

Численные методы решения задач «среднего поля»

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

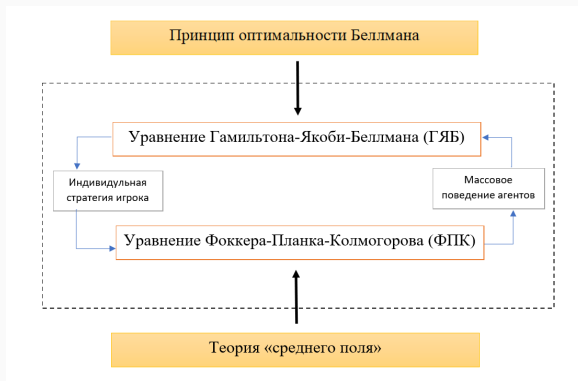
Соискатель: Корниенко Виктория Сергеевна

Научный руководитель: член-корреспондент РАН, д. ф.-м.н., профессор
Шайдуров Владимир Викторович

Красноярск, 2021

Введение в предметную область

Идея теории игр «среднего поля» состоит в том, чтобы рассматривать систему из бесконечного числа игроков вместо конечного. Тогда влияние каждого игрока становится незначительным, и значение имеет только масса игроков. В полученной системе каждый игрок оптимизирует свое поведение в соответствии с движением всей массы игроков, а массовое поведение определяется суммой поведения всех игроков.



Краткий обзор литературы

Работы основоположников теории

- 1 М.У. Huang, Р.Е. Caines, and R. P. Malhamé, Large population cost-coupled LQG problems with non-uniform agents: individual-mass behavior and decentralized ϵ -Nash equilibria. IEEE Trans. Autom. Control, vol. 52 (9), pp. 1560-1571.
- 2 J.-M. Lasry and P.-L. Lions, Mean field games, Japan J. Math., vol. 2 (1), 2007, pp. 229-260.

Монографии

- 1 D.A. Gomes, J. Saude. Mean field games models - a brief survey. Dynamic Games and Applications. – 2014. – Vol. 4. – P. 110-154.
- 2 A. Bensoussan, J. Frehse, P. Yam. Mean Field Games and Mean Field Type Control Theory. New York: Springer-Verlag, 2013.– 128 p.
- 3 Y. Achdou. Finite difference methods for mean field games. Chapter in Hamilton-Jacobi Equations: Approximations, Numerical Analysis and Applications. Lecture Notes in Mathematics. – Berlin: Springer, 2013. – 47 p.
- 4 O. Gueant, J.-M. Lasry, P.-L. Lions. Mean Field Games and Applications. Chapter in Paris-Princeton lectures in mathematical finance. Lecture Notes in Mathematics. – Berlin: Springer, 2010. – P. 205-267.

Цели и задачи диссертационной работы

Целью данной работы является адаптация математических моделей, используемых в международном экономическом сообществе и описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных, к оптимизации затрат, доходов, достижению поставленных социальных и экономических целей, прогнозированию критических ситуаций для выбранной области моделирования; а также разработка и обоснование эффективных численных методов решения задач, описываемых такими математическими моделями.

Для достижения поставленной цели были поставлены следующие **задачи**.

- 1 Адаптировать математические модели «Игры среднего поля» для применения в области экологии, экономики отдельных отраслей и регионов для достижения заданных социальных и экономических целей и прогноза критических ситуаций.
- 2 Использовать модели для прогнозирования мезо- и макроповедения больших популяций (население, пользователи, клиенты или предприятия) в различных внешних условиях (экономических, социальных, экологических, политических).
- 3 Разработать и обосновать эффективные численные методы решения задач «среднего поля», описываемых системами дифференциальных уравнений в частных производных с новыми формулировками данных.

Основные положения, выносимые на защиту

- ❶ Модифицированные математические модели, основанные на теории «игр среднего поля» и применимые к оптимизационным задачам с неквадратичным контролем.
- ❷ Новая математическая модель, основанная на теории игр «среднего поля» и применимая к оптимизационным задачам с ограничениями на финальное состояние агентов.
- ❸ Новые вычислительные алгоритмы для одно- и двумерных оптимизационных задач, основанные на полулагранжевом приближении, наследующие полезные свойства дифференциальных задач и приводящие к явным локальным правилам минимизации целевого функционала.

В качестве **метода** исследования в работе используется вычислительный эксперимент, включающий в себя следующие этапы: математическая формулировка задачи, построение численного алгоритма, его программная реализация, проведение расчетов и анализ полученных результатов.

Достоверность полученных результатов подтверждена проверкой и обоснованием сходимости численных методов, строгим выводом используемых моделей и обеспечением законов сохранения при построении вычислительных схем.

Постановка одномерной (по пространству) задачи с неквадратичным управлением

Сформулируем задачу оптимизации: пусть $t \in [0, T]$, $x \in [0, 1]$

$$\left\{ \begin{array}{l} \inf_{\alpha} J(m, \alpha) = \inf_{\alpha} \int_0^T \int_0^1 (F(\alpha, t, x) m + g(t, x, m)) dx dt, \\ \frac{\partial m}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \frac{\partial(\alpha m)}{\partial x} = 0, \\ m(0, x) = m_0(x), \quad \partial m / \partial x = 0 \text{ при } x=0,1. \end{array} \right. \quad (1)$$

$\alpha(t, x)$ – стратегия (управление) агента;

$m(t, x)$ – плотность распределения агентов;

$F(\alpha, t, x)$ – расходы на управление;

$g(t, x, m)$ – общие расходы.

