Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки
Институт вычислительных технологий
Сибирского отделения Российской академии наук

На правах рукописи

Куранаков Дмитрий Сергеевич

МЕТОДЫ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И КРИТЕРИИ РАЗРУШЕНИЯ В ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ ЗАРОЖДЕНИЯ И РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТРЕЩИН

05.13.18 — Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук
Есипов Денис Викторович

Новосибирск — 2020

Содержание

Введение

Диссертационная работа посвящена трехмерным методам граничных элементов для решения задач упругости с полостями и трещинами и математическому моделированию процессов зарождения и распространения трещин в горных породах.

Актуальность темы исследований

Построение и обоснование наиболее полных трехмерных численных моделей зарождения и дальнейшего распространения трещины от полости в упругой среде под действием приложенной нагрузки, включающих в себя математические модели и численные методы для их реализации, является важной научной и прикладной проблемой. Научная значимость решения этой проблемы для механики трещин заключается в необходимости установления механизмов влияния напряженно-деформированого состояния (НДС) среды и ее упругих свойств на местоположение зародышевой трещины в окрестности границы произвольного трехмерного тела, ориентацию этой зародышевой трещины, ее раскрытие и коэффициенты интенсивности напряжений на ее фронте. В области математического моделирования и численных методов построение новых наиболее полных трехмерных математических моделей механики трещин, их обоснование, разработка надежных, совершенных численных методов актуальны в связи с необходимостью адекватного описания процесса разрушения материалов и связанными с этим большими затратами вычислительных ресурсов.

Прикладная значимость решения проблемы построения трехмерной модели зарождения трещины обусловлена усовершенствованием и созданием новых технологий гидроразрыва пласта (ГРП). Трехмерное моделирование зарождения и распространения трещины необходимо для усовершенствования инструментальных методов, применяемых в строительстве подземных сооружений в сложных геолого-физических условиях (туннели, шахты и т.д.). Это – методы управляемого разрушения и разгрузки массивов горных пород, создания в них дренажных систем, изолирующих экранов, упрочнения рыхлых пород, откачки воды или газа, изоляции и перекрытия источников поступления пластовых вод и др.

Одной из важных особенностей процесса зарождения трещин в горной породе является так называемый «эффект размера» — зависимость нагрузки, необходимой для разрушения тела, от его геометрических масштабов. Большое количество исследований влияния размера на прочность образцов проведено на простейших задачах об изгибе бетонных балок. Однако для решения сложных трехмерных задач необходима разработка универсальных трехмерных критериев разрушения. К таким задачам относится разрушение породы у перфорированных скважин при проведении гидроразрыва. Из-за эффекта размера давление, необходимое для разрушения породы у перфорации, может быть существенно выше, чем породы возле скважины. Это связано с разницей в характерных размерах скважины и перфорации. В связи с этим использование критерия, не способного учитывать влияние размера на прочность, может привести к неверному предсказанию места зарождения трещины и ее ориентации.

Для моделирования распространения трещины необходимо вычислять НДС упругой бесконечной среды с полостями и трещинами, которое на фронте трещины имеет сингулярность, которая характеризуется коэффициентами интенсивности напряжений (КИНами). Вычисление КИНов необходимо в задачах распространения трещин, так как они являются параметрами, определяющими направление и скорость роста трещин в квазистатическом приближении. Для решения внешних задач упругости одним из наиболее эффективных методов расчета НДС является метод граничных элементов (МГЭ). Однако классический МГЭ не может использоваться в задачах с трещинами, так как на трещине граничное интегральное уравнение смещений вырождается из-за совпадения противоположных берегов трещины. Поэтому важно построить эффективные численные методы, которые способны решать внешнюю задачу, учитывать наличие полостей, трещин и с высокой точностью вычислять КИНы.

Научные результаты и решение задачи относятся к направлению повышения эффективности добычи улеводородного сырья Стратегии научно-технологического развития Российской Федерации[1]

Цель исследования — построение модификаций трехмерного метода граничных элементов и создание на его основе адекватных критериев разрушения в трехмерных задачах зарождения трещин. Выявление особенностей формирования зародышевых трещин у перфорированной скважины.

Объектом исследований являются НДС упругой среды с полостями и трещинами, методы вычисления НДС и процессы зарождения и распространения трещин под действием приложенной нагрузки.

Предметом исследований являются закономерности и особенности процессов зарождения и формирования трещины в зависимости от свойств материала и НДС.

Задачи, поставленные для достижения цели

1. Разработать модификации метода граничных элементов, пригодные для решения трехмерных задач с полостями и трещинами.

2. Разработать критерии разрушения, учитывающие эффект размера в трехмерных задачах зарождения трещины.

3. Провести валидацию предложенных критериев на экспериментах по разрушению образцов из бетона и из горной породы различной формы и размеров: блоков с цилиндрическими отверстиями, с боковыми вырезами, скважин с поперечными пропилами.

4. На основе разработанных моделей создать программное обеспечение для решения трехмерных задач зарождения трещины и для вычисления НДС и КИНов в задачах деформации трехмерных тел с полостями и трещинами.

5. С помощью разработанного программного обеспечения установить местоположение зародышевой трещины и давление жидкости, необходимого для зарождения трещины, в зависимости от ориентации скважины и перфорации относительно напряжений залегания на примере конкретного нефтегазового месторождения.

Методы исследования. Для вычисления НДС упругих тел с полостями и трещинами использовался метод граничных элементов и разработаны его

[1] О Стратегии научно-технологического развития Российской Федерации: Указ Президента Российской Федерации от 1 декабря 2016 г. № 642.

модификации. В основе метода решения задачи зарождения трещины лежат критерии зарождения, определяющие на основе анализа НДС условия, при которых зародится трещина, ее месторасположение, ориентацию и форму.

На защиту выносятся следующие четыре результата, соответствующие четырем пунктам (1,3,4,5) паспорта специальности 05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ по физико-математическим наукам:
Пункт 1 паспорта: Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений.

1. Трехмерная математическая модель зарождения трещин от поверхности упругого тела, учитывающая эффект размера — влияние размера тела на величину нагрузки, необходимую для его разрушения. В основу модели положены адаптированные с вычислительной точки зрения два критерия зарождения трещин:

    - Осредненное по перпендикулярному к поверхности тела отрезку растягивающее напряжение сравнивается с прочностью материала на разрыв;
    - Максимальное растягивающее напряжение сравнивается с локальной прочностью материала, которая зависит от минимального радиуса кривизны поверхности тела.

Пункт 3 паспорта: Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий.

2. Две модификации метода граничных элементов (МГЭ) решения трехмерных задач упругости с полостями и трещинами:

    - МГЭ, в котором трещины представляются пропилами малой, но конечной ширины;
    - Дуальный МГЭ, в котором на поверхности полости решается граничное интегральное уравнение смещений, а на трещине — граничное интегральное уравнение напряжений, записанное относительно разрыва смещений на берегах трещины. Интерполяционный метод вычисления коэффициентов интенсивности напряжений (КИНов) с

использованием в МГЭ аппроксимации разрыва смещений как корень из расстояния до фронта трещины.

Пункт 4 паспорта: Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.

3. Программный комплекс для решения задач зарождения трещин от полости в упругой среде и для вычисления НДС и КИНов в задачах с полостями и трещинами.

Пункт 5 паспорта: Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

4. Результаты решения задачи зарождения трещины на поверхности обсаженной скважины с перфорацией под действием давления закачиваемой в скважину жидкости гидроразрыва: зависимости давления зарождения трещины, местоположения и ориентации зародышевой трещины от ориентации скважины и перфорации относительно напряжений залегания.

Таким образом, в соответствии с формулой специальности 05.13.18 в диссертации представлены оригинальные результаты одновременно из трех областей: математического моделирования, численных методов и комплексов программ.

Научная новизна.

Критерий зарождения трещины, в котором локальная прочность на разрыв зависит от кривизны поверхности тела, применяется впервые в трехмерных задачах, несмотря на то, что в основу его положена известное соотношение между размером и прочностью тела. Критерий учитывает эффект размера и позволяет описывать процесс разрушения сложных трехмерных тел, у которых различные части имеют разный характерный размер. Обобщение двумерного критерия растягивающих напряжений, осредненных по отрезку, на трехмерный случай и его валидация проведены впервые.

Предложено и обосновано использование классического МГЭ для задач с трещинами путем их замены пропилом малой, но конечной ширины. Этот метод более эффективен с точки зрения вычислительной экономичности по сравнению с дуальными МГЭ, так как не требует использования разрывных граничных элементов, что приводит к уменьшению количества степеней свободы и, соответственно, размера результирующих матриц для одного и того же количества граничных элементов. В дуальном МГЭ разработан способ вычисления вычисления главного значения Адамара гиперсингулярного интеграла путем разложения подынтегральной функции в точке коллокации в ряд Лорана. Способ модификации форм-функций граничных элементов в окрестности фронта трещины, значительно увеличивающий точность вычисления КИНов, является оригинальным. Этот способ позволяет строить форм-функции для любого поведения разрыва смещений в окрестности фронта трещины: например, при «вязкостном режиме» распространения трещины разрыв смещений должен быть пропорционален степени 2/3 от расстояния до фронта, а при «вязкостно-утечковом» режиме — степени 5/8.

Впервые для всевозможных ориентаций скважины и перфорации относительно главных напряжений залегания получены зависимости давления зарождения трещины и ее местоположения. Выявлены основные факторы, влияющие на решение задачи: напряжения залегания и ориентация скважины и перфорации относительно них. Показано, что ориентации скважины и перфорации влияют не только на давление зарождения, но и на местоположение и ориентацию зародившейся трещины. Выявлены все ориентации скважины и перфорации, оптимальные по давлению зарождения.

Достоверность и обоснованность полученных результатов обеспечивается использованием фундаментальных законов механики твердого тела, механики разрушения и выбором теоретически обоснованных численных методов, а также подтверждается согласованием результатов проведенных расчетов с известными аналитическими решениями и экспериментальными данными.

Практическая ценность диссертационной работы заключается в возможности применения ее результатов (методик, алгоритмов, их программной реализации и результатов расчетов) в ряде прикладных областей нефтегазовой промышленности и горного дела.

Представление работы. Основные положения и результаты диссертации **докладывались и обсуждались** на Объединенном семинаре «Информационно-вычислительные технологии (численные методы механики сплошной среды)» Института вычислительных технологий СО РАН, Новосибирского государственного университета и Новосибирского государственного технического университета (руководители — академик Ю.И. Шокин и проф. В.М. Ковеня), на семинаре ИГД СО РАН (рук. Е.Н. Шер), на семинаре «Проблемы природно-техногенной безопасности» СКТБ «Наука» ИВТ СО РАН (рук. проф. В.В. Москвичев), на семинаре «Вычислительная механика деформируемых сред» ИВМ СО РАН (рук. проф. В.М. Садовский), на Геофизическом семинаре ИНГГ СО РАН (рук. чл.-корр. И.Ю. Кулаков), на семинаре Отдела механики деформируемого твердого тела ИГиЛ СО РАН (рук. ак. Б.Д. Аннин), на семинаре «Механика макро- и нано-структур» ИГиЛ СО РАН (рук. д.ф.-м.н. С.Н. Коробейников), на семинаре «Математическое моделирование ГРП» ИГиЛ СО РАН (рук. д.ф.-м.н. С.В. Головин), а также на всероссийских и международных конференциях: 1) XII Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям, Новосибирск, 3-6 октября 2011; 2) XI Всероссийская научная конференция с международным участием «Краевые задачи и математическое моделирование», Новокузнецк, 10-12 октября 2012; 3) International Conference of Advanced Mathematics, Computations and Applications, Novosibirsk, 8-11 June 2014; 4) VIII Казахстанско-Российская международная научно-практическая конференция «Математическое моделирование в научно-технологических и экологических проблемах нефтегазовой отрасли», Казахстан, Атырау, 20-21 июня 2014; 5) International Conference "Computational and Informational Technologies in Science, Engineering and Education" (CITech-2015), Almaty, 24-27 September 2015.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 19 печатных работах [1–19], в том числе (в скобках в числителе указан общий объем этого типа публикаций в печатных листах, в знаменателе — объем принадлежащий лично автору) 1 монография [1] (19.5/4.2), 2 статьи в периодических изданиях, рекомендованных ВАК для представления основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора или кандидата наук [2, 3] (4.3/1.2), 5 статей в журналах, индексируемых в базах данных Scopus и Web of Science [4–8](12.9/2.9), 9 — в трудах международных и всероссийских конференций [9–17] (10.4/2.6), 2 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ (в Роспатенте) [18, 19]. В этих работах автору принадлежат методы расчета НДС в задачах с трещинами и результаты моделирования зарождения трещины гидроразрыва. При этом полная модель трехмерного распространения трещины, включающая в себя подмодели деформации породы, течения жидкости в трещине, критерий распространения трещины, принадлежат соавторам и на защиту не выносятся.

Личный вклад автора. Результаты, составляющие основное содержание диссертации, получены автором самостоятельно. Во всех совместных работах автор участвовал в формулировках постановок задач, модифицировал существующий комплекс программ для решения трехмерных задач определения НДС тел с трещинами, реализовал критерии зарождения трещины, учитывающие эффект размера, провел расчеты и анализ полученных результатов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка цитируемой литературы и приложения. Диссертация изложена на 146 страницах машинописного текста, включая 66 иллюстраций и 2 таблицы. Список цитируемой литературы содержит 142 наименования.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность и признательность С.Г. Черному за всестороннюю поддержку и за постоянное внимание к ходу выполнения работы. Успешному выполнению работы способствовали ценные критические замечания В.Н. Лапина, Д.В. Чиркова, П.В. Карнакова.

Глава 1

Трехмерная внешняя задача упругого равновесия тел с трещинами и методы граничных элементов для ее решения

В задачах зарождения и распространения трещин гидроразрыва модель напряженно-деформированного состояния (НДС) среды играет главную роль. При моделировании зарождения трещины модель НДС дает распределение напряжений в рассматриваемом теле, которые далее используются в критериях зарождения трещины для определения условий, местоположения и ориентации зародившейся трещины. Модель НДС породы при моделировании распространения трещины гидроразрыва позволяет рассчитывать ширину трещины по известному распределению давления в трещине и напряжениям породы в естественном залегании. Так как при гидроразрыве деформации породы достаточно малы, используем линейную модель деформации. Считается, что все процессы при зарождении и распространении трещины происходят достаточно медленно, что позволяет использовать уравнения упругого равновесия. Для расчета НДС породы решается задача упругого равновесия в бесконечной области, внутри которой находятся полость (скважина, перфорация) и трещина, как изображено на рисунке 1.1.

В этой главе представлена дифференциальная постановка задачи упругого равновесия внутренней и внешней областей с полостями и трещинами. Произведен обзор существующих численных методов для ее решения: метода конечных элементов (МКЭ) и граничных элементов (МГЭ).

В МКЭ требуется построение подробной сетки в окрестности фронта трещины, чтобы хорошо описывать поведение решения, которое для напряжений имеет сингулярность на фронте трещины. При распространении трещи-

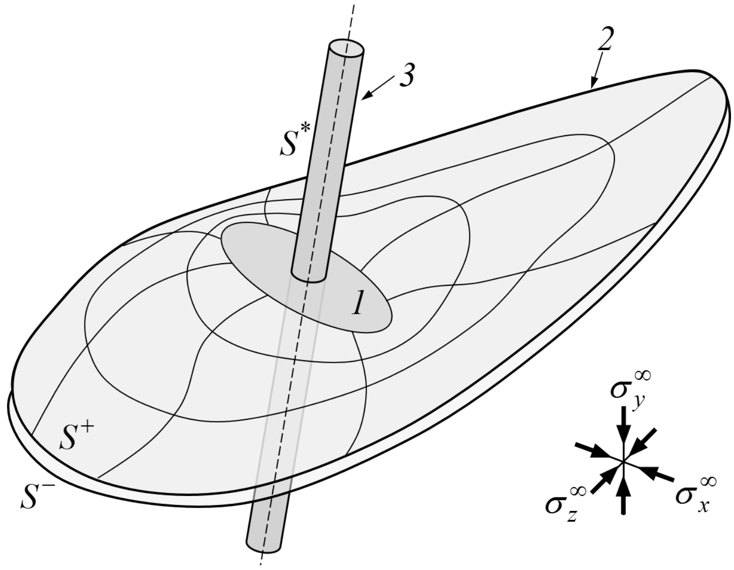


Рисунок 1.1 — Геометрическая концепция трехмерных моделей гидроразрыва: *1* – зародышевая трещина; *2* — фронт трещины; *3* — полость с границей S^*; трещина представляется математическим разрезом с берегами S^+ и S^-.

ны необходимо либо перестраивать сетку для каждой новой конфигурации, либо аппроксимировать область вокруг трещины специальными элементами, обогащенными интерполирующими функциями, учитывающими разрыв смещений на берегах трещины и сингулярное поведение напряжений на её фронте (метод XFEM/GFEM [20]). В МКЭ для решения внешней задачи необходимо рассматривать область достаточно большого размера, чтобы учесть влияние граничных условий на внешней границе, что ведет к существенному увеличению вычислительных затрат. МГЭ свободен от перечисленных недостатков. Он требует аппроксимации только границы расчетной области, и при распространении не требуется перестраивать расчетную сетку.

Суть классического МГЭ заключается в переходе от дифференциальных уравнений упругости к граничному интегральному уравнению смещений. При решении этого уравнения отыскиваются все неизвестные функции на границе области. Зная одновременно функции смещений и напряжений на границе, с помощью интегральных соотношений можно вычислить неизвестные функции внутри области. Однако классический МГЭ не применим для задач с трещинами, потому что граничное интегральное уравнение смещений вырождается на берегах трещины S^+ и S^-.

Для преодоления этих трудностей в настоящей главе разработаны две трехмерные модификации МГЭ для решения внешних задач одновременно с полостями и трещинами. В первой модификации трещина заменяется пропилом малой, но конечной ширины. Такая модификация расчетной области вносит некоторую погрешность в решение, растущую при увеличении ширины пропила, но позволяет использовать классический МГЭ для решения задач с трещинами, так как противоположные берега трещины S^+ и S^- не совпадают и являются обычной невырожденной границей. Однако существует ограничение снизу на ширину пропила: если он слишком мал, то погрешности при вычислении интегралов для близлежащих точек становятся слишком большими. Исследование на задаче растяжения плоской круглой трещины показало, что оптимальная ширина пропила составляет порядка $0.4 \div 0.8$ от размера элемента расчетной сетки.

Вторым предложенным методом решения задач с трещинами является упрощенная модификация дуального МГЭ (ДМГЭ) [21]. Суть ДМГЭ состоит в замене граничного интегрального уравнения смещений на граничное интегральное уравнение напряжений на одном из берегов трещины. Это уравнение не включает в себя смещения на трещиноватой границе, но позволяет найти разрывы смещений на трещине. В предложенной модификации на трещине граничное уравнение смещений не используется, так как в задачах гидроразрыва требуется вычислять только разрыв смещений на берегах трещины, а абсолютное значение смещений не используется. Это позволяет уменьшить результирующую СЛАУ до двух раз в задачах без полостей. В интегральном уравнении напряжений ядра имеют особенности более высокого порядка, а интегралы необходимо рассматривать в смысле главного значения Адамара. Ввиду этого требуется создание численного метода для их эффективного вычисления.

1.1. Постановка задачи упругого равновесия

Основные уравнения

Напряженное состояние упругой изотропной однородной среды под действием вектора $\mathbf{f}$ внешних сил с компонентами f_i описывается следующими уравнениями равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0, \tag{1.1}$$

в которых компоненты тензора напряжений σ_{ij} удовлетворяют линейному закону Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \tag{1.2}$$

а ε_{ij} — компоненты тензора деформаций, вычисленные следующим образом:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{1.3}$$

Здесь u_i есть компоненты вектора смещений $\mathbf{u}$, λ и μ – параметры Ламэ, характеризующие упругую среду и выражающиеся через модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν как

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \tag{1.4}$$

Здесь и далее предполагается суммирование по одинаковым индексам.

Из (1.1) и (1.2) выводятся уравнения Ламэ упругого равновесия, записанные для смещений [22]

$$(\lambda+\mu)\nabla(\operatorname{div}\mathbf{u}) + \mu\Delta\,\mathbf{u} + \mathbf{f} = 0. \tag{1.5}$$

Граничные условия

На рисунке 1.2 схематично изображены области внутренней V^{in} (*слева*) и внешней V^{ex} (*справа*) задач упругости. Для внутренней задачи V^{in} на части границы $S^{\mathbf{u}}$ задаются смещения (условие Дирихле), а на части $S^{\mathbf{t}}$ — напряжения (условие Неймана):

$$u_i\Big|_{S^{\mathbf{u}}} = u_i^*, \quad t_i\Big|_{S^{\mathbf{t}}} = t_i^*. \tag{1.6}$$

Здесь компоненты вектора напряжений t_i есть проекция тензора напряжений на нормаль к поверхности

$$t_i = \sigma_{ij}n_j, \tag{1.7}$$

u_i^*, t_i^* — известные функции. Нормаль $\mathbf{n}$ к поверхности внутренней задачи обозначим $\mathbf{n}^{\text{in}}$, внешней задачи — $\mathbf{n}^{\text{ex}}$.

Для внешней задачи обычно на всей полости задаются напряжения t_i. Также внешняя область имеет границу S^{∞}, удаленную на бесконечное расстояние r_{∞}, на которой обычно задается условие регулярности смещений и напря-

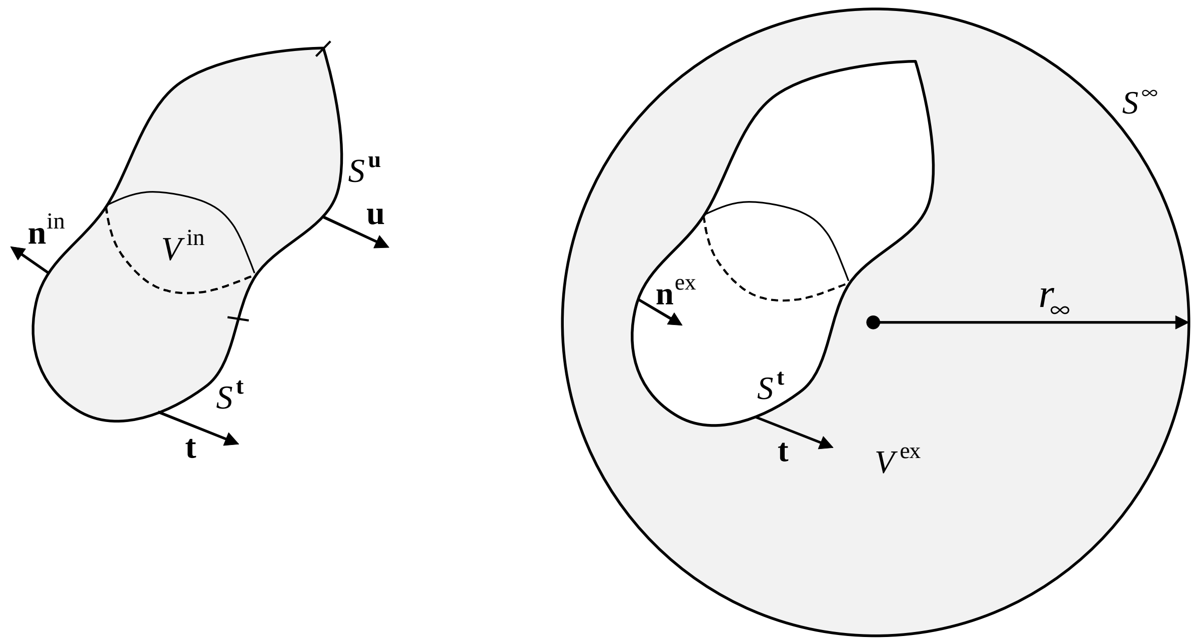


Рисунок 1.2 — Граничные условия внутренней (*слева*) и внешней (*справа*) задач упругости.

жений

$$u_i\Big|_{S^\infty} = O(r_\infty^{-1}), \quad \sigma_{ij}\Big|_{S^\infty} = O(r_\infty^{-2}). \tag{1.8}$$

Дифференциальные уравнения (1.1)–(1.3) с граничными условиями (1.6) – (1.8) образуют краевую задачу относительно неизвестных смещений u_i, деформаций ε_{ij} и напряжений σ_{ij}.

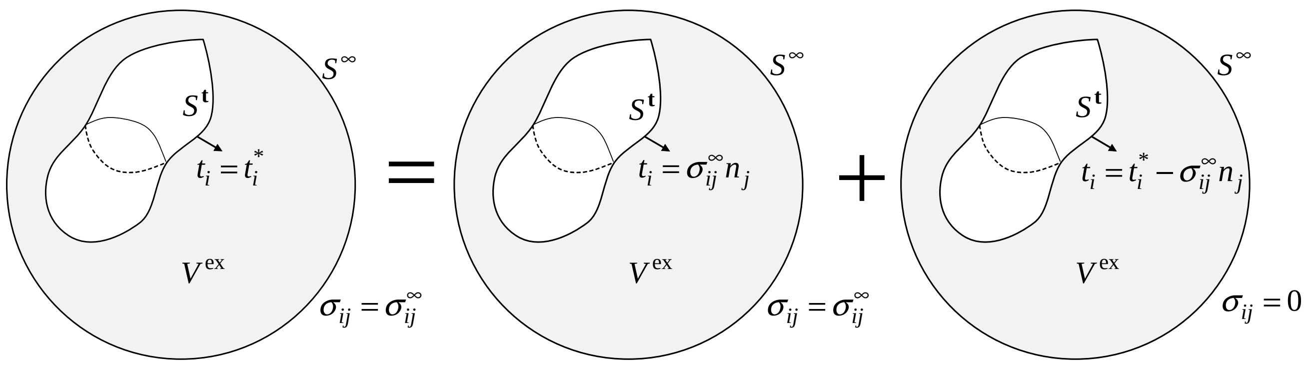


Рисунок 1.3 — Решение внешней задачи с ненулевыми напряжениями на удаленной границе при помощи суперпозиции решений задачи о равномерном сжатии всей области напряжениями σ_{ij}^∞ и задачи с нулевыми напряжениями на удаленной границе.

В задачах геологии и нефтедобычи на S^∞ вместо условий (1.8) могут задаваться ненулевые напряжения σ_{ij}^∞, называемые напряжениями залегания

$$\sigma_{ij}\Big|_{S^\infty} = \sigma_{ij}^\infty. \tag{1.9}$$

В случае ненулевых напряжений залегания решение задачи находится как суперпозиция решений двух подзадач, показанных на рисунке 1.3. Решение первой подзадачи тривиально: $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{\infty}$ во всех точках упругой среды. Во второй подзадаче напряжения на S^{∞} удовлетворяют условию регулярности (1.8). Решение второй подзадачи дает напряженно-деформированное состояние относительно уже сжатой напряжениями σ_{ij}^{∞} среды.

В случае наличия в задаче трещины (разреза с границей $S^{\pm} = S^{+} + S^{-}$) на берегах трещины обычно задаются напряжения, равные по модулю и противоположные по знаку.

$$t_i(\mathbf{x}^+) = -t_i(\mathbf{x}^-) = t_i^*(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}^+ \in S^+, \quad \mathbf{x}^- \in S^-, \quad \mathbf{x}^+ = \mathbf{x}^- = \mathbf{x}\,. \tag{1.10}$$

Требуется найти смещения u_i на каждом из берегов трещины, либо разрыв смещений Δu_i.

1.2. Обзор методов решения

Наиболее популярными численными методами решения задачи упругого равновесия являются МКЭ и МГЭ. Подробное описание МКЭ можно найти, например, в [23]. В этом разделе охарактеризуем основные идеи построения МКЭ и МГЭ.

1.2.1. Метод конечных элементов

В МКЭ вся расчетная область V аппроксимируется набором конечных элементов V^e. В каждом элементе вводится локальная система координат (ξ_1, ξ_2, ξ_3), выбираются опорные узлы $\mathbf{x}^{\alpha}$ и соответствующие базисные функции $\phi^{\alpha}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Функции $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$ во всех точках элемента представляются через ϕ^{α}:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \mathbf{x}^{\alpha}\, \phi^{\alpha}(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)) &= \mathbf{u}^{\alpha}\, \phi^{\alpha}(\xi_1, \xi_2, \xi_3). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Здесь подразумевается суммирование по немому индексу α.

Уравнение упругого равновесия (1.1) записывается в слабой форме

$$\int\limits_{V^e} \omega\,(\nabla\,\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f})\,dV = 0, \tag{1.12}$$

где ω — пробная функция, которая может быть выбрана различными способами. Одним из наиболее популярных способов является метод Бубнова-Галёркина [24], в котором в качестве весовой функции используются базисные функции элемента ϕ^α.

После ряда преобразований уравнение (1.12) сводится к соотношению, связывающему смещения $\mathbf{u}^\beta$ с узловыми силами $\mathbf{F}^\alpha$ с помощью матрицы жесткости $\mathbf{K}^{\alpha\beta}$

$$\mathbf{K}^{\alpha\beta}\,\mathbf{u}^\beta = \mathbf{F}^\alpha\,. \tag{1.13}$$

Затем уравнения (1.13) для каждого элемента собираются (от англ. *assemble*) в единую СЛАУ относительно всех узлов. Решая эту СЛАУ, найдем смещения во всех узлах. Далее по этим данным можно отыскать и другие характеристики, например, напряжения.

Для решения внешней задачи необходимо рассматривать внешнюю границу S^∞, удаленную на достаточное расстояние, и аппроксимировать область вплоть до этой границы, что ведет к существенному увеличению количества конечных элементов. Особую сложность применения МКЭ при решении задачи распространения трещины представляет необходимость перестраивания конечно-элементной сетки в окрестности фронта трещины на каждом шаге ее распространения, так как заранее неизвестна траектория ее распространения. В задачах с трещинами решение вблизи фронта трещины имеет сингулярность, что требует сгущения сетки к фронту трещины, что дополнительно увеличивает вычислительные затраты.

1.2.2. Расширенный метод конечных элементов

В последние годы был разработан и применен в 3D-задачах моделирования гидроразрыва обобщенный (или расширенный) метод МКЭ (Generalized or Extended FEM, GFEM/XFEM) [20, 25, 26], позволяющий решить ряд проблем МКЭ, представленных выше. Главной особонностью этих методов является несогласованность расчетной сетки и трещины, т.е. трещина проходит через конечный элемент. Конечные элементы с участками трещины обогащаются дополнительными интерполирующими функциями, учитывающими разрыв смещений на берегах трещины и спад разрыва смещений в окрестности фронта трещины, пропорциональный $\sqrt{l}$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{N} \phi_\alpha(\mathbf{x})\,\mathbf{u}_\alpha + \sum_{\beta=1}^{N} \phi_\beta(\mathbf{x})(H(f(\mathbf{x})) - H(f(\mathbf{x}_\beta)))\,\mathbf{u}_\beta + \\ + \sum_{\gamma=1}^{N}\sum_{m=1}^{4} \phi_\gamma(\mathbf{x})(\psi_m(\mathbf{x}) - \psi_m(\mathbf{x}_\gamma))\,\mathbf{u}_\gamma\,. \tag{1.14}$$

Здесь α, β, γ — степени свободы элемента. Если в элементе нет трещины, суммирование производится только по α, что совпадает с аппроксимацией в обычном МКЭ. Если элемент содержит трещину, происходит обогащение элемента дополнительными степенями свободы $\mathbf{u}_\beta$ или $\mathbf{u}_\gamma$. Суммирование по β происходит, если элемент содержит трещину, но не ее фронт, по γ — если элемент содержит фронт трещины. В сумме по β функция $f(\mathbf{x})$ зануляется на границе трещины, $H(f(\mathbf{x}))$ — функция Хевисайда, которая терпит разрыв на трещине, что позволяет аппроксимировать разрыв смещений на ней. В сумме по γ функции $\psi_m(\mathbf{x})$ вводятся для аппроксимации асимптотического поведения смещений в окрестности фронта трещины

$$\{\psi_m(\mathbf{x})\}_{m=1,\dots,4} = \sqrt{r}\{\cos(\theta/2), \sin(\theta/2), \sin(\theta/2)\sin(\theta), \cos(\theta/2)\sin(\theta)\}. \tag{1.15}$$

В расширенном МКЭ сетка трещины не связана с сеткой деформируемого тела, и трещина распространяется сквозь конечные элементы. При этом нет необходимости перестраивать конечноэлементную сетку на каждом шаге распространения. Расширенный МКЭ применяется не только в задачах с трещинами, но и при моделировании дислокаций, границ зерен неоднородного материала, когезионных трещин.

Однако расширенный МКЭ не решает проблему с аппроксимацией области до удаленной границы во внешних задачах.

1.2.3. Метод граничных элементов и его модификации

Альтернативным методом решения дифференциальной задачи (1.1)–(1.8) является МГЭ [27]. Его основная идея заключается в переходе от дифференциальной постановки (1.1)-(1.8) к системе граничных интегральных уравнений на границе области. В отличии от МКЭ, в МГЭ требуется дискретизация только границы S области, при этом сама область V не дискретизируется. Аналогично МКЭ, граница разбивается на элементы, в каждом элементе выбираются узлы и соответствующие интерполирующие функции. Затем строится матрица влияния друг на друга смещений и напряжений в узлах сетки. Для вычисления влияния используется известные аналитические решения геометрически простых задачи упругости, например задачи о равномерной нагрузке или разрыве смещений на элементе [28].

Среди известных решений самым универсальным и удобным является фундаментальное решение Кельвина [29] о действии сосредоточенной в точке $\mathbf{y}$ силы

$$f_i^*(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)e_i. \tag{1.16}$$

Здесь $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ — дельта-функция Дирака, e_i — единичный вектор в i-м направлении. Решение для компонент смещений u_i запишется в виде

$$u_i^*(\mathbf{x}) = U_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x})e_j, \tag{1.17}$$

где функция

$$U_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)}\left[(3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j}\right]\frac{1}{r} \tag{1.18}$$

называется фундаментальным решением задачи Кельвина о действии сосредоточенной силы. Здесь и далее индексы, отделенные запятой, означают дифференцирование по соответствующим координатам.

Тензор напряжений σ_{ij}^* запишется как

$$\sigma_{ij}^*(\mathbf{x}) = D_{ijk}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x})e_k, \tag{1.19}$$

где ядро D_{ijk} получается из ядра U_{ij} (1.18) с помощью дифференцирования и применения закона Гука (1.2)

$$D_{ijk}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)}\times$$
$$\times \left[(1-2\nu)\left[\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i} - \delta_{ij} r_{,k}\right] + 3r_{,i} r_{,j} r_{,k}\right] \frac{1}{r^2}, \tag{1.20}$$

Вектор напряжений t_i^*

$$t_i^*(\mathbf{x}) = T_{ik}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}) e_k, \tag{1.21}$$

выражается через ядро

$$T_{ik}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)}\times$$
$$\times \left[(1-2\nu)\left[\delta_{ik}(r_{,j} n_j) + r_{,i} n_k - r_{,k} n_i\right] + 3(r_{,j} n_j) r_{,i} r_{,k}\right] \frac{1}{r^2}, \tag{1.22}$$

полученное домножением ядра D_{ijk} (1.20) на нормаль n_j согласно определению вектора напряжений t_i (1.7).

С использованием фундаментального решения Кельвина строятся интегральные уравнения, используемые в МГЭ, основные разновидности которых будут рассмотрены далее.

1.2.4. Непрямой МГЭ (метод фиктивных нагрузок)

Непрямым МГЭ называется метод граничных элементов, в котором неизвестные смещения и напряжения вычисляются не напрямую из интегрального уравнения, а сперва формируются граничные интегральные уравнения относительно каких-либо дополнительных величин, а затем с использованием этих величин вычисляются искомые неизвестные на границе.

Пусть на всей границе области S задано распределение фиктивной нагрузки $\phi_i(\mathbf{x})$. Тогда смещения u_j в произвольной точке тела y^* получаются интегрированием решения Кельвина (1.17), (1.18)

$$u_j(\mathbf{y}^*) = \int\limits_S U_{ij}(\mathbf{y}^*, \mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}) dS, \quad \mathbf{x}^* \in V, \tag{1.23}$$

а напряжения t_i — интегрированием (1.21), (1.22)

$$t_j(\mathbf{y}^*) = \int\limits_S T_{ij}(\mathbf{y}^*, \mathbf{x})\phi_i(\mathbf{x})dS, \quad \mathbf{x}^* \in V. \tag{1.24}$$

Точка $\mathbf{y}^*$ называется точкой коллокации, $\mathbf{x}$ — точкой интегрирования. Заметим, что нагрузки ϕ_i не совпадают с реальными напряжениями t_i и поэтому называются фиктивными.

Устремляя точку $\mathbf{y}^* \in V$ к точке поверхности $\mathbf{y}' \in S$, получаем граничные интегральные уравнения смещений (ГИУС)

$$u_j(\mathbf{y}') = \int\limits_S U_{ij}(\mathbf{y}', \mathbf{x})\phi_i(\mathbf{x})dS, \quad \mathbf{y}' \in S \tag{1.25}$$

и напряжений (ГИУН)

$$t_j(\mathbf{y}') = c_{ij}(\mathbf{y}')\phi_i(\mathbf{y}') + \fint\limits_S T_{ij}(\mathbf{y}', \mathbf{x})\phi_i(\mathbf{x})dS, \quad \mathbf{y}' \in S \tag{1.26}$$

где $\fint$ — главное значение интеграла в смысле Коши. Функция $c_{ij}(\mathbf{y})$ в общем случае зависит от геометрии поверхности в точке коллокации $\mathbf{y}$. В случае гладкой поверхности она равна $\delta_{ij}/2$. Заметим, что для внешней задачи граничное интегральное уравнение смещений (ГИУС) (1.25) автоматически удовлетворяет условию (1.8) на бесконечности [30].

В непрямом МГЭ на границе $S^{\mathbf{u}}$ используется уравнение смещений (1.25), а на границе $S^{\mathbf{t}}$ — уравнение (1.26). Формируется СЛАУ и находятся неизвестные фиктивные нагрузки ϕ_i. Затем по известным распределениям ϕ_i с помощью тех же уравнений (1.25) и (1.26) находятся неизвестные смещения u_i и напряжения t_i. Подробно численный метод решения граничных интегральных уравнений будет описан позже на примере задачи с трещинами.

1.2.5. Прямой МГЭ

Прямой МГЭ позволяет находить смещения и напряжения прямо через заданные граничные условия. В этом методе строится ГИУС, включающее в себя и смещения u_i, и напряжения t_i.

$$c_{ij}(\mathbf{y})u_j(\mathbf{y}) = \int\limits_S U_{ij}(\mathbf{y},\mathbf{x})t_j(\mathbf{x})dS - \fint\limits_S T_{ij}(\mathbf{y},\mathbf{x})u_j(\mathbf{x})dS. \tag{1.27}$$

ГИУС (1.27) выводится из принципа взаимности работ и теоремы Бетти [31].

Автором и его коллегами прямой МГЭ применялся для решения задачи зарождения трещин гидроразрыва в окрестности перфорированной скважины [2, 4, 9, 14–17, 32–34].

1.2.6. Неприменимость прямого МГЭ для задач с трещинами

Запишем ГИУС (1.27) для бесконечного тела с трещиной $S^{\pm}$.

$$c_{ij}(\mathbf{x}^+)u_j(\mathbf{x}^+) + c_{ij}(\mathbf{x}^-)u_j(\mathbf{x}^-) = \int\limits_{S^{\pm}} U_{ij}(\mathbf{x}',\mathbf{x})t_j(\mathbf{x})dS - \fint\limits_{S^{\pm}} T_{ij}(\mathbf{x}',\mathbf{x})u_j(\mathbf{x})dS. \tag{1.28}$$

Ядра $U_{ij}(\mathbf{x}',\mathbf{x})$, $T_{ij}(\mathbf{x}',\mathbf{x})$ решения Кельвина обладают свойствами симметричности и антисимметричности

$$\begin{aligned} U_{ij}(\mathbf{x}',\mathbf{x}^+) &= U_{ij}(\mathbf{x}',\mathbf{x}^-), \\ T_{ij}(\mathbf{x}',\mathbf{x}^+) &= -T_{ij}(\mathbf{x}',\mathbf{x}^-). \end{aligned} \tag{1.29}$$

На противоположных берегах трещины введем разрыв смещений

$$\Delta u_i(\mathbf{x}) = u_i(\mathbf{x}^+) - u_i(\mathbf{x}^-). \tag{1.30}$$

Приняв условие гладкости трещины в точке $\mathbf{x}^{\pm}$, используя свойства(1.29) и (1.10), перепишем уравнение (1.28) в виде:

$$\frac{1}{2}\delta_{ij}(u_j(\mathbf{x}^+) + u_j(\mathbf{x}^-)) = -\int\limits_{S^+} T_{ij}(\mathbf{x}^+,\mathbf{x})\Delta u_j(\mathbf{x})dS, \tag{1.31}$$

Заметим, что ГИУС (1.31) для точек $\mathbf{x}^+$ и $\mathbf{x}^-$ совпадают, и этих уравнений недостаточно для формирования невырожденной системы линейных уравнений. Поэтому классический метод граничных элементов с ГИУС неприменим для задач с трещинами [35].

1.2.7. Метод разрывных смещений

Метод разрывных смещений (МРС) для двумерных задач с трещинами предложен в работе Крауча [36]. В этом методе трещина аппроксимируется отрезками с постоянным разрывом смещений $\Delta\,\mathbf{u}$ вдоль каждого отрезка. С использованием точного решения для такого отрезка, напряжения $\mathbf{t}$ в центре j-го элемента трещины выражаются через разрывы смещений $\Delta\,\mathbf{u}$ как суперпозиция решений от всех i-х элементов

$$\begin{aligned} t_\tau(j) &= \sum_{i=1}^{N} A_{\tau\tau}(j,i)\Delta u_\tau(i) + \sum_{i=1}^{N} A_{\tau n}(j,i)\Delta u_n(i), \\ t_n(j) &= \sum_{i=1}^{N} A_{n\tau}(j,i)\Delta u_\tau(i) + \sum_{i=1}^{N} A_{nn}(j,i)\Delta u_n(i), \end{aligned} \tag{1.32}$$

где нижними индексами τ и n обозначены касательные и нормальные компоненты векторов $\mathbf{t}$ и $\Delta\,\mathbf{u}$; функции $A_{\tau\tau}$, $A_{\tau n}$, $A_{n\tau}$, A_{nn} — точные решения для постоянного разрыва смещений на отрезке, полученные с помощью функций Папковича. Формировалась СЛАУ и из ее решения находились неизвестные $\Delta\,\mathbf{u}$.

В работе [37] в явном виде показано, что МРС в [36] эквивалентен МГЭ, в котором вместо ГИУС используется граничное интегральное уравнение напряжений (ГИУН), связывающее величину напряжений t_j в трещине со значениями разрыва смещений Δu_k на ней.

$$t_j(\mathbf{y}^-) = -\fint_{S^-} M_{kj}(\mathbf{y}^-,\mathbf{x})\Delta u_k(\mathbf{x})dS, \tag{1.33}$$

где $M_{kj}(\mathbf{x}^-,\mathbf{x}) = n_j(\mathbf{x}^-)S_{kij}(\mathbf{x}^-,\mathbf{x})$, а функции S_{kij} получаются из решения Кельвина T_{ij} дифференцированием по соответствующим координатам и применением Закона Гука. Вывод уравнения (1.33) можно найти, например, в [38]. Символом $\fint$ в (1.33) и далее обозначено главное значение гиперсингулярного интеграла в смысле Адамара.

1.2.8. Симметричный метод Галеркина для уменьшения степени сингулярности в методе разрывных смещений

Для решения проблемы вычисления главного значения Адамара в (1.33) одним из методов является симметричный метод Галеркина. В этом методе преобразованием ядер и интегрированием его частей уравнение (1.33) приводится к уравнению с меньшей степенью сингулярности. В результате получаются уравнения в слабой форме [39–41]

$$\int\limits_{S^+} t_k(\mathbf{x})\omega_k(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}) = -\int\limits_{S^+} D_t\omega_k(\mathbf{x})\int\limits_{S^+} C^{tk}_{mj}(\mathbf{y}-\mathbf{x})D_m\Delta u_j(\mathbf{y})dS(\mathbf{y})dS(\mathbf{x}), \tag{1.34}$$

где ω_k — пробная функция, D_t — поверхностный дифференциальный оператор

$$D_t = n_l\varepsilon_{lst}\frac{\partial}{\partial y_s}, \tag{1.35}$$

ε_{lst} — символ Леви-Чивиты, а C^{tk}_{mj} — слабосингулярное ядро, определяемое по формуле

$$C^{tk}_{mj} = \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)}\left[(1-\nu)\delta_{tk}\delta_{mj} + 2\nu\delta_{mk}\delta_{jt} - \delta_{jk}\delta_{mt} - r_{,j}r_{,k}\delta_{mt}\right]\frac{1}{r}. \tag{1.36}$$

Этот метод называется симметричным методом Галеркина или методом граничных уравнений в слабой форме. Поскольку ядра в (1.34) являются слабо сингулярными, то все поверхностные интегралы являются интегрируемыми.

1.3. МГЭ с модификцией области трещины

Как отмечалось в разделе 1.2.6 классический МГЭ в его исходном виде не может применяться для решения задач с трещиной, так как два берега трещины находятся бесконечно близко друг от друга, что приводит к вырождению уравнений.

Тем не менее, использование классического МГЭ для решения задач с трещинами возможно. В диссертации предложен подход, который позволяет использовать классический МГЭ для решения задач с трещинами путем модификации расчетной области. В этом подходе исходная трещина (математический разрез с совпадающими берегами) заменяется искусственным пропилом

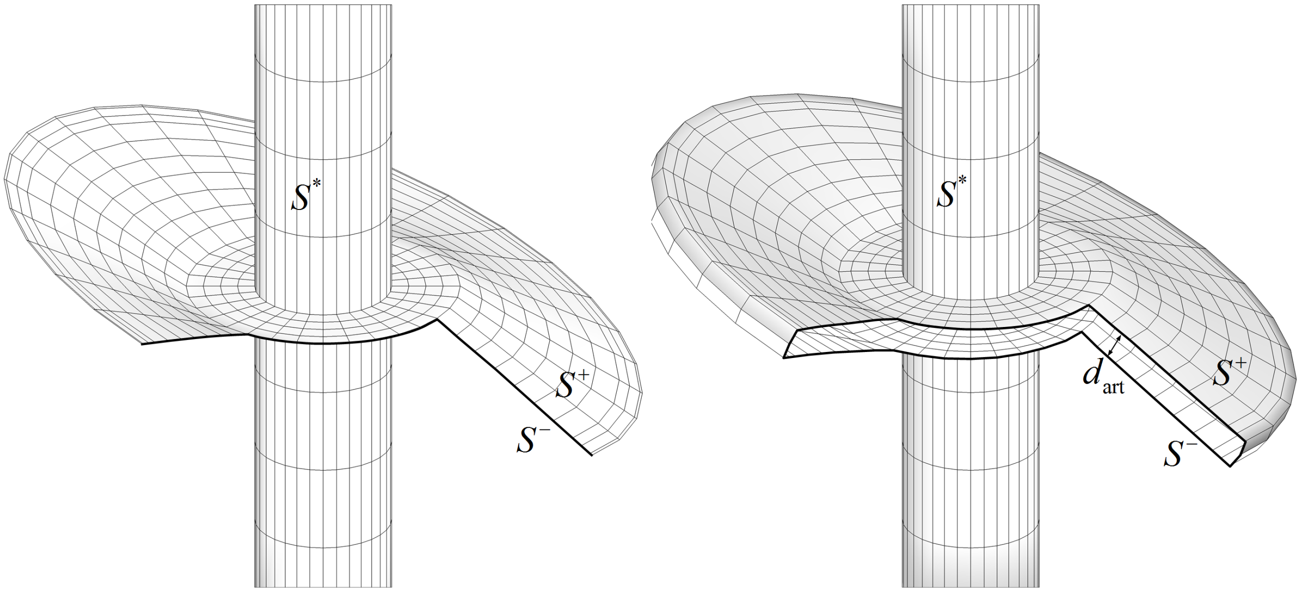


Рисунок 1.4 — Приближение реальной трещины (*слева*) виртуальным пропилом конечной ширины (*справа*).

