

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)

На правах рукописи

УДК **xxx.xxx**

Новиков Никита Сергеевич

**Численные алгоритмы решения уравнения
И.М. Гельфанда - Б.М. Левитана-М.Г. Крейна**

Специальность 01.01.07 —
«Вычислительная математика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:
член-корреспондент РАН, профессор
Кабанихин С.И.
д.ф.-м.н., Шишленин М.А.

Новосибирск — 2017

Оглавление

Введение	4
1 Решение одномерных обратных задач методом И.М. Гельфанда—Б.М. Левитана— М.Г. Крейна	20
1.1 Коэффициентная обратная задача для уравнения колебаний	20
1.2 Одномерная обратная задача акустики	24
1.3 Одномерная обратная динамическая задача сейсмоки	28
1.3.1 Постановка задачи	28
1.3.2 Определение скорости поперечных волн и плотности среды	30
1.3.3 Определение скорости продольных волн.	32
1.4 Метод Монте-Карло решения интегральных уравнений	34
2 Двумерная обратная задача для уравнения колебаний	42
2.1 Постановка задачи	42
2.2 Получение двумерного аналога уравнения Гельфанда-Левитана	44
2.2.1 Исследование прямой задачи	44
2.2.2 Исследование вспомогательной задачи	45
2.2.3 Необходимые условия существования решения обратной задачи	46
2.2.4 Достаточные условия существования решения обратной задачи	48
2.3 Проекционный метод решения обратной задачи	50
2.4 Решение системы интегральных уравнений методом Монте-Карло	52
2.5 Стохастический проекционный метод решения систем линейных алгебраических уравнений	55
3 Двумерная обратная задача акустики	59
3.1 Постановка задачи. Сведение обратной задачи к семейству интегральных уравнений	60
3.1.1 Постановка задачи	60
3.1.2 Двумерный аналог уравнения Крейна	63
3.1.3 N - приближение обратной задачи. Сведение к СЛАУ	66
3.2 Алгоритмы обращения и решения линейных систем с блочно-тёплицевыми мат- рицами	68
4 Численные эксперименты	80

4.1	Численное решение одномерной обратной задачи акустики	80
4.1.1	Схема решения прямой задачи	81
4.1.2	Решение методом Монте-Карло	82
4.1.3	Результаты расчётов	86
4.2	Решение двумерной обратной задачи для уравнения колебаний	94
4.2.1	Схема решения прямой задачи	96
4.2.2	Решение обратной задачи методом Монте-Карло	97
4.2.3	Сведение к СЛАУ и решение стохастическим проекционным методом . . .	100
4.2.4	Результаты расчётов	104
4.3	Определение плотности из двумерного уравнения акустики	115
4.3.1	Схема решения прямой задачи	116
4.3.2	Решение двумерного аналога уравнения М.Г. Крейна с помощью алгорит- ма обращения блочно-тёплицевой матрицы	118
4.3.3	Результаты расчётов	120
Заключение		124
Список литературы		125
Список рисунков		135
Список таблиц		137

Введение

Актуальность темы. Данная работа посвящена решению коэффициентных обратных задач для гиперболических уравнений. Такие задачи относятся к некорректным задачам математической физики, теория которых основана В.К. Ивановым, М.М. Лаврентьевым, А.Н. Тихоновым [1].

Коэффициентные обратные задачи имеют широкое распространение в математической геофизике, где часто требуется определить свойства среды или расположенных на некоторой глубине включений с помощью дополнительной информации, полученной путём измерения на поверхности волн, отражённых от неоднородностей среды. Распространение этих волн описывается уравнениями в частных производных, полученными из фундаментальных законов сохранения, а свойства среды и параметры объекта, например, акустические или электромагнитные, описываются коэффициентами этих уравнений. Так, в задачах акустики параметрами являются плотность среды и скорость распространения волн в среде, в случае задач теории упругости коэффициенты уравнений соответствуют параметрам Ламе и плотности среды, а в случае уравнений Максвелла они описывают проницаемость и проводимость среды. Таким образом, возникает задача определения коэффициентов гиперболических уравнений по дополнительной информации, измеренной на части границы.

Существуют различные группы коэффициентных обратных задач для гиперболических уравнений, разделение на которые зависит от типа задаваемой дополнительной информации. Так, выделяют спектральные, кинематические и динамические задачи.

В спектральных задачах исследуются вопросы восстановления дифференциального оператора по его спектральным данным - собственным числам и некоторой информации о собственных функциях (например, могут быть известны квадраты норм собственных функций). В этом направлении важные результаты были получены В.А. Марченко, И.М. Гельфандом, Б.М. Левитаном, Н. Левинсоном, З.Л. Лейбензоном, В.А. Юрко и др.

Кинематические обратные задачи рассматривают в качестве дополнительной информации времена прихода возмущений от источников к границе изучаемой среды. При этом источники могут быть расположены как вне, так и внутри среды, а измерения могут быть проведены на всей границе или на её части. В этом направлении можно отметить работы А.С. Алексеева, С.В. Гольдина, М.М. Лаврентьева, В.Г. Романова и других исследователей.

Задачи, рассматриваемые в работе, относятся к динамическому типу. В динамических задачах дополнительной информацией является след решения прямой задачи на некоторой поверхно-

сти, зачастую, времениподобной. Первые результаты в этом направлении были получены М. М. Лаврентьевым и В. Г. Романовым, А. С. Алексеевым, А. С. Благовещенским. Систематическое исследование динамических обратных задач для гиперболических уравнений и систем было проведено В. Г. Романовым. Методика доказательства локальных теорем существования и единственности решения обратных динамических задач, а также теорем единственности и условной устойчивости «в целом», развитая В. Г. Романовым, была применена в исследовании широкого круга обратных задач С. И. Кабанихиным, В. Г. Яхно, С. П. Белинским, А.Л. Бухгеймом, М.В. Клибановым, А.Л. Карчевским и другими.

Как правило, решение обратных задач является довольно трудоёмким процессом. Главные трудности при решении обратной задачи связаны с её некорректностью, которая может проявляться как в отсутствии теоремы единственности, так и в неустойчивости по отношению к ошибкам измерений. Кроме того, дополнительные сложности при разработке методов решения оказывает влияние тот факт, что обратные задачи зачастую являются нелинейными.

Различные типы задач, трудности, связанные с некорректностью постановок, различные варианты задания дополнительной информации — всё это обуславливает существование широкого класса численных методов решения обратных задач. Естественно, что наиболее изученным является случай, когда свойства изучаемой среды зависят только от одной пространственной переменной (случай горизонтально-слоистой среды). При этом обобщение существующих алгоритмов с одномерного случая на более сложные постановки, когда свойства среды зависят от двух и трёх переменных, может быть затруднительным с вычислительной точки зрения. Так, многие разработанные алгоритмы (например, методы дифракционной томографии) основаны на оптимизационном подходе — коэффициенты уравнений (параметры среды) выбираются таким образом, чтобы моделируемый отклик среды был максимально близок к измеренному. С математической точки зрения это означает сведение задачи к оптимизации некоторого целевого функционала. Решение задачи оптимизации, как правило, производится итерационными методами, и на каждом шаге итерационного процесса необходимо решать соответствующую прямую задачу (а в случае, например, градиентных методов, ещё и сопряжённую задачу). Следовательно, эффективность подобных алгоритмов существенно зависит от того, насколько быстро удаётся решать прямую задачу. Однако с увеличением размерности задачи даже однократное решение прямой задачи требует большого объёма памяти и вычислений, и зачастую возможно только с использованием суперкомпьютеров.

Другим важным аспектом является использование во многих разработанных методах (в качестве примера можно привести метод линеаризации, а также метод лучевой томографии) априорной информации. Такие методы подразумевают наличие некоторой «опорной» модели среды, которая является начальным приближением при восстановлении изучаемой среды. Тем самым достоверность решения обратной задачи существенно зависит от адекватности этой априорной информации.

Учитывая вышесказанное, актуальной задачей является разработка прямых методов (т.е., основанных на непосредственном обращении нелинейного оператора обратной задачи), не требую-

щих многократного решения прямой задачи. В данной работе рассматриваются прямые методы решения обратных задач, построенные на основе метода И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана, М.Г. Крейна. Данный подход заключается в сведении нелинейной обратной задачи к однопараметрическому семейству линейных интегральных уравнений Фредгольма. Отметим также, что метод не предполагает наличие априорной информации о решении. Разработка численных алгоритмов решения обратных задач для гиперболических уравнений, обладающих данными свойствами представляет большой интерес, так как на основе таких алгоритмов возможно создание комплексов обработки сейсмических наблюдений, позволяющих за приемлемое время получить первое приближение исследуемых параметров среды при отсутствии априорной информации. Полученные таким образом значения параметров в дальнейшем можно уточнить с помощью других (например, основанных на оптимизационных методах) подходов.

Состояние исследований. Предлагаемый в диссертации подход не является единственным существующим алгоритмом решения обратных задач, не требующим многократного решения прямой задачи. Так, помимо метода И.М. Гельфанда - Б.М. Левитана - М.Г. Крейна, прямыми методами можно считать метод граничного управления [2–4], метод обращения разностной схемы [5, 6], а также глобально сходящийся метод [7–9].

Метод обращения разностной схемы заключается в замене обратной задачи конечно-разностным аналогом. Далее, полученные разностные соотношения используются для выражения искоемых значений решения обратной задачи посредством нелинейных алгебраических уравнений. Разрешив систему этих уравнений, мы можем получить приближённое решение исходной обратной задачи. Отметим, что формулировка метода обращения разностной схемы является довольно естественной с физической точки зрения, поскольку в ходе метода активно применяется теория характеристик, вдоль которых распространяется, основная информация об особенностях решения прямой задачи и исследуемой среды. Впервые общая идея использования метода обращения разностной схемы для определения коэффициентов гиперболического уравнения была предложена А.С. Алексеевым в 1967 году [10], хотя некоторые аспекты данного подхода рассматривались и ранее [11]. Использование метода для решения обратной динамической задачи сейсмики было изучено в работах А.С. Алексеева и В.И. Добринского [5], С.И. Кабанихина и А.Д. Сатыбаева [6], и других исследователей. В дальнейшем с помощью метода обращения разностной схемы были исследованы обратные задачи геоэлектрики (С.И. Кабанихин, К.С. Абдиев, С.В. Мартаков), акустики (С.И. Кабанихин, А.Д. Сатыбаев), уравнения переноса (С.И. Кабанихин, К. Бобоев) [12–14]. Следует также отметить работу [15], где была обоснована сходимость метода.

С вычислительной точки зрения трудоёмкость метода обращения разностной схемы соответствует количеству операций, необходимому для решения (однократного) соответствующей прямой задачи. Кроме того, обоснована сходимость метода и в многомерном случае (при достаточно гладких относительно горизонтальных переменных коэффициентах). Однако необходимо отметить, что при наличии больших ошибок измерения в данных обратной задачи метод, вообще говоря, не является устойчивым.

Метод граничного управления впервые был предложен М.И. Белишевым в 1987 году [16, 17]. В основе метода лежат результаты из асимптотических методов для уравнений в частных производных, операторных уравнений, Римановой геометрии, а также теории управления. Первые численные алгоритмы на основе метода граничного управления были получены для спектральной обратной задачи определения скорости распространения волн [18]. В дальнейшем спектральный вариант метода граничного управления был разработан в работах [3, 19].

В 1999 году в работе [20] был предложен динамический вариант метода граничного управления для определения скорости распространения волн. Данная модификация алгоритма особенно актуальна для задач акустики и геофизики, в силу того, что метод обеспечивает оптимальное по времени восстановление искомых параметров (область восстановления параметров тем больше, чем больше время наблюдений).

Численный алгоритм определения плотности среды по данным в спектральной и временной области был разработан в работе [2]. Данный метод использует спектральные гармонические функции и также является оптимальным по времени. Модификации динамического варианта данного алгоритма были исследованы в работах [21, 22].

Л.Н. Пестов предложил другую модификацию метода граничного управления. Его идея заключается в определении по данным обратной задачи некоторых встроенных билинейных форм, содержащих искомые параметры, и дальнейшем восстановлении параметров из данных билинейных форм. Хотя подобная модификация метода не является оптимальной по времени, она позволяет сформулировать более устойчивые численные методы решения поставленных задач [4, 23, 24].

Глобально сходящийся метод был разработан М.В. Клибановым для решения обратной задачи для волнового уравнения $c(x)u_{tt} = \Delta u$ в конце 2000-х годов [7]. Метод позволяет получить решение на основе единственного измерения (по отклику среды, соответствующему источнику, сосредоточенному в точке, или же источнику типа падающей в заданном направлении плоской волны). При этом глобально сходящийся метод, как и метод Гельфанда-Левитана, не использует априорную информацию, что подчёркивается в названии — под «глобальной сходимостью» авторы подразумевают способность метода находить решение в некоторой окрестности точного, при отсутствии априорной информации об этой окрестности. Подробности о методе и его апробации на модельных и реальных данных можно найти в работах [8, 9, 25, 26].

Что касается изучаемого в настоящей работе метода И.М. Гельфанда - Б.М. Левитана - М.Г. Крейна, то первые публикации по данной тематике относятся к 1950-м годам и посвящены решению обратной задачи Штурма-Лиувилля. Задача состоит в определении потенциала $q(x)$ оператора Штурма Лиувилля

$$l_q y(x) := -y'' + q(x)y,$$

а также постоянных h, H , таких, что выполнены соотношения

$$\begin{aligned} -y'' + q(x)y &= \lambda y, x \in (0, \pi) \\ y'(0) - hy(0) &= 0, y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \end{aligned}$$

по тем или иным спектральным данным. Так, одной из первых крупных работ в этой области стала работа И.М. Гельфанда и Б.М. Левитана [27], в которой авторы предложили алгоритм восстановления оператора Штурма-Лиувилля по его спектральной функции. В этой работе авторы показали, что задача определения собственных функций оператора Штурма-Лиувилля может быть сведена к решению интегрального уравнения следующего вида:

$$f(x,y) + \int_0^x f(y,t)K(x,t)dt + K(x,y) = 0,$$

где функция $f(x,y)$ известна и определяется спектральной функцией, а функция $K(x,y)$ - неизвестна. Авторы также сформулировали достаточные условия, при выполнении которых заданная монотонная функция является спектральной функцией оператора Штурма-Лиувилля как в случае конечного интервала, так и в случае полупрямой.

Приблизительно в то же время В.А. Марченко, используя операторы преобразования, доказал, что оператор Штурма-Лиувилля единственным образом определяется спектральной функцией [28, 29]. Отметим, что результаты В.А. Марченко обобщают более ранние теоремы, полученные в работах G. Borg и N. Levinson [30–32], где изучался вопрос восстановления оператора Штурма-Лиувилля по двум спектрам (в свою очередь, публикации G. Borg и N. Levinson в некотором смысле восходят к работе В.М. Амбарцумяна [33], которая считается первой работой, посвящённой решению обратных задач). В похожей постановке спектральная обратная задача рассматривалась М.Г. Крейном в работах [34–36], в которых он предложил метод восстановления оператора Штурма-Лиувилля по двум спектрам и спектральной функции. Кроме того, следует отметить его работы по задаче о струне [35, 37–39], в которых задача отыскания распределения масс струны была сведена к интегральному уравнению следующего вида:

$$2\Phi'(0)q(t) + \int_{-a}^a \Phi''(|t-s|)q(s)ds = 1.$$

Отметим, что аналогичное уравнение было получено Б.С. Парийским в 1968 году при исследовании обратной задачи для волнового уравнения с возмущением на глубине [40]. Что касается спектральных обратных задач, то в дальнейшем важные результаты были получены в работах М.Ш. Блоха, Б.Я. Левина, В.А. Марченко, R.G. Newton, З.С. Аграновичем, Б.М. Левитаном, М.Г. Гасымовым, Р.Г. Новиковым [41–47].

Отдельно стоит упомянуть использование методики Гельфанда-Левитана-Марченко для интегрирования нелинейных эволюционных уравнений. Данный метод получил название метода обратной задачи рассеяния и впервые был предложен C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal и R.M. Miura в 1967 году для решения задачи Коши для уравнения Кортевега - де Фриза [48]:

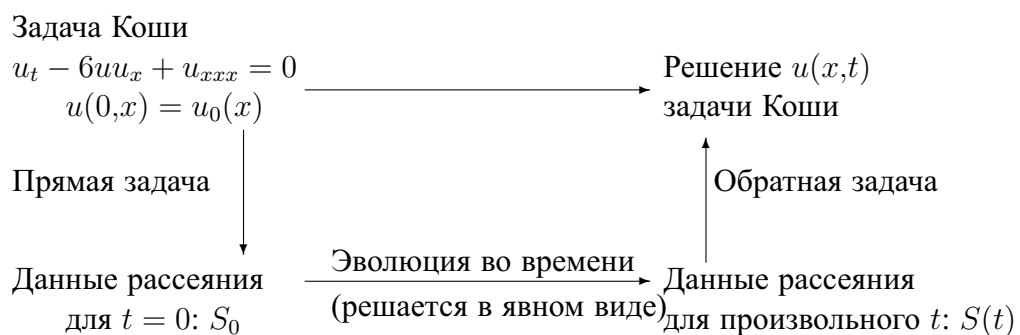
$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, x \in \mathbf{R}, t > 0$$

Это уравнение описывает распространение волн на мелкой воде и впервые было получено в конце XIX века. Отметим, что уравнение Кортевега - де Фриза (КдФ) имеет некоторые специальные точные решения — солитоны, поведение которых значительно отличается от линейных волн. Именно изучение солитонов и развитие физики плазмы привело к новому витку исследований уравнения КдФ. В 1965 году M.D. Kruskal и N.J. Zabusky на основе численных экспериментов показали [49] упругий характер столкновения солитонов уравнения Кортевега - де Фриза, что привело к открытию бесконечного количества законов сохранения. Этот результат послужил базой для дальнейших исследований, которые привели к появлению уже упомянутой работы [48] и метода обратной задачи рассеяния.

Идея метода заключается в переходе к некоторому вспомогательному дифференциальному оператору и изучению задачи рассеяния для этого оператора, где данные рассеяния получены из данных Коши исходной задачи. Связь между эволюцией данных рассеяния и изменением решения исходного уравнения позволяет свести задачу к обратной задаче рассеяния, которая решается с помощью метода Гельфанда-Левитана-Марченко. Так, уравнение КдФ было проинтегрировано посредством перехода к задаче рассеяния для уравнения Шрёдингера

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + q(x)\psi = k^2\psi,$$

и переходе к коэффициенту отражения $r(k)$. Если при этом в качестве потенциала $q(x)$ рассматривать функцию $u(x,t)$, то эволюция данных рассеяния может быть описана явными аналитическими формулами (в частности, $r(k) = r(k;t) = r(k;0)e^{8ik^3t}$). Тем самым интегрирование уравнения КдФ сводится к решению прямой задачи рассеяния (получению спектральных данных), эволюции спектральных данных, и решению обратной задачи рассеяния (восстановлению потенциала, соответствующего $u(x,t)$):



В 1968 году Р. Лах исследовал процедуру метода обратной задачи рассеяния и предложил алгебраическое описание метода [50]. Позднее С.С. Gardner, а также В.Е. Захаров и Л.Д. Фаддеев (независимо от Gardner) построили теорию уравнения КдФ как гамильтоновой системы [51, 52]. В дальнейшем метод обратной задачи рассеяния получил развитие в работах В.Е. Захарова, А.Б. Шабата, С.П. Новикова, В.А. Марченко, С.В. Манакова, А.П. Веселова, Р.Г. Новикова и других авторов [53–69]. В частности, на основе этого метода были проинтегрированы такие уравнения, как нелинейное уравнение Шрёдингера, уравнение sin-Gordon, уравнение Веселова-Новикова

(являющееся двумерным обобщением уравнения КдФ), и другие.

Перейдём теперь к обзору результатов, полученных на основе подхода И.М. Гельфанда - Б.М. Левитана - М.Г. Крейна для решения обратных задач для гиперболических уравнений.

После уже упомянутых работ М.Г. Крейна [35, 37–39], связанных с задачей о струне, следующим крупным результатом стала работа А.С. Алексеева [1], опубликованная в 1962 году. В этой работе автор исследовал одномерную обратную динамическую задачу теории упругости. Используя метод Гельфанда-Левитана-Крейна в спектральной области, А.С. Алексеев предложил метод определения упругих параметров среды по результатам двух экспериментов, один из которых соответствовал прохождению продольных P - волн через среду, а другой - прохождению SH - волн. Так же стоит отметить работы А.С. Благовещенского [70, 71], в частности, работу 1971 года [71], в которой им было предложено новое доказательство результатов М.Г. Крейна для обратных задач, связанных с уравнением струны. В этой работе им был предложен вариант уравнения Крейна во временной области. Похожие идеи были использованы в работе Б.С. Парийского 1968 года [40], в которой им была исследована обратная задача для волнового уравнения с воздействием на глубине. Данные работы считаются первыми публикациями, в которых предложены идеи использования метода Гельфанда-Левитана-Крейна во временной области - в более ранних работах, например, в работах А.С. Алексеева [1, 10] алгоритм решения был основан на переходе в частотную область посредством преобразования Фурье (или Лапласа) и последующему решению спектральной обратной задачи. При этом, разумеется, поведение соответствующих собственных функций определяется поведением искомого коэффициента на всей полуоси. В то же время, динамический вариант метода И.М. Гельфанда - Б.М. Левитана - М.Г. Крейна позволил показать локальный характер зависимости неизвестного коэффициента от дополнительной информации.

Отметим также, что альтернативное уравнение было получено в работах В. Gopinath и М. Sondhi [72, 73] в 1970 и 1971 годах при решении задачи восстановления формы речевого тракта человека на основе акустических измерений. Данное уравнение также было получено во временной области. Связь между уравнением Gopinath-Sondhi и уравнениями типа Гельфанда-Левитана была исследована R. Burridge при решении задач теории упругости в 1980 году [74].

Далее, в 1975 году А.С. Алексеевым и В.И. Добринским были исследованы численные алгоритмы решения обратной динамической задачи сейсмологии, один из которых был построен на основе дискретного аналога метода Гельфанда-Левитана. Кроме того, следует отметить работу W. Symes [75] (1979), в которой он занимался изучением нелинейных интегральных уравнений во временной области, а также работу С.И. Кабанихина 1988 года [76], в которой им предложен новый алгоритм решения уравнения Гельфанда-Левитана на основе достаточного условия разрешимости обратной задачи. В 1990-х годах метод Гельфанда-Левитана-Крейна был использован для решения обратной задачи геоэлектрики, связанной с квазистационарным приближением системы уравнений Максвелла (В.Г. Романов и С.И. Кабанихин, 1991, [77]), а также для определения акустического импеданса в одномерной задаче теории распространения волн (А.С. Алексеев, В.С. Белоносов, 1998 [78]).

Что касается разработки многомерных аналогов уравнений И.М. Гельфанда - Б.М. Левитана - М.Г. Крейна, то их развитие идёт с 1987 года и восходит к работе М.И. Белишева, который разработал метод граничного управления. Позднее в 1992 году с помощью метода граничного управления М.И. Белишевым и А.С. Благовещенским [17, 79] был получен многомерный аналог уравнения Гельфанда-Левитана. При этом независимо от этих работ многомерный аналог уравнений Гельфанда-Левитана-Крейна был предложен также в 1989 году С.И. Кабанихиным в работе [80], в которой была предложена комбинация подхода Гельфанда-Левитана и проекционного метода (проектировании задачи на некоторое конечномерное подпространство). Отметим также, что в 2004 году С.И. Кабанихиным и М.А. Шишлениным [81] была показана эквивалентность дискретных вариантов метода Гельфанда-Левитана и метода граничного управления для одномерной обратной задачи акустики. При этом решение двумерной коэффициентной обратной задачи акустики было получено в работах С.И. Кабанихина, М.А. Шишленина и М.А. Сатыбаева [82, 83]. Развитие численных методов решения уравнений типа Гельфанда-Левитана происходило параллельно с совершенствованием теоретических положений. Помимо статьи А.С. Алексеева и В.И. Добринского [5], в которой был произведен обзор численных методов решения обратной задачи сейсмологии, в том числе и на основе метода Гельфанда-Левитана, необходимо отметить работу Б.С. Парийского [84], который в 1977 году опубликовал обзор численных методов решения данных уравнений. Отметим также работу F. Santosa [85], посвящённую решению обратной задачи для плоской волны методом Гельфанда-Левитана. В ней автор предложил численную схему решения, и исследовал различные аспекты её устойчивости к ошибкам и аппроксимации. Из более современных работ отметим публикацию С.И. Кабанихина, М.А. Сатыбаева и М.А. Шишленина [82] о численных алгоритмах решения двумерных аналогов уравнения Гельфанда-Левитана и Крейна, а также работу [83], где авторами был предложен численный метод решения обратной задачи для уравнения акустики на основе метода сингулярного разложения. Тем не менее, задача разработки эффективных численных методов решения обратных задач на основе метода И.М. Гельфанда - Б.М. Левитана - М.Г. Крейна по-прежнему остаётся актуальной.

Целью данной работы является создание новых и обоснование уже существующих численных алгоритмов решения коэффициентных многомерных обратных задач акустики, а также обратных задач определения потенциала волнового уравнения на основе подхода И.М. Гельфанда — Б.М. Левитана — М.Г. Крейна.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи:

1. Разработать алгоритмы регуляризации многомерных обратных задач акустики с помощью многомерных аналогов уравнений И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана и М.Г. Крейна.
2. Разработать и исследовать эффективность новых методов численного решения семейств интегральных уравнений И.М. Гельфанда-Б.М. Левитана и М.Г. Крейна
3. Создать программные комплексы для численного решения рассматриваемых задач на основе предложенных алгоритмов.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Разработан алгоритм решения одномерной обратной задачи акустики и обратной задачи для уравнения колебаний методом Монте-Карло
2. Разработан и обоснован численный алгоритм решения двумерного аналога уравнения И.М. Гельфанда—Б.М. Левитана с помощью стохастического проекционного метода
3. Разработан алгоритм решения двумерной обратной задачи акустики на основе комбинации проекционного метода, метода Гельфанда-Левитана-Крейна и метода обращения блочно-тёплицевой матрицы.
4. Разработан алгоритм численного решения одномерной динамической задачи сейсмологии на основе метода Гельфанда-Левитана во временной области.

Выносимые положения соответствуют следующим пунктам паспорта специальности 01.01.07 - вычислительная математика:

1. Положения 1, 2 и 3 соответствуют пункту 1 паспорта.
2. Положение 2 соответствует пункту 2 паспорта.
3. Положения 1 и 3 соответствуют пункту 3 паспорта.
4. **Положение 4 соответствует пункту 4 паспорта.**

Научная новизна: в настоящей работе получены следующие результаты:

1. **Предложен новый алгоритм решения одномерной обратной задачи сейсмологии на основе решения уравнений И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана и М.Г. Крейна методом Монте-Карло**
2. Предложен новый метод решения двумерного аналога уравнения И.М. Гельфанда-Б.М. Левитана на основе стохастического проекционного метода.
3. Построен и исследован алгоритм решения двумерной обратной задачи определения плотности среды, основанный на комбинации проекционного метода, многомерного аналога метода Гельфанда-Левитана-Крейна и метода Левинсона обращения блочно-тёплицевой матрицы. Показано, что в данном случае решение обратной задачи сводится к решению только одного интегрального уравнения из семейства.

Научная и практическая значимость диссертационной работы определяется необходимостью модернизации существующих и разработке новых численных методов и алгоритмов решения обратных задач для гиперболических уравнений. Разработанные алгоритмы могут быть использованы при обработке данных сейсмических наблюдений в задачах акустического карто- тажа, а также в других приложениях.

Степень достоверности полученных результатов обеспечивается математическим доказательством основных положений и теорем, обоснованием алгоритмов, а также сериями численных расчётов и сравнительным анализом алгоритмов.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих международных и российских конференциях : всероссийской школе-конференции с международным участием «Математика, информатика, их приложения и роль в образовании» (г. Москва, 2009 г.), на 48-й, 49-й и 50-й международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»(г. Новосибирск, 2010, 2011, 2012 гг.), всероссийской конференции по вычислительной математике KBM-2011 (г. Новосибирск, 2011 г.), международной конференции 8th International ISAAC Congress (г. Москва, 2011г.), международных конференциях «Inverse problems: Modeling and Simulation» (г. Анталия, Фетхие - Турция, 2012, 2014 гг.), международной конференции «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования» (г. Москва, 2013), международной конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики», посвященной 50-летию ИВМиМГ СО РАН (г. Новосибирск, 2014 г.), международной конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики» (г. Новосибирск, 2015 г.), международном семинаре по обратным и некорректно поставленным задачам (г. Москва, 2015 г.), 4th International Conference on Matrix Methods in Mathematics and Applications (г. Москва, 2015 г.), XVII Всероссийской конференции молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям (г. Новосибирск, 2016 г.), зимней международной молодежной научной школе-конференции «Теория и приложения обратных и некорректных задач» (г. Алматы, Казахстан, 2016 г.), международной конференции «Математика и информационные технологии в нефтегазовом комплексе», (г. Сургут, 2016 г.), международной конференции «Современные проблемы математической физики и вычислительной математики» (г. Москва, 2016 г.), российско-британском семинаре «Uncertainty Quantification in Inverse Modeling» (г. Новосибирск, 2016 г.), международной конференции «Вычислительная и прикладная математика 2017»(г. Новосибирск, 2017 г.), а также на 4-й, 5-й, 6-й, 7-й, 8-й и 9-й молодежных научных школах-конференциях «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» (г. Новосибирск, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017 гг.).

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на 3 всероссийских конференциях, 22 международных конференциях, а также на научных семинарах:

- Объединенный семинар ИВМиМГ СО РАН и кафедры вычислительной математики ММФ НГУ под руководством профессора В.П. Ильина (Новосибирск, 2016)
- Научно-исследовательский семинар кафедры математической физики ВМК МГУ под руководством профессора А.М. Денисова (Москва, 2017)
- Семинар Scientific Computing group Сколковского института науки и технологий (Москва, 2017)

- Семинар по дифракции и распространению волн исследовательской лаборатории имени П.Л. Чебышёва (ПОМИ РАН, Санкт-Петербург, 2017)

Диссертационная работа была выполнена при поддержке грантов РФФИ № 15-01-09230, 16-01-00755, 16-29-15120.

Личный вклад. Основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. В работах, опубликованных в соавторстве, личный вклад автора заключается в обсуждении постановок задач и выбора методов их решения, в разработке и обосновании численных алгоритмов, составлении и отладки компьютерных программ, проведении вычислительных экспериментов. Конфликт интересов с соавторами отсутствует.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в **XX** печатных изданиях, из которых 2 статьи изданы в журналах, зарегистрированных в системе Web of Science; 1 статья в журнале, зарегистрированном в системе Scopus; 1 статья в журнале, зарегистрированном в системе РИНЦ; 2 статьи в трудах международных и всероссийских конференций; **XX** работ опубликовано в тезисах международных и всероссийских конференций. **Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 136 страниц с 36 рисунками и 15 таблицами. Список литературы содержит 128 наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

Первая глава посвящена решению одномерных обратных задач. В подразделе **1.1** рассмотрена обратная задача для уравнения колебаний:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - q(x)u, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0; \\ u|_{t=0} &= 0, \quad u_t|_{t=0} = \delta(x). \\ u_x|_{x=0} &= 0, \quad u|_{x=0} = f(t).\end{aligned}$$

Задача заключается в определении четной функции $q(x)$ по данным обратной задачи $f(t)$. Как показано В.Г. Романовым [86], данная задача сводится к однопараметрическому семейству интегральных уравнений:

$$\tilde{w}(x, t) + \int_{-x}^x f(t - \tau) \tilde{w}(x, \tau) d\tau = -\frac{1}{2}[f'(t - x) + f'(t + x)], \quad x > 0, 0 < t < |x|.$$

Данное уравнение называется уравнением Гельфанда-Левитана. При этом решение обратной задачи связано с решением $w(x, t)$ уравнения Гельфанда-Левитана по формуле:

$$q(x) = 4 \frac{d}{dx} \tilde{w}(x, x - 0), \quad x > 0$$

В подразделе 1.2 рассмотрена обратная задача для одномерного уравнения акустики [71, 87]:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} - \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} u_x, \quad x > 0, \quad t > 0 \\ u|_{t=0} &\equiv 0, \quad x > 0 \\ u_x|_{x=0} &= \delta(t), \quad t > 0 \\ u|_{x=0} &= f(t), \quad t > 0. \end{aligned}$$

Задача заключается в определении акустической жесткости среды $\sigma(x)$ по дополнительной информации $f(t)$. В работе А.С. Благовещенского [71] эта задача сводится к семейству интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода (уравнение Крейна):

$$-2f(+0)V(x, t) - \int_{-x}^x V(x, s)f'(t - s)ds = 1, \quad t \in (-x, x).$$

Акустическая жёсткость восстанавливается по решению уравнения М.Г. Крейна с помощью следующего соотношения:

$$\sigma(x) = \frac{V(0, 0)}{2V^2(x, x)}.$$

В подразделе 1.3 рассматривается решение одномерной (т.е., случай, когда параметры изменяются только с глубиной) динамической обратной задачи сейсмоки:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad div} \mathbf{U} + \mu \Delta \mathbf{U} + \text{grad} \lambda \text{div} \mathbf{U} + \sum_{i=1}^3 \text{grad} \mu \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} + \text{grad} U_{x_i} \right) \mathbf{e}_i;$$

Здесь $\mathbf{e}_i$ - орт соответствующей координатной оси x_i , $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$, $\mathbf{U} = (U_x, U_y, U_z)^T$ - вектор смещения точек среды. Упругие свойства среды заданы параметрами Ламе λ, μ , а также плотностью среды ρ . Задача состоит в определении параметров λ, μ, ρ по результатам одного или нескольких экспериментов, в результате которых измеряется смещение точек среды $\mathbf{U}$ на поверхности $z = 0$. На основе работ А.С. Алексеева [1, 10] показано, что решение обратной задачи может быть получено на основе двух экспериментов, один из которых может связан с распространением SH-волн при воздействии на среду поверхностного момента вращения интенсивности $\delta(t)$, а другой - с распространением продольных волн при воздействии на среду источника вида нормальной сосредоточенной силы. При этом параметры среды могут быть восстановлены путём решения двух обратных задач для уравнения акустики и одной обратной задачи для уравнения колебаний, рассмотренных в разделах 1.1 и 1.2.

Подраздел 1.4 посвящен описанию метода Монте-Карло решения интегральных уравнений

Фредгольма второго рода:

$$\varphi(x) = \int_X k(x', x) \varphi(x') dx' + f(x) \quad (1)$$

Или, в операторном виде,

$$\varphi = K\varphi + f$$

Различные аспекты решения таких уравнений методом Монте-Карло были исследованы в работах Г.И. Марчука, Н.С. Бахвалова, Г.А. Михайлова, С.М. Ермакова, И.М. Соболя [88–91]. Основой методов Монте-Карло решения интегральных уравнений является представление решения рядом Неймана

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} K^n f$$

При этом сумма ряда Неймана может быть вычислена как математическое ожидание некоторой случайной величины, построенной на основе цепи Маркова, чьи параметры определяются ядром и правой частью рассматриваемого уравнения. Это математическое ожидание затем аппроксимируется выборочным средним.

Вторая глава посвящена разработке, исследованию и численной реализации алгоритмов решения двумерной обратной задачи для уравнения колебаний на основе подхода Гельфанда-Левитана-Крейна. В подразделе 2.1 рассматривается следующая последовательность прямых задач ($k \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$):

$$\begin{aligned} u_{tt}^{(k)}(x, y, t) &= \Delta_{x,y} u^{(k)} - q(x, y) u^{(k)}, \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, t > 0, k \in \mathbb{Z} \\ u^{(k)}|_{t=0} &= 0, \quad u_t^{(k)}|_{t=0} = \delta(x) e^{iky}, \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Обратная задача заключается в определении чётной по переменной y функции $q(x, y)$ по дополнительной информации:

$$u^{(k)}|_{x=0} = f_k(y, t), \quad u_x^{(k)}|_{x=0} = 0, \quad y \in \mathbb{R}, t > 0, k \in \mathbb{Z}$$

Данная постановка задачи была исследована С.И. Кабанихиным в [15, 76]. В подразделе 2.2 рассматривается двумерный аналог метода Гельфанда-Левитана решения поставленной задачи. Обратная задача сводится к решению следующего семейства интегральных уравнений [76]:

$$\begin{aligned} &\tilde{w}^{(k)}(x, y, t) + \int_{-x}^x \sum_m \tilde{w}^{(m)}(x, s) f_m^{(k)'}(t - s) ds = \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial f^{(k)}}{\partial t}(y, t - x) + \frac{\partial f^{(k)}}{\partial t}(y, t + x) \right], \quad x > 0, t \in (-x, x), y \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Данное семейство уравнений является двумерным аналогом уравнения Гельфанда-Левитана. Решение обратной задачи находится по формуле:

$$q(x, y) = 4 \frac{d}{dx} \tilde{w}^{(0)}(x, y, x - 0).$$

В подразделе 2.3 рассматривается использование проекционного метода к решению полученных уравнений. Суть метода заключается в проецировании всех входящих в формулировку задачи функций на конечномерное подпространство, определяемое базисом Фурье. Данный подход может быть рассмотрен как регуляризация исходной задачи, вызванная тем фактом, что данные обратной задачи заданы на времениподобной поверхности $x = 0$.

Подраздел 2.4 посвящен формулировке метода Монте-Карло решения систем интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Как и в одномерном случае, для решения обратной задачи достаточно вычислить решение уравнения Гельфанда-Левитана не во всех точках, а только при $t = x - 0$. Эта особенность хорошо учитывается при решении задачи методом Монте-Карло, что позволяет улучшить эффективность численных алгоритмов. В подразделе 2.5 рассматривается решение уравнения Гельфанда-Левитана с помощью сведения к системе линейных алгебраических уравнений и использовании стохастического проекционного метода. Стохастический проекционный метод решения СЛАУ $Az = b$ основан на итерационном процессе, каждый шаг которого состоит в проецировании решения на гиперплоскость, соответствующей случайно выбранной строке системы [92]:

$$z_{k+1} = z_k + \frac{b_i - (a_i \cdot z_k)}{\|a_i\|_2^2} a_i^T$$

В работе рассмотрены различные варианты метода, в частности, блочная модификация, соответствующая проекции на пересечение нескольких случайно выбранных гиперплоскостей. В отличие от метода Монте-Карло, применимость данного подхода не ограничена сходимостью ряда Неймана [93].

Третья глава посвящена исследованию двумерной обратной задачи для уравнения акустики. Задача заключается в определении плотности среды - 2π - периодической по переменной y функции $\rho(x, y)$. Исследуется следующая последовательность прямых задач ($k \in \mathbb{Z}$):

$$\begin{aligned} u_{tt}^{(k)} &= \Delta u^{(k)} + \nabla \ln \rho(x, y) \nabla u^{(k)}; \\ x > 0, \quad y &\in (-\pi, \pi), \quad t > 0, k \in \mathbb{Z} \\ u^{(k)}|_{t=0} &\equiv 0, \\ u_x^{(k)}|_{x=0} &= \delta(t) e^{iky}. \end{aligned}$$

Обратная задача заключается в определении плотности среды $\rho(x, y)$ по следующей дополнительной информации:

$$u^{(k)}(+0, y, t) = f^{(k)}(y, t), \quad y \in (-\pi, \pi), k \in \mathbb{Z}.$$

Подобные постановки задач возникают, например, в геофизике в случае площадных систем наблюдений. Решение данной задачи рассматривалось в работах С.И. Кабанихина и М.А. Шишленина [81–83]. В подразделе 3.1 показано, что данная задача сводится к решению двумерного аналога уравнения М.Г. Крейна:

$$\Phi^{(k)}(x, t) - \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{-x}^x f_m^{(k)'}(t - s) \Phi^{(m)}(x, s) ds = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{iky}}{\rho(0, y)} dy, \quad t \in (-x, x), k \in \mathbb{Z}.$$

Решение обратной задачи вычисляется следующим образом [83]:

$$\rho(x, y) = \frac{\pi^2}{\rho(0, y)} \left[\sum_{m \in \mathbb{Z}} \Phi^{(m)}(x, x - 0) e^{-imy} \right]^{-2}$$

Подраздел 3.2 посвящён решению двумерного аналога уравнения М.Г. Крейна с помощью сведения к системе линейных алгебраических уравнений с блочно-тёплицевой матрицей. Такие матрицы имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots & a_{-n+1} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \dots & a_{-n+2} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & a_{-n+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_0 \end{bmatrix},$$

где a_i - блоки некоторой размерности. Известно, что эффективность алгоритмов решения таких или иных систем во многом зависит от степени использования структуры задачи при разработке методов решения [94]. Так, стандартные методы решения систем линейных уравнений с плотными матрицами требуют в общем случае $O(N^3)$ операций (здесь под N понимается размерность системы). Для систем с тёплицевыми матрицами разработаны как т.н. «быстрые» алгоритмы, требующие $O(N^2)$ операций, так и «супербыстрые» методы ($O(N \log^p N)$). В данной работе используется блочный вариант алгоритма, основанного на методе Левинсона-Дурбина [95, 96], и модифицированного Е.Е. Тыртышниковым и В.В. Воеводиным [94]. Метод основан на том, что обратная к блочно-тёплицевой матрица определяется своим первым и последним блочным столбцом. Эту зависимость можно использовать и для нахождения решения соответствующей СЛАУ. При этом для решения системы $Az = b$ можно рассмотреть рекуррентную процедуру, основанную на вычислении первого и последнего столбца усеченной матрицы ($A_k x_k = e_1, A_k y_k = e_{k+1}$, где A_k - ведущая подматрица блочного размера $k + 1$), и решении усечённой системы $A_k z_k = b_k$. Данный метод относится к классу «быстрых» методов, однако его рекуррентная схема хорошо сочетается со структурой уравнения М.Г. Крейна, позволяя свести задачу нахождения решения всех уравнений однопараметрического семейства к решению только одной системы линейных уравнений.

В четвертой главе приведено описание, результаты и сравнительный анализ эффективности

предложенных численных методов решения поставленных задач.

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Разработан метод решения одномерной обратной задачи акустики и одномерной обратной задачи для уравнения колебаний на основе сочетания динамического варианта метода Гельфанда-Левитана и метода Монте-Карло
2. Разработан алгоритм численного решения одномерной динамической задачи сейсмики на основе подхода И.М. Гельфанда - Б.М. Левитана - М.Г. Крейна во временной области.
3. Разработан метод численного решения двумерного аналога уравнения И.М. Гельфанда-Б.М. Левитана с помощью стохастического проекционного метода.
4. Разработан метод численного решения двумерной обратной задачи для уравнения акустики на основе комбинации проекционного метода, метода Гельфанда-Левитана-Крейна и метода быстрого обращения тёплицевой матрицы.
5. Разработаны программные комплексы, реализующие предложенные методы.

Глава 1

Решение одномерных обратных задач методом И.М. Гельфанда—Б.М. Левитана—М.Г. Крейна

В данной главе мы рассмотрим реализацию предлагаемых методов для решения одномерных задач. Помимо методических целей и апробации алгоритмов в одномерном случае, разработка более эффективных методов решения одномерных задач по-прежнему представляет интерес в силу значительного количества прикладных исследований.

1.1 Коэффициентная обратная задача для уравнения колебаний

В этом разделе мы рассмотрим обратную задачу для одномерного уравнения колебаний и сведём её к уравнению Гельфанда-Левитана.

Рассмотрим следующее уравнение:

$$L_q u \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + q(x) \right) u = 0 \quad (1.1)$$

В дальнейшем будем рассматривать это уравнение в области $(x, t) : x \in \mathbb{R}, t > 0$. Рассмотрим также данные Коши:

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \delta(x) \quad (1.2)$$

С одной стороны, наличие дельта-функции в данных Коши (1.2) обусловлено тем, что в задачах геофизики данные часто являются финитными функциями. Математическое моделирование таких задач проводится с использованием обобщенных функций, носители которых сосредоточены в требуемых точках пространства. В таком случае под решением задачи также понимается обобщённая функция, а выполнение дифференциальных равенств и краевых условий трактуется в обобщенном смысле. С другой стороны, наличие сингулярной составляющей в данных Коши

позволит выделить сингулярную и регулярную составляющую решения задачи (1.1) - (1.2) и получить соотношения на характеристиках.

Прямая задача для уравнений (1.1) - (1.2) заключается в вычислении волнового поля $u(x, t)$ по известной непрерывной функции $q(x)$. Рассмотрим обратную задачу: найти неизвестную непрерывную функцию $q(x)$, если известна дополнительная информация о решении задачи (1.1)-(1.2) при $x = 0$:

$$u|_{x=0} = f(t), \quad u_x|_{x=0} = 0. \quad (1.3)$$

Данная задача подробно исследована В.Г. Романовым в работе [86]. Рассмотрим алгоритм сведения обратной задачи (1.1)-(1.3) к семейству линейных интегральных уравнений Фредгольма. Используя формулу Даламбера, получим, что решение задачи (1.1)-(1.2) удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\theta(t - |x|) - \frac{1}{2} \iint_{\Delta(x, t)} q(\xi)u(\xi, \tau)d\xi d\tau \quad (1.4)$$

Здесь $\Delta(x, t)$ - треугольник, образованный характеристиками, проходящими через точку (x, t) и ось t :

$$\Delta(x, t) = (\xi, \tau) : 0 < \xi \leq x, t - x + \xi < \tau < t + x - \xi$$

Кроме того, здесь $\theta(x)$ - функция Хевисайда:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Из уравнения (1.4) следует, что

$$u(x, t) \equiv 0, t < |x|. \quad (1.5)$$

Учитывая определение функции Хевисайда, также можно получить следующее соотношение:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \iint_{\square(x, t)} q(\xi)u(\xi, \tau)d\xi d\tau, t > |x|. \quad (1.6)$$

Здесь $\square(x, t)$ - прямоугольник, образованный характеристиками, проходящими через (x, t) и $(0, 0)$:

$$\square(x, t) = (\xi, \tau) : |\xi| \leq \tau \leq t - |x - \xi|.$$

В свою очередь, из уравнения (1.6) следует, что можно определить значение функции $u(x, t)$ на характеристике $t = |x|$: $u(x, |x|) \equiv \frac{1}{2}$.

Имеет место **Лемма 1.1**: Если при некотором $T > 0$ функция $q(x)$ принадлежит классу $C[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, то для функции $f(t)$ справедливо следующее утверждение:

$$f(t) \in C^2[0, T], f(+0) = \frac{1}{2}, f'(+0) = 0. \quad (1.7)$$

Продолжим теперь функцию $u(x, t)$ для значений $t \leq 0$ нечётным образом:

$$u(x, t) = -u(x, -t), \quad t \leq 0.$$

В силу нечётного продолжения и условия (1.7) функция $f(t) = u(0, t)$ также является нечётной функцией, и кроме того, имеет в $t = 0$ разрыв первого рода: $f(+0) = \frac{1}{2}$, $f(-0) = -\frac{1}{2}$.