Будем считать функцию $g(t, x, \bar{m})$ с числовым параметром $\bar{m} \in \mathbf{R}$ кусочно-гладкой со следующим условием для всех допустимых значений аргумента $\tilde{m}$ и $\bar{m}$ из $\mathbf{R}$:

$$g(t, x, \tilde{m}) - g(t, x, \bar{m}) \leq (\tilde{m} - \bar{m}) b(t, x, \bar{m}), \quad \text{где } b(t, x, \bar{m}) = \frac{\partial g}{\partial \bar{m}}(t, x, \bar{m})$$

Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана

Лагранжиан оптимизационной задачи (1) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(m, \alpha, v) := & \int_0^T \int_0^1 (F(\alpha, t, x) m + g(t, x, m)) dx dt + \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial v}{\partial x} \right) m dx dt - \\ & - \int_0^1 (v(T, x) m(T, x) - v(0, x) m_0(x)) dx. \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial v}{\partial x} &= -F(\alpha, t, x) - b, \\ v(T, x) &= 0 \quad \forall x \in [0, 1], \\ \frac{\partial v}{\partial x}(t, 0) &= \frac{\partial v}{\partial x}(t, 1) = 0 \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3)$$

Условия оптимальности стратегии игрока

Условия оптимальности выбранной стратегии принимают вид нелинейного алгебраического уравнения относительно функции α :

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{\alpha}}(\alpha, t, x) + \frac{\partial v}{\partial x}(t, x) = 0 \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, 1]. \quad (4)$$

Для однозначной разрешимости (4) будем считать, что функция $F(\bar{\alpha}, t, x)$ (с числовым параметром $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}$) подчиняется следующим условиям:

1. $\frac{\partial F}{\partial \bar{\alpha}}(\bar{\alpha}, t, x)$ кусочно-непрерывна на $(-\infty, +\infty) \times [0, T] \times [0, 1]$; (5)

2. $\frac{\partial F}{\partial \bar{\alpha}}(\bar{\alpha}, t, x)$ строго монотонна по $\bar{\alpha} \in (-\infty, +\infty) \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, 1]$; (6)

3. $F(0, t, x) = \frac{\partial F}{\partial \bar{\alpha}}(0, t, x) = 0$ на $[0, T] \times [0, 1]$. (7)

Откуда

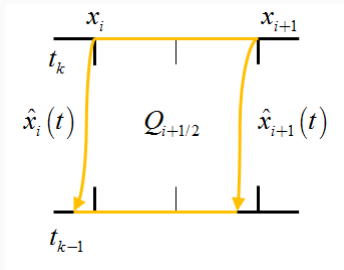
$$\alpha(t, x) = \theta \left(\frac{\partial v}{\partial x}(t, x) \right) \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, 1] \quad (8)$$

является однозначным решением уравнения (4) со свойством

$$\alpha(t, 0) = \alpha(t, 1) = 0 \quad \forall t \in (0, T). \quad (9)$$

Эйлерово-Лагранжев подход к построению вычислительных схем

$$Dm = \frac{\partial m}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \frac{\partial(\alpha m)}{\partial x}.$$



Криволинейная трапеция $Q_{i+1/2}$, соответствующая узлу $(t_k, x_{i+1/2})$

Решение задачи уравнения ФПК будем искать в виде кусочно-линейной функции $m^h(t, x)$ на каждом временном слое t_k , линейной на каждом отрезке $\omega_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \quad \forall i = 1, \dots, N-1$.

Характеристика представляет собой решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\hat{x}' = \alpha(t, \hat{x}), \quad t_k \geq t \geq t_{k-1},$$

с начальным условием $\hat{x}_i(t_k) = x_i$ на слое t_k .

Наложим следующее ограничение:

$$\tau \left| \alpha_{k,i}^h \right| < h/4 \quad \forall k = 0, \dots, M \quad \forall i = 0, \dots, N-1. \quad (10)$$

Аппроксимация уравнения ФПК

При выполнении условий (10) и $h^2 < 4\tau\sigma^2 \forall k = 0, \dots, M \forall i = 0, \dots, N - 1$ матрица системы (11) обладает М-свойством. (с диагональным преобладанием по столбцам).

$$\mathfrak{A}m_{\cdot, \cdot}^h = \begin{bmatrix} \mathbb{A} & & & & \\ -\mathbb{B}_2 & \mathbb{A} & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & -\mathbb{B}_M & \mathbb{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{1, \cdot}^h \\ m_{2, \cdot}^h \\ \vdots \\ m_{M, \cdot}^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{B}_1 m_{0, \cdot}^h \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathfrak{F}m_{0, \cdot}^h. \quad (11)$$

Здесь $0 = (0, \dots, 0)^T$ – вектор-столбец, а $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}_k$ – матрицы вида

$$\mathbb{B}_k = \begin{bmatrix} \gamma_{k, -1/2}^1 + \gamma_{k, 1/2}^2 & \gamma_{k, 3/2}^3 & & & \\ \gamma_{k, 1/2}^1 & \gamma_{k, 3/2}^2 & \gamma_{k, 5/2}^3 & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \gamma_{k, N-3/2}^1 & \gamma_{k, N-1/2}^2 + \gamma_{k, N+1/2}^3 & \end{bmatrix}, \quad (12)$$

Аппроксимация уравнения ФПК

где

$$\begin{aligned}\gamma_{k,i+1/2}^1 &= \frac{1}{8\tau} \left(1 + \frac{4\tau}{h} \alpha_{k,i} \right), \\ \gamma_{k,i+1/2}^2 &= \frac{1}{8\tau} \left(3 + \frac{4\tau}{h} \alpha_{k,i} \right) + \frac{1}{8\tau} \left(3 - \frac{4\tau}{h} \alpha_{k,i+1} \right), \\ \gamma_{k,i+1/2}^3 &= \frac{1}{8\tau} \left(1 - \frac{4\tau}{h} \alpha_{k,i+1} \right).\end{aligned}\tag{13}$$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \frac{7}{8\tau} + \frac{\sigma^2}{2h^2} & \frac{1}{8\tau} - \frac{\sigma^2}{2h^2} & & & \\ \frac{1}{8\tau} - \frac{\sigma^2}{2h^2} & \frac{3}{4\tau} + \frac{\sigma^2}{h^2} & \frac{1}{8\tau} - \frac{\sigma^2}{2h^2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{1}{8\tau} - \frac{\sigma^2}{2h^2} & \frac{7}{8\tau} + \frac{\sigma^2}{2h^2} & \end{bmatrix}.\tag{14}$$

