

# Семейство алгебраических прямых и итерационных методов декомпозиции областей

В. П. Ильин

Объединённый семинар ИВМиМГ СОРАН и кафедры  
вычислительной математики НГУ (ОСВМ), основанный  
академиком Г.И. Марчуком в 1967 г.

Новосибирск  
17 октября 2023

# ЛИТЕРАТУРА

1. Y..L. Gurieva , V.P. Il'in , and D.I. Kozlov. Parallel Domain Decomposition Methods with Graph Preconditioning. Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2023) Parallel computational technologies (PCT'2023) 215-228
2. Dolean, V., Jolivet, P., Nataf, F.: An introduction to domain decomposition methods: algorithms, theory and parallel implementation. SIAM, Philadelphia (2015).
3. Il'in, V.P.: Multi-Preconditioned Domain Decomposition Methods in the Krylov Subspaces. In: LNCS, 10187, Springer, pp. 95–106 (2017).
4. Il'in, V.P.: Iterative Preconditioned Methods in Krylov Spaces: Trends of the XXI Century. Comput. Math. Math. Phys., vol. 61, N. 11, pp. 1750–1775. Pleiades Publishing, Ltd (2021).
5. Ili'n, V. P., Kuznetsov, Yu.I: Tridiagonal Matrices and its Applications. Moscow, Nauka Publ. (1985). [in Russian].

# МЕТОДЫ ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТЕЙ

$$\Omega = \bigcup_{q=1}^P \Omega_q, \quad \bar{\Omega}_q = \Omega_q \cup \Gamma_q, \quad \Gamma_q = \bigcup_{q' \in \omega_q} \Gamma_{q,q'}, \quad \Omega_0 = R^d / \Omega,$$

$$\Gamma_{q,q'} = \Gamma_q \cap \bar{\Omega}_{q'}, \quad q' \neq q, \quad \Omega_0 = R^d / \Omega,$$

$$\omega_q = \{q_1, \dots, q_{M_q}\},$$

$$\bar{\Omega}_0 = \Omega_0 \cup \Gamma, \quad \Gamma_{q,0} = \Gamma_q \cap \bar{\Omega}_0 = \Gamma_q \cap \Gamma, \quad \Gamma_q = \Gamma_q^i \cup \Gamma_{q,0},$$

$$\Gamma_q^i = \bigcup_{q' \neq 0} \Gamma_{q,q'}, \quad \Gamma_{q,0} = \Gamma_q^e$$

# МЕТОД ШВАРЦА-ЯКОБИ

$$Lu_q(\vec{r}) = f_q, \quad \vec{r} \in \Omega_q, \quad l_{q,q'}(u_q) \Big|_{\Gamma_{q',q}} = g_{q,q'} \equiv l_{q',q}(u_{q'}) \Big|_{\Gamma_{q',q}},$$

$$q' \in \omega_q, \quad l_{q,0}u_q \Big|_{\Gamma_{q,0}} = g_{q,0}, \quad q = 1, \dots, P, \quad \alpha_q \cdot \beta_q \geq 0,$$

$$\alpha_q u_q + \beta_q \frac{\partial u_q}{\partial \vec{n}_q} \Big|_{\Gamma_{q,q'}} = \alpha_{q'} u_{q'} + \beta_{q'} \frac{\partial u_{q'}}{\partial \vec{n}_{q'}} \Big|_{\Gamma_{q',q}}, \quad |\alpha_q| + |\beta_q| > 0.$$

$$A_{q,q}u_q + \sum_{r \in \hat{\omega}_q} A_{q,r}u_r = f_q, \quad q = 1, \dots, P,$$

Стрелообразная блочная матрица

$$A = \{A_{q,r}\} = \left| \begin{array}{ccc|c} A_{1,1} & \dots & 0 & A_{1,P+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & A_{P,P} & A_{P,P+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{P+1,1} & \dots & A_{P+1,P} & A_{P+1,P+1} \end{array} \right|$$