Продолженная таким образом функция $u(x, t)$ при всех $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ является решением уравнения

$$L_q u = 0 \quad (1.8)$$

и удовлетворяет условию

$$u(x, t) \equiv 0, \quad t < |x| \quad (1.9)$$

Рассмотрим теперь вспомогательную задачу

$$L_q w = 0, \quad x > 0, \quad -\infty < t < \infty, \quad (1.10)$$

$$w|_{x=0} = \delta(t), \quad w_x|_{x=0} = 0. \quad (1.11)$$

В силу формулы Даламбера эта задача эквивалентна решению следующего интегрального уравнения:

$$w(x, t) = \frac{1}{2}[\delta(t - x) + \delta(t + x)] + \frac{1}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} q(\xi) w(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (1.12)$$

Из уравнения (1.12) можно получить, что функция $w(x, t)$ удовлетворяет следующему условию:

$$w(x, t) \equiv 0, \quad 0 < x < |t|. \quad (1.13)$$

Обозначим теперь

$$\tilde{w}(x, t) = w(x, t) - \frac{1}{2}[\delta(t - x) + \delta(t + x)]. \quad (1.14)$$

Подставляя (1.14) в (1.12), можно получить, что кусочно-непрерывная функция $\tilde{w}(x, t)$ является решением следующего уравнения:

$$\tilde{w}(x, t) = \frac{1}{4}\theta(x - |t|) \left[\int_0^{(x+t)/2} q(\xi) d\xi + \int_0^{(x-t)/2} q(\xi) d\xi \right] + \frac{1}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} q(\xi) \tilde{w}(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad x > 0 \quad (1.15)$$

Из уравнения (1.15) следует, что функция $\tilde{w}(x, t)$ тождественно равна нулю при $|t| \geq x$, четна по переменной t , имеет непрерывные производные по своим аргументам при $|t| < x$, а также удовлетворяет следующему соотношению:

$$\tilde{w}(x, x) = \frac{1}{4} \int_0^x q(\xi) d\xi. \quad (1.16)$$

Отметим теперь, что функция $w(x, t)$ связана с решением обратной задачи (1.1)-(1.3) следующим соотношением:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)w(x, t-s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)w(x, \tau)d\tau. \quad (1.17)$$

Перепишем это равенство, используя (1.13) и (1.14):

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(t-x) + f(t+x)] + \int_{-x}^x f(t-\tau)\tilde{w}(x, \tau)d\tau. \quad (1.18)$$

Учитывая (1.9), получим:

$$\frac{1}{2}[f(t-x) + f(t+x)] + \int_{-x}^x f(t-\tau)\tilde{w}(x, \tau)d\tau = 0, \quad x > |t|. \quad (1.19)$$

Равенство (1.19) при каждом фиксированном $x > 0$ можно рассматривать как интегральное уравнение первого рода относительно функции $\tilde{w}(x, t)$, которое называется уравнением Гельфанда-Левитана. Отметим, что функция $f(t)$ терпит конечный разрыв при $t = 0$:

$$f(+0) = \frac{1}{2}, f(-0) = -\frac{1}{2}.$$

Учитывая это и дифференцируя уравнение (1.19) по переменной t , получим уравнение второго рода типа Фредгольма:

$$\tilde{w}(x, t) + \int_{-x}^x f(t-\tau)\tilde{w}(x, \tau)d\tau = -\frac{1}{2}[f'(t-x) + f'(t+x)], \quad x > 0, t \in (-x, x). \quad (1.20)$$

Используя чётность $\tilde{w}(x, t)$ по переменной t , можно упростить полученное уравнение:

$$\tilde{w}(x, t) + \int_0^x [f(t-\tau) + f(t+\tau)]\tilde{w}(x, \tau)d\tau = -\frac{1}{2}[f'(t-x) + f'(t+x)], \quad x > 0, t \in [0, x]. \quad (1.21)$$

При этом в силу (1.16), решение уравнения Гельфанда-Левитана связано с решением обратной задачи следующим образом:

$$q(x) = 4\frac{d}{dx}\tilde{w}(x, x), \quad x > 0. \quad (1.22)$$

Таким образом, алгоритм решения обратной задачи (1.1)-(1.3) выглядит следующим образом: необходимо решить уравнение (1.20) при фиксированном x , а потом вычислить функцию $q(x)$ согласно (1.22). Из теории уравнений Фредгольма известно, что при малых значениях x уравнение (1.20) однозначно разрешимо. В.Г. Романов [86] показал, что справедливы следующие утверждения:

Лемма 1.2. Если решение обратной задачи (1.1)-(1.3) существует, то уравнение (1.20) однознач-

но разрешимо при всех $x > 0$.

Лемма 1.3. Пусть при некотором $T > 0$ и $f(t) \in C^2[0, T]$, $f(+0) = \frac{1}{2}$, $f'(+0) = 0$ уравнение (1.20), в котором $f(t)$ доопределена нечетным образом для $t \in [-T, 0)$, однозначно разрешимо для $x \in (0, \frac{T}{2}]$, то решение обратной задачи существует на отрезке $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$.

Теорема 1.1. Обратная задача (1.1)-(1.3) однозначно разрешима на интервале $[-T/2, T/2]$ в классе кусочно-непрерывных функций тогда и только тогда, когда функция $f(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $f(t) \in C^2[0, T]$, $f'(+0) = 1/2$, $f'(0) = 0$;
2. Уравнение Гельфанда-Левитана (1.20), где $f(-t) = f(t)$, $t \in [0, T]$, однозначно разрешимо для всех $x \in (0, T/2)$.

1.2 Одномерная обратная задача акустики

В этом разделе мы рассмотрим одномерную обратную задачу акустики. В случае одной пространственной переменной уравнение, описывающее распространение акустических волн, выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{c^2(z)} v_{tt} = v_{zz} - \frac{\rho'(z)}{\rho(z)} v_z$$

Здесь функция $\rho(z) > 0$ описывает плотность среды, $c(z) > 0$ - скорость распространения волн в среде, $v(z, t)$ - акустическое давление. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\frac{1}{c^2(z)} v_{tt} = v_{zz} - \frac{\rho'(z)}{\rho(z)} v_z, z > 0, t > 0 \quad (1.23)$$

$$v|_{t < 0} \equiv 0, z > 0 \quad (1.24)$$

$$v_z|_{z=0} = \delta(t), t > 0. \quad (1.25)$$

Прямая обобщенная начально-краевая задача заключается в определении акустического давления $v(z, t)$ при известных достаточно гладких $\rho(z)$, $c(z)$. Обратная задача - восстановить плотность либо скорость звука в среде, либо их некоторую комбинацию, по дополнительной информации - известному значению акустического давления на поверхности $z = 0$:

$$v|_{z=0} = f(t) \quad (1.26)$$

Введём новую пространственную переменную $x = \phi(z) = \int_0^z \frac{d\xi}{c(\xi)}$. В силу того, что $c(z) < 0$, существует $\psi(x)$ - обратная к $\phi(z)$ функция: $\psi(\phi(z)) = z$. В переменных (x, t) уравнение (1.23) принимает вид:

$$v_{tt} = v_{xx} - \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} v_x \quad (1.27)$$

Здесь новая функция $\sigma(x)$ - акустическая жесткость среды - связана с $c(z)$ и $\rho(z)$ соотношением:

$$\sigma(x) = c(\psi(x))\rho(\psi(x))$$

Учитывая (1.27), можно показать, что одновременно определить $c(x)$ и $\rho(x)$, поскольку при известной функции $\sigma(x)$ может существовать бесконечно много пар функций c, ρ , таких, что $\sigma(x) = c(x)\rho(x)$. В связи с этим в дальнейшем мы будем рассматривать следующую обратную задачу:

$$u_{tt} = u_{xx} - \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}u_x, x > 0, t > 0 \quad (1.28)$$

$$u|_{t<0} \equiv 0, x > 0 \quad (1.29)$$

$$u_x|_{x=0} = \delta(t), t > 0. \quad (1.30)$$

$$u|_{x=0} = f(t), t > 0 \quad (1.31)$$

Данная задача рассматривалась многими авторами, в частности, А.С. Благовещенским [71] и С.И. Кабанихиным [87]. В [87] доказано следующее утверждение:

Лемма 1.4 Решение задачи (1.28)-(1.30) представимо в виде:

$$u(x, t) = s(x)\theta(t - x) + \tilde{u}(x, t) \quad (1.32)$$

Здесь $\tilde{u}(x, t)$ - непрерывная при $x \geq 0$ и гладкая при $t > x > 0$ функция, а функция $s(x)$ имеет следующий вид:

$$s(x) = -\sqrt{\frac{\sigma(x)}{\sigma(0)}} \quad (1.33)$$

Данное представление позволяет сформулировать следующую теорему [87]:

Теорема 1.2 Предположим, что функция $c(x)$ - гладкая. Тогда необходимыми условиями разрешимости обратной задачи (1.28)-(1.31) являются следующие условия:

1. Функция $f(t)$ - гладкая при $t \geq 0$;
2. $f(+0) < 0$.

Теперь, также, как и в разделе 1.1, продолжим функции $u(x, t)$ и $f(t)$ нечетным образом на значения $t < 0$:

$$u(x, t) = -u(x, -t), \quad t \leq 0.$$

$$f(-t) = -f(t), \quad t \leq 0.$$

В таком случае, функция $u(x, t)$ будет являться решением следующей задачи:

$$u_{tt} = u_{xx} - \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} u_x, x > 0, t \in \mathbb{R} \quad (1.34)$$

$$u|_{x=0} = f(t), u_x|_{x=0} = 0. \quad (1.35)$$

Кроме того, отметим, что в силу (1.32) решение задачи (1.28)-(1.31) обладает следующим свойством: $u(x, t) = 0, t < x$. Следовательно, для решения задачи (1.34)-(1.35) справедливо:

$$u(x, t) = 0, |t| < x. \quad (1.36)$$

Определим теперь вспомогательную функцию $W(x, t)$ как решение следующей задачи:

$$W_{tt} = W_{xx} - \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} W_x, x > 0, t \in \mathbb{R} \quad (1.37)$$

$$W|_{x=0} = \delta(t), W_x|_{x=0} = 0. \quad (1.38)$$

А.С. Благовещенский в работе [71] показал, что $W(x, t)$ обладает следующими свойствами:

$$W(x, t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma(x)}{\sigma(0)}} (\delta(t+x) + \delta(t-x)) + \tilde{W}(x, t) \quad (1.39)$$

$$W(x, t) \equiv 0, |t| > x. \quad (1.40)$$

Здесь $\tilde{W}(x, t)$ - классическая функция, гладкая при $x > |t|$. Кроме того, имеет место соотношение:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) W(x, \tau) d\tau. \quad (1.41)$$

Для того, чтобы получить из этого соотношения семейство интегральных уравнений, позволяющее решить обратную задачу, введём ещё одну вспомогательную функцию:

$$V(x, t) = \int_0^x \frac{W(\xi, t)}{\sigma(\xi)} d\xi.$$

Теперь, применяя к обеим частям равенства (1.41) оператор $\frac{\partial}{\partial t} \int_0^x \frac{1}{\sigma(\xi)} (\cdot) d\xi$, получим:

$$G(x, t) \equiv \int_0^x \frac{u_t(\xi, t)}{\sigma(\xi)} d\xi = \frac{\partial}{\partial t} \int V(x, s) f(t-s) ds = 2f(+0)V(x, t) + \int_{-x}^x V(x, s) f'(t-s) ds \quad (1.42)$$

Рассмотрим функцию $G(x, t)$ в области $x > |t|$. Заметим, что в этой области в силу (1.36)

$$G_x(x, t) = \frac{u_t(x, t)}{\sigma(x)} = 0.$$

Кроме того,

$$G_t(x, t) = \int_0^x \frac{u_{tt}(\xi, t)}{\sigma(\xi)} d\xi = \int_0^x \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{u_\xi(\xi, t)}{\sigma(\xi)} \right) d\xi = \frac{u_x(x, t)}{\sigma(x)} - \frac{u_x(0, t)}{\sigma(0)} = 0.$$

Таким образом, в области $x > |t|$ функция $G(x, t)$ является некоторой постоянной. Рассмотрим теперь при $x > 0$ следующее выражение:

$$\lim_{t \rightarrow +0} G(x, t) = \lim_{t \rightarrow +0} \int_0^x \frac{u_t(\xi, t)}{\sigma(\xi)} d\xi$$

Отметим, что функция $u(x, t)$ может быть продолжена для $x > 0$ с помощью чётного продолжения. В этом случае, учитывая (1.32), чётное продолжение функции $u(x, t)$ является решением следующей задачи:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} - \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} u_x, \quad -\infty < x < \infty \\ u|_{t=0} &= 0, \quad u_t|_{t=0} = -2c(0)\delta(x). \end{aligned}$$

Воспользовавшись чётным продолжением, получим:

$$\lim_{t \rightarrow +0} \int_0^x \frac{u_t(\xi, t)}{\sigma(\xi)} d\xi = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow +0} \int_{-x}^x \frac{u_t(\xi, t)}{\sigma(\xi)} d\xi = -\frac{1}{2} \int_{-x}^x 2 \frac{c(0)}{c(\xi)} \delta(\xi) d\xi = -1. \quad (1.43)$$

Таким образом, в области $|t| < x$

$$G(x, t) \equiv -1. \quad (1.44)$$

Следовательно, равенство (1.42) может быть переписано в следующем виде:

$$-2f(+0)V(x, t) - \int_{-x}^x V(x, s)f'(t-s)ds = 1, \quad t \in (-x, x) \quad (1.45)$$

Данное равенство при каждом фиксированном x является интегральным уравнением типа Фредгольма второго рода относительно неизвестной функции $V(x, t)$ и называется уравнением Крейна. А.С. Благовещенский показал [71], что функция $V(x, t)$ связана с решением обратной задачи (1.28) - (1.31) следующим соотношением:

$$V(x, x) = \frac{1}{2\sqrt{\sigma(x)\sigma(0)}}. \quad (1.46)$$

Следовательно, разрешив при каждом $x > 0$ уравнение Фредгольма, можно получить решение обратной задачи в соответствии со следующим равенством:

$$\sigma(x) = \frac{V(0, 0)}{2V^2(x, x)} \quad (1.47)$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1.3 (А. С. Благовещенский, [71]). Для существования единственного решения обратной задачи (1.28)-(1.31) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия разрешимости, указанные в теореме 1.2, и интегральное уравнение (1.45) было однозначно разрешимо.

Отметим, что условие однозначной разрешимости интегрального уравнения (1.45) может быть сформулировано ([71]) в виде положительной определённости соответствующего интегрального оператора.

Отметим, что существуют и другие подходы к решению задачи (1.28)-(1.31). Так, в работе С.И. Кабанихина [87] исследование данной задачи было проведено на основе её сведения к системе нелинейных интегральных уравнений Вольтерра. Преимуществом представленного в этой работе подхода является, во-первых, сведение нелинейной обратной задачи к семейству линейных интегральных уравнений, а, во-вторых, возможность получения решения в конкретной точке x . Кроме того, данный метод отражает локальный характер зависимости решения обратной задачи $c(x)$ от данных $f(t)$.

1.3 Одномерная обратная динамическая задача сейсмоки

1.3.1 Постановка задачи

В данном разделе мы рассматриваем одномерную обратную динамическую задачу сейсмоки. В общем случае задачи подобного рода заключаются в определении плотности и модулей упругости, являющихся коэффициентами системы дифференциальных уравнений нестационарной линейной теории упругости, если известна дополнительная информация о решении такой системы. В рассматриваемом здесь изотропном случае модули упругости выражаются через параметры Ламе, и задача, тем самым, заключается в определении этих двух параметров и плотности среды. Различные постановки обратных задач динамической теории упругости рассматривались в работах А.С. Благовещенского, В.Г. Романова, Ю.Е. Аниконова и других авторов [70, 97–100]. Что касается использования подхода Гельфанда-Левитана-Крейна для решения подобных задач, то необходимо отметить работы А.С. Алексеева, М.Н. Бородаевой, В.Г. Яхно, В.С. Белоносова. [1, 10, 101–103].

Рассмотрим полупространство $z \geq 0$ декартовой системы координат $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, заполненное упругой средой. В случае изотропной среды общая система динамических уравнений теории упругости, описывающая распространение упругих волн в среде, выглядит следующим образом [1]:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad div} \mathbf{U} + \mu \Delta \mathbf{U} + \text{grad} \lambda \text{div} \mathbf{U} + \sum_{i=1}^3 \text{grad} \mu \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} + \text{grad} U_{x_i} \right) \mathbf{e}_i; \quad (1.48)$$

Данная система описывает распространение сейсмических волн в пространстве, заполненном упругой средой. Здесь $\mathbf{e}_i$ - орт соответствующей координатной оси x_i , $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$,

$\mathbf{U} = (U_x, U_y, U_z)^T$ - вектор смещения точек среды. Упругие свойства среды заданы параметрами Ламе λ, μ , а также плотностью среды ρ . Отметим, что зачастую в задачах сейсмоки вместо параметров Ламе рассматриваются скорости распространения продольных и поперечных волн:

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (1.49)$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что параметры среды меняются только при изменении глубины: $\lambda = \lambda(z), \mu = \mu(z), \rho = \rho(z)$. В этом случае система (1.48) сводится к следующей системе уравнений:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right] + \mu \left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) = \rho \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2}; \quad (1.50)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right] + \mu \left(\frac{\partial^2 U_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left(\frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \right) = \rho \frac{\partial^2 U_y}{\partial t^2}; \quad (1.51)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right] + \mu \left(\frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \left[\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right] + 2 \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial U_z}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2}; \quad (1.52)$$

Далее, будем предполагать, что среда находится в состоянии покоя до момента приложения нагрузки:

$$\mathbf{U}(x, y, z, t)|_{t < 0} \equiv 0; \quad (1.53)$$

Для определения параметров среды на границе $z = 0$ с помощью взрывов или ударных воздействий реализуют следующие граничные условия:

$$\sigma_z|_{z=0} = \lambda_0 \left[\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right] + 2\mu_0 \frac{\partial U_z}{\partial z} = g_1(x, y, t); \quad (1.54)$$

$$\tau_{xz}|_{z=0} = \mu_0 \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) = g_2(x, y, t); \quad (1.55)$$

$$\tau_{yz}|_{z=0} = \mu_0 \left(\frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \right) = g_3(x, y, t); \quad (1.56)$$

Здесь предполагается, что значения параметров среды $\lambda_0, \mu_0, \rho_0 = \lambda, \mu, \rho|_{z=0}$ на поверхности являются известными. Приложенная нагрузка вызывает в среде волновой процесс, который регистрируется расположенными на поверхности $z = 0$ приёмниками:

$$U_x(x, y, 0, t) = f_1(x, y, t); U_y(x, y, 0, t) = f_2(x, y, t); U_z(x, y, 0, t) = f_3(x, y, t) \quad (1.57)$$

Таким образом, одномерная обратная задача сейсмоки заключается в определении параметров $\lambda(z), \mu(z)$ (что эквивалентно определению скоростей продольных и поперечных волн $v_p(z), v_s(z)$) и плотности ρ среды с помощью одного или нескольких экспериментов, описываемых соотношениями (1.50)-(1.57).

1.3.2 Определение скорости поперечных волн и плотности среды

Предположим теперь, что поверхностный момент сил, приложенных к границе $z = 0$ удовлетворяет после перехода к цилиндрической системе координат $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctg(\frac{y}{x})$ следующим условиям:

$$\sigma_z = 0, \tau_{rz} = 0, \tau_{\theta z} = a(t)b(r).$$

В таком случае, как показано А.С. Алексеевым [10], в среде возникают волны типа SH, вектор смещений $\mathbf{U}(r, z, \theta, t)$ которых состоит только из компоненты U_θ соответствующей координате θ , при этом $U_\theta = U_\theta(r, z, t)$ удовлетворяет следующему уравнению

$$\frac{\partial^2 U_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial z^2} + \frac{\mu'(z)}{\mu(z)} \frac{\partial U_\theta}{\partial z} = \frac{\rho(z)}{\mu(z)} \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial t^2}, \quad (1.58)$$

а также следующим начальным и краевым соотношениям:

$$U_\theta|_{t=0} \equiv 0; \quad (1.59)$$

$$\frac{\partial U_\theta}{\partial z} = \frac{1}{\mu_0} a(t)b(r). \quad (1.60)$$

В дальнейшем будем считать, что значение компоненты $U_\theta(r, z, t)$ при $z = 0$ есть некоторая известная функция $\hat{f}(r, t)$. Кроме того, выберем функции $a(t), b(r)$ следующим образом:

$$a(t) = \delta(t), b(r) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty k^2 J_1(kr) dk = -\frac{1}{4\pi} \frac{d}{dr} \left[\frac{\delta(r)}{r} \right].$$

Имеет место соотношение:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty b(r) r^2 dr = 1,$$

в силу чего условие (1.60) соответствует поверхностному моменту вращения интенсивности $\delta(t)$. Далее, положим

$$U_\theta(r, z, t) = \int_0^\infty U(z, t; k) J_1(kr) k^2 dk, \quad (1.61)$$

При этом в силу формул обращения преобразования Ханкеля

$$U(z, t; k) = \int_0^\infty U_\theta(r, z, t) J_1(kr) \frac{r}{k} dk, \quad (1.62)$$

Используя преобразование Ханкеля, обратная задача для системы (1.58)-(1.60) сводится к следующему однопараметрическому семейству задач относительно функций $U(z, t; k)$:

$$\frac{1}{v_s^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial \ln(\mu)}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial z} - k^2 U; \quad (1.63)$$

$$U(z, t; k)|_{t < 0} \equiv 0; \quad (1.64)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}|_{z=0} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \delta(t); \quad (1.65)$$

$$U(z, t; k)|_{z=0} = f_k(t). \quad (1.66)$$

Здесь, как и раньше, $v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ - скорость поперечных волн. Перейдём теперь от переменной z к переменной x , используя преобразование годографа:

$$x = \int_0^z \frac{d\xi}{v_s(\xi)}$$

В переменных x, t задача (1.63) - (1.66) может быть переписана следующим образом:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} \frac{\partial U}{\partial x} - k^2 v_s^2 U; \quad (1.67)$$

$$U(x, t; k)|_{t < 0} \equiv 0; \quad (1.68)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}|_{x=0} = \frac{1}{4\pi\sigma_0} \delta(t); \quad (1.69)$$

$$U(x, t; k)|_{x=0} = f_k(t). \quad (1.70)$$

Здесь $\sigma(x) = \sqrt{\mu\rho}$. При $k = 0$ уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} \frac{\partial U}{\partial x}$$

Тем самым система (1.67)-(1.70) сводится к обратной задаче для уравнения акустики, рассмотренной нами в разделе 1.2. Обратная задача сводится таким образом к решению уравнения Крейна (1.45), где $f(t) = f_0(t)$:

$$-2f_0(+0)V(x, t) - \int_{-x}^x V(x, s)f_0'(t-s)ds = 1, t \in (-x, x)$$

После чего функция $\sigma(x)$ может быть вычислена по формуле (1.47):

$$\sigma(x) = \frac{V(0,0)}{2V^2(x,x)}.$$

Будем теперь считать, что функция $\sigma(x)$ является известной. Зафиксируем $k \neq 0$ и сделаем ещё одну замену, перейдя от функции $U(x, t; k)$ к функции V , связанной с U следующим равенством:

$$U(x, t; k) = V(x, t; k) \sqrt{\frac{\sigma(x)}{\sigma(0)}} \frac{4\pi\sigma_0}{v_s(0)}.$$

Введём теперь функцию

$$q(x; k) = k^2 v_s^2 - \frac{1}{2} \frac{\sigma''}{\sigma} + \frac{3}{4} \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right)^2. \quad (1.71)$$

Тогда функция $V(x, t; k)$ удовлетворяет следующей системе соотношений:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - q(x; k)U; \quad (1.72)$$

$$U(x, t; k)|_{t=0} \equiv 0; \quad (1.73)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}|_{z=0} = \delta(t); \quad (1.74)$$

$$U(x, t; k)|_{x=0} = \hat{f}_k(t). \quad (1.75)$$

Как показано в разделе 1.1, решение обратной задачи (1.72)-(1.75) эквивалентно решению уравнения Гельфанда-Левитана (1.20) при $f(t) = f_k(t)$:

$$\tilde{w}_k(x, t) + \int_{-x}^x \hat{f}'_k(t - \tau) \tilde{w}_k(x, \tau) d\tau = -\frac{1}{2} [\hat{f}'_k(t - x) + \hat{f}'_k(t + x)], \quad x > 0, t \in (-x, x).$$

При этом решение $\tilde{w}(x, t)$ связано с $q(x)$ следующим соотношением:

$$q(x; k) = 4 \frac{d}{dx} w_k(x, x - 0)$$

Если функции $q(x)$ и $\sigma(x)$ известны, то соотношение (1.71) позволяет восстановить скорость поперечных волн в координатах годографа $v_s(x)$. Далее, знание функций $\sigma(x) = \sqrt{\mu\rho}$ и $v_s(x) = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ позволяет вычислить плотность среды $\rho(x)$. Кроме того, используя значения скорости поперечных волн, можно обратить преобразование годографа и перейти от переменной x к исходной переменной z :

$$z = \int_0^x v_s(\xi) d\xi$$

1.3.3 Определение скорости продольных волн.

Будем теперь считать, что после использования результатов раздела 1.3.2 нам известны значения функций $v_s(z), \rho(z)$ (что равносильно знанию $\mu(z), \rho(z)$ - двух из трёх параметров Ламе), то для получения полной информации о строении среды необходимо вычислить последний неизвестный параметр Ламе $\lambda(z)$, или скорость распространения продольных волн $v_p(z)$. Для этого

А.С. Алексеевым был предложен эксперимент, основанный на воздействии на среду источника вида нормальной сосредоточенной силы интенсивности $\delta(t)$ [10]:

$$\sigma_z|_{z=0} = \lambda_0 \left[\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right] + 2\mu_0 \frac{\partial U_z}{\partial z} = \delta(x)\delta(y)\delta(t); \quad (1.76)$$

$$\tau_{xz}|_{z=0} = \mu_0 \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) = 0; \quad (1.77)$$

$$\tau_{yz}|_{z=0} = \mu_0 \left(\frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \right) = 0; \quad (1.78)$$

В этом случае, как показано в [10], система уравнений теории упругости (1.48) сводится, с учетом симметрии среды и источника колебаний, к следующему уравнению:

$$\frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{\partial (\ln(\lambda + 2\mu))}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z}; \quad (1.79)$$

Здесь функция $W(x, t)$ связана с компонентами вектора смещений следующим образом:

$$W(x, t) = \iint U_z(x, y, z, t) dx dy$$

При этом остальные моменты остальных компонент вектора смещений равны нулю в силу симметричности задачи:

$$U(x, t) = \iint U_x(x, y, z, t) dx dy = 0, V(x, t) = \iint U_y(x, y, z, t) dx dy = 0.$$

При этом граничное условие (1.76) может быть переписано в виде

$$\frac{\partial W}{\partial z}|_{z=0} = \frac{1}{\lambda_0 + 2\mu_0} \delta(t) \quad (1.80)$$

Начальные данные имеют вид

$$W|_{t=0} = \frac{\partial W}{\partial t}|_{t=0} = 0 \quad (1.81)$$

Данные обратной задачи получены в результате измерения на поверхности $z = 0$ компонент смещения и могут быть переписаны в следующем виде:

$$W(0, t) = \iint U_z(x, y, 0, t) dx dy = G(t) \quad (1.82)$$

Соотношения (1.79)-(1.82) образуют обратную задачу, целью которой является восстановление скорости продольных волн

$$v_p(x) = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

Для решения этой задачи применим, также, как и в случае определения скорости поперечных волн, преобразование годографа и перейдём к переменной

$$y = \int_0^z \frac{d\xi}{v_p(\xi)}$$

Задача после данной замены принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial \ln \sigma_p(y)}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial y}; \\ W|_{t < 0} &\equiv 0, \\ \frac{\partial W}{\partial y}|_{y=0} &= \frac{1}{\sigma_{0p}} \delta(t), \\ W|_{y=0} &= G(t). \end{aligned} \quad (1.83)$$

Здесь неизвестной является функция $\sigma_p(y) = \rho(y)v_p(y)$. Задача (1.83) с точностью до умножения на постоянную совпадает с обратной задачей акустики, рассмотренной в разделе 1.2. Решение данной задачи может быть получено путём решения уравнения Крейна (1.45).

Далее, вычислив значения функции $\sigma_p(y)$, можно, в предположении, что значения плотности среды известны нам после применения результатов раздела 1.3.3, восстановить скорость продольных волн $v_p(z)$ в исходных переменных. Для этого нужно воспользоваться соотношением

$$v_p(y) = \frac{\sigma_p(y)}{\rho(z)} \quad (1.84)$$

При этом связь между переменными y и z , учитывая (1.84), может быть переписана следующим образом:

$$\frac{dy}{\sigma_p(y)} = \rho(z) dz \quad (1.85)$$

Тем самым описанная методика позволяет получить всю информацию об упругом строении среды в одномерном случае.

1.4 Метод Монте-Карло решения интегральных уравнений

Ключевым моментом в формулировке алгоритмов решения обратных задач, изученных в разделах 1.1, 1.2, 1.3, является численное решение уравнений И.М. Гельфанда-Б.М. Левитана (1.20) и уравнения М.Г. Крейна (1.45). Уравнения (1.20) и (1.45) обладают рядом одинаковых свойств - каждое из них является (при фиксированном значении параметра x) линейным интегральным уравнением типа Фредгольма второго рода. Более того, для решения рассматриваемых обратных задач достаточно, в силу (1.22) и (1.47), знать решение уравнений (1.20) и (1.45) только в одной точке $t = x - 0$. Данное обстоятельство послужило мотивом для использования методов Монте-Карло для решения указанных уравнений, поскольку методика методов Монте-Карло предоставляет эффективный способ вычисления различных функцио-

налов от решения интегральных уравнений, в том числе и вычисления отдельных его компонент.

Первоначально методы статистического моделирования (методы Монте-Карло) использовались для решения задач теории переноса излучения. Классические результаты в этой области были получены в работах Г.И. Марчука, Н.С. Бахвалова, Г.А. Михайлова, С.М. Ермакова, И.М. Соболя и других, как отечественных, так и зарубежных математиков. Во многом активное развитие и использование метода Монте-Карло в задачах нейтронной физики было обусловлено тем фактом, что традиционные численные методы оказались малоприспособленными для этих задач. С другой стороны, статистический подход к описанию различных физических процессов позволил методам стохастического моделирования стать естественными инструментами решения различных задач физики.

Как правило, схемы методов Монте-Карло основываются на законе больших чисел для независимых случайных величин. Предположим, что $\xi_1, \dots, \xi_n$ - независимые одинаково распределённые случайные величины, такие что $E\xi_k = a < \infty, D\xi_k = \sigma^2 < \infty$. В таком случае справедливо неравенство Чебышева:

$$P(|\frac{S_n}{n} - a| > \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon}.$$

Здесь $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$. Таким образом, при указанных предположениях неравенство Чебышева приводит к простейшему варианту закона больших чисел: для любых $\epsilon > 0, \delta > 0$ при достаточно большом n среднее арифметическое $\frac{S_n}{n}$ с вероятностью, меньшей, чем $1 - \delta$, отличается от математического ожидания a не больше, чем на ϵ . В действительности можно сформулировать закон больших чисел при более слабых предположениях. Так, закон больших чисел в форме Хинчина утверждает, что при условии конечного математического ожидания случайных величин ξ_k имеет место сходимость по вероятности среднего арифметического к математическому ожиданию:

$$P\{(|\frac{S_n}{n} - a| > \epsilon)\}_{n \rightarrow \infty} \rightarrow 0.$$

Также имеет место усиленный закон больших чисел, согласно которому среднее арифметическое независимых одинаково распределённых случайных величин сходится к их общему математическому ожиданию с вероятностью единица.

Таким образом, метод Монте-Карло предполагает создание случайной величины с характеристиками (например, математическим ожиданием), связанным с вычислительной задачей, а затем оценивание искомого значения с помощью закона больших чисел. В связи с этим характерными особенностями метода Монте-Карло являются следующие аспекты:

1. Линейная или близкая к линейной зависимость требуемой памяти ЭВМ от размерности задачи.
2. Возможность получения непосредственно интересующих функционалов от решения задачи. В качестве функционалов могут быть представлены как значения решения в конкретных интересующих точках, так и производные или интегралы от решения. Данная

особенность может быть полезной в случае, когда отсутствует необходимость в получении всего поля решений.

3. Вычисления по траекториям, как правило, осуществляются независимо, что даёт простой и естественный способ параллелизации алгоритмов Монте-Карло.
4. Методы Монте-Карло решения краевых задач позволяют эффективно решать задачи со сложной формой границы в силу простоты реализации соответствующих алгоритмов.
5. Алгоритмы Монте-Карло сохраняют свою эффективность в случае негладких границ, сложных правых частей или разрывных краевых условий в силу возможности построения обобщенных решений уравнений.
6. Погрешность метода может быть оценена в ходе вычислений без существенных дополнительных затрат.

В качестве недостатков метода стоит отметить, что при заданной погрешности ϵ трудоёмкость методов, как правило, имеет порядок $O(\epsilon^{-2})$.

Использование методов Монте-Карло в рамках данной работы связано с решением интегральных уравнений. Первой работой в этой области принято считать работу В.С. Владимирова [104]. В дальнейшем теоретические аспекты этого были исследованы И.М. Соболев, Г.А. Михайловым, С.М. Ермаковым и другими [90,91,105,106]. В этих работах исследовались вопросы уменьшения погрешностей оценки искомых величин, вычисление специальных функционалов и построение зависимых оценок функционалов, соответствующих различным значениям параметров задачи. Как известно, решение ряда задач прикладной математики сводится к оценке функционалов от решений некоторых интегральных уравнений. При этом во многих случаях существует связь между ядром уравнения и физическим процессом, который может быть описан в терминах Марковских случайных процессов и цепей. В таких случаях можно использовать непосредственное моделирование этих случайных последовательностей для получения решения. В других случаях можно использовать весовые методы Монте-Карло, в которых требуемые функционалы оцениваются с помощью вспомогательных весов, зависящих от свойств моделируемой цепи Маркова и ядра интегрального уравнения.

Итак, рассмотрим линейное интегральное уравнение Фредгольма вида

$$\varphi(x) = \int_X k(x',x)\varphi(x')dx' + f(x) \quad (1.86)$$

Или, в операторном виде,

$$\varphi = K\varphi + f$$

Здесь X - некоторое n - мерное евклидово пространство, $\varphi, f \in L$, $K : L \rightarrow L$, L - некоторое банахово пространство интегрируемых функций.

Основой методов Монте-Карло решения интегральных уравнений является представление решения уравнения (1.86) рядом Неймана

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} K^n f, \quad (1.87)$$

где оператор K^n определяется следующей формулой:

$$[K^n q](x) = \int \cdots \int q(x_0) k(x_0, x_1) k(x_1, x_2) \cdots k(x_{n-1}, x) dx_0 dx_1 \cdots x_{n-1}$$

Ряд (1.87) сходится по норме, если спектральный радиус оператора K меньше единицы, что, в частности, обуславливается соотношением $\|K\| < 1$. Рассмотрим задачу вычисления функционала вида

$$I_h = (\varphi, h) = \sum_{n=0}^{\infty} (K^n f, h)$$

Сходимость ряда в правой части последнего равенства следует из сходимости по норме ряда Неймана для φ . Кроме того, можно показать [107], что $(\varphi, h) = (f, \varphi^*)$, где φ^* - решение сопряжённого к (1.86) уравнения

$$\varphi^* = K^* \varphi^* + h \quad (1.88)$$

Здесь $\varphi^*, h \in L^*$, $K^* : L^* \rightarrow L^*$, L^* - сопряжённое к L пространство функций, K^* - сопряжённый к K оператор. Кроме того,

$$\begin{aligned} \|K\| &= \|K^*\|; \quad (Kf, h) = (f, K^*h); \\ [K^*h](x) &= \int_X k(x', x) h(x') dx'; \quad |(h, f)| \leq \|f\|_L \|h\|_{L^*}, \end{aligned}$$

Здесь

$$(f, h) = \int_X f(x) h(x) dx.$$

Основополагающим определением метода Монте-Карло решения интегрального уравнения является понятие однородной цепи Маркова. Однородной цепью Маркова называется последовательность случайных величин $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$, связанных простейшей зависимостью, такой, что распределение случайной величины x_n определяется значением x_{n-1} , и условная плотность распределения x_n при условии $x_{n-1} = x'$ для всех n есть заданная функция $r(x', x)$, не зависящая от n . При этом распределение начального состояния x_0 задаётся начальной плотностью $\pi(x_0)$. Введём также функцию $g(x')$ - вероятность обрыва цепи при переходе $x' \rightarrow x$. Вспомогательная функция $p(x', x) = r(x', x)(1 - g(x'))$ называется переходной плотностью. Можно отметить, что вероятность «выживания» при переходе $x' \rightarrow x$ есть $\int p(x', x) dx = 1 - g(x') \leq 1$. Таким образом, переходная плотность $p(x', x)$ единственным образом определяет плотность вероятности перехода $r(x', x)$ и вероятность обрыва цепи $g(x')$. Таким образом, однородная цепь Маркова полностью определяется как тройкой функций $\pi(x), r(x', x), g(x')$, так и парой функций $\pi(x), p(x', x)$.

Потребуем, чтобы параметры цепи Маркова удовлетворяли следующим условиям:

$$\begin{aligned} \pi(x) &\neq 0, \text{ если } f(x) \neq 0, \\ p(x', x) &\neq 0, \text{ если } k(x', x) \neq 0 \end{aligned} \quad (1.89)$$

Смысл этих ограничений заключается в том, что траектории цепи должны иметь возможность начинаться в тех точках, где $f(x) \neq 0$, и иметь возможность при переходе $x' \rightarrow x$ попадать в те точки, где $k(x', x) \neq 0$. Кроме того, в дальнейшем мы будем предполагать, что цепь Маркова обрывается с вероятностью 1 через конечное, хотя и случайное число переходов (в работе [90] показано, что это условие выполняется в случае сходимости ряда Неймана для уравнения $f = K_p f + \pi$, где K_p - интегральный оператор, соответствующий ядру $p(x', x)$). Пусть N - случайный номер последнего состояния. Обозначим также через K_1 интегральный оператор с ядром

$$k_1(x', x) = |k(x', x)|$$

Определим теперь вспомогательные веса $Q_0, \dots, Q_N$ с помощью рекуррентных соотношений:

$$Q_0 = \frac{f(x_0)}{\pi(x_0)}, \quad Q_n = Q_{n-1} \frac{k(x_{n-1}, x_n)}{p(x_{n-1}, x_n)}. \quad (1.90)$$

Рассмотрим случайную величину

$$\xi = \sum_{n=0}^N Q_n h(x_n). \quad (1.91)$$

В работе [90] доказана следующая теорема:

Теорема 1.4 ([90, 107]). Пусть выполнены условия (1.89) и $\|K_1^{n_0}\| < 1$ при некотором натуральном n_0 . Тогда имеет место равенство:

$$E\xi = E \sum_{n=0}^N Q_n h(x_n) = I_h = (\varphi, h) \quad (1.92)$$

Оценка (1.92) известна в теории методов Монте-Карло как основная оценка или оценка по столкновениям. Условия (1.89) называются условиями несмещённости.

Рассмотрим теперь равенство

$$E\xi = E\left[\sum_{i=0}^m Q_i h(x_i)\right] = (\varphi, h) = (f, \varphi^*)$$

Осуществляя в этом выражении формальную подстановку $f(x') = \delta(x' - x)$ и $\pi(x') = \delta(x' - x)$, получим:

$$\varphi^*(x) = h(x) + E\left[\sum_{i=1}^m Q_i h(x_i)\right]$$

С помощью этого выражения можно оценить методом Монте-Карло решения сопряжённого уравнения в заданной точке. Кроме того, рассматривая исходное уравнение (1.86) как сопряженное к уравнению $\varphi^* = K^* \varphi^* + h$, можно оценить оценку решения уравнения (1.86) в заданной точке:

$$\varphi(x) = E\xi^*(x) = f(x) + E \sum_{i=1}^m Q_i^* f(x_i) \quad (1.93)$$

Другая локальная оценка может быть получена, если переписать уравнение (1.86) в виде

$$\varphi(x) = (\varphi, h_x) + f(x)$$

Здесь $h_x(x') = k(x', x)$. Следовательно, используя локальную оценку для функционала, задаваемого $h_x(x')$, можно получить:

$$\varphi(x) = E \sum_{i=0}^m Q_i k(x_i, x) + f(x) \quad (1.94)$$

Оценка (1.94), в отличие от оценки (1.93), может быть использована для вычисления решения интегрального уравнения в нескольких точках.

В работе [90] для дисперсии основной оценки (1.92) получено следующее выражение для неотрицательных $f(x), h(x), k(x', x)$:

$$D\xi = (\chi, h(2\varphi^* - h)) - I_h^2, \quad (1.95)$$

где χ - ряд Неймана для уравнения

$$\chi(x) = \int_X \frac{K^2(t, s)\chi(s)}{p(t, s)} ds + \frac{f^2(x)}{\pi(x)}. \quad (1.96)$$

Обозначим K_p - интегральный оператор с ядром $\frac{K^2(t, s)}{p(t, s)}$. В случае, если данный ряд расходится, то дисперсия (1.95) бесконечна.

Для знакопеременного случая имеет место следующее утверждение [107]:

Утверждение 1.1 Пусть выполнены условия теоремы 1.4, а также соотношения

$$\rho(K_p) < 1, \frac{f^2}{\pi} \in L_1 \quad (1.97)$$

Тогда дисперсия оценки ξ конечна и выражается с помощью (1.95), (1.96).

Одной из базовых модификаций является случай прямого моделирования. Рассмотрим для простоты случай знакоопределённых функций. Предположим, что $f(x) \geq 0, \int_X f(x)dx = 1, k(x', x) \geq 0$ и $\int_X k(x', x)dx \equiv q(x) \leq 1$. Тогда, выбрав цепь Маркова, соответствующую

$$\pi(x) = f(x), p(x', x) = k(x', x),$$

получим:

$$Q_n = 1, n \geq 0, \xi = \sum_{n=0}^N h(x_n)$$

Основным преимуществом метода прямого моделирования является тот факт, что дисперсия данной оценки будет конечна при $\rho(K) < 1$, поскольку $K = K_p$ в этом случае. При этом идея метода прямого моделирования естественным образом переносится на случай оценки одной компоненты решения, а также случай знакопеременного ядра.

Отметим, что моделирование цепи Маркова в случае, когда плотность перехода пропорциональна ядру интегрального уравнения, может являться неочевидной задачей, поскольку для уравнений Гельфанда-Левитана и Крейна ядро является производной данных обратной задачи, известных только численно. В ходе численных расчётов для моделирования элементов таких цепей Маркова использовался метод исключения. Суть метода заключается в использовании для получения выборочных значений случайной величины с плотностью $p(x)$ вспомогательной плотности $q(x)$, такой, что $p(x) < Cq(x)$ для некоторой константы $C \geq 1$, и основан на следующем утверждении:

Утверждение 1.2 ([107]) Пусть точка ξ, η равномерно распределена в области

$$P = \{x \in X, 0 < y < p(x)\}$$

так, что $\xi \in X, \eta \in (0, p(x))$. Тогда случайная величина ξ распределена согласно плотности $p(x)$. Верно и обратное утверждение ([107]) - если величина ξ распределена согласно плотности $q(x)$, а условное распределение при фиксированном значении ξ_0 величины η является равномерным на интервале $(0, q(\xi_0))$, то случайная точка (ξ_0, η) является равномерным в области $Q = \{x \in X, 0 < y < q(x)\}$.

Таким образом, мы можем, моделируя случайную величину с плотностью $q(x)$, получить случайный вектор, равномерно распределённый в «подграфике» функции $q(x)$. Учитывая тот факт, что $q(x)$ является мажорантой для $p(x)$, и отбирая из смоделированных значений только те, что попадают в «подграфик» функции $p(x)$, получим набор точек, равномерно распределённых в этом «подграфике», первая компонента которых позволит получить выборку, соответствующую плотности $p(x)$.

Учитывая вышесказанное, алгоритм метода исключения в общем случае выглядит следующим образом:

1. Моделируем величину $\hat{x}$ согласно плотности $q(x)$.
2. Вычислить α - равномерно распределённое случайное число на интервале $(0, q(\hat{x}))$.
3. Вычислить $\beta = p(\hat{x})$. Если $\alpha \leq \beta$, то $\hat{x}$ - принимается в качестве элемента выборки. Иначе, если $\alpha > \beta$, то $\hat{x}$ - отвергается и необходимо повторить процедуру.

Другой рассмотренный подход к решению уравнений Гельфанда-Левитана-Крейна основан на методе подобных траекторий и опирается на тот факт, что рассматриваемые в данной рабо-

те уравнения (1.20),(1.45) представляют собой однопараметрические семейства интегральных уравнений, где параметром является глубина x . Весовой метод подобных траекторий позволяет строить оценки функционалов на одной марковской цепи одновременно для заданного диапазона параметров задачи [90,91,108].

Метод разработан для решения линейных интегральных уравнений второго рода, зависящих от параметра:

$$\varphi(x; \lambda) = \int_X k(x', x; \lambda) \varphi(x'; \lambda) dx' + f(x; \lambda) \quad (1.98)$$

Или, в операторном виде,

$$\varphi_\lambda = K_\lambda \varphi_\lambda + f_\lambda$$

Рассмотрим марковскую цепь, соответствующую переходной плотности $p(x', x) = r(x', x)(1 - g(x'))$, где $r(x', x)$ - плотность вероятностей перехода, $g(x')$ - вероятность обрыва. Будем предполагать, что выполняются условия «несмещённости»:

$$p(x', x) \neq 0, \text{ если } k(x', x; \lambda) \neq 0 \quad \forall \lambda$$

Тогда можно определить вспомогательные весовые коэффициенты

$$Q_0(\lambda) = 1, \quad Q_n(\lambda) = Q_{n-1}(\lambda) \frac{k(x_{n-1}, x_n; \lambda)}{p(x_{n-1}, x_n)}. \quad (1.99)$$

«Оценка по столкновениям» в этом случае имеет вид:

$$\xi_{x_0}(\lambda) = f(x_0; \lambda) + \sum_{n=1}^N Q_n(\lambda) f(x_n; \lambda) \quad (1.100)$$

Здесь $\varphi(x; \lambda) = E\xi_x(\lambda)$. Конечность дисперсии этой оценки вытекает из сходимости ряда Неймана для уравнения ([90,91])

$$\chi(x; \lambda) = \int_X \frac{k^2(t, s; \lambda) \chi(s; \lambda)}{p(t, s)} ds + f(x; \lambda)(2\varphi(x; \lambda) - f(x; \lambda)).$$

Таким образом, использование метода подобных траекторий позволяет оценить значение требуемых функционалов (в частности, той или иной компоненты решения) для всех значений параметров в рассматриваемой области. Результаты расчётов на основе метода подобных траекторий приведены в главе 4.

