Моделирование распространения трещин, нагруженных давлением вязкой жидкости

Лапин Василий Николаевич

Институт теплофизики СО РАН, Новосибирск

По материалам диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук
05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Научный консультант д.ф.-м.н. Черный С.Г.

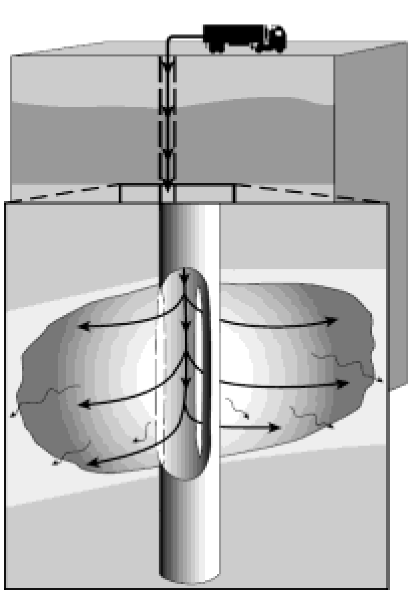
Актуальность

Закон Дарси для описания фильтрация жидкости в пористой среде

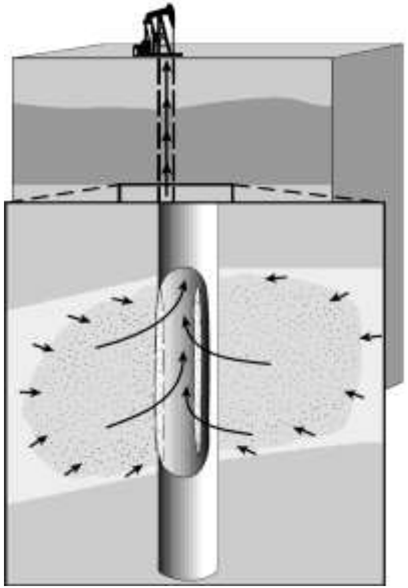
$$\mathbf{u} = -\frac{k}{\mu}\nabla p$$

Способы повышения дебита скважины

Поддержка пластового давления	∇p
Тепловое воздействие	μ
Гидроразрыв	k



Жидкость закачивается в скважину
Образуется трещина
Трещина заполняется проппантом

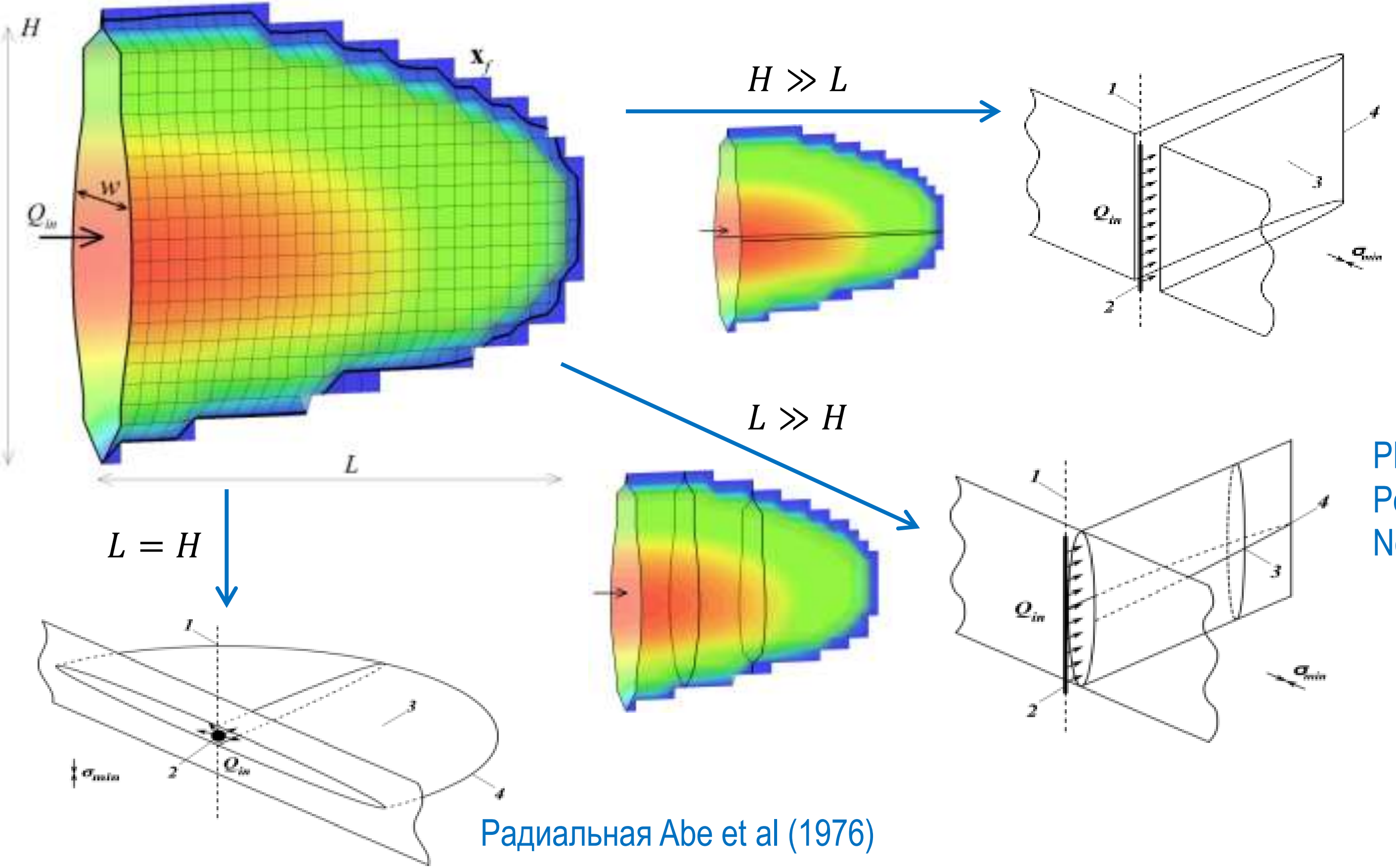


Нефть/газ фильтруется к скважине через высоко проницаемую трещину

Начальный этап: переориентация трещины от перфорации на основное направление

История моделирования гидроразрыва

Плоские трехмерные модели

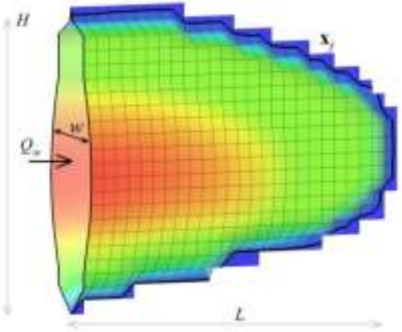


KGD
Христианович (1956)
Geertsma, de Klerk (1969)

PKN
Perkins, Kern (1961),
Nordgren (1972)

Радиальная Abe et al (1976)

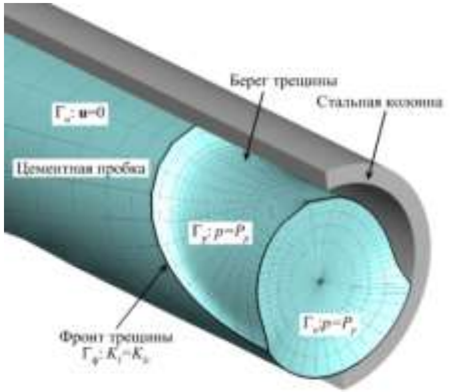
Иерархия моделей



Трехмерная

Поверхность трещины задана

Трещина на границе материалов



Поверхность трещины – плоскость

Плоская трехмерная

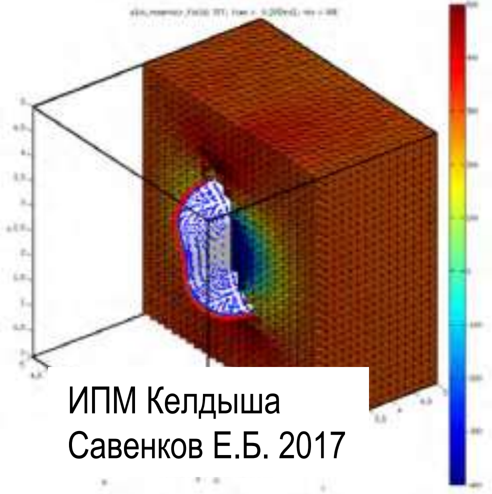
Все направления равнозначны

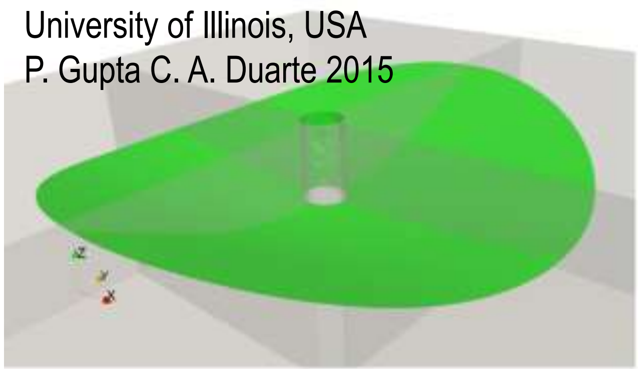
Радиальная

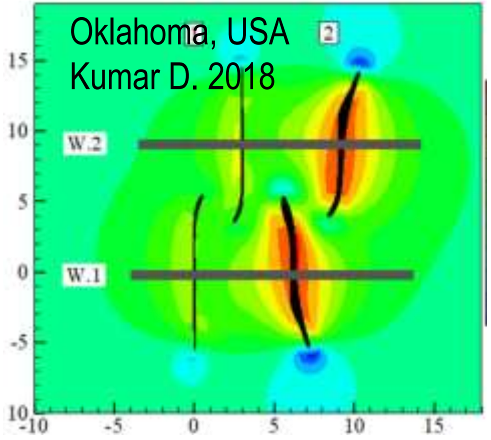
Длина много больше высоты

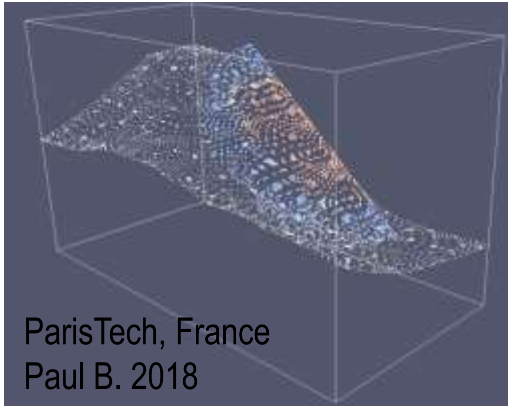
Трещины PKN-типа

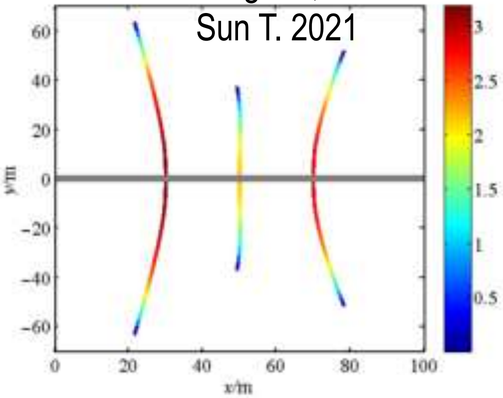
Современные полнстью трехмерные модели трещин гидроразрыва пласта

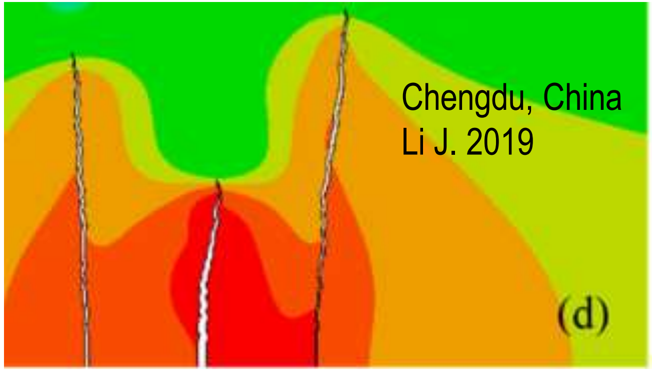












Результаты, выносимые на защиту

Пункт 1: Разработка новых математических методов моделирования…

Трехмерная модель распространения неплоской трещины, **одновременно** описывающая
1) движение жидкости **сложной** реологии в узком двумерном канале (трещине),
2) распространение на основе **неявного глобального** критерия выбора направления,
3) деформацию породы в окрестности скважины и трещины

Пункт 3: Разработка эффективных вычислительных методов…

Методы одновременного решения связанных систем **нелинейных** уравнений модели в
1) задаче «гидродинамика-упругость», 2) уравнениях движения жидкости сложной реологии, 3) неявном критерии распространения трещины.