# КЛАССИЧЕСКИЙ ПРИМЕР ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТИ НА ДВЕ ПОДОБЛАСТИ

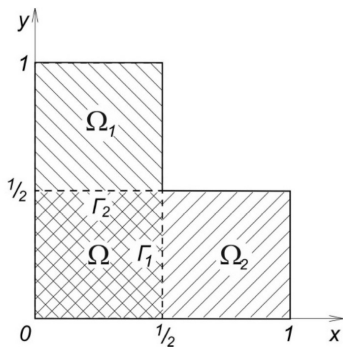


Рис.: 1

# ПРИМЕР ДЕКОМПОЗИЦИИ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ ВНЕШНЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

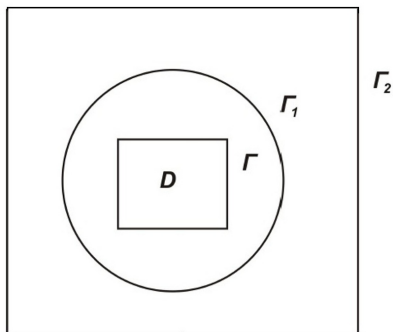


Рис.: 2

# Примеры 1D, 2D и 3D –декомпозиции

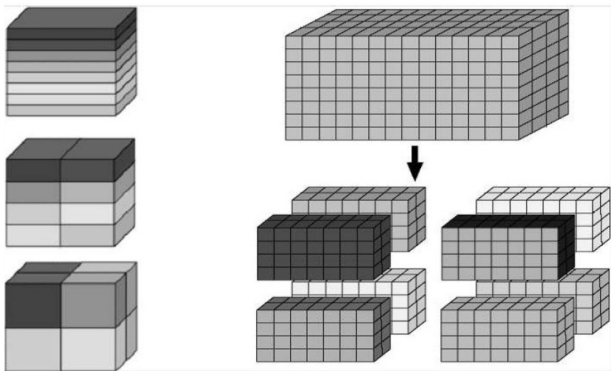


Рис.: 3

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ: с.п.о. СЛАУ

$$Au = f, \quad A = \{a_{l,m}\} \in \mathbb{R}^{N,N}, \quad u = \{u_l\}, \quad f = \{f_l\} \in \mathbb{R}^N$$

Сеточные уравнения для 2D

$$\Omega = [x_0, x_{N_x+1}] \times [y_0, y_{N_y+1}], \quad \bar{\Omega} \in \Omega \cup \Gamma$$

Регулярная сетка :

$$\Omega^h : x = x_i, \quad i = 1, \dots, N_x, \quad y = y_j, \quad j = 1, \dots, N_y; \quad N_x, N_y = O(h)$$

$$(Au)_{i,j} = a_{i,j}^{(0)} u_{i,j} - a_{i,j}^{(1)} u_{i-1,j} - a_{i,j}^{(2)} u_{i,j-1} - a_{i,j}^{(3)} u_{i+1,j} - a_{i,j}^{(4)} u_{i,j+1} = f_{i,j},$$
$$i, j \in \Omega^h, \quad a_{1,j}^{(1)} = a_{i,1}^{(2)} = a_{N_x,j}^{(3)} = a_{i,N_y}^{(4)} = 0$$



# ДЕКОМПОЗИЦИЯ СЕТОЧНОЙ ОБЛАСТИ 2D

Макросеть  $\Omega^H$  :

$$\Omega^H : x_{i_1}, \dots, x_{i_{M_x}}; y_{j_1}, \dots, y_{j_{M_y}}; 1 < i_k < i_{M_x} \leq N_x; 1 < j_l < j_{M_y} \leq N_y$$