Глава 2

Двумерная обратная задача для уравнения колебаний

В этом разделе мы рассматриваем методы численного решения двумерной обратной задачи для уравнения колебаний, основанные на использовании многомерного аналога метода Гельфанда-Левитана-Крейна. Известно, что многие стандартные алгоритмы характеризуются тем, что с увеличением размерности задачи их трудоёмкость и требования к памяти значительно возрастают. В данной главе мы применим стохастические методы решения систем интегральных уравнений Гельфанда-Левитана, которые в меньшей степени подвержены этому недостатку.

2.1 Постановка задачи

Итак, рассмотрим обратную задачу, которая будет заключаться в определении коэффициента $q(x, y)$ следующего гиперболического уравнения:

$$L_q u = u_{tt} - \Delta u + qu \quad (2.1)$$

Здесь $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$. В данной работе будет рассматриваться случай зависимости от двух пространственных переменных $q = q(x, y)$, $u = u(x, y, t)$. Следует отметить, что предложенная методика может быть без принципиальных изменений использована для общего случая, когда все входящие в постановку задачи являются функциями от n пространственных переменных $x_1, \dots, x_n$.

Рассмотрим следующее семейство задач Коши:

$$L_q \hat{v} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (2.2)$$

$$\hat{v}|_{t=0} = 0, \quad \hat{v}_t|_{t=0} = \delta(x)\delta(y - y_0), \quad (2.3)$$

Здесь $\delta(\cdot)$ - дельта-функция Дирака, y_0 - параметр. Предположим, что $\forall y \in \mathbb{R}, \forall y_0 \in \mathbb{R}$ существует след обобщенного решения задачи Коши, задаваемый функцией $g(y, t, y_0)$:

$$\hat{v}|_{x=0} = g(y, t, y_0), \quad y \in \mathbb{R}, \quad y_0 \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (2.4)$$

Также всюду в дальнейшем мы будем считать, что $q(x, y)$ и $\hat{v}(x, y, t)$ четны по переменной x , и, следовательно,

$$\hat{v}_x|_{x=0} = 0, \quad y \in \mathbb{R}, \quad y_0 \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (2.5)$$

Таким образом, обратная заключается в определении функции $q(x, y)$, удовлетворяющей соотношениям (2.2) - (2.5).

Развитие прямых методов решения коэффициентных обратных задач для гиперболических уравнений началось с работ М.И. Белишева (1987), который разработал метод граничного управления. Позднее с помощью метода граничного управления М.И. Белишевым и А.С. Благовещенским [17, 79] был получен многомерный аналог уравнения Гельфанда-Левитана (1992). При этом независимо от этих работ многомерный аналог уравнений Гельфанда-Левитана-Крейна был предложен также в 1988 году С.И. Кабанихиным в работах [15, 80], в которых предложена комбинация подхода Гельфанда-Левитана и проекционного метода (проектировании задачи на некоторое конечномерное подпространство).

Предположим теперь, что обобщенное решение прямой задачи (2.2), (2.3) существует и допускает преобразование Фурье в обобщенном смысле по переменной y_0 . Обозначим

$$\begin{aligned} u(x, y, t, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{v}(x, y, t, y_0) e^{i\omega y_0} dy_0, \\ f(y, t, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g(y, t, y_0) e^{i\omega y_0} dy_0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Используя эти обозначения, и применяя преобразование Фурье, можно перейти от задачи (2.2) - (2.5) к следующей обратной задаче:

$$L_q u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad \omega \in \mathbb{R}; \quad (2.7)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \delta(x) e^{i\omega y}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad \omega \in \mathbb{R}; \quad (2.8)$$

$$u|_{x=0} = f(y, t, \omega), \quad u_x|_{x=0} = 0, \quad y \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad \omega \in \mathbb{R}. \quad (2.9)$$

Кроме того, будем считать, что все рассматриваемые функции являются 2π - периодическими по переменной y . В этом случае $\omega = k \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, и задача (2.7)-(2.9) может быть переписана следующим образом:

$$L_q u^{(k)}(x, y, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad (2.10)$$

$$u^{(k)}|_{t=0} = 0, \quad u_t^{(k)}|_{t=0} = \delta(x) e^{iky}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad (2.11)$$

$$u^{(k)}|_{x=0} = f^{(k)}(y, t), \quad u_x^{(k)}|_{x=0} = 0, \quad y \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.12)$$

2.2 Получение двумерного аналога уравнения Гельфанда-Левитана

Будем рассматривать задачу определения функции $q(x, y)$, удовлетворяющей системе соотношений (2.10)-(2.12), по известным данным обратной задачи - функциям $f_k(y, t)$, $k \in \mathbb{Z}$. Целью является сведение обратной задачи (2.10)-(2.12) к параметрическому семейству линейных интегральных уравнений. При этом общая схема рассуждений остаётся аналогичной одномерному случаю, рассмотренному в главе 1, и заключается в изучении свойств прямой задачи, введении вспомогательной задачи, и затем использовании свойств решения прямой задачи для получения двумерного аналога уравнения Гельфанда-Левитана. Для начала сформулируем теоремы существования и единственности прямой задачи, полученные в [15] для специального класса функций.

2.2.1 Исследование прямой задачи

Пусть $\omega \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$. Будем говорить, что функция $v(x, y, t)$ принадлежит $\Omega(D, \omega, n)$, если выполнены следующие условия:

$$1) \quad v(x, y, t) = \sum_k v_k(x, t) e^{iky}; \quad (2.13)$$

$$2) \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad \forall x \geq 0 \quad v_k(-x, t) = v_k(x, t);$$

$$3) \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad v_k \in C^n(\overline{D});$$

$$4) \quad v(\omega) = \max_k \{ \|v_k\|_{C^n(\overline{D})} e^{\omega k} \} < \infty \quad (2.14)$$

Также введём в рассмотрение следующие множества:

$$D_1 = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < |x|\}$$

$$D_2 = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| < t\}$$

$$\Delta(x, t) = \{(\xi, \tau) : \tau \in (0, t), x - t + \tau < \xi < x + t - \tau\}$$

$$\Delta_1(x, t) = \Delta(x, t) \cap D_2$$

В работе [15] показано, что справедливо следующее утверждение:

Лемма 2.1. Предположим, что $q(x, y) \in C(\mathbb{R}^2)$. Тогда для решения прямой задачи (2.10)-(2.11) имеет место следующее равенство:

$$u^{(k)}(x, y, t) \equiv 0, \quad (x, t) \in D_1, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2.15)$$

Далее, применим формулу Даламбера для задачи (2.10)-(2.11). Получим:

$$u^{(k)}(x, y, t) = \frac{1}{2} e^{iky} \theta(t - |x|) + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} [u_{yy}^{(k)}(\xi, y, \tau) - q(\xi, y) u^{(k)}(\xi, y, \tau)] d\xi d\tau \quad (2.16)$$

Имеет место следующие леммы [76]:

Лемма 2.2. Предположим, что $q \in \Omega\left(\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right], \omega, 0\right)$. Тогда, если выполнено условие $2T \in (0, \omega)$, то решение интегро-дифференциального уравнения (2.16) существует и единственно в классе $\Omega\left(\Delta_1(0, T), \frac{1}{4}(\omega - 2T), 0\right)$.

Лемма 2.3. Предположим, что $q \in \Omega\left(\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right], \omega, 0\right)$. Тогда, если выполнено условие $2T \in (0, \omega)$, то решение уравнения (2.16) обладает следующими свойствами:

$$f^{(k)}(y, t) \in \Omega\left(\left[0, T\right], \frac{1}{4}(\omega - 2T), 0\right) \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} f^{(k)}(y, +0) &= \frac{1}{2} e^{iky}, \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} f^{(k)}(y, t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

2.2.2 Исследование вспомогательной задачи

Введём в рассмотрение следующее семейство задач с параметром $m \in \mathbb{Z}$:

$$L_q w^{(m)} = 0, \quad x \geq 0, \quad y, t \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (2.19)$$

$$w^{(m)}|_{x=0} = \delta(t) e^{imy}, \quad w_x^{(m)}|_{x=0} = 0, \quad y, t \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (2.20)$$

Следует отметить, что задача Коши (2.19)-(2.20) с данными на времениподобной поверхности не является классически корректной в классе функций конечной гладкости. Тем не менее, можно доказать ([76]) однозначную разрешимость этой задачи, в предположении, что $q \in \Omega([0, T], \omega, 0)$. Обозначим теперь

$$\begin{aligned} D'_1 &= \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < |t|\} \\ D'_2 &= \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |t| < x\} \\ \Delta'(x, t) &= \{(\xi, \tau) : \xi \in (0, x), t - x + \xi < \tau < t + x - \xi\} \\ \Delta'_1(x, t) &= \Delta'(x, t) \cap D'_2 \end{aligned}$$

Имеет место следующая (С.И. Кабанихин, [15])

Лемма 2.4. Предположим, что $q(x, y) \in \Omega([0, T], \omega, 0)$. Тогда для решения задачи (2.19)-(2.20) имеет место следующее равенство:

$$w^{(m)}(x, y, t) \equiv 0, \quad (x, t) \in D'_2, \quad y \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (2.21)$$

Далее, применяя формулу Даламбера для решения задачи (2.19)-(2.20), получим:

$$w^{(m)}(x, y, t) = \frac{1}{2} e^{imy} [\delta(t - x) + \delta(t + x)] + \frac{1}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} [w_{yy}^{(m)}(\xi, y, \tau) - q w^{(m)}(\xi, y, \tau)] d\tau d\xi \quad (2.22)$$

Обозначим теперь

$$\tilde{w}^{(m)}(x, y, t) = w^{(m)}(x, y, t) - \frac{1}{2} e^{imy} [\delta(t - x) + \delta(t + x)]. \quad (2.23)$$

Подставляя выражение $w^{(m)}$ через $\tilde{w}^{(m)}$, задаваемое (2.23), в выражение (2.22), получим:

$$\begin{aligned} \tilde{w}^{(m)}(x, y, t) = \frac{1}{4} e^{imy} \theta(x - |t|) \left[x m^2 + \int_0^{\frac{x+t}{2}} q(\xi, y) d\xi + \int_0^{\frac{x-t}{2}} q(\xi, y) d\xi \right] + \\ + \frac{1}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} [\tilde{w}_{yy}^{(m)}(\xi, y, \tau) - q \tilde{w}^{(m)}(\xi, y, \tau)] d\tau d\xi \quad (2.24) \end{aligned}$$

Обозначим

$$\phi(x, y, t) = \int_0^{\frac{x+t}{2}} q(\xi, y) d\xi + \int_0^{\frac{x-t}{2}} q(\xi, y) d\xi. \quad (2.25)$$

Тогда, переходя в (2.23) к коэффициентам Фурье $\tilde{w}_k^{(m)}(x, t)$ функции $\tilde{w}^{(m)}(x, y, t)$, получим:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_k^{(m)}(x, y, t) = \frac{1}{4} \theta(x - |t|) [\delta_{mk} x m^2 + \phi_{k-m}(x, t)] + \\ + \frac{1}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} \left[-k^2 \tilde{w}_k^{(m)}(\xi, \tau) - \sum_j q_j \tilde{w}_{k-j}^{(m)} \right] d\tau d\xi, \quad x \geq 0, t \in \mathbb{R}, m, k \in \mathbb{Z} \quad (2.26) \end{aligned}$$

В работе [76] доказана следующая

Лемма 2.5. Предположим, что $q(x, y) \in \Omega([0, T], \omega, 0)$. Тогда, если выполнено условие $2T \in (0, \omega)$, решение системы (2.26) существует и единственно в $\Omega(\Delta_1(0, T), \frac{1}{4}(\omega - 2T), 0)$. Кроме того, имеет место следующее соотношение:

$$\tilde{w}^{(m)}(x, y, x - 0) = \frac{1}{4} e^{imy} \left[x m^2 + \int_0^x q(\xi, y) d\xi \right] \quad (2.27)$$

2.2.3 Необходимые условия существования решения обратной задачи

Теперь доопределим функции $u^{(k)}(x, y, t)$ - решение прямой задачи (2.10)-(2.11), и функцию $f^{(k)}(y, t)$ при $t < 0$ с помощью нечетного продолжения:

$$\begin{aligned} u^{(k)}(x, y, t) &= u^{(k)}(x, y, -t), \quad t < 0 \\ f^{(k)}(y, t) &= f^{(k)}(y, -t), \quad t < 0 \end{aligned}$$

При этом в силу леммы 2.3 функция $f^{(k)}$ после нечетного продолжения по переменной t представима в следующем виде:

$$f^{(k)}(y, t) = \frac{1}{2} e^{iky} [\theta(t) - \theta(-t)] + \tilde{f}^{(k)}(y, t), \quad y, t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z} \quad (2.28)$$

При этом функция $\tilde{f}^{(k)}(y, t)$ - гладкая и нечетная по переменной t функция.

Предположим теперь, что решение обратной задачи (2.10)-(2.12) существует и принадлежит классу $\Omega([-T, T], \omega, 0)$. Тогда функция $u^{(k)}(x, y, t)$, продолженная нечетным образом для $t < 0$, удовлетворяет следующим соотношениям:

$$L_q u^{(k)} = 0, \quad x > 0, \quad y, t \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2.29)$$

$$u^{(k)}|_{x=0} = f^{(k)}(y, t), \quad u_x^{(k)}|_{x=0} = 0, \quad y, t \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2.30)$$

Решения задач (2.19)-(2.20) и (2.29)-(2.30) связаны следующим соотношением:

$$u^{(k)}(x, y, t) = \int_{\mathbb{R}} \sum_m w^{(m)}(x, y, s) f_m^{(k)}(t - s) ds, \quad x > 0, \quad y, t \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2.31)$$

При этом в силу леммы 2.1 и выражения (2.23) равенство (2.31) может быть переписано следующим образом:

$$0 = \frac{1}{2} [f^{(k)}(y, t - x) + f^{(k)}(y, t + x)] + \int_{-x}^x \sum_m \tilde{w}^{(m)}(x, y, s) f_m^{(k)}(t - s) ds, \quad (2.32)$$

$$x > 0, t \in (-x, x), y \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$$

Дифференцируя равенство (2.32) и учитывая представление (2.28), получим:

$$\tilde{w}^{(k)}(x, y, t) + \int_{-x}^x \sum_m \tilde{w}^{(m)}(x, y, s) f_m^{(k)'}(t - s) ds = -\frac{1}{2} [f^{(k)'}(y, t - x) + f^{(k)'}(y, t + x)], \quad (2.33)$$

$$x > 0, t \in (-x, x), y \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$$

Имеет место следующая теорема [76].

Теорема 2.1. Предположим, что обратная задача (2.10)-(2.12) имеет решение в классе $q(x) \in \Omega([-T, T], \omega, 0)$. Тогда для всех $x \in [0, T]$ система уравнений (2.33) имеет решение $\tilde{w}^{(k)}(x, y, t)$, $k \in \mathbb{Z}$. При этом при всех $x \in [0, T]$ функции $\tilde{w}^{(k)}(x, y, t)$ принадлежат классу $\Omega(\Delta_1(T, 0), \omega, 0)$ и удовлетворяют соотношению (2.27).

2.2.4 Достаточные условия существования решения обратной задачи

Отметим, что соотношение (2.27) позволяет по одной компоненте решения уравнения (2.33), известной при $t = x - 0$, определить значения всех остальных компонент при $t = x - 0$. Действительно, в силу (2.27)

$$\begin{aligned} 4e^{-imy}\tilde{w}^{(m)}(x,y,x-0) &= xm^2 + \int_0^x q(\xi,y)d\xi \\ 4e^{-i(m+1)y}\tilde{w}^{(m+1)}(x,y,x-0) &= x(m+1)^2 + \int_0^x q(\xi,y)d\xi \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\tilde{w}^{(m+1)}(x,y,x-0) = e^{iy}\tilde{w}^{(m)}(x,y,x-0) + x\frac{2m+1}{4}e^{i(m+1)y}, x \in [0,T], y \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z} \quad (2.34)$$

Сформулируем теперь теорему о достаточных условиях разрешимости обратной задачи [76].

Теорема 2.2. Пусть для некоторого значения $T > 0$ и $\forall k \in \mathbb{Z}$ функции $f^{(k)}(y,t)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$f^{(k)}(y,t) \in \Omega([0,T], \omega, 2), \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2.35)$$

$$f^{(k)}(y, +0) = \frac{1}{2}e^{iky}, \quad y \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z} \quad (2.36)$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial t} f^{(k)}(y,t) = 0, \quad y \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z} \quad (2.37)$$

Также предположим, что система уравнений (2.33), где функции $f^{(k)}(y,t)$ доопределены для $t \in [-T, 0]$ нечетным образом, имеет единственное решение в классе $\Omega(\Delta_1(T, 0), \omega, 2)$, и значения компонент решения $\tilde{w}^{(k)}(x,y,x-0)$ связаны друг с другом соотношением (2.34). Кроме того, пусть оператор, задаваемый левой частью уравнения (2.33), является положительно определённым.

Тогда решение обратной задачи (2.10)-(2.12) существует и принадлежит $\Omega([-T/2, T/2], \omega', 0)$ для некоторого $\omega' > 0$.

Рассмотрим краткую схему доказательства, изложенную в [15].

В силу предположений теоремы 2.2 система уравнений (2.33) однозначно разрешима, и её решение определяет дважды непрерывно дифференцируемые функции $\tilde{w}^{(k)}(x,y,t)$ для всех $x \in [0, T/2], k \in \mathbb{Z}$. Положим

$$q(x,y) = 4\frac{d}{dx}\tilde{w}^{(0)}(x,y,x-0), \quad x \in [0, T/2] \quad (2.38)$$

$$q(-x,y) = q(x,y), \quad x \in [0, T/2] \quad (2.39)$$

Кроме того, положим

$$w^{(k)}(x, y, t) = \frac{1}{2} e^{iky} [\delta(t - x) + \delta(t + x)] + \theta(x - |t|) \tilde{w}^k(x, y, t), \quad x > 0, \quad y, t \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2.40)$$

$$\Psi^{(k)}(x, y, t) = L_q w^{(k)}(x, y, t), \quad x \in [0, \frac{T}{2}], \quad y, t \in \mathbb{R} \quad (2.41)$$

Далее, имеет место соотношение:

$$\Psi^{(k)}(x, y, t) = \frac{1}{2} L_q e^{iky} [\delta(t - x) + \delta(t + x)] + \theta(x - |t|) L_q \tilde{w}^k(x, y, t) = \theta(x - |t|) L_q \tilde{w}^k(x, y, t).$$

Таким образом, функции $\Psi^{(k)}(x, y, t)$ являются кусочно-непрерывными при $x \in [0, \frac{T}{2}]$, $k \in \mathbb{Z}$. Далее, функции $w^{(k)}(x, y, t)$ удовлетворяют следующему соотношению при $x \in [0, \frac{T}{2}]$:

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_m w^{(m)}(x, y, s) f_m^{(k)}(t - s) ds = 0, \quad x \in [0, \frac{T}{2}], \quad y, t \in \mathbb{R}, \quad k, m \in \mathbb{Z}. \quad (2.42)$$

Теперь применим к равенству (2.42) оператор L_q . Получим:

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_m \Psi^{(m)}(x, y, s) f_m^{(k)}(t - s) ds = 0, \quad x \in [0, \frac{T}{2}], \quad y, t \in \mathbb{R}, \quad m, k \in \mathbb{Z}. \quad (2.43)$$

Продифференцируем равенство (2.43) по переменной t . Учитывая структуру функций $f_m^{(k)}$, получим:

$$\Psi^{(m)}(x, y, t) + \int_{\mathbb{R}} \sum_m \Psi^{(m)}(x, y, s) f_m^{(k)'}(t - s) ds = 0, \quad x \in [0, \frac{T}{2}], \quad y, t \in \mathbb{R}, \quad m, k \in \mathbb{Z}. \quad (2.44)$$

В силу условий теоремы оператор, задаваемый левой частью равенства (2.44), является положительно определённым. Поэтому

$$\Psi^{(k)}(x, y, t) = 0, \quad x \in [0, \frac{T}{2}], \quad y \in \mathbb{R}, \quad t \in (-x, x)$$

Таким образом, учитывая определение функций $\Psi^{(k)}$, имеем:

$$L_q w^k = 0,$$

Далее, полагая в уравнении (2.33) $x \rightarrow 0$, и учитывая (2.37) можно получить:

$$w^{(k)}(0, y, 0) = 0$$

Следовательно, в силу (2.40), имеем:

$$w^{(k)}|_{x=0} = e^{iky} \delta(t); \quad w_x^{(k)}|_{x=0} = 0, \quad y, t \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, построенная функция $w^{(k)}$ является решением задачи Коши (2.19)-(2.20) при $x \in [0, \frac{T}{2}]$. Следовательно, определяя функцию $u^{(k)}(x, y, t)$ при помощи соотношения

$$u^{(k)}(x, y, t) = \int_{\mathbb{R}} \sum_m w^{(m)}(x, s) f_m^{(k)}(t - s) ds, \quad x > [0, \frac{T}{2}], \quad y, t \in \mathbb{R},$$

можно показать, что продолженная четным образом для значений $x < 0$ функция $u^{(k)}(x, y, t)$ является решением задачи (2.10)-(2.11).

2.3 Проекционный метод решения обратной задачи

Будем искать приближенное решение (2.10)-(2.12) с помощью проекционного метода [109]. Будем считать, что коэффициенты Фурье q_m и $u_m^{(k)}$ равны нулю для всех достаточно больших номеров $|m| > N$. Рассматриваемая задача в этом случае сводится к матричной обратной задаче, для которой справедливы все результаты одномерной задачи при замене матрица соответствующих входящих систему функций.

Перейдём в уравнении (2.10) к коэффициентам Фурье:

$$u^{(k)}(x, y, t) = \sum_m u_m^{(k)}(x, t) e^{imy};$$

$$q(x, y) = \sum_m q_m(x) e^{imy}$$

Получим:

$$\frac{\partial^2 u_m^{(k)}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_m^{(k)}}{\partial x^2} - m^2 u_m^{(k)}(x, t) - \sum_n q_n(x) u_{m-n}^{(k)}(x, t), \quad k, n \in \mathbb{Z} \quad (2.45)$$

Предполагая теперь, что коэффициенты Фурье q_m и $u_m^{(k)}$ равны нулю для всех достаточно больших номеров $|m| > N$, уравнение (2.45) может быть переписано в матричном виде:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - (K + Q(x))U$$

Точное определение матриц U, K, Q будет дано далее.

Теперь назовём N - приближением обратной задач (2.10)-(2.12) следующую систему одномерных обратных задач:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - (K + Q(x))U \quad (2.46)$$

$$U|_{t=0} = 0, U_t|_{t=0} = E\delta(t); \quad (2.47)$$

$$U|_{x=0} = F(t), U_x|_{x=0} = 0. \quad (2.48)$$

Здесь E - единичная матрица, U, K, Q, F - квадратные матрицы размера $2N + 1$, задаваемые следующим образом (здесь $k, m = -N, \dots, N$):

$$\begin{aligned} U_{km} &= u_m^{(k)}(x, t); \quad K_{km} = k^2 \delta_{km}; \\ Q_{km} &= \theta(N - |k - m|) \tilde{q}_{k-m}, \quad F_{km}(t) = U_{km}(0, t) = f_m^{(k)}(t), \end{aligned} \quad (2.49)$$

Обратная задача заключается в определении коэффициентов Q_{km} матрицы $Q(x)$ по дополнительной информации $F_{km}(t)$. Отметим, что решение задачи (2.46)-(2.48) зависит от параметра N , но мы в дальнейшем будем опускать эту зависимость.

Из результатов работы С.И. Кабанихина [109] следует, что если решение обратной задачи (2.10)-(2.12) существует в классе функций $\Omega([-T, T], \omega, 0)$, то существует число N_* такое, что при всех $N > N_*$ существует решение системы (2.46)-(2.48). При этом коэффициенты Фурье $q_m(x)$ решения $q(x, y)$ обратной задачи (2.10)-(2.12) и коэффициенты $\tilde{q}_m$ решения $Q(x)$ обратной задачи (2.46)-(2.48) связаны следующим образом:

$$\max_{j=-N, \dots, N} \|q_j - \tilde{q}_j\|_{C[-T, T]} \leq \beta e^{-N\alpha}. \quad (2.50)$$

Здесь $\alpha, \beta > 0$ - некоторые постоянные. Данное соотношение означает, что семейство обратных задач (2.46)-(2.48) с параметром N является регуляризующим для обратной задачи (2.10)-(2.12).

Для системы (2.46)-(2.48) можно получить аналог уравнения (2.33), используя схему рассуждений, аналогичную одномерному случаю, изложенному в главе 1. Обозначим $A(x) = K + Q(x)$ и продолжим функцию $U(x, t)$ нечетным образом для $t < 0$. Тогда функция U будет удовлетворять следующей системе соотношений:

$$\begin{aligned} U_{tt} &= U_{xx} - A(x)U, \quad x > 0, t \in \mathbb{R} \\ U|_{x=0} &= F(t); \quad U_x|_{x=0} = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Далее, пусть матричная функция $W(x, t)$ является решением следующей задачи:

$$\begin{aligned} W_{tt} &= W_{xx} - A(x)W, \quad x > 0, t \in \mathbb{R}, \\ W|_{x=0} &= E\delta(t); \quad W_x|_{x=0} = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Несложно показать, что структура функции W выглядит следующим образом:

$$W(x, t) = \frac{1}{2}E\delta(x - |t|) + \frac{1}{4}\theta(x - |t|) \cdot \int_0^x A(\xi) d\xi + \widehat{W}(x, t)$$

При этом функция $\widehat{W}$ непрерывна при $x > 0$.

Имеет место соотношение между U и W :

$$U(x, t) = \int_{\mathbb{R}} W(x, s) F(t - s) ds, \quad x > 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Обозначим теперь

$$\widetilde{W}(x, t) = W(x, t) - \frac{1}{2} E \delta(x - |t|).$$

Тогда, можно показать [76], что функция $\widetilde{W}$ удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\widetilde{W}(x, t) + \int_{-x}^x \widetilde{W}(x, s) F'(t - s) ds = -\frac{1}{2} [F'(t - x) + F'(t + x)], \quad x > 0, \quad t \in (-x, x). \quad (2.51)$$

Здесь $F'(t)$ - производная продолженной нечетным образом на $t < 0$ функции $F(t)$. Имеет место следующая теорема [76].

Теорема 2.3. Для однозначной разрешимости обратной задачи (2.46)-(2.48) в классе матриц $Q(x)$, таких, что $Q_{ij} \in C[-T, T]$, $i, j = -N, \dots, N$, необходимо и достаточно, чтобы функции $f_m^{(k)}$, $m, k = -N, \dots, N$, удовлетворяли следующим условиям:

- 1) $f_m^{(k)}(t) \in C^2[0, T]$; $F(+0) = \frac{1}{2} E$, $F'(+0) = 0$;
- 2) Система уравнений (2.51), где $F(-t) = -F(t)$, $t > 0$, имеет единственное решение при всех $x \in [0, \frac{T}{2}]$.

При этом матрица $Q(x)$ восстанавливается по решению уравнения (2.51) следующим образом:

$$Q(x) = -K + 4 \frac{d}{dx} \widetilde{W}(x, x - 0) \quad (2.52)$$

Таким образом, при выполнении условий теоремы 2.3 обратная задача (2.10)-(2.12) допускает линейную регуляризацию, заключающуюся в решении уравнения (2.51) и определении матрицы $Q(x)$ из соотношения (2.52). Следует также отметить, что в силу структуры матрицы $Q(x)$, задаваемую (2.49), для аппроксимации функции $q(x, y)$ достаточно вычислить только один из столбцов матрицы $Q(x)$.

2.4 Решение системы интегральных уравнений методом Монте-Карло

Уравнение (2.51) при каждом фиксированном x является системой линейных интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода. В данном разделе мы рассмотрим алгоритм решения подобных систем с помощью метода Монте-Карло. Векторные алгоритмы статистического моделирования для решения систем интегральных уравнений были разработаны в работах Г.А. Михайлова и его учеников, а также в работах Г.И. Марчука, И.М. Соболя, К.К. Сабельфель-

да [88, 90, 91, 108, 110, 111]. Итак, рассмотрим систему интегральных уравнений второго рода:

$$\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^m \int_X k_{ij}(y, x) \varphi_j(y) dy + h_i(x), \quad i = 1 \dots m, \quad (2.53)$$

или в операторной форме,

$$\Phi = K\Phi + H,$$

где $H = (h_1, \dots, h_m)^T \in L_\infty$, $K \in [L_\infty \rightarrow L_\infty]$, $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)^T$, $\|H\|_{L_\infty} = \sup_{i,x} |h_i(x)|$.

Интегрирование производится по мере Лебега во, вообще говоря, k -мерном евклидовом пространстве X .

Будем предполагать, что спектральный радиус оператора K удовлетворяет условию $\rho(K) < 1$. Данное условие обеспечивает сходимость ряда Неймана для решения уравнения (2.53):

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} K^n H. \quad (2.54)$$

Отметим, что

$$\rho(K) = \liminf_n \|K^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf \|K^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Здесь

$$\|K\| = \sup_{x,i} \sum_{j=1}^m \int_X |k_{ij}(x, y)| dy. \quad (2.55)$$

В связи с этим, для выполнения условия $\rho(K) < 1$ и сходимости ряда (2.54) достаточно выполнения неравенства $\|K^{n_0}\| < 1$ для некоторого $n_0 \geq 1$.

Рассмотрим алгоритм получения оценки значения $\Phi(x)$ решения Φ системы интегральных уравнений (2.53) в точке x . Как и в одномерном случае, рассмотрим цепь Маркова $\{x_n\}$ ($n = 0, \dots, N$), задаваемую плотностью перехода $p(x, y)$, причем будем считать $x_0 = x$, а также рассматривать величину $1 - \int_X p(x, y) dy$ как вероятность обрыва цепи в точке x . Обозначим также N - случайный номер последнего состояния. Согласно [91] такая цепь обрывается с вероятностью 1 и, более того, $E(N) < +\infty$, если выполнено условие $\rho(B_p) < 1$, где B_p - интегральный оператор с ядром $p(x, y)$. В частности, это условие выполняется, если $p(x) \geq \epsilon > 0$.

Стандартная векторная оценка метода Монте-Карло величины $\Phi(x)$ строится с помощью следу-

ющих соотношений:

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= E\xi_x, \\ \xi_x &= H(x) + \sum_{n=1}^N Q_n H(x_n), \\ Q_0 &= I, \quad Q_{n+1} = Q_n \frac{K(x_n, x_{n+1})}{p(x_n, x_{n+1})}\end{aligned}\tag{2.56}$$

Здесь I - единичная матрица, $K(x, y)$ - матрица ядер $\{k_{ij}(x, y)\} (i, j = 1, \dots, m)$. Следует отметить, что равенство $\Phi(x) = E\xi_x$ справедливо при выполнении аналогичных приведённым в главе 1 условий несмещённости, а также условия $\rho(K_1) < 1$ [91]. Здесь K_1 - оператор, получаемый из оператора K заменой ядер их модулями. При этом условия несмещённости могут быть преобразованы к следующему виду:

$$p(x, y) > 0, \text{ если } \sum_{i,j=1}^m |k_{ij}(x, y)| > 0$$

Далее, в [108, 112] приводится уравнение для матрицы вторых моментов:

$$\Psi(x) = \chi(x) + \int_X \frac{K(x, y)\Psi(y)K^T(x, y)}{p(x, y)} dy\tag{2.57}$$

Здесь $\chi = H\Phi^T + \Phi H^T - HH^T$. Уравнение (2.57) рассматривается в пространстве L_∞ матричнозначных функций с нормой

$$\|\Psi\| = \sup_{i,j,x} |\Psi_{i,j}(x)|.$$

Обозначим теперь K_p - матричный интегральный оператор, соответствующий уравнению (2.57), а $K_{p,1}$ - оператор, полученный из K_p заменой ядер их модулями.

В работе Г.А. Михайлова [108] доказаны следующие утверждения.

Теорема 2.4. Пусть $\rho(K_1) < 1$ и $\rho(K_{p,1}) < 1$. Тогда функция $\Psi(x) = E(\xi_x, \xi_x^T)$ является решением уравнения (2.57) и $\Psi \in L_\infty$.

Лемма 2.6. Пусть ядра системы (2.53) интегрируемы в $X \times X$. Тогда имеет место соотношение

$$\|K_p\|_{L_\infty} = \sup_{i,x} \int_X \frac{\left(\sum_{j=1}^m k_{ij}(x, y)\right)^2}{p(x, y)} dy.\tag{2.58}$$

Таким образом, выполнение условия $\|K\| < 1$, где норма оператора K вычисляется согласно (2.55), и условия $\|K_p\| < 1$, где норма оператора K вычисляется согласно (2.58), является достаточным условием существования конечной матрицы вторых моментов стандартной оценки (2.56), аппроксимирующей искомое значение решения $\Phi(x)$.

2.5 Стохастический проекционный метод решения систем линейных алгебраических уравнений

Традиционные алгоритмы методов Монте-Карло решения систем и интегральных уравнений характеризуются минимальными требованиями к компьютерной памяти, поскольку в этом случае нет необходимости хранить всю матрицу системы. К недостаткам подобного подхода стоит отнести низкую скорость сходимости метода, а также ограничение на область применимости, накладываемые требованием сходимости ряда Неймана. В данном разделе мы рассмотрим стохастический проекционный метод решения СЛАУ, который представляет собой рандомизированный вариант метода С. Качмажа. Классический вариант данного итерационного метода впервые был предложен в 1937 году [113]. Данный алгоритм получил широкое распространение в задачах, связанных с томографией [114–116], а также в задачах экономики и оптимального управления [117], оказавшись эффективным при решении систем с переопределённой (и зачастую разреженными) матрицами. В дальнейшем метод также был приспособлен на случай вырожденных и комплексных матриц. В 2009 году в работе Т. Strohmer'а и Р. Вершинина [92] был предложен стохастический вариант алгоритма, для которого была получена экспоненциальная скорость сходимости. При этом данный подход также имеет низкие требования к памяти ЭВМ и низкую сложность каждой итерации и не ограничен сходимостью ряда Неймана.

Итак, рассмотрим задачу нахождения решения системы линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b, \quad (2.59)$$

где A - прямоугольная $m \times n$ матрица полного ранга, $m \geq n$, и $b \in \mathbb{R}^m$. Обозначим a_i - i -ю строку матрицы, а a_i^T - транспонированный к a_i вектор-столбец.

Классическая схема метода Качмажа задаётся следующим образом [117]:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{b_i - (a_i \cdot x_k)}{\|a_i\|_2^2} a_i^T, \quad (2.60)$$

Здесь под $(a_i \cdot x_k)$ понимается стандартное скалярное произведение, а под $\|a_i\|_2$ - Евклидова норма. При этом строки a_i матрицы A перебираются циклически: $i = k \bmod m + 1$. Следует отметить, что в ряде работ происходит деление на микро- и макро-итерации, где одна макро-итерация заключается в последовательном применении (2.60) для всех строк исходной системы $i = 1, \dots, m$ [117].

Следует отметить, что алгоритм Качмажа имеет наглядную геометрическую интерпретацию. Используя обозначения для строк матрицы, система (2.59) может быть переписана следующим образом:

$$(Ax)_i = (x, a_i^T) = a_i \cdot x = b_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.61)$$

Каждое из уравнений (2.61) задаёт в $\mathbb{R}^N$ гиперплоскость. В случае невырожденности системы (2.59) все эти гиперплоскости имеют единственную общую точку пересечения, соответствующую

щую решению x . Учитывая это, итерационный процесс (2.60) заключается в проектировании текущего приближение x_k на гиперплоскость, соответствующую i -му уравнению системы. Таким образом, начиная с некоторого начального приближения x_0 , мы получим последовательность точек, которая сходится к точке пересечения гиперплоскостей - решению системы (2.59) в силу простых геометрических соображений.

Обозначим теперь $\|A\|_2$ - спектральную норму матрицы A , а $\|A\|_F$ - норму Фробениуса. Обозначим также A^{-1} - левую обратную к A матрицу (в предположении, что она существует). Тогда число обусловленности матрицы A задаётся следующим образом:

$$k(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2.$$

Определим также другую версию числа обусловленности, задаваемую Фробениусовой нормой матрицы A :

$$\kappa(A) = \|A\|_F \|A^{-1}\|_F.$$

Имеет место соотношение:

$$1 \leq \frac{\kappa(A)}{\sqrt{n}} \leq k(A). \quad (2.62)$$

Стохастический проекционный метод основан на рандомизации итерационного процесса (2.60) путём выбора следующей строки не в циклическом порядке, а случайным образом. Общая схема метода выглядит следующим образом [93]:

$$x_{k+1} = x_k + \omega_k E \frac{b_{\nu(i)} - (a_{\nu(i)} \cdot x_k)}{\|a_{\nu(i)}\|^2} a_{\nu(i)}^T, \quad (2.63)$$

Здесь $\nu(i) \in (1, 2, \dots, m)$ - случайный номер строки, ω_k - некоторые параметры, E -усреднение по некоторому числу индексов $\nu(i)$. В простейшем случае схема (2.63) преобразуется к следующему виду:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{b_{\nu(i)} - (a_{\nu(i)} \cdot x_k)}{\|a_{\nu(i)}\|^2} a_{\nu(i)}^T. \quad (2.64)$$

Базовый подход к выбору случайного индекса $\nu(i)$ заключается в выборе номера строки с помощью равномерного распределения на множестве $(1, \dots, m)$. В работах Т. Strohmer'а и Р. Вершинина [92, 118] предложен другой подход, основанный на выборе той или иной строки с вероятностью, пропорциональной её норме $\|a_{\nu(i)}\|_2^2$. Ими доказана следующая теорема:

Теорема 2.5 [92]. Пусть x - решение системы (2.59). Выберем некоторое произвольное начальное приближение x_0 и рассмотрим итерационный процесс (2.64), где ν - случайный индекс, выбранный из множества $(1, \dots, m)$ следующим образом:

$$\nu = i \text{ с вероятностью } p_i = \frac{\|a_i\|_2^2}{\sum_{j=1}^m \|a_j\|_2^2}.$$

Тогда последовательность x_k , задаваемая алгоритмом (2.64), сходится к решению системы (2.59), и средняя ошибка может быть оценена следующим образом:

$$E\|x_k - x\|_2^2 \leq (1 - \kappa(A)^{-2})^k \cdot \|x_0 - x\|_2^2. \quad (2.65)$$

При этом имеет место следующая нижняя оценка:

Теорема 2.6 [92]. Существует начальное приближение x_0 , такое, что

$$E\|x_k - x\|_2^2 \geq (1 - 2k\kappa(A)^{-2}) \cdot \|x_0 - x\|_2^2 \quad (2.66)$$

для всех $k \in \mathbb{N}$.

Теорема 2.5 даёт возможность оценить вычислительную сложность алгоритма. Зададим необходимую точность ε и рассмотрим вопрос нахождения решения x_k , такого, что

$$E\|x_k - x\|_2^2 \leq \varepsilon^2 \|x_0 - x\|_2^2.$$

В силу оценки (2.65) среднее число итераций, необходимое для достижения точности ε , может быть оценено следующим образом:

$$Ek_\varepsilon \leq \frac{2 \log \varepsilon}{\log (1 - \kappa(A)^{-2})} \approx 2\kappa(A)^2 \log \frac{1}{\varepsilon}.$$

Далее, учитывая, что нормы строк $\|a_i\|_2^2$ могут быть вычислены до начала итерационного процесса, каждая итерация требует вычисления скалярного произведения, а также умножения вектора на константу и сложения двух векторов. Тем самым вычислительная сложность каждой итерации процесса (2.64) есть $O(n)$. Далее, если матрица A является хорошо обусловленной, то $k(A) = O(1)$, а следовательно, учитывая (2.62), $\kappa(A)^2 = O(n)$. Таким образом, в данных предположениях относительно обусловленности матрицы предложенный алгоритм требует $O(n^2)$ операций для сходимости решения к точному.

Также в ходе численных расчетов использовался блочный вариант стохастического проекционного метода, предложенный в работе К. Сабельфельда [93]. Предположим, что выбрано разбиение матрицы A на s блоков строк. Обозначим соответствующий блок строк $A_i, i = 1, \dots, s$. Тем самым $A = (A_1, \dots, A_s)^T$. Обозначим также b_i - соответствующие разбиению блоки вектора правых частей b .

Стандартный алгоритм Качмажа заключается в проектировании текущего приближения на гиперплоскость, соответствующую выбранному уравнению системы. В блочном варианте мы будем производить проектирование текущего приближения на пересечение гиперплоскостей, задаваемый блоком A_i . В этом случае оператор проектирования определяется следующим образом:

$$P_i = A_i^T (A_i A_i^T)^{-1} A_i$$

Здесь мы предполагаем, что для всех i существует обратная матрица $(A_i A_i^T)^{-1}$. Предположим теперь, что индекс $\nu(i)$ есть случайное число, некоторым образом распределенное на $\{1, \dots, s\}$. Тогда блочный вариант стохастического проекционного метода задается следующим итерационным процессом:

$$x_{k+1} = x_k + A_{\nu(i)}^T (A_{\nu(i)} A_{\nu(i)}^T)^{-1} (b_{\nu(i)} - A_{\nu(i)} x_k). \quad (2.67)$$

Отметим, что способы разбиения матрицы на блоки могут быть различными и зависят, вообще говоря, от структуры задачи. Блоки могут состоять из строк, расположенных последовательно, или из случайных строк. Последние могут быть выбраны согласно равномерному распределению, или пропорционально своим нормам, и т.д. Также следует отметить, что с ростом размера блоков уменьшается (согласно расчётам) число итераций, необходимое для достижения приемлемой точности. С другой стороны, возрастает число операций, затрачиваемое на каждую итерацию, в силу увеличения размерности обращаемой матрицы. Тем самым скорость блочного варианта зависит от эффективности обращения матрицы $(A_i A_i^T)$.

Глава 3

Двумерная обратная задача акустики

В данной главе мы рассмотрим двумерную обратную задачу для уравнения акустики в случае, когда все рассматриваемые функции зависят от двух пространственных переменных. Предлагаемый для решения данной задачи подход аналогичен рассмотренному в главе 2 и основан на сведении задачи к конечной матричной обратной задаче с одной пространственной переменной (N -приближение), и последующем сведении задачи к семейству линейных интегральных уравнений (получению двумерного аналога уравнения М.Г. Крейна). Для решения полученного семейства интегральных уравнений в этой главе будет предложен детерминированный метод, основанный на прямом алгоритме обращения матрицы, имеющей тёплицеву или блочно-тёплицеву структуру. Данный метод, по сравнению с предыдущими, в большей степени использует структуру задачи, в связи с чем можно ожидать, что эффективность такого подхода будет выше.

Тёплицева структура означает, что каждая из диагоналей матрицы, параллельной главной, состоит из одинаковых (для всех диагоналей) элементов. Матрицы такого вида возникают при решении многих задач, связанных с обработкой сигналов и изображений, анализом временных рядов, а также в задачах акустики, оптики, электродинамики и в других приложениях [94]. Явная структура матрицы и большое количество приложений привело к большому количеству разработанных алгоритмов решения тёплицевых линейных систем, превосходящих по эффективности стандартные методы решения плотных систем, таких, как метод Гаусса или Холецкого. В то время как «традиционные» методы, как правило, требуют $O(n^3)$ операций для получения решения, с середины прошлого века разработаны различные т.н. «быстрые» алгоритмы решения систем с тёплицевыми матрицами, имеющие трудоёмкость порядка $O(n^2)$ операций. Большая часть данных методов может быть разделена на две группы - методы типа Левинсона и методы типа Шура [119]. Главное отличие между этими двумя группами заключается в том, что методы типа Левинсона основаны на факторизации матрицы, обратной к рассматриваемой, в то время как методы типа Шура используют факторизацию самой тёплицевой матрицы. [120, 121]. В последние десятилетия были разработаны т.н. «супербыстрые» методы, имеющие трудоёмкость порядка $O(n \log^p(n))$ [122–124], однако вопросы устойчивости таких методов, равно как и их использование в приложениях, пока ещё являются предметом исследований. Детальный обзор численных методов решения тёплицевых систем можно найти в работе Т. Heinig и К. Rost [121].

Кроме того, обзоры существующих подходов, как прямых, так и итерационных, можно найти в [119, 122, 123, 125].

В данной работы мы используем метод, предложенный В.В. Воеводиным и Е.Е. Тыртышниковым в [94]. Данный метод является модификацией подходов N. Levinson'a, J. Durbin'a и W. Trench'a и относится к группе «быстрых» алгоритмов. Суть метода заключается в последовательном обращении главных подматриц рассматриваемой системы, что роднит данный подход с методом окаймления. При этом данная схема очень хорошо сочетается со структурой многомерного аналога уравнения М.Г. Крейна, что, как будет показано далее, позволяет получить решение каждого уравнения из семейства М.Г. Крейна в ходе решения одной линейной системы.

3.1 Постановка задачи. Сведение обратной задачи к семейству интегральных уравнений

3.1.1 Постановка задачи

Предположим, что до момента времени $t = 0$ полупространство $x = (x_1, x_2, x_3)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_3 > 0$ находится в состоянии покоя. Далее, пусть, начиная с $t = 0$, на плоскость $x_3 = 0$ падает волна, форма которой задаётся функцией $H(x_1, x_2, t)$. Обозначим $u(x, t)$ - акустическое давление, $c(x)$ - скорость распространения акустических волн в среде, $\rho(x)$ - плотность среды. Тогда функция $u(x, t)$ является решением следующей задачи:

$$\frac{1}{c^2(x)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - \nabla \ln \rho(x) \nabla u, \quad x \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \quad t > 0; \quad (3.1)$$

$$u|_{t < 0} \equiv 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} = H(x_1, x_2, t), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0. \quad (3.3)$$

Обратная задача для системы (3.1) - (3.3) заключается в определении коэффициентов уравнения (3.1) (или же одного из них, или же их комбинации) по дополнительной информации, заключающейся в известных значениях волнового поля на плоскости $x_3 = 0$:

$$u|_{x_3=0} = \tilde{F}(x_1, x_2, t) \quad (3.4)$$

Обратная задача (3.1)-(3.4) является некорректно поставленной [83], в силу, во-первых, нелинейности задачи, а во-вторых, в силу задания данных (3.3), (3.4) на времениподобной поверхности $x_3 = 0$. Комбинация проекционного метода и многомерного аналога метода Гельфанда-Левитана-Крейна позволяют за счёт переопределённости данных преодолеть указанные особенности постановки [81].