Дискретная задача оптимизации

Вместо функционала стоимости из (1) будем рассматривать его дискретный аналог

$$J^h(m^h, \alpha^h) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{N-1} \left(r_{k,i+1/2}^h m_{k,i+1/2}^h + g_{k,i+1/2}^h \right) \tau h. \quad (15)$$

Здесь $g_{k,i+1/2}^h = g(t_k, x_{i+1/2}, m_{k,i+1/2}^h)$, а $r_{k,i+1/2}^h$ – квадратурная формула для функции $F(\alpha, t, x)$, сохраняющая погрешность аппроксимации $O(\tau + h^2)$:

$$r_{k,i+1/2}^h = F(\alpha_{k+1,i}^h, t_k, x_i)/2 + F(\alpha_{k+1,i+1}^h, t_k, x_{i+1})/2. \quad (16)$$

Таким образом, задачу (1) для сеточных значений функций можно переписать в дискретном виде

$$\begin{cases} \inf_{\alpha} J^h(m^h, \alpha^h), \\ \mathfrak{A}m_{\cdot,\cdot}^h = \mathfrak{F}m_{0,\cdot}^h. \end{cases} \quad (17)$$

Лагранжиан дискретной задачи оптимизации

Чтобы сформулировать дискретную задачу оптимального управления, введем в рассмотрение сеточную функцию $v_{\cdot,\cdot}^h = \{v_{k,i+1/2}^h\}_{i=0,\dots,N-1}^{k=0,\dots,M}$. Умножим k -тый компонент (11) на $\tau v_{k,\cdot}^h$ и просуммируем по k и запишем Лагранжиан дискретной задачи оптимизации (17):

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}^h(m^h, \alpha^h, v^h) := & J^h(m^h, \alpha^h) + \left\langle m_{0,\cdot}^h, \mathbb{A} v_{0,\cdot}^h \right\rangle \tau - \\ & - \left\langle m_{M,\cdot}^h, \mathbb{A} v_{M,\cdot}^h \right\rangle \tau - \sum_{k=0}^{M-1} \left(\left\langle m_{k,\cdot}^h, \mathbb{A} v_{k,\cdot}^h \right\rangle - \left\langle m_{k,\cdot}^h, \mathbb{B}_{k+1}^* v_{k+1,\cdot}^h \right\rangle \right) \tau \end{aligned} \quad (18)$$

с учетом обозначения $\langle u, v \rangle = h \sum_{i=0}^{N-1} u_{i+1/2} v_{i+1/2}$. Тогда задача о поиске седловой точки в дискретном случае принимает вид

$$\inf_{(m^h, \alpha^h)} \sup_{v^h} \mathfrak{L}^h(m^h, \alpha^h, v^h). \quad (19)$$

Дискретный аналог уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана

Дискретный аналог уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана (3) после дифференцирования (18) имеет вид

$$\mathbb{A} v_{k,\cdot}^h = \mathbb{B}_{k+1}^* v_{k+1,\cdot}^h + z_{k,\cdot}^h, \quad \forall k = M-1, M-2, \dots, 0, \quad (20)$$

где

$$z_{k,i+1/2}^h = b \left(t_k, x_{i+1/2}, m_{k,i+1/2}^h \right) + r_{k,i+1/2}^h, \\ v_{M,\cdot}^h = \mathbf{0}, \quad (21)$$

$$v_{k,-1/2}^h = v_{k,1/2}^h, \quad v_{k,N+1/2}^h = v_{k,N-1/2}^h. \quad (22)$$

$$\forall k = M-1, \dots, 0 \quad \forall i = 0, \dots, N-1.$$

Для условий оптимальности получим следующий сеточный аналог в точке (t_k, x_i) :

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} \left(\alpha_{k,i}^h, t_k, x_i \right) + \frac{v_{k,i+1/2}^h - v_{k,i-1/2}^h}{h} = 0 \quad (23)$$

$$\forall k = M-1, \dots, 0 \quad \forall i = 0, \dots, N-1.$$

Характеристика вычислительных схем

Для предложенной схемы выполняется равенство

$$\int_0^1 m^h(t_k, x) dx = \int_0^1 m^h(t_{k-1}, x) dx.$$

Предложенные схемы аппроксимируют исходную дифференциальную задачу с порядком $O(\tau + h^2)$.

Справедливы следующие оценки устойчивости

$$\max_{0 \leq k \leq M} \|m^h(t_k, \cdot)\|_{1,h} \leq \|m_0(\cdot)\|_{1,h} + T \max_{0 \leq k \leq M} \|\varepsilon^h(t_k, \cdot)\|_{1,h}. \quad (24)$$

$$\max_{0 \leq k \leq M} \|v^h(t_k, \cdot)\|_{\infty,h} \leq T \max_{0 \leq k \leq M} \|z^h(t_k, \cdot)\|_{\infty,h}. \quad (25)$$

Вычислительный алгоритм для задачи оптимизации с неквадратичным контролем

Предположим, что начальные приближения для $\alpha_{:,0}^h, m_0^h$ известны. Например, мы можем предположить, что на начальный момент времени $\alpha_{:,0}^h = \mathbf{0}$. Затем вычисляем $m_{:,1}^h, J^h(m^h, \alpha^h)$. Эта тройка является исходными значениями для нашего итерационного алгоритма

- 1 Решаем уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана $\forall k = M - 1, M - 2, \dots, 0$ получения $\tilde{v}_{:,k}^h$;
- 2 Получаем приближение управления $\tilde{\alpha}_{k,:}^h$ согласно дискретным условиям оптимальности;
- 3 Получаем $\tilde{m}_{:,k}^h$ из решения дискретного уравнения Фоккера-Планка;
- 4 Если $|J^h(m^h, \alpha^h) - J^h(\tilde{m}^h, \tilde{\alpha}^h)| > Tol$ тогда $\alpha_{:,k}^h := \tilde{\alpha}_{k,:}^h$; $m_{:,k}^h := \tilde{m}_{:,k}^h$ и вернуться к шагу 1;
- 5 Выберем $\tilde{\alpha}_{:,0}^h, \tilde{m}_{:,0}^h$ в качестве решения.