Подобласти:

$$\Omega_1^h, \dots, \Omega_M^h,$$

$$M = (M_x + 1)(M_y + 1),$$

$$M_v = M_x M_y$$

$$K = M_x + M_y + 2M_x M_y,$$

$$\hat{u} = \{\hat{u}_k, k = 1, \dots, K\},$$

$$\check{u} = \{\check{u}_m, m = 1, \dots, M_v\}$$

# ДЕКОМПОЗИЦИЯ СЕТОЧНОЙ ОБЛАСТИ 2D

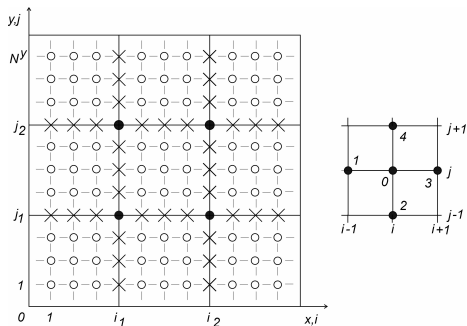


Рис.: 4 Пример декомпозиции сеточной двумерной области

- – макроузлы,
- × – макрорёберные узлы,
- – макрограничные узлы.

# БЛОЧНАЯ СТРУКТУРА СЛАУ ДЛЯ 2D

$$\bar{u}_1 = \{\hat{u}_k, k = 1, \dots, K\}, \quad \bar{u}_2 = \{\check{u}_m, m = 1, \dots, M_v\}$$

$$\bar{A}\bar{u} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{1,1} & \bar{A}_{1,2} \\ \bar{A}_{2,1} & \bar{A}_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \end{bmatrix}.$$

$$\bar{A}_{2,2} = \text{block-diag}\{D_s, s = 1, \dots, M\}$$

$$\bar{N}_1 = M_x M_y + KN_e, \quad \bar{N}_2 = (M_x + 1)(M_y + 1)N_e^2 = MN_e^2.$$

# СТРУКТУРА МАТРИЦЫ ДЛЯ 2D - МАКРОГРАФА

$$\bar{A}_{1,1} =$$

$T_1^x$	.	.	.	0	0	.	.	.	0	$C_1^x$
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
0	.	.	.	$T_{M_x}^x$	0	.	.	.	0	$C_{M_x}^x$
0	.	.	.	0	$T_1^y$	.	.	.	0	$C_1^y$
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
0	.	.	.	0	0	.	.	.	$T_{M_y}^y$	$C_{M_y}^y$
$(C_1^x)^\top$	.	.	.	$(C_{M_x}^x)^\top$	$(C_1^y)^\top$	.	.	.	$(C_{M_y}^y)$	$S$

# ФАКТОРИЗАЦИЯ ВЕРХНЕГО УРОВНЯ

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 \\ A_{2,1} & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1,1}^{-1} & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ 0 & S \end{bmatrix},$$

$$S = A_{2,2} - A_{2,1}A_{1,1}^{-1}A_{1,2}.$$

$S = \text{block} - \text{diag}\{S^{(m)}\}$  – дополнение Шура

$$Au = \begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 \\ A_{2,1} & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I & A_{1,1}^{-1}A_{1,2} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix},$$

Блочная реализация вычисления подвекторов

$$\begin{aligned} A_{1,1}v_1 &= f_1, & Sv_2 &= f_2 - A_{2,1}v_1 \equiv g_2, \\ u_2 &= v_2, & A_{1,1}w_1 &= A_{1,2}u_2, & u_1 &= v_1 - w_1. \end{aligned}$$

Каждый блок  $S^{(m)}$  соответствует  $m$ -й подобласти

# ФАКТОРИЗАЦИЯ НИЖНЕГО УРОВНЯ

$$A_{1,1}v_1 = \begin{bmatrix} T & C_{1,2} \\ C_{2,1} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_T \\ v_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & 0 \\ C_{2,1} & S_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_T \\ w_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_T \\ f_C \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} I & T^{-1}C_{1,2} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_T \\ v_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_T \\ w_C \end{bmatrix},$$

$$S_C = C - C_{2,1}T^{-1}C_{1,2},$$

Блочная реализация вычисления подвекторов

$$Tw_T = f_T, \quad S_C w_C = f_C - C_{2,1}w_T \equiv \bar{f}_C,$$

$$u_C = w_C, \quad v_T = w_T - T^{-1}C_{1,2}v_C.$$

уравнение для макроузла

$$(S_C u)_{i_k, j_l} = a_{i_k, j_l}^{(0)} u_{i_k, j_l} - a_{i_k, j_l}^{(1)} u_{i_k-1, j_l} - a_{i_k, j_l}^{(2)} u_{i_k, j_l-1} - a_{i_k, j_l}^{(3)} u_{i_k+1, j_l} - a_{i_k, j_l}^{(4)} u_{i_k, j_l+1} = f_{i_k, j_l},$$