В дальнейшем мы будем рассматривать двумерный случай задачи (3.1)-(3.4), где обозначим "вертикальную" переменную $x_3 = x$, а единственную «горизонтальную» переменную $x_2 = y$. Рас-

смотрим теперь следующую последовательность задач:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2(x,y)} \frac{\partial^2 u^{(k)}}{\partial t^2} &= \Delta_{x,y} u^{(k)}(x,y,t) - \nabla_{x,y} \ln \rho(x,y) \nabla_{x,y} u^{(k)}, \quad x > 0, y \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad t > 0; \\ u^{(k)}|_{t < 0} &\equiv 0, \\ \frac{\partial u^{(k)}}{\partial x}|_{x=0} &= H^{(k)}(y,t), \quad y \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad t > 0 \\ u|_{x=0} &= \tilde{F}^{(k)}(y,t), \quad y \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad t > 0 \end{aligned}$$

Постановки такого вида возникают в геофизике в случае площадных систем наблюдений. В дальнейшем мы, по аналогии с главой 2, будем предполагать, что все входящие функции являются 2π -периодическими по переменной y . Также будем считать, что источники колебаний описываются функцией $e^{iky}\delta(t)$. Данные обратной задачи, соответствующие таким источникам, обозначим $f^{(k)}(y,t)$. Отметим, что указанные данные обратной задачи связаны с данными $\tilde{F}^{(k)}(y,t)$, соответствующими произвольным источникам $H^{(k)}(y,t)$, следующим образом:

$$\tilde{F}^{(k)}(y,t) = \sum_m \int_0^t H^{(k)}(\tau)_m f^{(m)}(y,t-\tau) d\tau. \quad (3.5)$$

При этом мы предполагаем, что функция $H^{(k)}(y,t)$ разлагается в ряд Фурье по переменной y с коэффициентами $H_m^{(k)}$:

$$H^{(k)}(y,t) = \sum_m H_m^{(k)}(t) e^{imy}.$$

Тем самым, если заданы некоторые произвольные функции источников $\tilde{F}^{(k)}(y,t)$ и данные обратной задачи $H^{(k)}(y,t)$, то, рассматривая (3.5) как систему интегральных уравнений Вольтерра, можно определить функции $f^{(k)}(y,t)$.

Далее, будем рассматривать случай $c(x,y) \equiv 1$ и будем рассматривать задачу определения плотности. В итоге система, которая будет рассматриваться в дальнейшем, имеет следующий вид:

$$u_{tt}^{(k)} = \Delta u^{(k)} + \nabla \ln \rho(x,y) \nabla u^{(k)}; \quad (3.6)$$

$$x > 0, \quad y \in (-\pi, \pi), \quad t > 0, k \in \mathbb{Z},$$

$$u^{(k)}|_{t < 0} \equiv 0, \quad (3.7)$$

$$u_x^{(k)}|_{x=0} = \delta(t) e^{iky}. \quad (3.8)$$

$$u^{(k)}(+0, y, t) = f^{(k)}(y, t), \quad y \in (-\pi, \pi), k \in \mathbb{Z}. \quad (3.9)$$

Обратная задача заключается в определении плотности среды ρ по данным обратной задачи $f^{(k)}(y,t)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Отметим, что исследование обратной задачи (4.3.1)-(3.9) может быть проведено на основе ре-

зультатов главы 2. Так, обозначим $p(x, y) = \ln \rho(x, y)$, $r(y) = \exp\{-\frac{1}{2}p(0, y)\}$, и введем функции

$$v^{(k)}(x, y, t) = u^{(k)}(x, y, t) \exp\{-\frac{1}{2}p(x, y)\},$$

$$q(x, y) = \frac{1}{2}\Delta p(x, y) - \frac{1}{4}|\nabla p(x, y)|^2.$$

Можно показать, что функции $v^{(k)}(x, y, t)$ удовлетворяют следующей системе соотношений:

$$v_{tt}^{(k)} = \Delta v^{(k)} + q(x, y)u^{(k)}; \quad (3.10)$$

$$x > 0, \quad y \in (-\pi, \pi), \quad t > 0, k \in \mathbb{Z}$$

$$v^{(k)}|_{t < 0} \equiv 0, \quad (3.11)$$

$$v_x^{(k)}|_{x=0} = \left[\delta(t)e^{iky} - \frac{1}{2}f^{(k)}(y, t)\frac{\partial}{\partial x}p(0, y) \right] r(y). \quad (3.12)$$

$$v^{(k)}(+0, y, t) = r(y)f^{(k)}(y, t), \quad y \in (-\pi, \pi), k \in \mathbb{Z} \quad (3.13)$$

При этом решения обратных задач (4.3.1)-(3.9) и (3.10)-(3.13) связаны следующей теоремой:

Теорема 3.1. [126]. Начально-краевая задача

$$\Delta p(x, y) = \frac{1}{2}|\nabla p(x, y)|^2 - 2q(x, y), \quad x > 0, y \in (-\pi, \pi)$$

$$p(0, y) = \phi(y);$$

$$p_x(0, y) = \psi(y);$$

$$p(x, \pm\pi) = p_0$$

однозначно разрешима (локально) в области $\{|y| \leq \pi, x > 0\}$ в классе функций $p(x, y)$, 2π -периодических и аналитических по переменной y , и дважды непрерывно дифференцируемых по переменной x .

Несмотря на эту связь, более эффективным с точки зрения численных методов представляется исследование непосредственно обратной задачи (4.3.1)-(3.9), для которого, по аналогии с материалом глав 1 и 2, предлагается использование многомерного аналога метода Гельфанда-Левитана-Крейна и проекционного метода.

3.1.2 Двумерный аналог уравнения Крейна

Итак, рассмотрим последовательность соотношений (4.3.1)-(3.9):

$$\begin{aligned} Au^{(k)} &\equiv u_{tt}^{(k)} - \Delta u^{(k)} + \nabla \ln \rho(x, y) \nabla u^{(k)} = 0, \\ x > 0, \quad y &\in (-\pi, \pi), \quad t > 0, k \in \mathbb{Z} \\ u^{(k)}|_{t < 0} &\equiv 0, \\ u_x^{(k)}|_{x=0} &= \delta(t)e^{iky}. \\ u^{(k)}(+0, y, t) &= f^{(k)}(y, t), \quad t > 0, y \in (-\pi, \pi), k \in \mathbb{Z} \\ u^{(k)}|_{y=-\pi} &= u^{(k)}|_{y=\pi} \end{aligned}$$

Обратная задача заключается в определении функции $\rho(x, y)$ по заданному семейству функций $f^{(k)}(y, t)$. При этом мы считаем, что функция $\rho(0, y)$ является известной. Кроме того, мы будем предполагать, что $\rho(x, y) \geq \rho_0 > 0$.

Можно выделить сингулярную составляющую функции $u^{(k)}(x, y, t)$:

$$u^{(k)}(x, y, t) = -S(x, y)\theta(t - x) + \tilde{u}^{(k)}(x, y, t) \quad (3.14)$$

Здесь

$$S(x, y) = e^{iky} \sqrt{\frac{\rho(x, y)}{\rho(0, y)}}. \quad (3.15)$$

Полагая в (3.14) $t = x + 0$ и устремляя $x \rightarrow 0$, можно получить необходимые условия разрешимости обратной задачи [15, 82]:

$$f^{(k)}(y, +0) = -e^{iky}, k \in \mathbb{Z}, y \in (-\pi, \pi) \quad (3.16)$$

При этом можно показать, что $u^{(k)}(x, y, t) \equiv 0$, $x > t$. Продолжим теперь функции $u^{(k)}(x, y, t)$ и $f^{(k)}(y, t)$ нечетным образом на $t < 0$:

$$\begin{aligned} f^{(k)}(y, t) &= -f^{(k)}(y, -t), t < 0, \\ u^{(k)}(x, y, t) &= -u^{(k)}(x, y, -t), t < 0. \end{aligned}$$

Получим:

$$Au^{(k)} = 0, \quad x > 0, y \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}, \quad (3.17)$$

$$u^{(k)}|_{x=0} = f^{(k)}(y, t), u_x^{(k)}|_{x=0} = 0, \quad y \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}. \quad (3.18)$$

Далее, введём последовательность вспомогательных задач:

$$Aw^{(m)} = 0, \quad x > 0, y \in (-\pi, \pi), t \in \mathbb{R}, \quad (3.19)$$

$$w^{(m)}|_{x=0} = e^{imy}\delta(t), \quad w_x^{(m)}|_{x=0} = 0. \quad (3.20)$$

Можно показать, что решение этой задачи имеет следующую структуру:

$$w^{(m)}(x, y, t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho(x, y)}{\rho(0, y)}} e^{imy} [\delta(x + t) + \delta(x - t)] + \tilde{w}^{(m)}(x, y, t) \quad (3.21)$$

Здесь $\tilde{w}^{(m)}(x, y, t)$ - кусочно-гладкая функция.

Далее, как и в случае обратной задачи для уравнения колебаний, имеет место связь между решениями задач (3.17)-(3.18) и (3.19)-(3.20):

$$u^{(k)}(x, y, t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} f_m^{(k)}(t - s) w^{(m)}(x, y, s) ds, \quad x > 0, y \in (-\pi, \pi), t \in \mathbb{R}. \quad (3.22)$$

Здесь, как и ранее, $\{f_m^{(k)}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ - коэффициенты Фурье данных обратной задачи:

$$f^{(k)}(y, t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_m^{(k)}(t) e^{imy}.$$

Далее, применим оператор

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^x \frac{(\cdot)}{\rho(\xi, y)} d\xi$$

к обеим частям равенства (3.22). Обозначая

$$V^{(m)}(x, y, t) = \int_0^x \frac{w^{(m)}(\xi, y, t)}{\rho(\xi, y)} d\xi, \quad (3.23)$$

мы, учитывая нечетное продолжение функции $f^{(k)}(y, t)$ и условие (3.16), получим [83, 127]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^x \frac{u^{(k)}(\xi, y, t)}{\rho(\xi, y)} d\xi &= \frac{\partial}{\partial t} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} V^{(m)}(x, y, s) f_m^{(k)}(t - s) ds = \\ &= 2 \sum_m f_m^{(k)}(+0) V^{(m)}(x, y, t) + \sum_{m \in \mathbb{Z}_{-x}} \int_{-x}^x f_m^{(k)'}(t - s) V^{(m)}(x, y, s) ds = \\ &= -2V^{(k)}(x, y, t) + \sum_{m \in \mathbb{Z}_{-x}} \int_{-x}^x f_m^{(k)'}(t - s) V^{(m)}(x, y, s) ds. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Рассмотрим теперь в области $|t| < x$ следующую функцию:

$$G^{(k)}(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^x \frac{u^{(k)}(\xi, y, t)}{\rho(\xi, y)} d\xi dy \quad (3.25)$$

В силу свойств решения прямой задачи

$$G_x^{(k)}(x, t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{u_t^{(k)}(x, y, t)}{\rho(x, y)} dy = 0, \quad |t| < x;$$

$$\begin{aligned} G_t^{(k)}(x, t) &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^x \frac{u_{tt}^{(k)}(\xi, y, t)}{\rho(\xi, y)} d\xi dy = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^x \left[\left(\frac{u_{\xi}^{(k)}}{\rho} \right)_{\xi} + \left(\frac{u_y^{(k)}}{\rho} \right)_y \right] d\xi dy = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{u^{(k)}}{\rho}(x, y, t) - \frac{u^{(k)}}{\rho}(0, y, t) \right] dy = 0, \quad |t| < x. \end{aligned}$$

Тем самым, функция $G^{(k)}(x, t)$ постоянна в области $|t| < x$. Для того чтобы определить это значение, продолжим решение $u^{(k)}(x, y, t)$ прямой задачи (4.3.1)-(4.3.1), а также функцию $\rho(x, y)$ четным образом на $x < 0$. Продолженные таким образом функции будут удовлетворять следующей системе соотношений:

$$\begin{aligned} Au^{(k)} &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, t > 0, k \in \mathbb{Z} \\ u^{(k)}|_{t=0} &= 0, \quad u_t^{(k)}|_{t=0} = -2e^{iky}\delta(x), \quad y \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Учитывая это, получим:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +0} G^{(k)}(x, t) &= \lim_{t \rightarrow +0} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^x \frac{u_t^{(k)}(\xi, y, t)}{\rho(\xi, y)} d\xi dy = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow +0} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-x}^x \frac{u_t^{(k)}(\xi, y, t)}{\rho(\xi, y)} d\xi dy = - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{iky}}{\rho(0, y)} dy. \quad (3.26) \end{aligned}$$

Введём функцию

$$\Phi^{(m)}(x, t) = \int_{-\pi}^{\pi} V^{(m)}(x, y, t) dy$$

Интегрируя теперь равенство (3.24) по переменной y в пределах $(-\pi, \pi)$, и учитывая (3.25), (3.26), получим:

$$\Phi^{(k)}(x, t) - \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{-x}^x f_m^{(k)'}(t-s) \Phi^{(m)}(x, s) ds = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{iky}}{\rho(0, y)} dy, \quad t \in (-x, x), k \in \mathbb{Z} \quad (3.27)$$

Равенство (3.27), задающее семейство линейных интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода, является многомерным аналогом уравнения М.Г. Крейна [80, 82]. Теперь вычислим, учитывая (3.21), (3.23), скачок функции $V^{(m)}(x, y, t)$ при $t = x$:

$$V^{(m)}(x, y, x-0) = \frac{1}{2} e^{imy} \int_0^x \frac{1}{\rho(\xi, y)} \sqrt{\frac{\rho(\xi, y)}{\rho(0, y)}} \delta(x - \xi) d\xi = e^{imy} \frac{1}{2\sqrt{\rho(x, y)\rho(0, y)}}$$

Отсюда получим:

$$\Phi^{(m)}(x, x-0) = - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{imy}}{2\sqrt{\rho(x, y)\rho(0, y)}} dy$$

Тем самым решение обратной задачи может быть получено следующим образом:

$$\rho(x, y) = \frac{\pi^2}{\rho(0, y)} \left[\sum_{m \in \mathbb{Z}} \Phi^{(m)}(x, x-0) e^{-imy} \right]^{-2} \quad (3.28)$$

Таким образом, для того, чтобы найти решение обратной задачи (4.3.1)-(3.9) в некоторой точке $x_0 > 0$, необходимо решить двумерный аналог уравнения М.Г. Крейна (3.27) при $x = x_0$, а затем восстановить значение $\rho(x_0, y)$ согласно формуле (3.28). Отметим, что данный подход допускает естественное обобщение на случай трёх пространственных переменных (в случае $y \in \mathbb{R}^n$, $n > 1$).

3.1.3 N - приближение обратной задачи. Сведение к СЛАУ

Для численного решения обратной задачи (4.3.1)-(3.9) мы, аналогично подходу, изложенному в главе 2, будем использовать метод регуляризации, основанный на проектировании задачи на N -мерное подпространство, задаваемое базисом $\{e^{iky}\}_{k=0, \pm 1, \dots, \pm N}$ [83]. Тем самым мы, как и ранее, аппроксимируем двумерную обратную задачу конечной системой одномерных задач [82, 127]. Итак, предположим, что решение обратной задачи (4.3.1)-(3.9) может быть представлено в виде суммы ряда Фурье по переменной y :

$$u^{(k)}(x, y, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n^{(k)}(x, t) e^{iny}; \quad (3.29)$$

Также предположим, что имеет место аналогичное представление для функции $\rho(x, y)$:

$$\ln \rho(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(x) e^{iny};$$

В этом случае задача (4.3.1)-(3.9) может быть приведена к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_n^{(k)}}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u_n^{(k)}}{\partial x^2} - n^2 u_n^{(k)}(x, t) - \\ &- \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{\partial a_m}{\partial x}(x) \frac{\partial u_{n-m}^{(k)}}{\partial x}(x, t) + \sum_{m \in \mathbb{Z}} m(m-n) a_m(x) u_{n-m}^{(k)}(x, t) \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$x \in \mathbb{R}, t > 0, k, n \in \mathbb{Z};$$

$$u_n^{(k)}|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u_n^{(k)}}{\partial t}|_{t=0} = \delta_{kn} \delta(x); \quad (3.31)$$

$$u_n^{(k)}|_{x=0} = f_n^{(k)}(t). \quad (3.32)$$

Здесь δ_{kn} - символ Кронеккера:

$$\delta_{kn} = \begin{cases} 1, & k = n; \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

Предположим теперь, что все коэффициенты рядов Фурье с номерами, большими, чем N равны нулю, и рассмотрим следующую задачу

$$\frac{\partial^2 V_N^{(k)}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V_N^{(k)}}{\partial x^2} - K V_N^{(k)} + A(x) V_N^{(k)} - B(x) \frac{\partial V_N^{(k)}}{\partial x}, \quad x > 0, t > 0, \quad (3.33)$$

$$V_N^{(k)}|_{t=0} \equiv 0, \quad \frac{\partial V_N^{(k)}}{\partial x}|_{x=0} = I_N^{(k)} \delta(t). \quad (3.34)$$

$$V_N^{(k)}|_{x=0} = F_N^{(k)}(t). \quad (3.35)$$

Задача (4.3.1)-(3.35) называется N -приближением обратной задачи (4.3.1)-(3.9). Здесь вектора $V_N^{(k)}$ и $F_N^{(k)}$ имеют следующую структуру:

$$V_N^{(k)}(x, t) = \left(v_{-N}^{(k)}(x, t), \dots, v_0^{(k)}(x, t), \dots, v_N^{(k)}(x, t) \right)^T,$$

$$F_N^{(k)}(t) = \left(f_{-N}^{(k)'}(t), \dots, f_0^{(k)'}(t), \dots, f_N^{(k)'}(t) \right)^T.$$

При этом матрицы A , K , B - квадратные матрицы размера $2N + 1$, состоящие из следующих элементов:

$$\begin{aligned} K_{km} &= m^2 \delta_{km}, & k, m &= -\overline{N}, \overline{N}, \\ A_{km}(x) &= m(k-m) a_{k-m}(x), & k, m &= -\overline{N}, \overline{N}, \\ B_{km}(x) &= \frac{\partial a_{k-m}}{\partial x}, & k, m &= -\overline{N}, \overline{N}. \end{aligned}$$

Используя технику, предложенную в [128], можно показать, что

$$V_N^{(k)}(x, t) \rightarrow \left(u_{-N}^{(k)}(x, t), \dots, u_0^{(k)}(x, t), \dots, u_N^{(k)}(x, t) \right),$$

Таким образом, при $N \rightarrow \infty$, N -приближение сходится к решению задачи (4.3.1)-(3.9) в пространстве L_2 . Тем самым, как и в главе 2, задача (4.3.1)-(3.35) может рассматриваться как метод регуляризации, призванный преодолеть некорректность задачи (4.3.1)-(3.9), связанную с тем, что данные Коши задачи (4.3.1)-(3.9) заданы на времениподобной поверхности $x = 0$.

Используя разложение в конечные суммы Фурье, можно получить N -приближение двумерного аналога уравнения М.Г. Крейна (3.27) при фиксированном $N = N_f$:

$$\Phi^{(k)}(x, t) - \frac{1}{2} \sum_{|m| \leq N_f} \int_{-x}^x f_m^{(k)'}(t - s) \Phi^{(m)}(x, s) ds = \widehat{G}^{(k)}, \quad |t| < x, \quad k = \overline{-N_f, N_f}. \quad (3.36)$$

Здесь

$$\widehat{G}^{(k)} = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{iky}}{\rho(0, y)} dy$$

Введём следующую матричную функцию, состоящую из коэффициентов Фурье производной данных обратной задачи $f_m^{(k)'}(t)$:

$$\mathbb{F}(t) = \begin{pmatrix} f_{-N_f}^{(-N_f)'} & f_{-N_f+1}^{(-N_f)'} & \cdots & f_{-N_f+m}^{(-N_f)'} & \cdots & f_{N_f}^{(-N_f)'} \\ f_{-N_f}^{(-N_f+1)'} & f_{-N_f+1}^{(-N_f+1)'} & \cdots & f_{-N_f+m}^{(-N_f+1)'} & \cdots & f_{N_f}^{(-N_f+1)'} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_{-N_f}^{(0)'} & f_{-N_f+1}^{(0)'} & \cdots & f_{-N_f+m}^{(0)'} & \cdots & f_{N_f}^{(0)'} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_{-N_f}^{(N_f)'} & f_{-N_f+1}^{(N_f)'} & \cdots & f_{-N_f+m}^{(N_f)'} & \cdots & f_{N_f}^{(N_f)'} \end{pmatrix} (t).$$

Введём также вектор-функции, соответствующие решению и правой части уравнения (3.36): $\widehat{G}(t) \equiv \widehat{G} = \left(\widehat{G}^{(-N_f)}, \dots, \widehat{G}^{(N_f)} \right)^T$, $\widehat{\Phi}(x, t) = \left(\Phi^{(-N_f)}, \dots, \Phi^{(N_f)} \right)^T$. Тогда уравнение (3.36) может быть переписано в матричном виде:

$$\widehat{\Phi}(x, t) - \frac{1}{2} \int_{-x}^x \mathbb{F}(t - s) \widehat{\Phi}(x, s) ds = \widehat{G}, \quad |t| < x. \quad (3.37)$$

3.2 Алгоритмы обращения и решения линейных систем с блочно-тёплицевыми матрицами

Уравнение (3.37), как и в одномерном случае, при каждом фиксированном x является линейным интегральным уравнением типа Фредгольма с симметричным (в силу четности производной

данных обратной задачи) ядром типа свёртки, с поправкой на матричный вид всех входящих в него функций. Следовательно, в ходе численных расчётов решение двумерного аналога уравнения М.Г. Крейна может быть с помощью дискретизации сведено к решению системы линейных алгебраических уравнений, имеющей блочно-тёплицеву структуру (каждая блочная диагональ матрицы, параллельная главной, состоит из одинаковых блоков). В работе для решения полученной системы был использован метод, изложенный В.В. Воеводиным и Е.Е. Тыртышниковым в [94] и восходящий к методу рекурсии Левинсона-Дурбина [95, 96].

Сначала рассмотрим методы решения СЛАУ со стандартной тёплицевой матрицей. Будем рассматривать матрицу A , имеющую следующую структуру:

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots & a_{-n+1} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \dots & a_{-n+2} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & a_{-n+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_0 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Эффект от работы с матрицами специальной структуры существенно зависит от способа задания матрицы. В случае, когда матрица определяется сравнительно небольшим числом параметров, произведение таких матриц, равно как и обращение, будет зависеть от этих же параметров. Однако ключевым моментом является удобная и эффективная формулировка алгоритмов, учитывающих данную специфику [94]. Так, произвольная тёплицева матрица полностью определяется элементами первой строки и первого столбца. Следовательно, обратная к ней так же определяется этими элементами, однако сложная зависимость обратной матрицы от этих элементов не позволяет использовать эту связь для формулировки эффективных численных методов. Поэтому более распространённым является задание обратной матрицы, связанное с решением двух систем уравнений, в которых матрицей коэффициентов является рассматриваемая матрица A [129]. Правые же части упомянутых систем зависят, вообще говоря, от коэффициентов матрицы. Так, имеет место следующая теорема:

Теорема 3.1 [94]. Вещественная (или комплексная) тёплицева матрица порядка n является невырожденной тогда и только тогда, когда существуют решения следующих систем:

$$Ax = e_1, \quad Av = g$$

Здесь

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ a_1 - a_{-n+1} \\ a_2 - a_{-n+2} \\ \dots \\ a_{n-1} - a_{-1} \end{bmatrix}$$

При этом имеет место представление:

$$\begin{aligned}
 A^{-1} = & \begin{bmatrix} x_0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & x_0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & v_{n-1} & \cdots & v_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & v_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} - \\
 & - \begin{bmatrix} v_0 - 1 & 0 & \cdots & 0 \\ v_1 & v_0 - 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{n-1} & v_{n-2} & \cdots & v_0 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x_{n-1} & \cdots & x_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & x_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.39)
 \end{aligned}$$

Здесь x_i, v_j - компоненты векторов x, v :

$$x = [x_0, \dots, x_{n-1}]^T, \quad v = [v_0, \dots, v_{n-1}]^T.$$

Методика, стоящая за теоремой 3.1, основана на переходе от тёплицевой матрицы к матрице малого ранга, скелетном разложении полученной матрицы, а также на персимметричности (симметрии относительно побочной диагонали) тёплицевой матрицы и обратной к ней. При этом способы перехода к матрице малого ранга могут быть различными. Выбор того или иного способа отражается на коэффициентах правых частей систем, по решениям которых восстанавливается обратная матрица, и на зависимости обратной матрицы от этих решений. Так, нас будет интересовать восстановление обратной матрицы по её первому и последнему столбцу. Однако, в отличие от (3.39) подобные представления не могут быть приведены для произвольной тёплицевой матрицы, что приводит к накладыванию дополнительных условий.

Теорема 3.2 [94]. Пусть A - вещественная или комплексная тёплицева матрица порядка n и существуют вектора x и y - решения систем

$$Ax = e_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Ay = e_n := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

причем $x_0 \neq 0$. Тогда матрица A - невырожденная, и обратная к ней может быть представлена следующим образом:

$$A^{-1} = x_0^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} x_0 & 0 & \dots & 0 \\ x_1 & x_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-1} & x_{n-2} & \dots & x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{n-1} & y_{n-2} & \dots & y_0 \\ 0 & y_{n-1} & \dots & y_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & y_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ y_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n-2} & y_{n-3} & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x_{n-1} & \dots & x_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & x_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (3.40)$$

Аналогичный подход с небольшими изменениями справедлив и для блочно-тёплицевых матриц:

Теорема 3.3 [94]: Пусть $\hat{A}$ - блочно-тёплицева матрица порядка n , состоящая из блоков размера $p \times p$. Предположим, что существуют блочные вектор-столбцы $X = [X_0, X_1, \dots, X_{n-1}]^T$ и $Y = [Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}]^T$, удовлетворяющие соотношениям:

$$\hat{A}X = E_1 := \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{A}Y = E_n := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ I \end{bmatrix},$$

Здесь I - единичная матрица размера p . Пусть также существуют блочные вектор-строки $Z = [Z_0, Z_1, \dots, Z_{n-1}]$ и $W = [W_0, W_1, \dots, W_{n-1}]$, такие, что:

$$Z\hat{A} = E_1^T, \quad W\hat{A} = E_n^T. \quad (3.41)$$

Тогда невырожденность одного из блоков X_0, Y_{n-1} или одного из блоков Z_0, W_{n-1} влечет за собой невырожденность другого блока и матрицы $\hat{A}$, и имеет место представление:

$$\hat{A}^{-1} = \begin{bmatrix} X_0 & 0 & \dots & 0 \\ X_1 & x_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{n-1} & X_{n-2} & \dots & X_0 \end{bmatrix} X_0^{-1} \begin{bmatrix} Z_0 & Z_1 & \dots & Z_{n-1} \\ 0 & Z_0 & \dots & Z_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & Z_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ Y_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{n-2} & Y_{n-3} & \dots & 0 \end{bmatrix} Y_{n-1}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & W_0 & \dots & W_{n-2} \\ 0 & W_0 & \dots & W_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

И в тоже время имеет место альтернативное представление $\hat{A}^{-1}$:

$$\hat{A}^{-1} = \begin{bmatrix} Y_{n-1} & Y_{n-2} & \cdots & Y_0 \\ 0 & Y_{n-1} & \cdots & Y_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & Y_{n-1} \end{bmatrix} Y_{n-1}^{-1} \begin{bmatrix} W_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ W_{n-2} & W_{n-1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ W_0 & W_1 & \cdots & W_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & X_{n-1} & \cdots & X_1 \\ 0 & X_{n-2} & \cdots & X_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} X_0^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ Z_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Z_1 & Z_2 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Теоремы 3.1-3.3 позволяют тем или иным образом выразить обратную к тёплицевой матрицу через решение двух линейных систем, но главным вопросом является определение параметров, определяющих обратную матрицу (например, вычисление первого и последнего столбца обратной матрицы). Рассмотрим численную процедуру обращения, основанную на последовательном обращении всех ведущих подматриц.

Предположим, что в матрице A , заданной (3.38), все главные миноры отличны от нуля. Это требование равносильно невырожденности при всех $k, 0 \leq k \leq n-1$, ведущих подматриц

$$A_k = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & a_{-k} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots & a_{-k+1} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & a_{-k+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_k & a_{k-1} & a_{k-2} & \cdots & a_0 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Отметим, что $A_{n-1} = A$. Рассмотрим рекуррентный алгоритм вычисления первого и последнего столбцов (обозначим их $x^{(k)} = [x_0^{(k)} x_1^{(k)} \cdots x_k^{(k)}]^T$ $y^{(k)} = [y_0^{(k)} y_1^{(k)} \cdots y_k^{(k)}]^T$ соответственно) подматрицы A_k .

Итак, будем считать, что первый и последний столбцы $x^{(k-1)}$ и $y^{(k-1)}$ подматрицы A_{k-1} известны. Основная идея рассматриваемого алгоритма заключается в том, что вектора $x^{(k)}$ и $y^{(k)}$ могут быть представлены как линейная комбинация столбцов, полученных из вычисленных на предыдущем шаге рекуррентного метода векторов $x^{(k-1)}$ и $y^{(k-1)}$. Так, имеем:

$$A_k \begin{bmatrix} x^{(k-1)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & a_{-k} \\ A_{k-1} & a_{-k+1} \\ & \vdots \\ a_k & a_{k-1} & \cdots & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(k-1)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ \epsilon_k^x \end{bmatrix}$$

Здесь $\epsilon_k^x = a_k x_0^{(k-1)} + \dots + a_1 x_{k-1}^{(k-1)}$. Аналогичным образом, вводя $\epsilon_k^y = a_{-1} y_0^{(k-1)} + \dots + a_{-k} y_{k-1}^{(k-1)}$, получим:

$$A_k \begin{bmatrix} 0 \\ y^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_k^y \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Подобрав подходящую линейную комбинацию векторов $[x^{(k-1)} \ 0]^T$ $[0 \ y^{(k-1)}]^T$, можно элиминировать величины $\epsilon_k^x, \epsilon_k^y$ и получить выражения для векторов $x^{(k)}, y^{(k)}$. Тем самым, будем искать x^k, y^k в следующем виде:

$$x^k = \alpha \begin{bmatrix} x^{(k-1)} \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ y^{(k-1)} \end{bmatrix}, y^k = \gamma \begin{bmatrix} x^{(k-1)} \\ 0 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 0 \\ y^{(k-1)} \end{bmatrix}.$$

Коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ определяются из соотношений

$$\begin{bmatrix} 1 & \epsilon_k^y \\ \epsilon_k^x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

При этом условие невырожденности всех ведущих подматриц A_k обеспечивает разрешимость системы (3.45) и представимость векторов $x^{(k)}$ и $y^{(k)}$ в виде искомой линейной комбинации [94]. В. Воеводиным и Е. Тыртышниковым предложена модификация описанного метода, основанная на введении нормировочных множителей. Переход от векторов $x^{(k)}, y^{(k)}$ к некоторым коллинеарным векторам позволяет сократить число умножений, необходимое для перехода с шага $k - 1$ на шаг k , и, тем самым, повысить эффективность метода.

Сформулируем алгоритм [94], в ходе которого на k -м шаге вычисляют столбцы $\tilde{x}^{(k)}$ и $\tilde{y}^{(k)}$, а также величины p_k, q_k , такие, что $\tilde{x}^{(k)} p_k = x^{(k)}, \tilde{y}^{(k)} q_k = y^{(k)}$:

Шаг k = 0: p_0, q_0 - произвольные числа, отличные от нуля, $\tilde{x}_0^0 = \frac{1}{a_0 p_0}, \tilde{y}_0^0 = \frac{1}{a_0 q_0}$.

Шаг k = 1, 2, ..., n - 1:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_k &= a_k \tilde{x}_0^{(k-1)} + a_{k-1} \tilde{x}_1^{(k-1)} + \dots + a_1 \tilde{x}_{k-1}^{(k-1)}, \\ \tilde{G}_k &= a_{-1} \tilde{y}_0^{(k-1)} + a_{-2} \tilde{y}_1^{(k-1)} + \dots + a_{-k} \tilde{y}_{k-1}^{(k-1)}, \\ s_k &= -q_{k-1} \tilde{F}_k, t_k = -p_{k-1} \tilde{G}_k, r_k = \frac{1}{1 - t_k s_k}, \\ p_k &= r_k p_{k-1}, q_k = r_k q_{k-1}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned}
\left[\tilde{x}_0^{(k)}, \tilde{x}_1^{(k)}, \dots, \tilde{x}_k^{(k)} \right]^T &= \left[\tilde{x}_0^{(k-1)}, \tilde{x}_1^{(k-1)}, \dots, \tilde{x}_{k-1}^{(k-1)} 0 \right]^T + \\
&+ \left[0, \tilde{y}_0^{(k-1)}, \tilde{y}_1^{(k-1)}, \dots, \tilde{y}_{k-1}^{(k-1)} \right]^T s_k; \\
\left[\tilde{y}_0^{(k)}, \tilde{y}_1^{(k)}, \dots, \tilde{y}_k^{(k)} \right]^T &= \left[\tilde{x}_0^{(k-1)}, \tilde{x}_1^{(k-1)}, \dots, \tilde{x}_{k-1}^{(k-1)} 0 \right]^T t_k + \\
&+ \left[0, \tilde{y}_0^{(k-1)}, \tilde{y}_1^{(k-1)}, \dots, \tilde{y}_{k-1}^{(k-1)} \right]^T;
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Для реализации алгоритма (3.46)-(3.47) необходимо выполнить $2n^2$ операций умножения (в случае, когда не используются нормировочные множители, число таких действий $3n^2$) и $2n^2$ операций сложения и вычитания.

Отметим, что алгоритм также может быть модифицирован, в случае, если матрица A является симметричной. В этом случае, в силу одновременной симметричности и персимметричности (в силу тёплицевости) матрицы A , а следовательно, всех её ведущих подматриц A_k и обратных к ним, для всех k выполняются равенства:

$$x_l^{(k)} = y_{k-l}^{(k)}, \quad 0 \leq l \leq k \tag{3.48}$$

Учитывая эту связь между первым и последним столбцами матрицы A_k^{-1} , можно, выбирая нормирующие множители $p_0 = q_0$, получить следующие соотношения:

$$\tilde{F}_k = \tilde{G}_k, \quad s_k = t_k, \quad \tilde{x}_l^k = \tilde{y}_{k-l}^k, \quad 0 \leq k \leq n-1, \quad 0 \leq l \leq k. \tag{3.49}$$

Тем самым, в случае симметричности матрицы A можно убрать "лишние" операции в методе (3.46)-(3.47), и получить следующий:

Шаг k = 0: p_0 - произвольное ненулевое число, $\tilde{x}_0^0 = 1/a_0 p_0$.

Шаг k = 1, 2, ..., n-1:

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_k &= a_k \tilde{x}_0^{(k-1)} + a_{k-1} \tilde{x}_1^{(k-1)} + \dots + a_1 \tilde{x}_{k-1}^{(k-1)}, \\
s_k &= -p_{k-1} \tilde{F}_k, \quad p_k = p_{k-1} / (1 - s_k^2), \\
\left[\tilde{x}_0^{(k)}, \tilde{x}_1^{(k)}, \dots, \tilde{x}_k^{(k)} \right]^T &= \left[\tilde{x}_0^{(k-1)}, \tilde{x}_1^{(k-1)}, \dots, \tilde{x}_{k-1}^{(k-1)} 0 \right]^T + \\
&+ \left[0, \tilde{x}_{k-1}^{(k-1)}, \tilde{x}_{k-2}^{(k-1)}, \dots, \tilde{x}_0^{(k-1)} \right]^T s_k.
\end{aligned} \tag{3.50}$$

При этом последний столбец соответствующей обратной матрицы $y^{(k)}$ связан с $x^{(k)}$ соотношениями (3.48), (3.49). Таким образом, число необходимых действий сокращается в два раза. На k -м шаге алгоритм (3.50) требует $2k$ умножений и $2k$ сложений.

Описанная методика применима и для работы с блочно-тёплицевыми матрицами. Рассмотрим матрицу $\hat{A}$, имеющую тёплицеву структуру типа (3.44), но при этом предположим, что её элементы $\hat{a}_{ij} = \hat{a}_{i-j}$ представляют собой блоки размера $p \times p$. Сформулируем схему вычисле-

ния первого и последнего блочного столбцов матрицы, обратной к ведущей подматрице $\hat{A}_k$. Алгоритм может быть получен путём несложной модификации схемы (3.46)-(3.47). При этом причиной основных изменений алгоритма является необходимость учитывать некоммутативность умножения блоков. В итоге схема рекуррентного метода для блочно-тёплицевой матрицы будет выглядеть следующим образом [94]:

Шаг $k = 0$:

P_0, Q_0 - любые невырожденные блоки, $\tilde{X}_0^0 = \hat{a}_0^{-1} P_0^{-1}$, $\tilde{Y}_0^0 = \hat{a}_0^{-1} Q_0^{-1}$.

Шаг $k = 1, 2, \dots, n-1$:

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}_k &= \hat{a}_k \tilde{X}_0^{(k-1)} + \hat{a}_{k-1} \tilde{X}_1^{(k-1)} + \dots + \hat{a}_1 \tilde{X}_{k-1}^{(k-1)}, \\
 \tilde{G}_k &= \hat{a}_{-1} \tilde{Y}_0^{(k-1)} + \hat{a}_{-2} \tilde{Y}_1^{(k-1)} + \dots + \hat{a}_{-k} \tilde{Y}_{k-1}^{(k-1)}, \\
 S_k &= -Q_{k-1} \tilde{F}_k, \quad T_k = -P_{k-1} \tilde{G}_k, \\
 P_k &= (I - T_k S_k)^{-1} P_{k-1}, \quad Q_k = (I - S_k T_k)^{-1} Q_{k-1}, \\
 \left[\tilde{X}_0^{(k)}, \tilde{X}_1^{(k)}, \dots, \tilde{X}_k^{(k)} \right]' &= \left[\tilde{X}_0^{(k-1)}, \tilde{X}_1^{(k-1)}, \dots, \tilde{X}_{k-1}^{(k-1)}, 0 \right]' + \\
 &+ \left[0, \tilde{Y}_0^{(k-1)}, \tilde{Y}_1^{(k-1)}, \dots, \tilde{Y}_{k-1}^{(k-1)} \right]' S_k; \\
 \left[\tilde{Y}_0^{(k)}, \tilde{Y}_1^{(k)}, \dots, \tilde{Y}_k^{(k)} \right]' &= \left[\tilde{X}_0^{(k-1)}, \tilde{X}_1^{(k-1)}, \dots, \tilde{X}_{k-1}^{(k-1)}, 0 \right]' T_k + \\
 &+ \left[0, \tilde{Y}_0^{(k-1)}, \tilde{Y}_1^{(k-1)}, \dots, \tilde{Y}_{k-1}^{(k-1)} \right]';
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

Здесь символ $'$ означает блочное транспонирование (подразумевается перестановка блоков внутри матрицы с сохранением их внутренней структуры). Алгоритм (3.51) вычисляет блочные вектора $\tilde{X}^{(k)} = [\tilde{X}_0^{(k)}, \tilde{X}_1^{(k)}, \dots, \tilde{X}_k^{(k)}]'$, $\tilde{Y}^{(k)} = [\tilde{Y}_0^{(k)}, \tilde{Y}_1^{(k)}, \dots, \tilde{Y}_k^{(k)}]'$ и нормировочные множители P_k, Q_k , такие, что

$$X_l^{(k)} = \tilde{X}_l^{(k)} * P_k, \quad Y_l^{(k)} = \tilde{Y}_l^{(k)} * Q_k,$$

где $X_l^{(k)}, Y_l^{(k)}$ - блоки, составляющие первый ($X^{(k)}$) и последний ($Y^{(k)}$) блочные столбцы матрицы $\hat{A}_k^{-1}$. Отметим, что выполнение алгоритма (3.51) требует $2p^3 n^2$ операций умножения и $2p^3 n^2$ операций сложения и вычитания [94]. Тем самым метод имеет сложность $O(n^2)$. Кроме того, аналогичный алгоритм может быть сформулирован для вычисления первых и последних блочных строк матрицы $\hat{A}_k^{-1}$. Затем обратная матрица $\hat{A}^{-1} = \hat{A}_{n-1}^{-1}$ может быть получена, используя представления (3.42), (3.43).

Далее, как и в неблочном случае, алгоритм (3.51) может быть усовершенствован, если матрица $\hat{A}$ обладает дополнительными свойствами. Так, рассмотрим блочно-тёплицеву матрицу порядка n , элементы которой являются $p \times p$ блоками $\hat{a}_{ij} = \hat{a}_{i-j}$, связанными соотношениями

$$\hat{a}_l = \alpha \hat{a}_{-l} \beta, \tag{3.52}$$

где α, β являются квадратными блоками размера p , удовлетворяющими условию $\alpha^2 = \beta^2 = I$. В частности, блоки α, β могут быть единичными матрицами, что будет соответствовать блочной

симметричности $\hat{A}$. Тогда первый и последний столбец матрицы $\hat{A}^{-1}$ связаны соотношением [94]

$$X_i = \beta Y_{n-1-i} \alpha, \quad 0 \leq i \leq n-1 \quad (3.53)$$

Аналогичное соотношение справедливо для первой и последней строки матрицы $\hat{A}^{-1}$, а также всех её ведущих подматриц $\hat{A}_k^{-1}$. Учитывая это, можно сократить объём вычислений в методе (3.51) в два раза, получив следующий алгоритм:

Шаг k = 0:

Q_0 - любой невырожденный блок, $\tilde{Y}_0^0 = \hat{a}_0^{-1} Q_0^{-1}$.

Шаг k = 1, 2, ..., n - 1:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_k &= \hat{a}_{-1} \tilde{Y}_0^{(k-1)} + \hat{a}_{-2} \tilde{Y}_1^{(k-1)} + \dots + \hat{a}_{-k} \tilde{Y}_{k-1}^{(k-1)}, \\ R_k &= -Q_{k-1} \alpha \tilde{G}_k, \quad Q_k = (I - R_k^2)^{-1} Q_{k-1}, \\ \left[\tilde{Y}_0^{(k)}, \tilde{Y}_1^{(k)}, \dots, \tilde{Y}_k^{(k)} \right]' &= \left[\beta \tilde{Y}_{k-1}^{(k-1)}, \beta \tilde{Y}_{k-2}^{(k-1)}, \dots, \beta \tilde{Y}_0^{(k-1)}, 0 \right]' R_k + \\ &+ \left[0, \tilde{Y}_0^{(k-1)}, \tilde{Y}_1^{(k-1)}, \dots, \tilde{Y}_{k-1}^{(k-1)} \right]'. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Алгоритм (3.54) требует $p^3 n^2$ операций умножения и $p^3 n^2$ операций сложения и вычитания, при этом блочный столбец $X^{(k)}$ вычисляется согласно соотношению (3.53). Аналогичные соотношения выписываются для отыскания первой и последней блочных строк матрицы $\hat{A}^{-1}$.

Отметим, что в рамках данной работы целью использования методов, основанных на работе с тёплицевыми и блочно-тёплицевыми матрицами является решения двумерного уравнения М.Г. Крейна (3.27). Учитывая это, схема решения уравнения М.Г. Крейна с учётом предложенных алгоритмов может быть основана на вычислении обратной матрицы, соответствующей левой части уравнения, и последующему её умножению на вектор правых частей. Однако такая схема представляется не самой эффективной, поскольку она предполагает обращение матрицы для решения всего одной линейной системы (тем не менее, использование явно вычисленной обратной матрицы может быть оправданным в случае решения задачи со многими правыми частями). Проведём модификацию изложенных методов, основанную на последовательном решении усечённых систем (метод окаймления) и направленную на нахождение решения системы с заданной правой частью.

Рассмотрим задачу $Az = b$, где матрица A имеет тёплицеву структуру (3.44):

$$A \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \dots \\ z_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Будем рассматривать задачу последовательного вычисления векторов $z^{(k)} = \left[z_0^{(k)} \dots z_k^{(k)} \right]^T$ - решений системы $A_k z^{(k)} = b^{(k)}$, где $b^{(k)} = [b_0 b_1, \dots, b_k]^T$ - усечённый вектор правой части.

Имеет место следующее соотношение:

$$A^k \begin{bmatrix} z^{(k-1)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & a_{-k} \\ & A_{k-1} & a_{-k+1} \\ & & \vdots \\ a_k & a_{k-1} & \cdots & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^{(k-1)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_{k-1} \\ \epsilon_k^z \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

Следовательно, рассмотрев линейную комбинацию векторов $[z^{(k-1)0}]^T$ и $y^{(k)}$, можно элиминировать ошибку ϵ_k^z и добиться того, чтобы последний элемент в правой части (3.56) стал равным $b_{(k)}$. Тем самым, мы получим $z^{(k)}$. В итоге можно дополнить алгоритм (3.46), (3.47) следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \epsilon_k &= b_k - a_k z_0^{(k-1)} - a_{k-1} z_1^{(k-1)} - \cdots - a_1 z_{k-1}^{(k-1)}; \\ \omega_k &= q_k \epsilon_k; \\ \begin{bmatrix} z_0^{(k)} \\ z_1^{(k)} \\ \dots \\ z_k^{(k)} \end{bmatrix}^T &= \begin{bmatrix} z_0^{(k-1)} \\ z_1^{(k-1)} \\ \dots \\ z_{k-1}^{(k-1)} \\ 0 \end{bmatrix}^T + \\ &+ \begin{bmatrix} \tilde{y}_0^{(k)} \\ \tilde{y}_1^{(k)} \\ \dots \\ \tilde{y}_k^{(k)} \end{bmatrix}^T \omega_k; \end{aligned} \quad (3.57)$$

Здесь мы предполагаем, что последний столбец $y^{(k)}$ матрицы A_k^{-1} вычислен с помощью формул (3.46)-(3.47), а вектор $z^{(k-1)}$ известен с предыдущего шага рекуррентного метода. При $k = 0$ решение усечённой системы размера 1 находится по формуле $z_0^{(0)} = b_0/a_0$. Отметим, что как и ранее, мы предполагаем, что все главные миноры матрицы A отличны от нуля. При этом суммарные вычислительные затраты алгоритма (3.46), (3.47), (3.57) составляют $3n^2$ операций умножения и $3n^2$ операций сложения-вычитания.