Вычислительный эксперимент. Постановка модельной задачи

Пусть x – положение агента (домохозяйства)¹, который характеризуется уровнем теплоизоляции: $x = 0$ соответствует дому с тонкими стенками без каких-либо изоляционных характеристик; а $x = 1$ означает дом со всеми возможными технологиями теплоизоляции. Тогда расходы на установку и содержание теплоизоляции изменяются по закону:

$$w(x, m) = \frac{c_0 x}{c_1 + c_2 m}.$$

Здесь c_0, c_1, c_2 – некоторые положительные константы. Расходы традиционно растут с ростом x и уменьшаются с ростом плотности $m(t, x)$. Положим, что платеж за отопление вычисляется по следующему закону

$$f(t, x) = p(t)(1 - c_3 x),$$

где $p(t)$ – цена за электроэнергию, которая может зависеть от времени (сезона, например), а $c_3 \in [0, 1]$ – положительная константа. Множитель $(1 - c_3 x)$ обозначает учетную ставку для текущего уровня теплоизоляции. Выразим платеж за отопление и стоимость теплоизоляции уровня x на момент времени t с плотностью агентов m в форме

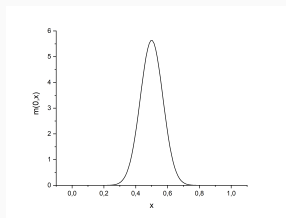
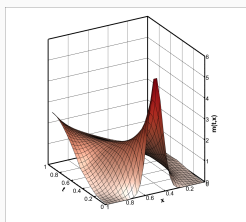
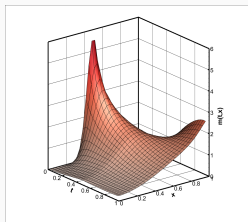
$$g(t, x, m) := (f(t, x) + w(x, m)) m.$$

¹A. Lachapelle, J. Salomon, G. Turinici. Computation of mean field equilibria in economics. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. – 2010. V. 20. P. 567-588.

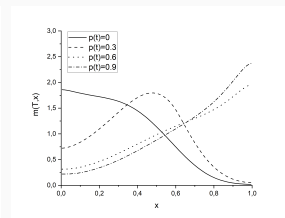
Результаты вычислительного эксперимента

В качестве $F(\alpha, t, x)$ выберем следующую кусочно-непрерывную функцию, удовлетворяющую условиям (5) – (7):

$$F(\alpha, t, x) = \begin{cases} \alpha^2, & 0 \leq t < T/2, \\ \alpha^4, & T/2 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (26)$$



а)



б)

Распределение плотности агентов $m(t, x)$ после сходимости итерационного процесса при $p(t) \equiv 1$ с разных ракурсов

Начальное распределение плотности агентов при $t = 0$ (а) и распределение агентов при $t = T$ и разной ценовой политике (б)

История сходимости итерационного процесса

История сходимости итеративного процесса для задачи с неквадратичным управлением в виде (26) при $p(t) \equiv 1$

Номер итерации s	J_s^h	$\Delta_s = J_s^h - J_{s-1}^h $	Δ_s / Δ_{s-1}
0	1.02358274		
1	0.97688210	0.0467006	
2	0.97589839	0.0009837	0.0210640
3	0.97586924	0.0000292	0.0296330

Постановка задачи планирования

$$\left\{ \begin{array}{l} \inf_{\alpha} J(m, \alpha), \\ \frac{\partial m}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \frac{\partial(\alpha m)}{\partial x} = 0 \quad (0, T) \times \Omega, \\ m(0, x) = m_0(x), m(T, x) = m_{\text{tag}}(x), \\ \int_{\Omega} m_0(x) dx = \int_{\Omega} m_{\text{tag}}(x) dx \end{array} \right. \quad (27)$$

- ❶ J.-M. Lasry, P.-L. Lions. Mean field games. Cahiers de la Chaire Finance et Développement Durable. – 2007.
- ❷ Y. Achdou, F. Camilli, I. Capuzzo-Dolcetta. Mean field games: numerical methods for the planning problem. SIAM J. Control Optim. – 2012. – V. 50. №1. P.77–109.
- ❸ A. Poretta. On the planning problem for a class of mean field games. C. R. Math. Acad. Sci. Paris. – 2013. –№351. P. 457–462.
- ❹ A. Porretta. On the planning problem for the mean field games system. Dyn. Games Appl. – 2014. – V.4.№2. P.231-256.

