2, f_3 .

A. S. Alekseev, *Inverse dynamic seismic problems*, 1967

1. Recovering of $v_s(z)$, $\rho(z)$ by using SH-waves :

- Boundary conditions: $\sigma_z = 0, \tau_{rz} = 0, \tau_{\theta z} = \delta(t)b(r)$ - surface rotation moment of intensity $\delta(t)$.

2. Recovering of $v_p(z)$ by using P-waves :

- Boundary conditions: $\sigma_z|_{z=0} = \delta(x)\delta(y)\delta(t), \tau_{xz}|_{z=0} = 0, \tau_{yz}|_{z=0} = 0$
- instant directioned concentrated force.

$$u_{tt} = u_{xx} - \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}u_x, x > 0, t > 0$$

Results