В случае симметричной матрицы вычисление столбцов матрицы A_k^{-1} производится согласно соотношениям (3.50). Объединяя их с формулами для вычисления решения усечённой системы, получим:

k = 0: p_0 - произвольное ненулевое число, $\tilde{x}_0^0 = 1/a_0 p_0$, $z_0^{(0)} = b_0/a_0$.

k = 1, 2, ..., n - 1:

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_k &= a_k \tilde{x}_0^{(k-1)} + a_{k-1} \tilde{x}_1^{(k-1)} + \dots + a_1 \tilde{x}_{k-1}^{(k-1)}, \\
s_k &= -p_{k-1} \tilde{F}_k, \quad p_k = p_{k-1} / (1 - s_k^2), \\
\begin{bmatrix} \tilde{x}_0^{(k)} & \tilde{x}_1^{(k)} & \dots & \tilde{x}_k^{(k)} \end{bmatrix}^T &= \begin{bmatrix} \tilde{x}_0^{(k-1)} & \tilde{x}_1^{(k-1)} & \dots & \tilde{x}_{k-1}^{(k-1)} & 0 \end{bmatrix}^T + \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & \tilde{x}_{k-1}^{(k-1)} & \tilde{x}_{k-2}^{(k-1)} & \dots & \tilde{x}_0^{(k-1)} \end{bmatrix}^T s_k. \\
\epsilon_k &= b_k - a_k z_0^{(k-1)} - a_{k-1} z_1^{(k-1)} - \dots - a_1 z_{k-1}^{(k-1)}; \\
\omega_k &= \epsilon_k p_k; \\
\begin{bmatrix} z_0^{(k)} & z_1^{(k)} & \dots & z_k^{(k)} \end{bmatrix}^T &= \begin{bmatrix} z_0^{(k-1)} & z_1^{(k-1)} & \dots & z_{k-1}^{(k-1)} & 0 \end{bmatrix}^T + \\
&+ \begin{bmatrix} \tilde{x}_k^{(k)} & \tilde{x}_{k-1}^{(k)} & \dots & \tilde{x}_0^{(k)} \end{bmatrix}^T \omega_k;
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Алгоритм (3.58), построенный с учётом симметричности матрицы A , позволяет сократить число необходимых действий до $2n^2$ операций умножения и $2n^2$ операций сложения-вычитания.

Аналогичный подход может быть применён к решению системы с блочно-тёплицевой матрицей $\hat{A}$. Рассмотрим задачу

$$\hat{A}Z \rightleftharpoons \hat{A} \begin{bmatrix} Z_0 \\ Z_1 \\ \dots \\ Z_{n-1} \end{bmatrix} = B \rightleftharpoons \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \dots \\ B_{n-1} \end{bmatrix}$$

Здесь матрица $\hat{A}$ и вектора Z, B состоят из блоков размера $p \times p$. Приведем блочный вариант метода усечённых систем:

$$\begin{aligned}
\mathbf{k} &= 0 : \\
Z_0^{(0)} &= \hat{a}_0^{-1} B_0, \\
\mathbf{k} &= 1, \dots, \mathbf{n} - 1 : \\
\epsilon_k &= B_k - \hat{a}_k Z_0^{(k-1)} - \hat{a}_{k-1} Z_1^{(k-1)} - \dots - \hat{a}_1 Z_{k-1}^{(k-1)}; \\
\omega_k &= Q_k \epsilon_k; \\
\begin{bmatrix} Z_0^{(k)} & Z_1^{(k)} & \dots & Z_k^{(k)} \end{bmatrix}' &= \begin{bmatrix} Z_0^{(k-1)} & Z_1^{(k-1)} & \dots & Z_{k-1}^{(k-1)} & 0 \end{bmatrix}' + \\
&+ \begin{bmatrix} \tilde{Y}_0^{(k)} & \tilde{Y}_1^{(k)} & \dots & \tilde{Y}_k^{(k)} \end{bmatrix}' \omega_k;
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Алгоритм (3.59) на k -м шаге вычисляет решение системы $A_k Z^{(k)} = B^{(k)}$, где A_k - ведущая блочная подматрица порядка k , а $Z^{(k)} = [Z_0^{(k)}, \dots, Z_k^{(k)}]$, $B^{(k)} = [B_0, \dots, B_k]$ - блочные вектора соответствующего размера. ϵ_k, ω_k - также описывают матрицы размера $p \times p$. Кроме того, для работы алгоритма (3.59) необходимо вычислить блочные вектора $\tilde{Y}^{(k)}$ и весовые множители Q_k , задающие последний блочный столбец матрицы $\hat{A}_k^{-1}$. Тем самым алгоритм (3.59) является дополнением к алгоритму (3.51), или, в случае, когда блоки матрицы $\hat{A}$ удовлетворяют (3.52), к

соотношениям (3.53), (3.54). С точки зрения вычислительной сложности соотношения (3.59) добавляют ещё $p^2 n^2$ операций умножения и столько же операций сложения-вычитания к основным затратам алгоритма ($2p^3 n^2$ операций обоих видов в случае использования метода (3.51) или $p^3 n^2$ в случае использования алгоритма (3.54)).

Глава 4

Численные эксперименты

Глава посвящена описанию схем численного решения обратных задач акустики и определения потенциала волнового уравнения на основе комбинации метода И.М. Гельфанда - Б.М. Левитана - М.Г. Крейна и рассмотренных в главах 1-3 методов решения получаемых интегральных уравнений (методов Монте-Карло, стохастического проекционного метода, алгоритма быстрого обращения тёплицевой матрицы).

4.1 Численное решение одномерной обратной задачи акустики

Рассмотрим одномерную обратную задачу для уравнения акустики:

$$u_{tt} = u_{xx} - \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} u_x, x > 0, t > 0 \quad (4.1)$$

$$u|_{t < 0} \equiv 0, x > 0$$

$$u_x|_{x=0} = \delta(t), t > 0.$$

$$u|_{x=0} = f(t), t > 0 \quad (4.2)$$

Как было показано в главе 1, данная задача сводится к решению уравнения М.Г. Крейна (1.45):

$$-2f(+0)V(x,t) - \int_{-x}^x V(x,s)f'(t-s)ds = 1, t \in (-x,x)$$

При этом решение обратной задачи $\sigma(x)$ связано с решением уравнения М.Г. Крейна $V(x,x)$ соотношением (1.47):

$$\sigma(x) = \frac{V(0,0)}{2V^2(x,x)}$$

В уравнении (1.45) $f'(t)$ - производная данных обратной задачи, при этом $f'(-t) = f'(t)$ для $t < 0$.

Изучение эффективности предложенных алгоритмов производилось на основе решения модель-

ных задач, и сравнения полученного решения с точным. Для этого мы используем т.н. "синтетические" данные обратной задачи, полученные путём решения соответствующей прямой задачи для уравнения акустики при заданном значении коэффициента $\sigma(x)$.

4.1.1 Схема решения прямой задачи

Итак, выберем модельное решение обратной задачи $\sigma(x)$ и рассмотрим схему решения прямой задачи - определения функции $u(x, t)$ из соотношений

$$u_{tt} = u_{xx} - \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} u_x, x \in (0, T), t \in (0, 2T); \quad (4.3)$$

$$u|_{t=0} \equiv 0, u_x|_{x=0} = \delta(t). \quad (4.4)$$

Для решения прямой задачи воспользуемся чётным продолжением всех входящих функций по переменной x . Пусть $u(-x, t) = u(x, t)$, $\sigma(x) = \sigma(-x)$. Тогда функции u, σ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$u_{tt} = u_{xx} - \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} u_x, x \in (-T, T), t \in (0, 2T);$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = -2\delta(x).$$

В главе 1 была выделена сингулярная составляющая функции $u(x, t)$:

$$u(x, t) = s(x)\theta(t - x) + \tilde{u}(x, t),$$

где

$$s(x) = -\sqrt{\frac{\sigma(x)}{\sigma(0)}} \quad (4.5)$$

Отсюда, используя методику, рассмотренную в главе 1, можно показать, что значения функции $u(x, t)$ на характеристике имеют вид:

$$u(x, |x|) = s(x) = -\sqrt{\frac{\sigma(x)}{\sigma(0)}}.$$

Тем самым мы можем свести прямую задачу (4.3)-(4.4) к т.н. задаче Гурса:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} u_x, \quad x \in (-T, T), |x| < t < 2T - |x|; \quad (4.6)$$

$$u|_{t=|x|} = s(x). \quad (4.7)$$

Полученную задачу мы решаем конечно-разностным методом. Обозначим $u_i^k = u(ih, kh)$, $s_i = s(ih)$, $\sigma_i = \sigma(ih)$, где $h = \frac{T}{N}$ - шаг сетки, N - число разбиений. Тогда решение задачи (4.6)-(4.7)

может быть получено с помощью следующей схемы:

$$u_i^{k+1} = u_{i-1}^k \left(1 + 2 \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_{i-1}}{\sigma_{i+1} + \sigma_{i-1}}\right) + u_{i-1}^k \left(1 - 2 \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_{i-1}}{\sigma_{i+1} + \sigma_{i-1}}\right) - u_i^{k-1}, \quad k > |i|;$$

$$u_i^i = u_{-i}^i = s_i$$

Данная схема является устойчивой разностной схемой порядка сходимости $O(h^2)$. Используя данную схему, можно вычислить дискретное приближение данных обратной задачи

$$f_k = f(kh) = u(0, kh) = u_0^k.$$

Затем мы вычисляем разностный аналог $f'(t)$: $f'(kh) = \frac{1}{2h} (f((k+1)h) - f((k-1)h))$.

4.1.2 Решение методом Монте-Карло

Рассмотрим теперь алгоритм решения уравнения (1.45)

$$-2f(+0)V(x, t) - \int_{-x}^x V(x, s)f'(t-s)ds = 1, \quad t \in (-x, x)$$

на основе весовых алгоритмов Монте-Карло. При этом предполагается независимое решение уравнений из семейства (1.45) при каждом значении параметра x . Итак, зафиксируем x и рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(t) = \int_{-x}^x k(t, s)\varphi(s)ds + h(t), \quad t \in (-x, x).$$

Здесь

$$X = [-L, L], \quad k(t, s) = \frac{1}{-2f(+0)}f'(t-s), \quad \varphi(t) = V(t, x), \quad h(t) = \frac{1}{-2f(+0)}. \quad (4.8)$$

В этом случае (опуская стандартные условия несмещённости и параметры цепи Маркова $\{t_n\}$, изложенные в разделе 1.4) оценка по столкновениям для вычисления $\varphi(t_x) = V(t_x, x)$ в точке $t_x = x$ имеет следующий вид:

$$\xi_{t_x} = h(t_x) + \sum_{i=1}^m Q_i h(t_i)$$

Здесь

$$Q_0 = 1, \quad Q_i = Q_{i-1} \cdot \frac{k(t_m, t_{m-1})}{p(t_m, t_{m-1})} = Q_{i-1}(x) \cdot \frac{k(t_m, t_{m-1})}{r(t_m, t_{m-1})(1 - p(t_{m-1}))}$$

При этом предполагается, что $t_0 = x$.

Отметим, что необходимым условием для использования стандартных алгоритмов Монте-Карло является представление решения в виде ряда Неймана, сходимость которого определяется спектральным радиусом оператора K_1 , соответствующего модулю ядра исходного уравнения. Вы-

числим норму оператора K_1 из уравнения (1.45) при $x = Mh$ согласно определения:

$$\|K_1\| = \|K_1(x)\| = \frac{1}{-2f(+0)} \sup_t \int_{-x}^x |f'(t-s)| ds \approx \frac{1}{-2f(+0)} \max_{i=-M, \dots, M} \sum_{j=-M}^{M-1} h f'[i-j] \quad (4.9)$$

Выполнение условия $\|K_1\| < 1$ позволяет утверждать, что среднее значение оценки по столкновениям равно искомой компоненте решения. При этом конечность дисперсии может быть гарантирована выполнением условия $\|K_p\| < 1$, где K_p - интегральный оператор с ядром $\frac{k^2(t,s)}{p(t,s)}$. Норма этого оператора может быть вычислена аналогично формуле (4.9).

Рассмотрим метод "прямого моделирования". Определим функцию

$$q(t') = \int_{-x}^x |k(t',s)| ds = \frac{1}{-2f(+0)} \int_{-x}^x |f'(t' - s)| ds$$

В силу сходимости ряда Неймана для уравнения (1.45)

$$0 < q(t') < 1 \quad \forall t' \in (-x, x)$$

Ядро уравнения Крейна представимо в виде

$$|k(t',s)| = q(t')r(t',s), \quad (4.10)$$

где

$$\int_{-x}^x r(t',s) ds = 1$$

В этом случае

$$r(t',t) = \frac{|k(t' - t)|}{\int_{-x}^x |k(t' - t)| dt}$$

Введём цепь Маркова $\{t_n\}$, начинающуюся в точке $t_0 = x$. Введём плотность вероятности перехода $r(t',t)$, и вероятность обрыва $p(t') = 1 - q(t')$. В этом случае весовые коэффициенты Q_i имеют вид

$$\begin{aligned} Q_0 = 1, Q_i &= Q_{i-1} \cdot \frac{k(t_m, t_{m-1})}{r(t_m, t_{m-1})(1 - p(t_{m-1}))} = Q_{i-1} \cdot \frac{k(t_m, t_{m-1})}{q(t_m)r(t_m, t_{m-1})} = \\ &= Q_{i-1} \cdot \frac{k(t_m, t_{m-1})}{|k(t_m, t_{m-1})|} = Q_{i-1} \cdot \operatorname{sgn}(|k(t_m, t_{m-1})|) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Как уже было упомянуто, конечность дисперсии оценки обуславливается сходимостью ряда Неймана для уравнения с ядром K_p . Для случая метода прямого моделирования оно имеет вид:

$$K_p(t,s) = \frac{k^2(t,s)}{p(t,s)} = \frac{k^2(t,s)}{|k(t,s)|} = |k(t,s)|$$

Следовательно, конечность дисперсии весовой оценки метода прямого моделирования определена сходимостью ряда Неймана для исходного уравнения (1.45).

Для моделирования цепи Маркова, соответствующей плотности вероятности перехода $r(t', t)$ в работе использовался метод исключения, уже описанный в 1.4. При этом в качестве мажорирующей плотности использовалась константа, соответствующая максимальному значению ядра K_{max} . Алгоритм метода исключения для перехода из точки t' , тем самым, выглядит следующим образом:

1. Вычисление t - равномерно распределённого случайного числа на интервале $(-x, x)$.
2. Вычисление α - равномерно распределённого случайного числа на интервале $(0, K_{max})$.
3. Вычисление $\beta = |f'(t' - t)|$. Если $\alpha \leq \beta$, то t - принимается в качестве нового элемента цепи Маркова. Иначе, если $\alpha > \beta$, то t - отвергается и необходимо повторить процедуру.

Другим предложенным подходом является модификация метода подобных траекторий для решения семейства интегральных уравнений (1.45). Перепишем задачу в следующем виде:

$$\varphi(t; x) = \int_X k(t, s; x) \varphi(s; x) ds + h(t; x), x \in \Lambda = (0, L].$$

Здесь

$$X = [-L, L], k(t, s; x) = \frac{1}{-2f(+0)} f'(t - s) * \chi_{[-x, x]}(s), \quad (4.12)$$

$$\varphi(t; x) = V(t, x), h(t; x) = \frac{1}{-2f(+0)}, \text{ где}$$

$\chi_{[-x, x]}(s)$ - характеристическая функция:

$$\chi_{[-x, x]}(s) = \begin{cases} 1, & s \in (-x, x); \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Как уже было изложено, идея метода подобных траекторий заключается в реализации одной цепи Маркова для вычисления выборочных значений оценки при всех значениях параметра. Введём цепь Маркова $\{t_n\}$ с переходной плотностью

$$p(t', t) = r(t', t)(1 - g(t'))$$

Здесь $r(t', t)$ - плотность вероятностей перехода, $g(t')$ - вероятность обрыва цепи при переходе $t' \rightarrow t$. Предположим, что выполнены условия несмещённости

$$p(t', t) \neq 0, \text{ если } k(t', t; x) \neq 0 \quad \forall x \in \Lambda$$

Тогда можно определить оценку по столкновениям:

$$\xi_{t_0}(x) = h(t_0; x) + \sum_{i=1}^m Q_i(x) h(t_i; x)$$

Здесь

$$Q_0(x) = 1, Q_i(x) = Q_{i-1}(x) \cdot \frac{k(t_m, t_{m-1}; x)}{p(t_m, t_{m-1})} = Q_{i-1}(x) \cdot \frac{k(t_m, t_{m-1}; x)}{r(t_m, t_{m-1})(1 - p(t_{m-1}))}$$

При этом

$$E\xi_{t_0}(x) = \varphi(t_0; x)$$

Особенностью, затрудняющей использование метода подобных траекторий для решения уравнения М.Г. Крейна является тот факт, что область интегрирования в каждом уравнении из семейства уравнений М.Г. Крейна меняется в зависимости от глубины. Выделение этой особенности в характеристическую функцию, как было проделано выше, не позволяет сформулировать требуемый алгоритм. Для этого мы используем следующую модификацию алгоритма подобных траекторий.

Рассмотрим на отрезке $(-x, x)$ цепь Маркова $\{t_{n;x}\}$, такую, что $t_{0;x} = x$, плотность вероятности перехода соответствует равномерному распределению на рассматриваемом интервале (т.е., $r(t', t; x) = \frac{1}{2x}$), а вероятность обрыва является некоторой постоянной $p(t'; x) = P_0$.

Рассмотрим теперь другое значение параметра $x_1 = \lambda x$. Очевидно, что набор точек $\{\lambda t_{n;x}\}$ образует цепь Маркова $\{t_{n;x_1}\}$, заданную на интервале $(-x_1, x_1)$, соответствующую начальной точке $t_{0;x_1} = \lambda x = x_1$, плотности вероятности перехода $r(t', t; x_1) = \frac{1}{2x_1}$, и вероятности обрыва цепи $p(t'; x_1) = P_0$. Переходные плотности, следовательно, связаны следующим соотношением:

$$p(t', t; x_1) = \frac{1}{\lambda} p(t', t; x)$$

Таким образом, простой характер построенной цепи Маркова позволяет естественным способом масштабировать её на требуемую область интегрирования, и, тем самым, получать выборочное значение оценки для всех значений параметра при *фактическом* моделировании только одной цепи Маркова. Это позволяет сократить время расчётов.

Алгоритм вычисления выборочного значения оценки для решения уравнения М.Г. Крейна (1.45) для области $x \in (x_{min}, x_{max})$ на основе предложенного подхода выглядит следующим образом:

1. Моделирование выборочное значения цепи Маркова $t_0, \dots, t_N$ на интервале $(-x_{min}, x_{max})$, соответствующую начальной точке $t_0 = x_{min}$, плотности вероятности перехода $r(t', t) = \frac{1}{2x_{min}}$, и вероятности обрыва цепи $p(t') = P_0$.

2. Вычисление для всех $x \in (x_{min}, x_{max})$ коэффициенты

$$\begin{aligned} Q_0(x) = 1, Q_n = Q_n(x) &= Q_{n-1}(x) \cdot \frac{k(t_m(x), t_{m-1}(x))}{p(t_m, t_{m-1})} = \\ &= Q_{n-1}(x) \cdot \frac{1}{-2f(+0)} \frac{f'(\lambda \cdot (t_m - t_{m-1})) \cdot 2x}{1 - P_0}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где $\lambda = \frac{x}{x_{min}}$

3. Вычисление для всех $x \in (x_{min}, x_{max})$

$$\xi(x) = \sum_{n=0}^N Q_n(x) h(\lambda * t_n) = \sum_{n=0}^N Q_n(x) * \frac{1}{-2f(+0)} \quad (4.14)$$

Отметим, что конечность дисперсии оценки, полученной на основе данного алгоритма, в отличие от прямого моделирования, не гарантирована. Конечность дисперсии, как и ранее, обуславливается сходимостью ряда Неймана для интегрального оператора с ядром

$$K_p(t, s; x) = \frac{k^2(t, s; x)}{p(t, s)} = \frac{2x \cdot f'^2(t - s)}{1 - P_0} \quad (4.15)$$

Здесь подразумевается, что соответствующий интегральный оператор определён на интервале $(-x, x)$.

4.1.3 Результаты расчётов

Рассмотрим сначала следующее модельное решение задачи (4.1)-(4.1):

$$\sigma(x) = 1.5 + \sin(5x)$$

На рисунке 4.1 приведён график данной функции. Первоначально задача рассматривалась на интервале $x \in (0, 1)$. Для этого решения была решена прямая задача на основе соотношений (4.1.1)-(4.1.1), количество узлов сетки $N_x = 100$. Результат этого решения - данные обратной задачи $f(t)$ и их производная $f'(t)$ приведены на рисунках 4.2, 4.3. На рисунке 4.4 приведён график нормы интегрального оператора K_1 , вычисленной на основе соотношения (4.9), на котором наблюдается рост нормы интегрального оператора с увеличением глубины (параметра x). Учитывая это, в дальнейшем будем рассматривать решение обратной задачи на отрезке $x \in (0, L)$, $L = 0.7$. Результаты оценок решения обратной задачи на основе метода прямого моделирования приведён в таблице 4.1. В ней для набора значений параметра $x = 0.1, \dots, 0.7$ приведены значения точного решения уравнения М.Г. Крейна (функция $V(x, x)$), приближённого решения, полученного путём осреднения выборочных значений смоделированной оценки по столкновениям ξ ((4.10)-(4.11)), а также значения выборочной дисперсии и соответствующего доверительного интервала. В ходе расчётов количество траекторий было выбрано равным $N = 5000$. В ходе расчётов для

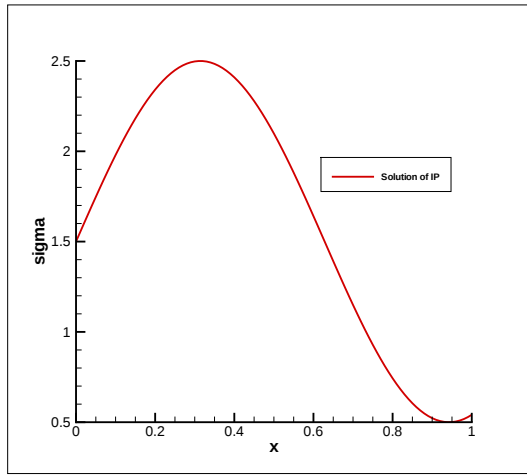


Рисунок 4.1: Точное решение обратной задачи $\sigma(x)$

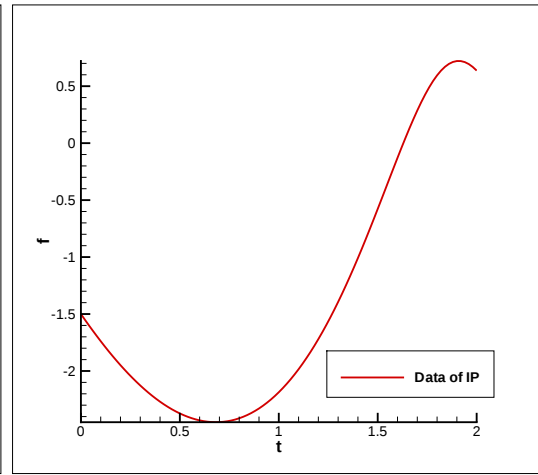


Рисунок 4.2: Данные обратной задачи $f(t)$

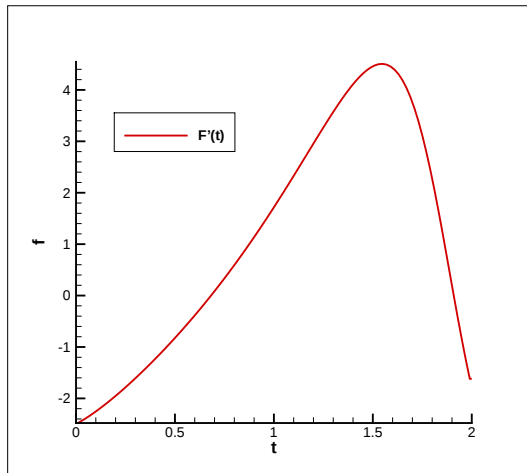


Рисунок 4.3: Производная данных обратной задачи $f'(t)$

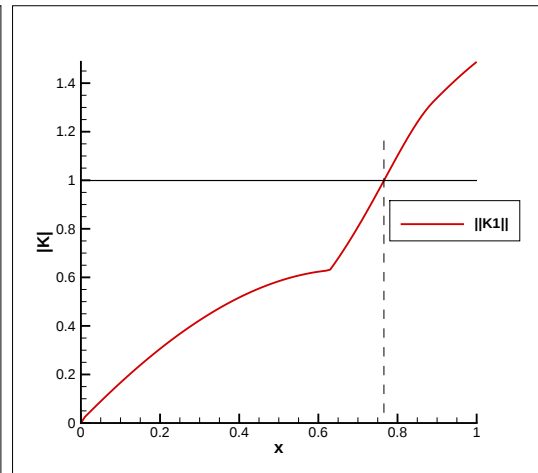


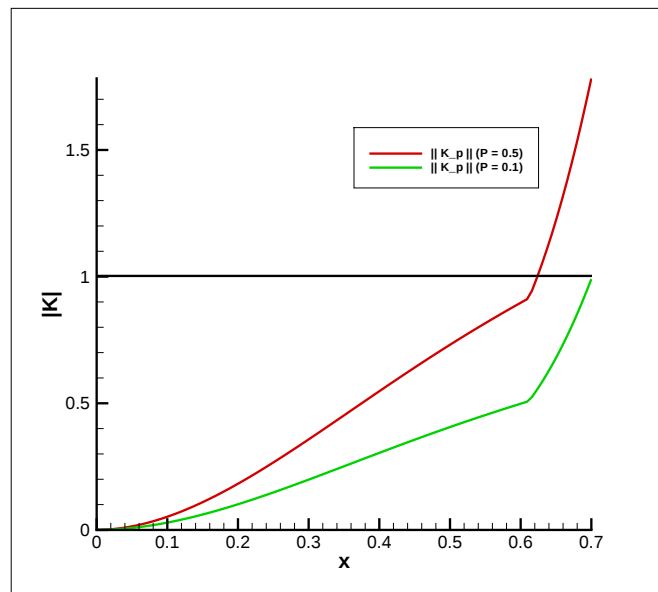
Рисунок 4.4: Норма интегрального оператора K_1 .

данных обратной задачи (полученные численно) использовалась кусочно-линейная аппроксимация. Расчёты проводились на персональном компьютере на базе процессора Intel(R)Core(TM) i5 с частотой 3.5 GHz.

Теперь рассмотрим результаты численных экспериментов, полученных на основе предложенного варианта метода подобных траекторий (4.14)-(4.15). На рисунке 4.5 приведены расчёты норм интегрального оператора K_p , обуславливающего конечность дисперсии. Были рассмотрены два варианта метода, соответствующие вероятностям обрыва $P = 0.5$ и $P = 0.1$ соответственно. Можно отметить, что с ростом глубины норма оператора растёт, и для вероятности обрыва $P = 0.5$, начиная с некоторого момента, становится больше единицы. Следовательно, для данных значений параметра x и вероятности обрыва нельзя гарантировать конечность дисперсии. Вероятность $P = 0.1$ была выбрана как максимальное значение вероятности обрыва, при которых норма оператора K_p меньше единицы. Результаты численных экспериментов для метода подобных траекторий приведены в таблицах 4.2, 4.3. Как следует из расчётов, у оценок, по-

Прямое моделирование				
х	Точное решение	Прибл. решение	Дов. интервал $3\frac{\sqrt{D\xi}}{\sqrt{N}}$	Дисперсия $D\xi$
0.1	0.28858	0.28766	0.0048	0.0131
0.2	0.26641	0.26206	0.0057	0.0177
0.3	0.25832	0.25986	0.0060	0.0196
0.4	0.26359	0.26380	0.0064	0.0224
0.5	0.28249	0.27940	0.0079	0.0350
0.6	0.31868	0.31640	0.0108	0.0676
0.7	0.38474	0.38073	0.0193	0.2086

Таблица 4.1: Прямое моделирование - результаты численных экспериментов

Рисунок 4.5: Метод подобных траекторий - норма интегрального оператора K_p .

Метод подобных траекторий ($P = 0.1$)				
х	Точн. реш.	Прибл. решение	Дов. интервал $3\frac{\sqrt{D\xi}}{\sqrt{N}}$	Дисперсия $D\xi$
0.1	0.28858	0.28840	0.0006	0.000237
0.2	0.26641	0.26594	0.0011	0.000739
0.3	0.25832	0.25761	0.0018	0.001873
0.4	0.26359	0.26259	0.0031	0.005407
0.5	0.28249	0.28105	0.0053	0.015629
0.6	0.31868	0.31590	0.0097	0.053233
0.7	0.38474	0.37642	0.0282	0.275403

Таблица 4.2: Метод подобных траекторий ($P = 0.1$) - результаты расчётов.

строенных на основе метода подобных траекторий, наблюдается значительное увеличение дисперсии при приближении к максимальным рассматриваемым значениям глубины x . Это связано с тем, что перестаёт выполняться условие сходимости ряда Неймана, позволяющего сделать вывод о конечности дисперсии. У оценки, построенной на основе метода прямого моделирования, рост дисперсии при увеличении глубины не является столь резким. Тем не менее, при меньших значениях глубины метод подобных траекторий имеет меньшую дисперсию (значительно

Метод подобных траекторий ($P = 0.5$)				
x	Точн. реш.	Прибл. решение	Дов. интервал $3\frac{\sqrt{D\xi}}{\sqrt{N}}$	Дисперсия $D\xi$
0.1	0.28858	0.28876	0.0019	0.002048
0.2	0.26641	0.26677	0.0031	0.005458
0.3	0.25832	0.25905	0.0042	0.009871
0.4	0.26359	0.26457	0.0058	0.018982
0.5	0.28249	0.28331	0.0093	0.047100
0.6	0.31868	0.32091	0.0190	0.221269
0.7	0.38474	0.41439	0.0598	3.494579

Таблица 4.3: Метод подобных траекторий ($P = 0.5$) - результаты расчётов.

	$ v - v_{ex} _{max}$	T_{total} (ms)	$D\xi_{max}$	C_{max}	$D\xi_{mean}$	C_{mean}
CVM	0.002	350	-	-	-	-
Прямое моделир.	0.009	420	0.2086	87.61	0.0540	23.04
МПТ ($P = 0.1$)	0.005	223	0.2754	61.41	0.0503	11.21

Таблица 4.4: Сравнительный анализ метода прямого моделирования и метода подобных траекторий (МПТ)

меньшую при малых значениях глубины), что связано с множителем $2x$, входящим в выражение интегрального оператора для дисперсии (4.15). Очень большое значение дисперсии оценки на основе подобных траекторий при $x = 0.7$ в случае $P = 0.5$ обусловлено тем, что норма интегрального оператора K_p , как видно на рисунке 4.5, становится больше единицы, и в этом случае нет возможности гарантировать конечность дисперсии. Следовательно, метод прямого моделирования имеет большую глубинность, и позволяет вычислять решение обратной задачи для всех значений глубины x , при которых сходится ряд Неймана для уравнения (1.45). При этом глубинность метода решения обратной задачи на основе метода подобных траекторий ограничена дополнительным условием сходимости ряда Неймана для оператора K_p . Учитывая этот факт, в дальнейшем будем рассматривать только вариант МПТ с вероятностью обрыва $P = 0.1$, как имеющий большую, по сравнению со вторым вариантом, глубинность.

В таблице 4.4 приведены результаты сравнения точности и трудоёмкости указанных методов для решения обратной задачи на интервале $x \in (0.1, 0.7)$. В графе T_{total} приведено суммарное время, затраченное на решение (во всех точках), в графах $D\xi_{max}$, $D\xi_{mean}$ - максимальное (по глубине) и среднее значения дисперсии на данном интервале соответственно, в графах C_{max} , C_{mean} приведены произведение временных затрат и максимальной (или, соответственно, средней) дисперсии для характеристики трудоёмкости рассмотренных методов. Число траекторий во всех случаях было равно $N = 5000$. Для сравнения также был использован детерминистский стандартный алгоритм решения линейных систем из библиотеки `cvmlib`.

Анализ таблицы 4.4 позволяет утверждать, что, метод решения обратной задачи акустики на основе метода подобных траекторий является более эффективным, по сравнению с методом прямого моделирования, с вычислительной точки зрения. Однако необходимо отметить, что

эффективность метода прямого моделирования сильно зависит от характера данных обратной задачи, поскольку на разных вариантах данных трудоёмкость метода исключения для моделирования элементов цепи Маркова будет меняться. Отметим также, что трудоёмкость методов Монте-Карло может быть значительно (кратно) улучшена при распараллеливании вычислений, в то время как стандартные детерминистические методы решения систем с заполненной матрицей ускоряются при использовании многопроцессорных вычислений менее эффективно.

На рисунках 4.6, 4.7 показаны результаты решения обратной задачи. На рисунке 4.6 приве-

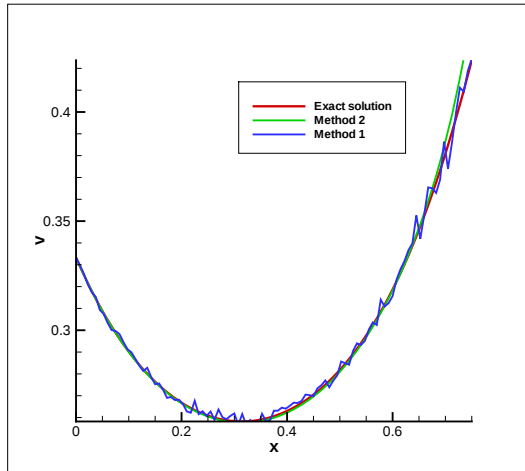


Рисунок 4.6: Результаты численных экспериментов - решение уравнения Крейна

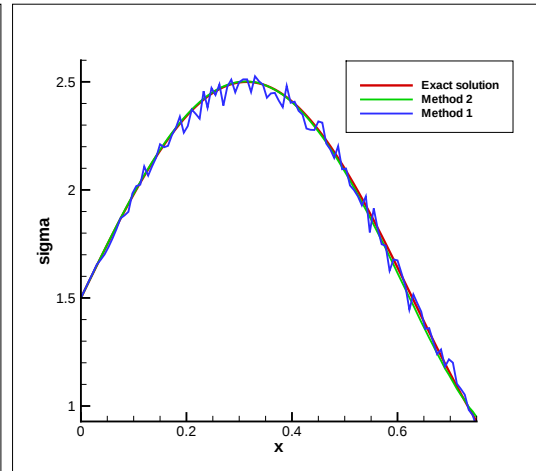


Рисунок 4.7: Результаты численных экспериментов - решение обратной задачи

дены результаты решения уравнения Крейна (1.45) - функции $V(x, x)$. На рисунке 4.6 показано решение обратной задачи - функция $\sigma(x)$, вычисленная по $V(x, x)$ с помощью соотношения (1.47). Здесь красным показано точное решение, зелёным - решение методом подобных траекторий, синим - решение методом прямого моделирования. Расчёты проводились для числа узлов $N_x = 100$, тем самым для решения обратной задачи необходимо было разрешить N_x уравнений. Расчёты производились для $N = 5000$ траекторий.

Рассмотрим теперь ещё один модельный пример, соответствующий кусочно-постоянному решению обратной задачи:

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 0.5, \\ 2, & 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Результаты решения прямой задачи (данные $f(t)$ обратной задачи и их производная $f'(t)$, образующая ядро уравнения Крейна) приведены на рисунках 4.8, 4.9 (красным цветом). Разрыв в акустической жесткости $\sigma(x)$ приводит к кусочно-постоянному характеру данных, что проявляется при их численном дифференцировании. Хотя теоретическое обоснование метода Гельфанда-Левитана-Крейна получено для гладких функций, апробация методов для случая разрывных решений представляет интерес с точки зрения возможного использования методов на реальных данных.

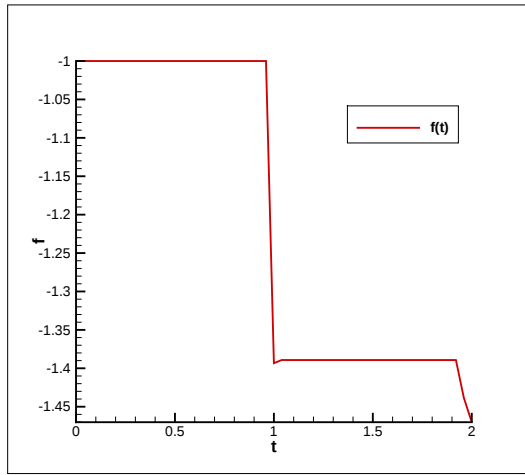


Рисунок 4.8: Кусочно-постоянное решение - данные обратной задачи

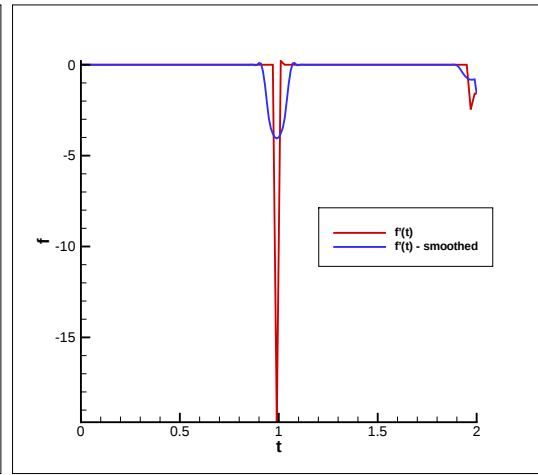


Рисунок 4.9: Кусочно-постоянное решение - производная данных

Проведём сравнительный анализ метода прямого моделирования и метода подобных траекторий с вероятностью обрыва $P = 0.1$. Для данных расчётов были выбраны параметры сетки $N_x = 100$, $h_x = 0.01$. Число траекторий в обоих случаях $N = 10000$.

Результаты расчётов приведены в таблицах 4.5, 4.6. Нулевые значения дисперсии для точек

Метод прямого моделирования				
х	Точн. реш.	Прибл. решение	Дов. интервал $3\frac{\sqrt{D\xi}}{\sqrt{N}}$	Дисперсия $D\xi$
0.25	0.5000	0.5000	0.0000	0.0000
0.50	0.4082	0.4080	0.0058	0.0375
0.75	0.4082	0.4041	0.0059	0.0392
1.00	0.4082	0.4023	0.0059	0.0396

Таблица 4.5: Кусочно-постоянное решение - расчёты методом прямого моделирования

Метод подобных траекторий				
х	Точн. реш.	Прибл. решение	Дов. интервал $3\frac{\sqrt{D\xi}}{\sqrt{N}}$	Дисперсия $D\xi$
0.25	0.5000	0.5000	0.0000	0.0000
0.50	0.4082	0.4171	0.0237	0.6245
0.75	0.4082	0.4118	0.0204	0.4626
1.00	0.4082	0.4222	0.0588	3.8490

Таблица 4.6: Кусочно-постоянное решение - расчёты методом подобных траекторий

$x < 0.5$ связаны с тем, что при в соответствующей области ядро интегрального уравнения принимает только нулевые значения, и соответствующее уравнение вырождается в равенство. Далее, в остальных точках ($x \geq 0.5$) метод прямого моделирования имеет значительно меньшую дисперсию по сравнению с методом подобных траекторий. Это обусловлено тем фактом, что данные обратной задачи имеют разрыв в точке $x = 0.5$. Данное обстоятельство приводит к тому, что с ростом параметра сетки N_x ядро интегрального уравнения приобретает слагаемое

вида дельта-функции, из-за чего перестаёт сходиться ряд Неймана для интегрального оператора с ядром

$$K_p(t, s; x) = \frac{2x \cdot f'^2(t - s)}{1 - P_0}$$

Следовательно, в данном случае использование метода подобных траекторий не позволяет гарантировать конечность дисперсии. При этом метод прямого моделирования свободен от данной проблемы, поскольку конечность дисперсии гарантируется сходимостью ряда Неймана для исходного интегрального оператора (точнее, для модуля исходного ядра). Норма интегрального оператора связана, вообще говоря, с величиной скачка в данных и в рассматриваемом случае меньше единицы (точнее, $|K| < 0.4$).

Указанный недостаток может быть отчасти преодолен сглаживанием данных обратной задачи. Рассмотрим вместо данных обратной задачи $f(t)$ функцию $f_\alpha(t)$, построенную как свёртку данных с усредняющим ядром Соболева:

$$f_\alpha(t) = f(t) * \omega_\alpha(x) = \int f(y) \omega\left(\frac{|x - y|}{\alpha}\right) dy \quad (4.16)$$

Здесь

$$\omega_\alpha(t) = \begin{cases} C_\alpha \cdot \exp\left(\frac{1}{t^2 - 1}\right), & |t| < 1, \\ 0, & |t| \geq 1 \end{cases}$$

При этом α - параметр, задающий «ширину» окна сглаживания, константа C_α - нормировочная и выбирается таким образом, чтобы $\int_{\mathbb{R}} \omega_\alpha(t) dt = 1$. Для проведения расчётов был выбран параметр сглаживания $\alpha = 4h_x = 0.04$. Производная сглаженных данных приведена на рисунке 4.9 (синим). Сравнение норм интегральных операторов K_p , определяющих конечность дисперсии оценки метода подобных траекторий, для исходных (красным) и сглаженных (синим) данных приведено на рисунке 4.10. Как и следовало ожидать, сглаживание разрыва в данных позволяет «размазать» сингулярность производной. Это позволило гарантировать конечность дисперсии в случае решения обратной задачи на сглаженных данных. В таблице ?? приведены результаты решения обратной задачи на сглаженных данных. Отметим, что, несмотря на значительное улучшение значений по сравнению с точными данными, дисперсии построенных оценок больше, чем в случае решения методом прямого моделирования. Следует также указать, что несовпадение точного и приближенного решений при $x = 0.5$ обусловлено тем, что в этой точке происходит разрыв решения уравнения Крейна, который сглаживается при использовании сглаженных данных. Это можно наблюдать на рисунке 4.12.

На рисунках 4.11, 4.12 показаны результаты решения обратной задачи. На рисунке 4.11 приведены результаты решения уравнения Крейна (1.45) - функции $V(x, x)$. На рисунке 4.12 показано решение обратной задачи - функция $\sigma(x)$, вычисленная по $V(x, x)$ с помощью соотношения (1.47). Здесь красным показано точное решение, зелёным - решение МПТ, синим - решение МПТ для сглаженных данных, чёрным - решение методом прямого моделирования. Расчёты проводились для числа узлов $N_x = 100$, тем самым для решения обратной задачи необходимо было разрешить

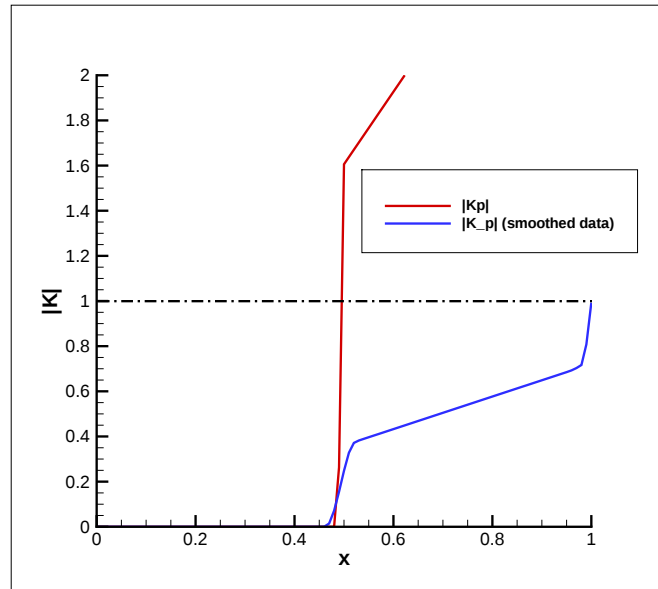


Рисунок 4.10: Кусочно-постоянное решение - уменьшение нормы интегрального оператора для дисперсии при сглаживании данных.

МПТ - сглаженные данные				
x	Точн. реш.	Прибл. решение	Дов. интервал $3\frac{\sqrt{D\xi}}{\sqrt{N}}$	Дисперсия $D\xi$
0.25	0.5000	0.5000	0.0000	0.0000
0.50	0.4082	0.4428	0.0069	0.0537
0.75	0.4082	0.4093	0.0123	0.1687
1.00	0.4082	0.4045	0.0178	0.3559

Таблица 4.7: Кусочно-постоянное решение - расчёты МПТ для сглаженных данных

N_x уравнений. Расчёты производились для $N = 10000$ траекторий.

В таблице 4.8 приведено сравнение трудоёмкости метода прямого моделирования (на исходных и на сглаженных данных) и метода подобных траекторий (на сглаженных данных). Число траекторий во всех случаях было равно $N = 5000$. Для сравнения трудоёмкости также был использован детерминистский стандартный алгоритм решения линейных систем из библиотеки `cvmlib`.

Отметим, что при переходе к сглаженным данным временные затраты для метода прямого моделирования значительно снижаются. Это связано с тем, что сглаживание «пики» производной увеличивает эффективность построенной мажоранты. При этом с ростом числа узлов сетки временные затраты метода подобных траекторий растут медленнее, что, разумеется, связано с тем, что метод прямого моделирования рассматривает каждое уравнение независимо. Что касается сравнения с детерминистским подходом, то его скорость работы в случае малых размерностей систем (соответствует малым значениям N_x) ожидаемо превосходит показатели статистических алгоритмов. Однако с увеличением параметра разбиения N_x временные затраты стандартных методов решения будут значительно возрастать (речь идёт о решении N_x систем возрастающей размерности, при этом трудоёмкость стандартных алгоритмов, как правило, имеет вид $O(N^3)$).