Будем рассматривать функционал стоимости в виде:

$$J(m, \alpha) = \int_0^T \int_0^1 (F(\alpha, t, x) m + g(t, x, m)) dx dt + \int_0^1 G_T(x, m(T, x)) dx \quad (28)$$

с условием

$$G_T(x, \tilde{m}) - G_T(x, m) \leq (\tilde{m} - m) \eta(x, m) \quad \forall x \in [0, 1] \quad \forall \tilde{m}, m \in [0, \infty), \eta(x, m) = (\partial G_T / \partial m)(x, m).$$

Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана имеет вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial v}{\partial x} = -F(\alpha, t, x) - \frac{\partial g(t, x, m)}{\partial m} - \delta(T - t) \frac{\partial G_T}{\partial m}(x, m(T, x)) \quad (29)$$

на $[0, T] \times [0, 1]$, где $\delta(T - t)$ – δ -функция, а начальное и краевые условия задаются как:

$$v(T, x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1], \quad (30)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial v}{\partial x}(t, 1) = 0 \quad \forall t \in (0, T). \quad (31)$$

В дискретном виде Лагранжиан задачи имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}^h(m^h, \alpha^h, v^h) := & \tau \sum_{k=0}^{M-1} \left\langle r_{k,\cdot}^h, m_{k,\cdot}^h \right\rangle + \tau h \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{N-1} g_{k,i+1/2}^h + h \sum_{i=0}^{N-1} (G_T)_i^h + \\ & + \left\langle m_{0,\cdot}^h, \mathbb{A} v_{0,\cdot}^h \right\rangle \tau - \left\langle m_{M,\cdot}^h, \mathbb{A} v_{M,\cdot}^h \right\rangle \tau - \sum_{k=0}^{M-1} \left(\left\langle m_{k,\cdot}^h, \mathbb{A} v_{k,\cdot}^h \right\rangle - \left\langle m_{k,\cdot}^h, \mathbb{B}_{k+1}^* v_{k+1,\cdot}^h \right\rangle \right) \tau. \end{aligned} \quad (32)$$

Тогда начальное условие для уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана переписывается как

$$\mathbb{A} v_{M,i+1/2}^h = \eta \left(x_{i+1/2}, m_{M,i+1/2}^h \right), \quad (33)$$

Оценка устойчивости

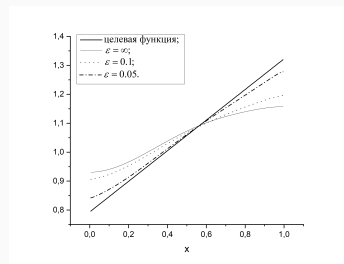
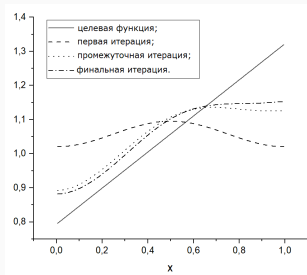
При выполнении ограничений на шаг сетки для дискретного аналога уравнения ГЯБ для задачи планирования справедлива оценка

$$\max_{0 \leq k \leq M} \left\| v^h(t_k, \cdot) \right\|_{\infty, h} \leq \left\| \eta(\cdot) \right\|_{\infty, h} + T \max_{0 \leq k \leq M-1} \left\| z^h(t_k, \cdot) \right\|_{\infty, h}. \quad (34)$$

Вычислительный эксперимент для задачи планирования

$$F(t, x, \alpha) = \begin{cases} \alpha^2/2, & \text{если } \alpha \leq 0, \\ \exp(\alpha) - \alpha - 1 & \text{иначе.} \end{cases} \quad m_{\text{tag}}(x) = \omega_0 (0.75 + 0.5x), \text{ где } \omega_0 = \int_0^1 m_0(x) dx.$$

$$G_T(x, m(T, x)) = \begin{cases} (m(T, x) - m_{\text{tag}}(x))^2, & m \leq m_{\text{tag}}(x), \\ (m(T, x) - m_{\text{tag}}(x))^4 & \text{иначе.} \end{cases} \quad G_T(x, m(T, x)) = (m(T, x) - m_{\text{tag}}(x))^2 / \varepsilon.$$



Двумерное (по пространству) уравнение Фоккера-Планка

Положим $\Omega = (0, H_1) \times (0, H_2)$ с границей Γ и замыканием $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Обозначим $n(x, y) = (n_1(x, y), n_2(x, y))$ – внешняя нормаль в точке (x, y) на границе Γ . Рассмотрим двумерное уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова с начальными и граничными условиями:

$$\frac{\partial m}{\partial t} - \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} - \frac{\sigma_2^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} + \frac{\partial(\alpha m)}{\partial x} - \frac{\partial(\beta m)}{\partial y} = 0 \quad \text{на } (0, T) \times \Omega, \quad (35)$$

$$m(0, x, y) = m_0(x, y) \quad \text{на } \bar{\Omega}, \quad (36)$$

$$\frac{\partial m}{\partial n} = 0 \quad \text{на } [0, T] \times \Gamma, \quad (37)$$

Здесь σ_1, σ_2 – фиксированные константы. Будем минимизировать функционал вида

$$J(m, \alpha, \beta) = \int_0^T \left(\exp(-rt) \times \int_{\Omega} (d_1 \alpha^2 m / 2 + d_2 \beta^2 m / 2 + g(t, x, y, m)) d\Omega \right) dt. \quad (38)$$

Здесь d_1, d_2 – положительные константы; $r \geq 0$ – безрисковая процентная ставка, а функция $g(t, x, y, m)$ подчиняется следующему условию относительно плотности агентов m :

$$g(t, x, y, \tilde{m}) - g(t, x, y, \bar{m}) \leq (\tilde{m} - \bar{m}) f(t, x, y, \bar{m}), \quad \text{где } f(t, x, y, \bar{m}) = \partial g / \partial m.$$

Подход к аппроксимации двумерного уравнения Фоккера-Планка

Будем рассматривать оператор, действующий вдоль каждой пространственной переменной, по отдельности

$$f_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial m}{\partial t} - \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \frac{\partial(\alpha m)}{\partial x}, \quad f_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial m}{\partial t} - \frac{\sigma_2^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} - \frac{\partial(\beta m)}{\partial y},$$
$$f_1 + f_2 = 0.$$

Тогда при ограничениях

$$\tau \left| \alpha_{k,i,j+1/2}^h \right| \leq h_1/8, \quad \tau \left| \beta_{k,i+1/2,j}^h \right| \leq h_2/8,$$
$$h_1^2 \leq 8\tau\sigma_1^2, \quad h_2^2 \leq 8\tau\sigma_2^2, \quad \forall k = 1, \dots, M, \quad i = 0, \dots, N_1 - 1, \quad j = 0, \dots, N_2 - 1. \quad (39)$$

могут быть получены:

- 1 Конечно-разностные схемы для уравнений ФПК и ГЯБ порядка аппроксимации $O(\tau + h_1^2 + h_2^2)$.
- 2 Оценки устойчивости в соответствующих векторных нормах.
- 3 Закон сохранения массы агентов в дискретной $L_1(\Omega)$ –норме.