конечной ширины d_{art}, как показано на рисунке 1.4. С одной стороны, величина искусственного параметра d_{art} должна выбираться достаточно малой, чтобы минимизировать погрешность, вносимую модификацией области. С другой, точки коллокации на противостоящих берегах трещины должны располагаться достаточно далеко друг от друга, чтобы сохранить хорошую обусловленность системы линейных уравнений и минимизировать численные ошибки при вычислении интегралов в ГИУС. Предполагается, что существует оптимальное значение величины пропила d_{art}, дающее минимум погрешности вычисления НДС. Эта гипотеза проверена численно на задаче об одноосном растяжении плоской круглой трещины и найдены оптимальные значения d_{art}. Подробно результаты этого исследования будут изложены далее в разделе 1.6.2.

Классический МГЭ с модификацией области (МГЭ/МО) имеет некоторое преимущество по сравнению с дуальным МГЭ и методом разрывных смещений с точки зрения вычислительной сложности. Для примера рассмотрим задачу, в которой содержится полость, аппроксимируемая расчетной сеткой из N_c элементов, и трещина, состоящая из N_f элементов. Для дискретизации гиперсингулярного ГИУН должны использоваться разрывные элементы, что ведет к увеличению количества степеней свободы по сравнению с непрерывными сетками. Для аппроксимации сингулярного ГИУС могут использоваться непрерывные элементы. Оценим число степеней свободы в СЛАУ, генерируемой каждым из методов, для случая использования простейших линейных четырехугольных элементов. При применении дуального МГЭ получившаяся СЛАУ будет содержать $3(4N_f + N_c)$ степеней свободы, а классический МГЭ с модификацией области даст систему примерно с $3(2N_f + N_c)$ степенями свободы. На основании приведенной оценки можно сделать вывод, что МГЭ/МО является более выгодным для описания трещин с точки зрения экономии вычислительных ресурсов, особенно если количество элементов трещины N_f значительно. Численное сравнение эффективности методов с вычислительной точки зрения будет приведено в разделе 1.6.4 на задаче о растяжении плоской круглой трещины.

1.4. Дуальный МГЭ

Для точек $\mathbf{y}$ на регулярной границе S^* запишем ГИУС, аналогичное ГИУС (1.27) в классическом МГЭ:

$$\begin{gathered} c_{ij}(\mathbf{y})u_i(\mathbf{y}) = \int\limits_{S^*} U_{ij}(\mathbf{y},\mathbf{x})t_i(\mathbf{x})dS - \\ -\fint\limits_{S^*} T_{ij}(\mathbf{y},\mathbf{x})u_i(\mathbf{x})dS - \int\limits_{S^-} T_{ij}(\mathbf{y},\mathbf{x})\Delta u_i(\mathbf{x})dS, \quad \mathbf{y} \in S^*. \end{gathered} \tag{1.37}$$

Для решения проблемы с вырождающимся ГИУС (1.31) на совпадающих берегах трещины (см. раздел 1.2.6) в дуальном МГЭ предлагается на одном из берегов трещины вместо ГИУС (1.31) решать ГИУН

$$\begin{gathered} t_j(\mathbf{y}^-) = \int\limits_{S^*} L_{ij}(\mathbf{y}^-,\mathbf{x})t_i(\mathbf{x})dS - \int\limits_{S^*} M_{ij}(\mathbf{y}^-,\mathbf{x})u_i(\mathbf{x})dS - \\ -\fint\limits_{S^-} M_{ij}(\mathbf{y}^-,\mathbf{x})\Delta u_i(\mathbf{x})dS, \quad \mathbf{y} \in S^-. \end{gathered} \tag{1.38}$$

Здесь функции L_{ij} и M_{ij} получены из функций D_{kij} и S_{kij} домножением на нормаль n_k [38, 42].

$$\begin{aligned} L_{ij}(\mathbf{y}^-,\mathbf{x}) &= D_{kij}(\mathbf{y}^-,\mathbf{x})n_k(\mathbf{y}^-), \\ M_{ij}(\mathbf{y}^-,\mathbf{x}) &= S_{kij}(\mathbf{y}^-,\mathbf{x})n_k(\mathbf{y}^-). \end{aligned} \tag{1.39}$$

Уравнение (1.38) не содержит компонент смещений u_i на трещиноватой границе и позволяет найти неизвестные компоненты разрывов смещений Δu_i на границе. Обычно в дуальном МГЭ решается ГИУС на одном берегу трещины, и ГИУН — на другом. Это позволяет найти смещения каждого берега трещины. В диссертации предложено не использовать ГИУС, что позволяет уменьшить размер результирующей матрицы, но не дает смещений u_i^+ и u_i^- на каждом из берегов трещины, а лишь разрыв смещений Δu_i. Так как в задачах распространения трещины гидроразрыва достаточно знать только разрыв смещений, такой подход может быть применен, и позволяет значительно ускорить расчеты.

В предложенной модификации дуального МГЭ используются два граничных интегральных уравнения: ГИУС (1.37) на границе полости S^* и ГИУН (1.38) на трещиноватой границе S^-. Они образуют замкнутую систему интегральных уравнений относительно u_i на S^* и Δu_i на S^-. Аппроксимация S^+ не требуется.

1.4.1. Дискретизация границы и формирование системы линейных уравнений

Продемонстрируем численную реализацию дуального МГЭ на задаче с полостью и трещиной $S = S^* + S^{\pm}$. Вся граница области S аппроксимируется граничными элементами, как показано на рисунке 1.5, *слева*

$$S \simeq \sum_{e=1}^{N_e} S^e. \tag{1.40}$$

Тогда интегралы в ГИУС (1.37) заменяются на суммы интегралов по элементам S^e. Каждый элемент S^e параметризуется локальными координатами (ξ_1, ξ_2), как показано на рисунке 1.5, *справа*. Компоненты радиус-векторов x_i, напряжений t_i, смещений u_i, разрывов смещений Δu_i, в произвольной точке элемента (ξ_1, ξ_2) представляются в виде

$$f_i(\xi_1, \xi_2) = \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} f_i^\alpha \phi_\alpha(\xi_1, \xi_2). \tag{1.41}$$

Здесь f_i^α — значения рассматриваемой функции f_i в узле $\mathbf{x}^\alpha$, $\phi_\alpha(\xi_1, \xi_2)$ — интерполирующие функции элемента, или форм-функции, N_α — количество узлов и

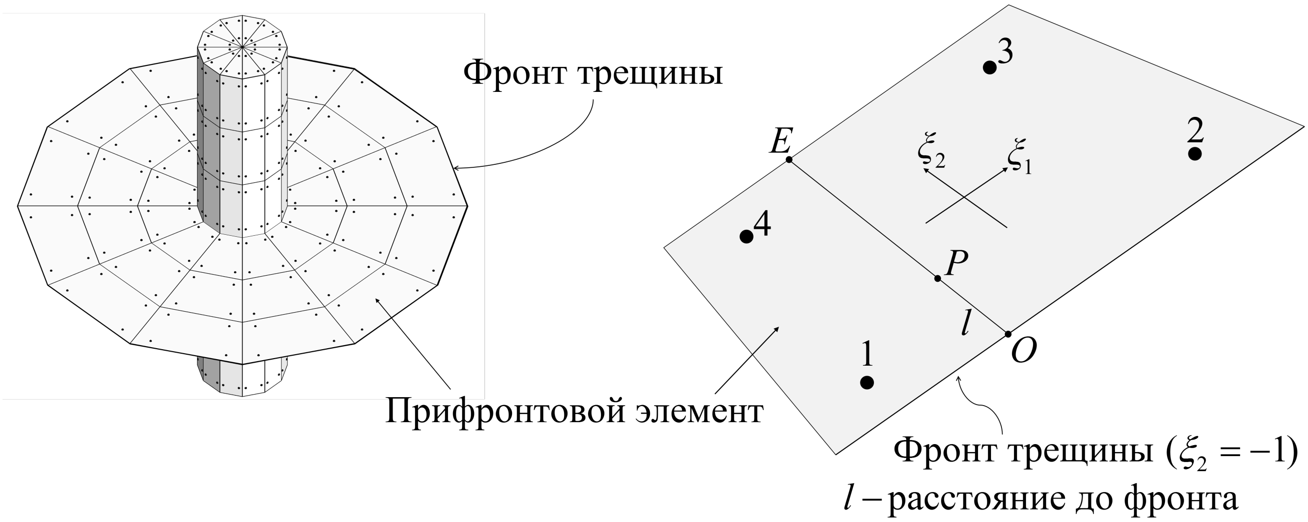


Рисунок 1.5 — Разбиение границы S на разрывные 4-точечные граничные элементы S^e (*слева*) и параметризация (ξ_1, ξ_2) специального прифронтового элемента (*справа*).

интерполирующих функций в элементе.

Уравнения (1.37) и (1.38) с учётом (1.41) запишутся в виде

$$\begin{aligned} c_{ij}(\mathbf{y})u_i(\mathbf{y}) = \sum_{S^e \in S^*} \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha(e)} \left(U_{ij}^{e\alpha}(\mathbf{y}) t_j^{e\alpha} - T_{ij}^{e\alpha}(\mathbf{y}) u_j^{e\alpha} \right) - \\ - \sum_{S^e \in S^-} \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha(e)} T_{ij}^{e\alpha}(\mathbf{y}) \Delta u_j^{e\alpha}, \end{aligned} \tag{1.42}$$

$$\begin{aligned} t_i(\mathbf{y}) = \sum_{S^e \in S^*} \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha(e)} \left(L_{ij}^{e\alpha}(\mathbf{y}) t_j^{e\alpha} - M_{ij}^{e\alpha}(\mathbf{y}) u_j^{e\alpha} \right) - \\ - \sum_{S^e \in S^-} \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha(e)} M_{ij}^{e\alpha}(\mathbf{y}) \Delta u_j^{e\alpha}, \end{aligned} \tag{1.43}$$

где интегралы $U_{ij}^{e\alpha}(\mathbf{y})$, $T_{ij}^{e\alpha}(\mathbf{y})$, $L_{ij}^{e\alpha}(\mathbf{y})$, $M_{ij}^{e\alpha}(\mathbf{y})$

$$U_{ij}^{e\alpha}(\mathbf{y}) = \iint\limits_{S^e} U_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2)) \phi_\alpha(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \tag{1.44}$$

есть коэффициенты, определяемые исключительно точкой коллокации $\mathbf{y}$ и аппроксимацией и геометрией граничных элементов и не зависящие от граничных условий. Здесь $J(\xi_1, \xi_2)$ – якобиан перехода в локальную систему координат элемента. В (1.42) и (1.43) величины $t_j^{e\alpha}$, $u_j^{e\alpha}$ и $\Delta u_j^{e\alpha}$ в узле α элемента e не зависят от переменных интегрирования, поэтому их можно вынести за знак интегрирования.

Заменим в (1.42) и (1.43) двойное суммирование на суммирование по всем узлам сетки n

$$c_{ij}(\mathbf{y})u_i(\mathbf{y}) = \sum_{n\in S^*}\left(U^n_{ij}(\mathbf{y})t^n_j - T^n_{ij}(\mathbf{y})u^n_j\right) - \sum_{n\in S^-} T^n_{ij}(\mathbf{y})\Delta u^n_j, \tag{1.45}$$

$$t_i(\mathbf{y}) = \sum_{n\in S^*}\left(L^n_{ij}(\mathbf{y})t^n_j - M^n_{ij}(\mathbf{y})u^n_j\right) - \sum_{n\in S^-} M^n_{ij}(\mathbf{y})\Delta u^n_j, \tag{1.46}$$

где U^n_{ij}, T^n_{ij}, L^n_{ij}, M^n_{ij} есть интегралы (1.44), соответствующие узлу n.

Рассматривая уравнение (1.45) в каждом узле регулярной границы $\mathbf{y} = \mathbf{y}^p$, а уравнение (1.46) — в каждом узле трещины $\mathbf{y} = \mathbf{y}^f$, получим СЛАУ

$$\left\{\begin{array}{llll}
c^1_{ij}u^1_i & = \sum\limits_{n\in S^*} U^{n1}_{ij}t^n_j & - \sum\limits_{n\in S^*} T^{n1}_{ij}u^n_j & - \sum\limits_{n\in S^-} T^{n1}_{ij}\Delta u^n_j, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
c^p_{ij}u^p_i & = \sum\limits_{n\in S^*} U^{np}_{ij}t^n_j & - \sum\limits_{n\in S^*} T^{np}_{ij}u^n_j & - \sum\limits_{n\in S^-} T^{np}_{ij}\Delta u^n_j, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
t^f_i & = \sum\limits_{n\in S^*} L^{nf}_{ij}t^n_j & - \sum\limits_{n\in S^*} M^{nf}_{ij}u^n_j & - \sum\limits_{n\in S^*} M^{nf}_{ij}\Delta u^n_j, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}\right. \tag{1.47}$$

Здесь введены обозначения $c^p_{ij} = c_{ij}(\mathbf{x}^p)$, $U^{np}_{ij} = U^n_{ij}(\mathbf{y}^p)$, $T^{np}_{ij} = T^n_{ij}(\mathbf{y}^p)$, $L^{nf}_{ij} = L^n_{ij}(\mathbf{y}^f)$, $M^{nf}_{ij} = M^n_{ij}(\mathbf{y}^f)$.

Перепишем СЛАУ (1.47) в матричном виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{pp} - \mathbf{C}_{pp} & \mathbf{T}_{pf} \\ \mathbf{M}_{fp} & \mathbf{M}_{ff} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_p \\ \Delta\,\mathbf{u}_f \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{pp} & 0 \\ \mathbf{L}_{fp} & -\mathrm{I} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}_p \\ \mathbf{t}_f \end{pmatrix}, \tag{1.48}$$

где $\mathbf{u}_p$ и $\mathbf{t}_p$ — вектор-столбцы компонент смещений и напряжений на полости, $\Delta\,\mathbf{u}_f$ и $\mathbf{t}_f$ — вектор-столбцы компонент разрывов смещений и напряжений на трещине, $\mathbf{U}$ и $\mathbf{T}$ — подматрицы, составленные из значений интегралов по элементам в ГИУС (1.37), $\mathbf{L}$ и $\mathbf{M}$ — подматрицы из ГИУН (1.38), $\mathbf{C}_{pp}$ — диагональная матрица, соответствующая коэффициентам c^p_{ij}.

При вычислении коэффициентов СЛАУ (1.48) особую трудность представляет вычисление главного значения гиперсингулярного интеграла в смысле Адамара $⨏$, которое по определению есть конечная часть от разложения интеграла в ряд Лорана в окрестности особой точки. Ядро M_{ij} в (1.38) имеет не интегрируемую в смысле Коши особенность, пропорциональную $1/r^3$, где r — длина радиус-вектора между точкой коллокации и точкой интегрирования. Для его вычисления разработан численный метод на основе метода выделения сингулярности [43], разложения подынтегрального выражения в ряд Лорана в окрестности особой точки и сведения интегралов к повторным в локальной полярной системе координат граничного элемента. Подробное описание метода приведено в Приложении А.

Сложностями использования ДМГЭ по сравнению с классическим МГЭ являются высокая степень сингулярности ГИУН и увеличение вычислительных затрат из-за необходимости использовать разрывные граничные элементы, что приводит к увеличению степеней свободы и, как результат, к увеличению размерности матрицы в СЛАУ.

Рассмотрим подробнее, каким образом дискретизируется поверхность в МГЭ и какие граничные элементы используются для ее аппроксимации.

1.4.2. Граничные элементы

Наиболее используемыми граничными элементами в МКЭ и МГЭ являются изопараметрические полиномиальные элементы. Термин «изопараметрический» означает, что все функции на элементе заданы единообразно, с помощью одних и тех же форм-функций. «Полиномиальный» означает, что функции являются полиномами от локальных координат (ξ_1, ξ_2).

Например, форм-функции треугольных элементов в общем случае можно представить в виде

$$\phi_\alpha(\xi_1, \xi_2) = F_1^\alpha(\xi_1) \cdot F_2^\alpha(\xi_2) \cdot F_3^\alpha(\xi_3), \qquad (1.49)$$

а четырехугольных элементов — в виде

$$\phi_\alpha(\xi_1, \xi_2) = F_1^\alpha(\xi_1) \cdot F_2^\alpha(\xi_2). \qquad (1.50)$$

где $\xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2$, функции $F_1^\alpha(\xi_1)$, $F_2^\alpha(\xi_2)$, $F_3^\alpha(\xi_3)$ – полиномы по переменным ξ_1, ξ_2, ξ_3 соответственно.

Еще один признак, по которому можно классифицировать элементы, это непрерывность решения при переходе от одного элемента у другому. В непрерывных элементах узлы лежат на границе элемента, и один и тот же узел принадлежит одновременно нескольким соседним элементам, что обеспечивает непрерывность решения вдоль всей границы. В разрывных элементах все узлы лежат внутри элемента, и на границе между элементами не ставится условия непрерывности решения. Непрерывные элементы обычно используются в классическом МГЭ и являются более экономичными с вычислительной точки зрения по сравнению с разрывными элементами, так как обеспечивают меньшее число степеней свободы для одного и того же числа граничных элементов. Несмотря на экономичность непрерывных элементов, не всегда возможно их использование. Например, в МРС и ДМГЭ при выводе ГИУН (1.38) используется свойство гладкости функции в точках коллокации, которая не может быть обеспечена при использовании непрерывных элементов, так как в узлах сетки поверхность обычно терпит излом. Поэтому для решения ГИУН (1.38) необходимо использовать такие элементы, в узлах которых все функции ведут себя гладко. Для решения этой проблемы можно использовать разрывные элементы, все узлы $\mathbf{x}^k$ которых смещены внутрь элемента, как показано на рисунке 1.6. Величину сдвига узлов характеризует параметр λ такой, что $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. В предельном случае $\lambda = 1$ узлы лежат на границе элемента и эти элементы являются непрерывными.

В этом случае интерполирующие форм-функции треугольного линейного ($N = 1$) элемента запишутся в виде

$$\phi_i(\xi_1, \xi_2) = \frac{\xi_i - \delta}{\lambda - \delta}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{1.51}$$

а треугольного квадратичного ($N = 2$) — в виде

$$\begin{aligned} \phi_{2i-1}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{(\xi_i - \delta)[(\xi_i - \delta) + (\xi_i - \lambda)]}{(\lambda - \delta)^2}, \\ \phi_{2i}(\xi_1, \xi_2) &= 4\frac{(\xi_i - \delta)(\xi_{i+1} - \delta)}{(\lambda - \delta)^2}, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \tag{1.52}$$

где $\delta = \frac{1-\lambda}{2}$, а выражение $i+1$ в индексах означает циклический сдвиг индекса на единицу.

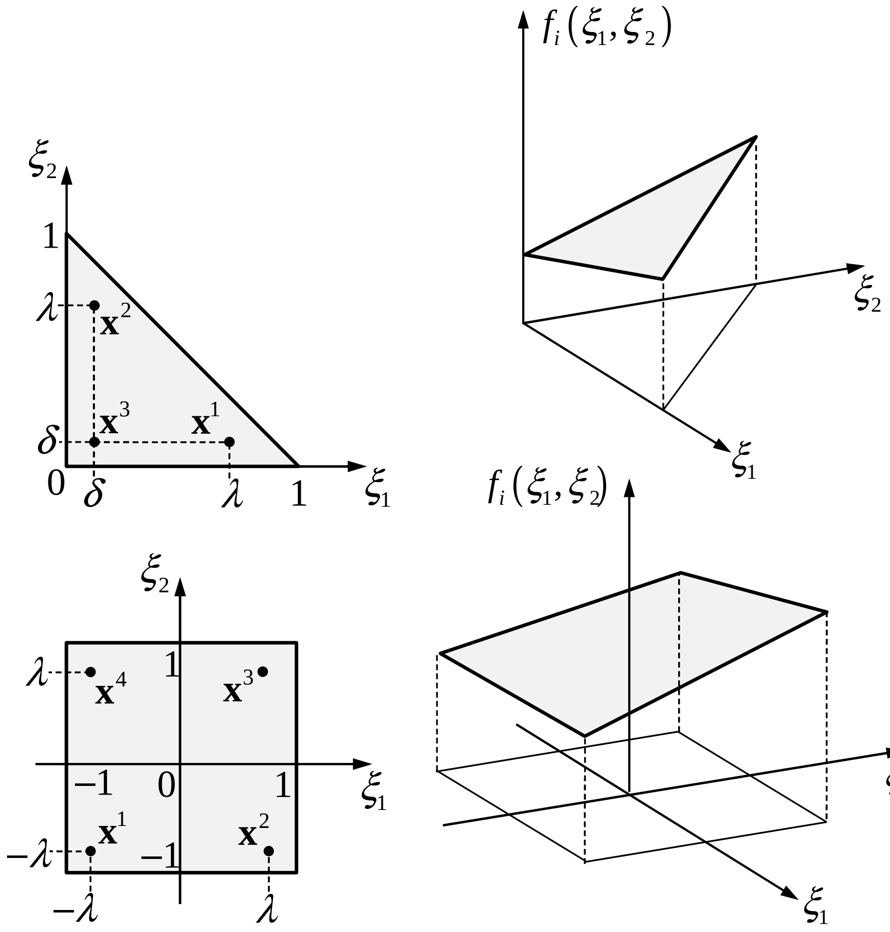


Рисунок 1.6 — Шаблон элемента (*слева*) и аппроксимация функций u_i и t_i на нем (*справа*).

Форм-функции четырехугольного линейного элемента выглядят как

$$\phi_\alpha(\xi_1, \xi_2) = \left(\frac{b_1^\alpha - \xi_1}{b_1^\alpha - a_1^\alpha} \right) \cdot \left(\frac{b_2^\alpha - \xi_2}{b_2^\alpha - a_2^\alpha} \right), \tag{1.53}$$

а четырехугольного квадратичного

$$\phi_\alpha(\xi_1, \xi_2) = \left(\frac{b_1^\alpha - \xi_1}{b_1^\alpha - a_1^\alpha} \cdot \frac{c_1^\alpha - \xi_1}{c_1^\alpha - a_1^\alpha} \right) \cdot \left(\frac{b_2^\alpha - \xi_2}{b_2^\alpha - a_2^\alpha} \cdot \frac{c_2^\alpha - \xi_2}{c_2^\alpha - a_2^\alpha} \right), \tag{1.54}$$

где (a_1^α, a_2^α) — локальные координаты узла с номером α; b_i^α, c_i^α — локальные координаты остальных узлов элемента, такие что $a_i^\alpha \neq b_i^\alpha \neq c_i^\alpha$. Локальные координаты узлов принимают значения $\pm\lambda$ и 0 в зависимости от номера узла α.

Выбор граничных элементов является важной составляющей МГЭ, в особенности в областях, где решение ведет себя сложным образом. Например, на фронте трещины напряжения имеют сингулярность и их поведение характеризуется коэффициентами, рассмотренными в следующем разделе.

1.5. Коэффициенты интенсивности напряжений и методы их вычисления

Для механики разрушения большой интерес представляет изучение асимптотического распределения напряжений, деформаций и смещений в окрестности фронта трещины. НДС материала в малой окрестности произвольно фиксированной точки η на фронте трещины, изображенной на рисунке 1.7, расположенной в однородном изотропном упругом теле, могут быть охарактеризованы тремя коэффициентами интенсивности напряжений (КИНами) K_{I}, K_{II}, K_{III} [44, 45]. КИНы — составляющая НДС, особенно важная при моделировании распространения трещины. Они являются основными параметрами, определяющими направление и скорость роста трещины.

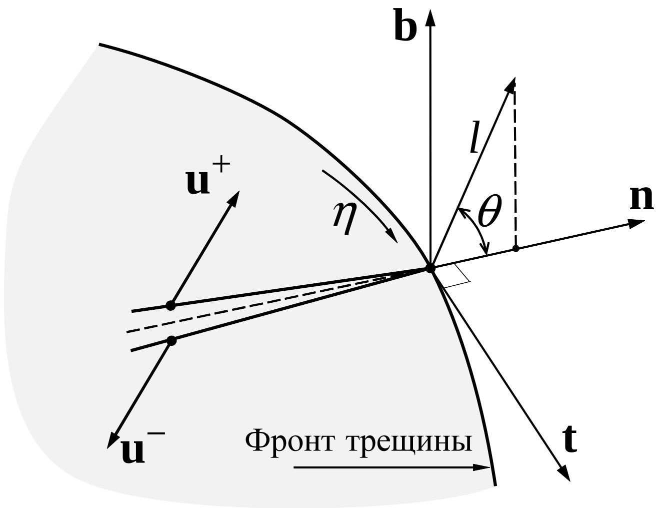


Рисунок 1.7 — Локальная система координат в окрестности фронта плоской трещины.

Компоненты вектора смещений u_n, u_b, u_t в локальной системе координат (n, b, t) в окрестности фронта локально плоской трещины, изображенной на рисунке 1.7, выражаются через КИНы следующим образом:

$$u_n(\theta, l) = \frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{2l}{\pi}}\left[K_{\mathrm{I}}\cos\frac{\theta}{2}\left((1-2\nu)+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+K_{\mathrm{II}}\sin\frac{\theta}{2}\left(2(1-\nu)+\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\right]+O(l^{3/2}),$$

$$u_b(\theta,l) = \frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{2l}{\pi}}\left[K_{\mathrm{I}}\sin\frac{\theta}{2}\left(2(1-\nu)-\cos^2\frac{\theta}{2}\right)-\right.$$
$$\left.-K_{\mathrm{II}}\cos\frac{\theta}{2}\left((1-2\nu)-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\right]+O(l^{3/2}), \tag{1.55}$$
$$u_t(\theta,l) = \frac{2}{\mu}\sqrt{\frac{2l}{\pi}}K_{\mathrm{III}}\sin\frac{\theta}{2}+O(l^{3/2}),$$

а компоненты тензора напряжений выражаются как [46, 47]

$$\begin{aligned}
\sigma_n(\theta,l) =& \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi l}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)- \\
&-\frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi l}}\sin\frac{\theta}{2}\left(2+\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right)+O(l^{1/2}), \\
\sigma_{nb}(\theta,l) =& \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi l}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}- \\
&-\frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi l}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)+O(l^{1/2}), \\
\sigma_b(\theta,l) =& \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi l}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)- \\
&-\frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi l}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}+O(l^{1/2}), \\
\sigma_{nt}(\theta,l) =& -\frac{K_{\mathrm{III}}}{\sqrt{2\pi l}}\sin\frac{\theta}{2}+O(l^{1/2}), \\
\sigma_{bt}(\theta,l) =& \frac{K_{\mathrm{III}}}{\sqrt{2\pi l}}\cos\frac{\theta}{2}+O(l^{1/2}), \\
\sigma_t(\theta,l) =& 2\nu\left(\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi l}}\cos\frac{\theta}{2}-\frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi l}}\sin\frac{\theta}{2}\right)+O(l^{1/2}).
\end{aligned} \tag{1.56}$$

Здесь l, θ — полярные координаты рассматриваемой точки в плоскости nb.

В простых случаях, таких как плоская круглая трещина, КИНы могут быть вычислены аналитически, но в общем случае их значения необходимо вычислять по НДС в окрестности фронта трещины, рассчитанному каким-либо численным методом. В следующем разделе будет приведен обзор таких методов.

1.5.1. Обзор способов вычисления КИНов

Способы вычисления КИНов можно разделить на три группы: метод экстраполяции напряжений в окрестности фронта трещины, метод экстраполяции разрыва смещений на трещине в окрестности ее фронта и методы типа J-

интеграла.

Первая группа способов вычисления КИНов основывается на асимптотическом разложении (1.56) компонент тензора напряжений σ_{ij} в окрестности фронта плоской трещины. В таких подходах для верного вычисления КИНов требуется получить достаточно точное значение напряжений во всей окрестности фронта трещины, а не только на трещине. Особую трудность представляет то, что напряжения на фронте трещины имеют особенность порядка $1/\sqrt{l}$ (см. формулу (1.56)). Поэтому необходимо строить достаточно подробную сетку вокруг фронта трещины и рассматривать напряжения на некотором расстоянии от фронта. Этот способ чаще применяется в МКЭ, так как в нем значения внутри области известны сразу после решения задачи упругости. В МГЭ при решении задачи упругости известны только значения величин на границе, а для вычисления значений внутри области требуется дополнительные вычисления. Поэтому в МГЭ интерполяция значений КИНов из точек на трещине удобнее и предпочтительнее.

Интегральные способы основываются на различных либо контурных, либо объемных интегралах, вычисляемых в некоторой окрестности фронта трещины. Как правило, эти интегралы выражаются некоторым образом через значения КИНов. Наиболее известным является способ, основанный на вычислении J-интеграла [48]. Такой способ требует применения специальной методики для вычисления сразу всех значений КИНов, которая в трехмерном случае излишне громоздка [49].

В диссертационной работе используется модификация метода экстраполяции разрыва смещений на трещине.

1.5.2. Метод экстраполяции разрыва смещений для вычисления КИНов

Этот метод вычисления КИНов основывается на представлении компонент смещений в окрестности фронта локально плоской трещины (1.55). Используя это выражение, выпишем значения разрывов смещений на берегах трещины в локальной системе координат (n, b, t):

$$\begin{aligned}
\Delta u_b = u_b\Big|_{\theta=\pi} - u_b\Big|_{\theta=-\pi} &= \frac{8(1-\nu^2)}{E} K_{\mathrm{I}} \sqrt{\frac{l}{2\pi}} + O(l^{3/2}), \\
\Delta u_n = u_n\Big|_{\theta=\pi} - u_n\Big|_{\theta=-\pi} &= \frac{8(1-\nu^2)}{E} K_{\mathrm{II}} \sqrt{\frac{l}{2\pi}} + O(l^{3/2}), \\
\Delta u_t = u_t\Big|_{\theta=\pi} - u_t\Big|_{\theta=-\pi} &= \frac{8(1+\nu)}{E} K_{\mathrm{III}} \sqrt{\frac{l}{2\pi}} + O(l^{3/2}).
\end{aligned} \tag{1.57}$$

Выразим КИНы из (1.57)

$$\begin{aligned}
K_{\mathrm{I}} &= \frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{l}} \Delta u_b + O(l), \\
K_{\mathrm{II}} &= \frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{l}} \Delta u_n + O(l), \\
K_{\mathrm{III}} &= \frac{E}{8(1+\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{l}} \Delta u_t + O(l).
\end{aligned} \tag{1.58}$$

Видно, что применение формулы (1.58) даже для точных значений $\Delta\,\mathbf{u}$ в окрестности фронта трещины дает значения КИНов с погрешностью $O(l)$. Поэтому предлагается рассматривать несколько точек на трещине вдали от фронта и интерполировать значения на фронт. В настоящей работе использовалась линейная интерполяция по двум точкам A и B на трещине в точку O на фронте трещины

$$K^{\mathrm{ex}} = K^A - \frac{l_A(K^B - K^A)}{l_B - l_A}, \tag{1.59}$$

где K^A и K^B — значение каждого из трех КИНов, рассчитанное по формуле (1.58) в точках A и B трещины, как показано на рисунке 1.8, *слева*.

Для демонстрации работы формулы экстраполяции рассмотрим задачу о плоской круглой трещине, решение которой приведено далее в разделе 1.6.1. Зная разрыв смещений на трещине, вычислим КИН K_{I} по формуле (1.58). В результате получим распределение K_{I} вдоль радиальной координаты r, показанное на рисунке 1.8, *справа*. Из рисунка видно, что формула имеет погрешность порядка $O(l)$, и точность вычисления КИНа падает при отдалении от фронта трещины, даже если мы знаем точное решение для разрыва смещений $\Delta\,\mathbf{u}$. Применив формулу линейной экстраполяции (1.59), мы значительно увеличим точность вычисления КИНов.

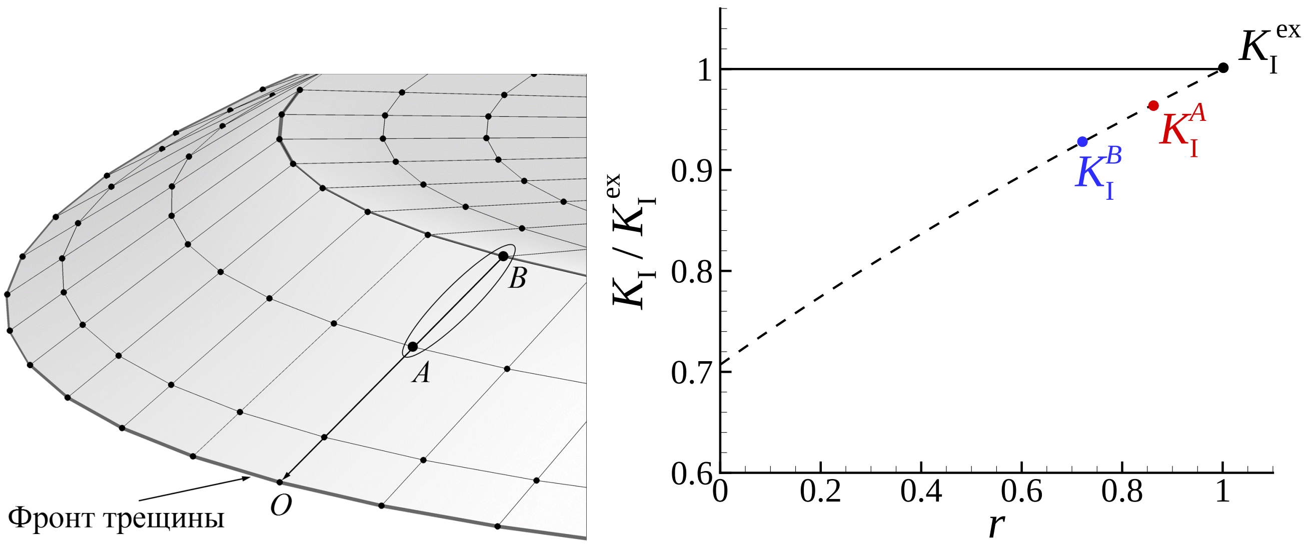


Рисунок 1.8 — Расположение вспомогательных точек на трещине для двухточечной интерполяционной формулы расчета КИНов (*слева*) и распределение КИНа K_I вдоль радиуса плоской круглой трещины, вычисленного по формуле (1.58) (*справа*).

Метод экстраполяции разрыва смещений Δu_i требует максимально точного воспроизведения поведения компонент смещений u_i в окрестности фронта трещины. Это может быть достигнуто либо сгущением сетки вблизи фронта, либо применения специального граничного элемента на фронте трещины, способного хорошо аппроксимировать асимптотику (1.57).

1.5.3. Аппроксимация разрыва смещений в окрестности фронта трещины билинейными элементами

Для лучшего понимания проблемы аппроксимации разрыва смещений обычными полиномиальными элементами, рассмотрим билинейный элемент и найдем порядок аппроксимации разрыва смещений в окрестности фронта трещины с помощью такого элемента.

Согласно [50] разрыв смещений $\Delta\,\mathbf{u}$ в окрестности фронта трещины представляется в виде разложения по параметру l (расстоянию до фронта трещины)

$$\Delta\,\mathbf{u}(l) = \mathbf{a}_{1/2}\sqrt{l} + \mathbf{a}_{3/2}\,l^{3/2} + \mathbf{O}(l^{5/2}), \tag{1.60}$$

в котором главный член пропорционален $\sqrt{l}$. Функция $\sqrt{l}$ не имеет производной в нуле, а значит не может быть разложена в ряд Тейлора и хорошо аппроксимироваться полиномиальными элементами любого порядка точности. В разделе 1.6 на задаче о растяжении плоской круглой трещины будет показано, что максимум погрешности вычисления $\Delta\,\mathbf{u}$ достигается на фронте трещины, и что для полиномиальных элементов порядок равномерной сходимости равен $1/2$.

Покажем это аналитически на примере простейших билинейных четырехугольных элементов. Фронт трещины в координатной системе прифронтового элемента (см. рисунок 1.5, *справа*) имеет координаты $\xi_1 \in [-1;1]$, $\xi_2 = -1$. Предположим, что элемент прямоугольный, тогда кратчайшее расстояние от произвольной точки P до точки фронта O сонаправлено с осью ξ_2 и равно l. Расстояние от точки фронта O до противоположного ребра прифронтового элемента (точки E) равно L (см. рисунок 1.5). При этом координаты точки P и разрывы смещений Δu_i^P можно записать в виде

$$\begin{aligned} x_i^P(\xi_2) &= x_i^O + (x_i^E - x_i^O)\frac{1+\xi_2}{2}, \\ \Delta u_i^P(\xi_2) &= \Delta u_i^O + (\Delta u_i^E - \Delta u_i^O)\frac{1+\xi_2}{2}. \end{aligned} \tag{1.61}$$

Из системы (1.61) исключим ξ_2 и получим зависимость разрыва смещений Δu_i от координаты точки x_i

$$\Delta u_i^P = \Delta u^O + (\Delta u_i^E - \Delta u_i^O)\frac{x_i^P - x_i^O}{x_i^E - x_i^O} = \Delta u^O + (\Delta u_i^E - \Delta u_i^O)\frac{l}{L}, \tag{1.62}$$

которая является линейной функцией от l. Итак, мы хотим аппроксимировать реальное распределение $\Delta\,\mathbf{u}$, пропорциональное $\sqrt{l}$, линейной функцией. Погрешность такой аппроксимации будет пропорциональна $\sqrt{l}$ при стремлении l к нулю. Поэтому билинейные элементы аппроксимируют (1.60) с порядком $1/2$.

В элементе произвольной формы, когда кратчайший путь до фронта зависит от обеих координат ξ_1 и ξ_2, зависимость $\Delta\,\mathbf{u}$ от положения точки x_i станет нелинейной. Однако и в этом случае она не будет включать в себя слагаемое, пропорциональное $\sqrt{l}$.

1.5.4. «Четвертичные» элементы

Чтобы решить проблему аппроксимации разрыва смещений, на фронте трещины могут быть использованы специальные элементы, интерполирующие функции которых сконструированы таким способом, чтобы учесть слагаемое, пропорциональное $\sqrt{l}$, в (1.60). Самыми популярными элементами такого типа являются так называемые «четвертичные» элементы (от англ. *quarter-point* *elements*). Для простоты изложения и не ограничивая общности рассмотрим двумерный вариант элементов.

В «четвертичных» элементах средний узел $\mathbf{x}^2$ расположен таким образом, что

$$\begin{aligned} |\,\mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^1\,| &= L, \\ |\,\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1\,| &= 1/4L, \end{aligned} \tag{1.63}$$

как показано на рисунке 1.9.

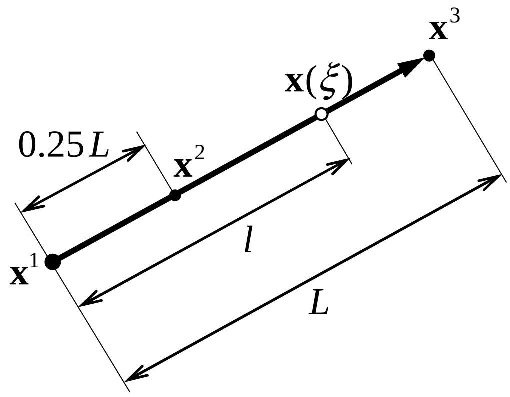


Рисунок 1.9 — «Четвертичный» элемент: $\mathbf{x}^\alpha$ – узлы элемента; $\mathbf{x}^1$ – фронт трещины; $|\,\mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^1\,| = L$; $|\,\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1\,| = 1/4L$; $|\,\mathbf{x}(\xi) - \mathbf{x}^1\,| = l$.

Интерполирующие функции являются полиномом второй степени и выглядят следующим образом

$$\begin{aligned} \phi^1(\xi) =&(1-\xi)(1-2\xi), \\ \phi^2(\xi) =&4\xi(1-\xi), \\ \phi^3(\xi) =&\xi(2\xi-1), \end{aligned} \tag{1.64}$$

В трехмерном случае интерполирующие функции (1.64) имеют аналогичную зависимость от ξ_2, а по координате ξ_1 зависимость обычно полиномиальная и зависит от количества узлов в этом направлении.

Подставим интерполирующие функции (1.41) в представление (1.41) для координат x_i

$$x_i(\xi) = x_i^1(1-\xi)(1-2\xi) + x_i^2 4\xi(1-\xi) + x_i^3\xi(2\xi-1). \tag{1.65}$$

Используя свойство расположения узлов (1.63), переписываем (1.65) в виде

$$
\begin{aligned}
x_i(\xi) &= x_i^1(1-3\xi+2\xi^2)+x_i^2(4\xi-4\xi^2)+x_i^3(2\xi^2-\xi)= \\
&= x_i^1+\xi(-3x_i^1+4x_i^2-x_i^3)+\xi^2(2x_i^1-4x_i^2+2x_i^3)= \\
&= x_i^1+\xi(4(x_i^2-x_i^1)-(x_i^3-x_i^1))+\xi^2(-4(x_i^2-x_i^1)+2(x_i^3-x_i^1))= \\
&= x_i^1+\xi^2(x_i^3-x_i^1).
\end{aligned}
\tag{1.66}
$$

Представление для разрывов смещений Δu_i выглядит аналогично (1.65)

$$
\Delta u_i(\xi)=\Delta u_i^1(1-\xi)(1-2\xi)+\Delta u_i^2 4\xi(1-\xi)+\Delta u_i^3\xi(2\xi-1). \tag{1.67}
$$

Выразим ξ из (1.66)

$$
\xi=\sqrt{\frac{(x_i(\xi)-x_i^1)}{(x_i^3-x_i^1)}}=\sqrt{\frac{l}{L}}. \tag{1.68}
$$

Подставляем ξ из (1.68) в представление для разрыва смещений (1.67)

$$
\begin{aligned}
\Delta u_i &= \Delta u_i^1\left(1-\sqrt{\frac{l}{L}}\right)\left(1-2\sqrt{\frac{l}{L}}\right)+ \\
&+\Delta u_i^2 4\sqrt{\frac{l}{L}}\left(1-\sqrt{\frac{l}{L}}\right)+\Delta u_i^3\sqrt{\frac{l}{L}}\left(2\sqrt{\frac{l}{L}}-1\right)= \\
&=\Delta u_i^1+\sqrt{\frac{l}{L}}\left(-3\Delta u_i^1+4\Delta u_i^2-\Delta u_i^3\right)+\frac{l}{L}\left(2\Delta u_i^1-4\Delta u_i^2+2\Delta u_i^3\right).
\end{aligned}
\tag{1.69}
$$

Из (1.69) следует, что «четвертичные элементы» аппроксимируют слагаемое $\sqrt{l}$ в (1.60), но не учитывают слагаемое $l^{3/2}$. В [51] предложена модификация «четвертичных элементов», учитывающая и это слагаемое.

«Четвертичный элемент» является непрерывным, так как его узлы находятся на границе элемента. Поэтому для разработанного дуального МГЭ его использование затруднительно, и необходимо использовать разрывные элементы. В диссертационной работе предложена модификация билинейных разрывных элементов для увеличения порядка аппроксимации разрыва смещений на фронте трещины.

1.5.5. Интерполирующие функции повышенной точности в разрывных элементах дуального МГЭ

Альтернативным подходом к решению проблемы аппроксимации разрыва смещений в окрестности фронта трещины являются специальные элементы, в которых геометрия и напряжения аппроксимируются обычными полиномами, а для разрыва смещений используются специальные функции, включающие в себя слагаемые, пропорциональные $\sqrt{l}$.

В диссертации предложен способ построения интерполирующих функций для аппроксимации зависимости (1.60) разрыва смещений от расстояния до фронта трещины и обобщен на случай произвольной такой зависимости. Для простоты изложения рассмотрим линейный элемент для плоской двумерной задачи упругости. Требуется представить разрыв смещений в виде

$$\Delta u_i(\xi) = F(\xi) + C, \tag{1.70}$$

где ξ — локальная координата элемента, $F(\xi)$ — произвольная функция, C — константа. В случае трещиностойкостного режима распространения трещины функция $F(\xi) = \sqrt{1+\xi}$ есть корень из расстояния до фронта трещины в локальной системе координат элемента. Для других режимов вид функции может быть выбран нужным образом, чтобы с достаточной точностью аппроксимировать поведение разрыва смещений в окрестности фронта.

Рассмотрим разрывный линейный элемент, в котором $\xi \in [-1; 1]$, и узлы которого лежат в точках a и b. Разрыв смещений выражается через интерполирующие функции в виде (1.41)

$$\Delta u_i(\xi) = \Delta u_i^1 \phi_1(\xi) + \Delta u_i^2 \phi_2(\xi), \tag{1.71}$$

следовательно, интерполирующие функции, точно аппроксимирующие (1.70), можно записать в виде

$$\phi_\alpha(\xi) = p_\alpha F(\xi) + q_\alpha. \tag{1.72}$$

Используя основное свойство интерполирующих функций

$$\phi_1(a) = 1, \quad \phi_2(a) = 0, \quad \phi_1(b) = 0, \quad \phi_2(b) = 1, \tag{1.73}$$

составим систему алгебраических уравнений, решим ее и получим следующий вид интерполирующих функций

$$\phi_1(\xi) = \frac{F(b) - F(\xi)}{F(b) - F(a)}, \quad \phi_2(\xi) = \frac{F(a) - F(\xi)}{F(a) - F(b)}. \tag{1.74}$$

В трехмерном случае для поверхностного элемента интерполирующие функции (1.74) необходимо домножить на функции, связанные со вторым направлением, и получить следующие выражения

$$\phi_\alpha(\xi_1, \xi_2) = \left(\frac{b_1^\alpha - \xi_1}{b_1^\alpha - a_1^\alpha}\right) \cdot \left(\frac{F(b_2^\alpha) - F(\xi_2)}{F(b_2^\alpha) - F(a_2^\alpha)}\right). \tag{1.75}$$

Подобным образом можно получить специальные интерполирующие функции для 9-узловых квадратичных разрывных элементов (1.54) [52]

$$\begin{aligned} \phi_\alpha(\xi_1, \xi_2) = \left(\frac{b_1^\alpha - \xi_1}{b_1^\alpha - a_1^\alpha} \cdot \frac{c_1^\alpha - \xi_1}{c_1^\alpha - a_1^\alpha}\right) \times \\ \times \left(\frac{F(b_2^\alpha) - F(\xi_2)}{F(b_2^\alpha) - F(a_2^\alpha)} \cdot \frac{F(c_2^\alpha) - F(\xi_2)}{F(c_2^\alpha) - F(a_2^\alpha)}\right), \end{aligned} \tag{1.76}$$

Покажем, что в прямоугольном элементе интерполирующие функции (1.75) при $F(\xi_2) = \sqrt{1 + \xi_2}$ точно аппроксимируют слагаемое $\sqrt{l}$ в асимптотическом разложении (1.60) разрыва смещений. Координаты x_i зависят от ξ_2 так же, как и для билинейных элементов (1.61), а разрыв смещений запишется как

$$\begin{aligned} x_i(\xi_2) &= x_i^O + (x_i^E - x_i^O)\frac{1 + \xi_2}{2}, \\ \Delta u_i(\xi_2) &= \Delta u_i^O + (\Delta u_i^E - \Delta u_i^O)\sqrt{\frac{1 + \xi_2}{2}}, \end{aligned} \tag{1.77}$$

Из системы (1.77) исключим ξ_2 и получим зависимость разрыва смещений Δu_i от положения точки x_i

$$\Delta u_i(x_i) = \Delta u_i^O + (\Delta u_i^E - \Delta u_i^O)\sqrt{\frac{x_i - x_i^O}{x_i^E - x_i^O}}\Delta u_i^O + (\Delta u_i^E - \Delta u_i^O)\sqrt{\frac{l}{L}}, \tag{1.78}$$

Выражение для Δu_i содержит слагаемое асимптотики (1.60), пропорциональное $\sqrt{l}$, а следовательно разрыв смещений аппроксимируется с порядком $3/2$.