Пункт 4: Реализация … в виде комплексов проблемно-ориентированных программ

Программный комплекс для решения задачи **распространения трещины**, нагруженной давлением вязкой жидкости, от полости в упругой среде, по границе между материалами, в теле конечных размеров

Пункт 5: Комплексные исследования научных и технических проблем…

1) Решена задача криволинейного распространения трещины от полости – установлен **эффект пережатия** трещины. Показаны вызывающие его **факторы**, **влияние** на трещину, **применимые модели**
2) Влияние параметров **гидроизоляции скважин** на ее стойкость
3) Влияние параметров трещиновато-пористой среды на **потери бурового раствора**

Научная новизна

- Полностью трехмерная модель с одновременным описанием скважины, трещины и движения жидкости;
- Модель движения жидкости сложной реологии в канале переменного сечения в составе 3D модели;
- Глобальный неявный критерий распространения трещины, в котором выбор направления производится на основе анализа НДС в окрестности всего фронта после его продвижения;
- Описание эффекта пережатия трещины у скважины и установление влияющих на него факторов.

Прикладная значимость

- Описание начального этапа распространения трещины и оценка влияния искривления трещины на весь процесс ГРП
- Выявление области применимости моделей для описания движения жидкостей сложной реологии

Цель работы

- Разработка иерархии численных моделей распространения трещин в упругой хрупкой среде под действием закачиваемой жидкости и исследование особенностей эволюции таких трещин на основе построенных моделей

Научная проблема

- Создание инструментов (модель, алгоритм, программный комплекс) моделирования распространения существенно криволинейных трехмерных трещин, при закачке в них вязкой жидкости

Публикации по теме диссертации

в изданиях, рекомендованных ВАК

1. Lapin V.N., Esipov D.V.. Simulation of proppant transport and fracture plugging in the framework of a radial hydraulic fracturing model // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. – 2020. – Vol. 35, No 6. – P. 325-339 (Scopus)

2. Лапин В.Н. Модель распространения трещины вдоль гидроизоляции скважины // Вестник НГУ. Серия: Инф. тех. – 2020. – Т.18. № 1. – С.36-49.

3. Лапин В.Н., Фомина А.А. Валидация неявного критерия выбора направления распространения трещины при смешанной нагрузке // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2019. – Т. 22 №4. – С. 33-43. (Scopus)

4. Лапин В.Н. Модель потерь бурового раствора в систему трещин в задаче определения параметров трещиновато-пористой среды // Выч. технологии. – 2019. – Т. 24 №4. – С. 38-55

5. Cherny S., Lapin V., Kuranakov D., Alekseenko O. 3D model of transversal fracture propagation from a cavity caused by Herschel-Bulkley fluid injection // Int. J. of Frac. – 2018. – Vol. 212, No. 1. – P. 15-40. (Wos , Scopus)

6. Карнаков П.В., Куранаков Д.С., Лапин В.Н., Черный С.Г., Есипов Д.В. Особенности распространения трещины гидроразрыва породы при закачке в нее смеси проппанта и жидкости // Теплофизика и аэромеханика. – 2018. – Т. 25, № 3. – С. 611-628.

7.Cherny S., Lapin V., Esipov D., Kuranakov D., Avdyushenko A., Lyutov A., Karnakov P. Simulating fully 3D non-planar evolution of hydraulic fractures // Int. J. of Frac. – Vol. 201., No 2 – P. 181-211. (Wos , Scopus)

8. Kuranakov D.S., Esipov D.V., Lapin V.N., Cherny S.G. Modification of the boundary element method for computation of three dimensional fields of strain-stress state of cavities with cracks // Eng. Fract. Mech. – 2016. – Vol. 153. – P. 302-318. (Wos , Scopus)

9. Есипов Д.В., Куранаков Д.С., Лапин В.Н., Черный С.Г. Математические модели гидроразрыва пласта // Выч. технологии. – 2014. – Т. 19 №2. – С. 33-61

10. Карнаков П.В., Лапин В.Н., Черный С.Г. Модель гидроразрыва пласта, включающая механизм закупоривания трещины пропантом // Вестник НГУ. Серия: Инф. тех. – 2014. – Т. 12, № 1. – С. 19–33.

11. Cherny S., Chirkov D., Lapin V., etc. Two dimensional modeling of the near-wellbore fracture tortuosity effect // Int. J. Rock Mech. & Min. Sci. – 2009. – Vol. 46, No. 6. – P. 992-1000. (WoS , Scopus)

Свидетельство на программу для электронных вычислительных машин

12. Черный С.Г., Лапин В.Н., Есипов Д.В., Куранаков Д.С. Программа трехмерного моделирования распространения трещины в хрупком материале под действием давления вязкой жидкости «CADFRAC/2019».

Рецензируемые публикации в периодических научных изданиях, индексируемых в WoS и Scopus

13. Lapin V.N., Cherny S.G. An implicit criterion of fracture growth direction for 3D simulation of hydraulic fracture propagation // Procedia Structural Integrity. – 2018. – Vol. 13. – P. 1171-1176., (WoS, Scopus)

14. Cherny S.G., Lapin V.N. 3D model of hydraulic fracture with Herschel-Bulkley compressible fluid pumping // Procedia Structural Integrity. – 2016. – Vol. 2. – P.2479-2486. (WoS)

15. Shokin Yu., Cherny S., Esipov D., Lapin V., Lyutov A., Kuranakov D. Three-dimensional model of fracture propagation from the cavity caused by quasi-static load or viscous fluid pumping // Comm. In Comp. & Inf. Sci.. 2015. vol 549. – P. 143-157. (Scopus)

Монография

17. Черный С.Г., Лапин В.Н., Есипов Д.В., Куранаков Д.С. Методы моделирования зарождения и распространения трещин. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2016. 312с.

Основные материалы конференций

1. Cherny S.G., Lapin V.N., Chirkov D.V., Alekseenko O.P., Medvedev O.O. 2D modeling of hydraulic fracture initiating at a wellbore with or without microannulus // SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference. --- The Woodlands, Texas, 2009. – SPE-119352-MS. (Scopus)
2. Лапин В.Н., Черный С.Г., Есипов Д.В., Куранаков Д.С. Моделирование трехмерного неплоского распространения трещин гидроразрыва под действием закачки неньютоновской жидкости // Материалы межд. конф. Моделирование геологического строения и процессов разработки – основа успешного освоения нефтегазовых месторождений, 4-5 сентября 2018 года, Казань. – 2018. с. 235—238.
3. Черный С.Г., Есипов Д.В., Лапин В.Н., Куранаков Д.С. Проблемы моделирования гидравлического разрыва пласта в двумерной и трехмерной постановках // Материалы IX междунар. Конф. По неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ’2012). Алушта: Изд. МАИ, - 2012. - С. 441-443.

Содержание

Глава 4. Моделирование распространения трещин при закачке вязкой жидкости

4.1. Верификация трехмерной модели

4.2. Моделирование распространения поперечной трещины в трехмерной постановке

4.3. Распространение трещины, вызванного закачкой слабосжимаемой жидкости

4.4. Влияние основных параметров на распространение двух параллельных трещин

4.5. Распространение продольной трещины

Глава 5. Иерархия моделей распространения трещины при закачке в нее вязкой жидкости

5.1. Модель трещины, распространяющейся по границе материалов

5.2. Плоскорадиальная модель трещины… с проппантом

5.3. Определение параметров трещиноватой среды по утечкам бурового раствора

5.4. Модель длинной трещины, включающая механизм оседания пропанта

5.5. Одномерная модель длинной трещины, включающая механизм закупоривания

Заключение

Глава 1. Задача моделирования распространения трещины и подходы к ее решению

Трехмерная модель начального этапа распространения трещины *

Основные процессы

Процесс	Модель, уравнения
Деформация породы	Линейная упругость, 3D $w = w(p, \mathbf{x}_r)$
Разрушение породы	Критерии разрушения $\mathbb{K}(w, \mathbf{x}_r) = 0$
Движение жидкости	Уравнения смазки $p = p\big(w, \mathbf{x}_f, \Delta t\big), \mathbf{x}_f = \mathbf{x}_f(w, \Delta t)$
Фильтрация в породу	Фильтрация многофазной жидкости
Перенос проппанта	Перенос концентрации
Хим. процессы	Уравнения реакций

Особенности задачи

Нелинейная связь между процессами

Наличие свободной границы

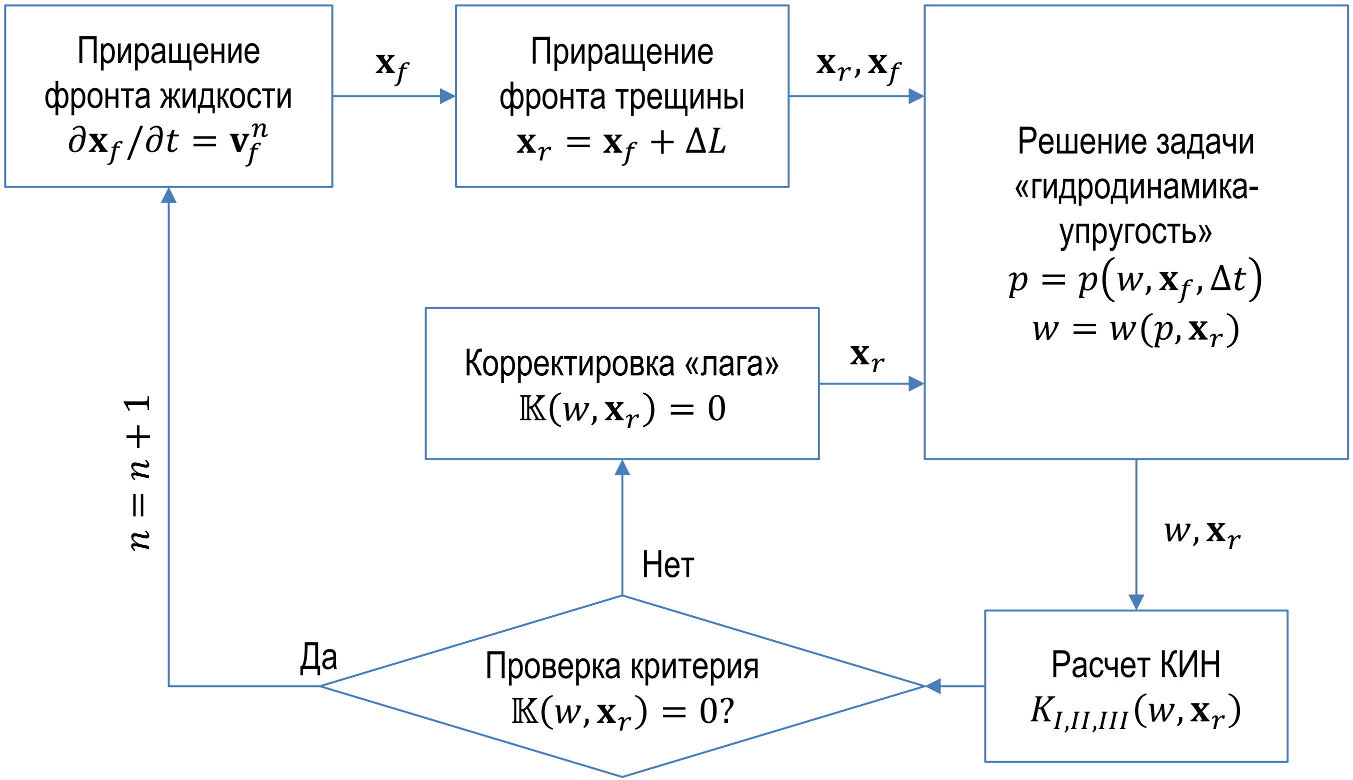
На каждом шаге распространения определяются

Раскрытие w, давление p

Положения фронтов трещины $\mathbf{x}_r$ и жидкости $\mathbf{x}_f$

* Черный С.Г., Лапин В.Н., Есипов Д.В., Куранаков Д.С. Методы моделирования зарождения и распространения трещин ИВТ СО РАН, 2016