Задача «среднего поля» со смешанной диффузией

Будем считать, что для построения модели используется та же вычислительная область $\Omega = (0, H_1) \times (0, H_2)$, что и в главе 4. В случае смешанной диффузии уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова имеет вид

$$\frac{\partial m}{\partial t} - \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} - \frac{\sigma_2^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} - \gamma \sigma_1 \sigma_2 \frac{\partial^2 m}{\partial x \partial y} + \frac{\partial(\alpha m)}{\partial x} + \frac{\partial(\beta m)}{\partial y} = 0 \quad \text{на } (0, T) \times \Omega, \quad (40)$$

$$m(0, x, y) = m_0(x, y) \quad \text{на } \bar{\Omega}, \quad (41)$$

$$\frac{\partial m}{\partial n} = 0 \quad \text{на } [0, T] \times \Gamma, \quad (42)$$

где $\partial m / \partial n$ означает производную по нормали на границе Γ . Параметры $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ имеют тот же смысл, что и предыдущем случае, а $\gamma \in (-1, 1)$ – коэффициент корреляции процессов, определяющих динамику поведения агентов.

Аппроксимация Эйлера-Лагранжа для уравнения ФПК со смешанной диффузией

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha m)}{\partial x} + \frac{\partial(\beta m)}{\partial y} = f_1 \quad \text{и} \quad -\frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} - \frac{\sigma_2^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} - \gamma \sigma_1 \sigma_2 \frac{\partial^2 m}{\partial xy} = f_2;$$
$$f_1 + f_2 = 0.$$

Ограничения на шаг сетки при использовании приближения Эйлера-Лагранжа для оператора переноса

$$\frac{1}{8\sigma_1\sigma_2} \frac{h_1}{\tau} < \frac{\sigma_2}{\sigma_1} h_2 - \frac{|\gamma|}{h_1}, \quad \frac{1}{8\sigma_1\sigma_2} \frac{h_2}{\tau} < \frac{\sigma_1}{\sigma_2} h_1 - \frac{|\gamma|}{h_2},$$
$$\tau \left| \alpha_{k,i,j+1/2}^h \right| \leq h_1/8, \quad \tau \left| \beta_{k,i+1/2,j}^h \right| \leq h_2/8$$
$$\forall k = 0, \dots, M, \quad i = 1, \dots, N_1 - 1, \quad j = 1, \dots, N_2 - 1,$$

Вычислительная схема для уравнения ФПК со смешанной диффузией

$$U \cdot (A_{i+1/2,j+1/2} \cdot M_{k,i+1/2,j+1/2}) \cdot U^T = \gamma_{k,i+1/2,j+1/2}^1 m_{k-1,i-1/2,j+1/2}^h + \gamma_{k,i+1/2,j+1/2}^2 m_{k-1,i+1/2,j+1/2}^h + \gamma_{k,i+1/2,j+1/2}^3 m_{k-1,i+3/2,j+1/2}^h + \gamma_{k,i+1/2,j+1/2}^4 m_{k-1,i+1/2,j-1/2}^h + \gamma_{k,i+1/2,j+1/2}^5 m_{k-1,i+1/2,j+3/2}^h. \quad (43)$$

Здесь и далее U представляет собой единичную вектор-строку $U = (1, 1, 1)$, а коэффициенты $\gamma_{k,s}^{i+1/2,j+1/2}$, $s = 1, 2, \dots, 5$ имеют вид

$$\begin{aligned} \gamma_{k,1}^{i+1/2,j+1/2} &= \max \{0, \alpha_{k,i,j+1/2}/h_1\}, & \gamma_{k,3}^{i+1/2,j+1/2} &= \max \{0, -\alpha_{k,i+1,j+1/2}/h_1\}, \\ \gamma_{k,4}^{i+1/2,j+1/2} &= \max \{0, \beta_{k,i+1/2,j}/h_2\}, & \gamma_{k,5}^{i+1/2,j+1/2} &= \max \{0, -\beta_{k,i+1/2,j+1}/h_2\}, \\ \gamma_{k,2}^{i+1/2,j+1/2} &= 1/\tau - \gamma_{k,1}^{i+3/2,j+1/2} - \gamma_{k,3}^{i-1/2,j+1/2} - \gamma_{k,4}^{i+1/2,j+3/2} - \gamma_{k,5}^{i+1/2,j-1/2}, \end{aligned} \quad (44)$$

$\forall i = 0, \dots, N_1 - 1, j = 0, \dots, N_2 - 1$ с начальными условиями

$$m_{k,i+1/2,j+1/2}^h = m_0(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}) \quad (45)$$