$$i_k, j_l \in \Omega^H, \quad a_{1, j_l}^{(1)} = a_{i_k, 1}^{(2)} = a_{N_x, j_l}^{(3)} = a_{i_k, N_y}^{(4)} = 0.$$

$S_C$  – 5-диагональная матрица – дополнение Шура

# ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПРЯМОЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СЛАУ НА МАКРОГРАФЕ

Трёхточечные уравнения на одном макрорёбре

$$(Tu)_t = -a_t u_{t-1} + b_t u_t - c_t u_{t+1} = f_t, \quad t = 1, 2, \dots, N_e, \quad (1)$$

где  $u_0, u_{N_e+1}$  — значения в примыкающих макровершинах, через которые будем выражать искомые  $u_t$  из (10). По принципу суперпозиции мы можем записать

$$u = \{u_t = u_0 \hat{u}_t + u_e \check{u}_t + \bar{u}_t\}, \quad u = \hat{u} + \check{u} + \bar{u}.$$

Общее решение трёхдиагональной системы может быть представлено с помощью одной из двух рекурсий

$$u_t = \begin{cases} \hat{\beta}_t u_{t+1} + \hat{z}_t, & t = N_{e-1}, \dots, 1; \quad u_{N_e} = \hat{z}_{N_e}, \\ \check{\beta}_t u_{t-1} + \check{z}_t, & t = 2, \dots, N_e; \quad u_1 = \check{z}_1. \end{cases} \quad (2)$$

# ПРЯМОЙ и ОБРАТНЫЙ МЕТОДЫ ПРОГОНКИ

$$\hat{\beta}_1 = c_1 \hat{d}_1, \hat{d}_1 = b_1^{-1}, \hat{\beta}_t = c_t \hat{d}_t, \hat{d}_t = (b_t - a_t \hat{\beta}_{t-1})^{-1}, \quad t = 2, \dots, N_e,$$
$$\check{\beta}_{N_e} = a_{N_e} \check{d}_{N_e}, \check{d}_{N_e} = b_{N_e}^{-1}, \check{\beta}_t = a_t \check{d}_t, \check{d}_t = (b_t - c_t \check{\beta}_{t+1})^{-1}, \quad t = N_e, \dots, 1,$$

$$\hat{z}_1 = f_1 \hat{d}_1, \quad \hat{z}_t = (f_t - a_t \hat{z}_{t-1}) \hat{d}_t, \quad t = 2, \dots, N_e,$$
$$\check{z}_{N_e} = f_{N_e} \check{d}_{N_e}, \quad \check{z}_t = (f_t - c_t \check{z}_{t+1}) \check{d}_t, \quad t = N_e - 1, \dots, 1. \quad (3)$$

Пусть  $t_0 = N_e/2$ . Вычислим величины  $\hat{\beta}_t, \hat{d}_t, \hat{z}_t$ , для  $t = 1, \dots, i_0 - 1$ , и значения  $\check{\beta}_t, \check{d}_t, \check{z}_t$  — при  $t = N_e, \dots, i_0 + 1$ . После этого подставим решение в форме (2) в уравнение (1), в результате чего получаем формулу

$$u_{t_0} = \frac{(f_{t_0} + a_{t_0-1} \hat{z}_{t_0-1} + c_{t_0+1} \check{z}_{t_0+1})}{(t_0 b_{t_0} - a_{t_0} \hat{\beta}_{t_0-1} - c_{t_0} \check{\beta}_{t_0+1})} = \gamma(t_0). \quad (4)$$

После нахождения  $u_{t_0}$  остальные компоненты решения рассчитываются для  $t < t_0$  и  $t > t_0$  синхронно с помощью рекурсий (2).



# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Проведём экономичное вычисление столбцов матрицы

$G = \{g_{t,t'}\} = \text{https} : // \text{us06web.zoom.us/j/84089243801?pwd} = \text{IV1hDmZTLrevtTmdPOgwHMEo68vA9a.1}$

$T^{-1}$ , обратной к трёхдиагональной. Такой  $t'$ -ый столбец можно определить через частное решение  $\bar{u}_t$ , при правой части вида  $f_{t'} = \delta_{t'Prime,t''}$ , где  $\delta_{t',t''}$  – символ Кронекера. Диагональный элемент обратной матрицы:

$$g_{t,t'} = \gamma_{t'}^{-1}, \quad g_{t,t'} = \begin{cases} \hat{\beta}_{t''} \gamma_{t'}, & t'' = t' - 1, \dots, 1, \\ \check{\beta}_{t''} \gamma_{t'}, & t'' = t' + 1, \dots, N_e. \end{cases}$$

Отсюда для решения  $\bar{u}$  имеем достаточно ресурсоёмкую формулу

$$\bar{u} = Gf = \left\{ \bar{u}_t = \sum_{t'=1}^{N_e} g_{t,t'} f_{t'} \right\},$$

которая, однако, при наличии  $N_e^2$  процессов реализуется на общей памяти всего за время  $\tau_a \ln N_e$ , где  $\tau_a$  — средняя длительность выполнения одной арифметической операции.

# ФОРМИРОВАНИЕ МАТРИЦЫ ДОПОЛНЕНИЯ ШУРА $S_C$

Соотношения для исключаемых межреберных переменных

$$u_{i_k-1,j_l} = u_{i_k-1,j_l} \check{u}_{i_k-1,j_l}^l + u_{i_k,j_l} \hat{u}_{i_k-1,j_l}^l + \bar{u}_{i_k-1,j_l}^l,$$

$$u_{i_k,j_l-1} = u_{i_k,j_l-1} \check{u}_{i_k,j_l-1}^d + u_{i_k,j_l} \hat{u}_{i_k,j_l-1}^d + \bar{u}_{i_k,j_l-1}^d,$$

$$u_{i_k+1,j_l} = u_{i_k,j_l} \check{u}_{i_k+1,j_l}^r + u_{i_k+1,j_l} \hat{u}_{i_k+1,j_l}^r + \bar{u}_{i_k+1,j_l}^r,$$

$$u_{i_k,j_l+1} = u_{i_k,j_l} \check{u}_{i_k,j_l+1}^u + u_{i_k,j_l+1} \hat{u}_{i_k,j_l+1}^u + \bar{u}_{i_k,j_l+1}^u.$$

Итоговые уравнения для макроузлов

$$(S_C u_C)_{i_k,j_l} = s_{i_k,j_l}^{(0)} u_{i_k,j_l} - s_{i_k,j_l}^{(1)} u_{i_k-1,j_l} - s_{i_k,j_l}^{(2)} u_{i_k,j_l-1} - s_{i_k,j_l}^{(3)} u_{i_k+1,j_l} - s_{i_k,j_l}^{(4)} u_{i_k,j_l+1} = \bar{f}_{i_k,j_l}^c,$$

$$s_{i_k,j_l}^{(0)} = a_{i_k,j_l}^{(0)} - a_{i_k,j_l}^{(1)} \hat{u}_{i_k-1,j_l}^l - a_{i_k,j_l}^{(2)} \hat{u}_{i_k,j_l-1}^d - a_{i_k,j_l}^{(3)} \check{u}_{i_k+1,j_l}^r - a_{i_k,j_l}^{(4)} \check{u}_{i_k,j_l+1}^u,$$

$$s_{i_k,j_l}^{(1)} = a_{i_k,j_l}^{(1)} \check{u}_{i_k-1,j_l}^l, \quad s_{i_k,j_l}^{(2)} = a_{i_k,j_l}^{(2)} \check{u}_{i_k,j_l-1}^d, \quad s_{i_k,j_l}^{(3)} = a_{i_k,j_l}^{(3)} \hat{u}_{i_k+1,j_l}^r, \quad s_{i_k,j_l}^{(4)} = a_{i_k,j_l}^{(4)} \hat{u}_{i_k,j_l+1}^u,$$