В элементе произвольной формы, когда l и ξ_2 не коллинеарны, в зависимость (1.78) вносится нелинейное искажение. Поэтому для хорошей точности вычислений необходимо на фронте трещины строить элементы, близкие к прямоугольным. Эффективность использования специальных прифронтовых элементов при вычислении КИНов будет показана в разделе 1.6. Как показали расчеты, небольшое искажение геометрии элементов не ухудшило порядок сходимости решения.

Предложенный подход может быть использован для аппроксимации решения на фронте трещины не только для случая линейной механики трещин. Например, асимптотическое решение для трещины гидроразрыва в вязкостном режиме распространения подчиняется закону [53]

$$w = 2^{1/3}3^{5/6}\left(\frac{\mu' V}{E'}\right)^{1/3} l^{2/3}, \quad p = -6^{-2/3}\left(\frac{\mu' V}{E'}\right)^{1/3} l^{-1/3}. \tag{1.79}$$

Для аппроксимации этого решения можно использовать интерполирующие функции (1.78), в которых функция $F(\xi_2)$ принимает различный вид для разрыва смещений и напряжений.

$$\begin{aligned} F(\xi_2) &= (1+\xi_2)^{2/3} \text{ для } \Delta u_i \\ F(\xi_2) &= (1+\xi_2)^{-1/3} \text{ для } t_i. \end{aligned} \tag{1.80}$$

1.6. Верификация методов вычисления НДС в задачах с трещинами

1.6.1. Постановка задачи о наклонной трещине

Для верификации разработанных методов вычисления НДС в задачах с трещинами рассмотрена тестовая задача об одноосном растяжении плоской круглой трещины радиуса R в бесконечной среде. Центр трещины расположен в начале координат. Трещина лежит в плоскости, наклоненной на угол α к оси Oz (рисунок 1.10, *a*). Материал растягивается на бесконечности напряжениями, задаваемыми тензором $\boldsymbol{\sigma}^\infty$ с главными компонентами $\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = 0$, $\sigma_z^\infty = \sigma > 0$. Берега трещины свободны от напряжений.

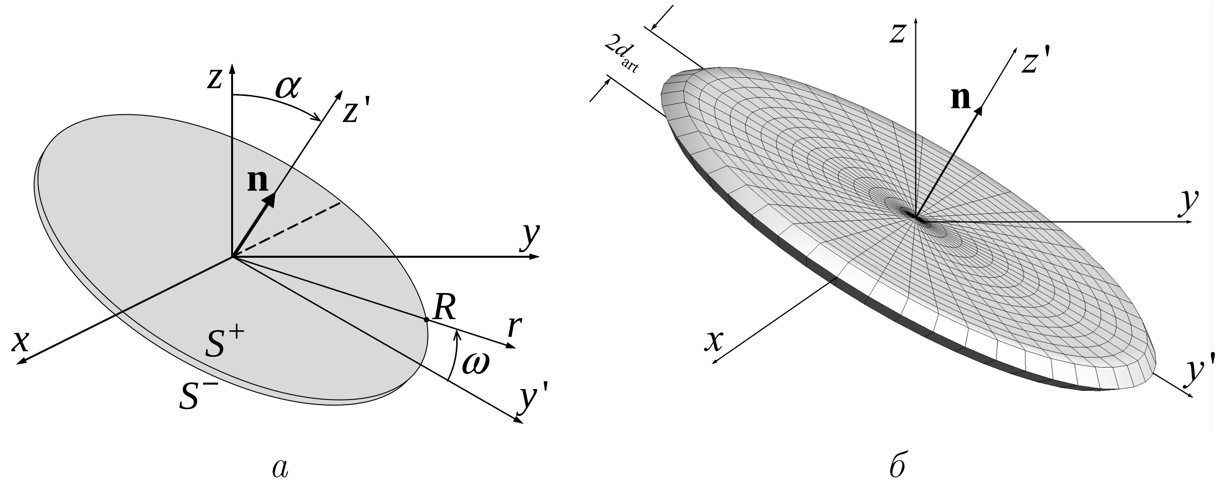


Рисунок 1.10 — Задача о круговой трещине в материале, растягиваемом в направлении z: a — бесконечно тонкая трещина в плоскости, повернутой относительно оси Oz на угол α; $б$ — круговой пропил ширины $d_{\rm art}$, расположенный в той же плоскости.

Точное решение для $\Delta\,\mathbf{u}$ на трещине имеет вид [54, 55]

$$\begin{aligned}
&\Delta u_x(r) = 0,\\
&\Delta u_y(r) = \sigma\frac{16(1-\nu^2)}{\pi E(2-\nu)}\sin\alpha\cos\alpha\sqrt{R^2-r^2},\\
&\Delta u_z(r) = \sigma\frac{8(1-\nu^2)}{\pi E}\cos^2\alpha\sqrt{R^2-r^2},
\end{aligned} \tag{1.81}$$

Ширина трещины W рассчитывается по формуле

$$W(\mathbf{x}) = \Delta\,\mathbf{u}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}). \tag{1.82}$$

Точные значения КИНов могут быть найдены, например, в [56, 57]:

$$K_{\rm I} = 2\sigma\cos^2\alpha\sqrt{\frac{R}{\pi}}, \tag{1.83}$$

$$K_{\rm II} = \frac{4}{2-\nu}\sigma\sin\alpha\cos\alpha\cos\omega\sqrt{\frac{R}{\pi}}, \tag{1.84}$$

$$K_{\rm III} = \frac{4(1-\nu)}{2-\nu}\sigma\sin\alpha\cos\alpha\sin\omega\sqrt{\frac{R}{\pi}}, \tag{1.85}$$

где ω – круговая координата вдоль фронта трещины, определяющая положение рассматриваемой точки на фронте.

В приведенных ниже расчетах радиус трещины был выбран $R = 1$ м, растягивающее напряжение на бесконечности равно $\sigma_y^\infty = 1$ МПа, упругие параметры материала $E = 20$ ГПа, $\nu = 0.2$.

1.6.2. Верификация МГЭ/МО: определение оптимальной ширины искусственного пропила

Трещина ортогональна главным напряжениям ($\alpha = 0$)

Чтобы показать, насколько использование искусственного пропила конечной ширины d_{art} вместо трещины (см. раздел 1.3) влияет на решение задачи упругости, и чтобы выработать рекомендации по выбору оптимального значения d_{art}, проведена серия расчетов ширины W плоской круглой трещины при угле наклона трещины $\alpha = 0$.

Расчетные сетки характеризуются количеством элементов в окружном направлении N_c и радиальном направлении N_r. Размер грубой сетки C_1 равен $N_c \times N_r = 16 \times 08$ элементов, средней сетки C_2 — 32×16 элементов, подробной сетки C_3 — 64×32 элемента (каждый раз сетка измельчалась вдвое по всем направлениям). Ширина пропила варьировалась в интервале $0.00125R \leqslant d_{\text{art}} \leqslant 0.64R$ с шагом увеличения d_{art} в два раза, где R — радиус трещины.

Сравнение точного и численного решений на подробной сетке C_3 показано на рисунке 1.11. Видно, что при стремлении ширины пропила к нулю, не наблюдается стремление решения к точному, а наоборот, решение отклоняется от точного.

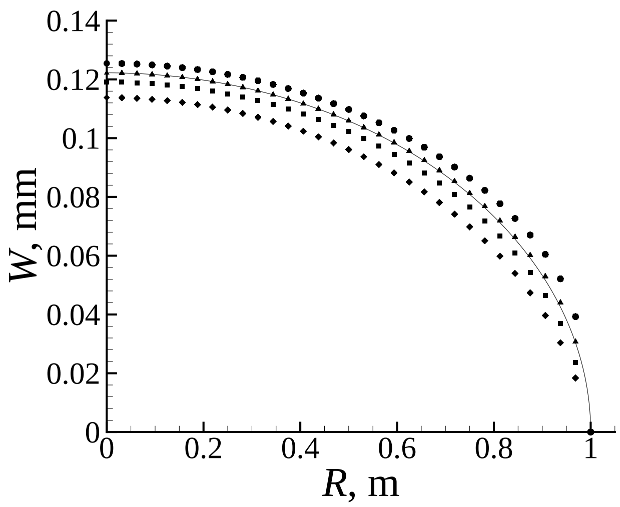


Рисунок 1.11 — Распределения ширины трещины W вдоль радиуса трещины r: точное решение (*сплошная линия*) и численное решение МГЭ/МО на подробной сетке C_3 при различных значениях ширины пропила d_{art}: $0.32R$(*кружки*); $0.16R$ (*треугольники*); $0.04R$ (*квадраты*), $0.005R$ (*ромбы*).

Рассмотрим подробнее распределение относительной ошибки вычисления ширины трещины вдоль радиуса трещины r (рисунок 1.12)

$$\varepsilon_W(\mathbf{x}) = \frac{W_{\mathrm{num}}(\mathbf{x}) - W_{\mathrm{ex}}(\mathbf{x})}{||W_{\mathrm{ex}}||}. \tag{1.86}$$

Здесь $W_{\mathrm{ex}}(\mathbf{x})$ — точное решение (1.81), $W_{\mathrm{num}}(\mathbf{x})$ — численное решение, $||\cdot|| = \max\limits_{S^{\pm}} |\cdot|$ — норма Чебышёва.

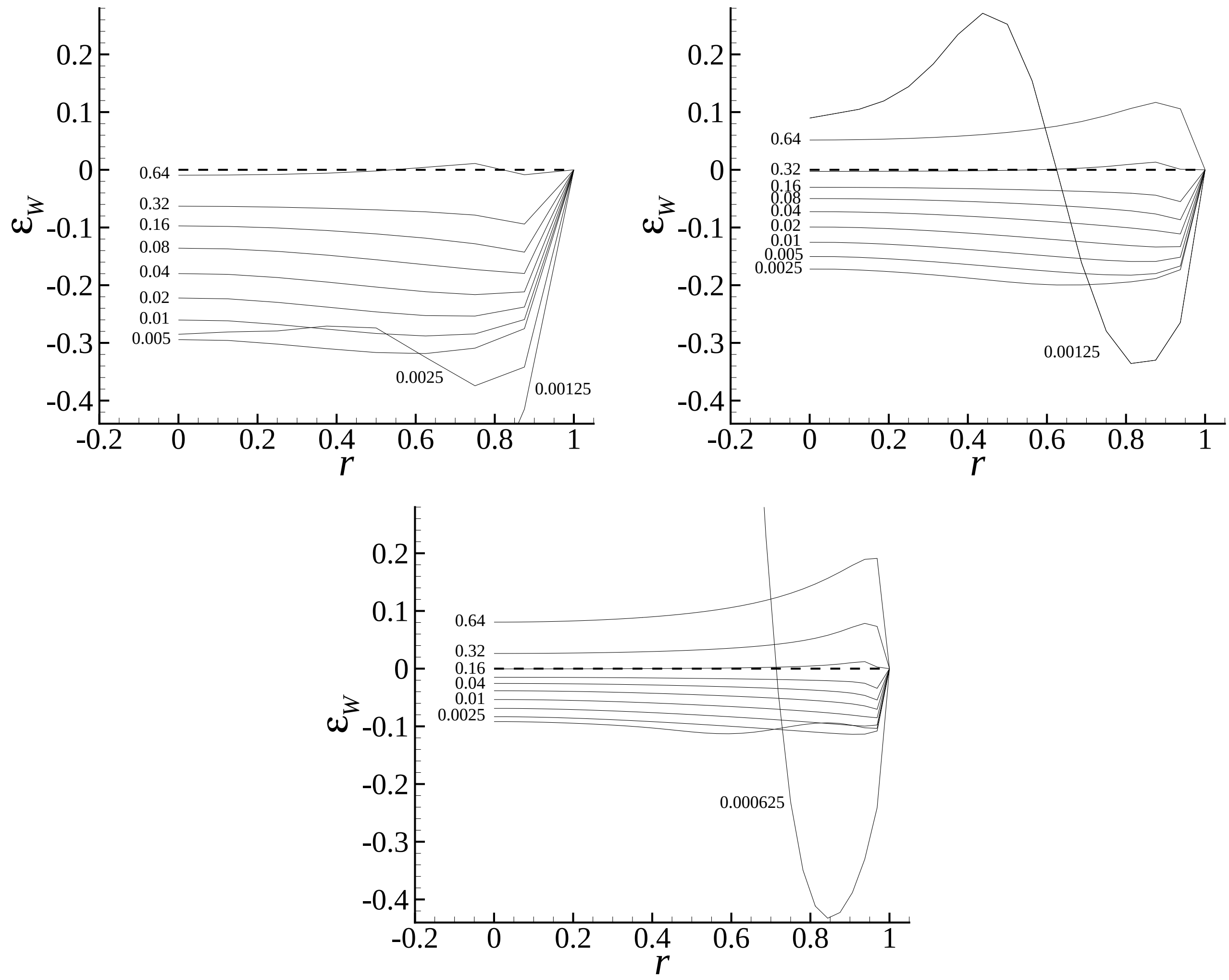


Рисунок 1.12 — Распределения относительной ошибки ε_W вдоль радиуса трещины r для различных значений ширины пропила d_{art} на трех сетках: C_1 (*слева*); C_2 (*справа*); C_3 (*снизу*).

Величина погрешности определяется двумя главными составляющими: погрешностью, вызванной искажением геометрии трещины, и погрешностью интегрирования сингулярных ядер в ГИУС (1.27) из-за близости точек коллокации друг к другу. Видно, что погрешность интегрирования становится огромной при уменьшении d_{art} до $0.0025R$ на грубой сетке C_1, $0.00125R$ на средней сетке C_2, и $0.000625R$ на подробной сетке C_3. Сгущение сетки уменьшает влияние d_{art} на решение: на грубой сетке C_1 уменьшение d_{art} в два раза изменяет ε_W

на 0.03–0.04, на средней сетке C_2 — на 0.02–0.03, на подробной сетке — на 0.01–0.02.

По графикам 1.12 вычислены максимумы погрешности вычисления ширины

$$\varepsilon_{W\max} = ||\varepsilon_W|| \tag{1.87}$$

и построены зависимости $\varepsilon_{W\max}$ от величины пропила d_{art}, отнесенной к размеру трещины R (рисунок 1.13, *слева*) и к размеру максимального элемента $d_{\mathrm{e}} = 2\pi R/N_c$ (рисунок 1.13, *справа*).

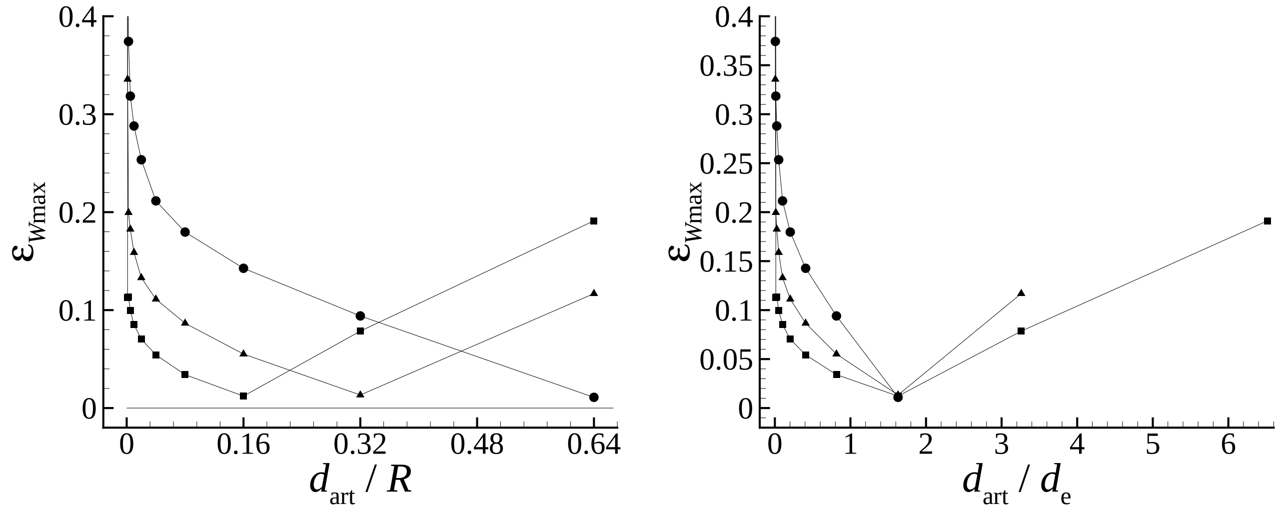


Рисунок 1.13 — Зависимости максимального модуля ошибки $\varepsilon_{W\max}$ от ширины пропила d_{art}, отнесенной к радиусу трещины R (*слева*) и максимальному размеру элементов d_{e} (*справа*), полученные на различных сетках: C_1 (*кружки*), C_2 (*треугольники*), C_3 (*квадраты*).

Можно заметить, что условия, при которых погрешность начинает резко возрастать и условия достижения минимума погрешности определяется не абсолютным значением величины пропила d_{art}, а его отношением к размеру элемента d_{e}. Минимум относительной погрешности $\varepsilon_{W\max}$ достигается при соотношении $d_{\mathrm{art}}/d_{\mathrm{e}}$, равном примерно 1.6 и составляет $1-2\%$. При уменьшении соотношения $d_{\mathrm{art}}/d_{\mathrm{e}}$ до 0.0127 погрешность $\varepsilon_{W\max}$ медленно растет до 32% на грубой сетке C_1, 20% на средней сетке C_2 и 12% на подробной сетке C_3. При дальнейшем уменьшении соотношения $d_{\mathrm{art}}/d_{\mathrm{e}}$ происходит катастрофическое возрастание погрешности, связанное с ошибками интегрирования при близко расположенных берегах трещины.

Итак, использование пропила конечной ширины позволяет с достаточной точностью вычислять НДС в задачах с трещинами, при этом оптимальное значение величины пропила составляет 1.6 от максимального размера элемента сетки.

Трещина наклонена на угол $\alpha = 45^\circ$

В предыдущем разделе было продемонстрировано, что МГЭ/МО позволяет подобрать оптимальную величину d_{art}, дающую погрешность вычисления раскрытия трещины порядка $1-2\%$. В этом разделе проведено аналогичное исследование на задаче о плоской круглой трещине, но наклоненной на угол $\alpha = 45^\circ$ относительно растягивающих напряжений. В этом случае все три моды нагружения трещины являются ненулевыми, и в качестве анализируемой величины рассматривалась погрешность вычисления разрыва смещений

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\Delta\,\mathbf{u}} &= \frac{|\Delta\,\mathbf{u}_{\text{num}} - \Delta\,\mathbf{u}_{\text{ex}}\,|}{||\Delta\,\mathbf{u}_{\text{ex}}\,||}, \\ \varepsilon_{\Delta\,\mathbf{u}\max} &= ||\varepsilon_{\Delta\,\mathbf{u}}|| \end{aligned} \tag{1.88}$$

На рисунке 1.14 приведены зависимости максимальной ошибки $\varepsilon_{\Delta\,\mathbf{u}\max}$ от ширины пропила d_{art} на различных сетках. Минимум погрешности достигается при величине $d_{\text{art}} = 0.4 \div 0.8 d_{\text{e}}$ и составляет $4 \div 8\%$ в зависимости от сетки. Как видно, при учете всех трех мод нагружения значительно увеличивается погрешность вычисления разрыва смещений. Подобранные на задаче о плоской трещины оптимальные значения величины d_{art} могут быть использованы в более сложных задачах распространения неплоских трещин, но не гарантируют такую же точность.

КИНы

Проанализируем способы вычисления КИНов по одноточечной формуле (1.58) и двухточечной экстраполяционной формуле (1.59) на основе вычисленных разрывов смещений. Расчет КИНов по одноточечной формуле (1.58) вносит погрешность $O(l)$. Покажем это на примере плоской круглой трещины (см. раздел 1.6.1). На рисунке 1.15, *слева* показаны распределения значений K_{I} вдоль радиального направления r, рассчитанные по одноточечной формуле (1.58), примененной к точному решению (1.81) и численному решению МГЭ на подробной сетке C_3 с пропилом различной ширины d_{art}. Видно, что погрешность формулы (1.58) растет линейно при отдалении от фронта трещины (*штриховая линия*). Поэтому применение формулы (1.58) возможно только при использовании точек на маленьком расстоянии от фронта трещины, даже

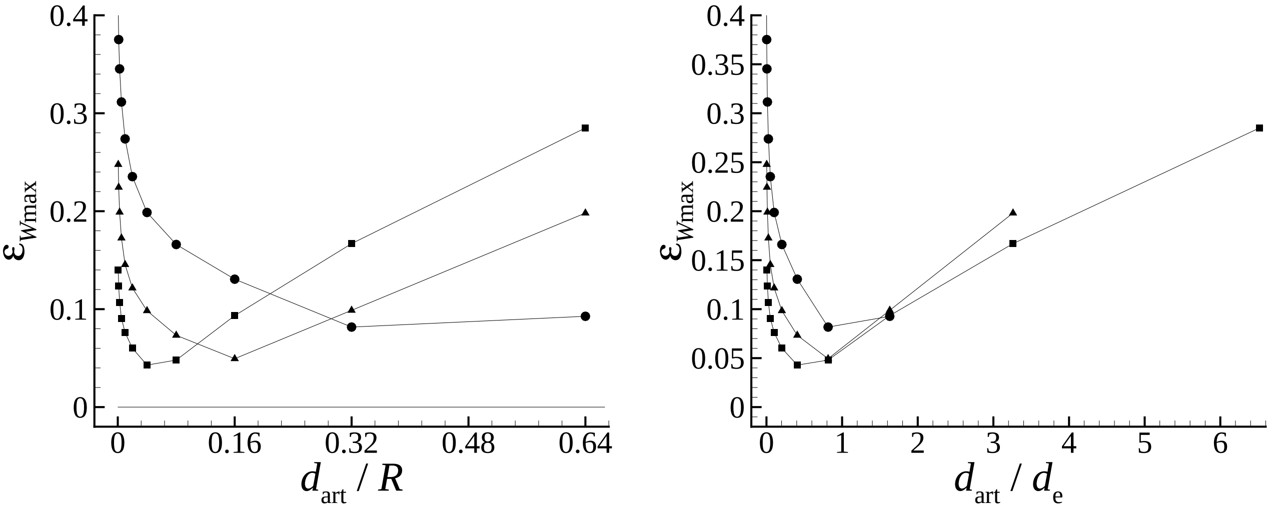


Рисунок 1.14 — Зависимости максимального модуля ошибки $\varepsilon_{\Delta\mathbf{u}\max}$ от ширины пропила d_{art}, отнесенной к радиусу трещины R (*слева*) и максимальному размеру элементов d_{e} (*справа*), полученные на различных сетках: C_1 (*кружки*), C_2 (*треугольники*), C_3 (*квадраты*).

если разрывы смещений вычислены точно. Однако при численном решении в окрестности фронта погрешности вычисления разрывов смещений максимальны, что затрудняет их использование. Поэтому оптимальным вариантом вычисления КИНов является использование точек на достаточном расстоянии от фронта, и интерполяция их значений на фронт. Формула (1.59), использующая для расчета КИНов значения смещений в удаленных от фронта точках, менее чувствительна к погрешностям расчета смещений в окрестности кончика, чем формула (1.58).

На рисунке 1.15, *справа* показаны распределения всех трех КИНов вдоль фронта плоской круглой трещины, наклоненной на угол $\alpha = 45°$ от направления действия растягивающих напряжений, полученные по двухточечной формуле (1.59) по точкам восьмого от фронта элемента (на расстоянии $7/32R$ и $8/32R$) при различных значениях d_{art}. Видно, что оптимальное значение d_{art} разное для разных мод КИНов: $0.16R$ для K_{I} и $0.04R$ для K_{II} и K_{III}.

1.6.3. Верификация ДМГЭ и специальных прифронтовых элементов

Раскрытие трещины

Для верификации ДМГЭ также рассмотрена задача о плоской круглой трещине, описанная в разделе 1.6.1. Расчеты проводились на последовательностях

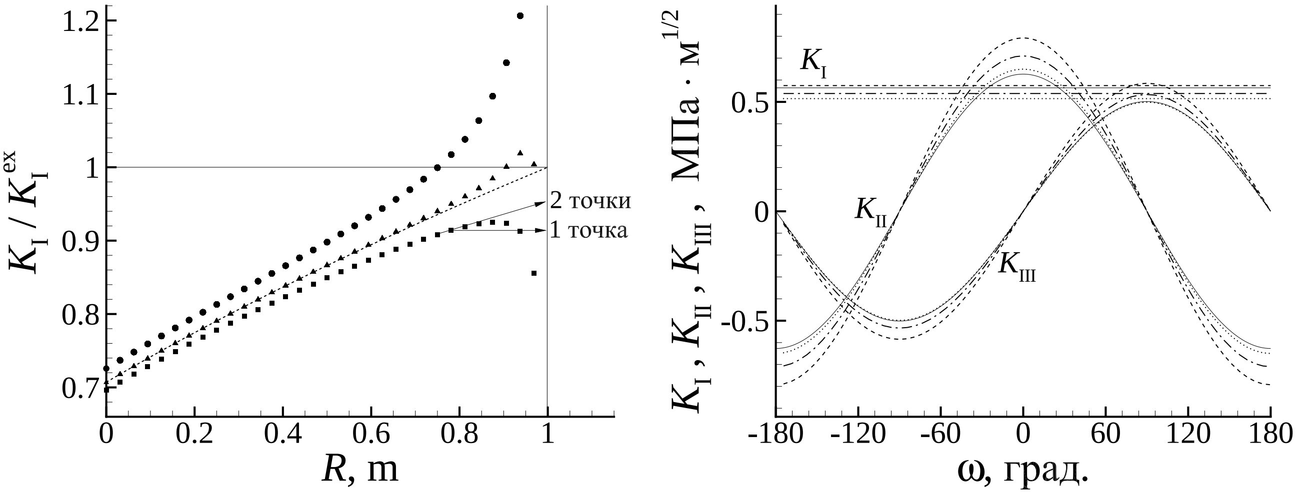


Рисунок 1.15 — *Слева:* зависимость K_I от радиальной координаты r: точное решение (1.83) (*сплошная*); формула (1.58) для КИНов, примененная к точному решению (1.81) для $\Delta\,\mathbf{u}$ (*штриховая*) и численному решению МГЭ/МО для различных значений d_art: $0.32R$ (*кружки*), $0.16R$ (*треугольники*), $0.08R$ (*квадраты*). *Справа:* распределения КИНов вдоль фронта наклоненной на 45° трещины: точное решение (*сплошные*); численное решение МГЭ с пропилом конечной ширины d_art: $0.16R$ (*штриховые*), $0.08R$ (*штрих-пунктирные*), $0.04R$ (*пунктирные*).

сеток, сгущающихся в два раза в радиальном направлении при фиксированном количестве элементов в окружном направлении. Количество элементов в радиальном направлении N_r равно 4 (C_1), 8(C_2) и 16(C_3) для всех типов элементов. Для 4-узловых элементов количество элементов в окружном направлении $N_\phi = 64$, а для 9-узловых элементов $N_\phi = 16$.

На рисунке 1.16 показаны распределения ошибки ε_W от радиальной координаты r для полиномиальных элементов на сериях сеток C_1, C_2, C_3.

Видно, что ДМГЭ вычисляет ширину трещины W с высокой точностью всюду, кроме окрестности фронта трещины. Заметим, что использование разрывных элементов не позволяет удовлетворить условию на фронте трещины $W_\mathrm{num}(R) = W_\mathrm{ex}(R) = 0$. Максимум погрешности всегда находится на фронте трещины и равен $(0.241, 0.168, 0.118)$ для билинейных и $(0.217, 0.152, 0.107)$ для биквадратичных элементов на последовательностях сеток (C_1, C_2, C_3). Порядок аппроксимации составляет $\sim 1/2$ как для билинейных, так и для биквадратичных элементов.

Рассмотрим теперь, что произойдет, если использовать на фронте трещины специальные прифронтовые элементы: 4-узловые элементы (1.75) вместо билинейных (1.53) и 9-узловые элементы (1.76) вместо биквадратичных (1.54). Результаты расчетов приведены на рисунке 1.17.

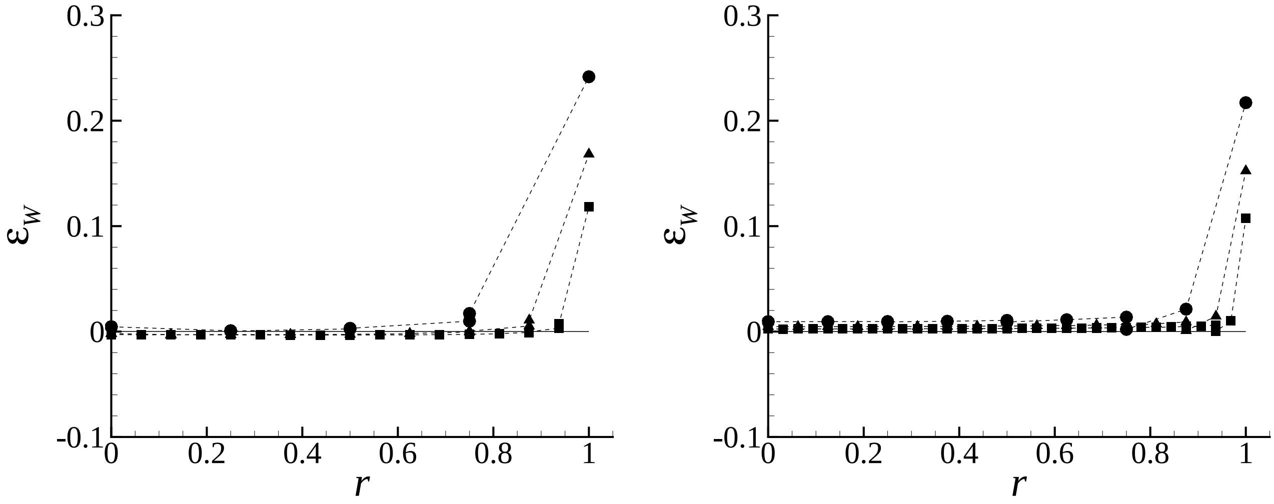


Рисунок 1.16 — Зависимости погрешности раскрытия трещины ε_W от расстояния до центра трещины r, вычисленные с использованием билинейных (1.53) (*слева*) и биквадратичных (1.54) (*справа*) элементов на различных сетках: C_1 (*кружки*), C_2 (*треугольники*), C_3 (*квадраты*).

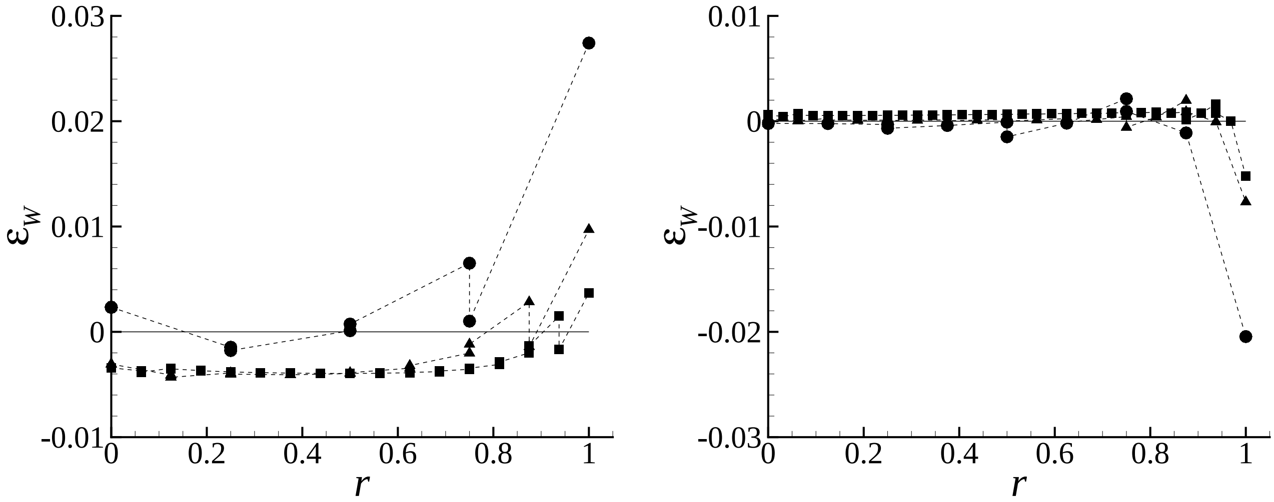


Рисунок 1.17 — Зависимости погрешности раскрытия трещины ε_W от расстояния до центра трещины r, вычисленные с использованием специальных прифронтовых 4-узловых (1.75) (*слева*) и 9-узловых (1.76) (*справа*) элементов на различных сетках: C_1 (*кружки*), C_2 (*треугольники*), C_3 (*квадраты*).

Ошибки ε_W на фронте трещины при использовании специальных прифронтовых элементов уменьшились на порядок по сравнению с результатами полиномиальных элементов: для 4-узловых (1.75) элементов ошибки равны $(0.0274, 0.0097, 0.0037)$, а для 9-узловых — $(-0.0204, -0.0077, -0.0052)$.

В случае 4-узловых элементов заметно, что решение стремится не к точному решению, а занижено примерно на 0.3-0.4% почти на всей трещине. Это наблюдается и с обычными элементами (1.53), и со специальными прифронтовыми (1.75). Одной из возможных причин этого эффекта являются ошибки аппроксимации геометрии области: во всех расчетах сетка не сгущается в окружном направлении, и круглая трещина аппроксимируется вписанным 64-угольником, площадь которого на 0.16% меньше площади круга, что приводит к меньшему нагружению трещины и снижению величины ее раскрытия. При аппроксимации 9-узловыми элементами такой эффект наблюдается в меньшей мере, так как элементы параболической формы с лучшей точностью аппроксимируют круглый фронт трещины.

КИНы

Для вычисления КИНа K_I применим к вычисленным разрывам смещений формулу (1.58) и получим зависимости K_I от радиальной координаты r, показанные на рисунке 1.18. Высокие погрешности вычисления разрыва смещений в

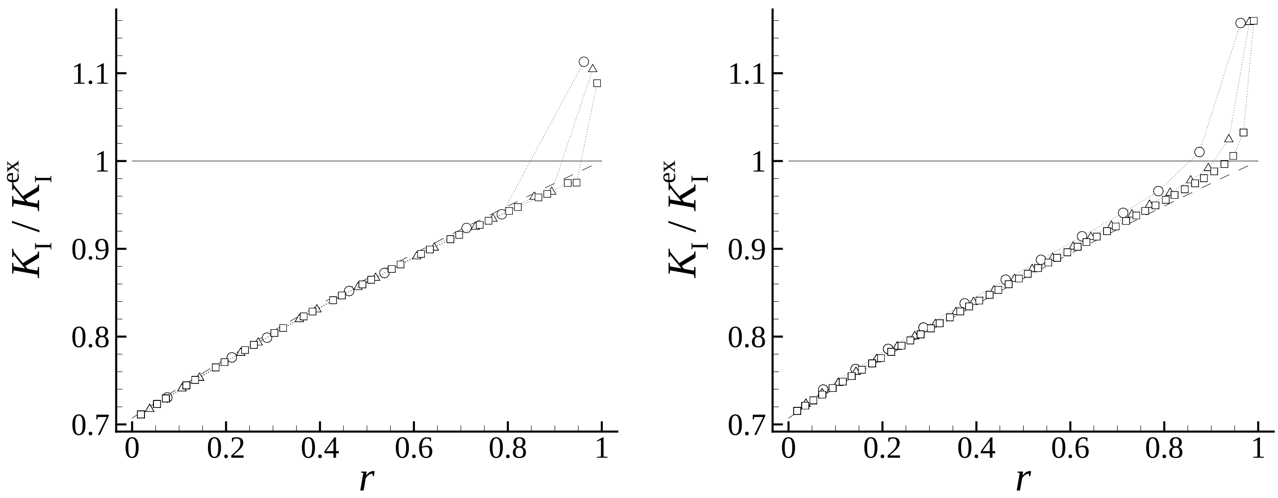


Рисунок 1.18 — Зависимость K_I от радиальной координаты r: точное решение (1.83) (*сплошная*); формула (1.58), примененная к точному решению ширины трещины (1.81) (*штриховая*) и численному решению ДМГЭ с билинейными (*слева*) и биквадратичными (*справа*) элементами на различных сетках: C_1 (*кружки*), C_2 (*треугольники*), C_3 (*квадраты*).

окрестности фронта трещины приводят к ошибкам вычисления K_I. Использование специальных прифронтовых элементов значительно улучшает точность вычисления КИНов, как показано на рисунке 1.19.

В завершение на рисунке 1.20 проведем сравнение распределений значений всех трех КИНов вдоль фронта наклонной на $\alpha = 45°$ трещины, рассчитанных на средней сетке C_2 с помощью 4-узловых элементов и одноточечной формулы (1.58) с использованием различных элементов на фронте трещины: обычных линейных (1.53) и специальных прифронтовых (1.75).

Видно, что использование специальных прифронтовых элементов позволяет

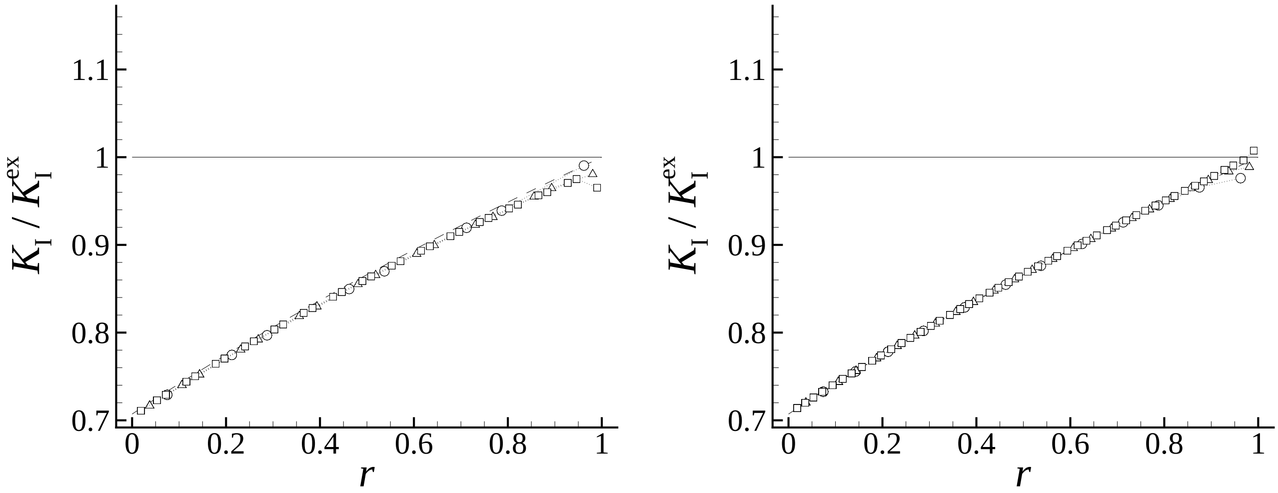


Рисунок 1.19 — Зависимость K_{I} от радиальной координаты r: точное решение (1.83) (*сплошная*); формула (1.58), примененная к точному решению ширины трещины (1.81) (*штриховая*) и численному решению ДМГЭ со специальными прифронтовыми 4-узловыми (*слева*) и 9-узловыми (*справа*) элементами на различных сетках: C_1 (*кружки*), C_2 (*треугольники*), C_3 (*квадраты*).

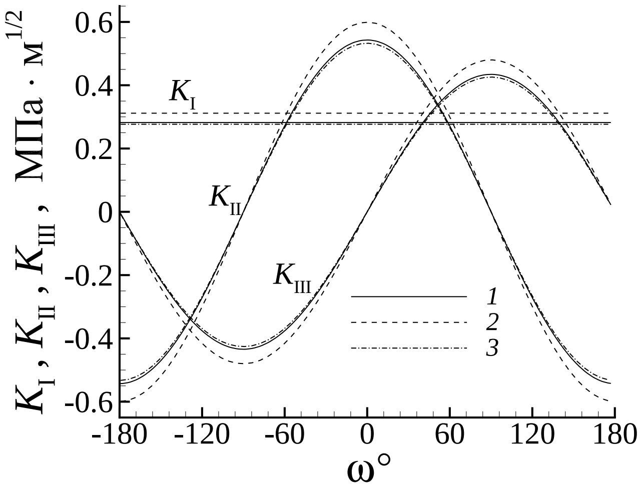


Рисунок 1.20 — Распределения КИНов вдоль фронта наклоненной на 45° трещины, полученные из точного решения (*1*), дуальным МГЭ без (*2*) и с использованием специальных элементов (*3*).

существенно снизить погрешность расчета K_{I} с 11 до 2 %.

1.6.4. Сравнение МГЭ/МО и дуального МГЭ

Проведено сравнение разработанных методов расчета НДС с точки зрения эффективности. Решена задача о плоской круглой трещине, наклоненной на угол $\alpha = 45°$ с помощью МГЭ/МО и дуального МГЭ на различных сетках. Сетки взяты таким образом, чтобы примерно совпадало количество степеней свобод в расчетах разными методами. Все расчеты проведены на четырех ядрах

Таблица 1.1 — Сравнение эффективности методов МГЭ/МО и ДМГЭ

	Сетка	Узлы	Погрешность	Время, с	Память, Мб
МГЭ/МО	64×32	4098	0.0429	49	2296
МГЭ/МО	64×16	2050	0.0590	16	561
МГЭ/МО	64×08	1026	0.0877	7	134
ДМГЭ	64×16	4032	0.0040	156	2276
ДМГЭ	64×08	1984	0.0098	109	551
ДМГЭ	64×04	960	0.0279	73	129

процессора *Intel Core i7-4710HQ* частотой 2.5 ГГц. В таблице 1.1 приведены результаты расчетов.

При таких размерах сеток основную часть процессорного времени занимает численное интегрирование граничных интегральных уравнений при формировании СЛАУ. Видно, что при одинаковом количестве степеней свобод МГЭ с пропилом конечной ширины быстрее в 3-10 раз, но при этом его точность 3-10 раз ниже, чем у дуального МГЭ, даже при величинах d_{art}, близких к оптимальным по точности.

1.6.5. Пример использования разработанных методов в трехмерной задаче распространения трещины

Разработанные методы вычисления НДС были использованы в трехмерной модели распространения трещины гидроразрыва под действием постоянного давления. Такая постановка задачи соответствует трещиностойкостному режиму распространения [58], то есть случаю, когда трещина заполнена невязкой жидкостью, либо когда скорость закачки жидкости в трещину достаточно мала и давление успевает выровняться по всей трещине.

На рисунке 1.21 приведено решение задачи распространения радиальной поперечной трещины от скважины, наклоненной относительно минимального напряжения залегания σ_h на угол $\alpha = 30°$. Напряжения залегания равны $\boldsymbol{\sigma}^\infty = (\sigma_x^\infty; \sigma_y^\infty; \sigma_z^\infty) = -(4; 3; 4)$ МПа. Траектории вычисляются согласно критерию хрупкого распространения трещины [59] с трещиностойкостью $K_{\mathrm{I}c} = 3\,\text{МПа}\,\sqrt{\text{м}}$.

В следующих расчетах показано влияние величины сжатия породы при фиксированном значении трещиностойкости $K_{\mathrm{I}c}$ и фиксированным соотноше-

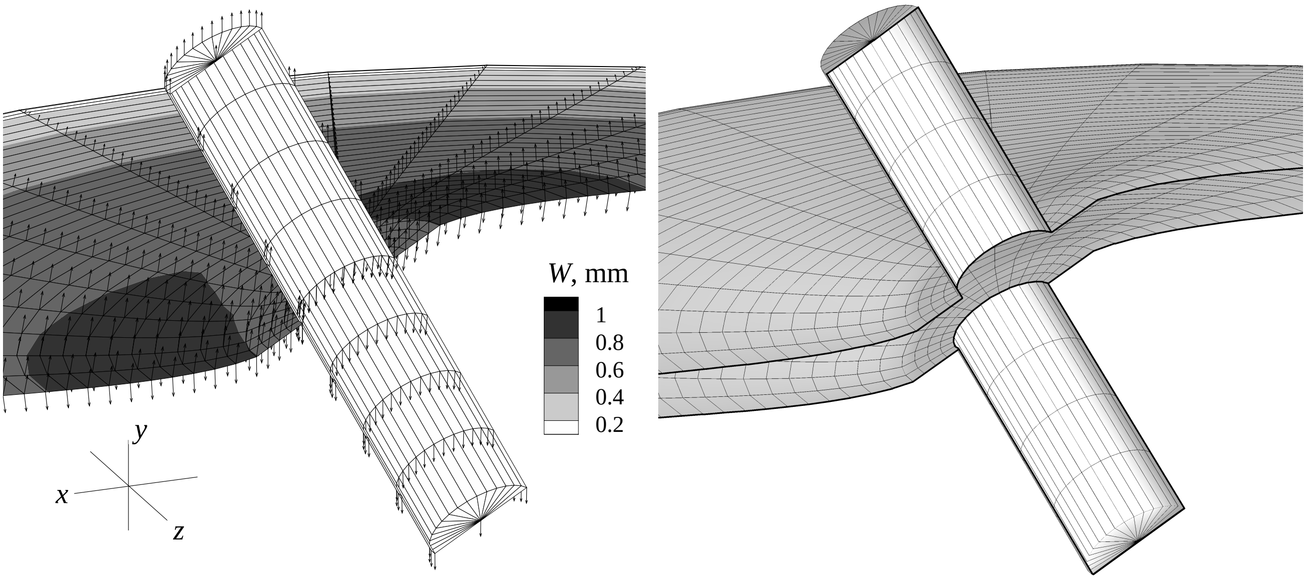


Рисунок 1.21 — Распространение поперечной трещины от скважины, наклоненной на угол 30° относительно минимального напряжения залегания: распределение раскрытия трещины W и векторы смещений скважины и берегов трещины (*слева*); геометрия скважины и трещины после деформирования (смещения увеличены в 500 раз) (*справа*).

нием между напряжениями залегания: $\sigma_x^\infty : \sigma_y^\infty : \sigma_z^\infty = 4 : 3 : 4$. В каждом следующем расчете все три главных значения тензора напряжений увеличивались в два раза. Срезы полученных траекторий в плоскости xz показаны на рисунке 1.22. Видно, что соотношение между значениями трещиностойкости и напряжений залегания значительно влияет на излом траектории и дальнейшее её распространение.

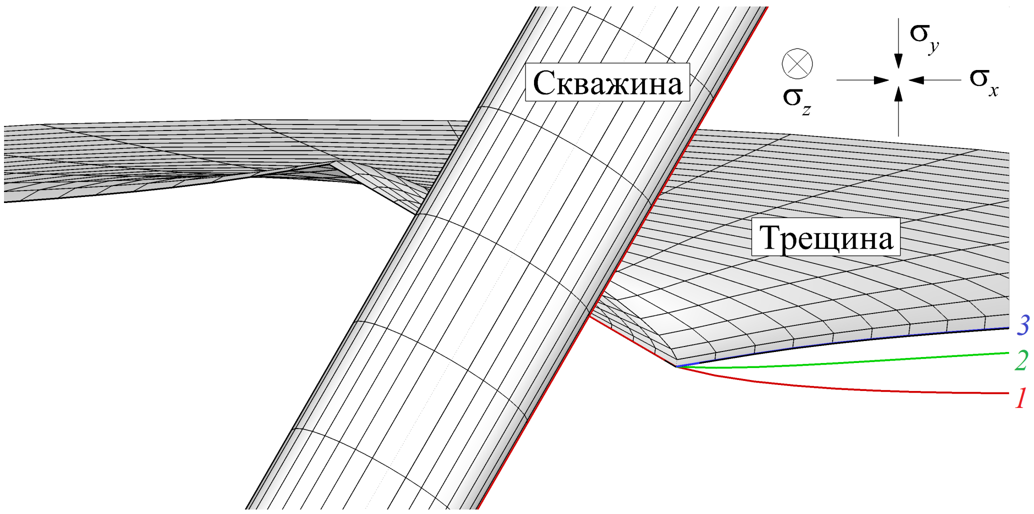


Рисунок 1.22 — Траектории невязкого распространения трещины от скважины, наклоненной на угол 30° относительно минимального напряжения залегания при его значениях: $\boldsymbol{\sigma}^\infty$ (*1*), $2\boldsymbol{\sigma}^\infty$ (*2*), $4\boldsymbol{\sigma}^\infty$ (*3*), где $\boldsymbol{\sigma}^\infty = (\sigma_x^\infty; \sigma_y^\infty; \sigma_z^\infty) = -(4; 3; 4)$ МПа.