Метод совместного решения уравнений модели – общая схема



Основные соотношения

Упругость

$$w = w(p, \mathbf{x}_r)$$

Разрушение

$$\mathbb{K}(w, \mathbf{x}_r) = 0$$

Гидродинамика

$$p = p\left(w, \mathbf{x}_f\right)$$

$$\mathbf{x}_f = \mathbf{x}_f(w)$$

Основные переменные

Раскрытие w

Давление p

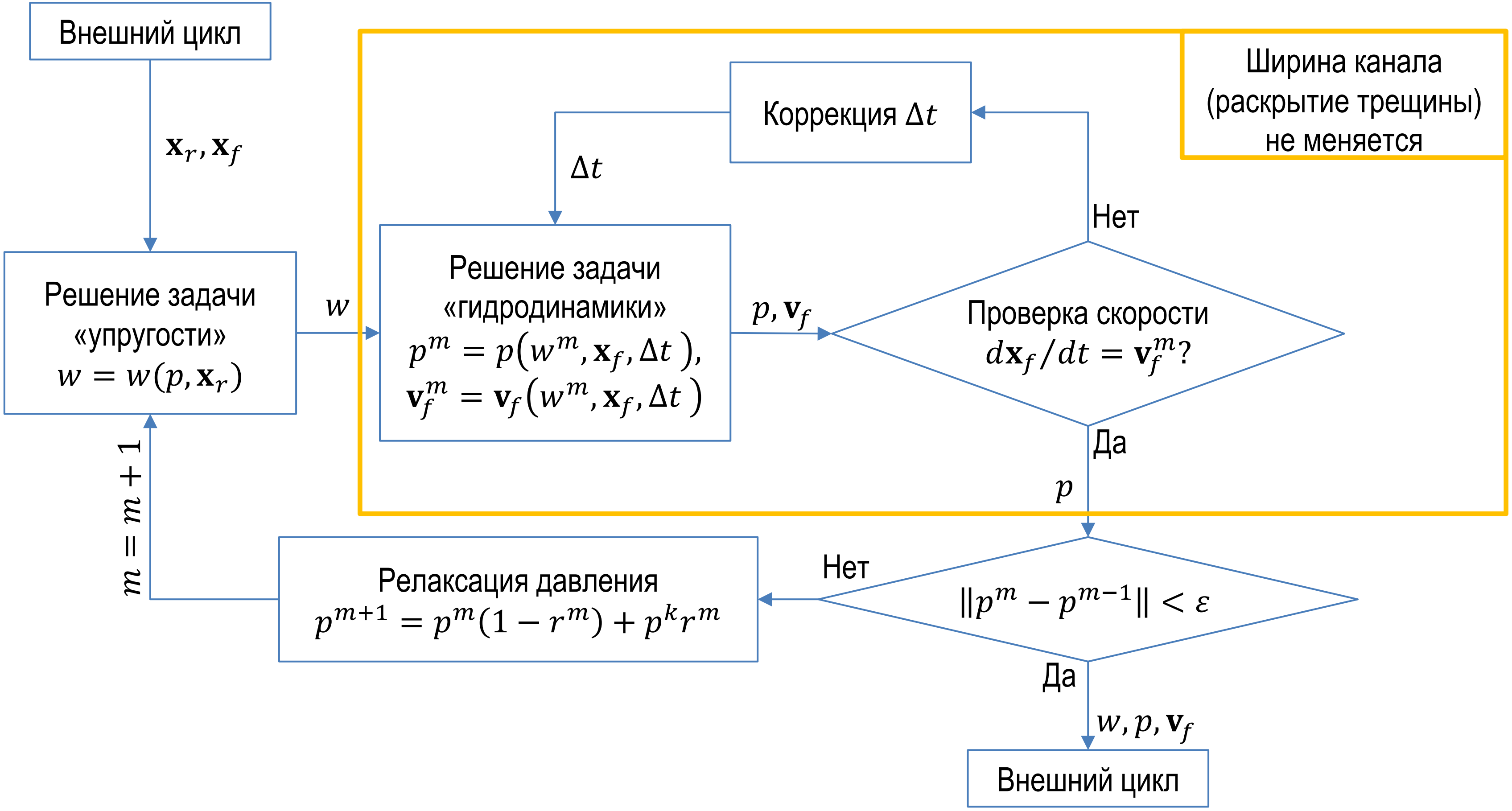
Положения фронтов

трещины $\mathbf{x}_r$

и жидкости $\mathbf{x}_f$

Как найти решение, удовлетворяющее всем соотношениям?

Решение задачи «гидродинамика-упругость»



Описание деформации материала

Постановка задачи

Уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

Закон Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

Определение тензора деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}^*\right)$$

Граничные условия для напряжений

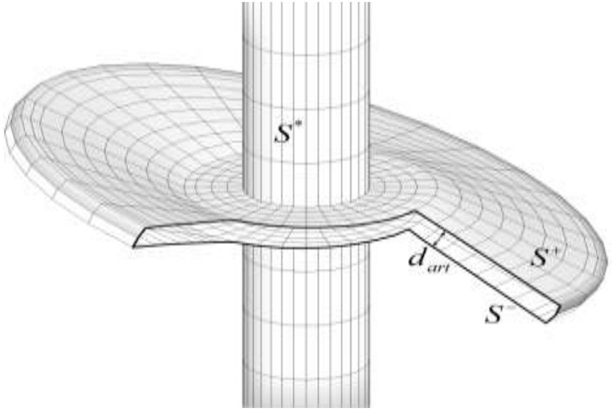
$$S\colon\ \sigma_{ij} n_j = t_i = -p(\mathbf{x}) n_j - \sigma_{ij}^{\infty} n_j$$

Условие на бесконечности

$$\mathrm{x} \to \infty\colon\ \ u_j \to 0$$

ε_{ij} – тензор деформаций
σ_{ij} – тензор напряжений
u_i – смещения
n_i – внешняя нормаль
σ_{ij}^{∞} – напряжения в естественном залегании
$p(\mathbf{x})$ – давление в полости, трещине

Расчетная область с искусственным разрезом (для классического МГЭ)



Метод граничных элементов

Интегральное уравнение для точки границы $x^* \in S^*$

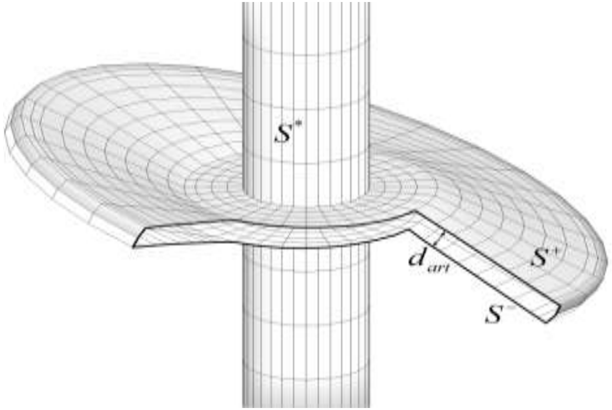
$$-0.5u_i(x^*) = \int_{S^*} U_{ij}(x^*, x)t_j(x)dS(x) - \int_{S^*} T_{ij}(x^*, x)u_j(x)dS(x) - \int_{S^-} T_{ij}(x^*, x)\Delta u_j(x)dS(x)$$

Интегральное уравнение для точки берега трещины $x^- \in S^-$

$$t_j(x^-) = \int_{S^*} L_{kj}(x^-, x)t_k(x)dS(x) - \int_{S^*} M_{kj}(x^-, x)u_k(x)dS(x) - \int_{S^-} M_{kj}(x^-, x)\Delta u_k(x)dS(x)$$

$t_j = \sigma_{ij}n_i$ – усилия, u_j – смещения
$\Delta u_j = u_j(x^+) - u_j(x^-)$ – разрыв смещений

Расчетная область с искусственным разрезом (для классического МГЭ)



Этапы метода

1) Разбиение границы области $S^* \cup S^\pm$ на элементы

2) Выражение координат и неизвестных функций через базисные функции $u(\xi) = \Sigma u^m \varphi_m(\xi)$

3) Формирование СЛАУ для коэффициентов разложения u^m

4) Решение СЛАУ: LU разложение, GMRES

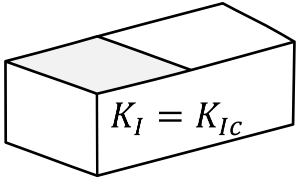
Выводы по главе 1

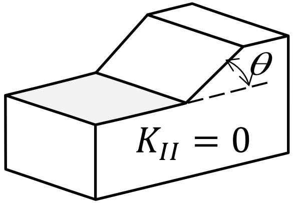
- Сформулирована задача описания распространения трещины, вызванной закачкой вязкой жидкости
- Обозначены основные процессы, влияющие на распространение трещины, которые необходимо описывать при моделировании распространения
- Приведен краткий обзор классических моделей трещин гидроразрыва пласта, как наиболее характерного примера рассматриваемых трещин
- Сформулирована концепция трехмерной модели трещины, описывающая движение жидкости в трещине, деформацию и разрушение материала
- Описан метод граничных элементов, используемый для решения уравнений упругого равновесия, предназначенных для расчета деформации материала
- Представлен алгоритм совместного решения уравнений упругого равновесия и движения жидкости и уравнений критерия распространения трещины

Глава 2. Неявный интегральный критерий распространения трещины

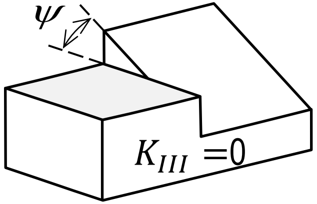
Классификация критериев распространения
Плоские и трехмерные

Плоские
- Две моды нагружения
- Два параметра определяют приращение
- Точки фронта независимы

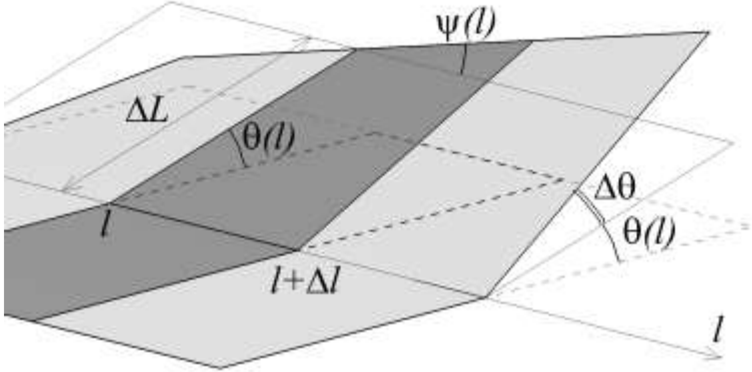




Трехмерные
- Три моды нагружения
- Три параметра определяют приращение
- Изменение положения одной точки фронта меняет значения КИН в ее окрестности



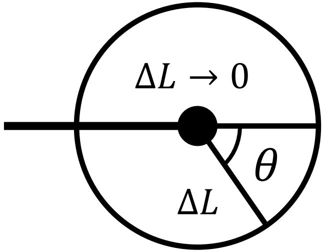
θ – угол поворота
ψ – угол кручения



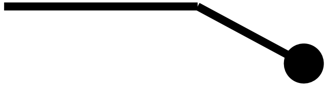
Явные и неявные

Классические критерии

K_I, K_{II}, K_{III}

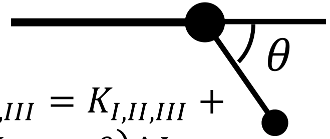


$\max_{\theta} \sigma_\theta(\theta, K_I, K_{II}, K_{III})$



Неявные аналитические критерии*

K_I, K_{II}, K_{III}

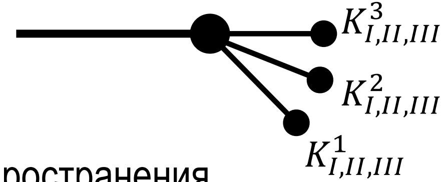


$$K`_{I,II,III} = K_{I,II,III} + \\ +\mathbf{F}\big(K_{I,II,III}, \theta\big)\Delta L + \cdots$$

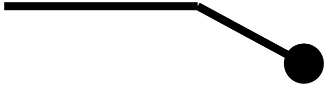
$\max_{\theta} K_I(\theta, \Delta L))$

$\Delta L = const$

Неявный интегральный критерий



$\max_{i} K_I^i$



- Численный расчет НДС после распространения
- Конечное приращение трещины
- Перебор вариантов

* Lazarus et al.V, Leblond JB, Mouchrif SE, 2001. J. Mech. Phys. Solids

Неявный критерий распространения трещины

Принцип локальной симметрии*: Трещина распространяется в направлении

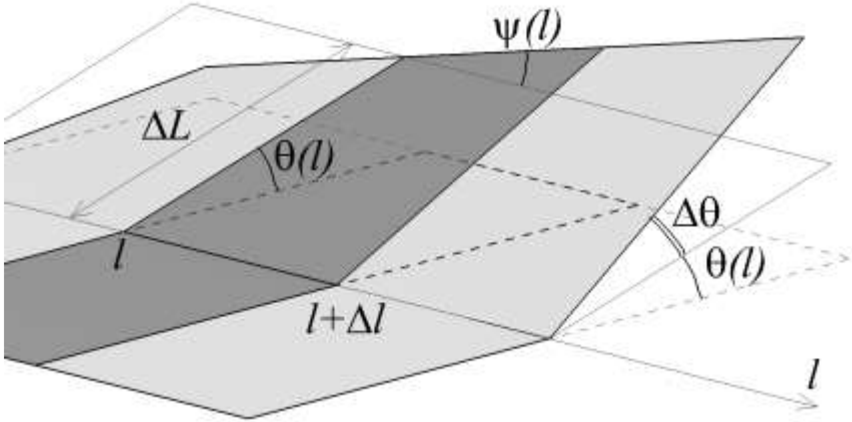
$$K_{II}\big(\theta(l)\big) = 0, \qquad K_{III}\big(\psi(l)\big) = 0$$

θ – угол поворота
ψ – угол кручения

$$\psi(l) = \Delta L(l)\frac{\partial \theta}{\partial l}\big(\theta(l)\big) \Rightarrow K_{III}\big(\psi(l)\big) = \widetilde{K}_{III}\big(\theta(l)\big)$$

$$\Downarrow$$

$$K_{II}\big(\theta(l)\big) = 0, \qquad \widetilde{K}_{III}\big(\theta(l)\big) = 0$$



Углы поворота θ и кручения ψ зависимы
В точке фронта: 2 условия, один параметр
Решение – только приближенное

Интегральная формулировка критерия:

Найти распределение угла поворота $\theta^*(l)$, при котором

$$F(\theta^*(l)) = \min_{\theta(l)} F\big(\theta(l)\big)$$

$$F\big(\theta(l)\big) = \int_{front} (1-\beta)K_{II}^2\big(\theta(l)\big) + \beta\widetilde{K}_{III}^2\big(\theta(l)\big)dl$$

* Goldstein R.V., Salganik R.L Brittle fracture of solids with arbitrary cracks Int. J. Fract. 1974

Итерационный метод решения*

Изменение углов на итерации

$$\Delta^s\theta_j = \theta_j^{s+1} - \theta_j^s \qquad \Delta^s\psi_j \approx \Delta L_j \frac{\Delta^s\theta_{j+1} - \Delta^s\theta_{j-1}}{l_{j+1} - l_{j-1}}$$