$\forall i = 0, \dots, N_1 - 1, j = 0, \dots, N_2 - 1.$

Вычислительная схема для уравнения ФПК со смешанной диффузией

$$A_{i+1/2,j+1/2} \cdot M_{k,i+1/2,j+1/2} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{i-1/2,j+3/2} m_{k,i-1/2,j+3/2} & a_{i+1/2,j+3/2} m_{k,i+1/2,j+3/2} & a_{i+3/2,j+3/2} m_{k,i+3/2,j+3/2} \\ a_{i-1/2,j+1/2} m_{k,i-1/2,j+1/2} & a_{i+1/2,j+1/2} m_{k,i+1/2,j+1/2} & a_{i+3/2,j+1/2} m_{k,i+3/2,j+1/2} \\ a_{i-1/2,j-1/2} m_{k,i-1/2,j-1/2} & a_{i+1/2,j-1/2} m_{k,i+1/2,j-1/2} & a_{i+3/2,j-1/2} m_{k,i+3/2,j-1/2} \end{bmatrix}.$$

с элементами

$$a_{i-1/2,j+3/2} = a_{i+3/2,j-1/2} = 0;$$

$$a_{i+1/2,j+3/2} = a_{i+1/2,j-1/2} = -\sigma_1^2/2h_1^2 + |\gamma|\sigma_1\sigma_2/2h_1h_2;$$

$$a_{i-1/2,j+1/2} = a_{i+3/2,j+1/2} = -\sigma_2^2/2h_2^2 + |\gamma|\sigma_1\sigma_2/2h_1h_2;$$

$$a_{i+3/2,j+3/2} = a_{i-1/2,j-1/2} = -|\gamma|\sigma_1\sigma_2/2h_1h_2;$$

$$a_{i+1/2,j+1/2} = 1/\tau + \sigma_1^2/h_1^2 + \sigma_2^2/h_2^2 - |\gamma|\sigma_1\sigma_2/h_1h_2.$$

В этом случае внедиагональные элементы матрицы системы (43) не положительны при выполнении условий

$$|\gamma|\sigma_2/\sigma_1 \leq h_2/h_1 \leq \sigma_2/|\gamma|\sigma_1. \quad (46)$$

Торговля квотами на эмиссию диоксида углерода в терминах игры «среднего поля»

Здесь рассматривается континуум агентов, взаимодействующих на макроэкономическом уровне ². Агенты являются производителями, у которых выбросы CO_2 регулируются правительством. Результатом производства является уровень эмиссии $e(t)$, изменяющийся со временем. Также будем рассматривать величину разрешенного выброса $h(t)$. Положим, что агенты участвуют в переговорах, чтобы достичь максимально допустимого уровня выбросов. Будем считать, что доход агента от производства определяется следующей функцией

$$Y(t, e, h) = \frac{e_{\max}e - e^2/2}{c_1 + c_2m(t, e, h)}, \quad e \in [e_{\min}, e_{\max}],$$

где c_1 и c_2 – положительные константы. Положим, что управление мультиагентной системой осуществляется посредством сокращения выбросов $l(t, e, h)$ и проведением переговоров $\mu(t, e, h)$. Стоимость сокращения выбросов и проведения переговоров об уровне допустимой эмиссии имеет вид

$$C_e(t, e, h) = d_1 l^2(t, e, h) \text{ и } C_h(t) = d_2 \mu^2(t, e, h), \text{ соответственно.}$$

²S. Chang, X. Wang. Modeling and computation of mean field equilibria in producers game with emission permits trading. Commun. Nonlinear Sci. Number Simulat. – 2016. – Vol. 37. – P. 238-248.

Торговля квотами на эмиссию диоксида углерода в терминах игры «среднего поля»

Стоимость налога на выбросы углерода

$$C_a(t, e, h) = p_a(t) \min\{e(t), h(t)\},$$

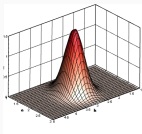
где $p_a(t)$ означает налоговую ставку в момент времени t . Если количество выброса $e(t)$ меньше допустимого уровня $h(t)$, агент должен оплатить налог на осуществленный им выброс $e(t)$. Если количество эмиссии $e(t)$ превышает допустимое $h(t)$, то агент должен оплатить налог на количество, предоставленное им квотой. Налог за превышение допустимого уровня эмиссии регулируется государством и превосходит базовый налог $p_a(t)$

$$C_b(t, e, h) = p_b(t) (e(t) - h(t))^+, \quad p_b(t) > p_a(t).$$

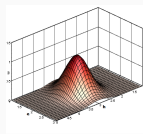
Таким образом, чистая выручка агента на момент времени t составляет

$$R(t, e, h) = Y(t, e, h) - (C_e(t, e, h) + C_h(t, e, h) + C_a(t, e, h) + C_b(t, e, h)).$$

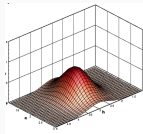
Результаты вычислительного эксперимента для двумерной задачи



а)

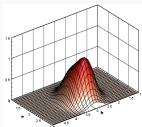


б)

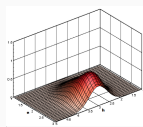


в)

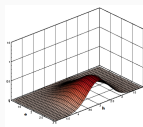
Поведение функции $m(t, e, h)$ для $t = 2/3(a)$, $4/3(б)$, $2(в)$ с нулевым управлением



а)

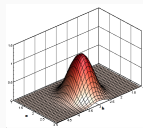


б)

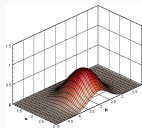


в)

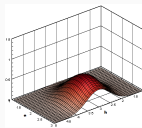
Поведение функции $m(t, e, h)$ для $t = 2/3(a)$, $4/3(б)$, $2(в)$ после первой итерации



а)



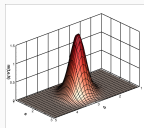
б)



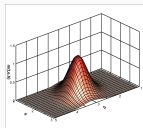
в)

Поведение функции $m(t, e, h)$ для $t = 2/3(a)$, $4/3(б)$, $2(в)$ после сходимости итерационного процесса

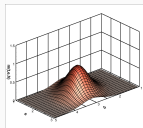
Результаты вычислительного эксперимента для задачи со смешанной диффузией



а)