Глава 2

Модель зарождения трещины

2.1. Постановка задачи зарождения трещины

В этой главе рассмотрена трехмерная задача зарождения трещины от поверхности упругого тела, схематично изображенную на рисунке 2.1 *слева*. Задача состоит в определении нагрузки σ_N, которую необходимо приложить к упругому телу для его разрушения, а также в определении местоположения и ориентации зародившейся трещины. Выходными данными задачи являются построенные зародышевые трещины, которые являются входными данными для модели дальнейшего распространения трещины вглубь материала. На рисунке 2.1 *слева* показан пример построенных зародышевых трещин в задаче зарождения трещины от скважины с поперечными пропилами. Задача зарождения включает в себя подзадачу вычисления НДС нагруженного тела при различных приложенных нагрузках и критерий трещинообразования.

Одной из особенностей задачи зарождения трещины в горных породах, которую должен учитывать критерий разрушения, является так называемый «эффект размера» или «масштабный эффект» (англ. *size effect*) — зависимость нагрузки, необходимой для разрушения тела, от его размеров. Одной из возможных причин эффекта размера является неоднородность материала — наличие зерен, дефектов, наличие нелинейной зоны трещинообразования при разрушении. Если характерный размер неоднородностей намного меньше характерного размера задачи, тело можно считать однородным, и оно хорошо описывается моделью хрупкого разрушения. Если же размер неоднородностей сравним с размером задачи, тело больше нельзя считать хрупким и его эффективная прочность возрастает. Типичная зависимость прочности от размера тела представлена на рисунке 2.1, *справа*. Для больших тел прочность материа-

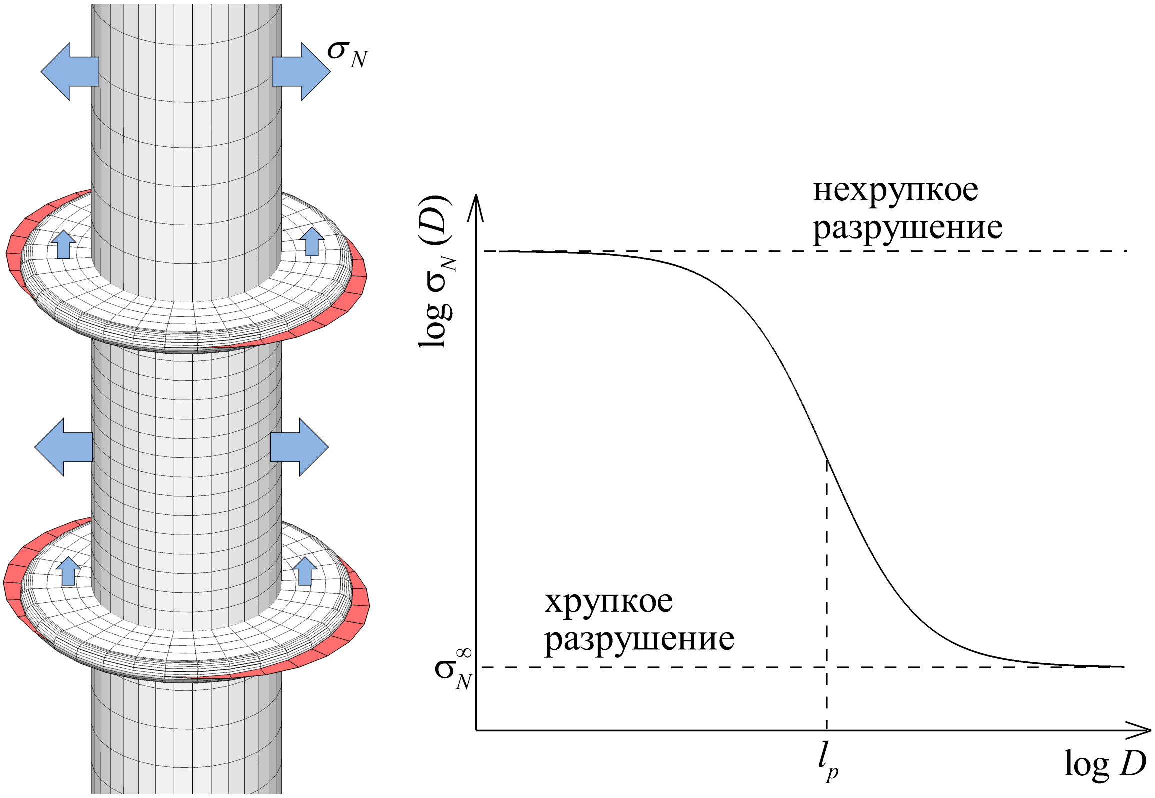


Рисунок 2.1 — Схема задачи зарождения трещины (*слева*): скважина с поперечными пропилами, σ_N — номинальная нагрузка, необходимая для зарождения трещин, зародышевые трещины на пропилах; «Эффект размера» — зависимость предельной нагрузки $\sigma_N(D)$, необходимой для разрушения, от характерного размера образца D (*справа*); l_p — характерный размер зоны трещинообразования, σ_N^∞ — номинальная прочность образца при его больших размерах ($D \to \infty$).

ла минимальна. Для маленьких тел, когда масштаб тела соизмерим с масштабом зоны трещинообразования, которая в горных породах может достигать нескольких миллиметров, проявляются нелинейные эффекты разрушения, и прочность тела увеличивается.

2.2. Модель зарождения трещины

Для решения задачи зарождения трещины предложена модель, включающая в себя:

- подмодели напряженно-деформированного состояния упругого тела,
- критерии зарождения трещины на поверхности этого тела,
- процедуру поиска неизвестной нагрузки, необходимой для разрушения тела,
- процедуру поиска зон зарождения трещин на основе критерия разруше-

ния,

- процедуру построения зародышевых трещин в зонах зарождения.

Чтобы найти номинальную нагрузку σ_N, необходимую для зарождения, решается серия задач нахождения НДС упругого тела при различных значениях параметра σ_N. С помощью метода бисекции находится такое значение σ_N, при котором выполнится критерий зарождения трещины с заданной точностью. Так как в рассмотренных задачах функция напряжения монотонно меняется в зависимости от приложенной номинальной нагрузки σ_N, метод бисекции гарантирует нахождение решения (при верно заданном диапазоне поиска решения). Тело считается линейно упругим, и его НДС вычисляется с помощью классического МГЭ, описанного в Главе 1.

Так как задача упругости линейна, для ускорения расчетов применяется декомпозиция задачи по заданию граничных условий: отдельно решается задача с известной неизменной нагрузкой, и отдельно — с варьируемой неизвестной нагрузкой σ_N, а затем оба решения складываются.

При проведении анализа чувствительности задачи к параметрам нагружения также применяется методика линейной декомпозиции задачи на более простые подзадачи. Рассмотрим, например, задачу, в которой порода на бесконечности нагружена тензором напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ с компонентами σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz}, σ_{xy}, σ_{yz}, σ_{zx}, скважина нагружена давлением p, перфорация — давлением p_{w}. Проведем декомпозицию задачи на несколько простейших подзадач, в которых есть единичное нагружение на каждом участке, например, есть только одноосное сжатие по направлению $\sigma_{yy} = 1$ или нагружена только перфорация давлением $p_{\mathrm{w}} = 1$. Зная решения базовых простейших подзадач, можно составить линейную комбинацию и найти НДС для произвольного нагружения. Предложенный подход позволяет увеличить скорость многократного использования решений базовых подзадач для решения задачи с произвольным набором приложенных нагрузок без пересчета НДС с с помощью МГЭ.

В критерии разрушения используется смещения или напряжения, рассчитанные по модели НДС. Критерий разрушения дает информацию о местоположении зарождения трещины. Их обзор будет приведен в разделе 2.3.

На основе информации о местоположении зародышевой трещины и НДС в окрестности этого места, предложена процедура построения зоны разрушения и зародышевой трещины, применимая вместе с любым из критериев разрушения, рассмотренным в данной главе.

2.2.1. Построение зоны разрушения

Напряжения, приложенные к телу, характеризуются некоторым параметром, например, величиной номинальной нагрузки σ_N. Так как задача линейной упругости в терминах напряжений (уравнения упругого равновесия и уравнения Бельтрами-Митчелла, при отсутствии внутренних сил) является эллиптической, согласно принципу максимума компоненты тензора напряжений достигают максимума на поверхности S области. Поэтому трещина в линейно упругом материале зарождается на поверхности. Пусть для выполнения критерия (2.15), (2.16) в точке $\mathbf{x} \in S$ требуется нагрузка $\sigma_N(\mathbf{x})$. Определим минимальное значение нагрузки для всей поверхности S как величину нагрузки, при которой критерий выполняется хотя бы в одной точке поверхности S:

$$\sigma_N^{\min} = \min_{\mathbf{x} \in S} \sigma_N(\mathbf{x}). \tag{2.1}$$

Точку, в которой выполняется минимум, обозначим $\mathbf{x}_0$ Множество точек $\mathbf{x} \in S$, в которых выполняется условие

$$\sigma_N^{\min} \leqslant \sigma_N(\mathbf{x}) \leqslant (1+\varepsilon)\sigma_N^{\min}, \tag{2.2}$$

назовем зоной зарождения трещины или зоной разрушения S_c. На рисунках будем обозначать зоны разрушения черным цветом.

Параметр ε позволяет задавать размер зоны разрушения. НДС, которое используется для нахождения области разрушения, в диссертационной работе рассчитано с помощью трехмерного классического МГЭ, описание которого приведено в Главе 1.

2.2.2. Построение зародышевой трещины

Как было сказано ранее, трещина зарождается на поверхности S разрушаемого тела в зоне разрушения S_c. В этом разделе опишем процедуру построения зародышевой трещины.

В зоне разрушения S_c выбирается точка $\mathbf{x}_0$, соответствующая минимальной нагрузке $\sigma_N^{\min}$, необходимой для выполнения критерия зарождения. Через $\mathbf{x}_0$ проводится кривая Γ, ортогональная в каждой точке $\mathbf{x}$ поверхности S_c направлению $\mathbf{n}_{\mathrm{f}}$ максимальных напряжений. Эта кривая — пересечение зародышевой трещины S_{f} и зоны разрушения S_c поверхности тела. Кривая Γ является основанием трещины, от которого далее трещина будет распространяться внутрь тела (рисунок 2.2).

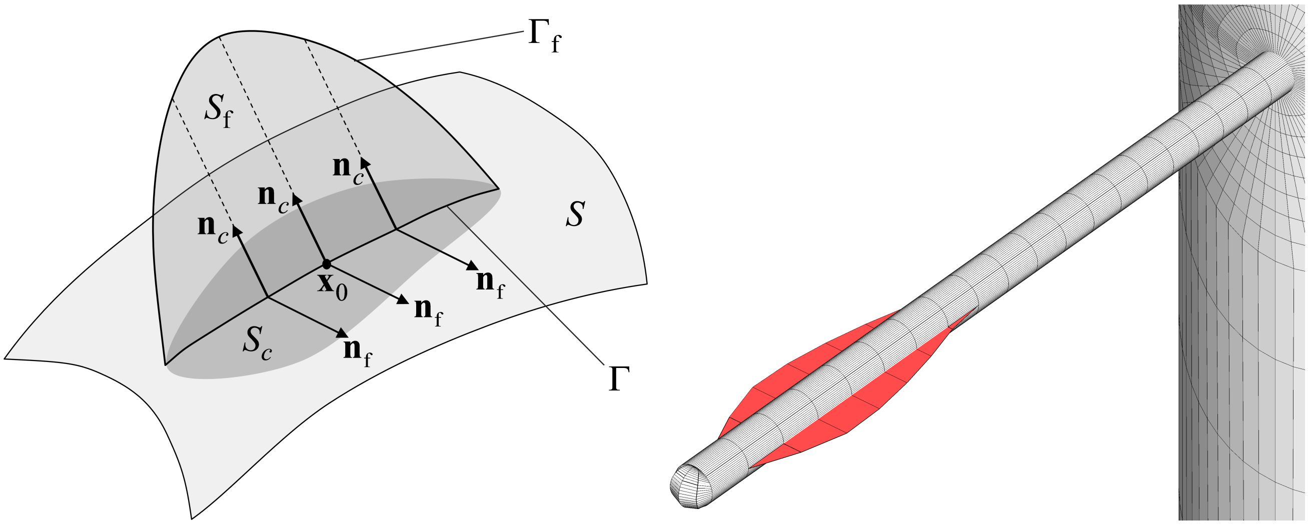


Рисунок 2.2 — Схема построения зародышевой трещины S_{f} от поверхности S разрушаемого тела (*слева*) и пример построенной сетки для зародышевой трещины на перфорации (*справа*).

Далее производится построение самой зародышевой трещины. Предполагается, что трещина перпендикулярна поверхности тела (трещина нормального отрыва), поэтому в каждой точке Γ строится нормаль $\mathbf{n}_c$ к поверхности S_c, вдоль которой распространяется трещина. Глубина $L(\mathbf{x})$ зародышевой трещины в каждой точке $\mathbf{x} \in S_c$ предполагается пропорциональной функции $F(\mathbf{x})$ в критерии (2.4):

$$L(\mathbf{x}) = L_0 F(\mathbf{x}). \tag{2.3}$$

Максимальная глубина трещины L_0 является параметром модели. После вычисления $L(\mathbf{x})$ в каждой точке $\mathbf{x} \in \Gamma$, строится трещина с фронтом распространения Γ_{f} и основанием Γ. Таким образом, размеры трещины определяются двумя параметрами: L_0 и ε. Геометрия зародышевых трещин является начальной конфигурацией для модели дальнейшего распространения трещины.

Пример построния сеток для зародышевых трещин приведен на рисунке 2.2, *справа*. Основанием трещины является ломаная, соединяющая узлы сетки полости. Эта ломаная может пересекать элементы исходной сетки поверхности полости, в этом случае применяется процедура «разрезания» элемента на несколько элементов по линии основания трещины. Фронт трещины — ломаная, составленная из точек, построенных по формуле (2.3). Между этими ломаными строятся граничные элементы трещины. Аналогично рисунку 2.2 в следующих разделах будут показаны результаты вычисления зон разрушения и построенные зародышевые трещины.

2.3. Обзор критериев разрушения материала

В этом разделе приведен обзор существующих критериев разрушения, которые учитывают (либо не учитвают) эффект размера. Прежде чем приступить к обзору, дадим формальное определение критерию разрушения материала. Рассмотрим тело, в котором известно НДС, рассчитанное каким-либо методом механики сплошной среды. Критерием разрушения называется условие, при котором в точке тела $\mathbf{x}$ происходит разрушение. В общем случае критерий разрушения может быть записан в виде следующего неравенства:

$$F(\mathbf{x}, u_i, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, d, ..., \sigma_t^\infty, K_{\mathrm{I}c}, T, ...) \geqslant 0. \tag{2.4}$$

Функция F определяется НДС тела (значениями смещений u_i, напряжений σ_{ij}, деформаций ε_{ij}) в точке $\mathbf{x}$ в локальных критериях или некоторой ее окрестности размера d в нелокальных критериях, и параметрами материала (прочностью на разрыв σ_t^∞, трещиностойкостью $K_{\mathrm{I}c}$, температурой T и т. д.). Размер d соответствует масштабу неоднородности материала и может трактоваться как размер микротрещин, присутствующих в материале (K_I-критерий), размер зоны контакта в зоне когезии (модель зоны когезии) или как длина отрезка / размер зоны осреднения параметров НДС (d-критерий).

Например, в одном из широко используемых критериев прочности — критерии максимальных растягивающих напряжений (МРН) [60], предполагается, что разрушение материала в точке $\mathbf{x}$ наступает, когда максимальное собственное значение тензора напряжений $\sigma_3(\mathbf{x})$ в этой точке превышает прочность материала на разрыв σ_t^∞

$$\sigma_3(\mathbf{x}) \geqslant \sigma_t^\infty. \tag{2.5}$$

2.3.1. Классические критерии, не учитывающие эффект размера

К группе наиболее популярных критериев разрушения относятся такие классические критерии, как МРН (2.5), Треска–Сен-Венана [61], Мизеса [62], Мора–Кулона [63, 64], Друкера–Прагера [65] и другие. Общей их особенностью является то, что для проверки условия разрушения анализируется НДС только в рассматриваемой точке, но не в ее окрестности. Поэтому эти критерии называются локальными.

Следует отметить, что, согласно линейной теории упругости, при одинаковом нагружении двух геометрически подобных тел разного размера, их НДС равны. То есть значения компонент тензора напряжений и тензора деформаций в соответствующих точках тел совпадают, а смещения пропорциональны размеру рассматриваемого тела. Поэтому эффект размера невозможно описать, основываясь только на значениях компонент тензора напряжений или тензора деформаций в некоторой точке, не вводя в критерий разрушения параметра с размерностью длины или какого-либо другого, отличного от размерностей напряжений и деформаций [66]. В качестве такого параметра может выступать характерный размер структуры или длина зоны предразрушения, размерный параметр статистического распределения прочности Вейбулла, критический КИН, удельная энергия разрушения, градиент напряжений и т.д. Несмотря на неспособность учитывать эффект размера, локальные критерии продолжают использоваться и развиваться [67, 68]. Далее рассмотрим критерии, которые учитывают эффект размера.

2.3.2. K_{I}-критерий

Один из эффективных подходов, способных учитывать эффект размера, основывается на методах механики трещин, заложенных в работах Гриффитса [69] и Ирвина [45]. Согласно этому подходу предполагается, что в материале присутствуют дефекты — микротрещины некоторого размера. Постулируется, что разрушение материала происходит, когда выполняются условия распространения этих трещин, т. е. коэффициент интенсивности напряжений на фронте трещины K_{I} превосходит критическое значение для материала, называемое трещиностойкостью $K_{\mathrm{I}c}$:

$$K_{\mathrm{I}} \geqslant K_{\mathrm{I}c}. \tag{2.6}$$

За счет введения размерного параметра — длины трещины d, зависящей от внутренней структуры исследуемого материала, такие критерии получают возможность учитывать эффект размера. Например, в [70–72] решена задача зарождения трещины от цилиндрической полости в блоке горной породы под действием сжатия. В [73] рассмотрена задача зарождения трещины на поверхности цилиндрического отверстия в материале, нагруженном произвольными внешними напряжениями. В этой работе, в отличие от [70–72], ввиду произвольности нагрузок местоположение зародившейся трещины предполагалось неизвестным. Для его отыскания последовательно в разных точках полости строились маленькие трещины одинаковой длины d. В качестве зародышевой трещины выбиралась та, у которой КИН первой моды был максимален.

Эти критерии обладают двумя существенными недостатками. Первый заключается в необходимости перебирать все возможные положения трещин. Это делает сложным обобщение критерия на трехмерный случай. Второй недостаток заключается в необходимости строить расчетные сетки для зародышевых трещин, размеры которых существенно (иногда на порядки) уступают размерам полостей или образцов.

2.3.3. Модель зоны когезии

Основываясь на атомарной природе трещинооборазования, Баренблатт [74, 75] предположил наличие нелинейных сил, распределенных в достаточно большой области вдоль плоскости трещины вместо сил, сконцентрированных на кончике трещины. Позднее исследователи называли эту область зоной когезии (англ. *cohesive zone*), или зоной процесса трещинообразования (англ. *process zone*).

Концепция зоны когезии, предложенная примерно в одно и то же время Баренблаттом [74, 75], Леоновым и Панасюком [76], Дагдейлом [77], рассматривает разрушение не как моментальное возникновение трещины, а как постепенное явление, при котором происходит раскрытие двух виртуальных берегов трещины, сцепленных силами когезии, в окрестности реального кончика трещины (зоне когезии). Модель зоны когезии является феноменологической моделью, то есть не описывающей точно поведение материала в зоне трещинообразования, где происходит распределенное образование микротрещин и пустот [78]. В оригинальной работе Дагдейла [77] область пластичности представляется в виде узкой полоски, распространяющуюся от кончика трещины. В этой работе было получено соотношение между величиной распространения этой полоски и приложенной внешней нагрузкой.

Зона когезии сформирована двумя поверхностями, сцепленными друг с другом силами когезии. Закон когезии отвечает за взаимодействие между этими поверхностями, и часто в литературе называется законом связи напряжений-раскрытия (англ. *traction-separation law, TSL*). Определение подходящего закона связи напряжений и раскрытия для исследуемого материала является наиболее фундаментальной и сложной задачей моделирования зоны когезии. Форма этой зависимости должна быть введена исследователем [79].

Например, Твергаард и Хатчинсон [80] разработали модель, в которой *TSL* имеет форму трапеции: сперва напряжения линейно растут, пока не достигнут пикового значения, для дальнейшего раскрытия напряжения остаются постоянными. Разделение поверхностей происходит до тех пор, пока не достигнется точка образования трещины. Эта модель подходит лучше всего для моделирования ковких металлов.

В работе Нидлмана [81] модель зоны когезии используется для моделирования формирования пустот в металле, содержащем твердые включения. При начальном наличии дефекта сцепки металла и твердого включения, эти два материала начинают разделяться, и между ними образуются пустоты. В работе используется закон связи напряжений-раскрытия в виде полинома третьей степени, имеющий область роста напряжений, максимум и область уменьшения напряжений вплоть до определенной характеристической длины. Эта длина вводится из критической прочности связи поверхностей и работы по разделению единицы площади поверхности между двуми материалами. В работе показано, что разрушение может происходить как хрупким образом, так и пластическим. Это зависит от соотношения характеристической длины и радиуса твердого включения.

Недостатком такого подхода является то, что он не учитывает энергию трещинообразования. Этот недостаток был устранен в [82], где был предложен энергетический критерий для модели зоны когезии. В [83] один из вариантов этой модели был применен для моделирования отслаивания материалов по их границе раздела.

В [84] предложен закон связи напряжений-раскрытия, который определяется когезивной прочностью T_0 и энергией когезии Γ_0. Разработаны экспериментальные процедуры, позволяющие найти эти параметры материала. В [85] постулируется, что работа трещинообразования может быть условно поделена на три части: работа на разделение берегов трещины, пластическая энергия и упругая энергия.

Ортиз и Суреш [86] применили линейный закон когезии для моделирования поведения трещинообразования между зернами материала, когда напряжения увеличиваются линейно по мере раскрытия зазора между зернами до критического значения, а затем резко падали в ноль. Камачо и Ортиз [87] применили линейно спадающий закон когезии для моделирования распространения множественных трещин по произвольным траекториям, во время повреждения поверхности при ударе в хрупких материалах. Гобель и др. [88] предложили билинейную модель когезии для моделирования деламинации тонких композитных пластинок, подверженных удару небольшой скорости. Более поздние применения модели когезии в основном используют экспоненциальный [79, 89–91] и линейный/билинейный [92–94] законы. В [95] линейный вариант модели применен для решения двумерной задачи зарождения и распространения трещины в графитовом образце с пропилом.

В [96] модель зоны когезии с билинейным TSL применялась для моделирования распространения радиальной трещины гидроразрыва породы, а в [97] — для моделирования экспериментов по трехточечному изгибу образца из песчаника с остроугольным пропилом.

Когда форма TSL зафиксирована, требуется определить соответствующие параметры когезии. Ключевыми параметрами, описывающими модель зоны когезии, являются прочность когезии, определяемая пиковым значением кривой напряжений-раскрытия; энергия когезии, определяемой площадью под кривой напряжений-раскрытия; характеристическая длина, которая обычна равна величине раскрытия разделяемых поверхностей, соответствующая прочности когезии. Прочность когезии — это максимальное сопротивление материала к трещинообразованию и обычно относится к напряжениям сдвига рассматриваемого материала [98]. Энергия когезии представляет из себя диссипацию энергии, сопровождающую разделение поверхностей материала. Длина зоны когезии вводит масштаб, который позволяет получать результаты, независимые от сетки. Было признано, что параметры модели зоны когезии в общем случае не являются константами материала, и зависят от индивидуальных ситуаций при моделировании. Факторы влияния модели зоны когезии включают в себя микроструктурные и континуальные свойства материала, масштаб деформации [99], и ограничения кончика трещины [98, 100, 101]. Были проведены исследования для выявления связей между параметрами модели зоны когезии и локальной эквивалентой пластической деформацией [102], локальной трехосностью тензора напряжений [103], или сопутствующими процессами роста пустот [104].

Формулировка модели зоны когезии подразумевает наличие двух поверхностей когезии. При рассмотрении задачи разрушения, в которых изначально нет трещины такие поверхности должны быть построены исследователем вручную. В большинстве случаев месторасположение и ориентация зародышевых трещины известны заранее из-за симметричности задачи [72] либо наличия границы раздела между материалами [95, 105].

Как в предыдущей группе критериев, при применении модели зоны когезии в трехмерных задачах необходимо перебирать трещины различной ориентации и в различных точках предполагаемого разрушения.

2.3.4. d-критерий

Идея d-критерия заложена в работах [106–109], в которых рассматривалась зарождение трещины в двумерной постановке. Идея заключается в рассмотрении НДС не локально в точке тела, а в некоторой окрестности предполагаемой зоны разрушения (нелокальный критерий). Предполагается, что главным параметром, контролирующим распространение трещины, является не максимальное растягивающее напряжение σ_3, а некоторое эффективное напряжение $\tilde{\sigma}$, которое сравниваются с прочностью материала на разрыв σ_t^∞.

В работе Петерсона [109] предполагается, что $\tilde{\sigma}$ есть напряжение на некотором расстоянии d_p от кончика пропила. В работах Нейбера [106, 107] и Новожилова [108] выдвинута гипотеза, что контролирующим параметром является напряжение $\tilde{\sigma}$, осредненное по отрезку некоторой длины d, нормальному к поверхности границы:

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{d} \int\limits_0^d \sigma_\tau dn, \tag{2.7}$$

где σ_τ — растягивающее напряжение в направлении, ортогональном к поверхности. Размеры d_p и d могут быть интерпретированы как размер структуры материала или размер зоны предразрушения и являются константами материала.

Эти подходы благодаря наличию размерных параметров позволяют учесть эффект размера. Удобством применения этих подходов в трехмерных задачах является то, что для анализа требуется знать только НДС линейно-упругого тела без наличия каких-либо уже существующих в материале трещин, как, например, в K_I-критерии или в модели зоны когезии. Позднее в работах [110, 111] эти критерии названы критерием напряжений в точке (англ. *Point Stress Criterion (PSC)*) и критерием осредненных напряжений (англ. *Average Stress Criterion (ASC)*). Заметим, что в работах Нейбера [106, 107] и Петерсона [109] рассматривалась задача с закругленными пропилами, в то время как у Новожилова критерий осредненных напряжений применялся к бесконечно тонкому математическому разрезу. В работе [112–116] представлена «теория критических расстояний» (англ. *Theory of Critical Distances (TCD)*), объединившая критерии в задачах и с гладкими пропилами, и с трещинами. На примере плоской задачи растяжении о линейной трещины показано, что критерии *PSC* и *ASC* эквивалентны критерию механики хрупкого распространения трещины по моде I. Из этих задач можно получить выражения, связывающие характерные размеры d_p и d с прочностью материала на разрыв σ_t и трещиностойкостью $K_{\mathrm{I}c}$ [117]:

$$d_p = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{K_{\mathrm{I}c}}{\sigma_t}\right)^2, \quad d = \frac{2}{\pi}\left(\frac{K_{\mathrm{I}c}}{\sigma_t}\right)^2. \tag{2.8}$$

Также в «теории критических расстояний» рассматривается критерий напряжений, осредненный по некоторой площади или объёму в трехмерном случае. В [118] предложен похожий критерий, использующий вместо напряжений энергию деформаций, осредненную по некоторой области поверхности вокруг рассматриваемой точки. С помощью этого критерия решена задача трехточечного изгиба пластин с U-образными пропилами. Выбор формы области интегрирования в таких критериях является отдельными вопросом. Чаще всего используют полукруглую или полусферическую область.

Критерий Петерсона применялся в экспериментальной работе [119] по зарождению трещины гидроразрыва от скважин различного радиуса в породе, пропитанной жидкостью. В этой работе вместо обычных напряжений использовались эффективные напряжения Терцаги (максимальные растягивающие напряжения минус поровое давление).

Критерий осредненных напряжений применялся в различных двумерных задачах зарождения трещин. Например, в [72, 120] критерий (2.7) применен к задаче зарождения трещины от круглых полостей различных радиусов и получена зависимость давления разрушения от размера полости, согласующаяся в общих чертах с экспериментом.

Существует модификации d-критерия [121], заключающаяся во введении в критерий дополнительного параметра, который позволяет более гибко описать результаты экспериментов с образцами разного размера.

2.3.5. Градиентные критерии

Градиентные критерии разрушения разработаны для оценки прочности образцов с концентраторами и трещинами, в областях, где НДС материала сильно неоднородно. Эти критерии объединяют представление о разрушении образцов с гладкими поверхностями и с концентраторами напряжений.

В градиентных критериях предполагается, что локальная прочность тела на разрыв не является константой, а зависит от градиента g максимальных напряжений в окрестности рассматриваемой точки. Вид этой зависимости определяется из конкретных экспериментальных данных. Например, в [122] использовалась зависимость в виде $\sigma^* = \sigma_t(1 + Bg^n)$. В [123] показано, что только для $n = 1/2$ критерий согласуется с линейной механикой хрупкого разрушения и дает конечные значения номинальных напряжений в задачах с трещинами. Тогда зависимость эффективной прочности запишется следующим образом

$$\sigma^* = \sigma_t(1 + \sqrt{Lg}), \tag{2.9}$$

где L есть характерный размер, зависящий от свойств материала.

В [124] для модели усталостного разрушения предложена зависимость в ином виде

$$\sigma^* = \sigma_t\sqrt{1+Lg}. \tag{2.10}$$

В [125] предложен комбинированный вариант зависимостей (2.9) и (2.10) с весовым коэффициентов β

$$\sigma^* = \sigma_t(1-\beta+\sqrt{\beta^2+Lg}). \tag{2.11}$$

На простейший двумерных и трехмерных задачах с трещинами было показано, что условия разрушения, полученные по градиентным критериям, стремятся к решениям из механики хрупкого распространения трещин. Если же произведение характерного размера L на градиент напряжений g относительно мало ($\ll 1$), эффективная прочность σ^* стремится к σ_t. За счет введенного в критерий размерного параметра L, градиентный критерий позволяет учесть эффект размера.

2.4. Критерии, разработанные в диссертационной работе

В трехмерных задачах зарождения трещины в горных породах необходимо использовать критерии разрушения, которые были бы одновременно достаточно простыми с вычислительной точки зрения, но при этом учитывали бы эффект размера, так как горная порода является неоднородным материалом, и процессы разрушения зависят от зернистости материала и от масштабов задачи. Локальные критерии разрушения не способны учесть этот масштаб, а нелокальные критерии сложны в реализации и добавляют вычислительные сложности, связанные с трехмерностью задачи. В диссертационной работе для моделирования процесса разрушения горных пород разработано два трехмерных критерия разрушения. Оба критерия достаточно просты в реализации, но при этом описывают зависимость прочности материала от размера разрушаемого образца.

2.4.1. Обобщение d-критерия на трёхмерный случай

Плоский d-критерий осредненных по отрезку напряжений (2.7) обобщен на случай трехмерных задач. В двумерных задачах направление отрезка, по которому производится осреднение, определяется нормалью $\mathbf{n}$ к поверхности, а в качестве осредняемых напряжений берутся касательные к поверхности напряжения σ_τ, как показано на рисунке 2.3, *слева*. В трехмерных задачах выбор касательного направления $\boldsymbol{\tau}$ не может быть сделан однозначно, и ориентация возникающей трещины заранее неизвестна (рисунок 2.3, *справа*). Для каждого направления $\boldsymbol{\tau}$ будет определяться своя величина осреднённых напряжений $\tilde{\sigma}$ в точке $\mathbf{x}$. В работе предложено выбирать в качестве касательного направления такое направление $\boldsymbol{\tau}_0$, в котором величина осредненных напряжений максимальна:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\sigma} &= \frac{1}{d} \max_{\boldsymbol{\tau}} \int\limits_0^d \sigma_\tau dn, \\
\boldsymbol{\tau}_0 &= \arg_{\boldsymbol{\tau}} \max_{\boldsymbol{\tau}} \int\limits_0^d \sigma_\tau dn.
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

В пространственном случае нормаль $\mathbf{n}_\mathrm{f}$ зародившейся трещины совпадает с направлением $\boldsymbol{\tau}_0$ максимальных осреднённых напряжений.

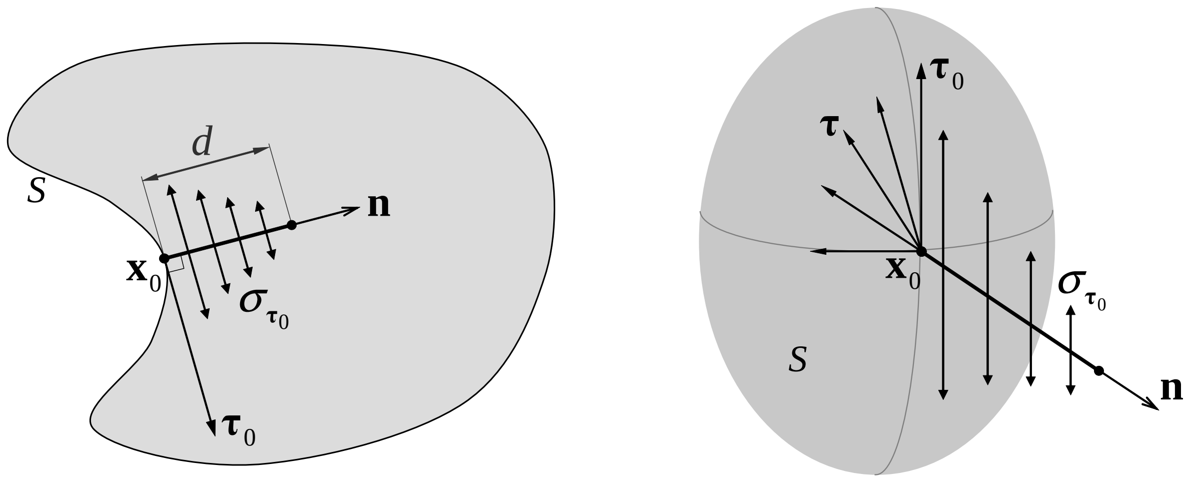


Рисунок 2.3 — Осредняемые напряжения в d-критерии в плоской (*слева*) и пространственной (*справа*) задачах.

Чтобы применить d-критерий (2.12) для практических трехмерных задач разрушения, в диссертации применяется следующая методика. Сперва с помощью прямого МГЭ вычисляются смещения и напряжения на всей границе области. Затем в каждом узле сетки строятся отрезки длины d по нормали к поверхности. На отрезках d вычисляются напряжения путем интегрирования НДС на поверхности тела. Зная распределение напряжений вдоль отрезка d, с помощью методов численного интегрирования находим осредненное напряжение $\tilde{\sigma}$ для любого касательного направления $\boldsymbol{\tau}$. Методом «золотого сечения» находим $\boldsymbol{\tau}_0$, при котором $\tilde{\sigma}$ достигают максимума.

2.4.2. *R*-критерий

Эффект размера, наблюдаемый в экспериментах, схематично показанный на рисунке 2.1, хорошо описывается эмпирической зависимостью Базанта [126–128]:

$$\sigma_N(D) = \sigma_N^\infty \left(1 + \frac{D_b}{l_p + D}\right). \tag{2.13}$$

Здесь σ_N — величина приложенной к образцу номинальной нагрузки в момент разрушения, D — характерный размер образца, l_p — характерный размер зерна неоднородного материала, σ_N^∞ — предельная номинальная нагрузка для больших тел ($D \gg l_p$), D_b есть характерный размер микротрещин на поверхности образца.

В [126] «эффект размера» понимается как зависимость номинальной нагрузки σ_N, необходимой для разрушения образца от его размера D при сохранении формы образца и остальных условий эксперимента неизменными. Формула (2.13) описывает весь диапазон размеров образца и соответствующую каждому размеру величину прочности. Отношение предельных величин прочности для маленьких и больших тел описывается соотношением

$$\eta = \frac{\lim\limits_{D\to 0} \sigma_N(D)}{\lim\limits_{D\to\infty} \sigma_N(D)} = \frac{\sigma_N^\infty \left(1 + \frac{D_b}{l_p}\right)}{\sigma_N^\infty} = 1 + \frac{D_b}{l_p}. \tag{2.14}$$

Соотношение (2.13) аппроксимирует зависимость между номинальной нагрузкой σ_N, вызывающей разрушение образца, и его размером D. Для того чтобы зависимость (2.13) можно было использовать при моделировании разрушения образцов сложной формы, в которых место разрушения заранее неизвестно, необходимо переформулировать ее в виде критерия разрушения, так, чтобы параметры нагрузки и размера понимались однозначно, не зависели от формы образца, могли быть определены в каждой точке поверхности. В диссертационной работе предложено переформулировать соотношение (2.13) в терминах напряжений в конкретной точке разрушаемого тела и некоторого локального размера, соответствующего этой точке. В качестве такого размера выбран минимальный радиус кривизны поверхности в данной точке. Предполагается, что радиус кривизны локально характеризует масштаб задачи в каждой рассматриваемой точке предполагаемого разрушения.

Модифицируем критерий максимальных растягивающих напряжений (2.5), заменив прочность на разрыв σ_t^∞ функцией $\sigma_t(R(\mathbf{x}))$, зависящей от радиуса кривизны поверхности $R(\mathbf{x})$ в рассматриваемой точке $\mathbf{x}$. Полученный в результате этих действий критерий (R-критерий) записывается как

$$\sigma_3(\mathbf{x}) \geqslant \sigma_t(R(\mathbf{x})), \tag{2.15}$$

$$\sigma_t(R(\mathbf{x})) = \sigma_t^\infty \left(1 + \frac{D_b}{l_p + R(\mathbf{x})}\right). \tag{2.16}$$

В такой формулировке вместо характерного размера тела D, который может быть выбран произвольно в зависимости от конкретной задачи, используется радиус кривизны поверхности $R(\mathbf{x})$, определяемый однозначно. Вместо номинальных нагрузок σ_N и σ_N^∞, используется прочность тела на разрыв σ_t, зависящая от масштаба задачи $R(\mathbf{x})$ в окрестности рассматриваемой точки, и хрупкая прочность на разрыв σ_t^∞, характерная для больших образцов при $R(\mathbf{x}) \gg l_p$. В этом предельном случае R-критерий трансформируется в критерий максимальных растягивающих напряжений.

Зависимость (2.16), используя соотношение (2.14), можно переписать в терминах предельной прочности для маленьких тел σ_t^0

$$\sigma_t(R(\mathbf{x})) = \frac{\sigma_t^0 + \tilde{R}(\mathbf{x})\sigma_t^\infty}{1 + \tilde{R}(\mathbf{x})}, \quad \text{где} \quad \tilde{R}(\mathbf{x}) = \frac{R(\mathbf{x})}{l_p}. \tag{2.17}$$

Параметр l_p соответствует характерному размеру, при котором происходит переход от прочности σ_t^∞ к σ_t^0. Предложенный критерий предполагает учет эффекта размера не только для серии задач с разным характерным размером, но и в пределах одной задачи, где различные подобласти обладают различной прочностью на разрыв в зависимости от характерного размера R в этой подобласти.

Например, при зарождении трещины от скважины с пропилом прочность на разрыв в области пропила выше, чем на поверхности скважины. Для численной реализации критерия в рамках модели зарождения трещины необходимо в каждом узле сетки знать кривизну поверхности $R(\mathbf{x})$, чтобы по ней вычислить эффективную локальную прочность $\sigma_t(\mathbf{x})$.

2.5. Валидация критериев разрушения

2.5.1. Разрушение блоков с цилиндрическими отверстиями

В экспериментах [72] производилось одноосное сжатие прямоугольных блоков из известняка (*Tyndall limestone*) с круговым отверстием радиуса R_{w} в центре. Материал характеризуется модулем Юнга $E = 21\,$ГПа, коэффициентом Пуассона $\nu = 0.31$ и прочностью на разрыв $\sigma_t^{\infty} = 1.5\,$МПа. Размер блоков в экспериментах был выбран достаточно большим, для того чтобы влияние границ на НДС материала в окрестности отверстия было незначительным. Правая и левая грани блока нагружались давлением p, остальные грани были свободны от напряжений (рисунок 2.4). Давление увеличивалось до момента зарож-

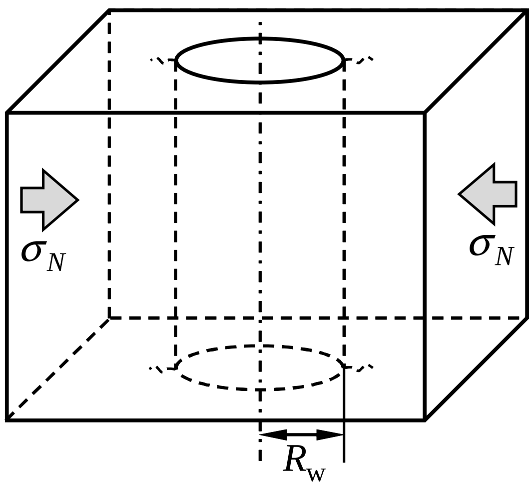


Рисунок 2.4 — Схема экспериментов по разрушению блоков с цилиндрическими отверстиями [72]. Пунктирными волнистыми линиями схематично изображены зоны зарождения трещин.

дения трещины, нормальной к поверхности отверстия. Номинальной нагрузкой σ_N считалась величина давления, при котором инициировалась трещина. Радиус отверстия R_{w} в экспериментах варьировался от $0.003\,$м до $0.031\,$м. Для каждого из радиусов было проведено несколько экспериментов, что позволило получить не только зависимость давления зарождения трещины от радиуса отверстия, демонстрирующую эффект размера $\sigma_N^{\min} = \sigma_N^{\min}(R_{\rm w})$, но и оценку величины погрешности эксперимента (рисунок 2.5).

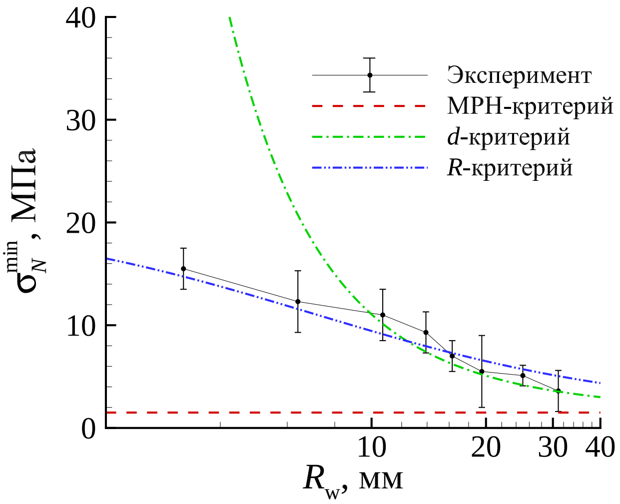


Рисунок 2.5 — Зависимость номинальной нагрузки $\sigma_N^{\min}$ от размера отверстия $R_{\rm w}$. Точки с вертикальными отрезками — эксперимент, красная штриховая — критерий МРН ($\sigma_t = 1.5$ МПа); зеленая штрих-пунктирная — d-критерий ($\sigma_t = 1.5$ МПа, $d = 13$ мм); синяя штрих-два пунктира — R-критерий ($\sigma_t^{\infty} = 1.5$ МПа, $D_b = 90$ мм, $l_p = 7$ мм).

Прочность материала на разрыв $\sigma_t^{\infty} = 1.5$ МПа была известна из работы [72]. При моделировании эксперимента с помощью d-критерия варьировался один параметр – длина отрезка осреднения d. Наилучшая аппроксимация экспериментальных данных была достигнута при значении $d = 13$ мм (рисунок 2.5).

В R-критерии варьировалось только два параметра D_b и l_p и методом наименьших квадратов подбирались таким образом, чтобы обеспечить наилучшее совпадение рассчитанной номинальной нагрузки с полученной в эксперименте: $D_b = 90$ мм, $l_p = 7$ мм (см. рисунок 2.5).

При использовании d-критерия (2.7) не удается аппроксимировать зависимость приложенной критической нагрузки от радиуса отверстия во всем диапазоне его изменения. Критерий осредненных напряжений существенно завышают прочность для отверстий малых размеров 3 мм $< R_{\rm w} <$ 10 мм. Возможной причиной этого является факт, что размер отверстий меньше d, а для малых размеров концентраторов d-критерий непригоден, так как дает завышенные значения прочности образца. Аналогичная особенность есть у градиентного критерия, описанная в [125].

R-критерий лишен этого недостатка при малых значениях размера концентратора и позволяет рассчитать давление разрушения для всего диапазона изменения радиуса отверстия.

2.5.2. Разрушение блоков с боковыми вырезами

В [129] описаны эксперименты по разрушению цементных пластин с выемками под действием одноосного растяжения. Материал характеризуется модулем Юнга $E = 20\,$ГПа, коэффициентом Пуассона ν=0.2 и прочностью на разрыв $\sigma_t^\infty = 2.75\,$МПа. Схема эксперимента и геометрические параметры разрушаемых образцов изображены на рисунке 2.6. К верхней и нижней граням образца были приложены растягивающие силы $\mathbf{F}$. Рассмотренные в эксперименте образцы имели одинаковую толщину $H = 0.1\,$м, а их характерный размер D варьировался от 0.05 до 1.6 м, что позволяло получить зависимость номинальной нагрузки (рисунок 2.7) от размера образца.

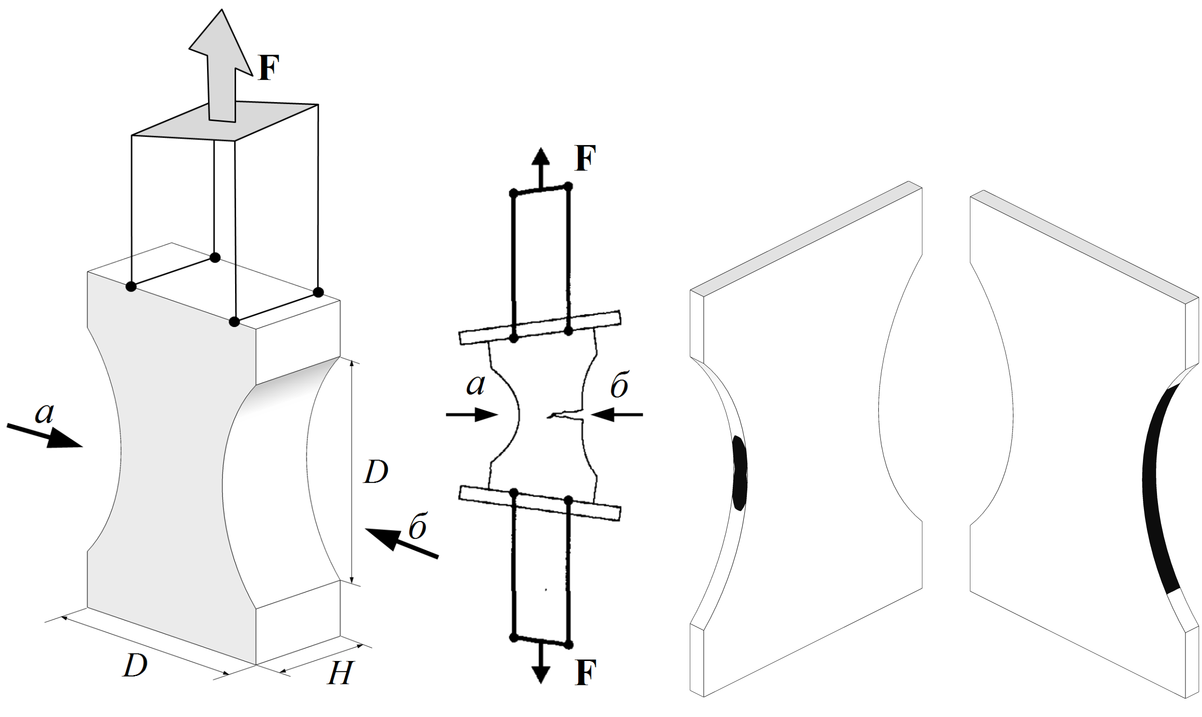


Рисунок 2.6 — Схема эксперимента по разрушению образцов с круговыми вырезами [129] при одноосном растяжении (*1*) и зоны разрушения на их поверхностях при $\varepsilon = 0.875$: *2* — вид *а*; *3* — вид *б*.