Изменение КИН

$$K_{II}(\theta_j^{s+1}) \approx K_{II}(\theta_j^s) + \frac{1}{\chi_{II}}\Delta^s\theta_j \qquad K_{III}(\psi_j^{s+1}) \approx K_{II}(\theta_j^s) + \frac{1}{\chi_{III}}\Delta^s\psi_j$$

Изменение функционала

$$F^{s+1} \approx \sum_{j\in front} (1-\beta)\left(K_{II\,j}^2 + \frac{1}{\chi_{II}}\Delta^s\theta_j\right)^2 + \beta\left(\widetilde{K}_{III\,j}^2 + \frac{\Delta L_j}{\chi_{III}}\frac{\Delta^s\theta_{j+1} - \Delta^s\theta_{j-1}}{l_{j+1} - l_{j-1}}\right)^2$$

χ_{II}, χ_{III} – параметры алгоритма

На каждой итерации решается СЛАУ

$$\frac{\partial F^{s+1}}{\partial \theta_j^{s+1}} = 0, \qquad j \in front$$

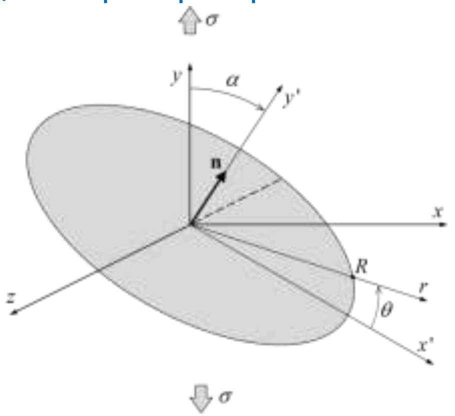
При сходимости ($\Delta^s\theta_j = \Delta^s\psi_j \approx 0$) выполнено

$$\frac{\partial F}{\partial \theta_j} = 0$$

* Cherny S., Lapin V., … Simulating fully 3D non-planar evolution of hydraulic fractures // Int J Fract, 2016

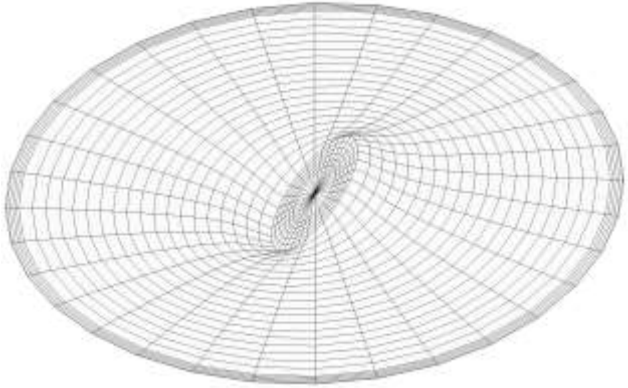
Проблема весового параметра

Задача о распространении наклонной трещины



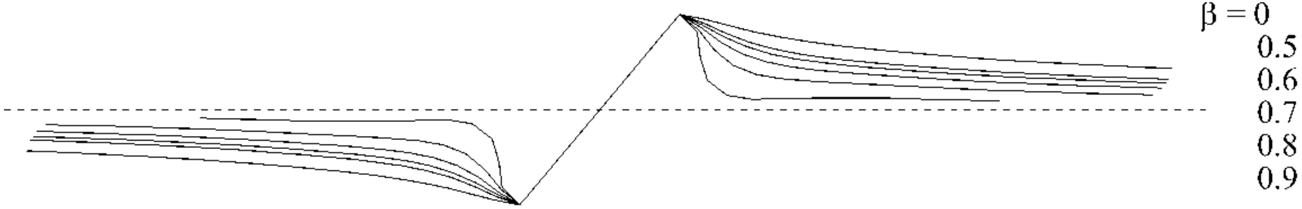
$$\sigma_x^\infty = 16MPa$$
$$\sigma_y^\infty = 10MPa$$
$$\sigma_z^\infty = 16MPa$$
$$K_I = 1MPa\sqrt{m}$$

$\beta = 0.5$



Траектории для различных значений весового параметра β

$\alpha = 50^\circ$



Валидация неявного критерия*

Трещина распространяется в направлении:

2D MTS: Erdogan & Sih 1963

где с максимальны *окружные* растягивающие напряжения

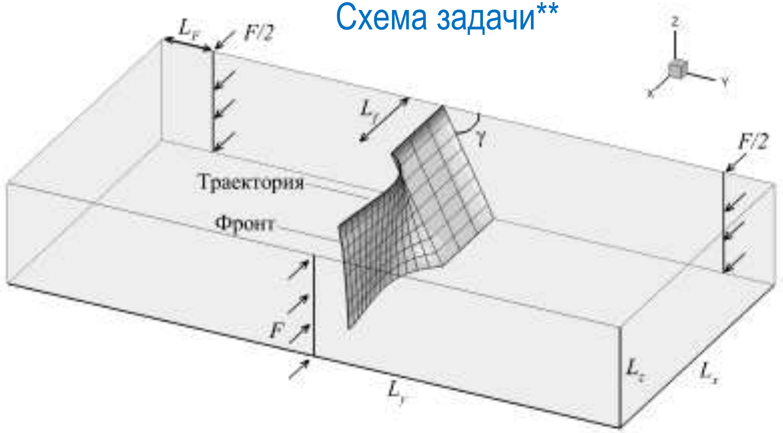
3D MTS: Schollmann et al. 2002

где с максимальны *главные* растягивающие напряжения

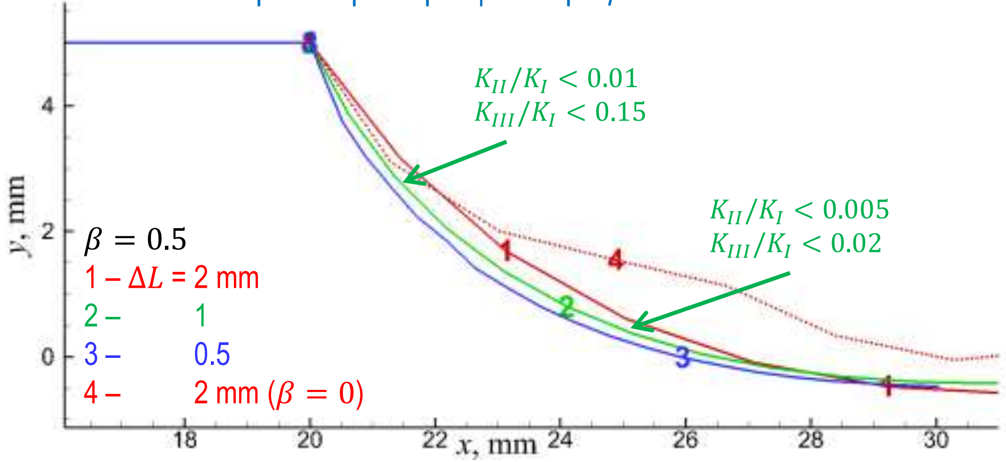
MGV Lazarus et al. 2008

в котором *средняя по фронту* скорость высвобождения полной энергии максимальна при продвижении на *конечное расстояние*

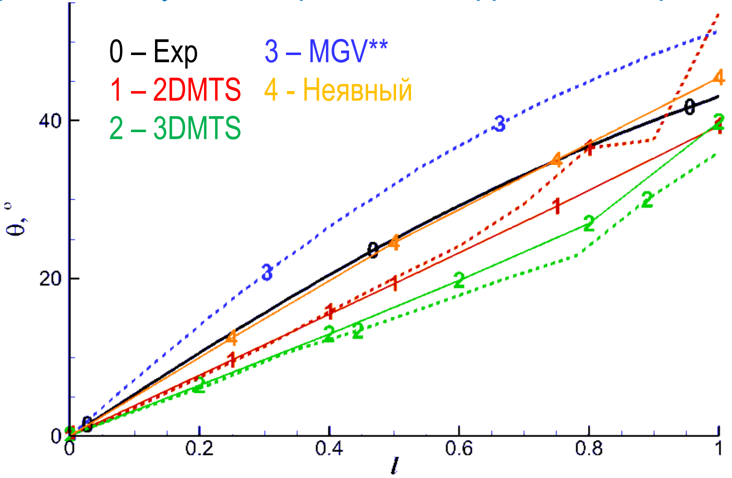
Схема задачи**



Траектория трещины при $\beta = 0.5$



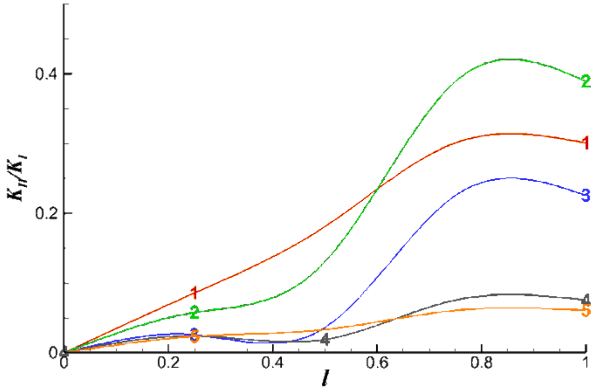
Распределение угла поворота вдоль фронта на первом шаге

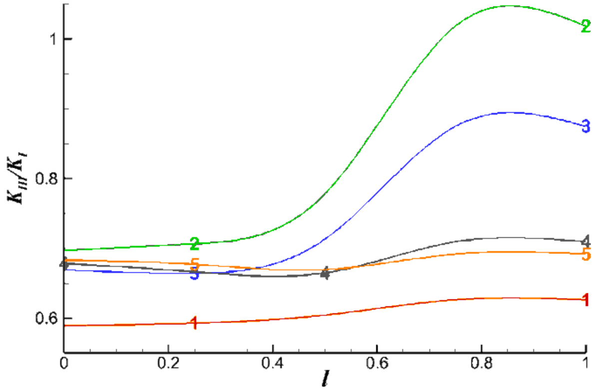


* Лапин В.Н., Фомина А.А. Сиб. Ж. Индустр-ой Мат-ки, 2019. ** Lazarus et al., 2008. Int. J. Fract

Сколько нужно итераций для поиска фронта?

Распределение КИН вдоль фронта



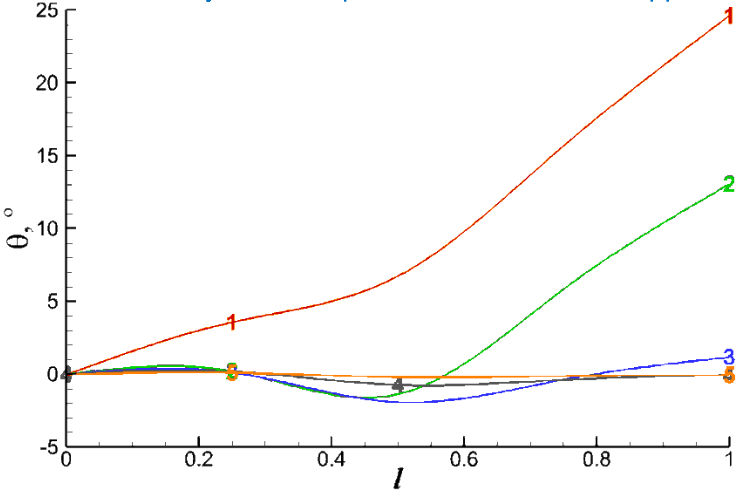


- При изломе траектории принцип локальной симметрии не удовлетворяется $K_{II} \neq 0, K_{III} \neq 0$
- Критерий остановки

$$\Delta\theta < \varepsilon = 10^{-3}, \qquad \Delta\theta = \max_{\mathbf{x}_f} |\theta^s - \theta^{s-1}|$$

- После 5 итераций $\Delta\theta$ вариация угла поворота меньше 0.2%
- 5 итераций почти всегда достаточно, 15 итераций всегда достаточно

Ошибка угла поворота $\theta^s - \theta^*$ вдоль фронта



Выводы по главе 2

- Предложен неявный интегральный критерий выбора направления приращения трещины, позволяющий описывать распространение трещины при сложном смешанном нагружении со значительным влиянием третьей моды КИН K_{III}
- Проведена верификация и валидация критерия путем сравнения с результатами экспериментов, предсказаниями существующих критериев и расчетами других авторов
- Показано, что неявный глобальный критерий позволяет предсказать распределение угла поворота трещины вдоль фронта лучше, чем существующие явные и неявные критерии

Ключевые особенности:

- Неявность – минимизируемая функция рассчитывается по параметрам, характеризующим НДС материала после продвижения трещины, что не требует дополнительных предположений об НДС
- Глобальность – функция включает в себя параметры НДС во всех точках фронта, что позволяет учитывать влияние точек фронта друг на друга
- Конечность приращения – при формулировке критерия не используется предположение о бесконечной малости приращения трещины, которое не выполняется при резком изменении направления распространения

Глава 3. Модель движения жидкости в трещине

Уравнения движения жидкости в трещине - Ньютоновская жидкость

Уравнения импульса

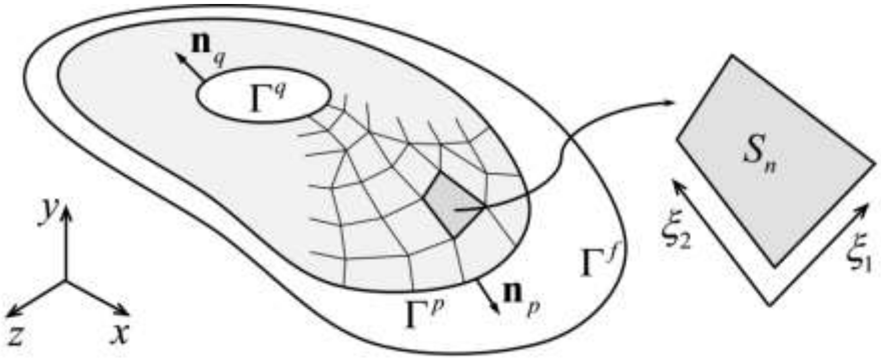
$$\mathbf{q} = -\frac{w^3}{12\mu}\nabla p$$

и неразрывности

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q} = 0$$

дают уравнение Рейнольдса для давления

$$\nabla(a\nabla p) = f, \qquad a = \frac{12\mu}{w^3}, f = \frac{\partial w}{\partial t}$$



Граничные условия

Фронт жидкости ($\mathbf{x}_f$): $\quad p|_{\Gamma^p} = p_{pore}$

Скважина $\quad \mathbf{q}|_{\Gamma^q} = q_{in}\mathbf{n}_q$

* Cherny S., Lapin V., Kuranakov D., Alekseenko O. Int. J. Fracture. 2018.