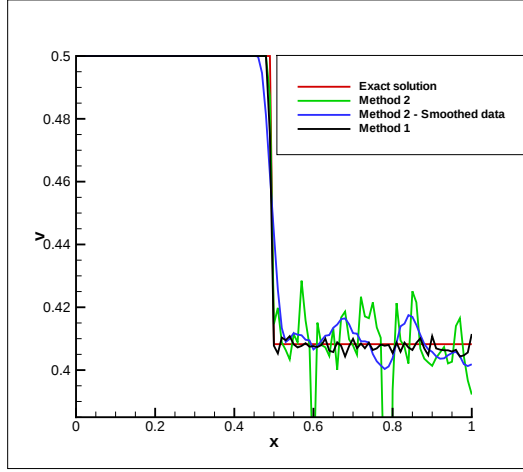


Рисунок 4.11: Кусочно-постоянный случай - решение уравнения Крейна

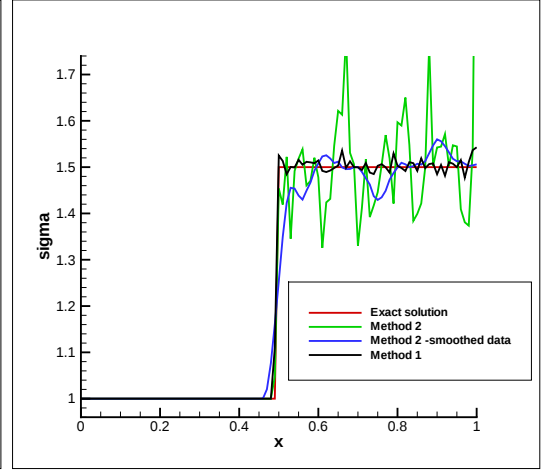


Рисунок 4.12: Кусочно-постоянный случай - решение обратной задачи

N = 100	Пр.Мод.	Пр. мод. (сглаж. данные)	МПТ	CVM
T_{total} (ms)	984	320	250	350
$ v - v_{ex} _{max}$	0.0054	0.0050	0.085	0.0052

Таблица 4.8: Кусочно-постоянное решение - сравнение со стандартным методом

4.2 Решение двумерной обратной задачи для уравнения колебаний

В этом разделе мы рассмотрим описание алгоритма численных экспериментов по решению обратной задачи для уравнения колебаний в случае двух пространственных переменных, рассмотренной в главе 2:

$$\begin{aligned}
 u_{tt}^{(k)} &= u_{xx}^{(k)} + u_{yy}^{(k)} - q(x, y)u^{(k)}(x, y, t), \quad x \in (-T, T), y \in (-\pi, \pi), t \in (0, 2T), k \in \mathbb{Z} \\
 u^{(k)}|_{t=0} &= 0, \quad u_t^{(k)}|_{t=0} = \delta(x)e^{iky}, \quad x \in (-T, T), y \in (-\pi, \pi), k \in \mathbb{Z} \\
 u^{(k)}|_{x=0} &= f^{(k)}(y, t), \quad u_x^{(k)}|_{x=0} = 0, \quad y \in (-\pi, \pi), t \in (0, 2T), k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Здесь, как и ранее, мы предполагаем, что $q(-x, y) = q(x, y)$, $x > 0$. В главе 2 мы показали, что данная задача может быть сведена к решению многомерного аналога уравнения Гельфанда-Левитана (2.33):

$$\begin{aligned}
 \tilde{w}^{(k)}(x, y, t) + \int_{-x}^x \sum_m \tilde{w}^{(m)}(x, s) f_m^{(k)'}(t - s) ds &= -\frac{1}{2} \left[f^{(k)'}(y, t - x) + f^{(k)'}(y, t + x) \right], \\
 x &\in (0, T), t \in (-x, x), y \in (-\pi, \pi), k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Напомним, что $f_m^{(k)'}(t)$ - коэффициенты разложения функций $f^{(k)'}(y, t)$ в ряд Фурье. Кроме того, функции $f^{(k)'}(y, t)$ (а, следовательно, и $f_m^{(k)'}(t)$) являются четными функциями переменной t . При этом решение обратной задачи может быть получено с помощью равенств (2.38)-(2.39):

$$\begin{aligned} q(x, y) &= 4 \frac{d}{dx} \tilde{w}^{(0)}(x, y, x - 0), \quad x \in [0, T] \\ q(-x, y) &= q(x, y), \quad x \in [0, T] \end{aligned}$$

Для вычисления решения обратной задачи на основе соотношений (2.38)-(2.39) можно решать двумерный аналог уравнения Гельфанда-Левитана (2.33) в каждой точке $y_j = jh_y, j = -N_y, \dots, N_y, h_y = \frac{2\pi}{N_y}$. В данной работе мы используем другой подход, основанный на использовании описанного в разделе 2.3 N - приближения обратной задачи. Будем считать, что все коэффициенты Фурье (относительно переменной y) функций $q(x, y), f^{(k)}(y, t)$ и $\tilde{w}^{(k)}$ с номерами $m > |N_F|$ равны нулю. Тогда, как было показано в разделе 2.3, уравнение (2.33) может быть аппроксимировано N - приближением (2.51):

$$\tilde{W}(x, t) + \int_{-x}^x \tilde{W}(x, s) F'(t - s) ds = -\frac{1}{2} [F'(t - x) + F'(t + x)], \quad x > 0, t \in (-x, x).$$

Здесь $\tilde{W}(x, t), F'(t)$ - матрицы, составленные из коэффициентов Фурье функций $\tilde{w}^{(k)}$ и $f^{(k)}$ соответственно. При этом имеет место равенство (2.52):

$$Q(x) = -K + 4 \frac{d}{dx} \tilde{W}(x, x - 0) \quad (4.17)$$

Здесь, $Q(x), \tilde{W}(x, t), F'(t), K$ - матрицы размера $(2N_F + 1) \times (2N_F + 1)$. Матрица K является диагональной: $K = \text{diag}(N_F^2, (N_F - 1)^2, \dots, 1, 0, 1, \dots, N_F^2)$. Матрица $Q(x)$ имеет следующий вид:

$$Q(x) = \begin{bmatrix} q_0 & \dots & q_{-N_F} & 0 & \dots & 0 \\ q_1 & q_0 & \dots & q_{-N_F} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{N_F} & \dots & q_0 & \dots & q_{-N_F+1} & q_{-N_F} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & q_{N_F} & \dots & \dots & q_0 \end{bmatrix} (x). \quad (4.18)$$

Использование N - приближения позволяет перейти от решения $2N_y + 1$ систем интегральных уравнений в каждой точке сетки по переменной y к решению $2N_F + 1$ уравнений, задаваемых (2.51). Более того, связь между $\tilde{W}(x, x - 0)$ и $Q(x)$, задаваемая (2.52), а также структура матрицы $Q(x)$, заданная (4.18), приводят к тому, что для определения всех $2N_F + 1$ коэффициентов искомой функции $q(x, y)$ достаточно вычислить только одну строку матрицы $\tilde{W}(x, x - 0)$. Таким образом, переход к решению уравнения (2.51) позволяет свести задачу к решению одной систе-

мы интегральных уравнений (для каждого значения x).

Как и ранее, апробация предложенных алгоритмов будет проходить на модельной задаче. Мы выберем модельное значение коэффициента $q(x, y)$, решим прямую задачу, определим данные прямой задачи $f^{(k)}(y, t)$ и коэффициенты их разложения в ряд Фурье $f_m^{(k)}(t)$, после чего решим многомерный аналог уравнения Гельфанда-Левитана и сравним решение обратной задачи с модельным.

4.2.1 Схема решения прямой задачи

Итак, выберем модельное решение $q(x, y)$ и рассмотрим задачу определения функций $u^{(k)}(x, y, t)$, удовлетворяющих соотношениям:

$$\begin{aligned} u_{tt}^{(k)} &= u_{xx}^{(k)} + u_{yy}^{(k)} - q(x, y)u^{(k)}(x, y, t), \quad x \in (-T, T), y \in (-\pi, \pi), t \in (0, 2T), k \in \mathbb{Z} \\ u^{(k)}|_{t=0} &= 0, \quad u_t^{(k)}|_{t=0} = \delta(x)e^{iky}, \quad x \in (-T, T), y \in (-\pi, \pi), k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Для её решения мы используем конечно-разностную аппроксимацию задачи, аналогичную схеме, которую мы использовали в случае одной пространственной переменной, в сочетании с проекционным методом. Так, разложим все функции в ряд Фурье по переменной y , при этом предполагая, что все коэффициенты рядов с номерами, большими, чем заданное число N_F , равны нулю:

$$\begin{aligned} u^{(k)}(x, y, t) &= \sum_{m=-N_F}^{N_F} u_m^{(k)}(x, t)e^{imy}; \\ q(x, y) &= \sum_{m=-N_F}^{N_F} q_m(x)e^{imy} \end{aligned}$$

Как было показано в разделе 2.3, такой подход позволяет приблизить решение двумерной (по пространственным переменным) прямой задачи решением одномерной матричной задачи:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - (K + Q(x))U, \quad x \in (-T, T), t \in (0, 2T), \quad (4.19)$$

$$U|_{t=0} = 0, U_t|_{t=0} = E\delta(t), \quad x \in (-T, T). \quad (4.20)$$

Здесь, как и ранее, E, U, Q, K - матрицы размера $(2N_F + 1) \times (2N_F + 1)$. Матрица K является диагональной: $K = \text{diag}(N_F^2, (N_F - 1)^2, \dots, 1, 0, 1, \dots, N_F^2)$, E - единичная матрица, а матрицы

Q, U имеют следующую структуру:

$$U(x, t) = \begin{bmatrix} u_{-N_F}^{(-N_F)} & u_{-N_F}^{(-N_F+1)} & u_{-N_F}^{(-N_F+2)} & \dots & u_{-N_F}^{(N_F)} \\ u_{-N_F+1}^{(-N_F)} & u_{-N_F+1}^{(-N_F+1)} & \dots & \dots & u_{-N_F+1}^{(N_F)} \\ \dots & \dots & u_m^{(k)} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{N_F}^{(-N_F)} & u_{N_F}^{(-N_F+1)} & \dots & \dots & u_{N_F}^{(N_F)} \end{bmatrix},$$

$$Q(x) = \begin{bmatrix} q_0 & \dots & q_{-N_F} & 0 & \dots & 0 \\ q_1 & q_0 & \dots & q_{-N_F} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{N_F} & \dots & q_0 & \dots & q_{-N_F+1} & q_{-N_F} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & q_{N_F} & \dots & \dots & q_0 \end{bmatrix} (x).$$

Используя результаты главы 2 и теорию характеристик, можно показать, что

$$U|_{t=x} = U|_{t=-x} = \frac{1}{2}E, x \in (0, T). \quad (4.21)$$

Следовательно, как и в случае одномерной задачи, мы можем перейти к решению задачи Гурса, заменив условие (4.20) на (4.21). Для решения полученной задачи воспользуемся следующей разностной схемой:

$$U_i^{k+1} = U_{i-1}^k(1 - B_i \frac{h^2}{2}) + U_{i+1}^k(1 - B_i \frac{h^2}{2}) - U_i^{k-1}, k > |i|; \quad (4.22)$$

$$U_i^i = U_{-i}^i = \frac{1}{2}E \quad (4.23)$$

Здесь $U_i^k = U(ih, kh)$, $B_i = Q(ih) + K$, $h = \frac{T}{N_x}$. С помощью данной разностной схемы мы можем получить решение прямой задачи, и, следовательно, его след $F_j = U(0, jh) = U_0^j$. Тем самым, вычислив коэффициенты разложения функций $f_m^{(k)}$ при $t = jh$ в ряд Фурье, можно определить данные обратной задачи $f^{(k)}(y, t) \approx \sum_{m=-N_F}^{N_F} f_m^{(k)}(t)e^{imy}$ в точках $t = jh$.

4.2.2 Решение обратной задачи методом Монте-Карло

Перепишем N - приближение двумерного аналога уравнения Гельфанда-Левитана (2.51) в следующем виде:

$$\widetilde{W}^T(x, t) + \int_{-x}^x F'(t-s) \widetilde{W}^T(x, s) ds = -\frac{1}{2} [F'^T(t-x) + F'^T(t+x)], x > 0, t \in (-x, x).$$

Как было упомянуто ранее, для решения обратной задачи нам достаточно определить только одну строку матрицы $\widetilde{W}(x, x-0)$ с номером $N_F + 1$, что равносильно определению $N_F + 1$ -го

столбца матрицы $\widetilde{W}^T(x, x-0)$. Тогда мы можем переформулировать задачу следующим образом:

$$\Phi(t; x) = \int_{\Omega} K(t, s; x) \Phi(s; x) ds + H(t; x), x \in \Lambda = (0, L).$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Omega &= [-x, x], \\ K(t, s; x) &= -F'^T(t-s), t, s \in (-x, x), \\ \Phi(t; x) &= [\widetilde{w}_0^{(-N_F)}, \dots, \widetilde{w}_0^{(N_F)}]^T(x, t), \\ H(t; x) &= -\frac{1}{2} \left(\left[f_0^{(-N_F)'} \dots f_0^{(N_F)'} \right]^T (x-t) + \left[f_0^{(-N_F)'} \dots f_0^{(N_F)'} \right]^T (x-t) \right). \end{aligned}$$

Предположим, что для всех $x \in (0, L)$ выполнено условие

$$\|K\| = \sup_{t, i} \sum_{j=1}^m \int_{-x}^x |k_{ij}(t, s)| ds < 1$$

В этом случае гарантирована сходимость ряда Неймана для рассматриваемой задачи. В ходе численных расчётов для таблично заданных функций $f_m^{(k)}$ данная норма приближённо вычислялась на основе следующего выражения:

$$\|K\| \approx \max_{k=-M \dots M} \max_{i=-N_F \dots N_F} \sum_{l=-M+1}^{M-1} \sum_{j=-N_F}^{N_F} h |f_j^{(i)'}(|k-l|h)| + 0.5h(|f_j^{(i)'}(|k-M|h)| + |f_j^{(i)'}(|k+M|h)|) \quad (4.24)$$

Рассмотрим алгоритм решения этого семейства систем линейных интегральных уравнений на основе векторного варианта метода подобных траекторий. Введём цепь Маркова $\{t_n\}$ с переходной плотностью

$$p(t', t) = r(t', t)(1 - g(t'))$$

Здесь $r(t', t)$ - плотность вероятностей перехода, $g(t')$ - вероятность обрыва цепи при переходе $t' \rightarrow t$. Предположим, что выполнены условия несмещённости

$$p(x, y) > 0, \text{ если } \sum_{i, j=1}^m |k_{ij}(x, y)| > 0$$

Тогда можно определить оценку по столкновениям:

$$\xi_{t_0}(x) = H(t_0; x) + \sum_{i=1}^m Q_i(x) H(t_i; x)$$

Здесь матричные веса Q_i задаются следующими соотношениями:

$$Q_0(x) = 1, Q_i(x) = Q_{i-1}(x) \cdot \frac{K(t_m, t_{m-1}; x)}{p(t_m, t_{m-1})} = Q_{i-1}(x) \cdot \frac{K(t_m, t_{m-1}; x)}{r(t_m, t_{m-1})(1 - p(t_{m-1}))}$$

При этом

$$E\xi_{t_0}(x) = \varphi(t_0; x)$$

Учитывая, что, как и в одномерном случае, область интегрирования в уравнении меняется с глубиной, мы будем использовать цепь Маркова, основанную на равномерном распределении, поскольку оно естественным образом масштабируется на различные значения области интегрирования, и позволяет использовать одну цепь Маркова для вычисления решения уравнения Гельфанда-Левитана для всех рассматриваемых значений параметра x . В итоге получим следующий алгоритм:

1. Моделирование выборочного значения цепи Маркова $t_0, \dots, t_N$ на интервале $(-x_{min}, x_{max})$, соответствующую начальной точке $t_0 = x_{min}$, плотности вероятности перехода $r(t', t) = \frac{1}{2x_{min}}$, и вероятности обрыва цепи $p(t') = P_0$.
2. Вычисление для всех $x \in (x_{min}, x_{max})$ коэффициентов

$$\begin{aligned} Q_0(x) = 1, Q_n = Q_n(x) = Q_{n-1}(x) \cdot \frac{K(t_m(x), t_{m-1}(x))}{p(t_m, t_{m-1})} = \\ = Q_{n-1}(x) \cdot \frac{-F'(\lambda \cdot (|t_m - t_{m-1}|)) \cdot 2x}{1 - P_0}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

где $\lambda = \frac{x}{x_{min}}$

3. Вычисление для всех $x \in (x_{min}, x_{max})$

$$\xi(x) = \sum_{n=0}^N Q_n(x) H(\lambda * t_n)$$

Конечность дисперсии данной оценки может быть гарантирована выполнением следующего условия:

$$\|K_p\|_{L_\infty} = \sup_{i,x} \int_X \frac{\left(\sum_{j=1}^m k_{ij}(x,y)\right)^2}{p(x,y)} dy < 1 \quad (4.26)$$

Здесь подразумевается, что соответствующий интегральный оператор определён на интервале $(-x, x)$. В ходе численных расчётов для таблично заданных функций $f_m^{(k)}$ данная норма прибли-

жённо вычислялась на основе следующего выражения:

$$\begin{aligned} ||K_p|| (x) \approx \frac{2x}{1 - P_0} \max_{k=-M \dots M} \max_{i=-N_F \dots N_F} \left[\sum_{l=-M+1}^{M-1} h \left(\sum_{j=-N_F}^{N_F} h |f_j^{(i)'}(|k-l|h)| \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{h}{2} \left(\sum_{j=-N_F}^{N_F} |f_j^{(i)'}(|k+M|h)| \right)^2 + \frac{h}{2} \left(\sum_{j=-N_F}^{N_F} |f_j^{(i)'}(|k-M|h)| \right)^2 \right]. \quad (4.27) \end{aligned}$$

4.2.3 Сведение к СЛАУ и решение стохастическим проекционным методом

Зафиксируем некоторое значение N_F и рассмотрим N - приближение уравнения Гельфанда-Левитана (2.51):

$$\widetilde{W}(x, t) + \int_{-x}^x \widetilde{W}(x, s) F'(t - s) ds = -\frac{1}{2} [F'(t - x) + F'(t + x)], \quad x \in (0, T), t \in (-x, x).$$

Зафиксируем точку $x = Mh$ и обозначим $W_{[M, j]} = W(Mh, jh)$. Аппроксимируем интеграл в левой части (2.51) по формуле трапеций с точностью $O(h^2)$:

$$\begin{aligned} \int_{-x}^x \widetilde{W}(x, s) F'(t - s) ds &= \int_{-Mh}^{Mh} \widetilde{W}(Mh, s) F'(t - s) ds \approx \\ &\approx \frac{h}{2} W_{[M, -M]} F'(t + Mh) + h W_{[M, -M+1]} F'(t + (M-1)h) + \dots + \\ &\quad + h W_{[M, M-1]} F'(t - (M-1)h) + \frac{h}{2} W_{[M, M]} F'(t - Mh). \quad (4.28) \end{aligned}$$

Далее, обозначим $F'_{[i]} = F'(ih)$ и рассмотрим уравнение (2.51) при $t = lh$. Учитывая (4.28), получим:

$$\begin{aligned} W_{[M, l]} + \frac{h}{2} W_{[M, -M]} F'_{[l+M]} + h W_{[M, -M+1]} F'_{[l+M-1]} + \dots + h W_{[M, M-1]} F'_{[l-M+1]} + \frac{h}{2} W_{[M, M]} F'_{[l-M]} = \\ = -\frac{1}{2} [F'_{[l-M]} + F'_{[l+M]}] \quad (4.29) \end{aligned}$$

Соотношение (4.29) при различных значениях $l = -M, \dots, M$ приводит к следующей системе линейных уравнений (для удобства опустим первый индекс при блоках W):

$$W_{[l]} + W_{[-M]} \frac{h}{2} F'_{[l+M]} + \sum_{j=-M+1}^{M-1} W_{[j]} h F'_{[l-j]} + W_{[M]} \frac{h}{2} F'_{[l-M]} = -\frac{1}{2} [F'_{[l-M]} + F'_{[l+M]}], \quad l = -M, \dots, M \quad (4.30)$$

В матричной форме система принимает следующий вид:

$$W(I + h\tilde{A}) = B. \quad (4.31)$$

Здесь $\tilde{A}$ - квадратная блочная матрица размера $(2N_F + 1)(2M + 1)$, имеющая следующий вид:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}F'_{[0]} & \frac{1}{2}F'_{[1]} & \cdots & \frac{1}{2}F'_{[2M]} \\ F'_{[-1]} & F'_{[0]} & \cdots & F'_{[2M-1]} \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ F'_{[-2M+1]} & \cdots & F'_{[0]} & F'_{[1]} \\ \frac{1}{2}F'_{[-2M]} & \cdots & \frac{1}{2}F'_{[-1]} & \frac{1}{2}F'_{[0]} \end{bmatrix}.$$

Матрица I - единичная матрица той же размерности. Блок-строки W, B имеют размерность $(2N_F + 1) \times (2N_F + 1)(2M + 1)$ и следующую структуру:

$$W = [W_{[-M]} | W_{[-M+1]} | \cdots | W_{[M]}] \\ B = -\frac{1}{2} \left[F'_{[-2M]} + F'_{[0]} | F'_{[-2M+1]} + F'_{[1]} | \cdots | F'_{[0]} + F'_{[2M]} \right]$$

Решая при каждом $x = mh$ систему (4.31), находим блок-строку W , а, следовательно, и матрицу $W_{[M]} = W_{[M,M]} = W(Mh, Mh)$. Затем, используя соотношение (2.52), определяем матрицу $Q(x)$:

$$Q_M = Q(Mh) = -K + 4 \frac{d}{dx} \widetilde{W}(x, x-0)|_{x=Mh} = 4 \frac{W_{[M,M]} - W_{[M-1,M-1]}}{h} - K \quad (4.32)$$

При этом отметим, что для решения обратной задачи нам достаточно определить только $N_F + 1$ - ю строку матрицы $Q(x)$ в каждой конкретной точке, поскольку в силу (4.18) она содержит все рассматриваемые коэффициенты Фурье $q_{-N_F}, \dots, q_{N_F}$ решения обратной задачи $q(x, y)$. Тем самым, мы можем решать не все $2N_F + 1$ систем, составляющих (4.31), а только одну из них, соответствующую $N_F + 1$ - й строке матриц W и B соответственно.

Далее, учитывая, что функция $F'(t)$ является чётной по переменной t , матрица $\tilde{A}$ является блочно-симметричной. Теперь, транспонируя (4.31), получаем систему относительно столбца неизвестных (для простоты сохраним обозначения W, B , несмотря на то, что далее речь идёт о векторах, а не о блоках строк или столбцов):

$$(I + hA)W = B. \quad (4.33)$$

Здесь

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}F'_{[0]}^T & F'_{[1]}^T & \cdots & \frac{1}{2}F'_{[2M]}^T \\ \frac{1}{2}F'_{[1]}^T & F'_{[0]}^T & \cdots & \frac{1}{2}F'_{[2M-1]}^T \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \frac{1}{2}F'_{[2M-1]}^T & \cdots & F'_{[0]}^T & \frac{1}{2}F'_{[1]}^T \\ \frac{1}{2}F'_{[2M]}^T & \cdots & F'_{[1]}^T & \frac{1}{2}F'_{[0]}^T \end{bmatrix}.$$

Система (4.33) решалась с помощью стохастического проекционного метода, изложенного в разделе 2.5. Базовый вариант алгоритма выглядит следующим образом. Зададимся некоторым на-

чальным приближением x_0 и рассмотрим итерационный процес (2.64):

$$x_{k+1} = x_k + \frac{b_{\nu(k)} - (a_{\nu(k)} \cdot x_k)}{\|a_{\nu(k)}\|^2} a_{\nu(k)}^T$$

Для того, чтобы увеличить быстродействие алгоритма за счёт выбора более подходящего начального приближения x_0 , мы воспользовались тем фактом, что функция $W(x, t)$ является непрерывной по переменной x в рассматриваемой области. Поэтому является разумным построение начального приближения решение системы (4.33) в точке $x = Mh$ на основе решения, построенного для $x = (M - 1)h$:

$$x_0 = x_{0;M} = \begin{pmatrix} x_0^{(1)} \\ x_0^{(2)} \\ \vdots \\ x_0^{(2M+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{[M-1, -(M-1)]} \\ W_{[M-1, -(M-1)]} \\ W_{[M-1, -(M-2)]} \\ \vdots \\ W_{[M-1, (M-1)]} \\ W_{[M-1, (M-1)]} \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

Тем самым мы используем связь между уравнениями, составляющими семейство уравнений Гельфанда-Левитана. Как показывают расчёты, такой подход позволяет существенно повысить эффективность метода.

Вернёмся к итерационному процессу (2.64). В ходе численных расчётов мы использовали два разных подхода к выбору случайного индекса $\nu(k)$. Первый вариант - выбор случайного номера строки на основе дискретного равномерного распределения. Другой вариант - вероятность выбора той или иной строки пропорциональна её норме:

$$p_k = \frac{\|a_k\|_2^2}{\sum_{j=1}^{2M+1} \|a_j\|_2^2}$$

Для генерации случайного номера строки в этом случае использовался метод Уолкера [107], который позволяет сгенерировать случайный номер за счёт только одного вызова генератора случайных чисел (стоит отметить, что при этом данному алгоритму необходимо предварительно сгенерировать два вспомогательных массива размера $(2M + 1)$, на что необходимо ещё $O(M)$ операций).

Когда определён номер случайной строки $\nu(k)$, её элементы, учитывая вид матрицы A , выглядят следующим образом:

$$a_{\nu(k)} = \left(\frac{h}{2} f_{-N}^{(\beta)'}(\alpha h), \frac{h}{2} f_{-N+1}^{(\beta)'}(\alpha h) \dots \frac{h}{2} f_N^{(\beta)'}(\alpha h) | h f_{-N}^{(\beta)'}((\alpha - 1)h), \dots h f_N^{(\beta)'}((\alpha - 1)h) | \dots \right. \\ \left. \dots | \frac{h}{2} f_{-N}^{(\beta)'}((\alpha - 2M)h), \dots \frac{h}{2} f_N^{(\beta)'}((\alpha - 2M)h) \right) + I_{\nu(k)}$$

Здесь $I_{\nu(k)}$ - строка единичной матрицы с номером $\nu(k)$, α, β - целочисленные параметры, такие, что $\nu(k) = \alpha(2N_F + 1) + \beta$, $0 \leq \alpha \leq 2M, 1 \leq \beta \leq 2N_F + 1$. Как и следовало ожидать, структурированность уравнения Гельфанда-Левитана позволяет нам не хранить матрицу системы, что значительно снижает требования алгоритма к памяти ЭВМ.

Далее, в разделе 2.5 приведена следующая оценка на среднее число итераций для достижения необходимой точности ε :

$$Ek_\varepsilon \leq \frac{2 \log \varepsilon}{\log(1 - \kappa(A)^{-2})} \approx 2\kappa(A)^2 \log \frac{1}{\varepsilon}$$

Однако, поскольку оценка числа обусловленности матрицы является довольно трудоёмкой задачей, в данной работе мы останавливали алгоритм после завершения некоторого заданного количества итераций.

Далее, в ходе численных расчётов мы использовали также блочный вариант метода, задаваемый итерационным процессом (2.67):

$$x_{k+1} = x_k + A_{\nu(k)}^T (A_{\nu(k)} A_{\nu(k)}^T)^{-1} (b_{\nu(k)} - A_{\nu(k)} x_k).$$

Здесь $A_{\nu(k)}$ - случайно выбранная блок-строка заданного размера. В ходе расчётов мы использовали две версии блочного алгоритма. Первый вариант - разбиение матрицы на блоки размера 2. При этом строки выбирались последовательно, а номер первой из строк - равномерно распределён среди чисел $(1, \dots, (2N_F + 1)(2M + 1) - 1)$. В этом случае обращение матрицы $(A_{\nu(k)} A_{\nu(k)}^T)$ сводится к обращению матрицы 2×2 и может быть проведено с помощью известных явных формул.

Второй вариант - разбиение матрицы на блоки строк размерности $2N_F + 1$. Размерность блок-строк выбрана таким образом, чтобы использовать изначальную блочную структуру матрицы. Номер случайной блок-строки выбирался на основе равномерного распределения среди чисел $1, \dots, 2M + 1$. При этом

$$A_{\nu(k)} = \left(\frac{h}{2} F'_{[\nu-1]}^T | h F'_{[\nu-2]}^T | \dots | h F'_{[1]}^T | I | h F'_{[-1]}^T | \dots | \frac{h}{2} F'_{[\nu-2M-1]}^T \right)$$

Матрица $A_{\nu(k)} A_{\nu(k)}^T$ принимает в этом случае вид:

$$\begin{aligned} A_{\nu(k)} A_{\nu(k)}^T &= \frac{h^2}{4} F'_{[\nu-1]}^T F'_{[\nu-1]} + h^2 F'_{[\nu-2]}^T F'_{[\nu-2]} + \dots + h^2 F'_{[1]}^T F'_{[1]} + I + \\ &\quad + h^2 F'_{[-1]}^T F'_{[-1]} + \dots + \frac{h^2}{4} F'_{[\nu-2M-1]}^T F'_{[\nu-2M-1]} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Как отмечено в [93], важным аспектом блочных вариантов метода Качмажа является вопрос о выборе размерности блок-строк. С одной стороны, блок-строки большего размера позволяют достигнуть решения за меньшее число итераций (в предельном случае, когда размерность блок-строки совпадает с числом уравнений в системе, обращение матрицы $A_{\nu(k)} A_{\nu(k)}^T$ эквивалентно

обращению матрицы AA^T и метод сходится к точному решению за одну итерацию). С другой стороны, с ростом размера блок-строки растёт размерность системы $A_{\nu(k)}A_{\nu(k)}^T$, а следовательно - возрастает трудоёмкость каждой итерации процесса (2.67). Аналитическая зависимость правой части выражения (4.35) от данных обратной задачи $F'(t)$ позволяет частично преодолеть негативные последствия увеличения размера блок-строки. Используя соотношение (4.35), мы можем вычислить матрицу $A_{\nu(k)}A_{\nu(k)}^T$ для всех $\nu = 1, \dots, 2M+1$, а, следовательно, и обратить её, до начала итерационного процесса (2.67), что позволит усилить эффективность алгоритма при большом числе итераций.

4.2.4 Результаты расчётов

Для проведения расчётов рассмотрим сначала область $0 \leq x \leq 0.5, -\pi \leq y \leq \pi$. В этой области рассмотрим следующее тестовое решение:

$$q(x, y) = \exp \left\{ 2 + \frac{0.01}{(x-a)^2 - 0.01} + \frac{0.04}{\left(\frac{y}{\pi}\right)^2 - 0.04} \right\},$$

$$x \in (0.1, 0.3), \frac{y}{\pi} \in (-0.2, 0.2)$$

Коэффициент a в данной формуле принимает значение $a = 0.2$. Всюду вне этой области потенциал будем считать равным нулю: $q(x, y) = 0$. Вид такого решения приведён на иллюстрации 4.13. Для выбранного потенциала $q(x, y)$ было проведено решение прямой задачи на основе соотно-

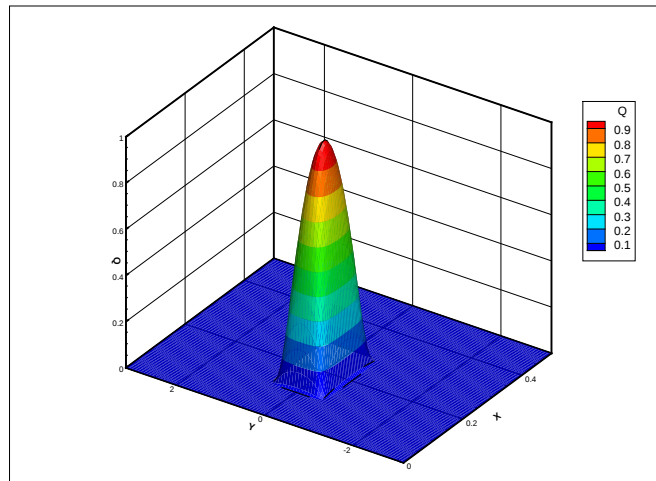


Рисунок 4.13: Определение потенциала - тестовое решение.

шений (4.22), (4.23). Решение прямой задачи производилось для $N_x = 100$ узлов по переменной x и для $N_F = 10$ гармоник Фурье (что соответствует 10 источникам). Результат решения прямой задачи показан на рисунках 4.14 - 4.17, где приведены графики функций $f^{(k)}(y, t)$ (соответствующих решению прямой задачи с источником вида e^{iky}) для $k = 0, 1, 3, 5$.

На рисунке 4.18 рассматривается зависимость нормы интегрального оператора K , соответствующего двумерному аналогу уравнения Гельфанда - Левитана, от N_F - количества восстанавливаемых гармоник Фурье. Для вычисления величины $|K|$ мы использовали соотношение (4.24).

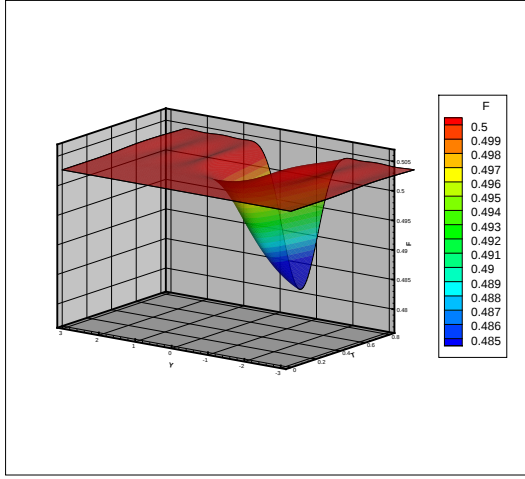


Рисунок 4.14: Решение прямой задачи
- функция $f^{(0)}(y, t)$.

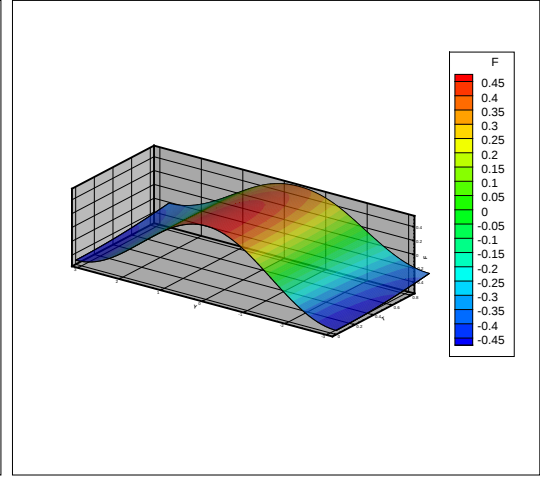


Рисунок 4.15: Решение прямой задачи
- функция $f^{(1)}(y, t)$.

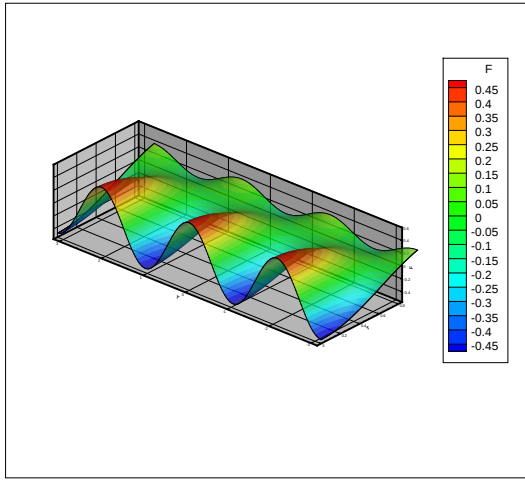


Рисунок 4.16: Решение прямой задачи
- функция $f^{(3)}(y, t)$.

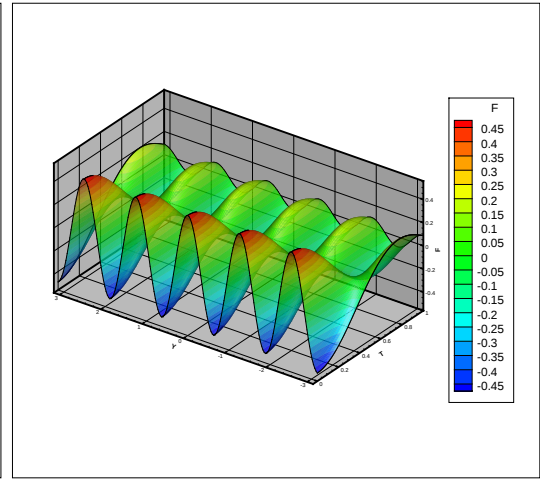


Рисунок 4.17: Решение прямой задачи
- функция $f^{(5)}(y, t)$.

С одной стороны, увеличение этого параметра повышает точность искомого решения, поскольку в формулировку уравнения вовлекается больше информации. С другой стороны, с ростом N_F растёт количество уравнений (а, следовательно, и трудоёмкость), и, как можно видеть на рисунке 4.18, норма оператора K . Для дальнейших расчётов будем ограничиваться случаем $N_F = 5$ как максимальным значением параметра, при котором можно гарантировать сходимость ряда Неймана для всех $x \leq 0.5$.

Воспользуемся методом подобных траекторий (4.25) для решения обратной задачи. Конечность матрицы ковариаций для оценки, задаваемой (4.25) зависит в том числе от выбранной вероятности обрыва цепи P_0 . Положим сначала $P_0 = 0$ и обозначим $\tilde{K}_p$ соответствующий этой вероятности обрыва интегральный оператор, задающий уравнение для матрицы ковариаций. Поскольку $|K_p|$ зависит от вероятности обрыва как $\frac{1}{1-P_0}$, то в случае, если значение $\|\tilde{K}_p\|(x)$ будет превышать единицу, то для любой ненулевой вероятности обрыва достаточное условие конечности

матрицы ковариаций не будет выполняться. Зависимость величины $||\tilde{K}_p||(x)$ от параметра N_F приведена на рисунке 4.19. Отметим, что при $N_F = 5$ эта величина становится больше единицы для некоторых значений глубины. Чтобы избежать этого, мы уменьшим рассматриваемую область и будем в дальнейшем рассматривать $x \leq 0.4$. Тогда вероятность обрыва цепи P_0 можно выбрать таким образом, чтобы гарантировать конечность матрицы ковариаций для всех рассматриваемых значений N_F . В ходе расчётов вероятность обрыва выбиралась исходя из соотношения

$$\max_{0 \leq x \leq x_{max}} ||K_p||(x) \approx 0.95$$

Отсюда

$$P_0 \approx 1 - \frac{||\tilde{K}_p||(x_{max})}{0.95} \quad (4.36)$$

На рисунках 4.20, 4.21 представлены результаты решения обратной задачи с помощью метода

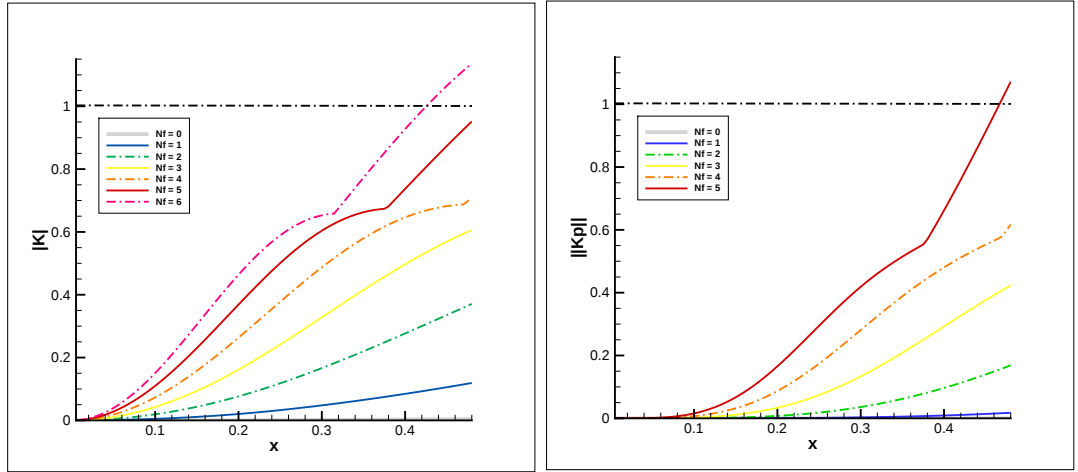


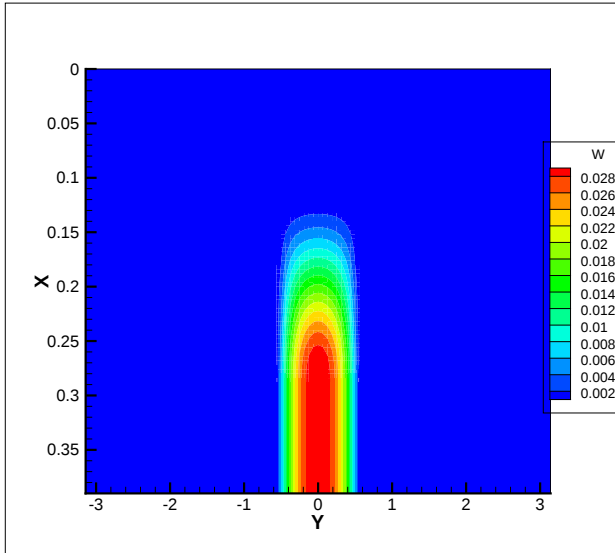
Рисунок 4.18: Зависимость $||K||(x)$ от параметра N_F .

Рисунок 4.19: Зависимость $||\tilde{K}_p||(x)$ от параметра N_F .

Монте-Карло для различных значений параметра N_F . На рисунке 4.20 приведен график функции $\tilde{w}^{(0)}(x, y)$, полученная после решения двумерного аналога уравнения Гельфанда-Левитана (2.51). На рисунке 4.21 приведено решение исходной обратной задачи - функция $q(x, y)$, полученная из решения уравнения (2.51) с помощью соотношения (2.38). Число траекторий было выбрано равным $N = 2000$. Численное дифференцирование производилось на основе конечно-разностных соотношений.

На рисунке (4.20) приведены графики следа выборочной матрицы ковариаций в зависимости от параметра N_F . Можно отметить, что максимальные величины следа во всех рассмотренных случаях оказались близки. Это можно объяснить тем фактом, что нормы интегральных операторов были «уравнены» выбором вероятности обрыва цепи P_0 исходя из (4.36). Так, при $N_F = 2$ цепь обрывалась с вероятностью $P_0 = 0.9$, для $N_F = 3$ соответствующее значение было выбрано равным $P_0 = 0.65$, при $N_F = 5$ цепь обрывалась с вероятностью $P_0 = 0.3$.

В таблицах 4.9, 4.10 приведено сравнение временных затрат и точности решения обратной зада-



Точное решение

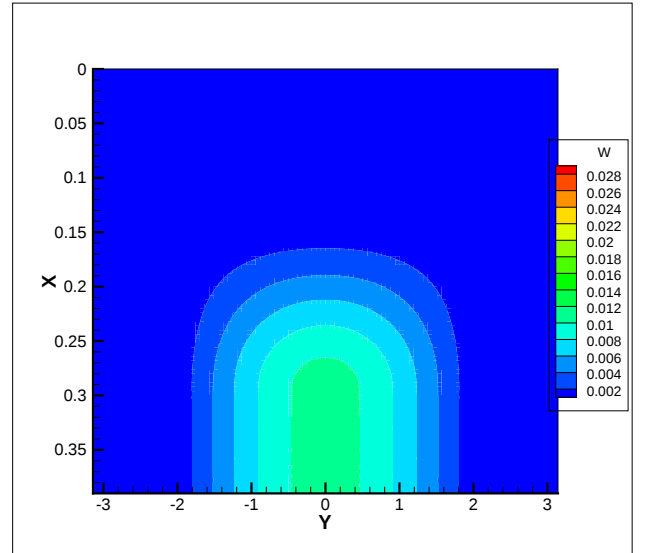
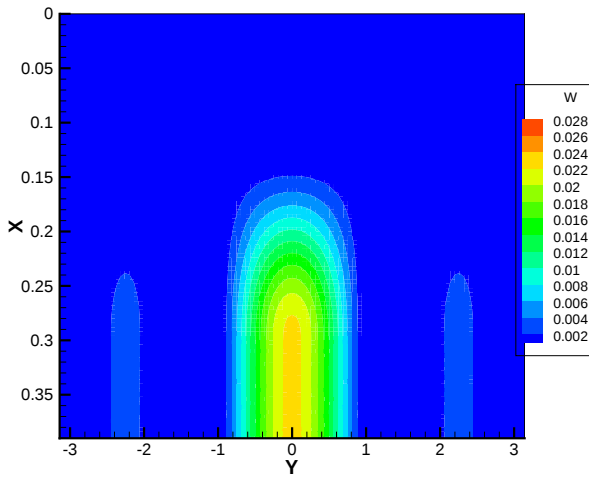
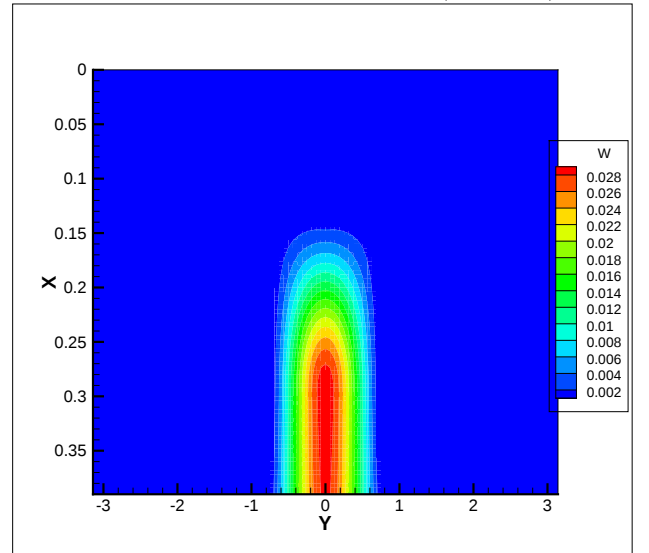
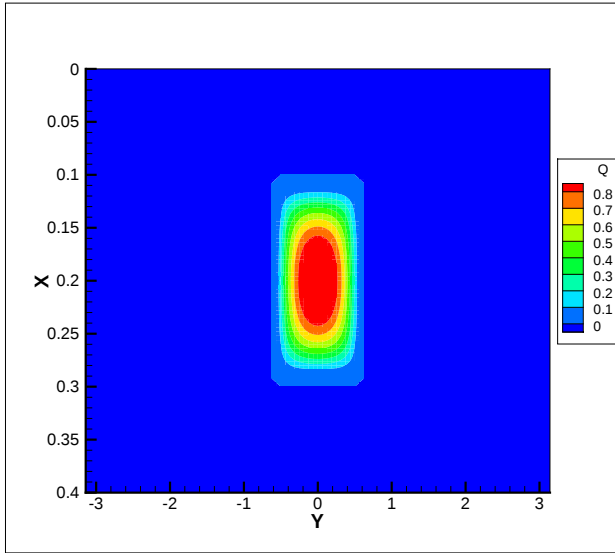
Решение на основе МПТ ($N_F = 1$)Решение на основе МПТ ($N_F = 3$)Решение на основе МПТ ($N_F = 5$)

Рисунок 4.20: метод Монте-Карло - решение двумерного аналога уравнения Гельфанда-Левитана

чи на основе метода Монте-Карло, и стандартного детерминистского алгоритма из библиотеки `cvmlib`, для разного значения числа узлов ($Nx = 50, 100$) и разного числа восстанавливаемых гармоник N_F . Здесь под w_{err} понимается ошибка в решении уравнения Гельфанда-Левитана $||\tilde{w}_{exact}^{(0)}(x,y) - \tilde{w}_{calc}^{(0)}(x,y)||$ в пространстве $L_2((0, x_{max}) \times (-\pi, \pi))$, а под q_{err} - ошибка в решении обратной задачи $||\tilde{w}_{exact}^{(0)}(x,y) - \tilde{w}_{calc}^{(0)}(x,y)||$ в том же пространстве $L_2((0, x_{max}) \times (-\pi, \pi))$. Усреднение значений, описывающих метод Монте-Карло, проводилось по 10 экспериментам. Можно сделать вывод, что на крупной сетке стандартный метод и предложенный вариант метода подобных траекторий показывают идентичные результаты как по трудоёмкости, так и по точности. С увеличением же числа узлов метод Монте-Карло показывает значительно лучшее быстродействие. Следует также отметить, что полученные значения ошибок связаны не только с погрешностями вычислительного метода, но и с тем фактом, что мы восстанавливаем только конечное количество коэффициентов Фурье искомых функций $\tilde{w}^{(0)}(x,y)$ и $q(x,y)$. Кроме того,



Точное решение

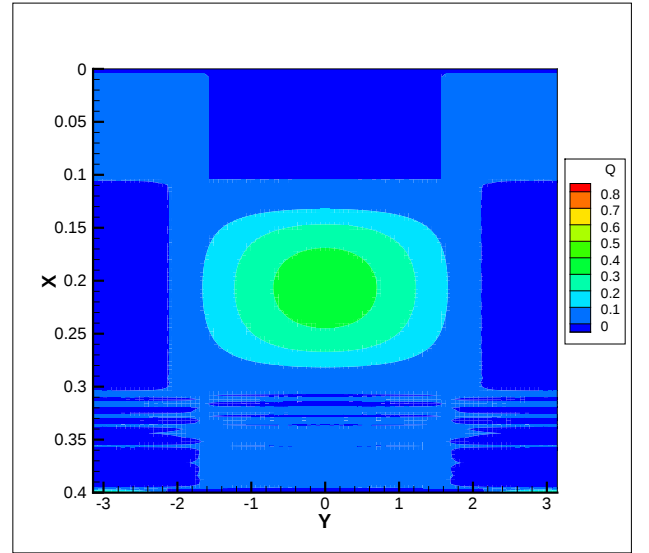
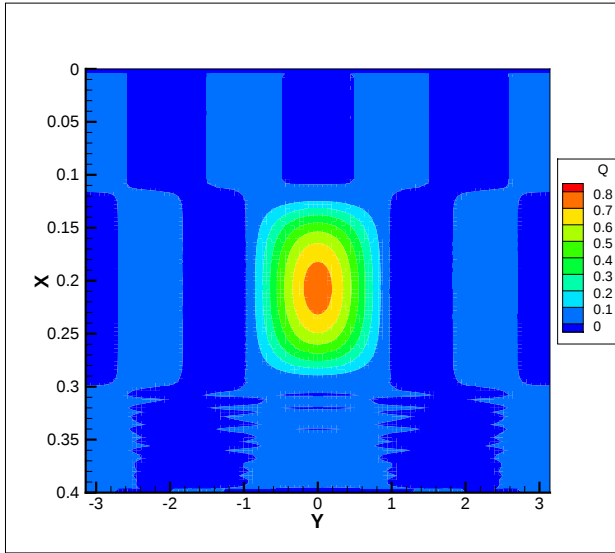
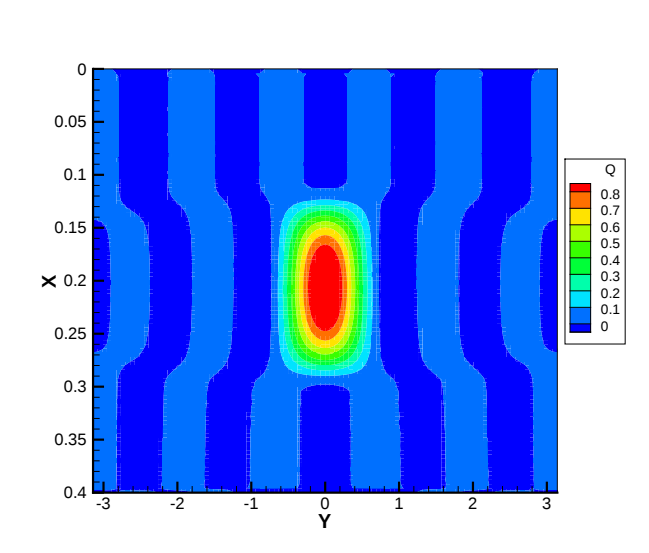
Решение на основе МПТ ($N_F = 1$)Решение на основе МПТ ($N_F = 3$)Решение на основе МПТ ($N_F = 5$)

Рисунок 4.21: метод Монте-Карло - решение обратной задачи

ухудшение результатов, наблюдаемое при $N_F = 5$, $N_x = 50$, по-видимому, связано с тем, что с увеличением N_F начинают играть роль погрешности, связанные с вычислением данных обратной задачи на крупной сетке.