В численных экспериментах НДС рассчитывалось методом граничных элементов. Так же, как и в эксперименте, на верхней и нижней гранях задавались растягивающие напряжения $\mathbf{t} = p \cdot \mathbf{n}$, на боковых — нулевые напряжения. Ис-

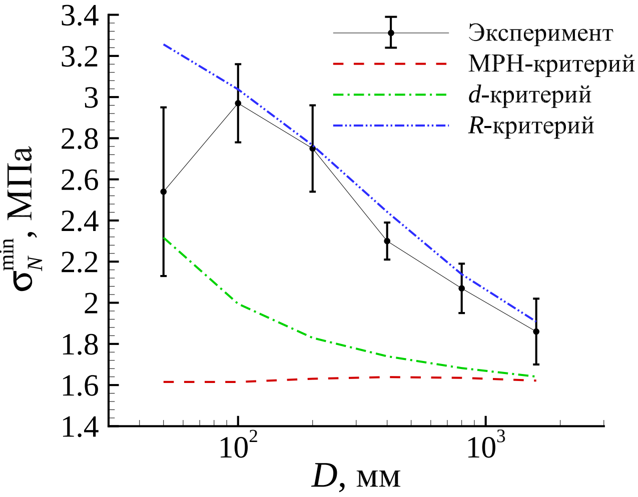


Рисунок 2.7 — Зависимость прочности образца от его размера при $\sigma_t^\infty = 2.75$ МПа. Точки с вертикальными отрезками — эксперимент; *1* – критерий МРН; *2* – d-критерий ($d = 15$ мм); *3* – R-критерий ($D_b = 240$ мм, $l_p = 200$ мм).

пользовалась сетка с 1472 элементами на поверхности образца. Так как задача упругого равновесия пластины с выемкой не имеет аналитического решения, погрешность аппроксимации была оценена методом Рунге (оценка погрешности по изменению решения на последовательности сгущающихся сеток). Она не превосходила 2 %. Так же, как в эксперименте, напряжение p увеличивалось до достижения критического значения, при котором выполнялся рассматриваемый критерий разрушения. При использовании d-критерия наилучшая аппроксимация экспериментальных данных достигалась при длине отрезка осреднения $d = 15$ мм, что сравнимо с характерным размером наименьшего образца, а дальнейшее увеличение d приводило к тому, что напряжения осреднялись по отрезку, проходящему через середину наименьшего образца. R-критерий дает наилучшее совпадение с экспериментом при параметрах $D_b = 240$ мм, $l_p = 200$ мм (см. рисунок 2.7). Как и в задаче о разрушении блоков с отверстиями (раздел 2.5.1), R-критерий лучшим образом описывает экспериментальную зависимость номинальной нагрузки от размера, чем d-критерий.

Как показано на рисунке 2.6, *1*, нагрузка в эксперименте была приложена несимметрично. Поэтому трещина в эксперименте всегда инициировалась на правой стороне (*б*). Численная модель позволяет построить зоны разрушения на обеих сторонах образца при завышенных значениях нагрузки. Согласно рисунку 2.7, минимальная нагрузка, вызывающая в эксперименте с $D = 1.6$ м образование трещины на левой стороне (*б*), равна $\sigma_N^{\min} = 1.9$ МПа.

На рисунке 2.7 представлены зависимости номинального напряжения σ_N от размера образца D, полученные численно и экспериментально [129].

Рассчитанные по R-критерию при $\varepsilon = 0.822$ зоны зарождения трещины на левой (вид *а*) и правой (вид *б*) сторонах показаны на рисунке 2.8 для $D = 0.05$ м (*вверху*) и $D = 1.6$ м (*внизу*). Для размера образца $D = 1.6$ м и $\varepsilon = 0.875$ зоны разрушения показаны на рисунке 2.6.

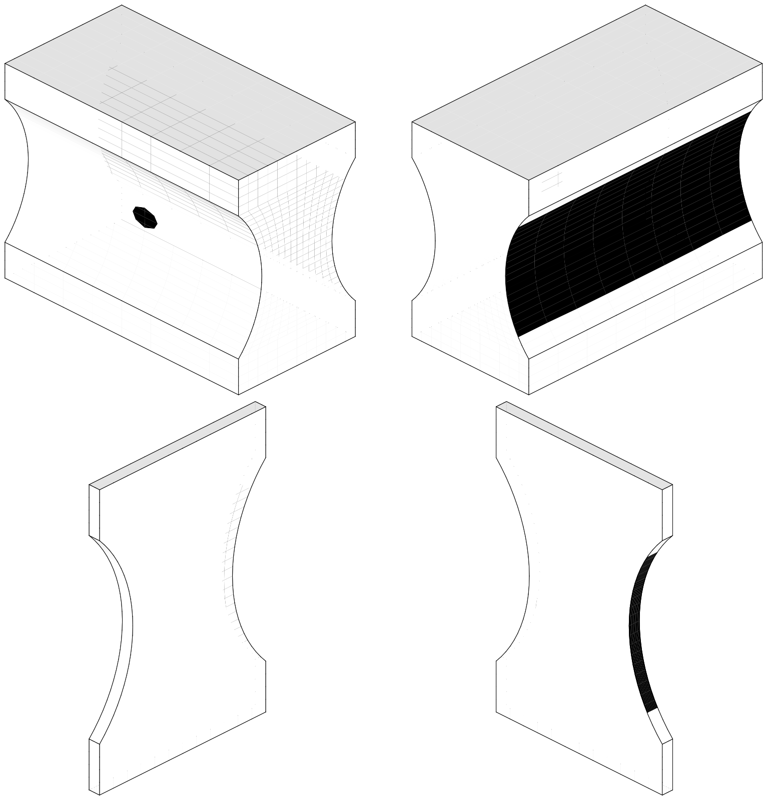


Рисунок 2.8 — Зоны разрушения для образцов с круговыми вырезами при $\varepsilon = 0.822$: $D = 0.05$ м (*вверху*); $D = 1.6$ м (*внизу*).

На рисунке 2.6 можно видеть, что нагрузка $(1+\varepsilon)\sigma_N^{\min} = 3.58$ МПа с $\varepsilon = 0.875$ приводит к зарождению трещины на стороне (*а*). Тогда как нагрузки $(1+\varepsilon)\sigma_N^{\min} = 3.48$ МПа с $\varepsilon = 0.822$ для этого недостаточно, как следует из рисунка 2.8. Таким образом, из-за несимметричности нагружения минимальная нагрузка, необходимая для зарождения трещины на стороне (*а*), в 1.875 больше, чем нагрузка, вызывающая разрушение на стороне (*б*).

Как было сказано выше, R-критерий применяется для определения зон зарождения трещин на участках поверхностей S в трехмерном пространстве, радиус кривизны которых конечен. В этом случае для каждой точки учитывается только минимальный радиус кривизны поверхности в ней. Для исследования особенностей R-критерия задача о разрушении образцов с круговым вырезом была решена в постановке, в которой участки поверхности с бесконечным радиусом кривизны также учитывались.

На рисунке 2.9 представлены зоны зарождения трещин, полученные в такой постановке. Видно, что трещины сперва зарождаются на плоских участках поверхности возле вырезов, а затем при увеличении параметра ε появляются в середине поверхности круглого выреза.

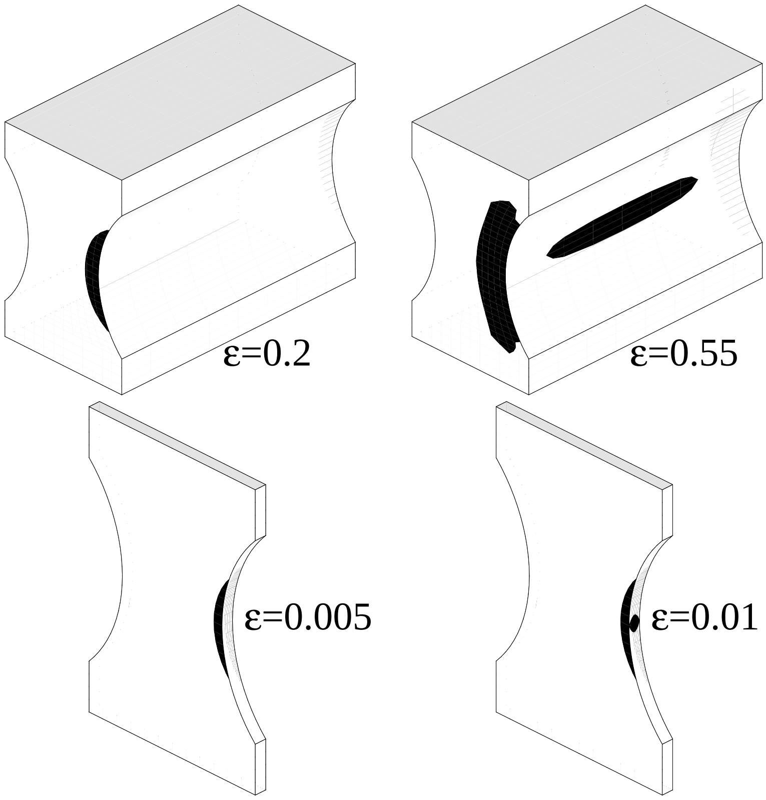


Рисунок 2.9 — Зоны разрушения для образцов с круговыми вырезами при применении R-критерия для всей поверхности S: $D = 0.05$ м (верх); $D = 1.6$ м (низ).

Вероятно, в случае большого радиуса кривизны необходимо учитывать неоднородность материала и трактовать в качестве локального характерного размера задачи линейные размеры таких неоднородностей. Идея об одновременном влиянии на эффект размера размеров образца и размеров неоднородностей высказывается, например, в экспериментальной работе [130], но применительно к описанному R-критерию требует дополнительного исследования.

Следует отметить, что ни один из описанных критериев не смог адекватно предсказать уменьшение критической нагрузки для самых маленьких образцов, наблюдаемое в эксперименте. В соответствии с концепцией эффекта размера [131], прочность образцов должна расти с уменьшением их размера, тогда как в эксперименте наблюдается ее уменьшение. Как признают сами авторы [129], возможно, эксперименты для такого размера были проведены не совсем корректно, поскольку размер неоднородностей материала был сопоставим с размером самых маленьких образцов. На основе этого рассуждения образцы наименьшего размера не учитывались при калибровке описанных критериев.

2.5.3. Зарождение трещины при разрушении скважины с пропилами

Описание эксперимента и интерпретация результатов

В [132] проведены эксперименты по зарождению и распространению трещин в блоках породы от цилиндрических полостей с пропилами. Схема эксперимента показана на рисунке 2.10. Блок с высверленной скважиной и двумя горизонтальными пропилами нагружен сжимающими напряжениями σ_v, σ_H, σ_h, приложенными к граням блока. Предполагается, что $0 \leqslant |\sigma_h| \leqslant |\sigma_H| \leqslant |\sigma_v|$, причем скважина просверлена в направлении минимальных по модулю напряжений σ_h. Внутри скважины и пропилов находится жидкость, давление которой увеличивается до момента зарождения трещины на пропиле или скважине. В отличие от рассматриваемых в параграфах 2.5.1 и 2.5.2 задач в этом эксперименте наблюдалось два сценария разрушения. В первом сценарии, при относительно малой глубине пропила, на скважине инициировалась продольная трещина, плоскость которой была ортогональна среднему напряжению σ_H. Во втором, когда величина пропила значительно больше, на пропилах инициировалась поперечная трещина, ортогональная направлению действия минимального напряжения σ_h.

Рассмотрено два из описанных в работе [132] экспериментов, обозначенных Test2 и Test3. В обоих экспериментах блоки состояли из известняка (Indiana Limestone) с прочностью на разрыв $\sigma_t^\infty = 5.2\,\text{МПа}$, модулем Юнга $E = 20\,\text{ГПа}$ и коэффициентом Пуассона, равным $\nu = 0.2$. К граням блоков были приложены сжимающие напряжения $|\sigma_h| = 15.5\,\text{МПа}$, $|\sigma_H| = 20.7\,\text{МПа}$, $|\sigma_v| = 24.1\,\text{МПа}$. Радиус скважины был равен $R_\text{w} = 12.7\,\text{мм}$. Различие заключалось в форме пропилов: в первом эксперименте было сделано два круговых пропила радиуса $d_N^1 = 9.5\,\text{мм}$ и толщиной $w_N = 3.2\,\text{мм}$, во втором было пропилено два полукруговых пропила с $d_N^2 = 25.4\,\text{мм}$ и $w_N = 4.8\,\text{мм}$.

Зарождение трещины и разрушение породы в задачах гидроразрыва явля-

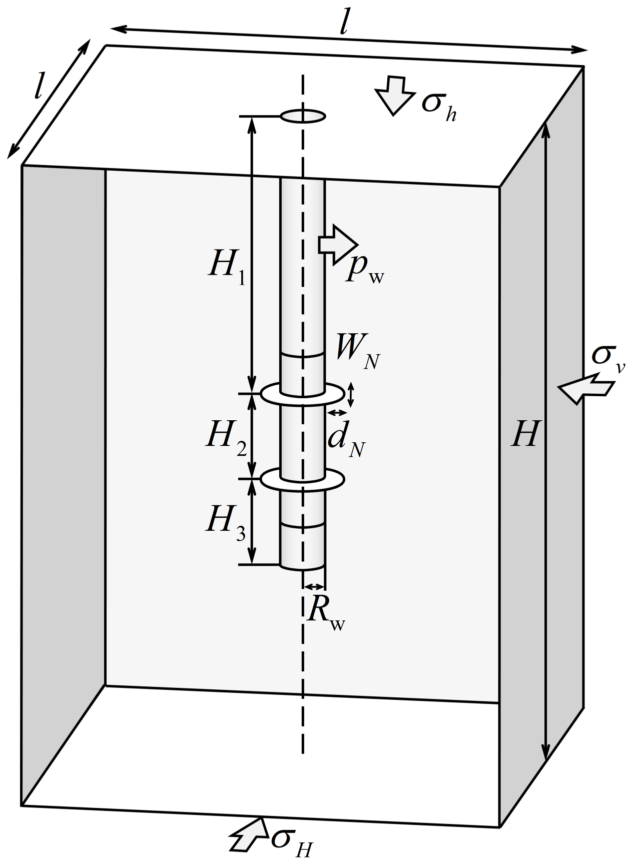


Рисунок 2.10 — Схема задачи о зарождении трещины от цилиндрической полости с пропилами.

ются предметом многих дискуссий в последнее время [133, 134]. В соответствии с ними можно выделить следующие этапы процесса трещинообразования, отмеченные также на рисунке 2.11. *Зарождение трещины* (*а*) определяется как начальная трещина в породе. Это, вообще говоря, означает разрыв породы без затекания жидкости, иногда называемый «сухой разрыв» в зародышевой трещине. *Затекание жидкости* (*б*) происходит, когда закачиваемая жидкость из скважины затекает в зародышевую трещину. Скорость затекания меньше, чем скорость закачки в скважину. *Разрушение породы* (*в*) определяется как максимальное записанное давление. Оно обычно больше, чем давление зарождения, и определяется проникновением вязкой жидкости в зародышевую трещину и эффектом сжимаемости системы – высвобождением накопленной энергии в процессе увеличения давления. *Падение давления* (*г*) происходит по мере того, как трещина растет и скорость проникновения жидкости в трещину превышает скорость закачки в скважину, давление в скважине падает.

Подобные приведенной зависимости на рисунке 2.11 распределения давления от времени наблюдаются в экспериментах [132]. В настоящей работе проведено сравнение с ними результатов моделирования процессов зарождения трещины.

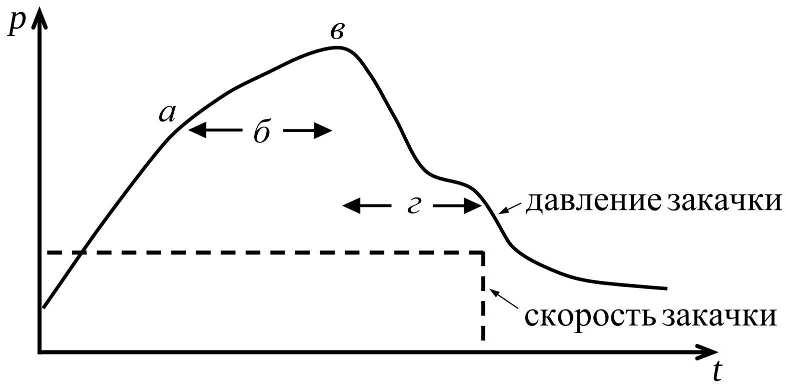


Рисунок 2.11 — Этапы трещинообразования в процессе гидроразрыва. Поясн. см. в тексте.

Скважина с пропилами малой глубины

Для моделирования разрушения блоков в Test2 использовалась сетка, показанная на рисунке 2.12, *слева*. В эксперименте Test2 при давлении $p_{\text{init}}^{\text{exp}} = 52.8\,\text{МПа}$ образовывалась продольная трещина. Момент появления трещины фиксировался путем записи акустических событий в блоке (рисунок 2.13). В момент фиксации акустического события закачка жидкости в эксперименте останавливалась. Более того, применялась откачка жидкости для обеспечения быстрого падения давления для предотвращения или снижения вероятности распространения трещины после закрытия. Окончательно момент зарождения трещины определялся по изменению скорости закачки жидкости, изменению объемов жидкости в гидравлических прессах, обеспечивающих сжатие блока (что свидетельствовало о смещении сторон блока), и серии акустических событий в точках, находящихся на поверхности скважины.

При увеличении давления в скважине и пропилах наиболее быстро растут напряжения на внешней стороне пропилов, поэтому классический критерий МРН предсказывает появление поперечной трещины. В работах [14, 132] также отмечается, что этот критерий не способен правильно предсказать давление инициации трещины.

Применение R-критерия позволило правильно предсказать ориентацию и положение зоны инициации трещины, соответствующие продольной трещине, наблюдаемой в эксперименте (рисунок 2.14), и получить минимальное давление инициации $p_{\text{init}}^{R} = 58.9\,\text{МПа}$ (см. рисунок 2.13). Расчетные значения давления

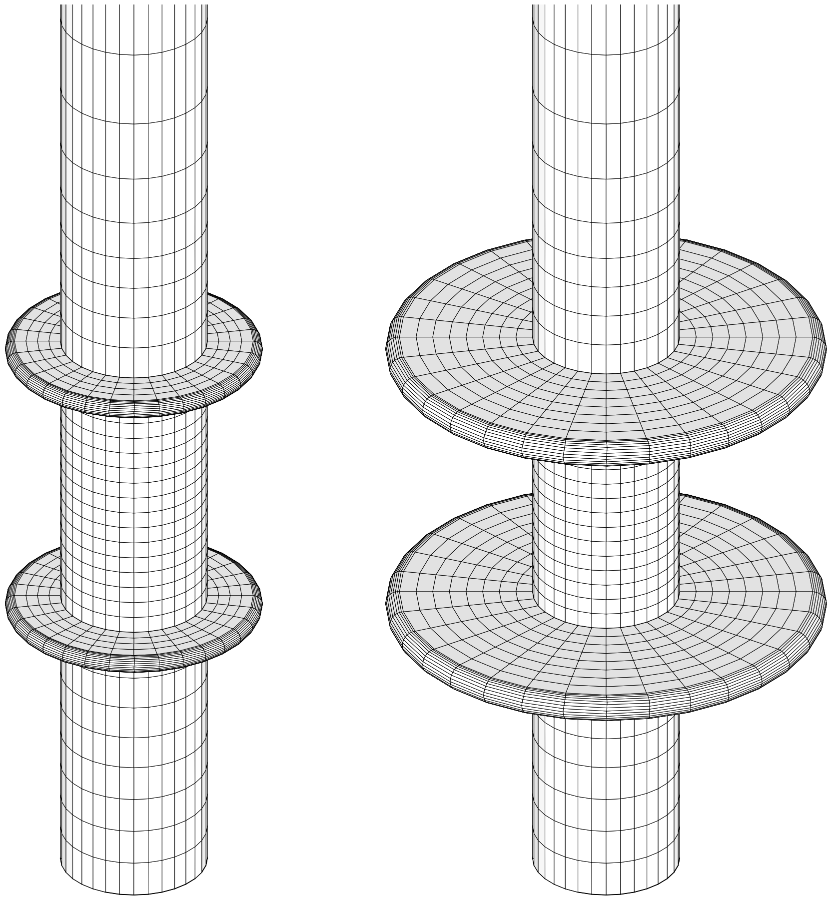


Рисунок 2.12 — Сетки МГЭ, использованные для расчета НДС при моделировании экспериментов по разрушению блоков Test2 (*слева*) и Test3 (*справа*) [132].

$p_{\text{init}}^d = 67.9$ МПа и $p_{\text{init}}^R = 58.9$ МПа получены по d- и R-критериям соответственно. Параметры R-критерия были выбраны равными $D_b = 41.4$ мм, $l_p = 0.17$ мм. Зоны зарождения, рассчитанные по формуле (2.2) для двух случаев $\varepsilon = 0.02$ и $\varepsilon = 0.1$, представлены на рисунке 2.14.

Скважина с пропилами большой глубины

Гидроразрыв блока в эксперименте Test3 численно моделировался на сетке, представленной на рисунке 2.12, *справа*. В эксперименте Test3 образовывалась поперечная трещина при минимальном давлении инициации $p_{\text{init}}^{\text{exp}} = 49.5$ МПа (рисунок 2.15). Так же как и в эксперименте, расчеты с использованием d- и R-критериев правильно предсказали образование поперечной трещины, расположенной на внешней поверхности пропила [132] Расчетные минимальные давления инициации $p_{\text{init}}^d = 50$ МПа и $p_{\text{init}}^R = 48$ МПа получены по d- и R-критериям соответственно. Параметры R-критерия были такими же, как и в эксперименте Test2. Зоны инициации, рассчитанные по (2.2) для двух случаев $\varepsilon = 0.02$ и $\varepsilon = 0.1$, представлены на рисунке 2.16. Следует отметить, что

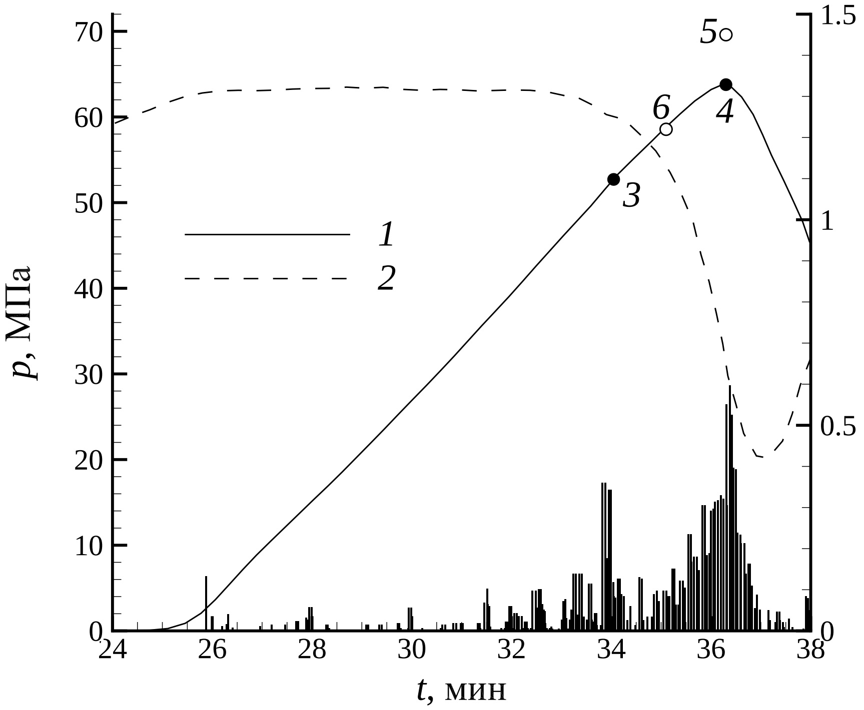


Рисунок 2.13 — Зарождение трещины и разрушение породы при гидроразрыве блока в эксперименте Test2: *1* — давление в скважине (эксперимент); *2* — объем жидкости в гидравлических прессах, направление σ_H; гистограмма – акустические события; *3* — $p_{\mathrm{init}}^{\mathrm{exp}} = 52.8$ МПа; *4* — $p_{\mathrm{break}}^{\mathrm{exp}} = 64.1$ МПа; *5* — $p_{\mathrm{init}}^{d} = 68$ МПа; *6* — $p_{\mathrm{init}}^{R} = 58.9$ МПа.

дальнейшее увеличение давления в скважине в численных экспериментах приводило к образованию дополнительных трещин: поперечных в эксперименте Test2 и продольных в эксперименте Test3.

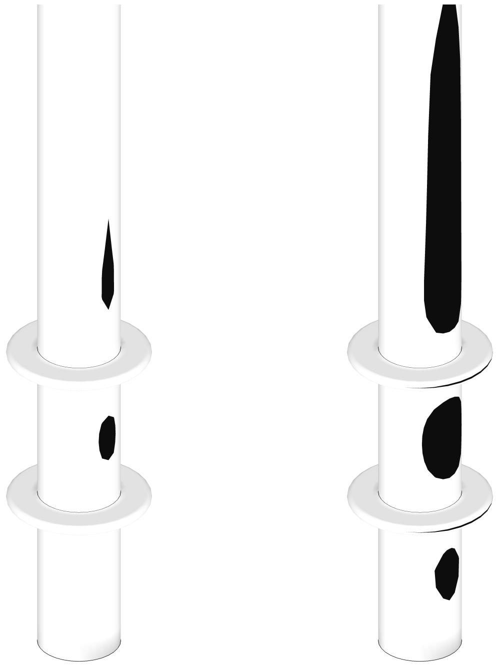


Рисунок 2.14 — Зоны зарождения трещины в эксперименте Test2: $\varepsilon = 0.02$ (*слева*); $\varepsilon = 0.1$ (*справа*).

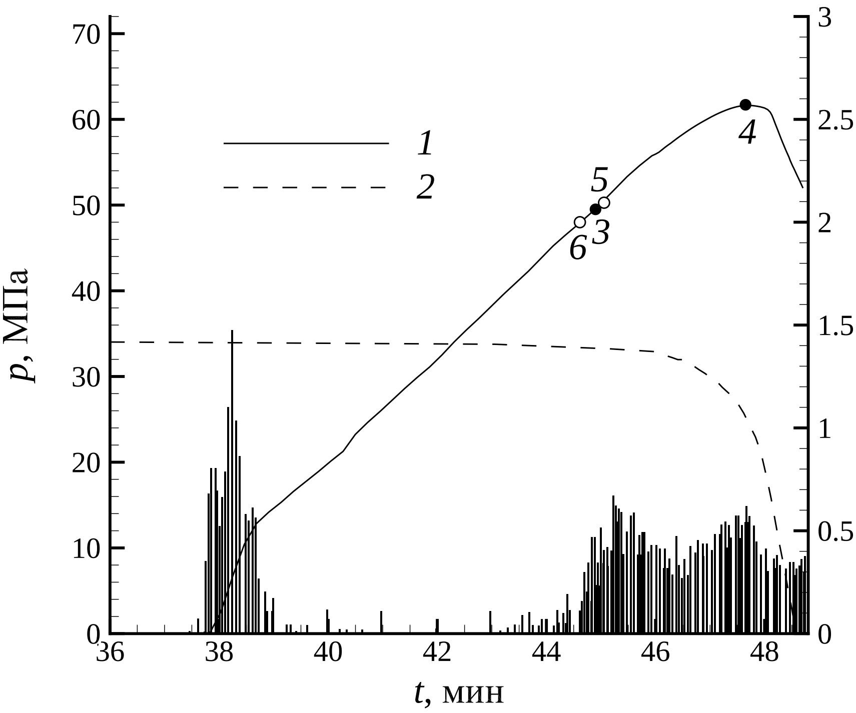


Рисунок 2.15 — Зарождение трещины и разрушение породы при гидроразрыве блока в эксперименте Test3: *1* — давление в скважине (эксперимент); *2* — объем жидкости в гидравлических прессах, направление σ_H; гистограмма — акустические события; *3* — $p_{\mathrm{init}}^{\mathrm{exp}} = 49.5$ МПа; *4* — $p_{\mathrm{break}}^{\mathrm{exp}} = 61.7$ МПа; *5* — $p_{\mathrm{init}}^{d} = 50$ МПа; *6* — $p_{\mathrm{init}}^{R} = 48$ МПа.

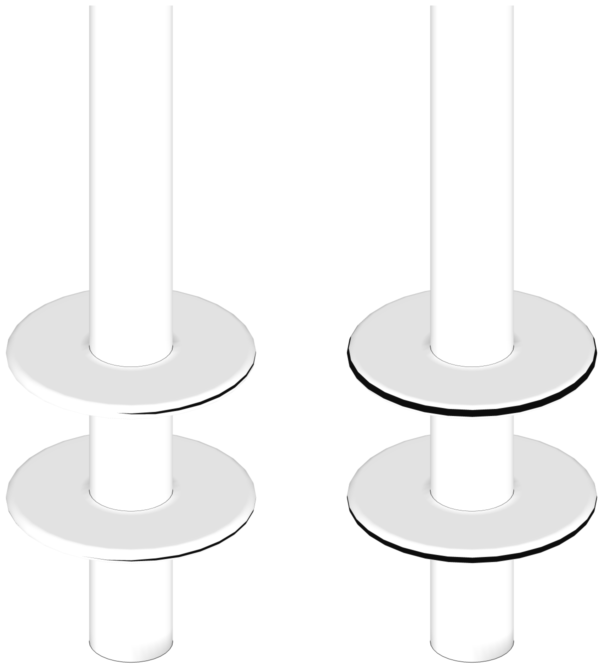


Рисунок 2.16 — Зоны инициации трещины в эксперименте Test3: $\varepsilon = 0.02$ (*слева*); $\varepsilon = 0.1$ (*справа*);

Глава 3

Результаты моделирования зарождения трещин

В этой главе рассмотрена задача зарождения трещины от перфорированной скважины в бесконечном массиве породы. Порода в естественном залегании находится под нагрузкой, характеризуемой тензором напряжений. В породе бурится скважина, которая имеет цилиндрическую форму. Скважина может идти как вертикально, так и горизонтально или под произвольным углом наклона к горизонту. Если позволяют условия, в скважину может быть помещена стальная обсадная колонна. Пространство между стальной колонной и стенками скважины бетонируется.

Затем в скважину помещают специальные аппараты, называемые перфораторами, и с их помощью создают отверстия (перфорации), обеспечивающие сообщение между пластом и скважиной. Существуют четыре различных вида перфорации: пулевая, торпедная, кумулятивная, гидропескоструйная. Кумулятивные перфораторы наиболее распространены. Основной принцип их работы заключается в направленном взрыве заряда, имеющего коническую форму, который формирует тонкую струю металла под высоким давлением. Скорость струи может достигать 8 км/с. Струя пробивает стальную колонну, формируя отверстие — перфорацию.

После перфорирования в скважину под высоким давлением закачивается жидкость гидроразрыва, которая затекает в перфорации, давит на поверхность скважины и перфорации. Под действием приложенного давления в заранее неизвестном месте образуется маленькая зародышевая трещина. Трещина, направленная вдоль ствола скважины, называется продольной, а перпендикулярная оси скважины — поперечной. Далее в зародившуюся трещину поступает жидкость гидроразрыва. Под действием закачиваемой жидкости фронт трещины распространяется вглубь породы и образуется уже развитая трещина гидроразрыва.

Зарождение трещины является важным этапом технологического процесса гидроразрыва, поэтому его изучение является актуальной задачей. Натурное исследование затруднительно, так как все процессы происходят в толще земной коры на глубине $1 \div 7$ км, а экспериментальное исследование дорогостояще. Еще одним способом изучения процесса зарождения трещины является математическое моделирование.

В настоящей главе сформулирована постановка задачи зарождения трещины от перфорированной скважины в горной породе, найдено ее решение и проведен анализ чувствительности решения задачи к основным параметрам. Для вертикальной и горизонтальной скважин исследовано влияние эффекта размера на сценарии зарождения трещин. Проведен анализ влияния всевозможных ориентаций скважины и перфорации относительно напряжений залегания на давление зарождения трещины и ее местоположение и ориентацию.

3.1. Постановка задачи зарождения трещин от скважины с перфорацией

3.1.1. Геометрическая концепция и физические параметры

Геометрическая концепция задачи показана на рисунке 3.1. Так как деформации малы, все материалы в задаче зарождения трещины считаются линейно упругими. Они описываются уравнениями упругого равновесия (1.1), так как рассматривается медленный процесс нагружения породы ещё до начала распространения трещины. Несмотря на то, что в реальности горная порода неоднородна, используется однородная модель упругости. При этом неоднородность горной породы учитывается в критериях зарождения трещины. Массив упругой породы, характеризующийся модулем Юнга E_r, коэффициентом Пуассона ν_r, прочностью на разрыв σ_t, нагружен напряжениями в естественном залегании: вертикальным σ_v, горизонтальными минимальным σ_h и максимальным σ_H.

Цилиндрическая скважина с диаметром d_{drill} пробурена в породе. Далее в скважину может быть помещена стальная обсадная колонна с внутренним диаметром d_{in} и внешним диаметром d_{out} (обсаженная скважина, рисунок 3.2,

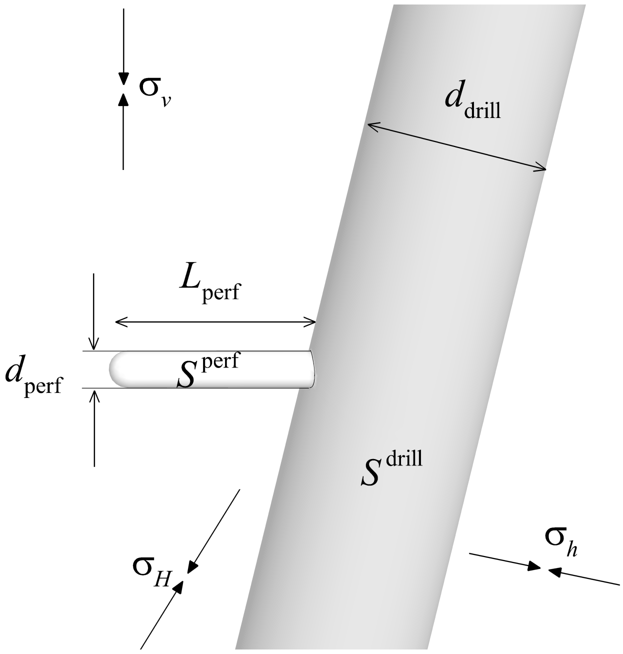


Рисунок 3.1 — Геометрическая схема скважины с перфорацией, ориентированной относительно напряжений залегания σ_h, σ_H, σ_v.

центр), либо скважина остается без обсадной колонны (необсаженная скважина, рисунок 3.2, *слева*). Стальная обсадная колонна характеризуется модулем Юнга E_s и коэффициентом Пуассона ν_s. В случае обсаженной скважины пространство между стенками скважины и стальной колонной бетонируется. Бетон характеризуется модулем Юнга E_c и коэффициентом Пуассона ν_c.

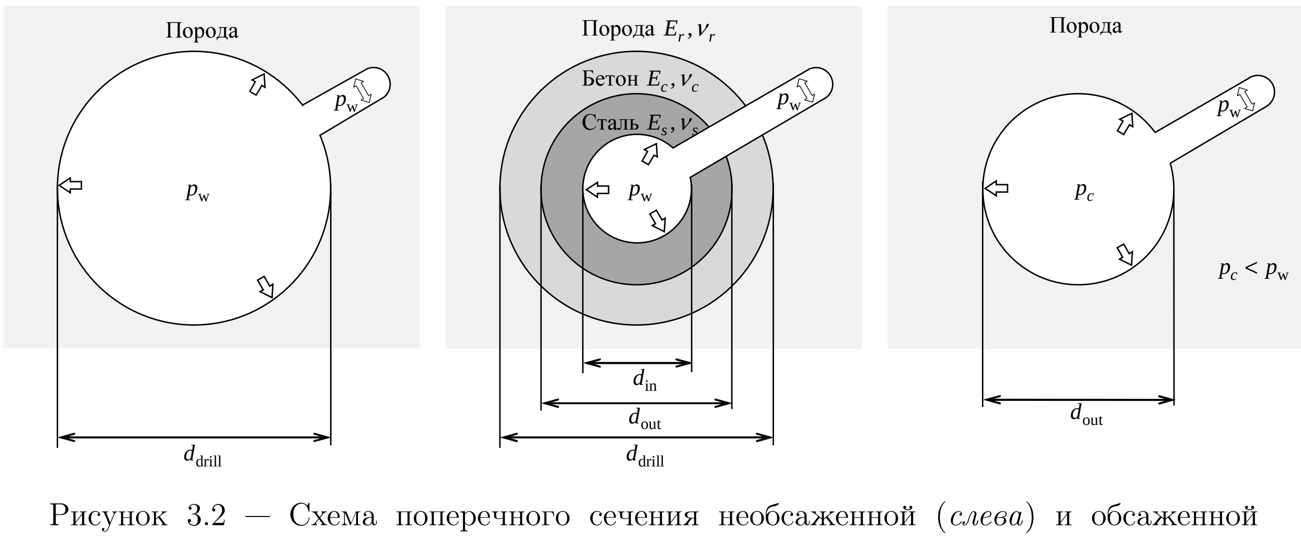


Рисунок 3.2 — Схема поперечного сечения необсаженной (*слева*) и обсаженной (*центр*) скважин, а также упрощенная постановка для обсаженной скважины (*справа*).

Перфорация с диаметром d_{perf} и глубиной L_{perf} расположена ортогонально скважине (см. рисунок 3.2). Перфорация моделируется цилиндрической полостью, конец которой затуплен на полусферу. Так как перфорирование обычно производится кумулятивным зарядом либо гидропескоструйным аппаратом, реальная форма перфорации отличается от цилиндра с закруглением на конце (см. рисунок 3.3). Однако в разделе 3.2.3 показано, что форма перфорации слабо влияет на процесс зарождения трещины, поэтому такая идеализация представляется допустимой.

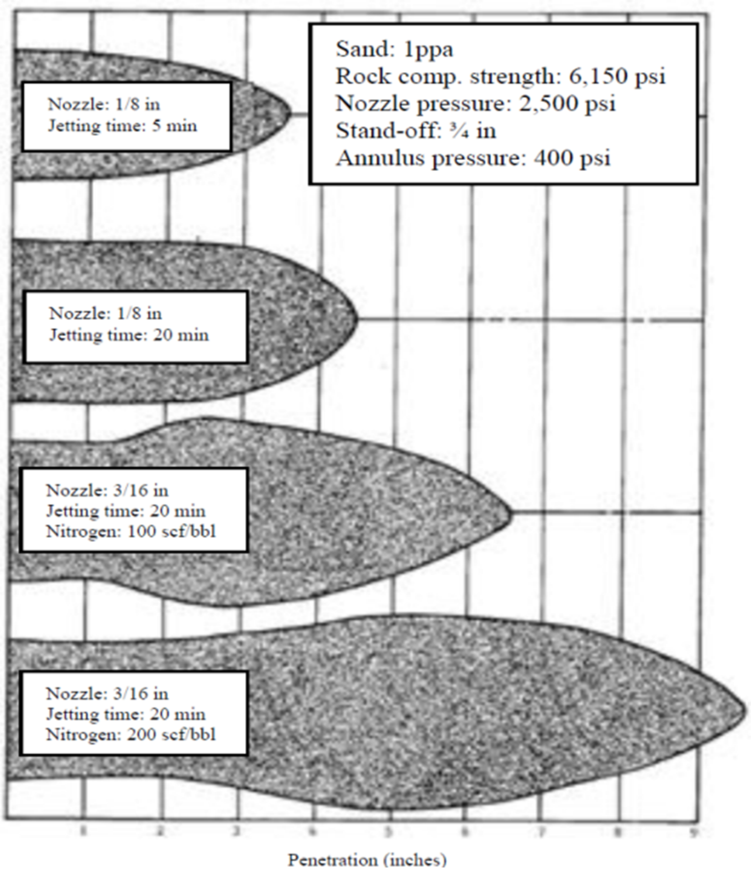


Рисунок 3.3 — Форма реальных перфораций, произведенных с помощью гидропескоструйного аппарата (взято из [135]).

В скважину закачивается жидкость гидроразрыва и нагнетается давление p_{w} до тех пор, пока оно не достигнет давления зарождения трещины p_{init} согласно выбранному критерию разрушения (2.4). В случае необсаженной скважины давление p_{w} действует на полость скважины и перфорации. В случае обсаженной скважины давление p_{w} приложено к стальной колонне и перфорации. При этом напряжения на границах между стальной колонной и бетоном, бетоном и породой неизвестны. Граничные условия в случае обсаженной скважины подробнее рассмотрены в следующем разделе.

3.1.2. Учёт влияния обсадной колонны

Для расчета НДС вокруг скважины необходимо учитывать деформации породы, цементной обсадной колонны и стальной колонны. Одним из способов решения такой задачи является использование многозонного МГЭ как, например, в [2]. Однако, многозонный МГЭ очень требователен к вычислительным ресурсам и слабо применим в случае необходимости проведения серийных расчетов.

В диссертации предложен приближенный способ учета влияния обсадной колонны. Считается, что упругие свойства бетона совпадают со свойствами породы ($E_c = E_r$, $\nu_c = \nu_r$), следовательно граница между этими материалами не рассматривается. При расчете НДС стальная обсадная колонна не рассматривается, а граница между стальной колонной и бетоном нагружается напряжениями, ослабленными действием стальной колонны, рассчитанными с помощью формул на основе решения плоской задачи упругости.

На поверхности перфорации S^{perf} задаётся полное давление жидкости p_{w}:

$$p(\mathbf{x}) = p_{\text{w}}, \quad \mathbf{x} \in S^{\text{perf}}, \tag{3.1}$$

на поверхности скважины S^{w} — ослабленное давление, рассчитанное по следующей формуле:

$$p(\mathbf{x}) = p_0 + k(p_{\text{w}} - p_0) = p_c, \quad \mathbf{x} \in S^{\text{w}}. \tag{3.2}$$

Здесь p_0 — давление на внутреннюю поверхность обсадной колонны в конце цементирования. Стальная колонна за счет высокого модуля Юнга ослабляет давление, передаваемое в породу, а k — коэффициент ослабления давления. Давление в обсадной колонне в конце цементирования может быть оценено как гидростатическое давление жидкого бетона.

$$p_0 = \rho_c g h, \tag{3.3}$$

где ρ_c — плотность бетона, g — ускорение свободного падения, h — глубина залегания.

Коэффициент ослабления k рассчитывается аналитически на основе решения плоской задачи об обсаженной неперфорированной скважине, нагруженной давлением, показанной на рисунке 3.4. Стальная колонна внутреннего ра-

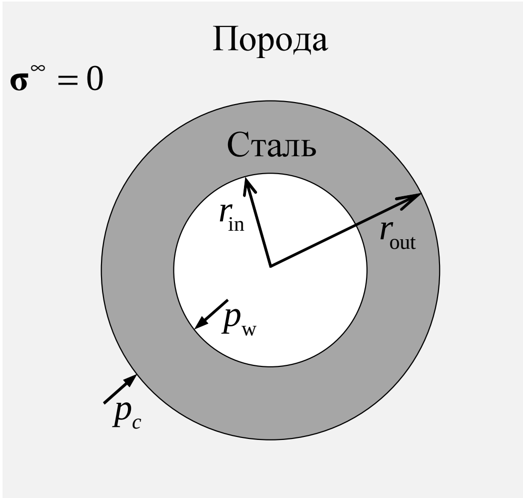


Рисунок 3.4 — Схема вспомогательной плоской задачи для расчета коэффициента ослабления давления.

диуса r_{in} и внешнего радиуса r_{out} с параметрами μ_c, λ_c расположена в отверстии в бесконечной породе с параметрами μ_r, λ_r. Колонна изнутри нагружена давлением p_{w}, порода не нагружена на бесконечности. Требуется найти коэффициент ослабления давления, определяемый как $k = p_c/p_{\text{w}}$, где p_{w} – давление на границе колонны и породы. Решение этой задачи может быть выведено из решения задачи Ламэ о составной трубе (см., например, [22]) или найдено в [136] непосредственно для этой задачи:

$$\begin{gathered} k = \frac{p_c}{p_{\text{w}}} = \frac{A}{B+C}, \quad A = \frac{(r_{\text{in}}^2 + r_{\text{in}}^2)\mu_c + r_{\text{in}}^2\lambda_c}{(r_{\text{out}}^2 - r_{\text{in}}^2)\mu_c(\mu_c+\lambda_c)}, \\ B = \frac{(r_{\text{in}}^2 + r_{\text{out}}^2)\mu_c + r_{\text{in}}^2\lambda_c}{(r_{\text{out}}^2 - r_{\text{in}}^2)\mu_c(\mu_c+\lambda_c)}, \quad C = \frac{1}{\mu_r}. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Используемые при моделировании зарождения трещины уравнения упругого равновесия не включают в себя учет пористости породы и пластового давления, однако используемая модель может применяться и для описания пористых сред (линейно-упругих, но неоднородных) в следующих случаях:

- если поровая жидкость в рассматриваемой области находится при постоянном давлении, и это давление не изменяется во времени;
- если движение поровой жидкости отсутствует или пренебрежимо мало в рассматриваемый промежуток времени.

3.1.3. Ориентация скважины и перфорации

Ориентация скважины задается в системе координат, связанной с направлениями действия главных напряжений в естественном залегании: полярным углом θ, откладываемым от вертикали, и азимутальным углом ϕ, откладываемым от направления действия минимальных напряжений, как показано на рисунке 3.5. Максимальные горизонтальные напряжения равны σ_h, максимальные горизонтальные — σ_H, а вертикальные — σ_v.