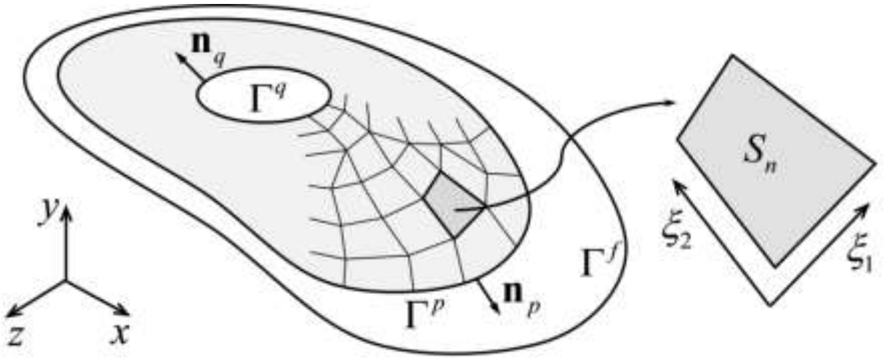
Численный метод для случая ньютоновской жидкости

уравнение Рейнольдса для давления

$$\nabla(a\nabla p) = f, \qquad a = \frac{12\mu}{w^3}, f = \frac{\partial w}{\partial t}$$

Слабая формулировка

$$\int_{\partial S_n} \frac{\partial p}{\partial n}\omega dG - \int_{S_n} (a\nabla p)\nabla\omega dS = \int_{S_n} f\omega dS$$



Этапы метода конечных элементов

1) Разбиение границы области $S^* \cup S^\pm$ на элементы

2) Выражение координат и неизвестных функций через базисные функции $p(\xi) = \Sigma p^m \varphi_m(\xi)$

3) Формирование СЛАУ для коэффициентов разложения p^m

$$K_{ij}p^i = Q_j + F_j$$

$$K_{ij} = \int_{S_n} a\nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j |J| d\xi_1 d\xi_2, \qquad Q_i = \int_{\partial S_n} a\frac{\partial p}{\partial n}\varphi_i dG, \qquad F_j = -\int_{S_n} f\varphi_i |J| d\xi_1 d\xi_2$$

4) Решение СЛАУ: LU разложение, GMRES

Особенности аппроксимации

Расчетные области для задачи упругости и гидродинамики почти совпадают

В методах конечных и граничных элементов используются одинаковые элементы и базисные функции

=> Нет погрешности интерполяции при передаче значений между задачами

Неньютоновская жидкость

Замыкание модели жидкости

Ньютоновская | Неньютоновская*

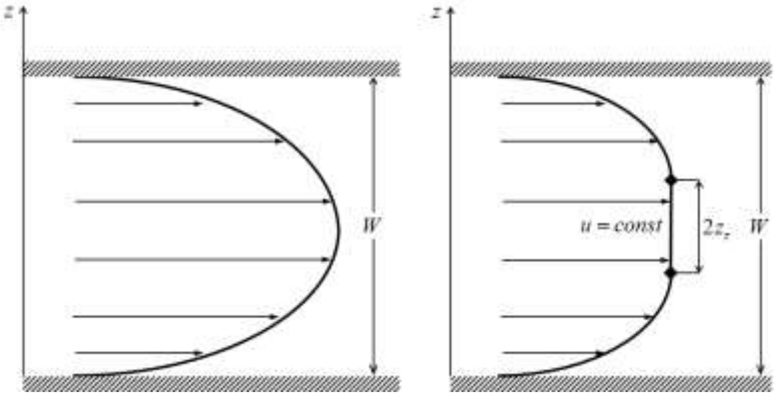
$$\mathbb{P} = -p\mathbb{E} + \mathbb{T}, \qquad \mathbb{T} = \mu\mathbb{D}$$

$$\mu = const$$

$$\mu(D) = KD^{n-1} + \frac{\tau_0}{D}$$

$$D = \sqrt{0.5\mathbb{D}_{ij}\mathbb{D}_{ij}}$$

Профиль скорости в трещине



Уравнения импульса

$$\mathbf{q} = -\frac{w^3}{12\mu(p)}\nabla p$$

Эффективная вязкость

$$\mu(p) = \frac{(2K)^{1/n}(2n+1)}{6n}(w|\nabla p|)^{1-1/n} + \frac{2^{1/n}(4n+2)}{3n(w|\nabla p|)^{1/n}}\tau_0$$

уравнение Рейнольдса для давления

$$\nabla(a\nabla p) = f, \qquad a = \frac{12\mu(p)}{w^3}, f = \frac{\partial w}{\partial t}$$

Коэффициенты в СЛАУ зависят от решения

$$K_{ij}(p)p^i = Q_j + F_j$$

Herschel, W.H.; Bulkley, R. (1926)

Модификация численного метода для неньютоновской жидкости

k-итерациия задачи гидродинамика-упругость

Начальное распределение давления
$m = 0$: $p^0 = p^k$

Кажущаяся вязкость $\mu = \mu_{app}$ & коэффициенты матрицы

$$\mu_{app}^m = \mu_{app}(p^m), \;\; a^m = \frac{w^k}{\mu_{app}^m}, \;\; K_{ij}^m = K_{ij}(p^m), F_{ij}^m = F_{ij}(p^m)$$

Промежуточное распределение давления (СЛАУ)

$$K_{ij}^m \widetilde{p^i} = Q_i + F_i^m,$$

Метод релаксации

$$p^{m+1} = (1 - \alpha)p^m + \alpha\tilde{p}$$

$$\frac{\|p^{m+1} - p^m\|}{\|p^m\|} < \varepsilon$$

Давление p

Да

Нет

$m = m + 1$

$k + 1$ итерациия задачи гидродинамика-упругость

Выводы по главе 3

- Предложена и обоснована модель движения в трещине жидкости сложной реологии
- Поведена верификация численного алгоритма решения уравнений движения жидкости сложной реологии в узком канале путем сравнения с аналитическими решениями задач
- Проведена верификация численного алгоритма и процедуры его объединения с трехмерной моделью распространения трещины путем сравнения с одномерной радиальной моделью трещины (результаты приведены в следующей главе)
- Проведен безразмерный анализ режимов распространения трещины.
  На его основе продемонстрирована необходимость использования модели Гершеля-Балкли при описании жидкости сложной реологии и невозможность замены ее моделью Ньютоновской жидкости.
- Показано, что на этапе формирования траектории трещины (результаты приведены в следующей главе)
  1) можно не учитывать предельное напряжение сдвига τ_0,
  2) модель степенной жидкости $n < 1$ можно заменить моделью Ньютоновской жидкости $n = 1$ с эффективной вязкостью μ_{app} без потери точности описания траектории

Глава 4. Применение трехмерной модели распространения трещины

Верификация путем сравнения с одномерными моделями

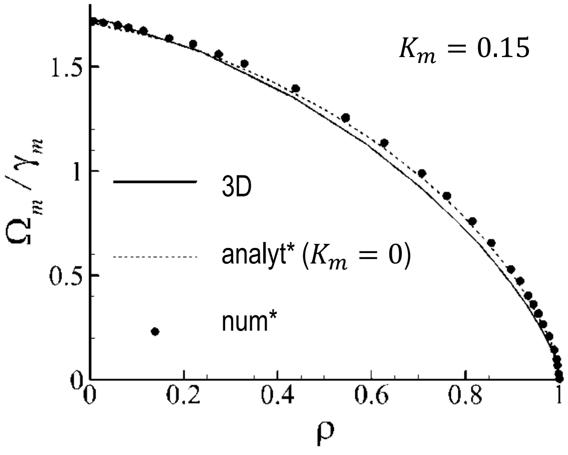
Сравнение с моделью радиальной трещины (аналитическое решение)

Радиус $\gamma_m = \frac{R(t)}{L(t)},\ L(t) = \left(\frac{E`Q_{in}^3 t^4}{12\mu}\right)^{1/9}$

Время $K_m = 4K_{Ic}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{t^2}{(12\mu)^5 Q_{in}^3 E`^{13}}\right)^{1/18}$

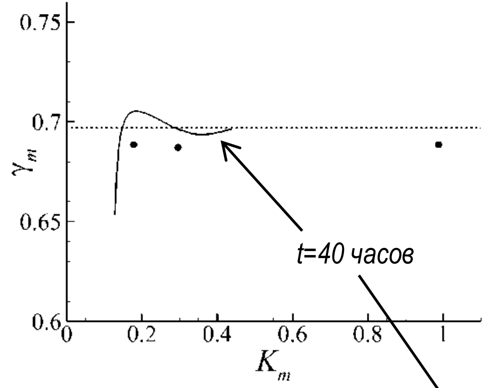
Раскрытие $\Omega_m = \frac{w}{\varepsilon L},\ \varepsilon = \left(\frac{12\mu}{E`t}\right)^{1/3}$

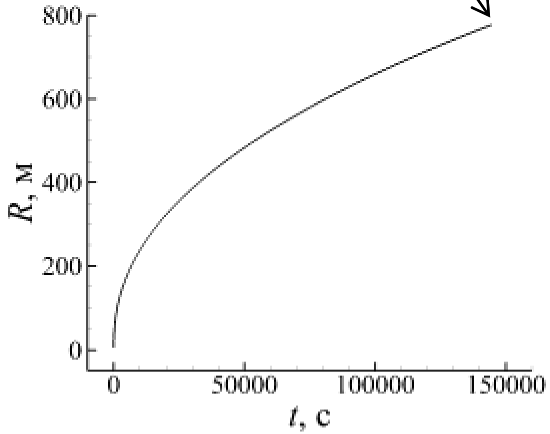
Распределение ширины трещины вдоль радиуса



* Savitski A.A., Detournay E. // Int. J. Solids and Struct. 2002.

Зависимость безразмерного радиуса трещины от безразмерного времени

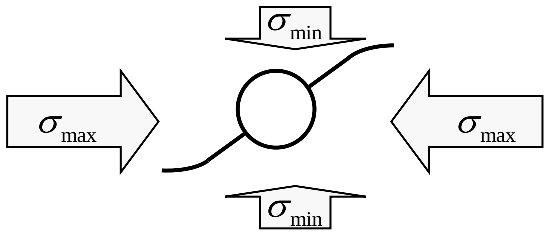




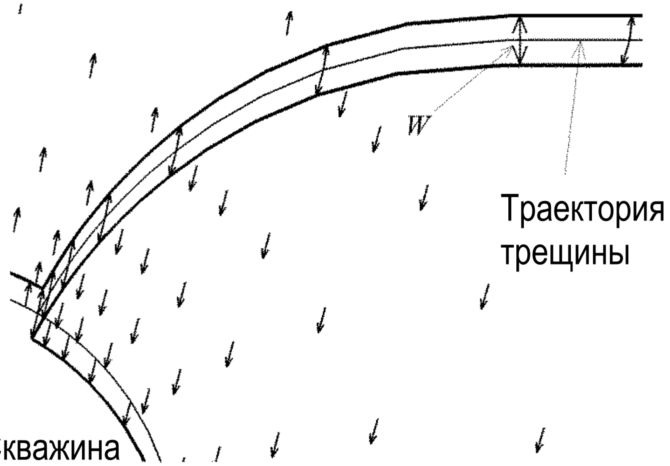
Эффект пережатия трещины

2009* показан эффект уменьшения ширины в двумерной постановке при заданной криволинейной траектории трещины
2011** … роста давления в прискважинной области при описании искривления траектории
2015*** … в трехмерной постановке для поперечной трещины

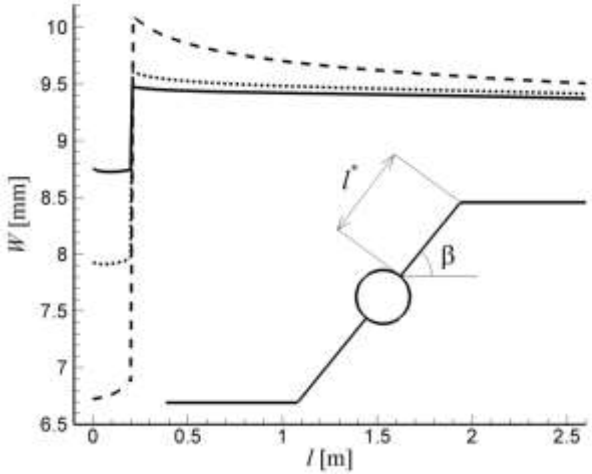
Схема трещины с заданной траекторией



Смещения породы при гладкой траектории



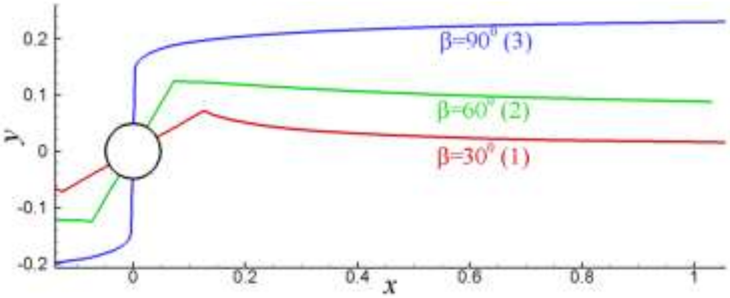
Ширина трещины у скважины при изломе траектории



*Cherny S., et al Int. J. Rock Mech. & Min. Sci. - 2009
**Алексеенко О.П. и др. // Вестник НГУ: Мат., мех., инф. - 2011.
***Shokin Yu., et al Comm. In Comp. & Inf. Sci.. 2015.