Далее, приведём сравнение метода подобных траекторий с независимым решением каждого уравнения методом Монте-Карло. Результаты таких расчётов приведены на рисунке 4.23. Здесь под $q_{cut}(x, y)$ подразумевается проекция $q(x, y)$ на подпространство, соответствующее конечным суммам Фурье при $N_F = 5$. Расчёты показывают, что, несмотря на примерно одинаковую точность при вычислении решения уравнения И.М. Гельфанда - Б.М. Левитана, метод подобных траекторий обеспечивает большую гладкость решения. Независимое решение каждого из уравнений, составляющих (2.51), содержит более выраженный стохастический характер ошибки, что приводит к характерным погрешностям при численном дифференцировании и вычислении $q(x, y)$.

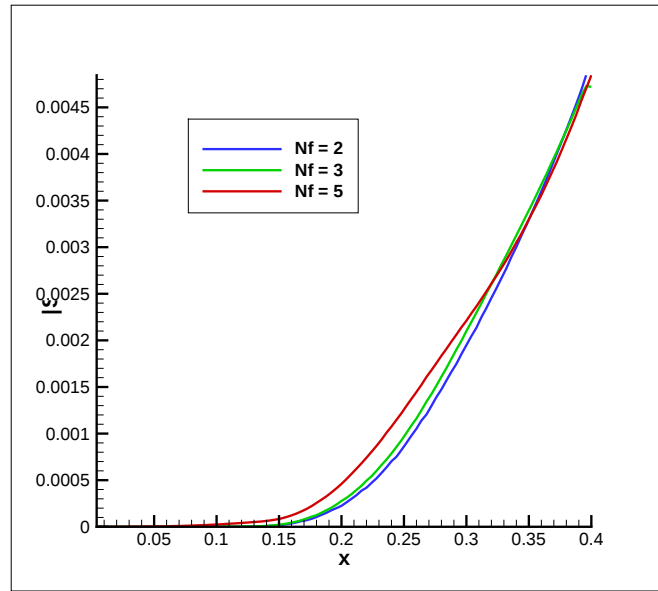


Рисунок 4.22: След матрицы ковариаций

$N_x = 50$	МПТ	$T_{total}(ms)$	w_{err}	q_{err}	CVM	T_{total}	w_{err}	q_{err}
$N_F = 0$		500	0.0096	0.228		156	0.0096	0.228
$N_F = 1$		916	0.0079	0.1904		1078	0.0079	0.1904
$N_F = 2$		922	0.0061	0.1516		3703	0.0061	0.1516
$N_F = 3$		3687	0.0046	0.117		8406	0.0046	0.1171
$N_F = 4$		11875	0.0039	0.0967		15562	0.0039	0.0967
$N_F = 5$		25110	0.0061	0.115		26359	0.0060	0.1151

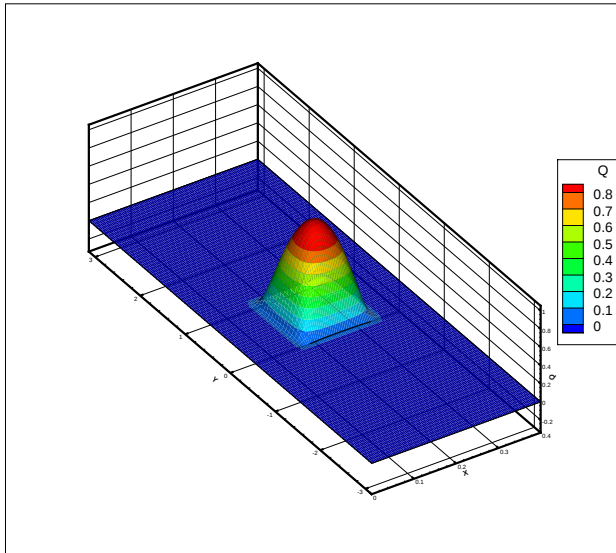
Таблица 4.9: Решение двумерной обратной задачи - сравнение со стандартным методом

Теперь рассмотрим другое модельное решение. Рассмотрим на интервале $x \in (0,1)$ функцию $q(x,y)$, заданную следующим равенством:

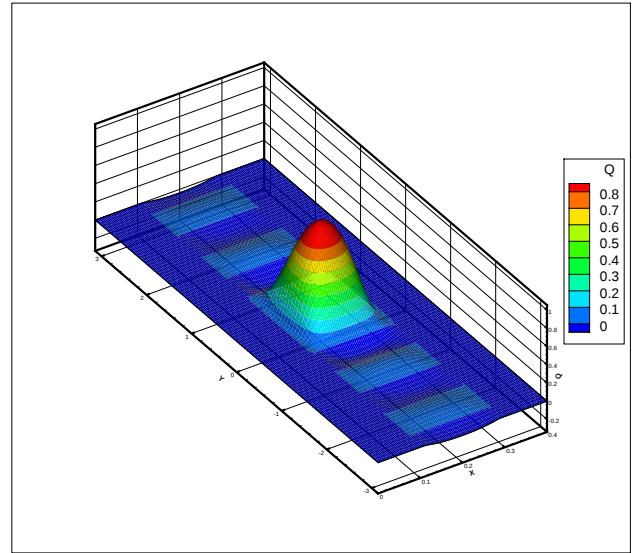
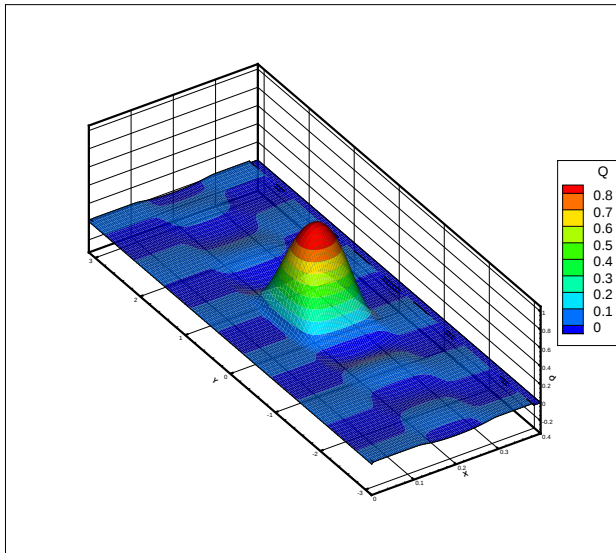
$$q(x,y) = \begin{cases} \exp \left\{ 2 + \frac{0.01}{(x-0.25)^2-0.01} + \frac{0.04}{(\frac{y}{\pi})^2-0.04} \right\}, & x \in (0.15, 0.35), \frac{y}{\pi} \in (-0.2, 0.2); \\ \exp \left\{ 2 + \frac{0.01}{(x-0.5)^2-0.01} + \frac{0.04}{(\frac{y}{\pi})^2-0.04} \right\}, & x \in (0.4, 0.6), \frac{y}{\pi} \in (-0.2, 0.2); \\ \exp \left\{ 2 + \frac{0.01}{(x-0.75)^2-0.01} + \frac{0.04}{(\frac{y}{\pi})^2-0.04} \right\}, & x \in (0.65, 0.85), \frac{y}{\pi} \in (-0.2, 0.2); \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (4.37)$$

$N_x = 100$	МПТ	$T_{total}(ms)$	w_{err}	q_{err}	CVM	T_{total}	w_{err}	q_{err}
$N_F = 0$		532	0.0117	0.228		1157	0.0091	0.227
$N_F = 1$		1140	0.0077	0.187		11000	0.0077	0.1871
$N_F = 2$		1950	0.0060	0.146		41620	0.0060	0.1451
$N_F = 3$		7750	0.0043	0.108		113400	0.0043	0.105
$N_F = 4$		19125	0.0029	0.075		233000	0.0029	0.0708
$N_F = 5$		57700	0.0021	0.05		374100	0.0021	0.047

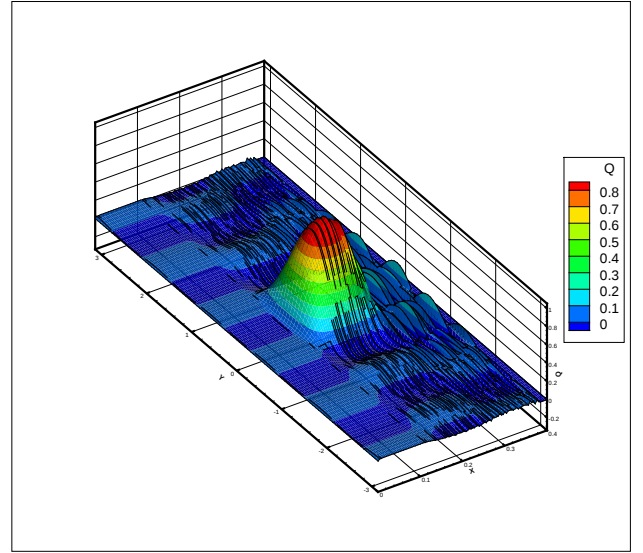
Таблица 4.10: Решение двумерной обратной задачи - сравнение со стандартным методом



Точное решение

 $q_{cut}(x, y)$ 

Решение на основе МПТ



Независимое решение каждого из уравнений

Рисунок 4.23: метод подобных траекторий - сравнение с независимым решением каждого уравнения

Решение, заданное (4.37), представляет собой три «пика» с центрами в точках $x = 0.25, x = 0.5, x = 0.75$. График такого решения приведён на рисунке 4.24. На соседнем графике 4.25 приведена зависимость нормы интегрального оператора K от параметра N_F .

Как следует из результатов, представленных на 4.25, с увеличением количества восстанавливаемых коэффициентов ряд Фурье область применимости метода Монте-Карло. Так, поскольку при $N_F = 5$ норма $|K|$ становится больше единицы при $x > 0.5$, то в этом случае решение методом Монте-Карло позволит восстановить только один «пик» (а также частично второй).

Рассмотрим теперь решение данной обратной задачи с помощью стохастического проекционного метода. Рассматривались три варианта метода - «построчный» вариант, задаваемый итерационным процессом (2.64), блочный вариант (2.67) с разбиением матрицы на пары строк, и блочный вариант с размером блоков $2N_F + 1$, где матрица проектирования имеет вид (4.35).

Сначала исследуем влияние выбора начального приближения на точность решения. Напомним,

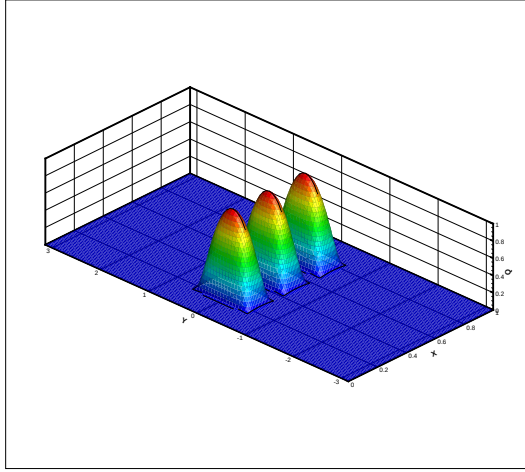


Рисунок 4.24: эксперимент №2 - тестовое решение.

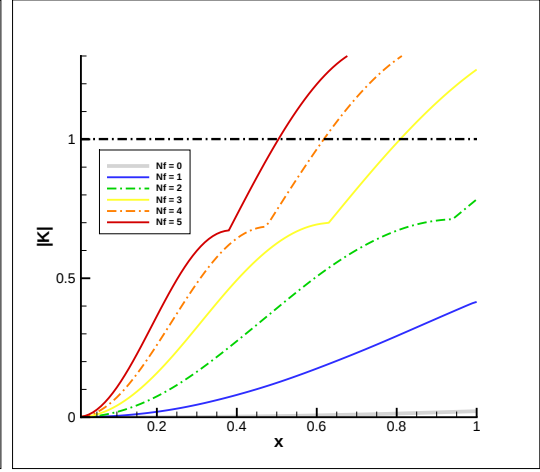
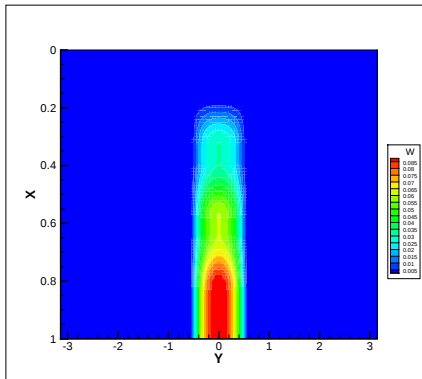


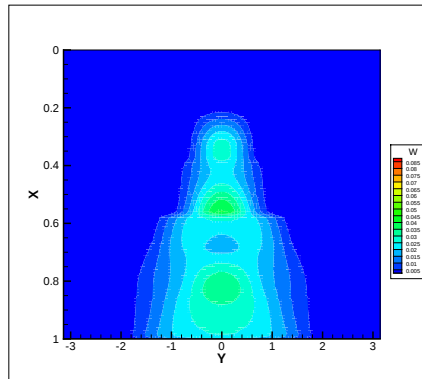
Рисунок 4.25: Зависимость $\|K\|(x)$ от параметра N_F .

что соотношение (4.34) позволяет выбрать начальное приближение для решения уравнения Гельфанда-Левитана в точке $x = mh$, используя решение в точке $x = (m + 1)h$ и тот факт, что при небольших изменениях глубины x изменения значений функции $W(x,t)$, которая является решением уравнения Гельфанда - Левитана (2.51), также невелики.

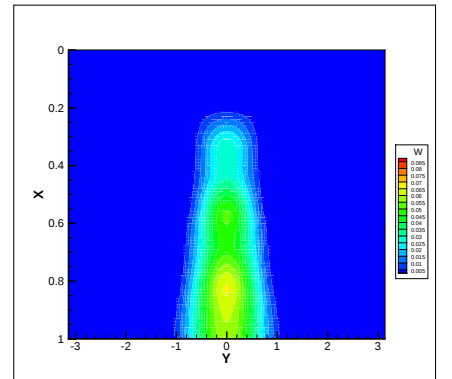
На рисунках 4.26, 4.27 приведены результаты решения обратной задачи в зависимости от



Точное решение



Нулевое нач. пригл.



Нач. пригл. (4.34)

Рисунок 4.26: Влияние начального приближения на решение уравнения Гельфанда - Левитана

выбора начального приближения. Слева приведено точное решение уравнения И.М. Гельфанда - Левитана (функция $w^{(0)}(x,y)$) и решения обратной задачи (функция $q(x,y)$) соответственно. В ходе данного расчёта использовался «построчный» вариант стохастического проекционного метода, для выбора случайной строки, соответствующей весу, использовался метод Уолкера. Количество узлов по переменной x было выбрано равным $N_x = 100$, количество восстанавливаемых коэффициентов Фурье $N_F = 5$, количество итераций (2.64) было выбрано равным $N_{Iter} = 2500$.

Погрешность при восстановлении функции $\tilde{w}^{(0)}(x,y)$ в пространстве $L_2((0, x_{max}) \times (-\pi, \pi))$ составила 0.0031 в случае нулевого начального приближения, 0.0163 для начального приближения вида (4.34). Погрешность при восстановлении функции $q(x,y)$ в пространстве

$L_2((0, x_{max}) \times (-\pi, \pi))$ составила 0.499 в случае нулевого начального приближения, 0.195 для начального приближения вида (4.34). Таким образом, использование связи между уравнениями, составляющими уравнение Гельфанда-Левитана (2.33), (2.51), позволяет значительно увеличить точность решения (в два раза в данном эксперименте) при одном и том же количестве итераций. В таблице (4.2) приведены результаты решения обратной задачи стохастическим проекционным

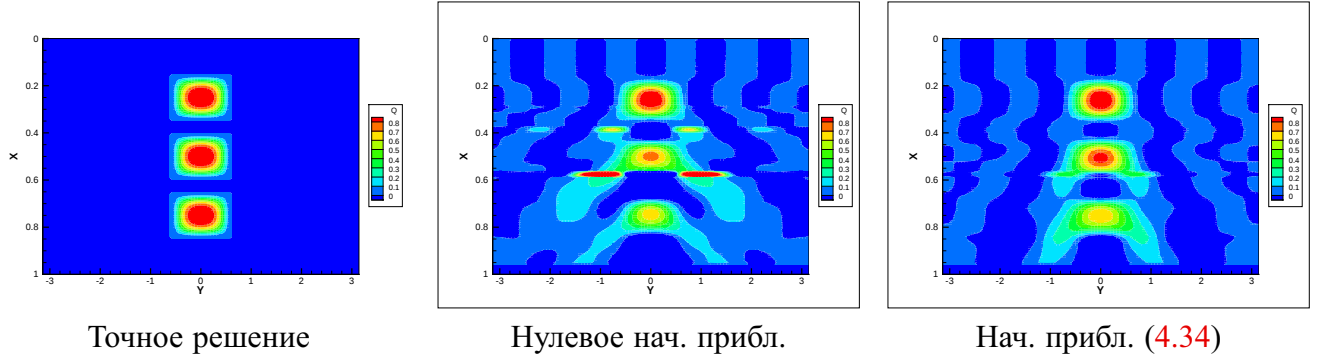


Рисунок 4.27: Влияние начального приближения на решение обратной задачи

методом. Уменьшение ошибки при увеличении количества итераций (для блочного варианта метода с размером блоков 2) также представлено на рисунках 4.28, 4.29.

Можно отметить, что из трёх рассмотренных вариантов стохастического проекционного «построчный» вариант оказывается наиболее эффективным (хотя и незначительно). Что касается сравнения со стандартным методом, то все варианты метода Качмажа оказываются значительно более эффективными с точки зрения быстродействия. Сравнение же с точки зрения точности оказывается неоднозначным. Хотя погрешность, получаемая при решении уравнения Гельфанда-Левитана, практически одинакова как для метода Качмажа (при достаточно большом числе итераций), так и для стандартного подхода, при переходе к восстановлению потенциала $q(x, y)$ точность стохастического проекционного метода падает.

	CVM	BlockSize = 1			BlockSize = 2			BlockSize = $2N_F + 1$		
N_{Iter}		1000	2000	4000	600	1200	1800	50	250	450
$T_{Total}(sec)$	357.0	33.683	66.3	137.7	39.5	81.4	123.7	49.9	98.1	155.0
w_{err}	0.014	0.021	0.017	0.015	0.019	0.018	0.017	0.021	0.017	0.015
q_{err}	0.162	0.267	0.378	0.210	0.59	0.432	0.386	0.859	0.448	0.383

Таблица 4.11: Стохастический проекционный метод - результаты расчётов

Такое поведение обуславливается стохастическим характером предложенных алгоритмов. Ошибки, содержащиеся в решении, полученном стохастическим проекционным методом, носят случайный характер, и поскольку для перехода от решения уравнения Гельфанда-Левитана $\tilde{w}^{(0)}(x, y, x - 0)$ к решению обратной задачи $q(x, y)$ необходимо произвести численное дифференцирование, влияние этих случайных погрешностей значительно увеличивается (следует отметить, что решение, полученное на основе «строкового» варианта метода в меньшей степени

подвержено такому поведению).

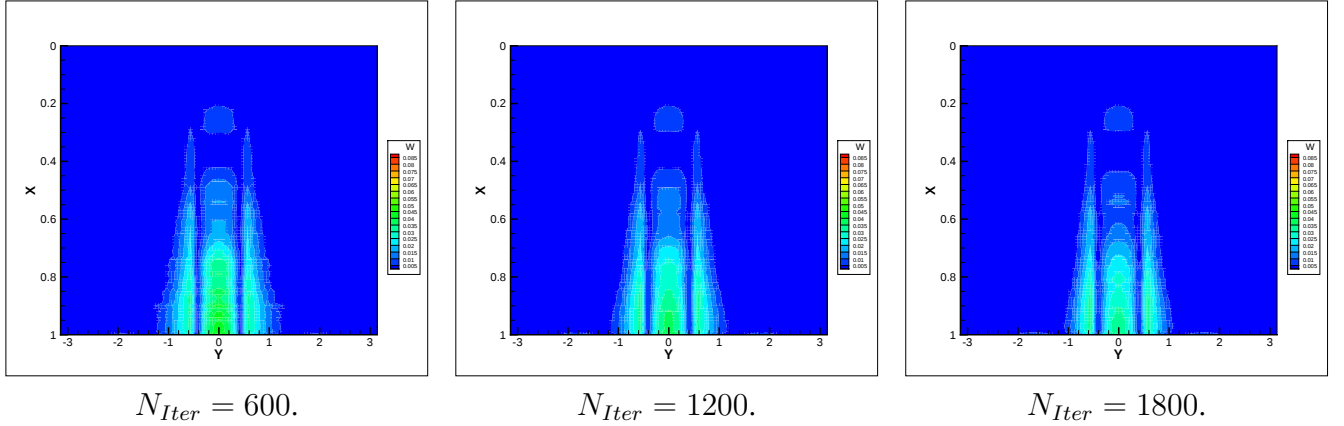


Рисунок 4.28: Блочный вариант метода - уменьшение $||w_{calc} - w_{true}||$ при увеличении итераций.

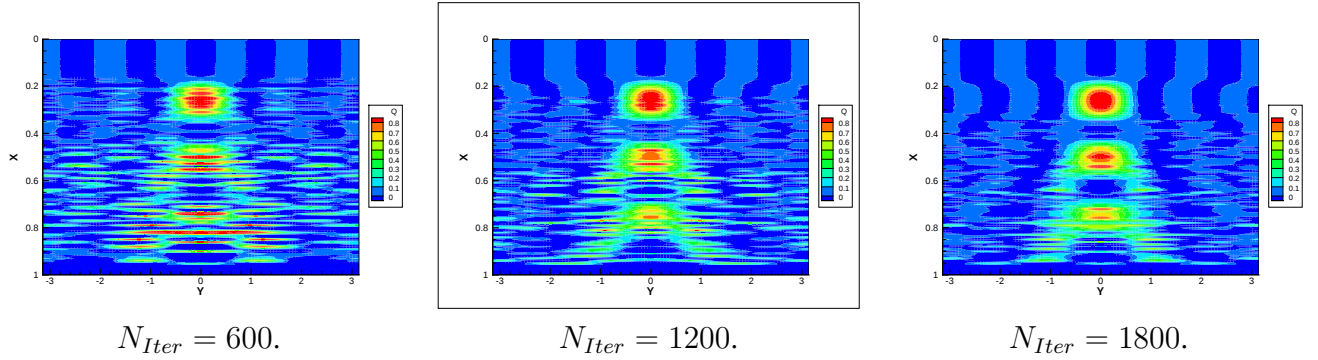
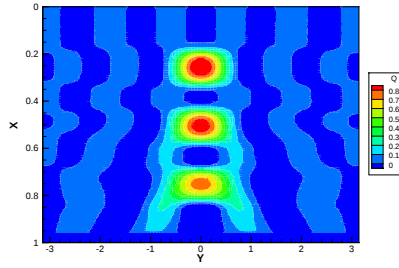


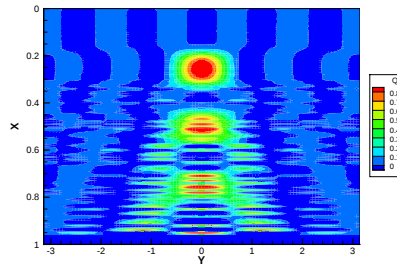
Рисунок 4.29: Блочный вариант метода - уменьшение $||q_{calc} - q_{true}||$ при увеличении итераций.

Для преодоления данной особенности мы воспользуемся свёрткой вычисленных в ходе решения коэффициентов Фурье $\tilde{w}_m^{(0)}$, $m = -N_F, \dots, N_F$ с усредняющим ядром Соболева (4.16). Это позволяет частично нивелировать погрешности метода, связанные со случайными ошибками и численным дифференцированием. Результаты (в сравнении с решением, полученным с помощью «стандартного» решателя линейных систем) применения такой процедуры сглаживания (для блочного метода с размером блоков $2N_F + 1$, количество итераций $N_{Iter} = 450$) представлены на рисунке 4.30. Отметим также, что «точное» решение с использованием стандартного подхода из библиотеки `cvmlib.com` также не позволяет восстановить точно все три пика (третий «пик» оказывается восстановленным только частично). По-видимому, это связано со спецификой задачи, и приходящей на поверхность $x = 0$ информации недостаточно для «идеального» восстановления решения.

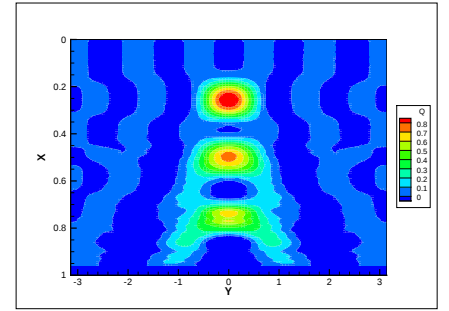
Проведём сравнение метода Монте-Карло и стохастического проекционного метода. Для этого рассмотрим область $x \leq 0.4$, в которую попадает только один «пик». Как следует из рисунка 4.25, в данной области гарантирована сходимость ряда Неймана для уравнения Гельфанда-Левитана, что позволяет использовать метод Монте-Карло для его решения. Результаты расчётов приведены в таблице 4.12. Был использован метод подобных траекторий (число траекторий $N = 2000$,



Решение «стандартным»
методом.



Проекц. метод - решение без
сглаживания.



Проекц. метод - сглаженное
решение.

Рисунок 4.30: Влияние сглаживания решения уравнения Гельфанда-Левитана на точность решения обратной задачи.

вероятность обрыва $P_0 = 0.3$), и стохастический проекционный метод (блочный вариант, размер блоков $2N_F + 1$, количество итераций $N_{Iter} = 100$). Для проекционного метода также было использование сглаживание решения усредняющим ядром Соболева, ширина «окна сглаживания» $5h_x$.

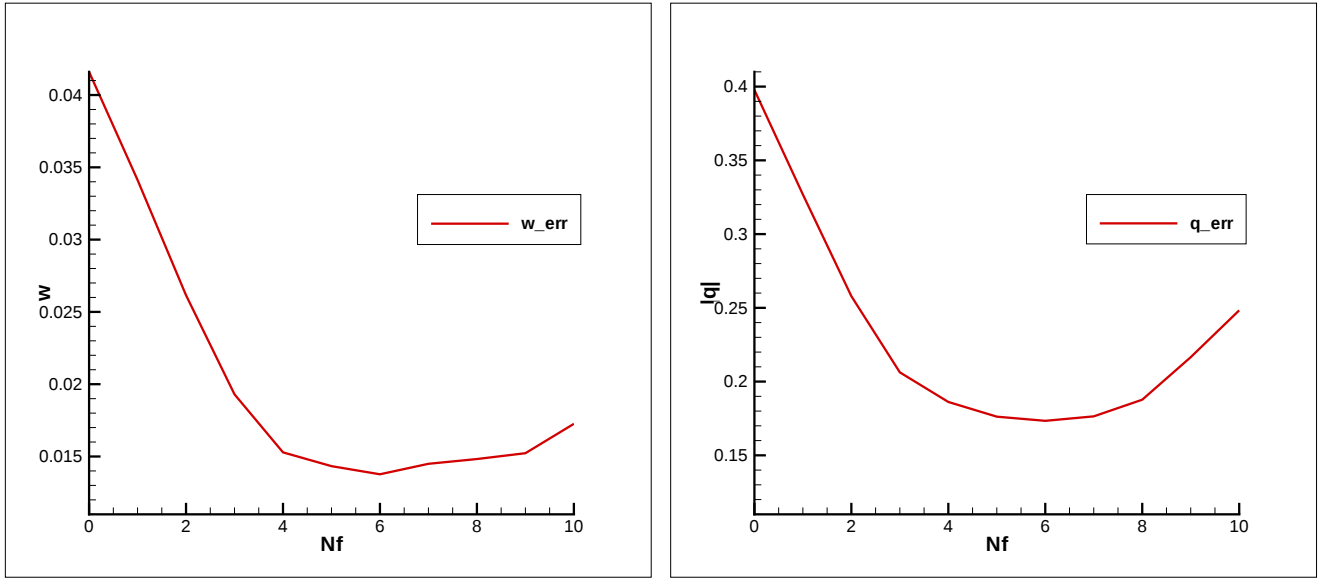
В приведённых условиях эффективность метода подобных траекторий оказывается несколько

	$T_{Total}(sec)$	w_{err}	q_{err}
Метод подобных траекторий	55.7	0.0018	0.0053
Стохаст. проекц. метод	56.9	0.0020	0.473
Стохаст. проекц. метод (сглаж.)	- -	- -	0.065

Таблица 4.12: Частичное восстановление потенциала - сравнение проекционного метода и метода подобных траекторий

выше. При этом несмотря на то, что значения погрешностей в решении уравнения Гельфанда-Левитана отличаются незначительно, погрешность решения обратной задачи в случае стохастического проекционного метода оказывается значительно выше. Этот факт, как уже было упомянуто, связан с численным дифференцированием зашумлённого случайными ошибками решения. Использование же одной траектории для моделирования методом Монте-Карло случайной величины для всех значений глубины позволяет получить более «гладкое» решение уравнения Гельфанда-Левитана, которое приводит к более точному решению обратной задачи. Отметим, что сглаживание решения уравнения Гельфанда-Левитана, полученного проекционным методом, преодолевает эту особенность. Однако при этом возникает вопрос выбора ширины «окна сглаживания», который должен производиться в зависимости от уровня ошибок.

В завершение раздела приведём график зависимости погрешностей от количества восстанавливаемых гармоник Фурье N_F (рисунок 4.31). Поведение этих кривых показывает, что параметр N_F является параметром регуляризации.



Погрешность решения уравнения
Гельфанда-Левитана $||w_{true} - w_{calc}||$.

Погрешность решения обратной задачи
 $||q_{true} - q_{calc}||$.

Рисунок 4.31: Зависимость точности решения от количества восстанавливаемых коэффициентов Фурье.

4.3 Определение плотности из двумерного уравнения акустики

В этом разделе мы рассмотрим численные эксперименты по решению обратной задачи для уравнения колебаний в случае двух пространственных переменных, рассмотренной в главе 3:

$$\begin{aligned}
 u_{tt}^{(k)} &= \Delta u^{(k)} + \nabla \ln \rho(x, y) \nabla u^{(k)}; \\
 x &> 0, \quad y \in (-\pi, \pi), \quad t > 0, k \in \mathbb{Z} \\
 u^{(k)}|_{t=0} &\equiv 0, \\
 u_x^{(k)}|_{x=0} &= \delta(t) e^{iky}. \\
 u^{(k)}(+0, y, t) &= f^{(k)}(y, t), \quad y \in (-\pi, \pi), k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Здесь, как и ранее, мы предполагаем, что $q(-x, y) = q(x, y)$, $x > 0$. В главе 3 мы показали, что данная задача может быть сведена к решению (3.27), представляющих собой семейство линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода и являющихся двумерным аналогом уравнения М.Г. Крейна:

$$\Phi^{(k)}(x, t) - \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{-x}^x f_m^{(k)'}(t-s) \Phi^{(m)}(x, s) ds = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{iky}}{\rho(0, y)} dy, \quad t \in (-x, x), k \in \mathbb{Z}$$

Напомним, что $f_m^{(k)'}(t)$ - коэффициенты разложения функций $f^{(k)'}(y, t)$ в ряд Фурье. Кроме того, функции $f^{(k)'}(y, t)$ (а, следовательно, и $f_m^{(k)'}(t)$) являются четными функциями переменной t . Для

того, чтобы найти решение обратной задачи (4.3.1)-(3.9) в некоторой точке $x_0 > 0$, необходимо решить двумерный аналог уравнения М.Г. Крейна (3.27) при $x = x_0$, а затем восстановить значение $\rho(x_0, y)$ согласно формуле (3.28):

$$\rho(x, y) = \frac{\pi^2}{\rho(0, y)} \left[\sum_{m \in \mathbb{Z}} \Phi^{(m)}(x, x - 0) e^{-imy} \right]^{-2}$$

Как и ранее, апробация предложенных алгоритмов будет проходить на модельной задаче. Мы выберем модельное значение коэффициента $\rho(x, y)$, решим прямую задачу, определим данные прямой задачи $f^{(k)}(y, t)$ и коэффициенты их разложения в ряд Фурье $f_m^{(k)}(t)$, после чего решим многомерный аналог уравнения М.Г. Крейна и сравним решение обратной задачи с модельным.

4.3.1 Схема решения прямой задачи

Итак, выберем модельное решение $q(x, y)$ и рассмотрим задачу определения функций $u^{(k)}(x, y, t)$, удовлетворяющих соотношениям:

$$\begin{aligned} u_{tt}^{(k)} &= \Delta u^{(k)} + \nabla \ln \rho(x, y) \nabla u^{(k)}; \\ x > 0, \quad y &\in (-\pi, \pi), \quad t > 0, k \in \mathbb{Z} \\ u^{(k)}|_{t=0} &\equiv 0, \\ u_x^{(k)}|_{x=0} &= \delta(t) e^{iky}. \end{aligned}$$

По аналогии с предыдущим разделом, мы используем комбинацию проекционного метода с конечно-разностным. Предположим, что имеет место следующее представление:

$$u^{(k)}(x, y, t) = \sum_{m=-N_F}^{N_F} u_m^{(k)}(x, t) e^{imy}; \quad \ln \rho(x, y) = \sum_{m=-N_F}^{N_F} a_m(x) e^{imy}$$

В этом случае прямая задача сводится к задаче вида (4.3.1)-(4.3.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_n^{(k)}}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u_n^{(k)}}{\partial x^2} - n^2 u_n^{(k)}(x, t) - \\ &- \sum_{|m| < N_F, |m-n| < N_F} \frac{\partial a_m(x)}{\partial x} \frac{\partial u_{n-m}^{(k)}}{\partial x}(x, t) + \sum_{|m| < N_F, |m-n| < N_F} m(m-n) a_m(x) u_{n-m}^{(k)}(x, t) \\ x &\in \mathbb{R}, t > 0, k, n = -N_F, \dots, N_F; \\ u_n^{(k)}|_{t=0} &= 0, \quad \frac{\partial u_n^{(k)}}{\partial t}|_{t=0} = \delta_{kn} \delta(x); \end{aligned}$$

Как было показано в главе 3, задача может быть переписана в векторно-матричном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_{N_F}^{(k)}}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 U_{N_F}^{(k)}}{\partial x^2} - K U_{N_F}^{(k)} + A(x) U_{N_F}^{(k)} - B(x) \frac{\partial U_{N_F}^{(k)}}{\partial x}, \quad x > 0, \quad t > 0, \\ U_{N_F}^{(k)}|_{t < 0} &\equiv 0, \quad \frac{\partial U_{N_F}^{(k)}}{\partial x}|_{x=0} = I_N^{(k)} \delta(t). \end{aligned}$$

Здесь вектор $U_{N_F}^{(k)}$ имеет размерность $2N_F + 1$ и состоит из коэффицентов Фурье $u_m^{(k)}$, $m = -N_F, \dots, N_F$. Вид матриц A , K , B был представлен в разделе 3.1:

$$\begin{aligned} K_{km} &= m^2 \delta_{km}, \quad k, m = -\overline{N, N}, \\ A_{km}(x) &= m(k - m) a_{k-m}(x), \quad k, m = -\overline{N, N}, \\ B_{km}(x) &= \frac{\partial a_{k-m}(x)}{\partial x}, \quad k, m = -\overline{N, N}. \end{aligned}$$

Перейдём теперь к задаче Гурса. Для функции $u^{(k)}(x, y, t)$ имеет место представление (3.14):

$$u^{(k)}(x, y, t) = -S(x, y) \theta(t - x) + \tilde{u}^{(k)}(x, y, t),$$

где

$$S(x, y) = e^{iky} \sqrt{\frac{\rho(x, y)}{\rho(0, y)}}.$$

Используя это соотношение, и продолжая все функции чётным образом по переменной x , получим:

$$\frac{\partial^2 U_{N_F}^{(k)}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U_{N_F}^{(k)}}{\partial x^2} - K U_{N_F}^{(k)} + A(x) U_{N_F}^{(k)} - B(x) \frac{\partial U_{N_F}^{(k)}}{\partial x}, \quad x \in (-T, T), \quad t \in (0, 2T), \quad (4.38)$$

$$U_{N_F}^{(k)}|_{t=x} = U_{N_F}^{(k)}|_{t=-x} = S^{(k)}, \quad t \in (0, T). \quad (4.39)$$

Для решения задачи (4.38)-(4.39) воспользуемся следующей разностной схемой:

$$U_i^{k+1} = \left[I - \frac{h^2}{2}(K + A_i) - \frac{h}{2}B_i \right] U_{i-1}^k + \left[I - \frac{h^2}{2}(K + A_i) + \frac{h}{2}B_i \right] U_{i+1}^k - U_i^{k-1}, \quad k > |i|; \quad (4.40)$$

$$U_i^i = U_{-i}^i = S_i \quad (4.41)$$

Здесь $U_i^k = U_{N_F}^{(k)}(ih, kh)$, $h = \frac{T}{N_x}$. С помощью данной разностной схемы мы можем получить решение прямой задачи, и, следовательно, его след $F_j^k = U_{N_F}^{(k)}(0, jh) = U_0^j$. Тем самым, вычислив коэффиценты разложения функций $f_m^{(k)}$ при $t = jh$ в ряд Фурье, можно определить данные обратной задачи $f^{(k)}(y, t) \approx \sum_{m=-N_F}^{N_F} f_m^{(k)}(t) e^{imy}$ в точках $t = jh$.

4.3.2 Решение двумерного аналога уравнения М.Г. Крейна с помощью алгоритма обращения блочно-тёплицевой матрицы

Рассмотрим схему решения двумерного аналога уравнения М.Г. Крейна (3.27):

$$\Phi^{(k)}(x, t) - \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{-x}^x f_m^{(k)'}(t-s) \Phi^{(m)}(x, s) ds = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{iky}}{\rho(0, y)} dy, \quad t \in (-x, x), k \in \mathbb{Z}$$

Также, как и в случае уравнения колебаний, будем решать данное семейство уравнений с помощью проекционного метода. Считая, что все коэффициенты Фурье (относительно переменной y) всех входящих в постановку (4.3.1)-(3.9) функций с номерами $m > |N_F|$, получим уравнение (3.37):

$$2\widehat{\Phi}(x, t) - \int_{-x}^x \mathbb{F}(t-s) \widehat{\Phi}(x, s) ds = \widehat{G}, \quad |t| < x.$$

Здесь $\widehat{G}(t) \equiv \widehat{G} = \left(\widehat{G}^{(-N_F)}, \dots, \widehat{G}^{(N_F)} \right)^T$, $\widehat{\Phi}(x, t) = \left(\Phi^{(-N_F)}, \dots, \Phi^{(N_F)} \right)^T$. При этом $\mathbb{F}(t)$ - матричная функция, составленная из $f_m^{(k)'}(t)$, а вектор правой части имеет вид

$$\widehat{G}^{(k)} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{iky}}{\rho(0, y)} dy$$

Зафиксируем точку $x = Mh$ и обозначим $\widehat{\Phi}_{[M, j]} = \widehat{\Phi}(Mh, jh)$. Аппроксимируем интеграл в левой части (3.37) по формуле правых прямоугольников с точностью $O(h)$:

$$\begin{aligned} \int_{-x}^x \mathbb{F}(t-s) \widehat{\Phi}(x, s) ds &= \int_{-Mh}^{Mh} \mathbb{F}(t-s) \widehat{\Phi}(x, s) ds \approx \\ &\approx h \mathbb{F}(t + (M-1)h) \widehat{\Phi}_{[M, -M+1]} + \dots + \\ &+ h \mathbb{F}(t - (M-1)h) \widehat{\Phi}_{[M, M-1]} + h \mathbb{F}(t - Mh) \widehat{\Phi}_{[M, M]}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Далее, обозначим $\mathbb{F}_{[i]} = \mathbb{F}(ih)$ и рассмотрим уравнение (3.37) при $t = lh, l = -M+1, \dots, M$. Учитывая (4.42), получим:

$$\widehat{\Phi}_{[M, l]} - h \mathbb{F}_{[l+M-1]} \widehat{\Phi}_{[M, -M+1]} - \dots - h \mathbb{F}_{[l-M+1]} \widehat{\Phi}_{[M, M-1]} - h \mathbb{F}_{[l-M]} \widehat{\Phi}_{[M, M]} = \widehat{G} \quad (4.43)$$

Данная система линейных уравнений может быть переписана в матричной форме. Получим:

$$(2I - h\tilde{A}_{[M]})Z_{[M]} = B_{[M]}. \quad (4.44)$$

Здесь $\tilde{A}_{[M]}$ - квадратная блочная матрица размера $(2N_F + 1) \times 2M$, имеющая следующий вид:

$$\tilde{A}_{[M]} = \begin{bmatrix} \mathbb{F}_{[0]} & \mathbb{F}_{[1]} & \dots & \mathbb{F}_{[2M-1]} \\ \mathbb{F}_{[-1]} & \mathbb{F}_{[0]} & \dots & \mathbb{F}_{[2M-2]} \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \mathbb{F}_{[-2M+2]} & \dots & \mathbb{F}_{[0]} & \mathbb{F}_{[1]} \\ \mathbb{F}_{[-2M+1]} & \dots & \mathbb{F}_{[-1]} & \mathbb{F}_{[0]} \end{bmatrix}.$$

Матрица I - единичная матрица той же размерности. Блок-столбцы $Z_{[M]}, B_{[M]}$ имеют размерность $(2N_F + 1)(2M)$, причём причём блоки столбца Z соответствуют векторам $\hat{\Phi}_{[M,j]}$, $j = -M + 1, \dots, M$, а блоки вектора $\tilde{G}_{[M]}$ постоянны и совпадают с вектором $\hat{G}$. Матрица системы (4.44) является блочно-тёплицевой. Поэтому для её решения можно использовать блочный вариант модифицированного метода Левинсона - Дурбина (3.59):

$\mathbf{k} = 0 :$

$$Z_0^{(0)} = \hat{a}_0^{-1} B_0,$$

$\mathbf{k} = 1, \dots, 2M - 1 :$

$$\epsilon_k = B_k - \hat{a}_k Z_0^{(k-1)} - \hat{a}_{k-1} Z_1^{(k-1)} - \dots - \hat{a}_1 Z_{k-1}^{(k-1)};$$

$$\omega_k = Q_k \epsilon_k;$$

$$\begin{aligned} \left[Z_0^{(k)}, Z_1^{(k)}, \dots, Z_k^{(k)} \right]' &= \left[Z_0^{(k-1)}, Z_1^{(k-1)}, \dots, Z_{k-1}^{(k-1)} 0 \right]' + \\ &+ \left[\tilde{Y}_0^{(k)}, \tilde{Y}_1^{(k)}, \dots, \tilde{Y}_k^{(k)} \right]' \omega_k; \end{aligned}$$

Напомним, что алгоритм (3.59) на k -м шаге вычисляет решение системы $A_k Z^{(k)} = B^{(k)}$, где A_k - ведущая блочная подматрица порядка $k + 1$, а $Z^{(k)} = \left[Z_0^{(k)}, \dots, Z_k^{(k)} \right]$, $B^{(k)} = [B_0, \dots, B_k]$ - блочные вектора соответствующего размера. ϵ_k, ω_k - также описывают матрицы размера $p \times p$. Кроме того, для работы алгоритма (3.59) необходимо вычислить блочные вектора $\tilde{Y}^{(k)}$ и весовые множители Q_k , задающие последний блочный столбец матрицы $\hat{A}_k^{-1}$. В силу четности функций $f_m^{(k)}(y, t)$, а, следовательно, и $\mathbb{F}(t)$ относительно переменной t , матрица системы (4.44) является симметричной (относительно блочной структуры). Тогда вычисление блочного столбца $\tilde{Y}^{(k)}$ и соответствующего нормировочного коэффициента может быть проделано, как было показано в

разделе 3, с помощью алгоритма (3.54):

$k = 0 :$

Q_0 – любой невырожденный блок, $\tilde{Y}_0^0 = \hat{a}_0^{-1} Q_0^{-1}$.