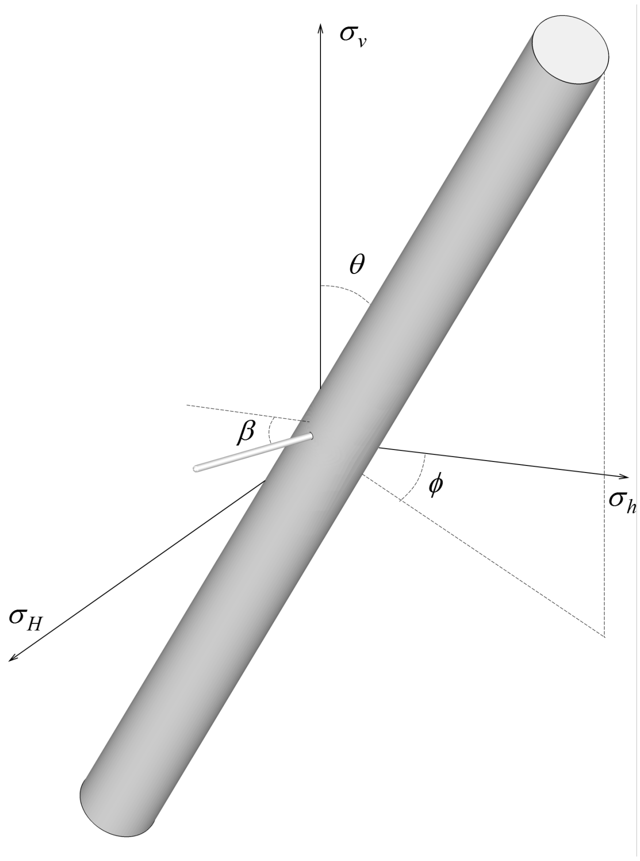


Рисунок 3.5 — Ориентация скважины и перфорации по отношению к главным напряжениям в естественном залегании.

При гидроразрыве трещина всегда стремится распространяться в плоскости поперек минимальных напряжений залегания σ_h, так как такое распространение требует минимальных энергетических затрат. Эта плоскость называется предпочтительной плоскостью трещины (ППТ). Однако трещина может зародиться в другой плоскости из-за влияния скважины и перфорации на НДС породы в окрестности перфорации, и в начальной стадии гидроразрыва распространяться в направлении, отличном от ППТ.

Перфорация находится в плоскости, ортогональной скважине, которую назовем плоскостью перфорации (ПП). Направление перфорирования определяется углом β. Определение нулевого (отсчетного) угла перфорирования различно в зависимости от того, совпадает ли направление скважины с направлением действия минимальных горизонтальных напряжений σ_h или нет.

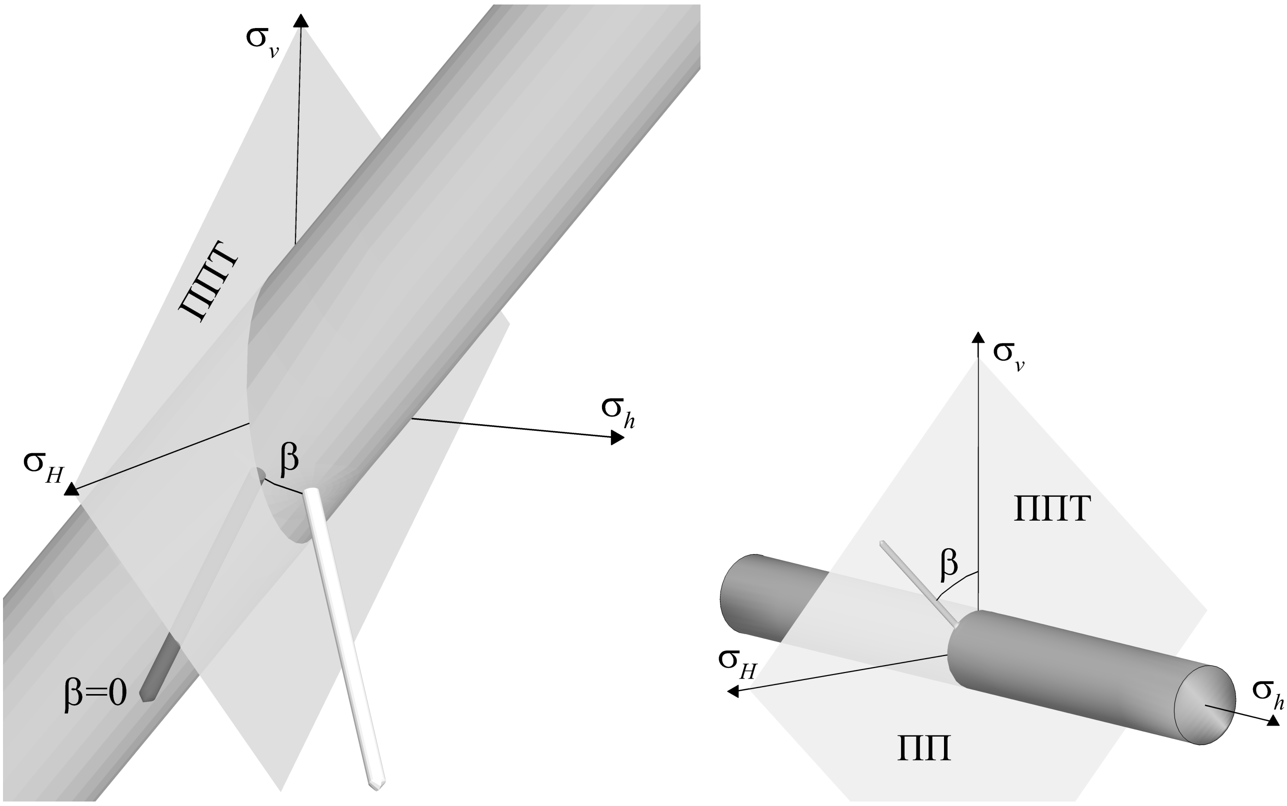


Рисунок 3.6 — Определение угла перфорации в общем случае (слева) и в частном случае совпадения ППТ и ПП (справа).

Если ось скважины не совпадает с направлением действия напряжений σ_h (рисунок 3.6, *слева*), то существует пересечение ППТ и ПП. Перфорацию, параллельную линии этого пересечения, назовем «идеальной» перфорацией, так как можно ожидать, что такая перфорация приведет к зарождению трещины, лежащей в ППТ, что потребует минимального p_{init}. Углом перфорации назовем угол, на который необходимо повернуть перфорацию, чтобы она стала «идеальной». Отметим, что в силу симметрии задачи существует два направления «идеальной» перфорации, причем любое из них может быть выбрано в качестве основного без изменения НДС породы и результатов расчетов. Если скважина параллельна направлению действия минимальных напряжений σ_h, то ППТ и ПП совпадают, все перфорации могут быть названы «идеальными» с точки зрения предыдущего метода определения ориентации. В этом частном случае переопределим угол перфорации как угол между вертикальным направлением σ_v и направлением перфорации (см. рисунок 3.6, *справа*).

Для ускорения расчетов НДС всевозможных конфигураций, определяемых углами θ, ϕ, β, разработана методика, позволяющая проводить серийные расчеты, используя линейную комбинацию решений базовых подзадач упругости и не пересчитывать НДС для каждого положения скважины и перфорации. Описание этого метода приведено в разделе 2.2.

3.2. Анализ чувствительности решения задачи к основным параметрам

Все расчеты в этом разделе проведены для случая необсаженной скважины, то есть скважина и перфорация нагружаются одним и тем же давлением. Скважина моделируется цилиндрической полостью высотой 10 м и диаметром $d_{\mathrm{w}} = 10$ см. Выбранной длины скважины достаточно, чтобы считать скважину бесконечной, так как влияние торцов скважины быстро спадает с расстоянием, согласно принципу Сен-Венана. Длина перфорации равна $L_p = 10$ см, а диаметр — $D_p = 2$ см. Порода характеризуется упругими параметрами $E = 20$ ГПа, $\nu = 0.27$, $\sigma_c = 3.5$ МПа, что соответствует параметрам Приобского нефтяного месторождения, и сжата на бесконечности напряжениями: $\sigma_v = 69$ МПа, $\sigma_H = 57.5$ МПа, $\sigma_h = 46$ МПа, характерными для глубины залегания около 2000 метров.

В этом разделе рассмотрены два наиболее распространенных случая ориентации скважины: вертикальной скважине ($\theta = 0°$) и горизонтальной скважине, ориентированной в направлении минимальных напряжений σ_h ($\theta = 90°$, $\phi = 0°$).

Приведенное исследование проведено в рамках предположений о хрупком разрушении породы с использованием критерия MPH и без учета эффекта размера.

3.2.1. Диаметр перфорации

Покажем влияние размеров перфорации на процесс зарождения трещины. Форма, длина и диаметр перфорационных каналов могут варьироваться в зависимости от деталей технологии перфорирования, поэтому их влияние на разрушение и зарождение трещины должно быть исследовано. Рисунки 3.7–3.9

показывают зависимость p_{init} и положения зон разрушения от диаметра перфорации при его варьировании в интервале от 1 до 4 см (0.4–1.6 дюйма). На основе полученных результатов можно сделать вывод, что увеличение диаметра перфорации приводит к монотонному увеличению p_{init} (см. рисунок 3.7, *слева*). В случае горизонтальной трещины соответствующее изменение p_{init} не монотонно и имеет довольно сложную форму (см. рисунок 3.7, *справа*). Однако при варьи-

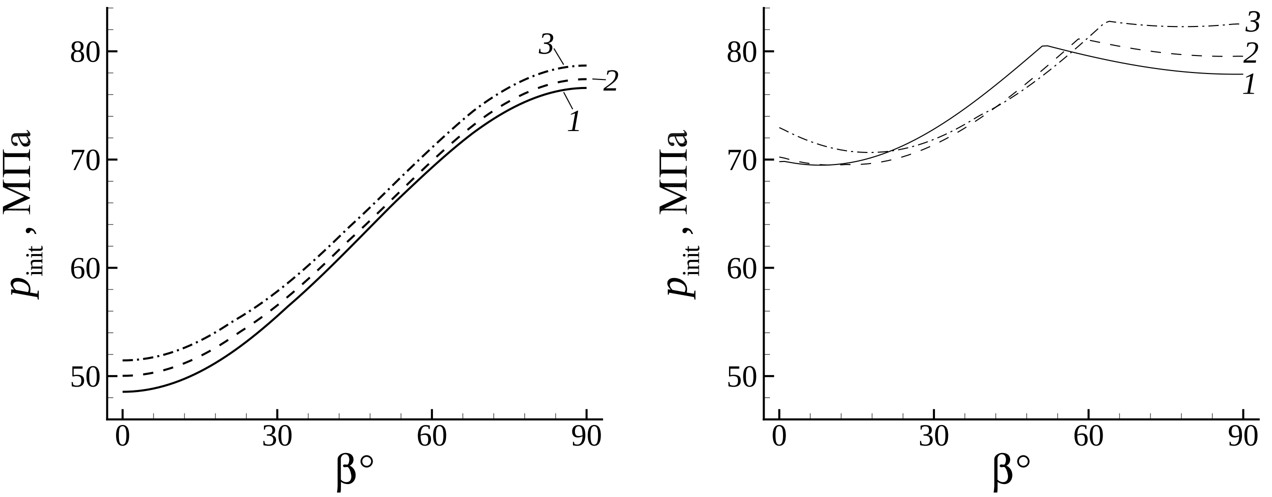


Рисунок 3.7 — Зависимость p_{init} от угла перфорирования при различных диаметрах перфорации: *1* — $d_{\text{perf}} = 1$ см; *2* — $d_{\text{perf}} = 2$ см; *3* — $d_{\text{perf}} = 4$ см (*слева* — вертикальная скважина, *справа* — горизонтальная скважина).

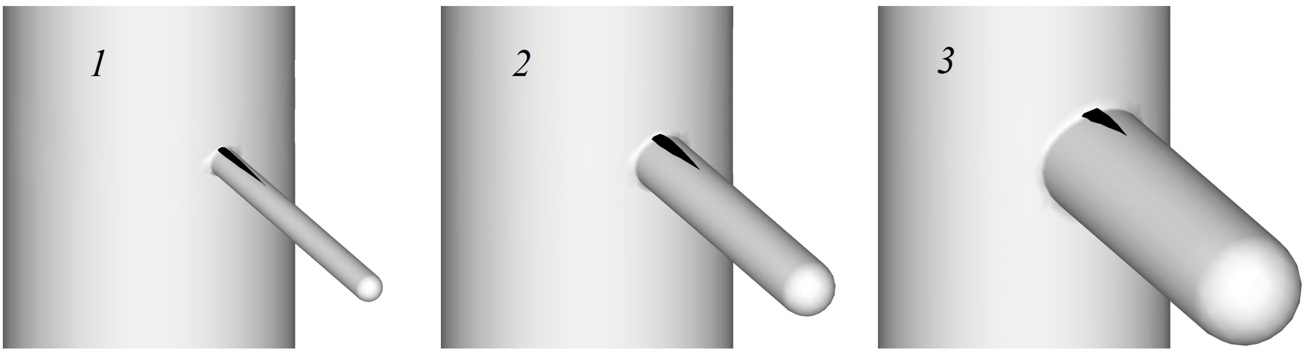


Рисунок 3.8 — Расположение зон разрушения для различных диаметров перфорации d_{perf} (вертикальная скважина, $\beta = 30°$): *1* — $d_{\text{perf}} = 1$ см, $p_{\text{init}} = 76.6$ МПа; *2* — $d_{\text{perf}} = 2$ см, $p_{\text{init}} = 77.4$ МПа; *3* — $d_{\text{perf}} = 4$ см, $p_{\text{init}} = 78.7$ МПа.

ровании диаметра перфорации в рассматриваемом интервале его влияние на p_{init} составляет менее 5–6 %, что значительно меньше влияния главных напряжений в естественном залегании и направлении перфорации. Таким образом, можно сделать вывод, что влияние диаметра перфорации на p_{init} и ориентацию трещины незначительно (см. рисунок 3.8, 3.9).

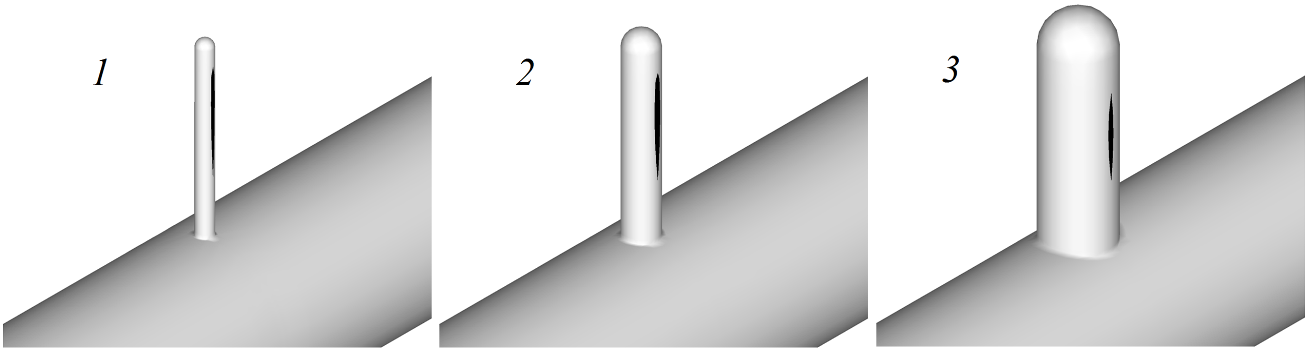


Рисунок 3.9 — Расположение зон разрушения для различных диаметров перфорации d_{perf} (горизонтальная скважина, $\beta = 90°$): *1* — $d_{\text{perf}} = 1$ см, $p_{\text{init}} = 78.5$ МПа; *2* — $d_{\text{perf}} = 2$ см, $p_{\text{init}} = 79.9$ МПа; *3* — $d_{\text{perf}} = 4$ см, $p_{\text{init}} = 82.9$ МПа.

3.2.2. Длина перфорации

Влияние длины перфорации на p_{init} и расположение зон разрушения показаны на рисунках 3.10–3.12. Длина перфорации варьировалась от 10 до 50 см. В случае вертикальной скважины длина перфорации не влияет на p_{init} (см. рисунок 3.10, *слева*), так как трещина всегда зарождается в окрестности стыка скважины и перфорации (см. рисунок 3.11). То же отсутствие влияния на-

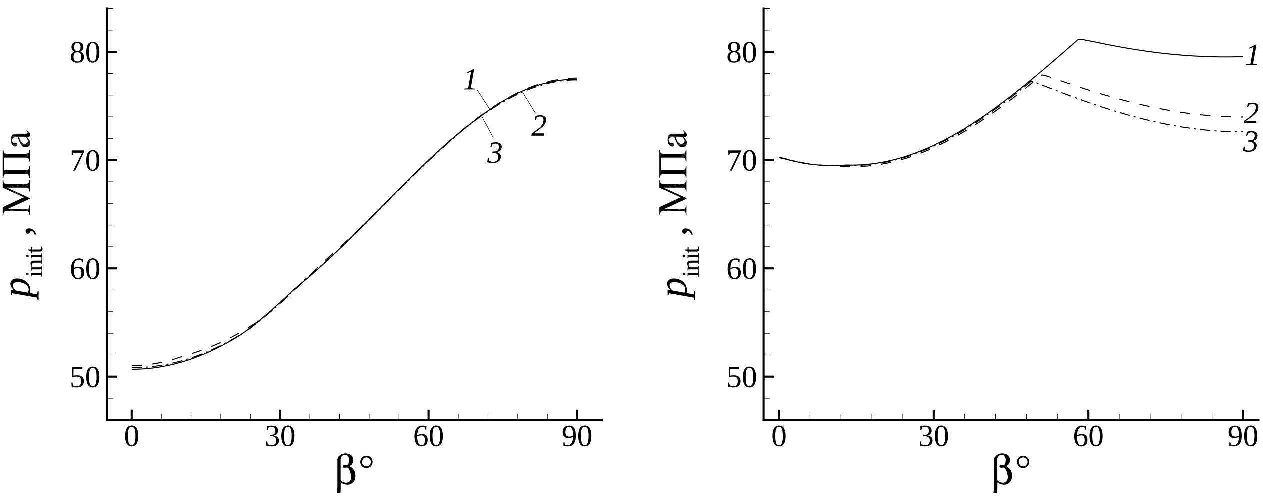


Рисунок 3.10 — Зависимость p_{init} от угла перфорирования при различных длинах перфорации L_{perf}, см: *1* — 10, *2* — 25, *3* — 50 (*слева* — вертикальная скважина, *справа* — горизонтальная скважина).

блюдается при малых углах перфорации ($\beta < 50°$) в случае горизонтальной скважины, когда трещина зарождается на границе скважины и перфорации (см. рисунок 3.10, *справа*). Но при больших углах перфорации 50–90° разрушение происходит в окрестности кончика перфорации (см. рисунок 3.12). Дополнительные напряжения, вызванные давлением в скважине, препятствуют

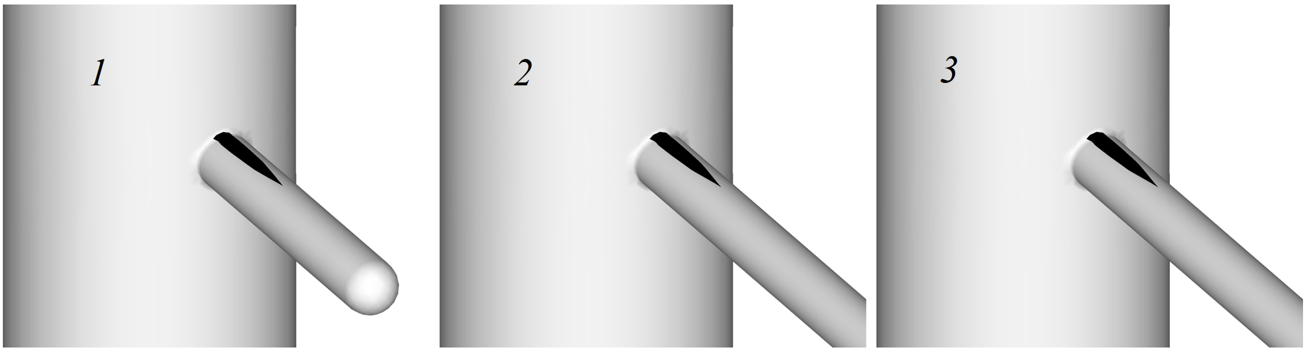


Рисунок 3.11 — Расположение зон разрушения для различных длин перфорации L_{perf} (вертикальная скважина, $\beta = 75°$): *1* — $L_{\text{perf}} = 10$ см, $p_{\text{init}} = 75.4$ МПа; *2* — $L_{\text{perf}} = 25$ см, $p_{\text{init}} = 75.4$ МПа; *3* — $L_{\text{perf}} = 50$ см, $p_{\text{init}} = 75.4$ МПа.

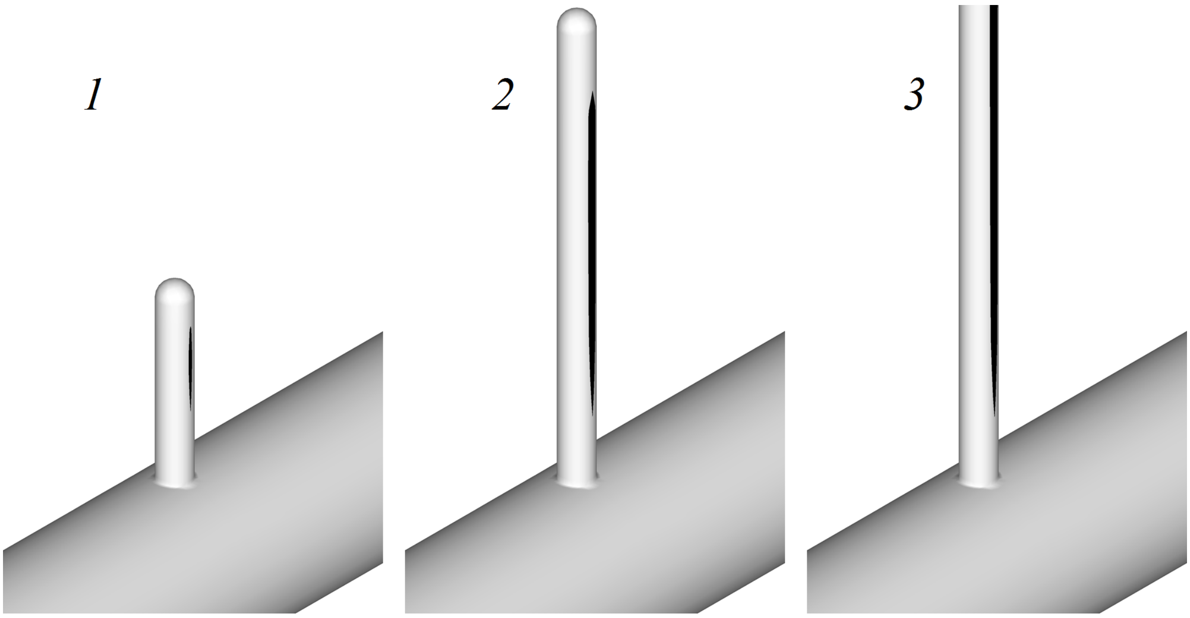


Рисунок 3.12 — Расположение зон разрушения для различных длин перфорации L_{perf} (горизонтальная скважина, $\beta = 90°$): *1* — $L_{\text{perf}} = 10$ см, $p_{\text{init}} = 79.9$ МПа; *2* — $L_{\text{perf}} = 25$ см, $p_{\text{init}} = 74.7$ МПа; *3* — $L_{\text{perf}} = 50$ см, $p_{\text{init}} = 72.9$ МПа.

разрушению перфорации у скважины, поэтому трещина зарождается на удалении от скважины. Поэтому при больших углах перфорирования увеличение длины перфорации ведет к уменьшению p_{init}. Однако, как и в предыдущем случае, эффект не превосходит 15 % для рассматриваемых параметров.

Хорошо видно, что перфорация главным образом влияет на давление зарождения, форма зоны разрушения меняется незначительно. При заданных условиях давление зарождения достаточно быстро (примерно начиная с длины 25 см) выходит на свою асимптоту при увеличении длины и далее не оказывает существенного влияния на процесс.

3.2.3. Форма перфорации

Отдельно было проверено влияние формы и длины перфорации на давление зарождения и зоны разрушения. Перфорация по своей форме представляет собой, как правило, относительно гладкую вытянутую поверхность [137] (см. рисунок 3.3), при этом длина перфорации L зачастую значительно больше ее диаметра d. Поэтому было предложено сравнить решение задачи зарождения для двух различных форм перфорации: цилиндрической и конической. Диаметр цилиндрической перфорации $d_p = 2\,\text{см}$, как и в предыдущих расчетах. В случае конической перфорации основание конуса $d_1 = 3\,\text{см}$, диаметр полусферы $d_1 = 1\,\text{см}$. Длина перфорации в обоих случаях $L = 10\,\text{см}$.

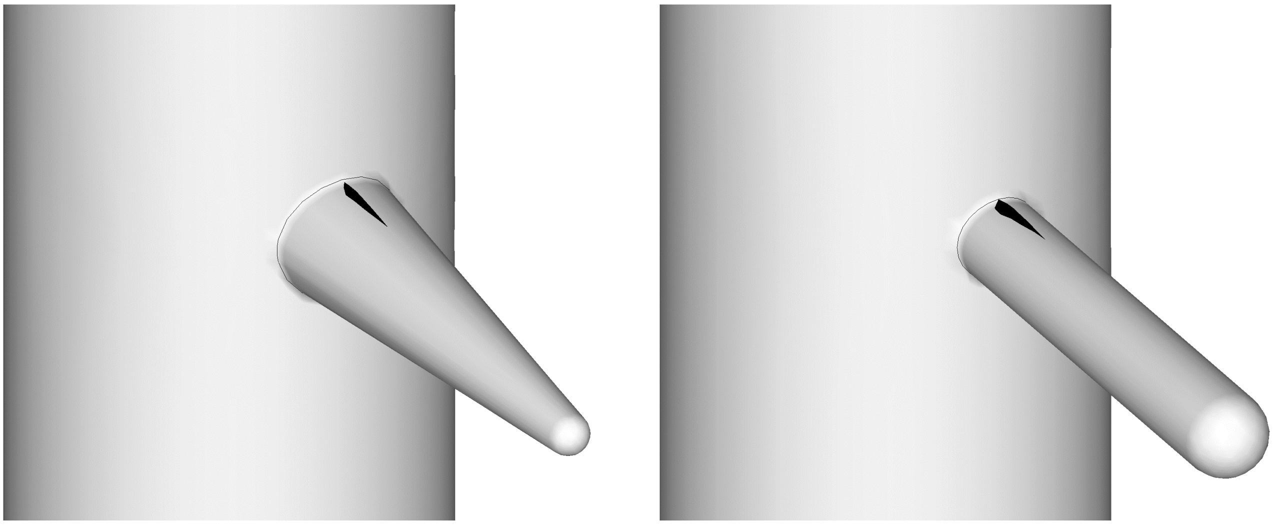


Рисунок 3.13 — Расположение зон разрушения на конической (*слева*) и цилиндрической (*справа*) перфорациях в случае вертикальной скважины при $\beta = 30°$.

Рассчитанные зоны разрушения показаны на рисунке 3.13. Месторасположения зон разрушения практически совпадают, а давления зарождения p_{init} отличаются незначительно: 58.6 МПа для конической и 56.5 МПа для цилиндрической. Следовательно, форма перфорационной полости практически не влияет на процесс зарождения трещины гидроразрыва.

3.2.4. Влияние среднего напряжения залегания на процесс зарождения трещины

Рассмотрим влияние среднего напряжения σ_H на процесс зарождения трещины. Сперва скажем несколько слов об актуальности такого исследования. Разработано множество способов определения вертикального и минимального горизонтального напряжений в реальном пласте. Хотя на практике эти два значения не всегда известны при проведении гидроразрыва пласта, их измерение проводится намного чаще по сравнению с измерением среднего напряжения (максимального горизонтального). Покажем влияние именно этого напряже-

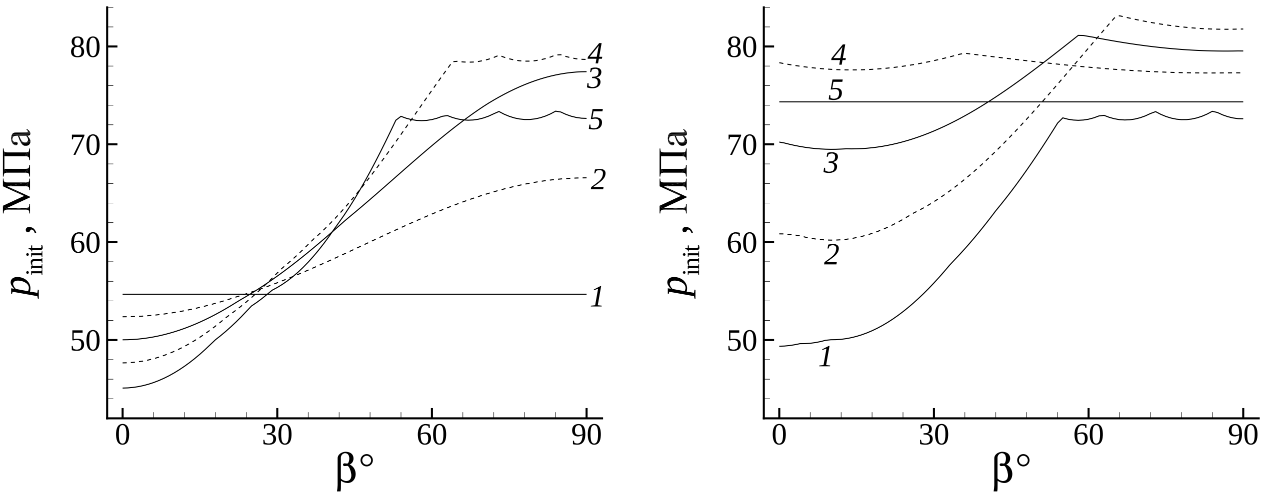


Рисунок 3.14 — Зависимости p_{init} от угла перфорации для различных значений среднего главного напряжения σ_H, МПа: 46 (*1*), 51.75 (*2*), 57.5 (*3*), 63.25 (*4*), 69 (*5*) (*слева* – вертикальная скважина, *справа* – горизонтальная скважина).

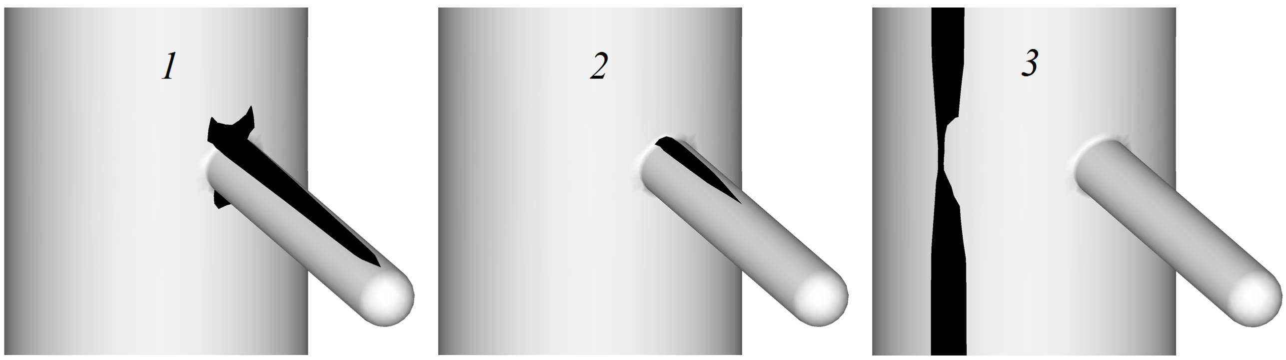


Рисунок 3.15 — Зоны разрушения для различных значений среднего главного напряжения (вертикальная скважина, $\beta = 60°$): *1* — $\sigma_H = 46$ МПа, $p_{\text{init}} = 55.1$ МПа; *2* — $\sigma_H = 57.5$ МПа, $p_{\text{init}} = 70.3$ МПа; *3* — $\sigma_H = 69$ МПа, $p_{\text{init}} = 72.4$ МПа.

ния на место и давление зарождения трещины в случае необсаженной скважины. Предположим, что минимальное горизонтальное σ_h и вертикальное σ_v напряжения были точно определены и зафиксируем их. Среднее напряжение будем варьировать в интервале от σ_h до σ_V.

Полученные зависимости p_{init} от угла перфорации при различных значениях среднего напряжения показаны на рисунке 3.14. На рисунке 3.15 показаны зоны зарождения трещины для вертикальной скважины и угла перфорации

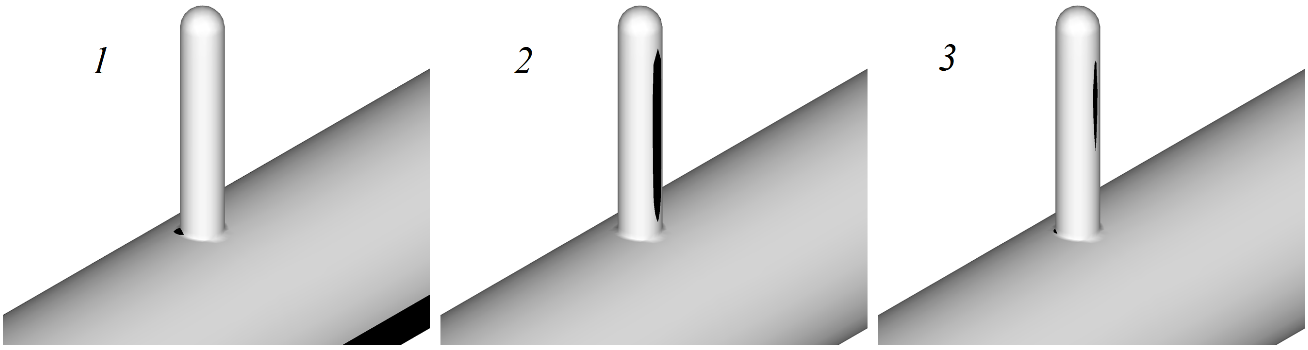


Рисунок 3.16 — Расположение зон разрушения для различных значений среднего напряжения (горизонтальная скважина, $\beta = 60°$): *1* — $\sigma_H = 46$ МПа, $p_{\text{init}} = 72.4$ МПа; *2* — $\sigma_H = 57.5$ МПа, $p_{\text{init}} = 81.0$ МПа; *3* — $\sigma_H = 69$ МПа, $p_{\text{init}} = 74.4$ МПа.

$\beta = 60°$ при различных значениях среднего напряжения σ_H. Видно, что при большом контрасте (отношении) горизонтальных напряжений ($\sigma_H/\sigma_h = 1.5$) и большом угле отклонения перфорации от предпочтительного направления ($\beta > 50°$), может образоваться продольная трещина на скважине, игнорируя наличие перфорации. Этот случай соответствует участку постоянного давления на рисунке 3.14, *слева*. Среднее напряжение значительно влияет на p_{init} почти при всех β, кроме участка от 25° до 35°.

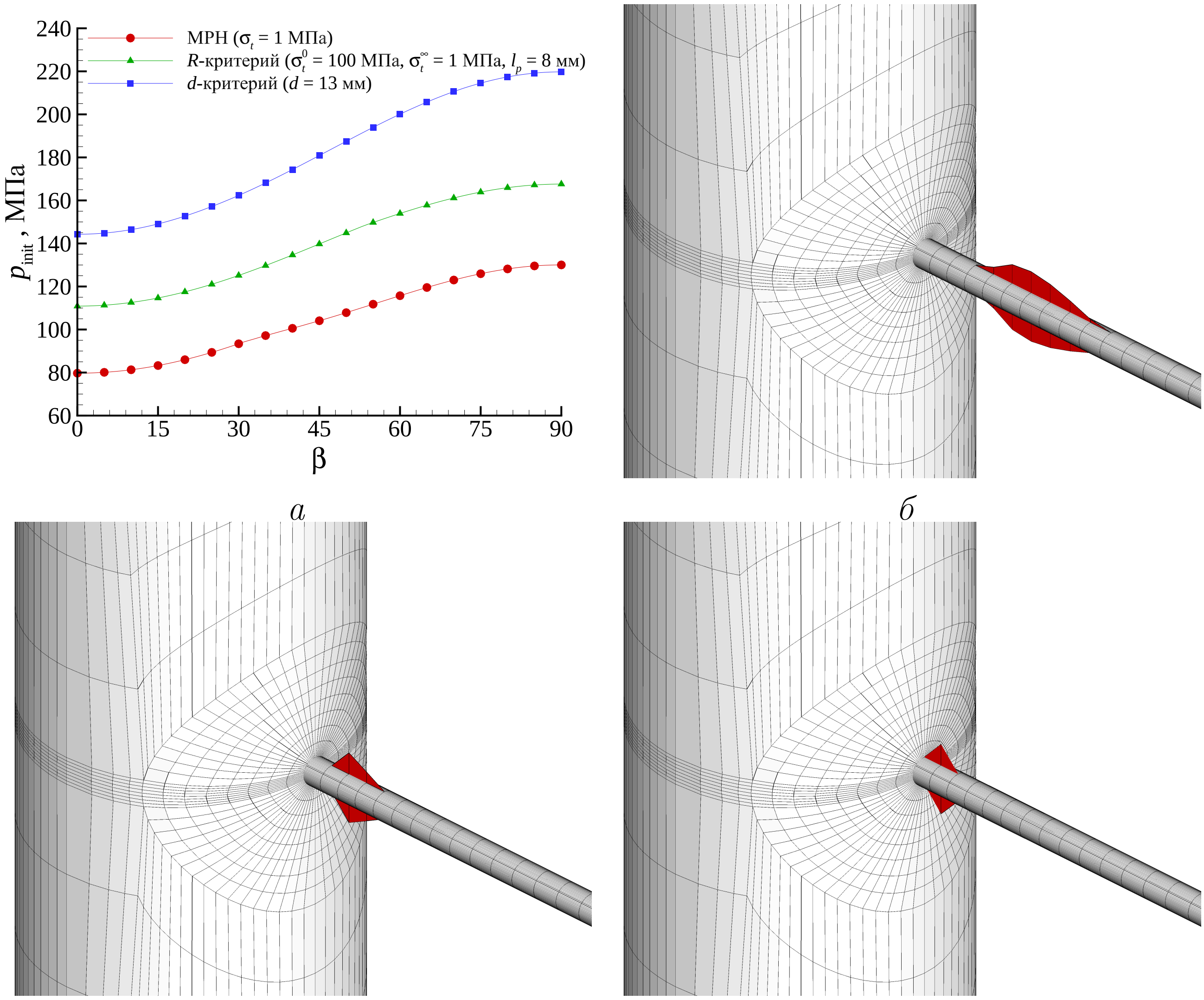
Аналогичные расчеты для горизонтальной скважины представлены на рисунке 3.14, *справа* и рисунке 3.16. Качественно результаты для горизонтальной скважины похожи на результаты вертикальной. Максимальное значение p_{init} соответствует углу перфорации, при котором зона разрушения переходит с перфорации на поверхность скважины. Этот угол зависит от соотношения между главными напряжениями и варьируется в довольно узком интервале. Давление зарождения трещины p_{init} значительно зависит от среднего напряжения. Эта зависимость наиболее сильно проявляется при правильной ориентации перфорации, т. е. при угле перфорации менее 40°. Как показано на рисунке 3.14, для нулевого угла перфорации различие между p_{init}, рассчитанными при минимальном и максимальном значении среднего напряжения, достигает 60 %. Таким образом, информация о среднем напряжении является существенной при предсказании p_{init}.

3.3. Эффект размера в задачах зарождения трещины от скважины с перфорацией

В этом разделе представлены результаты исследования влияния учета эффекта размера в критерии зарождения трещины на сценарий зарождения трещины от обсаженной перфорированной скважины. Массив породы нагружен напряжениями залегания $\boldsymbol{\sigma}^{\infty} = (\sigma_h, \sigma_H, \sigma_v) = (-60, -75, -90)$ МПа, характерными для глубины залегания около 3000 м. Рассмотрены критерий МРН, d-критерий и R-критерий и проведено сравнение результатов зарождения трещины по этим критериям. Прочность породы на разрыв взята равной $\sigma_t^{\infty} = 1$ МПа для всех критериев. В d-критерии длина отрезка осреднения равна $d = 13$ мм, что соответствует значению из раздела 2.5.1. В R-критерии взяты следующие параметры: $l_p = 8$ мм, $\sigma_t^0 = 100$ МПа. Выбранные параметры в R-критерии соответствуют очень сильному эффекту размера (соотношение прочностей $\sigma_t^{\infty}/\sigma_t^0 = 1/100$). Такая большая разница прочностей для маленьких и больших тел наблюдалась в экспериментах по разрушению блоков с двумя поперечными пропилами (см. раздел 2.5.3).

На рисунке 3.17 представлено сравнение результатов моделирования вертикальной скважины для различных критериев. На рисунке 3.17 *а* показаны зависимости давления зарождения трещины p_{init} от угла перфорации β. Видно, что использование критериев, учитывающих эффект размера, может приводить к существенному (до двух раз) увеличению давления зарождения трещины. На рисунке *б, в, г* показаны зародышевые трещины в случае угла $\beta = 90°$. Видно, что выбор критерия незначительно повлиял на местоположение зародышевой трещины: во всех трех случаях инициировалась продольная трещина на перфорации. При этом для критерия МРН она расположена вдали от скважины, а в критериях, учитывающих эффект размера, трещина зародилась ближе к стенке скважины. Интересным фактом является то, что в данной конфигурации трещины зародились не в плоскости ППТ, ортогональной направлению минимального сжатия σ_h, а в плоскости, ортогональной σ_H. Это может быть связано с сильным влиянием скважины на НДС в породе, что приводит к изменению ориентации трещины по сравнению со случаем нетронутой породы.

Аналогичное сравнение проведено для горизонтальной скважины (рису-



а *б*

в *г*

Рисунок 3.17 — Зависимость давления зарождения трещины p_{init} от угла перфорации β (*а*) и зародышевые трещины (*б*,*в*,*г*) для вертикальной скважины ($\theta = 0°$), одной ориентации перфорации ($\beta = 90°$) и различных критериев разрушения: максимальных растягиваюших напряжений (*б*); R-критерий (*в*), d-критерий (*г*)

нок 3.18). Выяснено, что использование критериев, учитывающих эффект размера, приводит не только к увеличению давления, необходимого для зарождения трещины, но и может приводить к изменению сценария зарождения трещин при одних и тех же условиях нагружения. Например, при угле $\beta = 59°$ при использовании критерия МРН трещины зарождаются на перфорации, продольные возле скважины и поперечные вдали от скважины (рисунок 3.18, *б*). При использовании d-критерия и R-критерия образуются продольные трещины на скважине (рисунок 3.18, *в, г*). Зарождение трещин на поверхности скважины, полученное по R-критерию, объясняется высокой эффективной прочностью на перфорации, связанную с ее малым характерным размером (радиусом кривизны). Поэтому трещина образуется на скважине, характерный размер которой выше и прочность, соответственно, ниже. Что касается d-критерия, трещине легче зародиться на поверхности скважины, потому что напряжения на перфорации быстро спадают при отдалении от ее поверхности вглубь породы, поэтому осредненные напряжения на перфорации получаются ниже, чем на скважине, размер которой больше и растягивающие напряжения не успевают сильно уменьшиться на отрезке осреднения d.

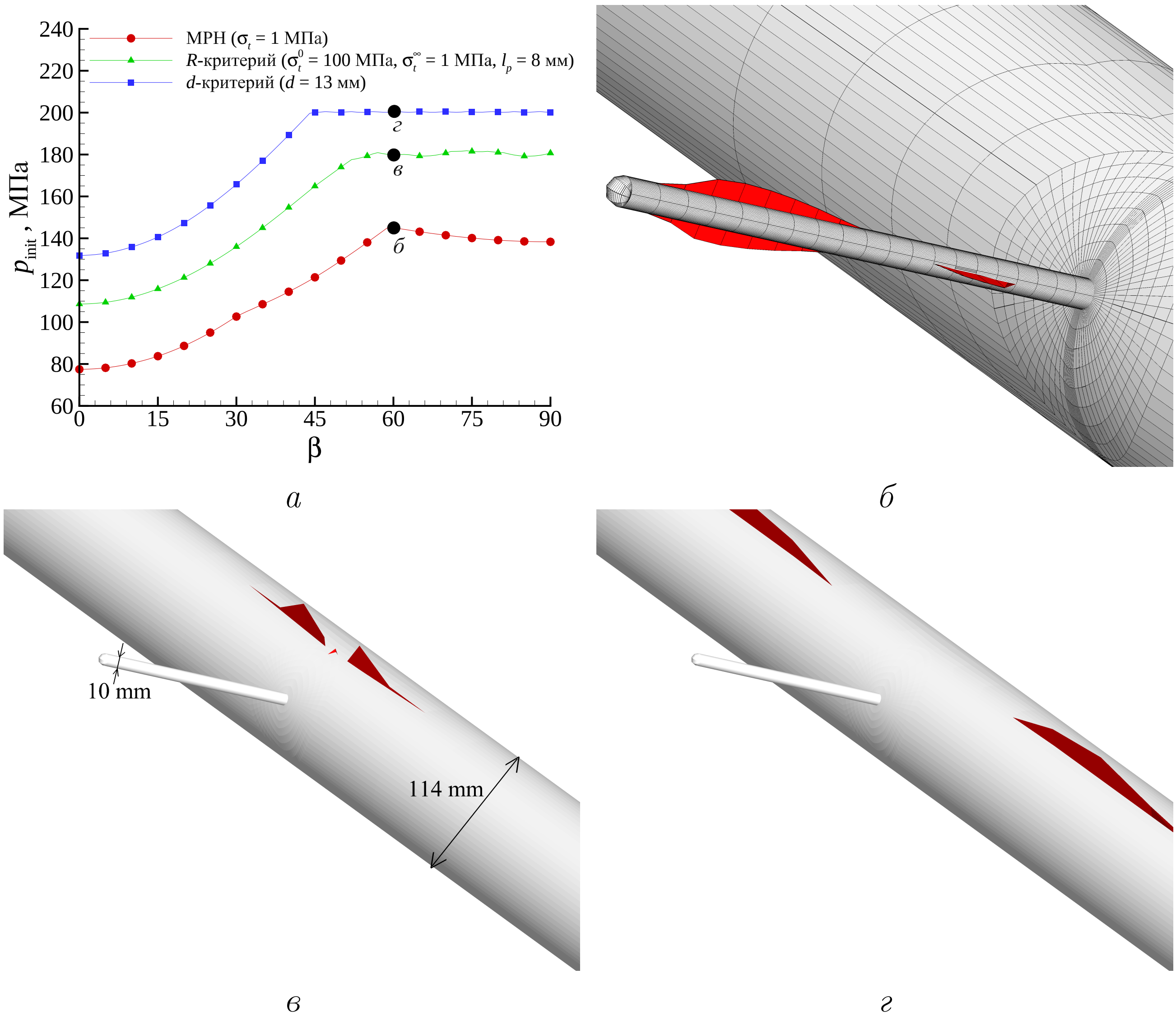


Рисунок 3.18 — Зависимость давления зарождения трещины p_{init} от угла перфорации β (*а*) и зародышевые трещины (*б*,*в*,*г*) для горизонтальной скважины ($\theta = 90°, \phi = 0°$), одной ориентации перфорации ($\beta = 59°$) и различных критериев разрушения: максимальных растягивающих напряжений (*б*); R-критерий (*в*), d-критерий (*г*)

На рисунке 3.19, *а* показано влияние масштабного параметра l_p R-критерия на зависимости давления зарождения трещины p_{init} от угла перфорации β в случае горизонтальной скважины. Варьирование параметра l_p в широком диапазоне может изменять давление зарождения до двух раз. При стремлении l_p к нулю R-критерий обращается в критерий МРН с прочностью на разрыв σ_t^∞. Наоборот, если l_p много больше характерного размера задачи, то R-критерий обращается в критерий МРН с прочностью на разрыв σ_t^0. Параметр l_p влияет не только на давление зарождения трещины, но и на сценарий разрушения. Например, на рисунке 3.19, *б,в,г* приведены зоны разрушения, соответствующие углу перфорации $\beta = 90°$ и различным значения параметра l_p. При $l_p = 1$ мм образуются поперечные трещины на перфорации и продольные — на скважине. При $l_p = 8$ мм образуются только продольные трещины на скважине. При $l_p = 32$ мм образуются поперечные трещины на перфорации.