Факторы, влияющие на пережатие трещины – продольная трещина

Траектория при различных углах наклона



Раскрытие трещины

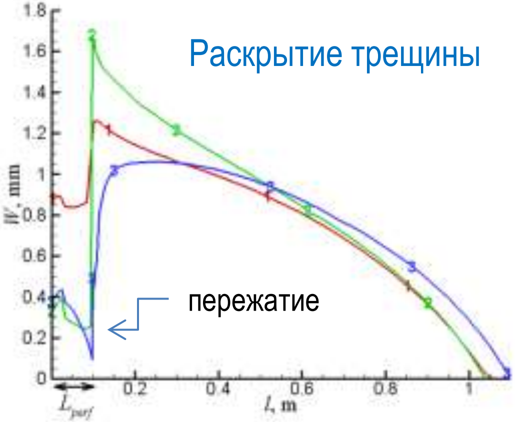
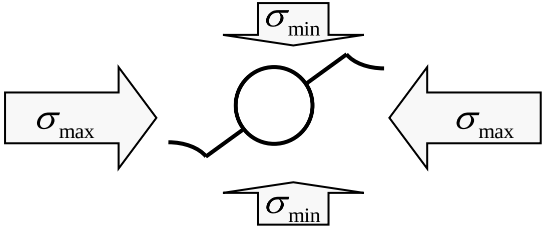
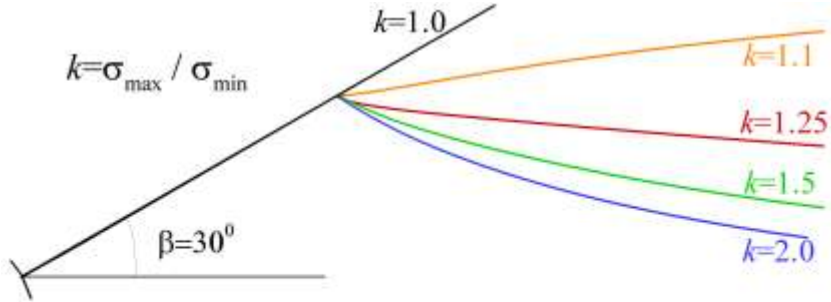


Схема трещины с изломом траектории



Траектория при различных соотношениях напряжений

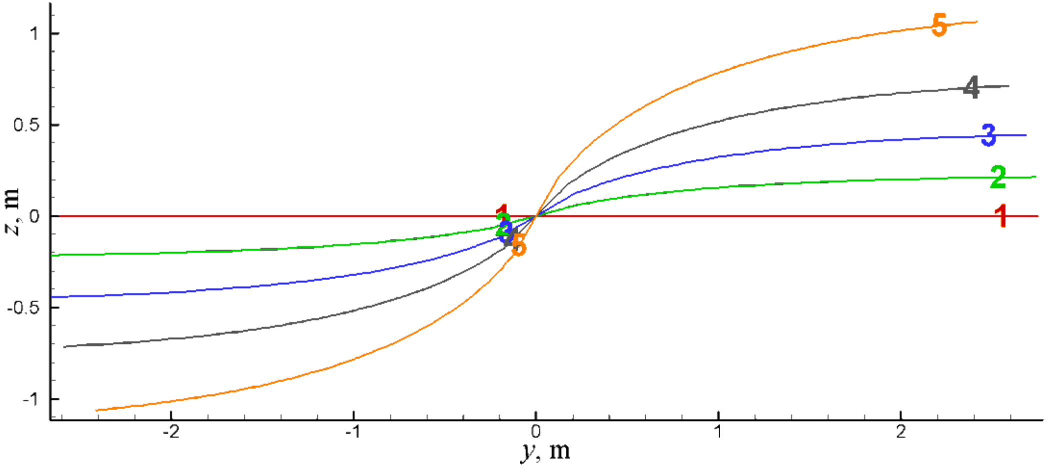


Наибольшее влияние имеют

- Соотношение напряжений в естественном залегании
- Угол наклона зародышевой трещины
- Реология и скорость закачки жидкости
- Трещиностойкость породы

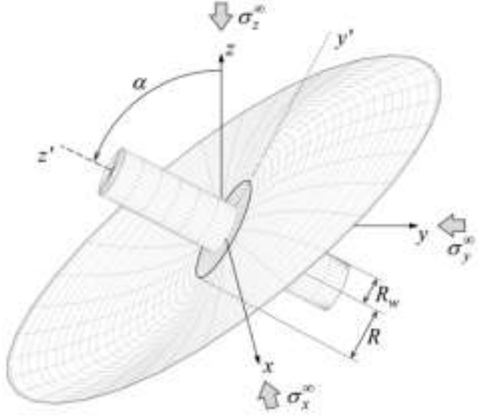
…поперечная трещина

Траектория

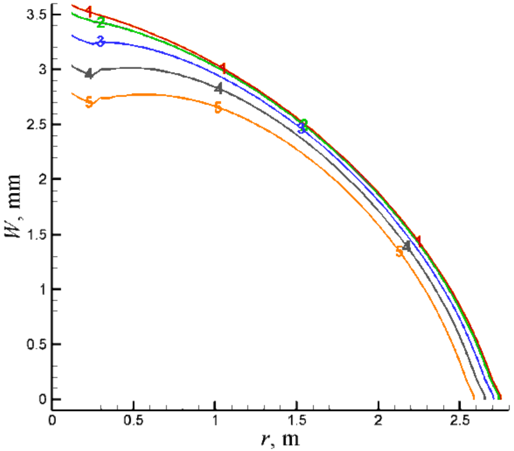


$1 - \alpha = 0°$; $2 - \alpha = 15°$; $3 - \alpha = 30°$;
$1 - \alpha = 45°$; $5 - \alpha = 60°$

Задача о наклонной поперечной трещине



Распределение раскрытия вдоль радиуса



- Эффект пережатия для поперечной трещины выражен слабее (снижение ширины не более 25%), чем для продольной (до 80%)

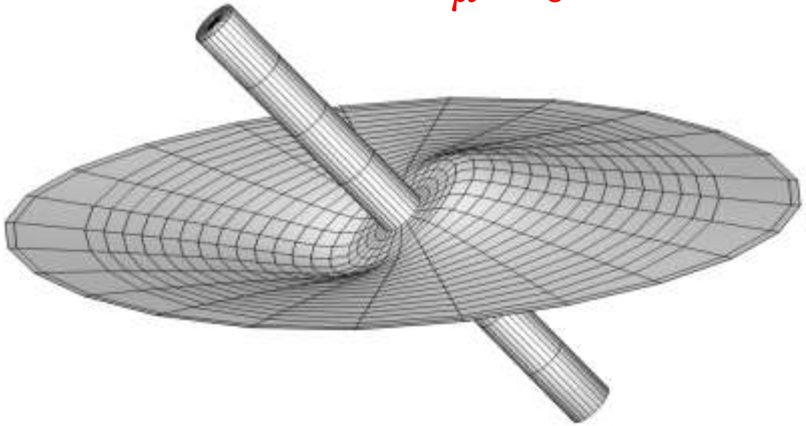
Влияние вязкости жидкости на форму трещины

Траектория (сечение)

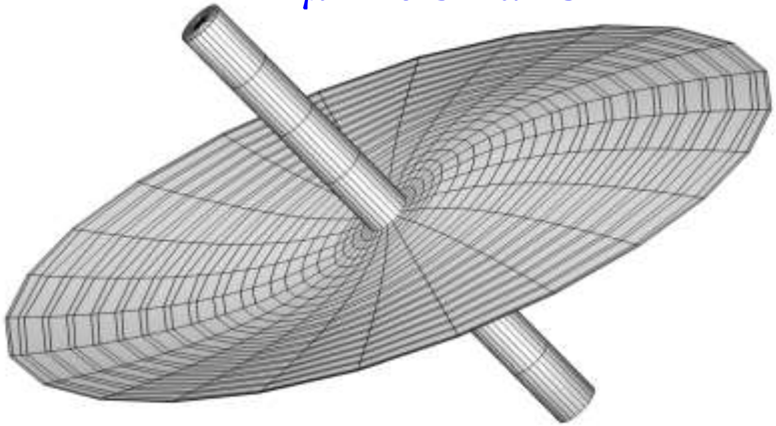
$\mu, Pa \cdot s$
1 – 0
2 – 0.03
3 – 0.3

Вид трещины

$\mu = 0$

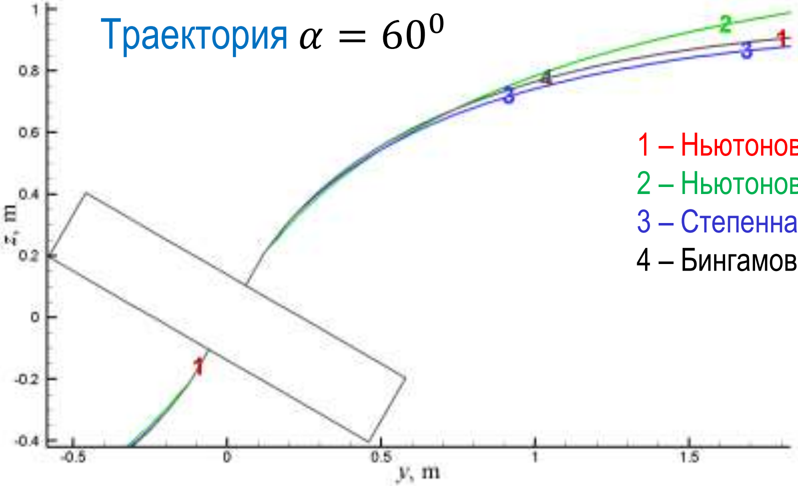


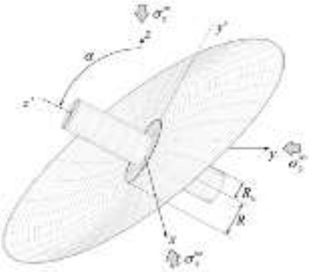
$\mu = 0.3\ Pa \cdot s$



Область применимости моделей жидкости: формирование траектории

Траектория $\alpha = 60^0$





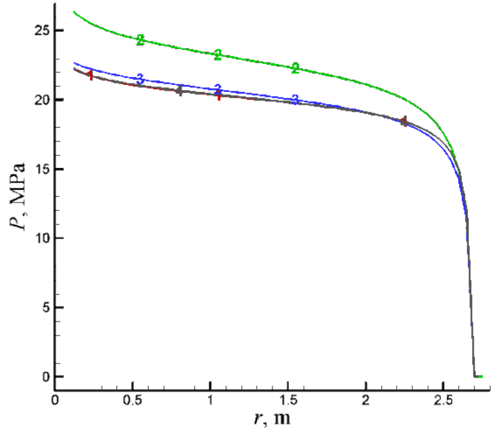
1 – Ньютоновская 1 $K = 0.075 Pa \cdot s, n = 1, \tau_0 = 0 Pa$

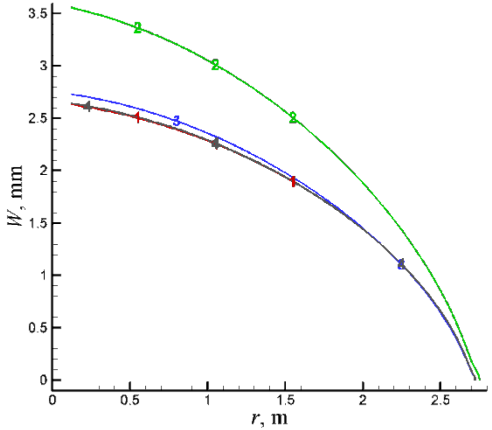
2 – Ньютоновская 2 $K = 0.3 Pa \cdot s, n = 1,\ \tau_0 = 0 Pa$