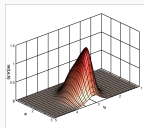


б)

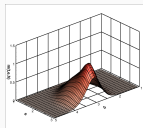


в)

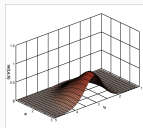
Поведение функции $m(t, e, h)$ для $t = 2/3$ (а), $4/3$ (б), 2 (в) с нулевым управлением



а)

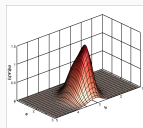


б)

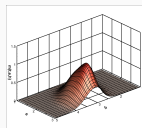


в)

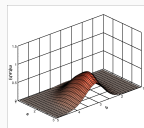
Поведение функции $m(t, e, h)$ для $t = 2/3$ (а), $4/3$ (б), 2 (в) после первой итерации



а)



б)



в)

Поведение функции $m(t, e, h)$ для $t = 2/3$ (а), $4/3$ (б), 2 (в) после сходимости итерационного процесса

Научная новизна и практическая значимость

Научная новизна

Разработаны численные методы решения задач, описываемых математическими моделями «игр среднего поля», наследующие полезные свойства дифференциальных задач и приводящие к явным локальным правилам минимизации целевого функционала. Построены новые модели, основанные на традиционной постановке задач «среднего поля», но более адаптированные для экономико-социальных приложений.

Практическая значимость

Результаты, полученные в диссертационной работе, могут быть использованы для применения в области экологии, экономики отдельных отраслей, достижения социально-экономических целей и прогноза макроповедения мультиагентных систем под воздействием различных внешних условий (например, экономических, социальных, экологических или политических).

Апробация работы

Основные результаты работы изложены в виде докладов:

- ❶ на XIX Всероссийской конференции молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям, Кемерово, 2018 г.;
- ❷ на открытой конференции молодых ученых ИВМ СО РАН по математическому моделированию и информационным технологиям, Красноярск ИВМ СО РАН, 2019 г.;
- ❸ на международной конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики 2019» (АПВПМ 2019), Новосибирск, 2019 г.;
- ❹ на XI и XII Международных конференциях по применению математических подходов в технических и естественных науках (AMiTaNS'19(20)), Албена, Болгария, 2019, 2020 гг.;
- ❺ на международной конференции «Марчуковские научные чтения 2020» (МНЧ - 2020), Новосибирск, 2020 г.

Диссертационная работа докладывалась также на совместном семинаре Института вычислительного моделирования СО РАН и базовой кафедры вычислительных и информационных технологий Института математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета.

Разные этапы работы поддерживались следующими проектами:

- ❶ проект РФФИ № 17-01-00270 «Построение и обоснование новых эрмитовых конечных элементов для численного решения задач математической физики»;
- ❷ проект РФФИ № 20-01-00090 «Эйлерово-лагранжевы (полулагранжевы) методы конечных разностей и конечных элементов со специальными свойствами»;
- ❸ проект РНФ № 20-61-46017 «Развитие динамических математических моделей прогноза критических социально-экономических ситуаций и создание эффективных численных методов решения таких моделей».



Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020610341. Роспатент

Личный вклад автора состоит в прямом участии в исследовании применимости полулагранжева метода к решению задач прогнозирования, численной оценке сходимости полученных методов, разработке вычислительных алгоритмов и комплекса программ, проведении расчетов, обработке и анализе полученных результатов, разработке модифицированных постановок задач «среднего поля», подготовке научных статей и докладов по теме диссертационной работы. Научному руководителю Шайдурову В.В. принадлежат постановки задач и общая оригинальная идея использования полулагранжева подхода в применении к моделям «игр среднего поля», критическое сравнение результатов с известными алгоритмами.

Список работ, опубликованных в рецензируемых научных изданиях

- ❶ Корниенко В.С. Конечно-разностный аналог задачи равновесия «среднего поля» / Шайдулов В.В., Корниенко В.С., Карпова Е.Д. // Вычислительные технологии – 2020. – Т. 25, № 4. – С. 31-41.
- ❷ Kornienko V.S., “Mean Field Games” as mathematical models for control and optimization of business activity / V.V. Shaydurov, V.S. Kornienko // J. Sib. Fed. Univ. Humanit. soc. Science. – 2019 – V. 12(4). – P. 701–715.
- ❸ Kornienko V. The Euler-Lagrange Approximation of the Mean Field Game for the Planning Problem / Shaydurov V., Kornienko V., Zhang S. // Lobachevskii Journal of Mathematics – 2020. – Т. 41, № 12. – С. 2703-2714. **(Web Of Science, Q2)**
- ❹ Kornienko V., Computation of Mean-Field Equilibria with Correlated Stochastic Processes / V. Shaydurov, S. Zhang, V. Kornienko // Lecture Notes in Computer Science. – 2019. – V. 11386. – P. 468-475.
- ❺ Kornienko V., Approximations of two-dimensional Mean Field Games with nonsymmetric controls / V. Shaydurov, S. Zhang, V. Kornienko // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2020. – V. 367. – Art. № 112461. **(Web Of Science, Q1)**
- ❻ Kornienko V., Mean Field Game Problem with non-quadratic control function / V. Shaydurov, V. Kornienko // AIP Conference Proceedings. – 2019. – V. 2164. – Art. № 110012. **(Web Of Science)**
- ❼ Kornienko V., A finite-difference solution of Mean Field problem with a predefined control resource / V. Shaydurov, V. Kornienko // AIP Conference Proceedings. – 2020. – V. 2302. – Art. № 110004. **(Web Of Science)**
- ❽ Kornienko V., A finite-difference solution of mean field problem with the fractional derivative for subdiffusion / V. Shaydurov, S. Zhang, V. Kornienko // AIP Conference Proceedings. – 2020. – V. 2302. – Art. № 020001. **(Web Of Science)**

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!