$$(\bar{f}_c)_{i_k,j_l} = (f_c)_{i_k,j_l} + a_{i_k,j_l}^{(1)} \bar{u}_{i_k-1,j_l}^l + a_{i_k,j_l}^{(2)} \bar{u}_{i_k,j_l-1}^d + a_{i_k,j_l}^{(3)} \bar{u}_{i_k+1,j_l}^r + a_{i_k,j_l}^{(4)} \bar{u}_{i_k,j_l+1}^u.$$

# ФОРМИРОВАНИЕ ДОПОЛНЕНИЯ ШУРА

$$S = \{S^m\}$$

Уравнение для  $l^1$ -го столбца  $A_{1,1}^{-1}$

$$A_{1,1}g^{(l')} = f^{(l')} = \{\delta_{l',l}\}$$

Структуры матриц для подобластей

$$S^{(m)}v^{(m)} = \begin{bmatrix} S_{1,1}^{(m)} & S_{1,2}^{(m)} \\ S_{2,1}^{(m)} & S_{2,2}^{(m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{(m)} \\ v_2^{(m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1^{(m)} \\ g_2^{(m)} \end{bmatrix} = g^{(m)}, \quad m = 1, \dots, M_d.$$

Формула для элементов блока  $S_{1,1}^{(m)}$

$$s_{k',k''} = a_{k',k''} - a_{k',l'}g_{l',l''}a_{l'',k''},$$

$$s_{k',k''} = a_{k',k''} - a_{k',\hat{l}'}(g_{\hat{l}',\hat{l}''}a_{\hat{l}'',k''} + g_{\hat{l}',\hat{l}''}a_{\hat{l}'',k'}) - a_{k',\hat{l}'}(g_{\hat{l}',\hat{l}''}a_{\hat{l}'',k''} +$$

# МАТРИЧНЫЕ СТРУКТУРЫ для ДЕКОМПОЗИЦИИ ТРЕХМЕРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Сеточная расчетная область

$$\Omega = [x_0, x_{N_x+1}] \times [y_0, y_{N_y+1}] \times [z_0, z_{N_z+1}]$$

$$\Omega^h : x = x_i, i = 1, \dots, N_x; y = y_j, j = 1, \dots, N_y; z = z_k, k = 1, \dots, N_z$$

Макросеть :

$$x = x_{i_1}, \dots, x_{i_{M_x}}; y = y_{j_1}, \dots, y_{j_{M_y}}; z = z_{k_1}, \dots, z_{k_{M_z}}$$

$$M = (M_x + 1)(M_y + 1)(M_z + 1), \quad M_v = M_x M_y M_z$$

# ТРЕХМЕРНЫЙ СЕТОЧНЫЙ 7-ТОЧЕЧНЫЙ ШАБЛОН

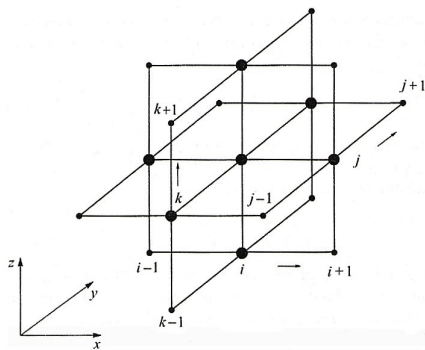


Рис.: 5

$$\begin{aligned}(Au)_{i,j,k} &= a_{i,j,k}^{(0)} u_{i,j,k} - a_{i,j,k}^{(1)} u_{i-1,j,k} - a_{i,j,k}^{(2)} u_{i,j-1,k} - a_{i,j,k}^{(3)} u_{i+1,j,k} - \\ &- a_{i,j,k}^{(4)} u_{i,j+1,k} - a_{i,j,k}^{(5)} u_{i,j,k-1} - a_{i,j,k}^{(6)} u_{i,j,k+1} = f_{i,j,k}.\end{aligned}$$