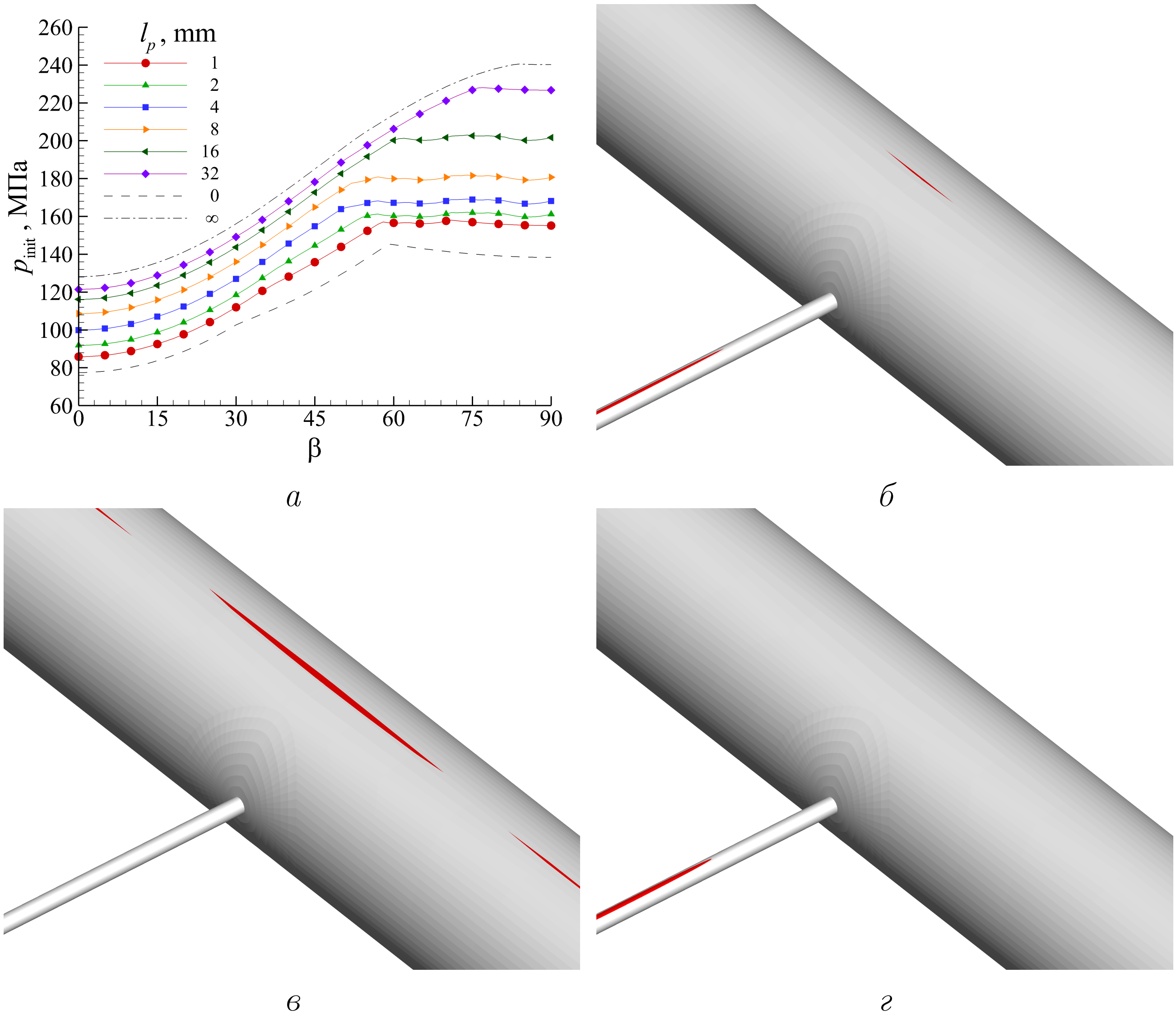


Рисунок 3.19 — Зависимость давления зарождения трещины p_{init} от угла перфорации β (*а*) и зародышевые трещины (*б,в,г*) для горизонтальной скважины ($\theta = 90°, \phi = 0°$), одной ориентации перфорации ($\beta = 90°$) и различных величин параметра l_p в R-критерии: 1 мм (*б*), 8 мм (*в*), 32 мм (*г*).

3.4. Моделирование разрушения перфорированной обсаженной скважины при реальных геофизических условиях

В настоящем разделе разработанная модель зарождения трещины применена для предсказания давления зарождения трещины, места ее зарождения и ориентации при условиях, соответствующих месторождению Амин в государстве Оман, характеризующемуся глубоким залеганием газа (около 5000 м).

Проведение гидроразрыва в таких месторождениях сопровождается сложностями, обусловленными сильными сжимающими напряжениями от 95 до 180 МПа и высокой прочностью породы на разрыв σ_t от 15 до 25 МПа, поэтому моделирование разрушения при таких параметрах представляет несомненный интерес [15–17, 138].

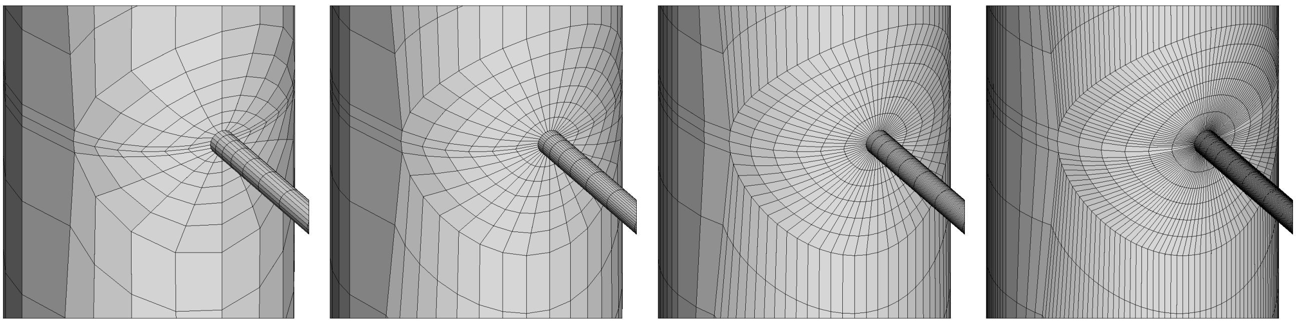
Параметры для настоящего исследования основаны на существующей трехмерной геомеханической модели месторождения Амин и данными, полученными на основе измерений при проведении гидроразрывов. Напряжения в естественном залегании были известны для всего месторождения, состоящего из четырех блоков и трех зон, упорядоченных по глубине залегания: верхней, средней и нижней [139].

Так как упругие параметры породы в данном месторождении варьируются в узком диапазоне, то для уменьшения количества расчетов был выбран один набор параметров породы, соответствующих Средней зоне залегания Северного блока месторождения Амин (*North Middle Amin*): $E_r = 46\,\text{ГПа}$, $\nu_r = 0.1257$, $\sigma_t = 16.8\,\text{МПа}$. Напряжения залегания породы известны $\sigma_v = 119\,\text{МПа}$, $\sigma_h = 108\,\text{МПа}$, $\sigma_H = 169\,\text{МПа}$. Одной из особенностей данного месторождения является то, что горизонтальные напряжения залегания σ_H выше вертикальных σ_v.

Модуль Юнга стальной колонны $E_s = 200\,\text{ГПа}$, коэффициент Пуассона $\nu_s = 0.1257$, внутренний диаметр $d_{\text{in}} = 95\,\text{мм}$, внешний $d_{\text{out}} = 114.3\,\text{мм}$. Плотность бетонной колонны $\rho_c = 1800\,\text{кг}/\text{м}^3$, ускорение свободного падения $g = 9.81\,\text{м}/\text{с}^2$, глубина скважины в $h = 5000\,\text{м}$, следовательно давления бетона в момент застывания $p_0 = 90\,\text{МПа}$. Для заданных параметров стали и породы коэффициент ослабления давления получился равным $k = 0.45$. Диаметр перфорации $d_{\mathrm{perf}} = 10.2$ мм, ее длина $L_{\mathrm{perf}} = 200$ мм.

3.4.1. Выбор оптимальных расчетных сеток

Прежде чем приступить к анализу чувствительности задачи к физическим параметрам, проведем анализ погрешности на серии сгущающихся сеток. Были проведены расчеты для горизонтальной скважины, отклоненной на равные углы от главных направлений напряжений залегания ($\theta = 90°$, $\phi = 45°$) с использованием четырех расчетных сеток, показанных на рисунке 3.20. Так как зарождение трещины происходит на перфорации, исследовано влияние качества сетки на ней. Вдоль перфорации напряжения меняются медленно, а сильнее всего меняются в окружном направлении перфорации. Поэтому в работе исследовано влияние качества сетки в окружном направлении. Каждая сетка сгущалась в два раза по сравнению с предыдущей в окружном направлении на перфорации.



1 *2* *3* *4*

Рисунок 3.20 — Примеры расчетных сеток. Количество элементов 712 (*1*), 1288 (*2*), 2520 (*3*), 5374 (*4*).

Влияние качества сетки наибольшим образом проявляется при расчете p_{init} при угле перфорации меньше 45°, как видно на рисунке 3.21, *слева*. Для углов β между 45° и 90° наблюдается более быстрая численная сходимость, и разница между p_{init}, рассчитанными на разных сетках, становится пренебрежимо малой уже на грубых сетках, как показано на рисунке 3.21, *справа*. Разница между p_{init}, рассчитанным на сетках с 2520 и 5374 элементами, не превышает 2%, поэтому сетка 2520 использовалась в дальнейших расчетах.

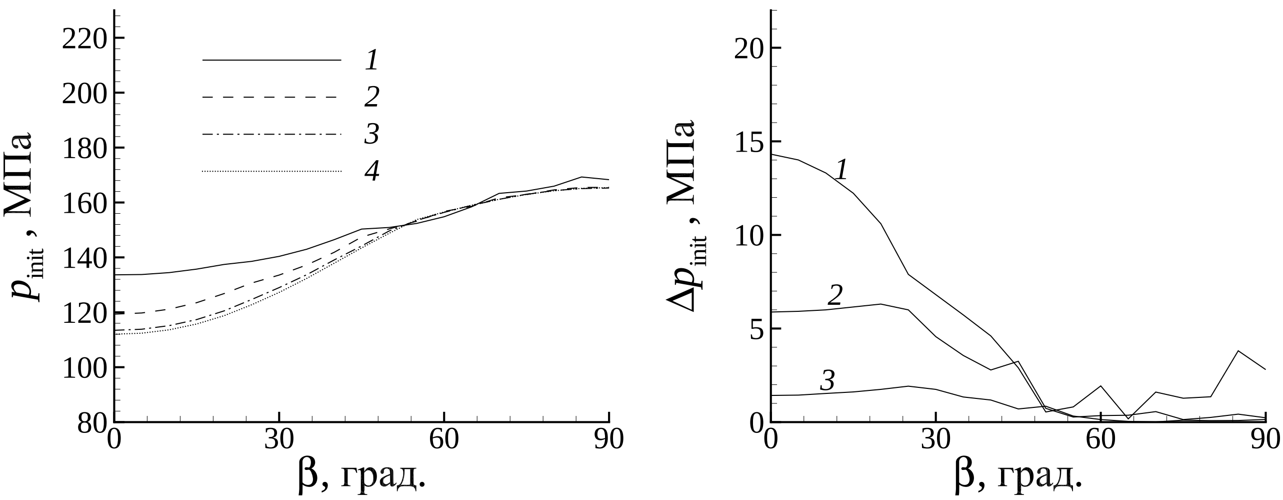


Рисунок 3.21 — Зависимость p_{init} от угла перфорации, полученная на сгущающейся последовательности сеток *1 – 4* (*слева*) и разница между решениями на последовательных сетках (*справа*).

3.4.2. Зависимость давления зарождения трещины от всех трех углов ориентации скважины и перфорации

Задача зарождения трещины от скважины с перфорацией решена для всевозможных ориентаций (θ, ϕ, β) скважины и перфорации. Зависимость давления зарождения трещины p_{init} от всех трех углов представлена на рисунке 3.22, *слева* в виде куба, раскрашенного согласно соответствующему p_{init}. Видно, что p_{init} меняется значительно в пределах от 120 до 200 МПа. Однако более по-

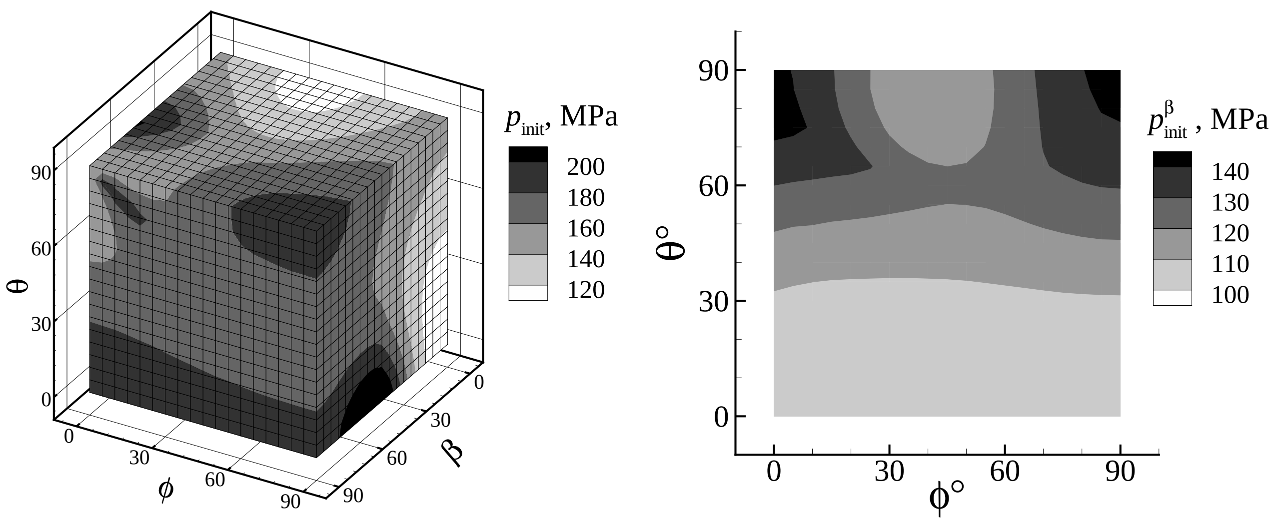


Рисунок 3.22 — Зависимости давления p_{init} от ориентации скважины и перфорации (θ, ϕ, β) (*слева*) и p^{β}_{init} от ориентации скважины (θ, ϕ) при оптимальной ориентации перфорации β (*справа*).

дробный анализ полученного распределения от всех трех углов затруднителен, поэтому предложено рассмотреть зависимость p_{init} только от ориентации скважины (θ, ϕ), выбрав угол перфорации β таким, чтобы он минимизировал p_{init} для данной ориентации скважины:

$$p^{\beta}_{\text{init}}(\theta, \phi) = \min_{\beta} p_{\text{init}}(\theta, \phi, \beta). \tag{3.5}$$

Полученные распределения p^{β}_{init} показаны на рисунке 3.22, *справа*. Видно, что минимум p^{β}_{init} соответсвует вертикальной скважине ($\theta = 0°$), а для горизонтальных и наклонных скважин давление зарождения выше. Интересно отметить, что в случае горизонтальной скважины минимум p^{β}_{init} достигается, когда скважина ориентирована между главными направлениями напряжений залегания при угле $\phi \approx 40°$.

3.4.3. Влияние ориентации скважины $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\phi})$ на давление зарождения трещины

Для более детального анализа влияния ориентации скважины (θ, ϕ) на давление зарождения трещины p^{β}_{init} рассмотрим одномерные сечения распределения p^{β}_{init} на рисунке 3.22, *справа*. В этих сечениях один из углов варьируется, а второй угол фиксирован: $\phi = 0°, 30°, 45°, 60°, 90°$ и $\theta = 0°, 30°, 45°, 60°, 90°$, как показано на рисунке 3.23.

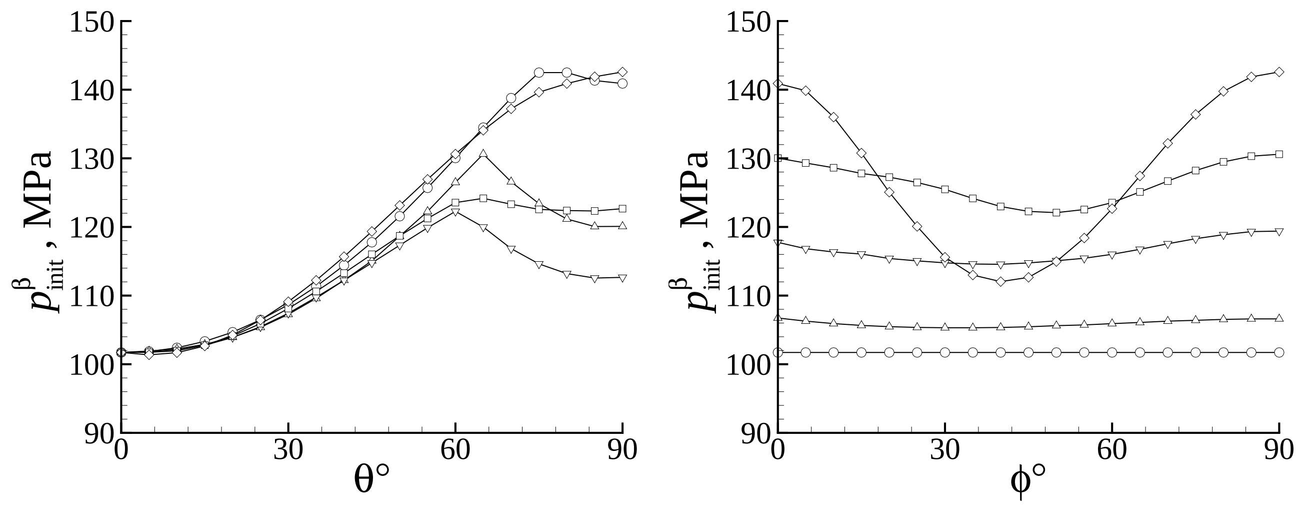


Рисунок 3.23 — Зависимости p^{β}_{init} от угла θ при фиксированных углах ϕ (*слева*) и от угла ϕ при фиксированных углах θ (*справа*): 0°(◯), 30°(△), 45°(▽), 60°(□), 90°(◇).

Рисунок 3.23, *слева* подтверждает вывод о том, что давление p^{β}_{init} увеличивается при отклонении положения скважины от вертикального. Если скважина отклоняется в направлении максимального горизонтального напряжения σ_H ($\phi = 90^\circ$ и его окрестность), то p^β_{init} увеличивается монотонно до тех пор, пока скважина не станет горизонтальной. В остальных случаях зависимость p^β_{init} от полярного угла θ имеет максимум в районе $60^\circ \div 80^\circ$ в зависимости от азимутального угла ϕ.

Из рисунка 3.23, *справа* можно сделать вывод, что при небольшом отклонении скважины от вертикального положения ($\theta < 45^\circ$), азимутальный угол скважины ϕ слабо влияет на p^β_{init}. Для горизонтальных и близких к горизонтальным скважинам влияние азимутального угла значительно увеличивается: в горизонтальной скважине ($\theta = 90^\circ$) максимумы давления зарождения составляют 140 МПа при $\phi = 0^\circ$ и 142 МПа при $\phi = 90^\circ$, а минимум p^β_{init} равен 112 МПа при угле $\phi = 40^\circ$.

3.4.4. Влияние угла перфорации β на давление зарождения и ориентацию зародышевой трещины

Влияние ориентации перфорации было исследовано для четырех вариантов ориентации скважины: наклоненная и горизонтальная скважины, ориентированные в направлении минимальных горизонтальных напряжений ($\theta = 45^\circ$, $\phi = 90^\circ$ и $\theta = 90^\circ$, $\phi = 0^\circ$); горизонтальная скважина, ориентированная между направлениями минимального и максимального горизонтальных напряжений, для которой наблюдается минимальное значение p_{init} ($\theta = 90^\circ$, $\phi = 40^\circ$), и горизонтальная скважина, ориентированная в направлении максимальных горизонтальных напряжений ($\theta = 90^\circ$, $\phi = 90^\circ$).

На рисунке 3.24 показано влияние угла перфорации β на p_{init}. На рисунках показаны зоны, в которых инициируется продольная и ортогональная к скважине поперечная трещина. В остальных случаях наблюдалась инициация наклоненной к скважине трещины. Во всех случаях минимальное p_{init} наблюдалось для перфорации, лежащей в ППТ. Легко видеть, что ориентация перфорации сильно влияет на p_{init}. Например, отклонение перфорации на 30° увеличивает p_{init} на 30 % по сравнению с минимальным значением ($\theta = 45^\circ$, $\phi = 0^\circ$). Для скважины с углами ориентации $\theta = 90^\circ$, $\phi = 40^\circ$ влияние угла перфорации меньше, то же отклонение перфорации на 30° увеличивает p_{init} всего на 15 %. В случае горизонтальной скважины, пробуренной в направлении $\theta = 90^\circ$,

$\phi = 90°$, при любом угле перфорации инициируется продольная трещина.

На рисунке 3.25 приведены зоны зарождения трещины для скважины, ориентированной в направлении минимальных горизонтальных напряжений ($\theta = 90°$, $\phi = 0°$) и различных углов перфорации β. Отметим, что при такой ориентации скважины угол β есть угол отклонения перфорации от вертикального направления σ_v. Несмотря на то что все перфорации лежат в ППТ, не всегда трещина инициируется в этой плоскости. Так, при $\beta = 0°$ инициируется поперечная трещина, лежащая в ППТ, а при $\beta = 90°$ инициируется продольная трещина, которая ортогональна ППТ. Переход от поперечной трещины к продольной происходит в интервале $\beta = 60 - 70°$.

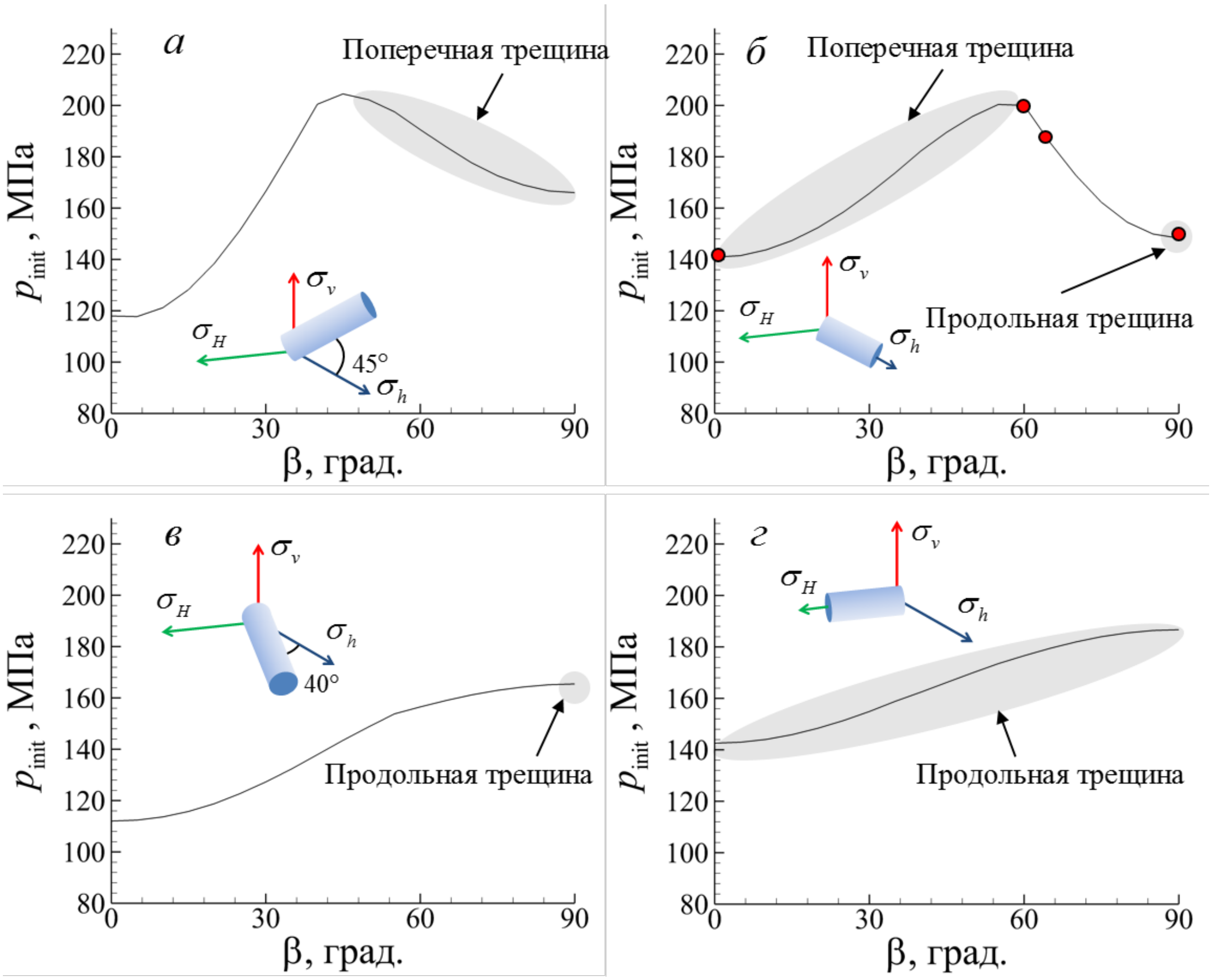


Рисунок 3.24 — Зависимость p_{init} от угла перфорации. Отмечены зоны образования ортогональной к скважине поперечной трещины и продольной трещины. *а* — $\theta = 45°, \phi = 0°$, *б* — $\theta = 90°, \phi = 0°$, *в* — $\theta = 90°, \phi = 40°$, *г* — $\theta = 90°, \phi = 90°$.

3.4.5. Рекомендации по выбору ориентации скважины и перфорации

На основе полученного анализа выработаны следующие рекомендации. Для данной конфигурации напряжений залегания наиболее выгодной по давлению зарождения является вертикальная скважина. В случае горизонтальной скважины существенное влияние на давление зарождения оказывает азимутальный угол ϕ. Выбор оптимального угла ϕ позволит уменьшить давление зарождения в 1.27 раза по сравнению самым «плохим» вариантом. Оптимальный выбор угла перфорации β может существенно уменьшить давление зарождения (с 205 МПа до 118 МПа в 1.74 раза при $\theta = 45°$, $\phi = 0°$), поэтому важно верно ориентировать направление перфорирования, или делать несколько перфораций с малым шагом по углу β. Помимо давления зарождения, ориентация перфорации может повлиять на ориентацию зародившейся трещины, а это принципиально важно при проектировании трещины гидроразрыва, так как от начальной конфигурации зависит, как трещина будет распространяться в породу и как быстро она выйдет на предпочтительное направление распространения.

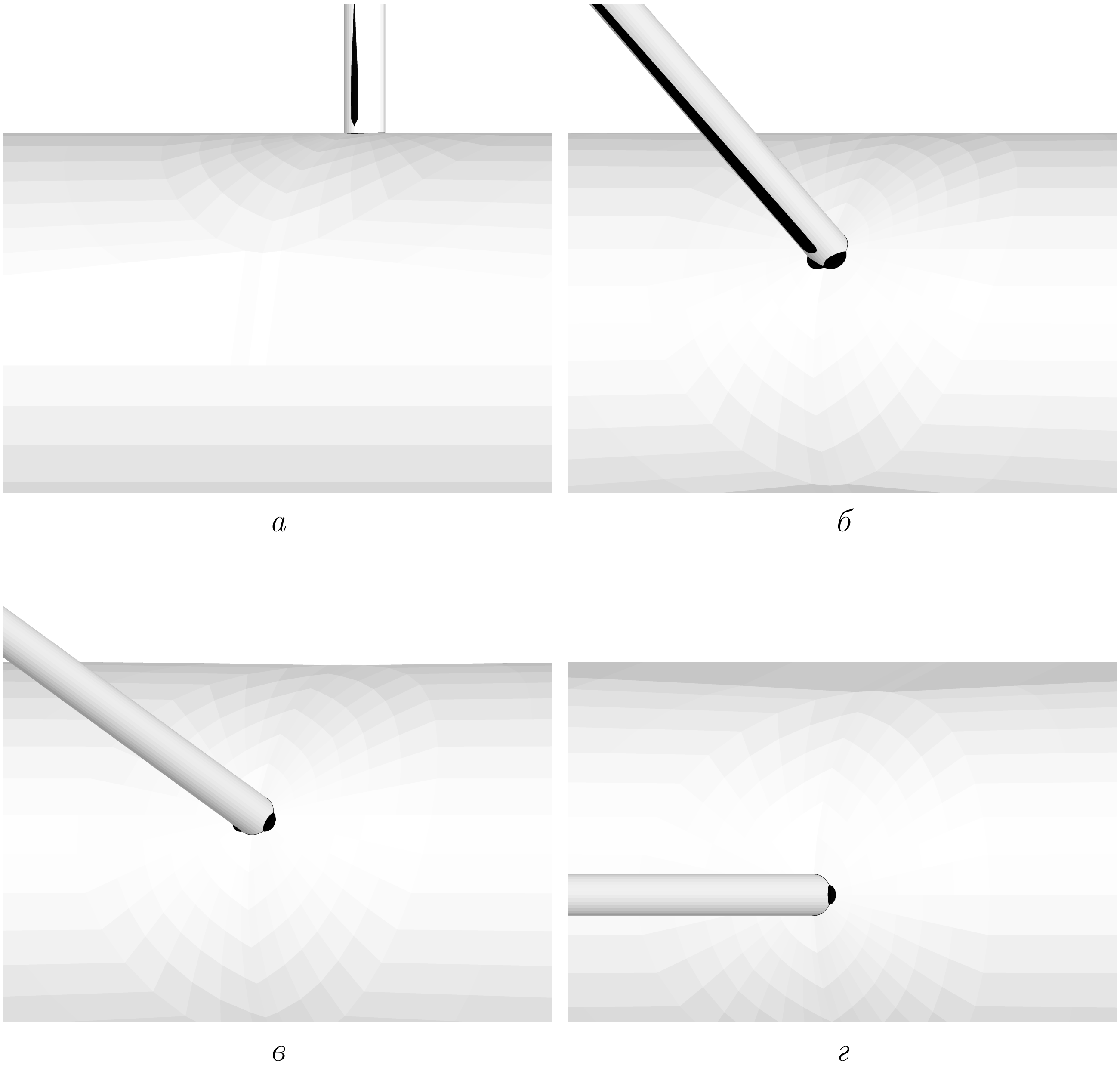


Рисунок 3.25 — Зоны зарождения трещины для скважины, направленной в направлении минимальных горизонтальных напряжений σ_h, при различных углах перфорации β: 0° (*а*), 60° (*б*), 70° (*в*), 90° (*г*).

Заключение

Разработаны две модификации МГЭ для вычисления НДС трехмерного тела с трещинами:

1. метод граничных элементов с представлением трещины в виде пропила малой, но конечной толщины (МГЭ/МО);
2. дуальный метод граничных элементов (ДМГЭ), в котором на поверхности полости решается граничное интегральное уравнение смещений, а на трещине — граничное интегральное уравнение напряжений, записанное относительно разрыва смещений на берегах трещины.

Установлено, что МГЭ/МО имеет более высокую скорость вычислений по сравнению с ДМГЭ (до 10 раз для примерно одинакового числа степеней свобод). Однако ДМГЭ гораздо точнее, чем МГЭ/МО (до 11 раз на рассмотренных расчетных сетках). Методы пригодны для моделирования ранней стадии распространения трещины гидроразрыва, когда траектория трещины может существенно искривляться, и невозможно применить геометрические упрощения постановки задачи (например, как в плоских трехмерных (англ. *planar 3D*) моделях гидроразрыва).

В ДМГЭ разработана методика построения граничных элементов, учитывающих асимптотику решения задачи упругости в окрестности фронта трещины. Предложенная методика может применяться для произвольной асимптотики НДС в окрестности фронта трещины, что актуально при моделировании различных режимов распространения трещины гидроразрыва, отличных от трещиностойкостного режима.

Разработана модель зарождения трещины в трехмерных задачах, учитывающая влияние формы и размера образца на величину разрушающей нагрузки с помощью двух разных критериев прочности:

1. осредненное по перпендикулярному к поверхности тела отрезку напряжение сравнивается с прочностью материала на разрыв;

2. локальная прочность материала на разрыв зависит от минимального радиуса кривизны поверхности тела.

Результатом работы модели зарождения является согласованная расчетная сетка, аппроксимирующая полость и зародившуюся трещину. Эта сетка может в дальнейшем быть использована в качестве начальной конфигурации для моделирования распространения трещины гидроразрыва.

На экспериментах по разрушению блоков с цилиндрическими отверстиями, блоков с боковыми вырезами, скважин с пропилами проведена валидация двух предложенных критериев. Выяснено, что критерии верно предсказывают давление зарождения, местоположение и ориентацию продольной зародышевой трещины в экспериментах по разрушению скважины с пропилами, в то время как критерий максимальных растягивающих напряжений всегда предсказывает появление поперечной трещины независимо от глубины пропила.

Создано проблемно-ориентированное ПО на языке **Fortran** для нахождения НДС, КИНов на фронте трещины и решения задачи зарождения трещин в упругом теле.

Разработанное программное обеспечение применено для установления местоположения зародышевой трещины и давления жидкости, необходимого для инициации трещины, по ориентации скважины и перфорации относительно напряжений залегания на примере конкретного нефтегазового месторождения. Установлено, что:

1. форма, диаметр и длина перфорации слабо влияют на местоположение зародившейся трещины и на давление зарождения;

2. давление зарождения в основном определяется напряжениями залегания и ориентацией скважины и перфорации относительно них;

3. учет эффекта размера может приводить к изменению сценария зарождения трещины или существенному повышению давления зарождения трещины.

Приложение А

Вычисление главного значения Адамара гиперсингулярного интеграла в граничном интегральном уравнении напряжений

Главная трудность реализации ДМГЭ в пространственном случае заключается в построении алгоритма вычисления главного значения Адамара сингулярного интеграла по граничному элементу S^e, содержащему точку коллокации $\mathbf{y}$:

$$I_{ij}(\mathbf{y}) = \displaystyle\neq\!\!\!\!\!\!\int_{S^e} K_{ij}(\mathbf{y},\mathbf{x})dS(\mathbf{x}), \tag{A.1}$$

где подынтегральное выражение

$$K_{ij}(\mathbf{y},\mathbf{x}) = M_{ij}(\mathbf{y},\mathbf{x})\phi_\alpha(\mathbf{x})J(\mathbf{x}) = S_{kij}(\mathbf{y},\mathbf{x})n_k(\mathbf{y})\phi_\alpha(\mathbf{x})J(\mathbf{x}). \tag{A.2}$$

Для вычисления интеграла I_{ij} (A.1) используем метод выделения сингулярности [43]. Этот метод заключается в разложении в ряд подынтегрального выражения (A.2) в окрестности особой точки $\mathbf{y}$ и в вычислении специальным способом интегралов от первых членов этого разложения. Таким образом, интеграл I_{ij} (A.1) расписывается в виде суммы трех интегралов

$$I_{ij}(\mathbf{y}) = I_{ij}^{-1}(\mathbf{y}) + I_{ij}^{-2}(\mathbf{y}) + I_{ij}^{-3}(\mathbf{y}), \tag{A.3}$$

$$I_{ij}^{-1}(\mathbf{y}) = \int\limits_{S^e} \left(K_{ij}(\mathbf{y},\mathbf{x}) - \frac{K_{ij}^{-2}(\theta)}{\rho^2} - \frac{K_{ij}^{-3}(\theta)}{\rho^3} \right) dS(\mathbf{x}), \tag{A.4}$$

$$I_{ij}^{-2}(\mathbf{y}) = \fint\limits_{S^e} \frac{K_{ij}^{-2}(\theta)}{\rho^2} dS(\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\rho_\varepsilon(\theta)}^{\rho_*(\theta)} \frac{K_{ij}^{-2}(\theta)}{\rho^2} \rho d\rho d\theta, \tag{A.5}$$

$$I_{ij}^{-3}(\mathbf{y}) = \fint\limits_{S^e} \frac{K_{ij}^{-3}(\theta)}{\rho^3} dS(\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\rho_\varepsilon(\theta)}^{\rho_*(\theta)} \frac{K_{ij}^{-3}(\theta)}{\rho^3} \rho d\rho d\theta + \frac{h(\mathbf{y})}{\varepsilon} \right). \tag{A.6}$$

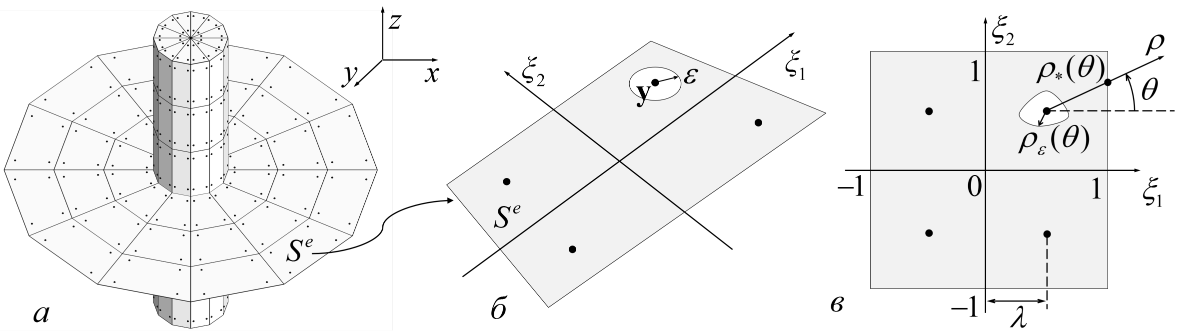


Рисунок А.1 — Граничный элемент с ε-окрестностью узла в декартовой (*слева*) и локальной (ξ_1, ξ_2) (*справа*) системах координат.

Здесь ρ и θ — локальные полярные координаты элемента с центром в точке коллокации $\mathbf{y}$, изображенные на рисунке А.1. Функции $K_{ij}^{-2}(\theta)$ и $K_{ij}^{-3}(\theta)$ — первые члены разложения в ряд по переменной ρ подынтегрального выражения K_{ij} (A.2), $\rho_\varepsilon(\theta)$ – радиус ε-окрестности в локальной полярной системе координат элемента, $\rho_*(\theta)$ – радиус границы элемента. Заметим, что ε-окрестность в локальной системе координат не является окружностью и $\rho_\varepsilon(\theta)$ зависит от полярного угла θ. Коэффициент $h(\mathbf{y})$ в (A.6) характеризует асимптотику бесконечной части интеграла (A.6) [140] в точке $\mathbf{y}$.

А.1. Вычисление слабосингулярной части интеграла

Для вычисления слабосингулярного интеграла $I_{ij}^{-1} = O(1/\rho)$ (A.4) в настоящей работе был применен метод трансформации области, предложенный в [141]. В этом методе элемент разбивается на треугольники, одна из вершин которых совпадает с особой точкой функции. Каждый треугольник заменой координат трансформируется в квадрат таким образом, что одно ребро квадрата соответствует вершине с особой точкой, как показано на рисунке А.2. Якобиан трансформации треугольника в квадрат позволяет избавиться от сингулярности $1/\rho$ и вычислять интегралы от слабосингулярных функций с высокой точностью.

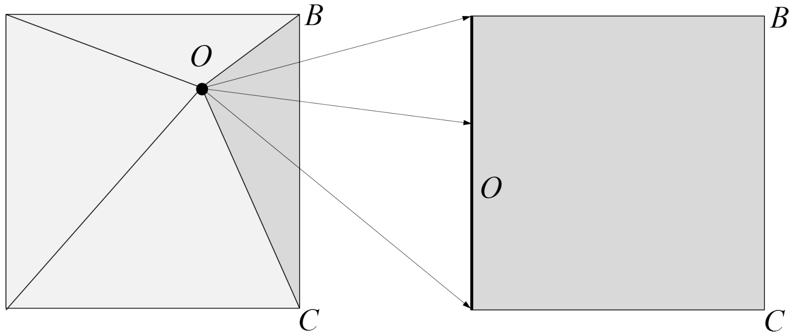


Рисунок А.2 — Разбиение элемента на треугольники и трансформация треугольника OAB с вершиной в особой точке в квадрат с ребром O, соответствующим особой точке.

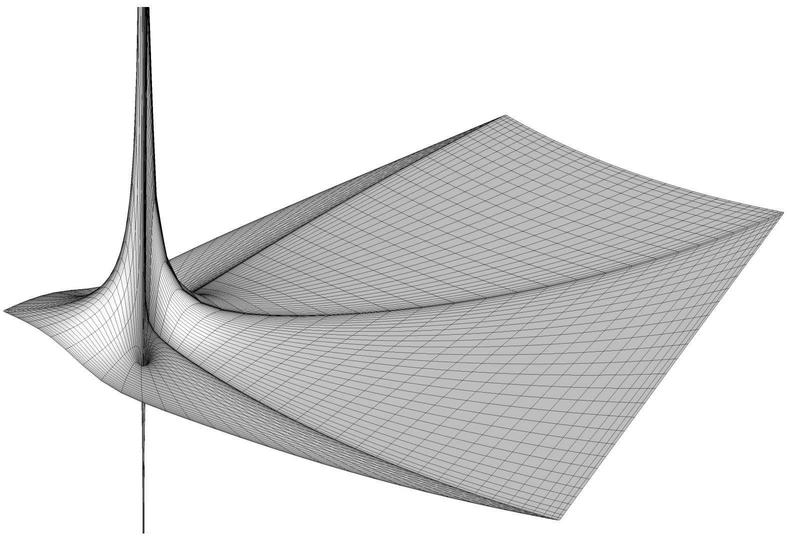


Рисунок А.3 — Распределение подынтегрального выражения $K_{33} - K_{33}^{-2}/\rho^2 - K_{33}^{-3}/\rho^3$ по поверхности граничного элемента и квадратурная сетка его для численного интегрирования.

На рисунке А.3 показаны характерный вид слабосингулярной функции в дуальном МГЭ и квадратурная сетка для его численного интегрирования.

A.2. Вычисление главного значения сингулярных и гиперсингулярных интегралов

Для вычисления оставшихся двух сильносингулярного $I_{ij}^{-2} = O(1/\rho^2)$ (A.5) и гиперсингулярного $I_{ij}^{-3} = O(1/\rho^3)$ (A.6) интегралов необходимо вычислить члены K_{ij}^{-2} и K_{ij}^{-3} разложения по ρ подынтегрального выражения в (A.1), а также разложить в ряд по ε радиус $\rho_\varepsilon(\theta)$.

Запишем первые члены разложения радиус-вектора $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ по переменной ρ

$$\mathbf{r}(\theta) = \mathbf{a}(\theta)\rho + \mathbf{b}(\theta)\rho^2 + O(\rho^3), \tag{A.7}$$

$$\mathbf{a}(\theta) = \mathbf{x}_{,\xi_1}\cos(\theta) + \mathbf{x}_{,\xi_2}\sin(\theta), \tag{A.8}$$

$$\mathbf{b}(\theta) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_{,\xi_1\xi_1}\cos^2(\theta) + 2\,\mathbf{x}_{,\xi_1\xi_2}\sin(\theta)\cos(\theta) + \mathbf{x}_{,\xi_2\xi_2}\sin^2(\theta)). \tag{A.9}$$

Тогда длина вектора $r = |\,\mathbf{r}\,|$ запишется в виде

$$r(\theta) = \rho a(\theta)\left(1 + \rho B(\theta) + O(\rho^2)\right), \tag{A.10}$$

$$a(\theta) = |\,\mathbf{a}(\theta)|, \tag{A.11}$$

$$B(\theta) = \frac{(\mathbf{a}(\theta)\cdot\mathbf{b}(\theta))}{a^2(\theta)}. \tag{A.12}$$

Далее запишем уравнение (A.10) для радиус-вектора ε-окрестности и выразим из него радиус $\rho_\varepsilon(\theta)$:

$$\rho_\varepsilon(\theta) = \varepsilon\frac{1}{a(\theta)} - \varepsilon^2\frac{B(\theta)}{a^2(\theta)} + O(\varepsilon^3). \tag{A.13}$$

Проинтегрируем аналитически сингулярные интегралы по переменной ρ:

$$\begin{aligned} I_{ij}^{-2} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{2\pi} K_{ij}^{-2}(\theta)\left(\ln(\rho_*(\theta)) - \ln(\rho_\varepsilon(\theta))\right)d\theta = \\ &= \int\limits_0^{2\pi} K_{ij}^{-2}(\theta)\ln\left(a(\theta)\rho_*(\theta)\right)d\theta + \lim_{\varepsilon\to 0}\ln\varepsilon\int\limits_0^{2\pi} K_{ij}^{-2}(\theta)d\theta = \\ &= \int\limits_0^{2\pi} K_{ij}^{-2}(\theta)\ln\left(a(\theta)\rho_*(\theta)\right)d\theta, \end{aligned} \tag{A.14}$$

$$\begin{aligned} I_{ij}^{-3} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_0^{2\pi} K_{ij}^{-3}(\theta)\left(\frac{1}{\rho_\varepsilon(\theta)} - \frac{1}{\rho_*(\theta)}\right)d\theta + \frac{h(\mathbf{y})}{\varepsilon}\right) = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_0^{2\pi} K_{ij}^{-3}(\theta)\left(\frac{a(\theta)}{\varepsilon} + B(\theta) - \frac{1}{\rho_*(\theta)}\right)d\theta + \frac{h(\mathbf{y})}{\varepsilon}\right) = \\ &= \int\limits_0^{2\pi} K_{ij}^{-3}(\theta)\left(B(\theta) - \frac{1}{\rho_*(\theta)}\right)d\theta. \end{aligned} \tag{A.15}$$

Заметим, что коэффициенты разложения $K_{ij}^{-2}(\theta)$ и $K_{ij}^{-3}(\theta)$ зависят только от точки коллокации $\mathbf{y}$ и переменной θ и не зависят от переменной ρ, что позволяет провести интегрирование по ρ аналитически. Значения контурных интегралов (A.14) и (A.15) подсчитываются численным интегрированием.

А.3. Разложение в ряд ядра подынтегрального выражения

Ядро S_{kij} в (А.2) имеет вид

$$S_{kij}(\mathbf{y},\mathbf{x}) = \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)}\times \\ \times\left(S^{(1)}_{kij}(\mathbf{y},\mathbf{x}) + S^{(2)}_{kij}(\mathbf{y},\mathbf{x}) + S^{(3)}_{kij}(\mathbf{y},\mathbf{x}) + S^{(4)}_{kij}(\mathbf{y},\mathbf{x})\right)\frac{1}{r^3(\mathbf{y},\mathbf{x})}, \tag{А.16}$$

$$S^{(1)}_{kij}(\mathbf{y},\mathbf{x}) = 3r_{,m}n_m\left((1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \nu(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) - 5r_{,i}r_{,j}r_{,k}\right), \tag{А.17}$$

$$S^{(2)}_{kij}(\mathbf{y},\mathbf{x}) = 3\nu(n_i r_{,j}r_{,k} + n_j r_{,i}r_{,k}), \tag{А.18}$$

$$S^{(3)}_{kij}(\mathbf{y},\mathbf{x}) = (1-2\nu)(3n_k r_{,i}r_{,j} + n_j\delta_{ik} + n_i\delta_{jk}), \tag{А.19}$$

$$S^{(4)}_{kij}(\mathbf{y},\mathbf{x}) = -(1-4\nu)n_k\delta_{ij}, \tag{А.20}$$

$$r_{,i} = \frac{r_i}{r}. \tag{А.21}$$

Для разложения в ряд по ρ ядра S_{kij} (А.16) необходимо найти члены разложения от его составных частей

$$\frac{1}{r^3(\mathbf{y},\mathbf{x})} = \frac{1}{\rho^3 a^3(\theta)}\left(1 - 3\rho B(\theta) + O(\rho^{-1})\right), \tag{А.22}$$

$$r_{,i}(\mathbf{y},\mathbf{x}) = A_i(\theta) + \rho dR_i(\theta) + O(\rho^2), \tag{А.23}$$

$$A_i(\theta) = \frac{a_i(\theta)}{a(\theta)}, \tag{А.24}$$

$$dR_i(\theta) = \frac{b_i(\theta)}{a(\theta)} - A_i(\theta)B(\theta). \tag{А.25}$$

Вектор нормали в точке интегрирования $\mathbf{x}$ представляется в виде

$$n_i(\mathbf{x}) = n_i(\mathbf{y}) + \rho dN_i(\theta) + O(\rho^2), \tag{А.26}$$

$$dN_i(\theta) = n_{i,\xi_1}\cos(\theta) + n_{i,\xi_2}\sin(\theta). \tag{А.27}$$

Разложим в ряд функции $S^{(1)}_{kij}$ (А.17), $S^{(2)}_{kij}$ (А.18), $S^{(3)}_{kij}$ (А.19), $S^{(4)}_{kij}$ (А.20).