3 – Степенная $K = 0.3 Pa \cdot s, n = 0.8, \tau_0 = 0 Pa$

4 – Бингамовская $K = 0.075 Pa \cdot s, n = 1, \tau_0 = 11 Pa$

Распределение давления и ширины $\alpha = 0^0$





На начальном этапе распространения можно использовать модель Ньютоновской жидкости

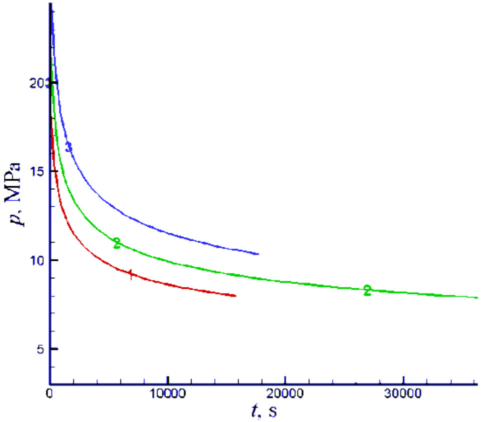
- Для описания степенной жидкости нужно пересчитывать вязкость* $\mu_{app} < K$
- Предельное напряжение сдвига τ_0 можно отбрасывать

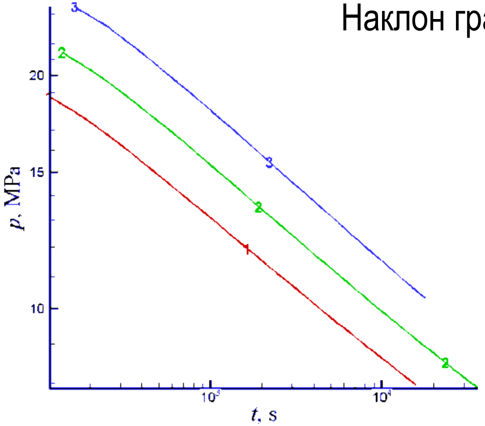
$$\mu_{app}^* = C_\xi \frac{\theta_n^{\frac{3}{n+2}}}{12} \frac{t^{\frac{2-2n}{n+2}}}{E'^{\frac{1-n}{n+2}}} K^{\frac{3}{n+2}}$$

* Linkov, A. Bench-mark solution for a penny-shaped hydraulic fracture driven by a thinning fluid // ArXiv e-prints 2015

…развитая трещина

Давление в скважине: Ньютоновская жидкость

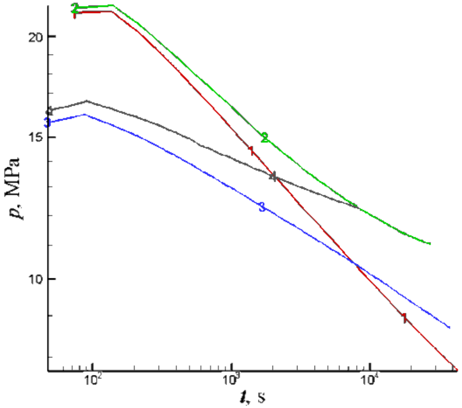




Наклон графика давления постоянный

1 – $K = 500 Pa \cdot s$
2 – $K = 1000 Pa \cdot s$
3 – $K = 2000 Pa \cdot s$

…жидкость Гершеля-Балкли



Наклон графика давления зависит от параметров реологии

1 – Ньютоновская $n = 1, \tau_0 = 0$
2 – Бингамовская $n = 1, \ \tau_0 = 400 Pa$
3 – Степенная $n = 0.5, \tau_0 = 0 Pa$
4 – Гершеля-Балкли $n = 0.5, \tau_0 = 400 Pa$

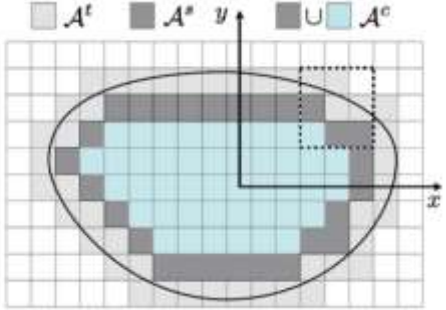
Для развитой трещины необходимо использовать модель неньютоновской жидкости

Выводы по главе 4

- Трехмерная модель распространения трещины, вызванной закачкой вязкой жидкости, применена для исследования распространения трещины гидроразрыва пласта. Результатом моделирования являются зависимости давления в скважине от времени, распределения ширины и давления вдоль поверхности трещины, сама поверхность трещины.
- Проведена верификация модели путем сравнения с результатами расчетов, полученными по одномерным моделям и с аналитическими решениями.
- Показано, что при инициации трещины в направлении, не совпадающем с плоскостью действия минимальных напряжений возникает пережатие трещины в окрестности скважины.
- Для продольной к скважине трещины пережатие выражено значительно сильнее, чем для поперечной, и оказывает больший эффект на падение давление в прискважинной области.
- На основе численного анализа чувствительности и на основе безразмерного анализа определены границы применимости моделей жидкости сложной реологии в трещине
  1. На этапе формирования траектории можно использовать модель ньютоновской жидкости с правильно подобранным коэффициентом эффективной вязкости
  Предельное напряжение сдвига не оказывает влияния на распространение трещины
  2. Для развитой трещины необходимо использовать модель неньютоновской жидкости

Глава 5. Иерархия моделей распространения трещины при закачке в нее вязкой жидкости

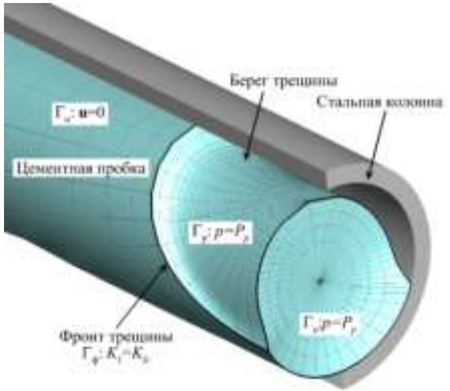
Иерархия моделей



Трехмерная

Поверхность трещины задана

Трещина на границе материалов



Поверхность трещины – плоскость

Плоская трехмерная

Все направления равнозначны

Радиальная

Длина много больше высоты

Трещины PKN-типа

Модель трещины, распространяющейся по границе материалов

Упрощение трехмерной модели:

Неявный глобальный критерий распространения $\Gamma^f = \Gamma^f(p)$

Трехмерная модель:

$$K_I = K_{Ic}, \qquad K_{II} = K_{III} = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta L, \Theta$$

Трещина на границе:

$$K_I = K_{Ic} \rightarrow \Delta L$$

Причины перетока жидкости*

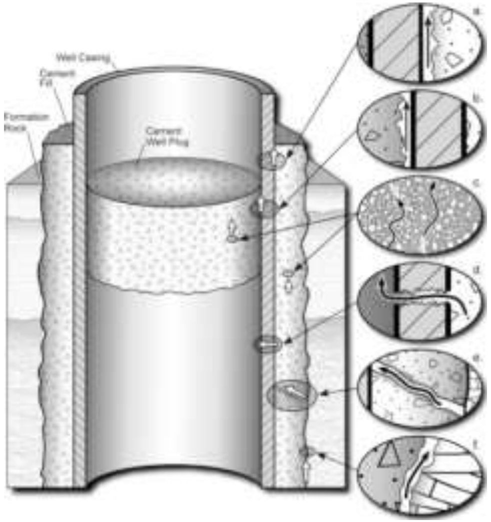
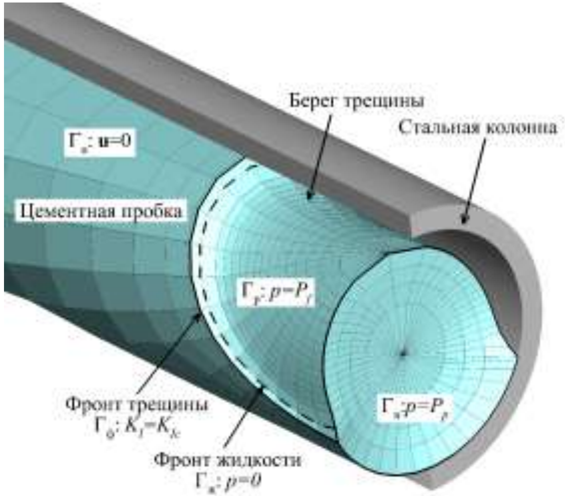


Схема трещины в пробке



Цель разработки:

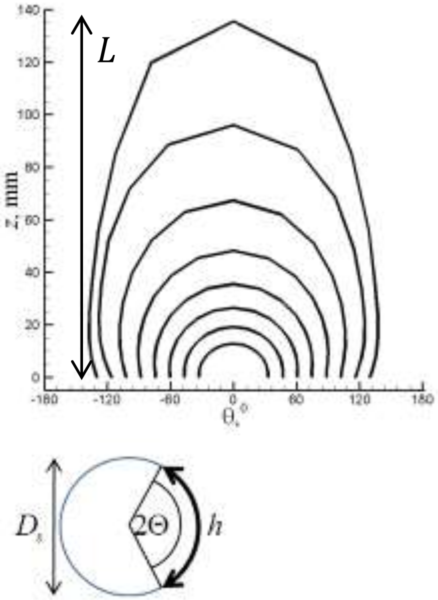
При каких условиях происходит распространение по границе пробка-обсадная колонна?

Определить что влияет на прочность пробки и скорость распространения трещины?

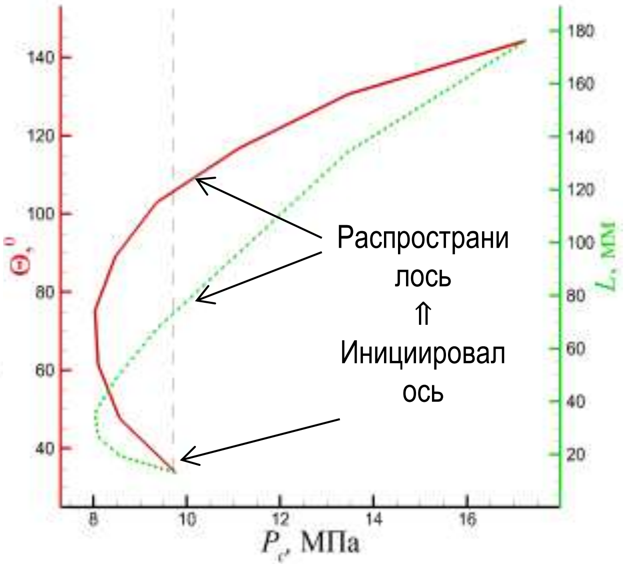
* Gasda S. E., Bachu S., Celia M. A. Env. Geology, 2004, vol. 46, no. 6, p. 707-720.

Нарушение гидроизоляции скважины *

Инициация: Фронт при постоянном давлении

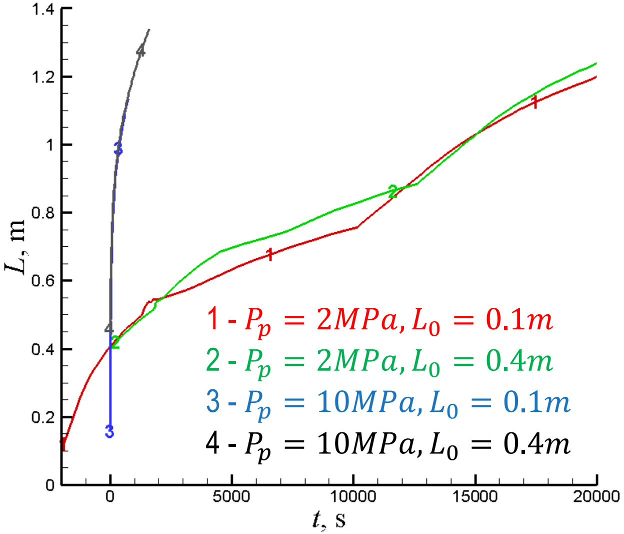


Зависимость размеров от давления



Распространение:

Зависимость длины от времени



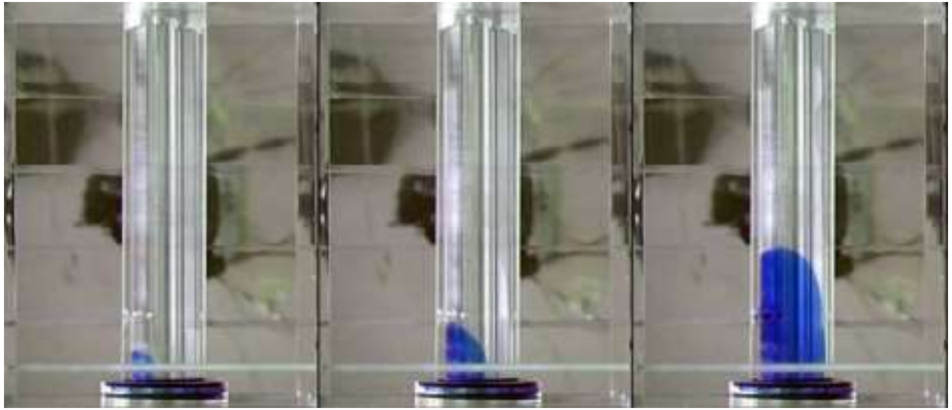
Инициация:
Размер начального дефекта не важен
Давление начала распространения падает при росте трещины

Распространение:
Скорость распространения
не зависит от размера начального эффекта
сильно зависит от избыточного давления

* Лапин В.Н. Вестник НГУ. Серия: Инф. тех. 2020.