$k = 1, 2, \dots, 2M - 1 :$

$\tilde{G}_k = \hat{a}_{-1} \tilde{Y}_0^{(k-1)} + \hat{a}_{-2} \tilde{Y}_1^{(k-1)} + \dots + \hat{a}_{-k} \tilde{Y}_{k-1}^{(k-1)},$

$R_k = -Q_{k-1} \tilde{G}_k, Q_k = (I - R_k^2)^{-1} Q_{k-1},$

$\left[\tilde{Y}_0^{(k)}, \tilde{Y}_1^{(k)}, \dots, \tilde{Y}_k^{(k)} \right]' = \left[\tilde{Y}_{k-1}^{(k-1)}, \tilde{Y}_{k-2}^{(k-1)}, \dots, \tilde{Y}_0^{(k-1)}, 0 \right]' R_k +$
 $+ \left[0, \tilde{Y}_0^{(k-1)}, \tilde{Y}_1^{(k-1)}, \dots, \tilde{Y}_{k-1}^{(k-1)} \right]'.$

Необходимо отметить следующее обстоятельство. Заметим, что ведущая подматрица матрицы (4.44) порядка $k = 2M - 2$ совпадает (в силу блочно-тёплицевости) с матрицей системы (4.44), выписанной при $x = (M - 1)h$. Далее, в силу постоянства блоков урезанный вектор правой части $B^{(2M-2)}$ совпадает с правой частью B уравнения (4.44), выписанного при $x = (M - 1)h$. Следовательно, на шаге $k = 2M - 3$ «урезанная» система совпадает с дискретизованным уравнением М.Г. Крейна в точке $x = (M - 1)h$. Аналогично, на шаге $k = 2M - 5$ «урезанная» система совпадает с дискретизованным уравнением М.Г. Крейна в точке $x = (M - 2)h$ и т.д. Таким образом, вычислительная схема (3.54), (3.59) в ходе решения двумерного аналога уравнения М.Г. Крейна (3.37) на глубине $x = Mh$ позволяет получить решение и для всех меньших значений глубины $x = (M - 1)h, (M - 2)h, \dots, h$. Эта особенность, как будет показано далее, приводит к значительному сокращению времени расчёта.

4.3.3 Результаты расчётов

В ходе численных экспериментов мы рассмотрели в области $x \in (0, 2.5), y \in (-\pi, \pi)$ следующее модельное решение:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1.2, & \text{при } 0 \leq x \leq 0.5; \\ 1.6, & \text{при } x > 0.5, x \leq 1 - \frac{|y|}{2\pi} \\ 2.5, & \text{при } x > 1 - \frac{|y|}{2\pi}, x \leq 1.5 - \frac{|y|}{10\pi} \\ 2.0, & \text{при } x > 1.5 - \frac{|y|}{10\pi} \\ 2.2, & \text{при } (x - 1)^2 + \left(\frac{y}{\pi}\right)^2 < 0.01, \\ 2.2, & \text{при } (x - 2)^2 + \left(y \pm \frac{\pi}{2}\right)^2 < 0.01 \end{cases} \quad (4.45)$$

Такое решение содержит несколько слоёв, границы которых проходят как горизонтально, так и под некоторыми углами к $x = 0$, а также три включения. Модельное решение представлено на рисунке 4.32.

Результаты решения обратной задачи (4.3.1)-(3.9) на основе решения уравнения М.Г. Крейна с

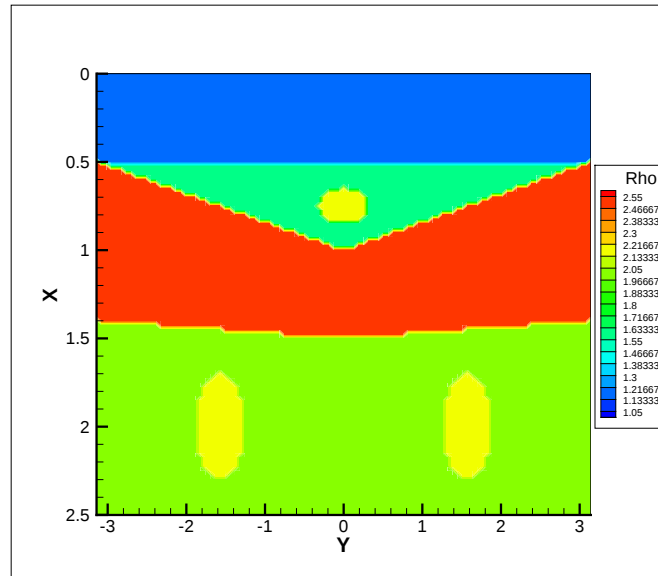


Рисунок 4.32: Восстановление плотности - точное решение.

помощью алгоритма быстрого обращения тёплицевой матрицы для различных значений числа узлов N_x и восстанавливаемых коэффициентов Фурье N_F представлены в таблице 4.13. Также приведено сравнение временных затрат с «решателем» из библиотеки `cvmlib` (расчёты показывают, что точность обоих алгоритмов в данных условиях идентична).

Результаты расчётов демонстрируют значительное (на порядок) превосходство алгоритма быст-

	$N_x = 100$				$N_x = 200$			
	$N_F = 3$	$N_F = 6$	$N_F = 9$	$N_F = 12$	$N_F = 3$	$N_F = 6$	$N_F = 9$	$N_F = 12$
$ \rho_{Ex} - \rho_{calc} $	0.382	0.335	0.337	0.337	0.363	0.301	0.300	0.298
$T_{Total}(sec)$	2.79	7.32	16.2	26.9	10.3	29.0	59.6	95.3
$T_{Total}(CVM)(sec)$	18.2	72.1	156.4	288.1	161.9	639.0	-	-

Таблица 4.13: Результаты расчётов - решения уравнения обратной задачи путём обращения блочно-тёплицевой матрицы для уравнения М.Г. Крейна

рого обращения тёплицевой матрицы со стандартным подходом. Это обусловлено тем, что предлагаемый метод, активно опирается на структуры задачи - помимо использования блочно-тёплицевости матрицы, описанный выше учёт связи между уравнениями, составляющими уравнение М.Г. Крейна, приводит к тому, что метод быстрого обращения блочно-тёплицевой матрицы позволяет получить решение обратной задачи для всех значений глубины, не решая каждое из уравнений независимо.

На рисунках 4.33, 4.34 показаны результаты решения обратной задачи для различных значений N_F . Можно отметить (как и в таблице 4.13), что начиная с некоторого значения, погрешность решения перестаёт уменьшаться. Это, по-видимому, связано с регуляризующими свойствами параметра N_F и погрешностями, накопленными в данных обратной задачи при вычислении этих данных. Отметим также, что слоистая часть структуры восстанавливается достаточно точно. Включения также видимы на полученном решении, однако значения плотности этих вклю-

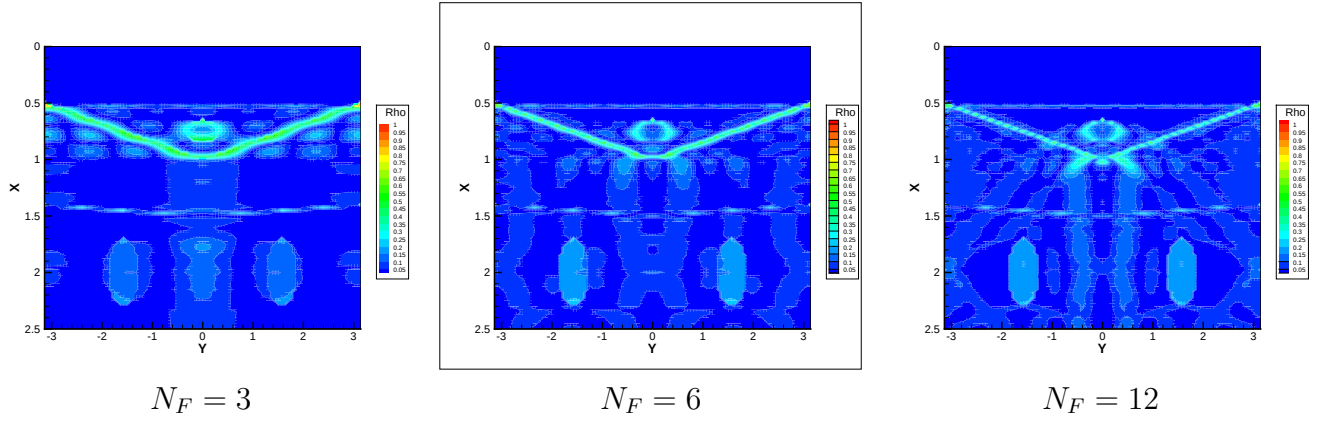


Рисунок 4.33: Зависимость ошибки $|\rho_{Ex} - \rho_{calc}|$ от количества N_F восстанавливаемых коэффициентов Фурье

чений восстанавливаются хуже. Особенно это касается включений, расположенных на большей глубине.

Рассмотрим теперь влияние шума в данных на точность решения обратной задачи. Случайные погрешности были добавлены в данные обратной задачи следующим образом:

$$f_\epsilon^{(k)}(y, t) = f^{(k)}(y, t) + \epsilon \alpha(y, t) (f_{max}^{(k)} - f_{min}^{(k)}).$$

Здесь $\alpha(y, t)$ - случайная величина, равномерно распределённая на отрезке $[-1, 1]$ при фиксированных y, t , ϵ - уровень ошибок, $f_{max}^{(k)}, f_{min}^{(k)}$ - максимальное и минимальное значение функции $f^{(k)}(y, t)$ в рассматриваемой области.

В таблице 4.14 и на рисунке 4.35 представлены результаты расчётов для разных уровней шума.

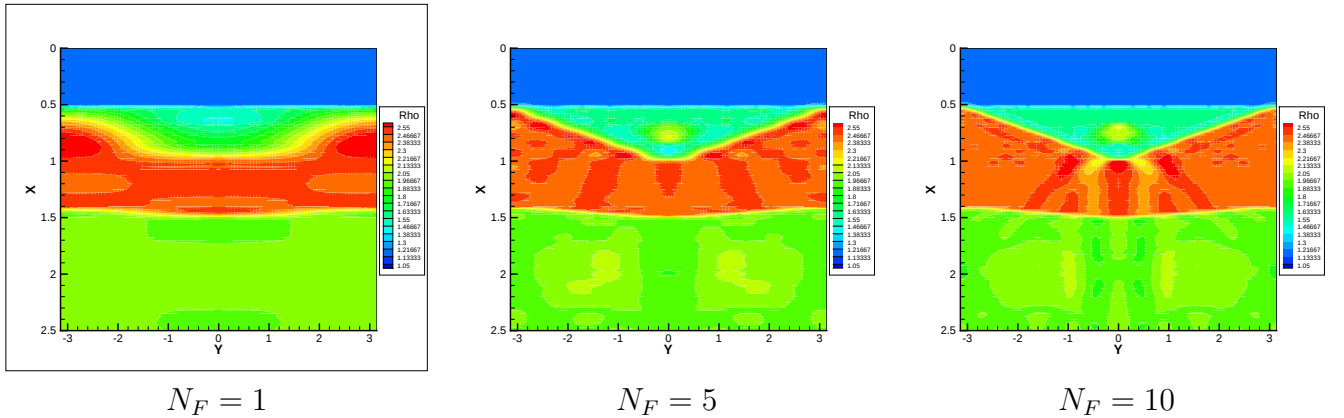


Рисунок 4.34: Решение $\rho(x, y)$ обратной задачи для различного значения N_F восстанавливаемых коэффициентов Фурье

Можно заметить, что количество восстанавливаемых гармоник Фурье N_F играет роль параметра регуляризации. Тем не менее, точность метода резко ухудшается с ростом уровня ошибок. Такое поведение связано с тем фактом, что ядро уравнения М.Г.Крейна задаётся производными $f_m^{(k)'}(t)$ данных обратной задачи, и некорректность численного дифференцирования приводит к большим ошибкам в ядре уравнения Крейна. Одним из простейших способов преодоления этой

$ \rho_{Ex} - \rho_{calc} $	$N_F = 3$	$N_F = 6$	$N_F = 9$
$\epsilon = 1\%$	0.402	0.362	0.385
$\epsilon = 2\%$	0.471	0.684	0.558
$\epsilon = 4\%$	0.838	>50	>50

Таблица 4.14: Решение с зашумлёнными данными - результаты расчётов

особенности является укрупнение сетки при увеличении уровня шума, что показано на рисунке 4.36. Так, переход от $N_x = 100$ узлов к $N_x = 50$ узлам позволил снизить значение погрешности в решении обратной задачи с 609.1 до 0.53, и тем самым получить приемлемое приближение решения обратной задачи.

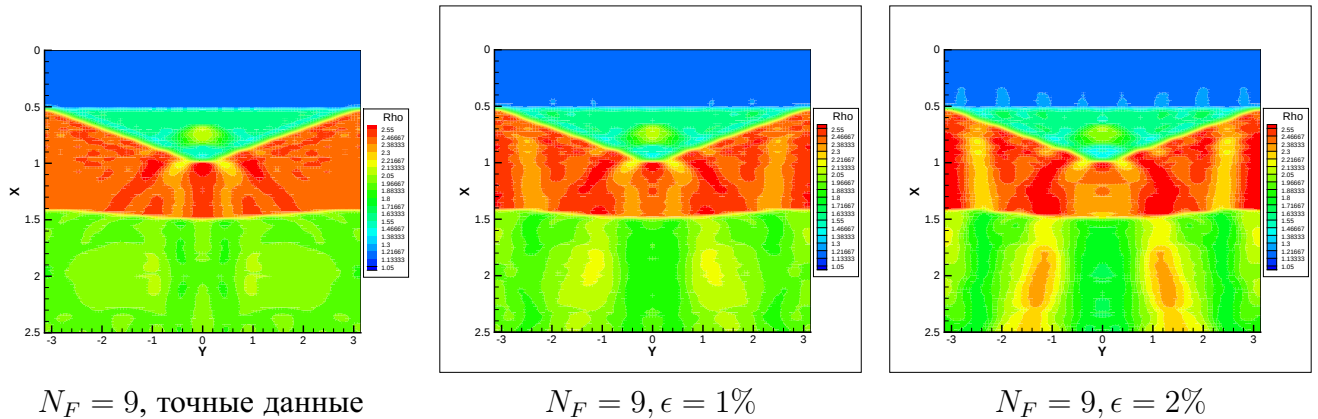


Рисунок 4.35: Зашумлённые данные - рост погрешности при увеличении уровня шума

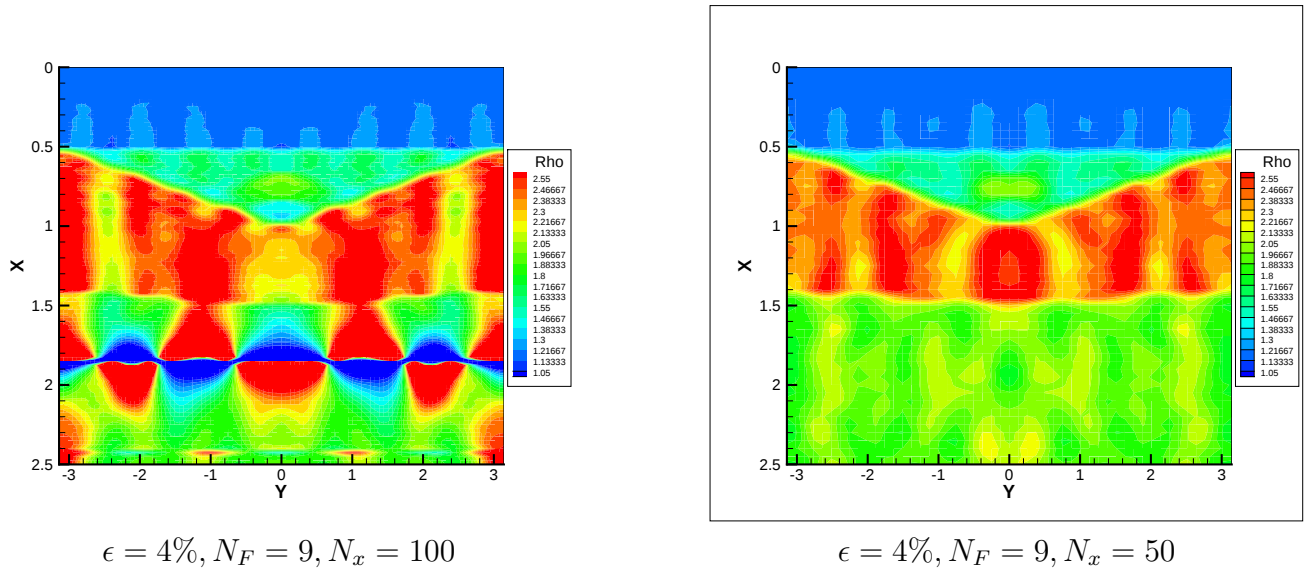


Рисунок 4.36: Зашумлённые данные - уменьшение погрешности при укрупнении сетки

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Разработан метод решения одномерной обратной задачи акустики и одномерной обратной задачи для уравнения колебаний на основе сочетания динамического варианта метода Гельфанда-Левитана и метода Монте-Карло
2. Разработан алгоритм численного решения одномерной динамической задачи сейсмики на основе подхода И.М. Гельфанда - Б.М. Левитана - М.Г. Крейна во временной области.
3. Разработан метод численного решения двумерного аналога уравнения И.М. Гельфанда-Б.М. Левитана с помощью стохастического проекционного метода.
4. Разработан метод численного решения двумерной обратной задачи для уравнения акустики на основе комбинации проекционного метода, метода Гельфанда-Левитана-Крейна и метода быстрого обращения тёплицевой матрицы.
5. Разработаны программные комплексы, реализующие предложенные методы.

Список литературы

1. А.С. Алексеев. Некоторые обратные задачи теории распространения волн // *Изв. АН СССР. Сер. геофизика*. — 1962. — Т. 11–12. — С. 65–72.
2. Belishev M. I. Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC method) // *Inverse Problems*. — 1997. — Vol. 13, no. 5. — Pp. R1–R45.
3. Belishev M. I. Recent progress in the boundary control method // *Inverse Problems*. — 2007. — Vol. 23, no. 5. — Pp. R1–R67.
4. Pestov L., Kazarina O., Bolgova V. Numerical recovering a density by the boundary control method // *Inverse Problems and Imaging*. — 2011. — Vol. 4, no. 4. — Pp. 703–712.
5. А.С. Алексеев, В.И. Добринский. Некоторые вопросы практического использования обратных динамических задач сейсмики. Математические проблемы геофизики // *АН СССР. Сиб. отд-ние. Вычислительный центр. Новосибирск*. — 1975. — Т. 6, № 2. — С. 7–53.
6. С.И. Кабанихин, А.Д. Сатыбаев. Конечно-разностный алгоритм решения смешаной задачи для двумерного волнового уравнения // *Математический анализ и дифференциальные уравнения*. — Новосибирск: НГУ, 1987. — С. 45–51.
7. Beilina L., Klibanov M. V. A globally convergent numerical method for a coefficient inverse problem // *SIAM J. Sci. Comp.* — 2008. — Vol. 31. — Pp. 478–509.
8. Beilina L., Klibanov M. V. Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient Inverse Problems. — New York: Springer, 2012.
9. A globally convergent numerical method for a 3D coefficient inverse problem with a single measurement of multi-frequency data / Michael V Klibanov, Dinh-Liem Nguyen, Loc H Nguyen, Hui Liu // *arXiv preprint arXiv:1612.04014*. — 2016.
10. А.С. Алексеев. Обратные динамические задачи сейсмики // *Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных*. — Москва: Наука, 1967. — С. 9–84.
11. Kunetz G. Quelques exemples d'analyse d'enregistrements seismiques // *Geophysical Prospecting*. — 1963. — Vol. 11, no. 4.

12. С.И. Кабанихин, К.С. Абдиев. Проекционно-разностный метод решения трехмерной обратной задачи геоэлектрики // Вопросы корректности задач математической физики. — Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1986. — С. 61–72.
13. С.И. Кабанихин, С.В. Мартаков. Исследование проекционно-разностного метода решения прямой и обратной задачи геоэлектрики. — 1988.
14. С.И. Кабанихин, К. Бобоев. Конечно-разностный метод определения сечений в P_3 -приближении нестационарного кинетического уравнения переноса // Методы решения некорректных задач и их приложения. — Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1983. — С. 213–217.
15. С.И. Кабанихин. Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений. — Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1988.
16. М.И. Белишев. Уравнения типа Гельфанда–Левитана в многомерной обратной задаче для волнового уравнения // Зап. научн. сем. ЛОМИ. — 1987. — Т. 165. — С. 15–20.
17. М.И. Белишев. Об одном подходе к многомерным обратным задачам для волнового уравнения // ДАН СССР. — 1987. — Т. 297, № 3. — С. 524–527.
18. М.И. Белишев, В.А. Рыжов, В.Б. Филиппов. Спектральный вариант ВС-метода: теория и численный эксперимент // ДАН. — 1994. — Т. 332, № 4. — С. 414–417.
19. Belishev M. I., Gotlib V. Yu., Ivanov S. A. The BC-method in multidimensional spectral inverse problem: theory and numerical illustrations // *Control, Optimization and Calculus of Variations*. — 1997. — Vol. 2. — Pp. 307–327.
20. Belishev M. I., Gotlib V. Yu. Dynamical variant of the BC-method: theory and numerical testing // *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. — 1999. — Vol. 7, no. 3. — Pp. 221–240.
21. Belishev M. I. How to see waves under the Earth surface (the BC-method for geophysicists) // *Ill-Posed and Inverse Problems* / Ed. by S. I. Kabanikhin, V. G. Romanov. — Boston: VSP, Utrecht, 2002. — Pp. 67–84.
22. Belishev M. I. Dynamical Inverse Problem for the Equation $u_{tt} - \Delta u - \nabla \rho \nabla u = 0$ (the BC-method) // *CUBO A Mathematical Journal*. — 2008. — Vol. 10, no. 2. — Pp. 17–33.
23. Pestov L. N. Inverse problem of determining absorption coefficient in the wave equation by BC-method // *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. — 2012. — Vol. 20, no. 1. — Pp. 103–110.
24. Pestov L. N. On determining an absorption coefficient and a speed of sound in the wave equation by the BC-method // *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. — 2013. — Vol. 21, no. 2. — Pp. 245–250.

25. The Krein method and the globally convergent method for experimental data / Andrey L Karchevsky, Michael V Klibanov, Lam Nguyen et al. // *Applied Numerical Mathematics*. — 2013. — Vol. 74. — Pp. 111–127.
26. Klibanov Michael V, Liu Hui, Nguyen Loc H. A globally convergent method for a 3-D inverse medium problem for the generalized Helmholtz equation // *arXiv preprint arXiv:1605.06147*. — 2016.
27. И.М. Гельфанд, Б.М. Левитан. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // *Известия АН СССР*. — 1951. — Т. 15, № 4. — С. 309–360.
28. В.А. Марченко. Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка // *Докл. АН СССР*. — 1950. — Т. 72, № 3. — С. 457–460.
29. В.А. Марченко. Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка, I // *Труды Матем. о-ва*. — 1952. — Т. 1. — С. 327–420.
30. Borg G. Eine Umkehrung der Sturm–Liouvilleschen Eigenwertangabe. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte // *Acta Math.* — 1946. — Vol. 78, no. 1. — Pp. 1–96.
31. Levinson N. The inverse Sturm–Liouville problem // *Mat. Tidsskr. B*. — 1949. — Pp. 25–30.
32. Levinson N. On the uniqueness of the potential in a Schrodinger equation for a given asymptotic phase // *Danske Vid. Selsk. Mat.–Fys. Medd.* — 1949. — Vol. 25, no. 9. — Pp. 1–29.
33. Ambarzumijan V. A. Uber eine Frage der Eigenwerttheorie // *Zeitschrift fur Physik*. — 1929. — Vol. 53. — Pp. 690–695.
34. М.Г. Крейн. Решение обратной задачи Штурма–Лиувилля // *Доклады АН СССР*. — 1951. — Т. 76, № 1. — С. 21–24.
35. М.Г. Крейн. Определение плотности неоднородной симметричной струны по спектру ее частот // *Доклады АН СССР*. — 1951. — Т. 76, № 3. — С. 345–348.
36. М.Г. Крейн. О переходной функции одномерной краевой задачи второго порядка // *Доклады АН СССР*. — 1953. — Т. 88, № 3. — С. 405–408.
37. М.Г. Крейн. Об обратных задачах для неоднородной струны // *Доклады АН СССР*. — 1952. — Т. 82, № 5. — С. 669–672.
38. М.Г. Крейн. О некоторых случаях эффективного определения плотности неоднородной струны по ее спектральной функции // *Доклады АН СССР*. — 1953. — Т. 93, № 4. — С. 617–620.
39. М.Г. Крейн. Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи // *Доклады АН СССР*. — 1954. — Т. 94, № 6. — С. 987–990.

40. Б.С. Парийский. Обратная задача для волнового уравнения с воздействием на глубине // *Некоторые прямые и обратные задачи сейсмологии*. — 1968. — С. 139–169.
41. М.Ш. Блох. Об определении дифференциального уравнения по его спектрально функции-матрице // *ДАН СССР*. — 1953. — Т. 92, № 2. — С. 209–212.
42. Б.Я. Левин. Распределение корней целых функций. — Москва: Гостехиздат, 1956. — С. 632.
43. В.А. Марченко. Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка, II // *Труды Матем. о-ва*. — 1953. — Т. 2. — С. 3–83.
44. В.А. Марченко. Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка, II // *Доклады АН*. — 1955. — Т. 104, № 5. — С. 695–698.
45. З.С. Агранович, В.А. Марченко. Обратная задача теории рассеяния. — Харьков, 1960.
46. Б.М. Левитан, М.Г. Гасымов. Определение дифференциального уравнения по двум спектрам // *УМН*. — 1964. — Т. 19, № 2(116). — С. 3–63.
47. Novikov R. G. Inverse scattering for the Schrodinger equation in dimension 1 up to smooth functions // *Bulletin des Sciences Math'ematiques*. — 1996. — Vol. 120. — Pp. 473–491.
48. Method for solving the Korteweg–de Vries equation / C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura // *Physical Review Letters*. — 1967. — Vol. 19. — Pp. 1095–1097.
49. Kruskal N. J., Zabussky M. D. Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // *Phys. Rev. Letters*. — 1965. — Vol. 15. — Pp. 240–244.
50. Lax P. D. Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves // *Comm. on Pure and Applied Math*. — 1968. — Vol. XXI. — Pp. 467–490.
51. Gardner C. S. The Korteweg–de Vries Equation and Generalizations, IV. The Korteweg–de Vries Equation as a Hamiltonian System // *J. Math. Phys.* — 1971. — Vol. 12. — Pp. 1548–1551.
52. В.Е. Захаров, Л.Д. Фаддеев. Уравнение Кортевега–де Фриза — вполне интегрируемая гамильтонова система // *Функц. анализ и его приложения*. — 1971. — Т. 5, № 4. — С. 18–27.
53. В.Е. Захаров, А.Б. Шабат. Тонкая теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // *ЖЭТФ*. — 1971. — Т. 61, № 1. — С. 118–134.
54. А.Б. Шабат. Об уравнении Кортевега–де Фриза // *Докл. Акад. наук СССР*. — 1973. — Т. 211, № 6. — С. 1310–1313.
55. С.П. Новиков. Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза. I // *Функц. анализ и его прил.* — 1974. — Т. 8, № 3. — С. 54–66.

56. *Lax P. D.* Periodic solutions of the KdV equation // *Lectures Appl. Math.* — 1974. — Vol. 15. — Pp. 85–96.
57. *В.А. Марченко.* Периодическая задача Кортевега–де Фриса // *Матем. сб.* — 1974. — Т. 95(137), № 3(11). — С. 331–356.
58. *В.Е. Захаров, А.Б. Шабат.* Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. I // *Функц. анализ и его приложения.* — 1974. — Т. 8, № 3. — С. 43–53.
59. *С.В. Манаков.* Метод обратной задачи рассеяния и двумерные эволюционные уравнения // *УМН.* — 1976. — Т. 31, № 5(191). — С. 245–246.
60. *В.Е. Захаров, С.В. Манаков.* Об обобщении метода обратной задачи рассеяния // *Теоретическая и математическая физика.* — 1976. — Т. 27, № 3. — С. 283–287.
61. *Lax P. D.* Almost periodic solutions of the KdV equation // *SIAM Review.* — 1976. — Vol. 18. — Pp. 351–375.
62. *В.Е. Захаров, А.Б. Шабат.* Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. II // *Функц. анализ и его приложения.* — 1979. — Т. 13, № 3. — С. 13–22.
63. Теория солитонов. Метод обратной задачи / Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. — Москва: Наука, 1980.
64. *Л.П. Нишник, М.Д. Починайко.* Интегрирование пространственно-двумерного нелинейного уравнения Шрёдингера методом обратной задачи // *Функц. анализ и его прил.* — 1982. — Т. 16, № 1. — С. 80–82.
65. *А.П. Веселов, С.П. Новиков.* Конечнозонные двумерные операторы Шредингера. Потенциальные операторы // *ДАН СССР.* — 1984. — Т. 279, № 4. — С. 20–24.
66. *Novikov R. G., Khenkin G. M.* Oscillating weakly localized solutions of the Korteweg–de Vries equation // *Theoretical and Mathematical Physics.* — 1984. — Vol. 61, no. 2. — Pp. 1089–1099.
67. *Р.Г. Гриневич П.Г. и Новиков.* Аналогии многосолитонных потенциалов для двумерного оператора Шрёдингера // *Функц. анализ и его прил.* — 1985. — Т. 19, № 4. — С. 32–42.
68. *Francoise J.-P., Novikov R. G.* Solutions rationnelles des equations de type Korteweg-de-Vries en dimension 2+1 et problemes a n corps sur la droite // *Comptes rendus de l'Academie des sciences. Serie I, Mathematique.* — 1992. — Vol. 314, no. 2. — Pp. 109–113.
69. *Kazeykina A. V., Novikov R. G.* A large time asymptotics for transparent potentials for the Novikov–Veselov equation at positive energy // *Journal of Nonlinear Mathematical Physics.* — 2011. — Vol. 18, no. 3. — Pp. 377–400.

70. А.С. Благовещенский. Об обратной задаче теории распространения сейсмических волн // *Проблемы мат. физики*. — 1966. — Т. 1. — С. 68–81.
71. А.С. Благовещенский. О локальном методе решения нестационарной обратной задачи для неоднородной струны // *Тр. МИАН СССР*. — 1971. — Т. 115. — С. 28–38.
72. Gopinath B., Sondhi M. Determination of the shape of the human vocal tract from acoustical measurements // *Bell System Tech. J.* — 1970. — Vol. 49. — Pp. 1195–1214.
73. Gopinath B., Sondhi M. Inversion of telegraph equation and synthesis of nonuniform lines // *Proc. IEEE*. — 1971. — Vol. 59. — Pp. 383–392.
74. Burridge R. The Gelfand-Levitan, the Marchenko and the Gopinath–Sondhi integral equation of inverse scattering theory, regarded in the context of inverse impulse-response problems // *Wave Motion*. — 1980. — Vol. 2. — Pp. 305–323.
75. Symes W. W. Inverse boundary value problems and a theorem of Gel’fand and Levitan // *J. Math. Anal. Appl.* — 1979. — Vol. 71. — Pp. 378–402.
76. С.И. Кабанихин. Линейная регуляризация многомерных обратных задач для гиперболических уравнений. — Препринт №27 института математики СО АН СССР, Новосибирск. — 1988.
77. В.Г. Романов, С.И. Кабанихин. Обратные задачи геоэлектрики. — Москва: Наука, 1991. — С. 304.
78. А.С. Алексеев, В.С. Белоносов. спектральные методы в одномерных задачах теории распространения волн // *Труды ИВМиМГ, Мат. моделир. в геофизике*. — 1998. — Т. 6. — С. 7–39.
79. М.И. Белишев, А.С. Благовещенский. Многомерные аналоги уравнений типа Гельфанда–Левитана–Крейна в обратной задаче для волнового уравнения // *Условно-корректные задачи математической физики и анализа*. — Новосибирск: Наука, 1992. — С. 50–63.
80. С.И. Кабанихин. О линейной регуляризации многомерных обратных задач для гиперболических уравнений // *Доклады РАН*. — 1989. — Т. 309, № 4. — С. 791–795.
81. Kabanikhin S. I., Shishlenin M. A. Boundary control and Gelfand-Levitan-Krein methods in inverse acoustic problem // *J. Inverse and Ill-Posed Problems*. — 2004. — Vol. 12, no. 2. — Pp. 125–144.
82. Kabanikhin S. I., Satybaev A. D., Shishlenin M. A. Direct Methods of Solving Inverse Hyperbolic Problems. — The Netherlands: VSP, 2004.
83. Kabanikhin S. I., Shishlenin M. A. Numerical algorithm for two-dimensional inverse acoustic problem based on Gelfand-Levitan-Krein equation // *J. Inverse and Ill-Posed Problems*. — 2011. — Vol. 18, no. 9. — Pp. 979–996.

84. Б.С. Парийский. Экономичные методы численного решения уравнений в свертках и систем алгебраических уравнений с теплицевыми матрицами. — Москва: ВЦ АН СССР, 1977.
85. Santosa F. Numerical scheme for the inversion of acoustical impedance profile based on the Gelfand-Levitan method // *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.* — 1982. — Т. 70. — С. 229–244.
86. В.Г. Романов. Обратные задачи математической физики. — Москва: Наука, 1984.
87. С.И. Кабанихин. Обратные и некорректные задачи. — Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009.
88. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике / Марчук Г.И., Михайлов Г.А., Назаралиев М.А. и др. — Новосибирск: Наука, 1976.
89. И.М. Соболев. Метод Монте-Карло для расчёта критичности в многогрупповом приближении // Метод Монте-Карло в проблеме переноса излучений. — Москва, 1967. — С. 232–254.
90. С.М. Ермаков, Г.А. Михайлов. Статистическое моделирование. — Москва: Наука, 1982.
91. Г.А. Михайлов. Оптимизация весовых методов Монте-Карло. — Москва: Наука, 1987.
92. T. Strohmer, R. Vershynin. A randomized Kaczmarz algorithm with exponential convergence // *Journal of Fourier Analysis and Applications*. — 2009. — Vol. 15. — Pp. 262–278.
93. K.K. Sabelfeld, N.V. Loshchina. Stochastic iterative projection methods for large linear systems // *Monte Carlo methods and Applications*. — 2010. — Vol. 16. — Pp. 343–359.
94. В.В. Воеводин, Е.Е. Тыртышников. Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами. — Москва: Наука, 1987.
95. N. Levinson. The Wiener (Root Mean Square) Error Criterion in Filter Design and Prediction // *Journal of Mathematics and Physics*. — 1946. — Vol. 25, no. 1-4. — Pp. 261–278.
96. J. Durbin. The Fitting of Time-Series Models // *Review of the International Statistical Institute*. — 1960. — Vol. 28, no. 3. — Pp. 233–244.
97. В.Г. Романов. Обратная задача Лэмба в линейном приближении // Численные методы в сейсмических исследованиях. — Новосибирск, 1983. — С. 170–192.
98. Аниконов Ю.Е. Москвитин В.Н. Об одной задаче для системы динамических уравнений теории упругости // *Доклады АН СССР*. — 1980. — Т. 253, № 5. — С. 1086–1087.
99. В.Г. Яхно. Линеаризованная обратная задача Лэмба // *Доклады АН СССР*. — 1984. — Т. 276, № 2. — С. 314–318.
100. Е.А. Волкова. Об одной одномерной обратной задаче для системы уравнений теории упругости анизотропных сред. — Препринт №330. — 1981.

101. *В.Г. Яхно*. Одномерные обратные динамические задачи для анизотропных упругих сред. — Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1985.
102. *Н.М. Бородаева*. О численном решении одномерной динамической задачи сейсмоки // Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных. — Москва, 1967. — С. 85–91.
103. *А.В. Белоносова, В.С. Белоносов*. Прямые и обратные задачи акустического зондирования дна водоемов // *Сиб. электрон. матем. изв.* — 2013. — Т. 10. — С. С.10–С.15.
104. *В.С. Владимиров*. О применении метода Монте-Карло для отыскания наименьшего характеристического числа и соответствующей собственной функции линейного интегрального уравнения // *Теория вероятностей и её приложения*. — 1956. — Т. 1, № 1. — С. 113–130.
105. *И.М. Соболев*. Численные методы Монте-Карло. — Москва: Наука, 1973.
106. Решение краевых задач методом Монте-Карло / Елепов Б.С., Кронберг А.А., Михайлов Г.А., Сабельфельд К.К. — Новосибирск: Наука, 1975.
107. *Г.А. Михайлов, А.В. Войтишек*. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. — Москва: Издательский центр «Академия», 2011.
108. *Г.А. Михайлов, И.Н. Медведев*. Оптимизация весовых алгоритмов статистического моделирования. — Новосибирск: Омега Принт, 2011.
109. *С.И. Кабанихин*. Регуляризация многомерных обратных задач для гиперболических уравнений на основе проекционного метода // *Доклады АН СССР*. — 1987. — Т. 292, № 3. — С. 73–75.
110. *К.К. Сабельфельд*. Принцип выметания и усреднения при построении алгоритмов метода Монте-Карло для решения краевых задач // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 1983. — Т. 23, № 2. — С. 366–379.
111. *И.Н. Медведев, Г.А. Михайлов*. Исследование весовых алгоритмов метода Монте-Карло с ветвлением // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2009. — Т. 49, № 3. — С. 441–452.
112. *Г.А. Михайлов*. Дисперсии векторных алгоритмов метода Монте-Карло // *Доклады АН СССР*. — 1980. — Т. 253, № 5. — С. 1047–1050.
113. *S. Kaczmarz*. Angenaherte Auflosung von Systemen linearer Gleichungen // *Bull. Acad. Polon. Sciences et Lettres*. — 1937. — Pp. 355–357.
114. *R. Gordon, R. Bender, G.T. Herman*. Algebraic reconstruction techniques (ART) for three-dimensional electron microscopy and x-ray photography // *Journal of theoretical biology*. — 1970. — Vol. 29, no. 3. — Pp. 471–481.

115. *G.T. Herman*. Fundamentals of computerized tomography: Image reconstruction from projection, 2nd edition. — Springer, 2009.
116. *F. Natterer*. The Mathematics of Computerized Tomography. — New York: Wiley, 1986.
117. *В.П. Ильин*. Об итерационном методе Качмажа и его обобщениях // *Сиб. журн. индустр. матем.* — 2006. — Т. 9, № 3. — С. 39–49.
118. *T. Strohmer, R. Vershynin*. A randomized solver for linear systems with exponential convergence // *Approximation, Randomization, and Combinatorial Optimization. Algorithms and Techniques, Lecture Notes in Computer Science*. — 2006. — Vol. 4110. — Pp. 499–507.
119. *Barel M.V., Bultheel A*. A look-ahead algorithm for the solution of block toeplitz systems // *Linear Algebra and its Applications*. — 1997. — Vol. 266. — Pp. 291 – 335.
120. High performance algorithms for Toeplitz and block Toeplitz matrices / *K.A. Gallivan, S. Thirumalai, P. Van Dooren, V. Vermaut* // *Linear Algebra and its Applications*. — 1996. — Vol. 241. — Pp. 343 – 388. — Proceedings of the Fourth Conference of the International Linear Algebra Society.
121. *G. Heinig, K. Rost*. Fast algorithms for Toeplitz and Hankel matrices // *Linear Algebra and its Applications*. — 2011. — Vol. 435, no. 1. — Pp. 1 – 59.
122. *Turnes C. K., Balcan D., Romberg J*. Superfast Tikhonov Regularization of Toeplitz Systems // *IEEE Transactions on Signal Processing*. — 2014. — Vol. 62, no. 15.
123. *G.S. Ammar, W.B. Gragg*. Numerical experience with a superfast real Toeplitz solver // *Linear Algebra and its Applications*. — 1989. — Vol. 121. — Pp. 185 – 206.
124. *V. Olshevsky, I. Oseledets, E. Tyrtyshnikov*. Superfast Inversion of Two-Level Toeplitz Matrices Using Newton Iteration and Tensor-Displacement Structure // *Recent Advances in Matrix and Operator Theory*. — Basel: Birkhäuser Basel, 2008. — Pp. 229–240.
125. *R.H.-F. Chan, X.-Q. Jin*. Introduction to Iterative Toeplitz Solvers. — SIAM, 2007.
126. *He S., Kabanikhin S. I*. An optimization approach to a three-dimensional acoustic inverse problem in the time domain // *J. Math. Phys.* — 1995. — Vol. 36, no. 8. — Pp. 4028–4043.
127. *Kabanikhin S. I., Shishlenin M. A*. Quasi-solution in inverse coefficient problems // *J. Inverse and Ill-Posed Problems*. — 2008. — Vol. 16, no. 7. — Pp. 705–713.
128. *Kabanikhin S. I., Scherzer O., Shishlenin M. A*. Iteration methods for solving a two dimensional inverse problem for a hyperbolic equation // *J. Inverse and Ill-Posed Problems*. — 2003. — Vol. 11, no. 1. — Pp. 87–109.

129. И.Ц. Гохберг, А.А. Семенцул. Об обращении конечных теплицевых матриц и их континуальных аналогов // *Matematicheskie issledovanija*. — 1972. — Vol. 7, no. 2. — Pp. 437–459.

Список рисунков

4.1	Точное решение обратной задачи $\sigma(x)$	87
4.2	Данные обратной задачи $f(t)$	87
4.3	Производная данных обратной задачи $f'(t)$	87
4.4	Норма интегрального оператора K_1	87
4.5	Метод подобных траекторий - норма интегрального оператора K_p	88
4.6	Результаты численных экспериментов - решение уравнения Крейна	90
4.7	Результаты численных экспериментов - решение обратной задачи	90
4.8	Кусочно-постоянное решение - данные обратной задачи	91
4.9	Кусочно-постоянное решение - производная данных	91
4.10	Кусочно-постоянное решение - уменьшение нормы интегрального оператора для дисперсии при сглаживании данных.	93
4.11	Кусочно-постоянный случай - решение уравнения Крейна	94
4.12	Кусочно-постоянный случай - решение обратной задачи	94
4.13	Определение потенциала - тестовое решение.	104
4.14	Решение прямой задачи - функция $f^{(0)}(y, t)$	105
4.15	Решение прямой задачи - функция $f^{(1)}(y, t)$	105
4.16	Решение прямой задачи - функция $f^{(3)}(y, t)$	105
4.17	Решение прямой задачи - функция $f^{(5)}(y, t)$	105
4.18	Зависимость $\ K\ (x)$ от параметра N_F	106
4.19	Зависимость $\ \tilde{K}_p\ (x)$ от параметра N_F	106
4.20	метод Монте-Карло - решение двумерного аналога уравнения Гельфанда-Левитана	107
4.21	метод Монте-Карло - решение обратной задачи	108
4.22	След матрицы ковариаций	109
4.23	метод подобных траекторий - сравнение с независимым решением каждого уравнения	110
4.24	эксперимент №2 - тестовое решение.	111
4.25	Зависимость $\ K\ (x)$ от параметра N_F	111
4.26	Влияние начального приближения на решение уравнения Гельфанда - Левитана	111
4.27	Влияние начального приближения на решение обратной задачи	112
4.28	Блочный вариант метода - уменьшение $\ w_{calc} - w_{true}\ $ при увеличении итераций.	113
4.29	Блочный вариант метода - уменьшение $\ q_{calc} - q_{true}\ $ при увеличении итераций.	113

4.30	Влияние сглаживания решения уравнения Гельфанда-Левитана на точность решения обратной задачи.	114
4.31	Зависимость точности решения от количества восстанавливаемых коэффициентов Фурье.	115
4.32	Восстановление плотности - точное решение.	121
4.33	Зависимость ошибки $ \rho_{Ex} - \rho_{calc} $ от количества N_F восстанавливаемых коэффициентов Фурье	122
4.34	Решение $\rho(x,y)$ обратной задачи для различного значения N_F восстанавливаемых коэффициентов Фурье	122
4.35	Зашумлённые данные - рост погрешности при увеличении уровня шума	123
4.36	Зашумлённые данные - уменьшение погрешности при укрупнении сетки	123

Список таблиц

4.1	Прямое моделирование - результаты численных экспериментов	88
4.2	Метод подобных траекторий ($P = 0.1$) - результаты расчётов.	88
4.3	Метод подобных траекторий ($P = 0.5$) - результаты расчётов.	89
4.4	Сравнительный анализ метода прямого моделирования и метода подобных траекторий (МПТ)	89
4.5	Кусочно-постоянное решение - расчёты методом прямого моделирования	91
4.6	Кусочно-постоянное решение - расчёты методом подобных траекторий	91
4.7	Кусочно-постоянное решение - расчёты МПТ для сглаженных данных	93
4.8	Кусочно-постоянное решение - сравнение со стандартным методом	94
4.9	Решение двумерной обратной задачи - сравнение со стандартным методом	109
4.10	Решение двумерной обратной задачи - сравнение со стандартным методом	109
4.11	Стохастический проекционный метод - результаты расчётов	112
4.12	Частичное восстановление потенциала - сравнение проекционного метода и метода подобных траекторий	114
4.13	Результаты расчётов - решения уравнения обратной задачи путём обращения блочно-тёплицевой матрицы для уравнения М.Г. Крейна	121
4.14	Решение с зашумлёнными данными - результаты расчётов	123