Первая функция $S_{kij}^{(1)}$ запишется как

$$S_{kij}^{(1)}(\mathbf{y},\mathbf{x}) = S_{kij}^{0(1)}(\theta) + \rho S_{kij}^{1(1)}(\theta) + O(\rho^2), \tag{A.28}$$

$$S_{kij}^{0(1)}(\theta) = (a_m(\theta)n_m(\mathbf{y}))Z_{kij}^{0}(\theta), \tag{A.29}$$

$$\begin{aligned} S_{kij}^{1(1)}(\theta) =& Z_{kij}^{1}(\theta)\big[a_m(\theta)n_m(\mathbf{y})\big]+ \\ &+Z_{kij}^{0}(\theta)\big[dR_m(\theta)n_m(\mathbf{y}) + a_m(\theta)dN_m(\theta)\big]. \end{aligned} \tag{A.30}$$

Здесь

$$\begin{aligned} Z_{kij}^{0}(\theta) =& 3\big[(1-2\nu)A_k(\theta)\delta_{ij}+ \\ &+\nu(A_j(\theta)\delta_{ik} + A_i(\theta)\delta_{jk}) - 5A_k(\theta)A_i(\theta)A_j(\theta)\big], \end{aligned} \tag{A.31}$$

$$\begin{aligned} Z_{kij}^{1}(\theta) =& 3\big[(1-2\nu)dR_k(\theta)\delta_{ij} + \nu(dR_j(\theta)\delta_{ik}+ \\ &+dR_i(\theta)\delta_{jk}) - 5(dR_k(\theta)A_i(\theta)A_j(\theta)+ \\ &+A_k(\theta)dR_i(\theta)A_j(\theta) + A_k(\theta)A_i(\theta)dR_j(\theta))\big]. \end{aligned} \tag{A.32}$$

Вторая функция $S_{kij}^{(2)}$ запишется как

$$S_{kij}^{(2)}(\mathbf{y},\mathbf{x}) = S_{kij}^{0(2)}(\theta) + \rho S_{kij}^{1(2)}(\theta) + O(\rho^2), \tag{A.33}$$

$$S_{kij}^{0(2)}(\theta) = 3\nu\big[n_i(\mathbf{y})A_j(\theta)A_k(\theta) + n_j(\mathbf{y})A_i(\theta)A_k(\theta)\big], \tag{A.34}$$

$$\begin{aligned} S_{kij}^{1(2)}(\theta) =& 3\nu\big[n_i(\mathbf{y})(A_j(\theta)dR_k(\theta) + A_k(\theta)dR_j(\theta))+ \\ &+n_j(\mathbf{y})(A_i(\theta)dR_k(\theta) + A_k(\theta)dR_i(\theta))+ \\ &+dN_i(\theta)A_j(\theta)A_k(\theta) + dN_j(\theta)A_i(\theta)A_k(\theta)\big]. \end{aligned} \tag{A.35}$$

Третья функция $S_{kij}^{(3)}$ равна

$$S_{kij}^{(3)}(\mathbf{y},\mathbf{x}) = S_{kij}^{0(3)}(\theta) + \rho S_{kij}^{1(3)}(\theta) + O(\rho^2), \tag{A.36}$$

$$S_{kij}^{0(3)}(\theta) = (1-2\nu)\big[3n_k(\mathbf{y})A_i(\theta)A_j(\theta) + n_j(\mathbf{y})\delta_{ik} + n_i(\mathbf{y})\delta_{jk}\big], \tag{A.37}$$

$$\begin{aligned} S_{kij}^{1(3)}(\theta) =& (1-2\nu)\big[3n_k(\mathbf{y})(A_i(\theta)dR_j(\theta) + A_j(\theta)dR_i(\theta))+ \\ &+3dN_k(\theta)A_i(\theta)A_j(\theta) + dN_j(\theta)\delta_{ik} + dN_i(\theta)\delta_{jk}\big]. \end{aligned} \tag{A.38}$$

Четвертая функция S^3_{kij} запишется как

$$S^{(4)}_{kij}(\mathbf{y},\mathbf{x}) = S^{0(4)}_{kij} + \rho S^{1(4)}_{kij} + O(\rho^2), \tag{A.39}$$
$$S^{0(4)}_{kij}(\theta) = -(1-4\nu)n_k\delta_{ij}, \tag{A.40}$$
$$S^{1(4)}_{kij}(\theta) = -(1-4\nu)dN_k\delta_{ij}. \tag{A.41}$$

Тогда разложение ядра S_{kij} (A.16) выглядит как

$$S_{kij}(\mathbf{y},\mathbf{x}) = S^{-3}_{kij}(\theta)\rho^{-3} + S^{-2}_{kij}(\theta)\rho^{-2} + O(\rho^{-1}), \tag{A.42}$$
$$S^{-3}_{kij}(\theta) = \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)}\frac{S^0_{kij}(\theta)}{a^3(\theta)}, \tag{A.43}$$
$$S^{-2}_{kij}(\theta) = \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)}\frac{S^1_{kij}(\theta) - 3B(\theta)S^0_{kij}(\theta)}{a^3(\theta)}. \tag{A.44}$$

Здесь

$$S^0_{kij}(\theta) = S^{0(1)}_{kij}(\theta) + S^{0(2)}_{kij}(\theta) + S^{0(3)}_{kij}(\theta) + S^{0(4)}_{kij}(\theta), \tag{A.45}$$
$$S^1_{kij}(\theta) = S^{1(1)}_{kij}(\theta) + S^{1(2)}_{kij}(\theta) + S^{1(3)}_{kij}(\theta) + S^{1(4)}_{kij}(\theta). \tag{A.46}$$

Для разложения в ряд подынтегрального выражения (A.2) необходимо вычислить члены разложения функций $\phi_\alpha(\mathbf{x})$ и $J(\mathbf{x})$. Интерполирующая функция ϕ_α в точке интегрирования $\mathbf{x}$ запишется в виде

$$\phi_\alpha(\mathbf{x}) = \phi_\alpha(\mathbf{y}) + \rho d\Phi(\theta) + O(\rho^2), \tag{A.47}$$
$$d\Phi(\theta) = \phi_{\alpha,\xi_1}\cos(\theta) + \phi_{\alpha,\xi_2}\sin(\theta). \tag{A.48}$$

Якобиан J в точке интегрирования $\mathbf{x}$ равен

$$J(\mathbf{x}) = J(\mathbf{y}) + \rho dJ(\theta) + O(\rho^2), \tag{A.49}$$
$$dJ(\theta) = J_{,\xi_1}\cos(\theta) + J_{,\xi_2}\sin(\theta). \tag{A.50}$$

Тогда разложение в ряд подынтегрального выражения (A.2) в запишется в виде

$$K_{ij}(\mathbf{y},\mathbf{x}) = K_{ij}^{-3}(\theta)\rho^{-3} + K_{ij}^{-2}(\theta)\rho^{-2} + O(\rho^{-1}), \tag{A.51}$$

$$K_{ij}^{-3}(\theta) = n_k(\mathbf{y}) S_{kij}^{-3}(\theta)\phi_\alpha(\mathbf{y}) J(\mathbf{y}). \tag{A.52}$$

$$\begin{aligned} K_{ij}^{-2}(\theta) = n_k(\mathbf{y}) \big[& S_{kij}^{-2}(\theta)\phi_\alpha(\mathbf{y}) J(\mathbf{y}) + \\ & + S_{kij}^{-3}(\theta)\big(\phi_\alpha(\mathbf{y}) dJ(\theta) + d\Phi(\theta) J(\mathbf{y})\big)\big]. \end{aligned} \tag{A.53}$$

Итак, мы получили два первых члена K_{ij}^{-3} и K_{ij}^{-2} разложения подынтегрального выражения K_{ij} (A.2) в ряд по локальной координате ρ.

Приложение В

Программный комплекс решения трехмерных задач зарождения трещины и вычисления НДС тел с трещинами

Программный комплекс [19] предназначен для решения трехмерной задачи зарождения трещины от поверхности упругого тела или полости в бесконечной упругой среде под действием приложенной внешней нагрузки и для вычисления НДС трехмерных тел с трещинами, включающего в себя три коэффициента интенсивности напряжений на фронте трещины.

При решении задач зарождения трещин расчет НДС осуществляется прямым МГЭ, а в задачах с трещинами — двумя различными методами: либо МГЭ/МО, либо дуальным МГЭ. В задаче зарождения трещины используются три критерия зарождения трещины: классический критерий максимальных растягивающих напряжений, критерий осредненных по отрезку напряжений (d-критерий) и критерий максимальных растягивающих напряжений с прочностью, зависящей от кривизны поверхности тела (R-критерий).

Программный комплекс состоит из файлов, представленных в табл. В.1 В папке /test лежат входные файлы сетки в формате **.neu** и параметров расчета задачи зарождения трещины от скважины и перфорации (параметры упру-

Таблица В.1 — Состав программного комплекса

Наименование файла	Путь к файлу	Назначение файла
Init3D.exe	./bin	Исполняемый файл
*	./src	Файлы исходного кода
Manual.pdf	./doc	Инструкция по применению
WellPerf.neu	./test	Файл сетки
conf.txt	./test	Файл входных параметров

гости, параметры нагружения, такие как напряжения залегания, параметры критериев зарождения и т.д.).

Программный комплекс Init3D написан на языке **fortran** и для его сборки необходим компилятор, поддерживающий стандарт **fortran 2003** и библиотека **OpenMP** для параллельных вычислений.

Модуль, отвечающий за решение задачи зарождения трещины, включает в себя следующие блоки: модуль считывания расчетной сетки и входных параметров; модуль расчета НДС с помощью прямого МГЭ; модуль для вычисления давления зарождения трещины, использующий данные расчета НДС; модуль, выделяющий зоны инициации трещины; модуль для построения зародышевой трещины.

Модуль расчета НДС трехмерной задачи упругости с полостями и трещинами включает в себя два основных блока: модуль вычисления коэффициентов СЛАУ путем численного интегрирования граничный интегральных уравнений смещений и напряжений и модуль решения результирующей СЛАУ, являющиеся наиболее трудоемкими участками программы. Модуль численного интегрирования имеет вычислительную сложность $O(N^2)$, где N — количество степеней свободы задачи. Сложность $O(N^2)$ обеспечивается тем, что необходимо пройтись по всем узлам сетки (N раз) и в каждом узле вычислить вклад в интеграл со стороны всех остальных узлов сетки (N раз). Процесс интегрирования распараллелен с помощью библиотеки **OpenMP**. Интегрирование для каждого узла сетки можно производить независимо друг от друга, поэтому процесс легко параллелится с помощью директивы **$OMP PARALLEL DO**. Использование **OpenMP** позволяет ускорить процесс заполнения СЛАУ примерно в три раза на четырех процессорах персонального компьютера. Для решения СЛАУ используется методы обобщенных минимальных невязок [142] (сложность $O(N^2)$, так как метод является итерационным, и в нем требуется несколько раз выполнить умножение вектора длины N на матрицу размера $N \times N$) и быстрого LU-разложения из библиотеки **MKL** (сложность $O(N^3)$, прямой метод для неразреженных матриц).

На рисунке В.1 изображена блок-схема программного комплекса Init3D для решения задачи зарождения трещины от поверхности упругого тела или полости в бесконечной упругой среде, а также для вычисления НДС и КИНов на фронте сформировавшейся трещины. На вход в программу подается геометрия рассматриваемой задачи (расчетная сетка, включающая в себя набор узлов $\mathbf{x}_p = \{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{N_p}\}$ и граничных элементов $E_e = \{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{N_e}\}$) и набор известных параметров нагружения тела $\sigma_k = \{\sigma_1, ..., \sigma_{N_k}\}$, а также границы поиска неизвестной номинальной нагрузки σ_N и начальное приближение нагрузки σ_N^0. Запускается цикл поиска неизвестной нагрузки σ_N, в котором методом бисекции подбирается такое значение σ_N, что выполнится критерий зарождения трещины для максимума функции F в критерии разрушения (2.4) с заданной точностью ε_σ. Функция F монотонна, что гарантирует сходимость метода. Новое приближение для неизвестной нагрузки на шаге $s+1$ определяется оператором $\mathbb{S}$. Внутри цикла на каждой итерации s вычисляется НДС тела с помощью классического метода граничных элементов. После вычисления нагрузки σ_N, необходимой для разрушения, запускается модуль, выполняющий построение зародышевых трещин. Для построенных зародышевых трещин выполняется процедура, вычисляющая НДС одним двух из разработанных методов — МГЭ/МО или ДМГЭ. Теперь, используя значения разрыва смещений в окрестности фронта трещины, вычисляем КИНы на фронте. Полученные данные являются начальной конфигурацией для модели распространения трещины и передаются в эту модель.

Результаты диссертационной работы используются в филиале «Технологической Компании Шлюмберже», что подтверждает акт, приведенный на рисунке В.2.

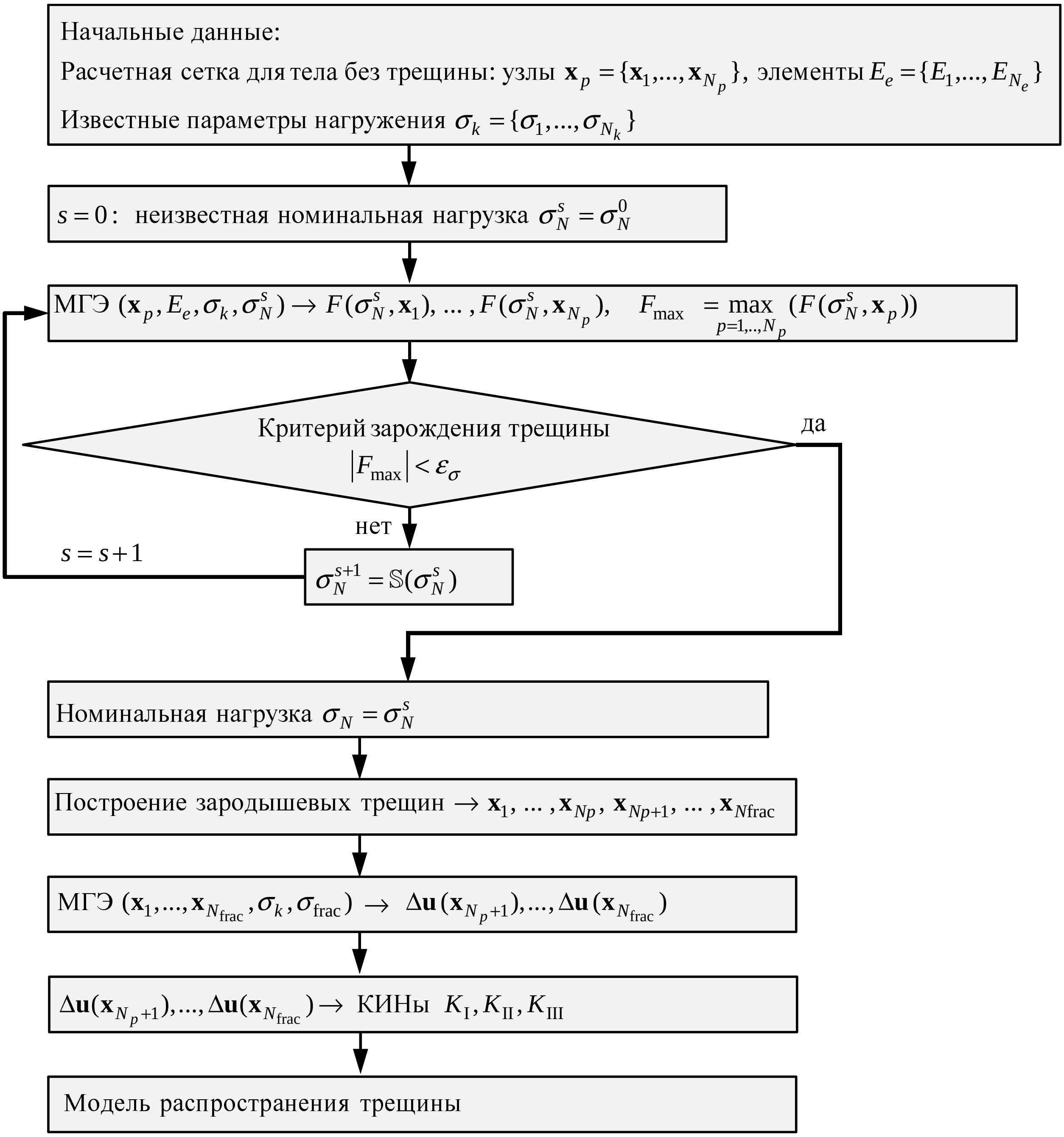


Рисунок В.1 — Блок-схема программного комплекса для решения задач зарождения трещины и вычисления КИНов на фронте зародившейся трещины.

УТВЕРЖДАЮ
Директор филиала
ООО «Технологическая Компания
Шлюмберже» в г. Новосибирске
________________ Ф. Н. ЛИТВИНЕЦ
«25» февраля 2020 г.

АКТ
об использовании в филиале ООО «Технологическая Компания Шлюмберже»
г. Новосибирске научных результатов диссертационной работы
«Методы граничных элементов и критерии разрушения в трехмерных задачах зарождения и распространения трещин»
на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
младшего научного сотрудника Института вычислительных технологий СО РАН
КУРАНАКОВА ДМИТРИЯ СЕРГЕЕВИЧА

Мы, нижеподписавшиеся инженер по моделированию БАДАЖКОВ Д. В. и руководитель проекта КУЗНЕЦОВ Д. С., составили настоящий акт о том, что следующие результаты диссертационной работы КУРАНАКОВА Д. С. используются в практической деятельности филиала «Технологической Компании Шлюмберже» в г. Новосибирске.

1. В филиале «Технологической Компании Шлюмберже» в г. Новосибирске внедрены разработанные автором диссертации численные алгоритмы расчета процесса зарождения трещины гидроразрыва от скважины с перфорацией в трехмерной постановке при всевозможных ориентациях скважины и перфорации относительно напряжений залегания.

2. Результаты расчетов, выполненных с применением указанных алгоритмов, используются в технологических (проектных) исследованиях в филиале «Технологической Компании Шлюмберже» в г. Новосибирске.

Инженер по моделированию
____________ к. т. н. Д. В. БАДАЖКОВ
«25» февраля 2020 г.

Руководитель проекта
____________ к. ф.-м. н. Д. С. КУЗНЕЦОВ
«25» февраля 2020 г.

Рисунок В.2 — Акт об использовании результатов диссертационной работы.

Литература

1. Черный С.Г., Лапин В.Н., Есипов Д.В., Куранаков Д.С. Методы моделирования зарождения и распространения трещин (монография). — Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2016. — 312 с.

2. Есипов Д.В., Куранаков Д.С., Лапин В.Н., Черный С.Г. Многозонный метод граничных элементов и его применение к задаче инициации трещины гидроразрыва из перфорированной обсаженной скважины // Вычислительные технологии. — 2011. — Т. 16, № 6. — С. 13–26.

3. Куранаков Д.С., Есипов Д.В., Лапин В.Н., Черный С.Г. Трехмерный дуальный метод граничных элементов решения задач упругости с трещинами // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. — 2015. — Т. 13, № 1. — С. 74–90.

4. Alekseenko O.P., Potapenko D.I., Cherny S.G., Esipov D.V., Kuranakov D.S., Lapin V.N. 3D modeling of fracture initiation from perforated noncemented wellbore // SPE Journal. — 2013. — Vol. 18, No. 3. — P. 589–600.

5. Shokin Yu., Cherny S., Esipov D., Lapin V., Lyutov A., Kuranakov D. Three-dimensional model of fracture propagation from the cavity caused by quasi-static load or viscous fluid pumping // Communications in Computer and Information Science. — Springer Science + Business Media, 2015. — P. 143–157.

6. Kuranakov D.S., Esipov D.V., Lapin V.N., Cherny S.G. Modification of the boundary element method for computation of three-dimensional fields of strain-stress state of cavities with cracks // Engineering Fracture Mechanics. — 2016. — Vol. 153. — P. 302–318.

7. Cherny S., Lapin V., Esipov D., Kuranakov D., Avdyushenko A., Lyutov A., Karnakov P. Simulating fully 3D non-planar evolution of hydraulic fractures // International Journal of Fracture. — 2016. — Vol. 201, No. 2. — P. 181–211.

8. Cherny S., Esipov D., Kuranakov D., Lapin V., Chirkov D., Astrakova A. Prediction of fracture initiation zones on the surface of three-dimensional structure using the surface curvature // Engineering Fracture Mechanics. — 2017. — Vol. 172. — P. 196–214.

9. Черный С.Г., Лапин В.Н., Есипов Д.В., Куранаков Д.С. Метод граничных элементов и его приложение к задаче разрушения перфорированной скважины // 10-я Всероссийская научная конференция «Краевые задачи и математическое моделирование». — Новокузнецк: Новокузнецкий филиал КемГУ, 2010. — С. 159–168.

10. Есипов Д.В., Черный С.Г., Куранаков Д.С., Лапин В.Н. Моделирование многозонным методом граничных элементов процесса инициации трещины гидроразрыва пласта из перфорированной обсаженной скважины // Междунар. конф. «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика», посвященная 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Яненко. — Новосибирск: НТЦ «Информрегистр», № гос. рег. 0321101160, 2011. — http://conf.nsc.ru/files/conferences /niknik-90/fulltext/40532/47467/EsipovDV.pdf.

11. Черный С.Г., Есипов Д.В., Лапин В.Н., Куранаков Д.С. Проблемы моделирования гидравлического разрыва пласта в двумерной и трехмерной постановках // Материалы IX междунар. конф. по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2012). — Алушта: МАИ-ПРИНТ, 2012. — С. 441–443.

12. Лапин В.Н., Черный С.Г., Есипов Д.В., Куранаков Д.С. Трехмерная модель зарождения и распространения трещины от полости в упругой среде нагруженной постоянным давлением // VIII Казахстанско-Российская международная научно-практическая конференция «Математическое мо-

делирование в научно-технологических и экологических проблемах нефтегазовой отрасли», Казахстан, г. Атырау. — 2014. — С. 1–7.

13. Куранаков Д.С., Есипов Д.В., Лапин В.Н., Черный С.Г. Трехмерная численная модель зарождения трещин, учитывающая «эффект размера» // VIII Казахстанско-Российская международная научно-практическая конференция «Математическое моделирование в научно-технологических и экологических проблемах нефтегазовой отрасли», Казахстан, г. Атырау. — 2014. — С. 1–6.

14. Aidagulov G., Alekseenko O., Chang F., Bartko K., Cherny S., Esipov D., Kuranakov D., Lapin V. Model of hydraulic fracture initiation from the notched openhole // Proceedings of the 2015 Annual Technical Symposium & Exhibition. — Al Khobar, Saudi Arabia, 2015. — P. 1–12. — SPE-178027-MS.

15. Briner A., Florez J.C., Nadezhdin S., Alekseenko O., Gurmen N., Cherny S., Kuranakov D., Lapin V. Impact of perforation tunnel orientation and length in horizontal wellbores on fracture initiation pressure in maximum tensile stress criterion model for tight gas fields in the Sultanate of Oman // SPE Middle East Oil & Gas Show and Conference. — Manama, Bahrain, 2015. — SPE-172663-MS.

16. Briner A., Florez J.C., Nadezhdin S., Gurmen N., Alekseenko O., Cherny S., Kuranakov D., Lapin V. Impact of wellbore orientation on fracture initiation pressure in maximum tensile stress criterion model for tight gas field in the Sultanate of Oman // SPE North Africa Technical Conference and Exhibition. — Cairo, Egypt, 2015. — SPE-175725-MS.

17. Briner A., Florez J.C., Nadezhdin S., Gurmen N., Alekseenko O., Cherny S., Kuranakov D., Lapin V. Impact of wellbore completion type on fracture initiation pressure in maximum tensile stress criterion model for tight gas field in the Sultanate of Oman // International Petroleum Technology Conference. — Doha, Qatar, 2015. — IPTC-18261-MS.

18. Черный С.Г., Есипов Д.В., Лапин В.Н., Куранаков Д.С., Астракова А.С. Программа расчета напряженно-деформированного состояния произволь-

ного кусочно-однородного упругого тела в конечных или бесконечных трехмерных областях методом граничных элементов «CADBEM/2013». — 2013. — Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ №2013611577.

19. Черный С.Г., Лапин В.Н., Есипов Д.В., Куранаков Д.С., Астракова А.С. Программа трехмерного моделирования зарождения трещины в хрупком материале под воздействием приложенной нагрузки «CADINIT/2019». — 2019. — Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2019613363.

20. Belytschko T., Gracie R., Ventura G. A review of extended/generalized finite element methods for material modeling // Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering. — 2009. — Vol. 17, No. 4. — P. 043001.

21. Mi Y., Aliabadi M.H. Dual boundary element method for three-dimensional fracture mechanics analysis // Engineering Analysis with Boundary Elements. — 1992. — Vol. 10, No. 2. — P. 161–171.

22. Sedov L.I. Mechanics of Continuous Media. — World Scientific, 1997. — 1368 p.

23. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. — Москва: Мир, 1984. — 429 с.

24. Галёркин Б.Г. Стержни и пластины. Ряды в некоторых вопросах упругого равновесия // Вестник инженеров. — 1915. — Т. 1, № 19. — С. 897–908.

25. Melenk J.M., Babuška I. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 1996. — Vol. 139, No. 1-4. — P. 289–314.

26. Gupta P., Duarte C.A. Simulation of non-planar three-dimensional hydraulic fracture propagation // International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. — 2014. — Vol. 38, No. 13. — P. 1397–1430.

27. Rizzo F.J. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics // Quarterly of Applied Mathematics. — 1967. — Vol. 25, No. 1. — P. 83–95.

28. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. — М.: Мир, 1987. — 328 с.

29. Thompson W. (Lord Kelvin). Note on the integration of the equations of equilibrium of an elastic solid // Cambridge and Dublin Mathimatical Journal. — 1848. — Vol. 3. — P. 87–89.

30. Купрадзе В.Д. Методы теории потенциала в теории упругости. — М.: Наука, 1963. — 472 с.

31. Betti E. Teoria dell elasticita // Il Nuovo Cienmento. — 1872. — P. 7–10.

32. Есипов Д.В. Моделирование процесса инициации гидроразрыва пласта методом граничных элементов // Вестник КазНУ. Серия: математика, механика, информатика. — 2010. — Т. 3, № 66. — С. 270–277.

33. Alekseenko O.P., Potapenko D.I., Cherny S.G., Esipov D.V., Kuranakov D.S., Lapin V.N. 3-D modeling of fracture initiation from perforated non-cemented wellbore // SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference. — The Woodlands, Texas, 2012. — P. 1–16. — SPE-151585-PA.

34. Alekseenko O.P., Potapenko D.I., Kuranakov D.S., Lapin V.N., Cherny S.G., Esipov D.V. 3D modeling of fracture initiation from cemented perforated wellbore // 19th European Conference on Fracture "Fracture mechanics for durability, reliability and safety", Kazan, Russia, 1 CD-ROM. — 2012.

35. Cruse T. Boundary element analysis in computational fracture mechanics. — Dordrecht, Boston: Kluwer Academic Publishers, 1988. — 180 p.

36. Crouch S.L. Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method. i. infinite body solution // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 1976. — Vol. 10, No. 2. — P. 301–343.

37. Liu Y.J., Li Y.X. Revisit of the equivalence of the displacement discontinuity method and boundary element method for solving crack problems //

Engineering Analysis with Boundary Elements. — 2014. — Vol. 47. — P. 64–67.

38. Aliabadi M.H. The Boundary Element Method, Applications in Solids and Structures (Volume 2). — John Wiley & Sons, 2002. — 598 p.

39. Li S., Mear M.E., Xiao L. Symmetric weak-form integral equation method for three-dimensional fracture analysis // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 1998. — Vol. 151, No. 3–4. — P. 435–459.

40. Rungamornrat J. A Computational Procedure for Analysis of Fractures in Three Dimensional Anisotropic Media: Ph. D. thesis / J. Rungamornrat ; Department of Aerospace Engineering and Engineering Mechanics, The University of Texas at Austin. — 2004. — 178 p.

41. Rungamornrat J., Wheeler M.F., Mear M.E. Coupling of fracture/non-newtonian flow for simulating nonplanar evolution of hydraulic fractures // SPE Annual Technical Conference and Exhibition. — 2005. — SPE-96968-MS.

42. Chen J.T., Kuo S.R., Chen W.C., Liu L.W. On the free term on the dual BEM for the two and three-dimensional laplace problems // Journal of Marine Science and Technology. — 2000. — Vol. 8, No. 1. — P. 8–15.

43. Guiggiani M., Krishnasamy G., Rudolphi T.J., Rizzo F.J. A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations // Journal of Applied Mechanics. — 1992. — Vol. 59, No. 3. — P. 604–614.

44. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. — М.: Наука, 1974. — 640 с.

45. Irwin G. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate // Journal of Applied Mechanics. — 1957. — Vol. 24. — P. 361–364.

46. Aliabadi M.H. Boundary element formulations in fracture mechanics // Applied Mechanics Reviews. — 1997. — Vol. 50, No. 2. — P. 83–96.

47. Tsepoura K.G., Polyzos D. Static and harmonic BEM solutions of gradient elasticity problems with axisymmetry // Computational Mechanics. — 2003. — Vol. 32, No. 1–2. — P. 89–103.

48. Rice J.R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks // Journal of Applied Mechanics. — 1968. — Vol. 35, No. 2. — P. 379–386.

49. Walters M.C., Paulino G.H., Dodds R.H. Interaction integral procedures for 3-d curved cracks including surface tractions // Engineering Fracture Mechanics. — 2005. — Vol. 72, No. 11. — P. 1635–1663.

50. Hartranft R.J., Sih R.J. Stress singularity for a crack with an arbitrarily curved front // Engineering Fracture Mechanics. — 1977. — Vol. 9, No. 3. — P. 705–718.

51. Gray L.J., Phan A.-V., Paulino G.H., Kaplan T. Improved quarter-point crack tip element // Engineering Fracture Mechanics. — 2003. — Vol. 70, No. 2. — P. 269–283.

52. Cisilino A.P., Aliabadi M.H. Three-dimensional BEM analysis for fatigue crack growth in welded components // International Journal of Pressure Vessels and Piping. — 1997. — Vol. 70, No. 2. — P. 135–144.

53. Detournay E. Mechanics of hydraulic fractures // Annu. Rev. Fluid Mech. — 2016. — Vol. 48, No. 1. — P. 311–339.

54. Sneddon I.N. The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 1946. — Vol. 187, No. 1009. — P. 229–260.

55. Abe H., Mura T., Keer L.M. Growth rate of a penny-shaped crack in hydraulic fracturing of rocks // Journal Geophysical Research. — 1976. — Vol. 81, No. 29. — P. 5335–5340.

56. Мураками Ю. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. — М.: Мир, 1990.

57. Tada H. The stress analysis of cracks handbook. — New York: ASME Press, 2000. — 698 p.

58. Bunger A.P., Detournay E. Early-time solution for a radial hydraulic fracture // Journal of Engineering Mechanics. — 2007. — Vol. 133, No. 5. — P. 534–540.

59. Erdogan F., Sih G.C. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear // Journal of Basic Engineering. — 1963. — Vol. 85, No. 4. — P. 519–525.

60. Rankine W. A Manual of Applied Mechanics. — London, Glasgow: Richard Griffin and Company, 1857. — 640 p.

61. Tresca H. Mémoire sur l'écoulement des corps solides soumis à de fortes pressions // Comptes Rendus de l'Academie des Sciences. — 1864. — Vol. 59. — P. 754–758.

62. Mises R.V. Mechanik der festen körper im plastisch-deformablen zustand [mechanics of solid bodies in plastic deformation state] // Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen. — 1913. — Vol. 1. — P. 582–592.

63. Coulomb C.A. Sur une application des régles de maximis et minimis à quelques problémes de statique: relatifs à l'architecture // Mem. Acad. Roy. Div. Sav. — 1773. — Vol. 7. — P. 343–387.

64. Mohr O. Welche umstände bedingen die elastizitätsgrenze und den bruch eines materiales? // Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure. — 1900. — Vol. 44. — P. 1524–1530.

65. Drucker D.C., Prager W. Soil mechanics and plastic analysis for limit design // Quarterly of Applied Mathematics. — 1952. — Vol. 10, No. 2. — P. 157–165.

66. Полилов А.Н., Татусь Н.А. Биомеханика прочности волокнистых композитов. — ФИЗМАТЛИТ, 2017. — 416 с.

67. Huang J., Griffiths D.V., Wong S.W. Initiation pressure location and orientation of hydraulic fracture // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. — 2012. — Vol. 49. — P. 59–67.

68. You M. Discussion on “A generalized three-dimensional failure criterion for rock masses” // Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering. — 2013. — Vol. 5, No. 5. — P. 412–416.

69. Griffith A.A. The phenomena of rupture and flow in solids // Phylosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character. — 1921. — Vol. 221. — P. 163–198.

70. Sammis C.G., Ashby M.F. The failure of brittle porous solids under compressive stress states. // Acta Metallurgica. — 1986. — Vol. 34, No. 3. — P. 511–526.

71. Ingraffea A.R. Theory of crack initiation and propagation of rock structures // Fracture mechanics of rock / Ed. by B.K. Atkinson. — London: Academic Press, 1987. — P. 71–110.

72. Carter B.J. Size and stress gradient effects on fracture around cavities // Rock Mech. Rock Engng. — 1992. — Vol. 25(3). — P. 167–186.

73. Pais M.J., Kim N.-H., Davis T. Reanalysis of the extended finite element method for crack initiation and propagation // AIAA SDM Student Symposium. — 2010.

74. Баренблатт Г.И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении // ПММ. — 1959. — Т. 23, № 4. — С. 706–721.

75. Barenblatt G.I. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture // Advances in Applied Mechanics. — Elsevier, 1962. — Vol. 7. — P. 55–129.

76. Леонов М.Я., Панасюк В.В. Развитие мельчайших трещин в твердом теле // Прикладная механика. — 1959. — Т. 5, № 4. — С. 391–401.

77. Dugdale D.S. Yielding of steel sheets containing slits // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 1960. — Vol. 8, No. 2. — P. 100–104.

78. Fracture Mechanics of Rock (Academic Press Geology Series) / Ed. by B.K. Atkinson. — Academic Press, 1987. — 548 p.

79. Scheider I., Brocks W. The effect of the traction separation law on the results of cohesive zone crack propagation analyses // Key Engineering Materials. — 2003. — Vol. 251. — P. 313–318.

80. Tvergaard V., Hutchinson J.W. The relation between crack growth resistance and fracture process parameters in elastic-plastic solids // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 1992. — Vol. 40, No. 6. — P. 1377–1397.

81. Needleman A. A continuum model for void nucleation by inclusion debonding // Journal of Applied Mechanics. — 1987. — Vol. 54, No. 3. — P. 525–531.

82. Hillerborg A., Modéer M., Petersson P.-E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements // Cement and Concrete Research. — 1976. — Vol. 6, No. 6. — P. 773–781.

83. Hermes F.H. Process zone and cohesive element size in numerical simulations of delamination in bi-layers: Master's thesis. — Eindhoven University of Technology. — 2010.

84. Cornec A., Scheider I., Schwalbe K.-H. On the practical application of the cohesive model // Engineering Fracture Mechanics. — 2003. — Vol. 70, No. 14. — P. 1963–1987.

85. Schwalbe K.-H., Cornec A. Modeling crack growth using local process zones. — Geethacht, Germany: GKSS Research Centre, 1994.

86. Ortiz M., Suresh S. Statistical properties of residual stresses and intergranular fracture in ceramic materials // Journal of Applied Mechanics. — 1993. — Vol. 60, No. 1. — P. 77.

87. Camacho G.T., Ortiz M. Computational modelling of impact damage in brittle materials // International Journal of Solids and Structures. — 1996. — Vol. 33, No. 20-22. — P. 2899–2938.

88. Geubelle P.H., Baylor J.S. Impact-induced delamination of composites: a 2D simulation // Composites Part B: Engineering. — 1998. — Vol. 29, No. 5. — P. 589–602.

89. Xu X.-P., Needleman A. Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 1994. — Vol. 42, No. 9. — P. 1397–1434.

90. Ortiz M., Pandolfi A. Finite-deformation irreversible cohesive elements for three-dimensional crack-propagation analysis // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 1999. — Vol. 44, No. 9. — P. 1267–1282.

91. Roy Y.A., Dodds Jr. R.H. Simulation of ductile crack growth in thin aluminum panels using 3-D surface cohesive elements // International Journal of Fracture. — 2001. — Vol. 110, No. 1. — P. 21–45.

92. Qiu Y., Crisfield M.A., Alfano G. An interface element formulation for the simulation of delamination with buckling // Engineering Fracture Mechanics. — 2001. — Vol. 68, No. 16. — P. 1755–1776.

93. Blackman B.R.K., Hadavinia H., Kinloch A.J., Williams J.G. The use of a cohesive zone model to study the fracture of fibre composites and adhesively-bonded joints // International Journal of Fracture. — 2003. — Vol. 119, No. 1. — P. 25–46.

94. Turon A., Camanho P.P., Costa J., Dávila C.G. A damage model for the simulation of delamination in advanced composites under variable-mode loading // Mechanics of Materials. — 2006. — Vol. 38, No. 11. — P. 1072–1089.

95. Kyaw P.-E., Tanner D.W.J., Becker A.A., Sun W., Tsang D.K.L. Modelling crack growth within graphite bricks due to irradiation and radiolytic oxidation // Procedia Materials Science. — 2014. — Vol. 3. — P. 39–44.

96. Chen Z., Bunger A.P., Zhang X., Jeffrey R.G. Cohesive zone finite element-based modeling of hydraulic fractures // Acta Mechanica Solida Sinica. — 2009. — Vol. 22, No. 5. — P. 443–452.

97. Yao Y., Liu L., Keer L.M. Pore pressure cohesive zone modeling of hydraulic fracture in quasi-brittle rocks // Mechanics of Materials. — 2015. — Vol. 83. — P. 17–29.

98. Chen C.R., Kolednik O. Comparison of cohesive zone parameters and crack tip stress states between two different specimen types // International Journal of Fracture. — 2005. — Vol. 132, No. 2. — P. 135–152.

99. Nilsson F. A tentative method for determination of cohesive zone properties in soft materials // International Journal of Fracture. — 2005. — Vol. 136, No. 1–4. — P. 133–142.

100. Xia L., Shih S.F. Ductile crack growth-I. A numerical study using computational cells with microstructurally-based length scales // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 1995. — Vol. 43, No. 2. — P. 233–259.

101. Xia L., Shih S.F. Ductile crack growth-II. Void nucleation and geometry effects on macroscopic fracture behavior // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 1995. — Vol. 43, No. 12. — P. 1953–1981.

102. Tvergaard V., Hutchinson J.W. Effect of strain-dependent cohesive zone model on predictions of crack growth resistance // International Journal of Solids and Structures. — 1996. — Vol. 33, No. 20-22. — P. 3297–3308.

103. Siegmund T., Brocks W. Prediction of the work of separation and implications to modeling // International Journal of Fracture. — 1999. — Vol. 99, No. 1. — P. 97–116.

104. Tvergaard V. Crack growth predictions by cohesive zone model for ductile fracture // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 2001. — Vol. 49, No. 9. — P. 2191–2207.

105. García I.G., Paggi M., Mantič V. Comparison of the size effect predicted by a cohesive zone model and the finite fracture mechanics for the fiber-matrix debonding // Proc. 16th European conference on composite materials (ECCM). — Seville, Spain, 2014.

106. Neuber H. Kerbspannungslehre grundlagen fur genaue spannungsrechnung. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1937. — 160 p.

107. Neuber H. Theory of notch stresses: principles for exact calculation of strength with reference to structural form and material. — 2nd edition. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1958. — 293 p.

108. Novozhilov V.V. On a necessary and sufficient criterion for brittle strength // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. — 1969. — Vol. 33, No. 2. — P. 201–210.

109. Peterson R.E. Notch sensitivity // Metal Fatigue / Ed. by G. Sines, J.L. Waisman. — New York: McGraw-Hill, 1959. — P. 293–306.

110. Whitney J.M., Nuismer R.J. Stress fracture criteria for laminated composites containing stress concentrations // Journal of Composite Materials. — 1974. — Vol. 8, No. 3. — P. 253–265.

111. Nuismer R.J., Whitney J.M. Uniaxial failure of composite laminates containing stress concentrations // Fracture Mechanics of Composites. — ASTM, 1975. — No. STP 593. — P. 117–142.

112. Tanaka K. Engineering formulae for fatigue strength reduction due to crack-like notches // International Journal of Fracture. — 1983. — Vol. 22, No. 2. — P. R39–R46.

113. Taylor D. Geometrical effects in fatigue: a unifying theoretical model // International Journal of Fatigue. — 1999. — Vol. 21, No. 5. — P. 413–420.

114. Taylor D., Bologna P., Bel Knani K. Prediction of fatigue failure location on a component using a critical distance method // International Journal of Fatigue. — 2000. — Vol. 22, No. 9. — P. 735–742.

115. Taylor D. The theory of critical distances: a new perspective in fracture mechanics. — Elsevier, 2007. — 306 p.

116. Susmel L., Taylor D. The theory of critical distances to predict static strength of notched brittle components subjected to mixed-mode loading // Engineering Fracture Mechanics. — 2008. — Vol. 75, No. 3–4. — P. 534–550.

117. Буров А.Е., Кокшаров И.И., В.В. Москвичев. Моделирование разрушения и трещиностойкость волокнистых металлокомпозитов. — Новосибирск: Наука, 2003. — 172 с.

118. Berto F., Lazzarin P., Gómez F.J., Elices M. Fracture assessment of U-notches under mixed mode loading: two procedures based on the 'equivalent local mode I' concept // International Journal of Fracture. — 2007. — Vol. 148, No. 4. — P. 415–433.

119. Ito T., Hayashi K. Physical background to the breakdown pressure in hydraulic fracturing tectonic stress measurements // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts. — 1991. — Vol. 28, No. 4. — P. 285–293.

120. Lajtai E.Z. Effect of tensile stress gradient on brittle fracture initiation // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts. — 1972. — Vol. 9, No. 5. — P. 569–578.

121. Леган М.А. Применение метода граничных элементов и модифицированного интегрального критерия разрушения для анализа экспериментальных данных // Известия Алтайского Государственного университета: Математика и механика. — 2012. — № 1-1(73). — С. 75–77.

122. Зайцев Г.П., Стреляев В.С. Сопротивление стеклопластмасс деформированию и разрушению при статическом растяжении // Конструкционные свойства пластмасс. — 1968. — С. 36–70.

123. М.Д. Новопашин, С.В. Сукнев. Градиентный критерий текучести элементов конструкций с концентраторами напряжений // Моделирование в механике: Сб. науч. трудов. Новосибирск. — 1987. — Т. 1(18), № 3. — С. 131–140.

124. Н.Н. Афанасьев. О природе усталости образцов с выточкой // ЖТФ. — 1936. — Т. 6, № 8. — С. 1393–1402.

125. Леган М.А. О взаимосвязи градиентных критериев локальной прочности в зоне концентрации напряжений с линейной механикой разрушения //

Прикладная механика и техническая физика. — 1993. — Т. 34, № 4(200). — С. 146–154.

126. Bažant Z.P., Yu Q. Universal size effect law and effect of crack depth on quasi-brittle structure strength // Journal of Engineering Mechanics. — 2009. — Vol. 135, No. 2. — P. 78–84.

127. Vořechovský M., Sadílek V. Computational modeling of size effects in concrete specimens under uniaxial tension // International Journal of Fracture. — 2008. — Vol. 154, No. 1–2. — P. 27–49.

128. Syroka-Korol E., Tejchman J. Numerical studies on size effects in concrete beams // Architecture, Civil Engineering, Environment (ACEE). — 2012. — Vol. 5, No. 2. — P. 67–78.

129. van Vliet M.R.A., van Mier J.G.M. Experimental investigation of size effect in concrete and sandstone under uniaxial tension // Engineering Fracture Mechanics. — 2000. — Vol. 65, No. 2–3. — P. 165–188.

130. Marsavina L., Constantinescu D.M., Linul E., Apostol D.A., Voiconi T., Sadowski T. Refinements on fracture toughness of PUR foams // Engineering Fracture Mechanics. — 2014. — Vol. 129. — P. 54–66.

131. Bažant Z.P., Planas J. Fracture and size effect in concrete and other quasi-brittle materials. — Boca Raton, Florida: CRC Press LLC, 1998. — 640 p.

132. Chang F.F., Bartko K., Dyer S., Aidagulov G., Suarez-Rivera R., Lund J. Multiple fracture initiation in openhole without mechanical isolation: First step to fulfill an ambition // SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference. — 2014. — SPE-168638-MS.

133. Zhao Z., Kim H., Haimson B. Hydraulic fracturing initiation in granite // 2nd North American Rock Mechanics Symposium. — Montreal, Quebec, Canada: American Rock Mechanics Association, 1996. — P. 1–6. — ARMA-96-1279.

134. Lhomme T. Initiation of Hydraulic Fractures in Natural Sandstones: Ph. D. thesis / T. Lhomme ; Delft University of Technology. — 2005. — 257 p.

135. Atwi M.A., Al-Driweesh S.M., Al-Sagr A.M., Garzon F.O., Al-Mulhim A.A., Kharrat W., Stucker J., Keong A.H. Successful implementation of abrasive perforation in highly deviated HP/HT gas well // SPE International Production and Operations Conference & Exhibition. — 2012. — SPE-157379-MS.

136. Bansal R.K. A textbook of strength of materials : (in S.I. units). — Bangalore: Laxmi Publications, 2010. — 1106 p.

137. Behrmann L.A., Elbel J.L. Effect of perforations on fracture initiation // Journal of Petroleum Technology. — 1991. — Vol. 43, No. 05. — P. 608–615. — SPE-20661-PA.

138. Briner A., Moiseyenkov A.V., Prioul R., Abbas S., Nadezhdin S.V., Gurmen M.N. Hydraulic fracture initiation and propagation model provides theoretical ground for hybrid-type fracturing schedules in unconventional gas reservoir in the Sultanate of Oman // SPE Middle East Unconventional Resources Conference and Exhibition. — Muscat, Oman, 2015. — SPE-172950-MS.

139. Qobi L., Kindy S., Bate K.J. How geomechanical data integration helped constrain the placement of the first horizontal well in a new tight gas field // SPE Unconventional Gas Conference and Exhibition. — 2013. — SPE-163954-MS.

140. Hadamard J. Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations. — New Haven: Yale University Press, 1923. — 316 p.

141. Lachat J.C., Watson J.O. Effective numerical treatment of boundary integral equations: A formulation for three-dimensional elastostatics // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 1976. — Vol. 10, No. 5. — P. 991–1005.

142. Saad Y., Schultz M.H. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems // SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing. — 1986. — Vol. 7, No. 3. — P. 856–869.