Валидация модели*

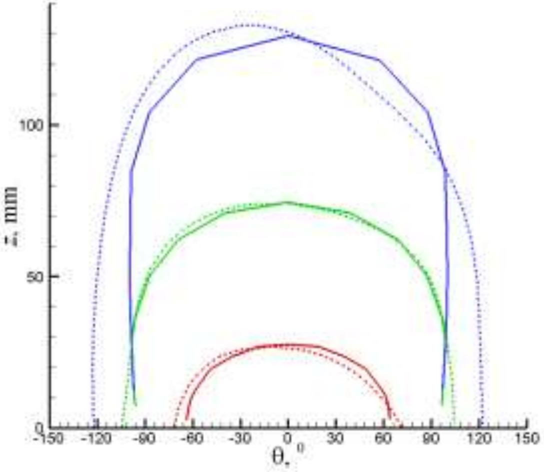
Форма трещины: эксперимент · · · ·



* Распространение трещины по границе алюминиевой трубки в PMMA. Гидроизоляция – эпоксидная смола. Жидкость – вязкая $\mu = 11.9 Pa \cdot s$ закачивается под давлением 10МПа.

Расчет ————

Форма фронта для трещин различной длины



*Lecampion B., et al. 2013

Плоскорадиальная модель трещины, распространяющейся под действием закачки смеси жидкости Гершеля-Балкли с проппантом*, **

Предположение: плоская круговая трещина

Упрощения: аналитическое выражение для ширины трещины, одномерные уравнения

Усложнения: фильтрация в породу, перенос проппанта

Деформация породы

$$w(r) = 4\frac{1-\nu}{\pi\mu}\int_0^{R_{frac}}\int_0^{R_{frac}}\frac{p(\rho)\rho}{\sqrt{x^2-\rho^2}\sqrt{x^2-r^2}}d\rho\, dx$$

Течение несущей фазы

$$\frac{\partial(rw)}{\partial t}+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial Q}{\partial r}+Q_L=0$$

$$\frac{\partial p}{\partial r}=-2K\left(\frac{2n+1}{\pi n}\right)^n+\frac{Q^n}{w^{2n+1}r^n}+\left(\frac{4n+2}{n+1}\right)\frac{\tau_0}{w}$$

Перенос проппанта

$$\frac{\partial \rho W c}{\partial t}+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial Qc}{\partial r}=0$$

Граничные условия

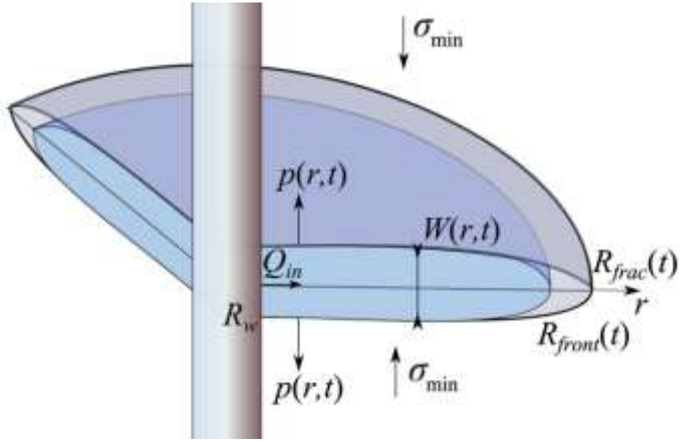
$$p\left(R_{front}\right)=p_{pore},\qquad Q(R_w)=Q_{in}(t),\qquad c(R_w)=c_{in}(t)$$

Разрушение и распространение

$$K_I\equiv\frac{2}{\sqrt{\pi R}}\int_0^{R_{frac}}\frac{p(\rho)\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}d\rho=K_{Ic},\qquad \frac{\partial R_{front}}{\partial t}=\frac{Q_{front}}{2\pi R_{front}w_{front}}$$

Фильтрация в породу

$$Q_L=\frac{2C_L r}{\sqrt{t-t_{exp}(r)}}$$



* Есипов Д.В., Куранаков Д.С., Лапин В.Н., Чёрный С.Г. Выч. техн. 2014.

** Lapin V.N., Esipov D.V. RJNAMM, 2020

Определение параметров трещиновато-пористой среды по утечкам бурового раствора*

Заданные параметры

Реология бурового раствора K, n, τ_0
Давление в скважине p_w
Потери раствора Q_{in}
Параметры породы $E, \nu, \sigma_{min}, C_L, p_{pore}$

Требуемые параметры

Число N и ширина трещин W

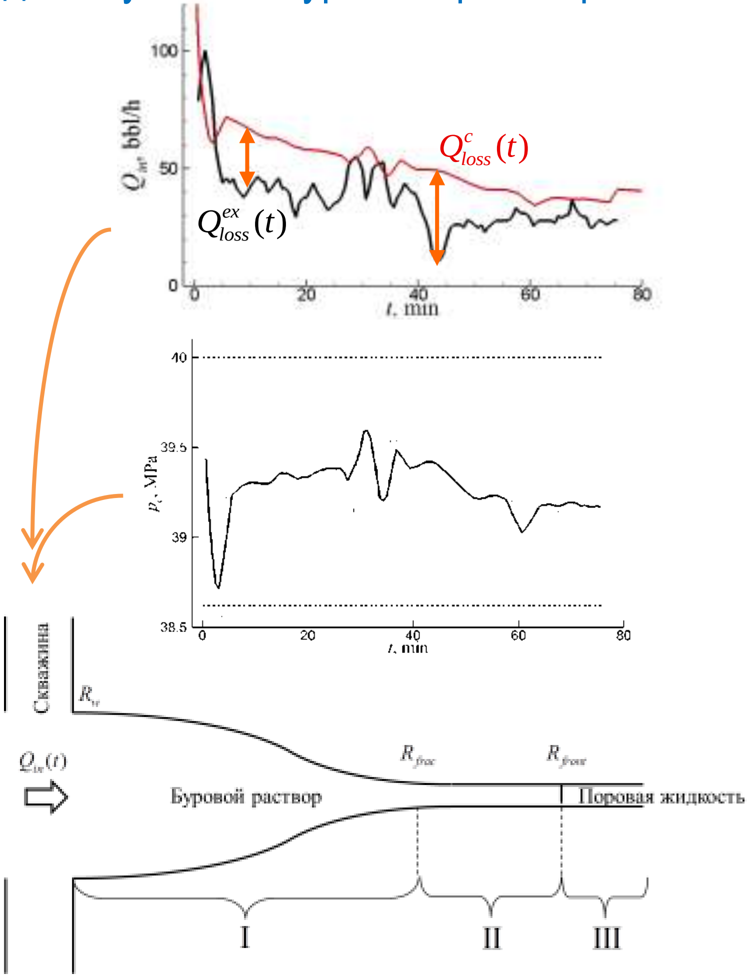
Модель утечки раствора

Аналогична модели радиальной трещины
Отличия:

- Трещина открыта заранее на ширину W_0
- Условие распространения
  $K_I = K_{Ic} \to K_I = 0$
- Отставание фронта трещины от фронта жидкости

Решение обратной задачи

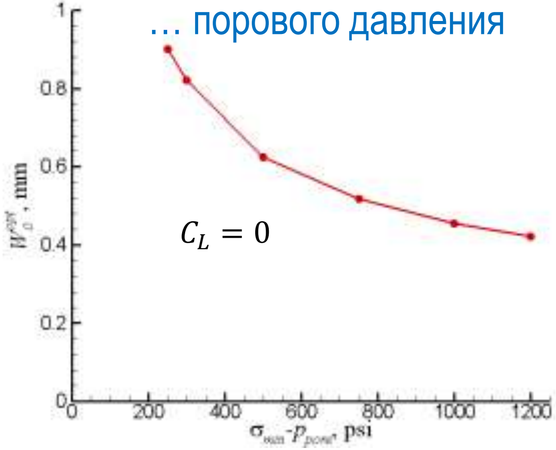
Генетический алгоритм
Метод золотого сечения



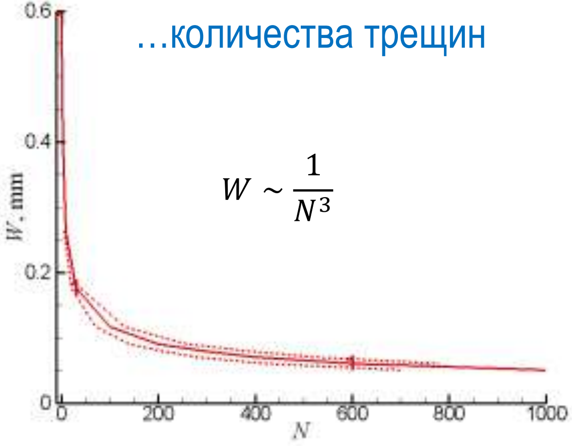
* Лапин В.Н. Выч. техн. 2019.

Чувствительность ширины к изменению основных параметров:

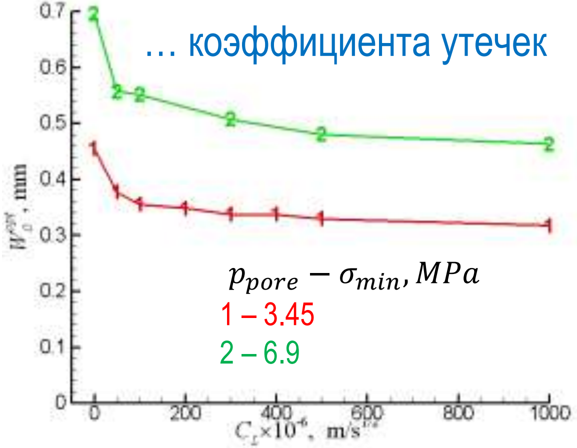
… порового давления



…количества трещин



… коэффициента утечек



Выводы

- Можно определить только один из параметров W или N
- Для среднего количества трещин $(10 \leq N \leq 100)$ результаты совпадают с полученными по модели потерь в трещиновато-пористую среду
- Определено влияние основных параметров на величину потерь

Выводы по главе 5

- Предложена иерархия моделей, основанная на трехмерной модели гидроразрыва пласта и полученная применением упрощающих предположений о форме трещины
- Упрощающие предположения за счет ограничения области применимости моделей позволяют повысить эффективность расчетов и включить в модели описание дополнительных процессов, протекающих при распространении трещины
- Иерархия включает в себя
  - Модель трещины, распространяющейся по границе материалов
  - Плоскорадиальную модель трещины… с проппантом
  - Модели длинной трещины… с проппантом
- На основе моделей, входящих в иерархию
  - Проведено описание распространения трещины по границе обсадной колонны и установлены факторы, влияющие на стойкость гидроизоляции скважины
  - Разработана методика определения параметров трещиновато-пористой среды по данным о потерях бурового раствора
  - Показана возможность увеличения длины трещины путем выбора расписания закачки жидкости и проппанта

Результаты, выносимые на защиту

Пункт 1: Разработка новых математических методов моделирования…

Трехмерная модель распространения неплоской трещины, **одновременно** описывающая
1) движение жидкости **сложной** реологии в узком двумерном канале (трещине),
2) распространение на основе **неявного глобального** критерия выбора направления,
3) деформацию породы в окрестности скважины и трещины

Пункт 3: Разработка эффективных вычислительных методов…

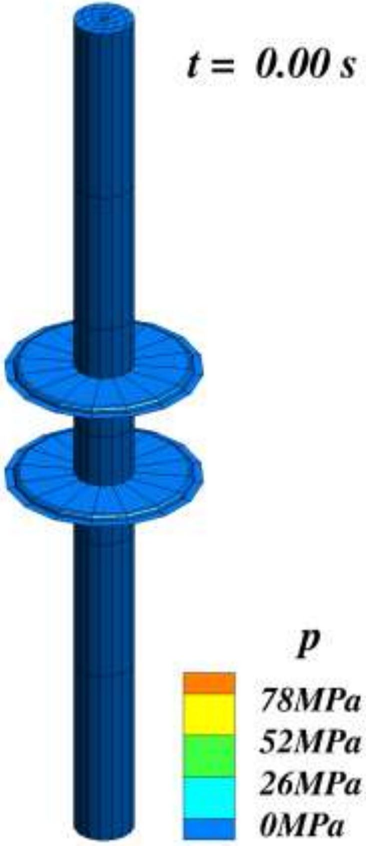
Методы одновременного решения связанных систем **нелинейных** уравнений модели в
1) задаче «гидродинамика-упругость», 2) уравнениях движения жидкости сложной реологии, 3) неявном критерии распространения трещины.

Пункт 4: Реализация … в виде комплексов проблемно-ориентированных программ

Программный комплекс для решения задачи **распространения трещины**, нагруженной давлением вязкой жидкости, от полости в упругой среде, по границе между материалами, в теле конечных размеров

Пункт 5: Комплексные исследования научных и технических проблем…

1) Решена задача криволинейного распространения трещины от полости – установлен **эффект пережатия** трещины. Показаны вызывающие его **факторы**, **влияние** на трещину, **применимые модели**
2) Влияние параметров **гидроизоляции скважин** на ее стойкость
3) Влияние параметров трещиновато-пористой среды на **потери бурового раствора**



Спасибо за внимание