# ФРАГМЕНТ ДЕКОМПОЗИЦИИ СЕТОЧНОЙ ТРЕХМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

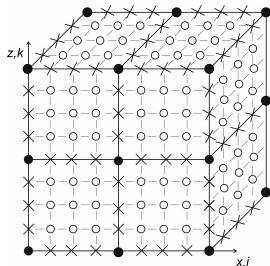


Рис.: 6

- – макроузлы,
- × – макрорёберные узлы,
- – макрограневые узлы.
- ⊗ – внутренние узлы в подобластях

# ПРЕДОБУСЛАВЛИВАЮЩИЕ МАТРИЦЫ

$$B = \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ \bar{A}_{2,1} & G_2 \end{bmatrix} G^{-1} \begin{bmatrix} G_1 & \bar{A}_{1,2} \\ 0 & G_2 \end{bmatrix}$$

- методы неполной факторизации с компенсацией (CIF)

$$G_1 = \bar{A}_{1,1} - \theta_1 S_1, \quad G_2 = \bar{A}_{2,2} - \overline{\bar{A}_{2,1} G_1^{-1} \bar{A}_{1,2}} - \theta_2 S_2,$$

$$S_1 e = \bar{A}_{1,2} e, \quad S_2 e = \left( \bar{A}_{2,1} G_1^{-1} \bar{A}_{1,2} - \overline{\bar{A}_{2,1} G_1^{-1} \bar{A}_{1,2}} \right) e$$

- методы симметричной последовательной релаксации (SSOR)

$$G_k = \frac{1}{\omega} \text{diag} \bar{A}_k, \quad k = 1, 2, \quad \omega \in (0, 2)$$

## РЕШЕНИЕ СЛАУ $Bq^{n+1} = r^{n+1}$

$$Bq^{n+1} = \begin{bmatrix} \bar{G}_1 & O \\ \bar{A}_{2,1} & G_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_1^{n+1} \\ \bar{v}_2^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1^{n+1} \\ r_2^{n+1} \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} I & \bar{G}_1^{-1} \bar{A}_{1,2} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_1^{n+1} \\ \bar{q}_2^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^{n+1} \\ v_2^{n+1} \end{bmatrix}$$

$$G_1 v_1^n = r_1^{n+1}, \quad G_2 v_2^n = r_2^{n+1} - \bar{A}_{2,1} v_1^n,$$
$$q_2^{n+1} = v_2^n, \quad G_1 q_1^{n+1} = v_1^n - \bar{A}_{1,2} v_2^{n+1}$$



# ПРЕДОБУСЛОВЛЕННЫЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В ПОДПРОСТРАНСТВАХ КРЫЛОВА

$$\begin{aligned}\hat{p}^0 &= \hat{r}^0 = B^{-1}r^0 = B^{-1}(f - Au^0), \quad n = 1, 2, \dots; \\ u^n &= u^{n-1} + \alpha_{n-1}\hat{p}^{n-1}, \quad \hat{r}^n = \hat{r}^{n-1} - \alpha_{n-1}A\hat{p}^{n-1}; \\ \hat{p}^n &= \hat{r}^n + \beta_{n-1}\hat{p}^{n-1}, \quad \alpha_{n-1} = \sigma_{n-1}/\rho_{n-1}, \quad \beta_{n-1} = \sigma_n/\sigma_{n-1}; \\ \sigma_{n-1} &= (A^{\gamma-1}\hat{r}^{n-1}, \hat{r}^{n-1}), \quad \rho_{n-1} = (B^{-1}A\hat{p}^{n-1}, A^{\gamma-1}\hat{p}^{n-1}),\end{aligned}$$

Алгоритмы сопряженных направлений

$\gamma = 1$  – метод сопряженных градиентов (CG)

$\gamma = 2$  – метод сопряженных невязок (CR)

$\gamma = 0$  – метод минимальных ошибок (ME)

# СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ

