

Куранаков Дмитрий Сергеевич

**МЕТОДЫ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И КРИТЕРИИ
РАЗРУШЕНИЯ В ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ
ЗАРОЖДЕНИЯ И РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТРЕЩИН**

05.13.18 — Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, г. Новосибирск.

Научный руководитель:

кандидат физико-
математических наук,
**Есипов Денис Викто-
рович**

Официальные оппоненты: (предварительно)

доктор физико-
математических наук,
профессор РАН
**Стефанов Юрий Пав-
лович**

кандидат физико-
математических наук,
**Савенков Евгений Бо-
рисович**

Ведущая организация: (предварительно)

МГУ имени М.В.
Ломоносова

Защита состоится ... в ... часов на заседании диссертационного совета

С диссертацией можно ознакомиться в специализированном читальном зале вычислительной математики и информатики Государственной публичной научно-технической библиотеки СО РАН по адресу: 630090, г. Новосибирск, проспект академика Лаврентьева, д. 6.

Автореферат разослан ...

Ученый секретарь
диссертационного совета,

Общая характеристика работы

Актуальность работы

Построение и обоснование наиболее полных трехмерных численных моделей зарождения и дальнейшего распространения трещины от полости в упругой среде под действием приложенной нагрузки, включающих в себя математические модели и численные методы для их реализации, является важной научной и прикладной проблемой. Научная значимость решения этой проблемы для механики трещин заключается в необходимости установления механизмов влияния напряженно-деформированного состояния (НДС) среды и ее упругих свойств на местоположение зародышевой трещины в окрестности границы произвольного трехмерного тела, ориентацию этой зародышевой трещины, ее раскрытие и коэффициенты интенсивности напряжений на ее фронте. В области математического моделирования и численных методов построение новых наиболее полных трехмерных математических моделей механики трещин, их обоснование, разработка надежных, совершенных численных методов актуальны в связи с необходимостью адекватного описания процесса разрушения материалов и связанными с этим большими затратами вычислительных ресурсов.

Прикладная значимость решения проблемы построения трехмерной модели зарождения трещины обусловлена усовершенствованием и созданием новых технологий гидроразрыва пласта (ГРП). Трехмерное моделирование зарождения и распространения трещины необходимо для усовершенствования инструментальных методов, применяемых в строительстве подземных сооружений в сложных геолого-физических условиях (туннели, шахты и т.д.). Это – методы управляемого разрушения и разгрузки массивов горных пород, создания в них дренажных систем, изолирующих экранов, упрочнения рыхлых пород, откачки воды или газа, изоляции и перекрытия источников поступления пластовых вод и др.

Одной из важных особенностей процесса зарождения трещин в горной породе является так называемый «эффект размера» — зависимость нагрузки, необходимой для разрушения тела, от его геометрических масштабов. Большое количество исследований влияния размера на прочность образцов проведено на простейших задачах об изгибе бетонных балок. Однако для решения сложных трехмерных задач необходима разработка универсальных трехмерных критериев разрушения. К таким задачам относится разрушение породы у перфорированных скважин при проведении гидроразрыва. Из-за эффекта размера давление, необходимое для разрушения породы у перфорации, может быть существенно выше, чем породы возле скважины. Это связано с разницей в характерных размерах скважины и перфорации. В связи с этим использование критерия, не способного учитывать влияние размера на прочность, может привести к неверному предсказанию места зарождения

трещины и ее ориентации.

Для моделирования распространения трещины необходимо вычислять НДС упругой бесконечной среды с полостями и трещинами, которое на фронте трещины имеет сингулярность, которая характеризуется коэффициентами интенсивности напряжений (КИНами). Вычисление КИНов необходимо в задачах распространения трещин, так как они являются параметрами, определяющими направление и скорость роста трещин в квазистатическом приближении. Для решения внешних задач упругости одним из наиболее эффективных методов расчета НДС является метод граничных элементов (МГЭ). Однако классический МГЭ не может использоваться в задачах с трещинами, так как на трещине граничное интегральное уравнение смещений вырождается из-за совпадения противоположных берегов трещины. Поэтому важно построить эффективные численные методы, которые способны решать внешнюю задачу, учитывать наличие полостей, трещин и с высокой точностью вычислять КИНЫ.

Цель исследования — построение модификаций трехмерного метода граничных элементов и создание на его основе адекватных критериев разрушения в трехмерных задачах зарождения трещин. Выявление особенностей формирования зародышевых трещин у перфорированной скважины.

Объектом исследований являются НДС упругой среды с полостями и трещинами, методы вычисления НДС и процессы зарождения и распространения трещин под действием приложенной нагрузки.

Предметом исследований являются закономерности и особенности процессов зарождения и формирования трещины в зависимости от свойств материала и НДС.

Задачи, поставленные для достижения цели

1. Разработать модификации метода граничных элементов, пригодные для решения трехмерных задач с полостями и трещинами.
2. Разработать критерии разрушения, учитывающие эффект размера в трехмерных задачах зарождения трещины.
3. Провести валидацию предложенных критериев на экспериментах по разрушению образцов из бетона и из горной породы различной формы и размеров: блоков с цилиндрическими отверстиями, с боковыми вырезами, скважин с поперечными прошилами.
4. На основе разработанных моделей создать программное обеспечение для решения трехмерных задач зарождения трещины и для вычисления НДС и КИНов в задачах деформации трехмерных тел с полостями и трещинами.
5. С помощью разработанного программного обеспечения установить местоположение зародышевой трещины и давление жидкости, необходимого для зарождения трещины, в зависимости от ориентации скважины и перфо-

рации относительно напряжений залегания на примере конкретного нефтегазового месторождения.

Научные результаты и решённые задачи относятся к пункту “20б. переход к экологически чистой и ресурсосберегающей энергетике, повышение эффективности добычи и глубокой переработки углеводородного сырья, формирование новых источников, способов транспортировки и хранения энергии” Стратегии научно-технологического развития Российской Федерации¹

Методы исследования. Для вычисления НДС упругих тел с полостями и трещинами использовался метод граничных элементов и разработаны его модификации. В основе метода решения задачи зарождения трещины лежат критерии зарождения, определяющие на основе анализа НДС условия, при которых зародится трещина, ее месторасположение, ориентацию и форму.

На защиту выносятся следующие четыре результата, соответствующие четырем пунктам (1,3,4,5) паспорта специальности 05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ по физико-математическим наукам:

Пункт 1 паспорта: Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений.

1. Трёхмерная математическая модель зарождения трещины от поверхности упругого тела, учитывающая эффект размера — влияние размера тела на величину нагрузки, необходимую для его разрушения. В основу модели положены задача упругого равновесия деформируемого тела и критерии зарождения трещины, пригодные для применения в пространственных задачах сложной геометрической конфигурации:

- Осредненное по перпендикулярному к поверхности тела отрезку растягивающее напряжение сравнивается с прочностью материала на разрыв;
- Максимальное растягивающее напряжение сравнивается с локальной прочностью материала, которая зависит от минимального радиуса кривизны поверхности тела.

Пункт 3 паспорта: Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий.

2. Две модификации метода граничных элементов (МГЭ) решения трехмерных задач упругости с полостями и трещинами:

- МГЭ, в котором трещины представляются пропилами малой, но конечной ширины;
- Дуальный МГЭ, в котором на поверхности полости решается граничное интегральное уравнение смещений, а на трещине — гра-

¹О Стратегии научно-технологического развития Российской Федерации: Указ Президента Российской Федерации от 1 декабря 2016 г. № 642.

ническое интегральное уравнение напряжений, записанное относительно разрыва смещений на берегах трещины. Метод вычисления КИНов повышенной точности, в котором аппроксимация разрыва смещений на прифронтовых элементах трещины даёт асимптотическую зависимость, пропорциональную корню из расстояния до фронта.

Пункт 4 паспорта: Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.

3. Программный комплекс для решения задач зарождения трещины от полости в упругой среде и для вычисления НДС и КИНов в задачах с полостями и трещинами.

Пункт 5 паспорта: Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

4. Результаты решения задачи зарождения трещины на поверхности обсаженной скважины с перфорацией под действием давления закачиваемой в скважину жидкости гидроразрыва: зависимости давления зарождения трещины, местоположения и ориентации зародышевой трещины от ориентации скважины и перфорации относительно напряжений залегания.

Таким образом, в соответствии с формулой специальности 05.13.18 в диссертации представлены оригинальные результаты одновременно из трех областей: математического моделирования, численных методов и комплексов программ.

Научная новизна.

Критерий зарождения трещины, в котором локальная прочность на разрыв зависит от кривизны поверхности тела, применяется впервые в трехмерных задачах, несмотря на то, что в основу его положена известное соотношение между размером и прочностью тела. Критерий учитывает эффект размера и позволяет описывать процесс разрушения сложных трехмерных тел, у которых различные части имеют разный характерный размер. Обобщение двумерного критерия растягивающих напряжений, осредненных по отрезку, на трехмерный случай и его валидация проведены впервые.

Предложено и обосновано использование классического МГЭ для задач с трещинами путем их замены пропилом малой, но конечной ширины. Этот метод более эффективен с точки зрения вычислительной экономичности по сравнению с дуальными МГЭ, так как не требует использования разрывных граничных элементов, что приводит к уменьшению количества степеней свободы и, соответственно, размера результирующих матриц для одного

и того же количества граничных элементов. В дуальном МГЭ разработан способ вычисления главного значения Адамара гиперсингулярного интеграла путем разложения подынтегральной функции в точке коллокации в ряд Лорана. Способ модификации форм-функций граничных элементов в окрестности фронта трещины, значительно увеличивающий точность вычисления КИНов, является оригинальным. Этот способ позволяет строить форм-функции для любого поведения разрыва смещений в окрестности фронта трещины: например, при «вязкостном режиме» распространения трещины разрыв смещений должен быть пропорционален степени $2/3$ от расстояния до фронта, а при «вязкостно-утечковом» режиме — степени $5/8$.

Впервые для всевозможных ориентаций скважины и перфорации относительно главных напряжений залегания получены зависимости давления зарождения трещины и ее местоположения. Выявлены основные факторы, влияющие на решение задачи: напряжения залегания и ориентация скважины и перфорации относительно них. Показано, что ориентации скважины и перфорации влияют не только на давление зарождения, но и на местоположение и ориентацию зародившейся трещины. Выявлены все ориентации скважины и перфорации, оптимальные по давлению зарождения.

Достоверность и обоснованность полученных результатов обеспечивается использованием фундаментальных законов механики твердого тела, механики разрушения и выбором теоретически обоснованных численных методов, а также подтверждается согласованием результатов проведенных расчетов с известными аналитическими решениями и экспериментальными данными.

Практическая ценность диссертационной работы заключается в возможности применения ее результатов (методик, алгоритмов, их программной реализации и результатов расчетов) в ряде прикладных областей нефтегазовой промышленности и горного дела.

Представление работы. Основные положения и результаты диссертации **докладывались и обсуждались** на Объединенном семинаре «Информационно-вычислительные технологии (численные методы механики сплошной среды)» Института вычислительных технологий СО РАН, Новосибирского государственного университета и Новосибирского государственного технического университета (руководители — академик Ю.И. Шокин и проф. В.М. Ковеня) а также на всероссийских и международных конференциях: 1) XII Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям, Новосибирск, 3-6 октября 2011; 2) XI Всероссийская научная конференция с международным участием «Краевые задачи и математическое моделирование», Новокузнецк, 10-12 октября 2012; 3) International Conference of Advanced Mathematics, Computations and Applications, Novosibirsk, 8-11 June 2014; 4)

VIII Казахстанско-Российская международная научно-практическая конференция «Математическое моделирование в научно-технологических и экологических проблемах нефтегазовой отрасли», Казахстан, Атырау, 20-21 июня 2014; 5) International Conference “Computational and Informational Technologies in Science, Engineering and Education” (CITech-2015), Almaty, 24-27 September 2015.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 19 печатных работах [1–19], в том числе (в скобках в числителе указан общий объем этого типа публикаций в печатных листах, в знаменателе — объем принадлежащий лично автору) 1 монография [1] (19.5/4.2), 2 статьи в периодических изданиях, рекомендованных ВАК для представления основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора или кандидата наук [2, 3] (4.3/1.2), 5 статей в журналах, индексируемых в базах данных Scopus и Web of Science [4–8] (12.9/2.9), 9 — в трудах международных и всероссийских конференций [9–17] (10.4/2.6), 2 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ (в Роспатенте) [18, 19]. В этих работах автору принадлежат методы расчета НДС в задачах с трещинами и результаты моделирования зарождения трещины гидроразрыва. При этом полная модель трехмерного распространения трещины, включающая в себя подмодели деформации породы, течения жидкости в трещине, критерий распространения трещины, принадлежат соавторам и на защиту не выносятся.

Личный вклад автора. Результаты, составляющие основное содержание диссертации, получены автором самостоятельно. Во всех совместных работах автор участвовал в формулировках постановок задач, модифицировал существующий комплекс программ для решения трехмерных задач определения НДС тел с трещинами, реализовал критерии зарождения трещины, учитывающие эффект размера, провел расчеты и анализ полученных результатов.

Автор выражает глубокую благодарность и признательность С.Г. Черному за всестороннюю поддержку и за постоянное внимание к ходу выполнения работы. Успешному выполнению работы способствовали ценные критические замечания В.Н. Лапина, Д.В. Чиркова, П.В. Карнакова.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка цитируемой литературы и приложения. Диссертация изложена на 131 страницах машинописного текста, включая 64 иллюстраций и 2 таблицы. Список цитируемой литературы содержит 160 наименований.

Содержание диссертации

Во *Введении* обоснована актуальность выбранной темы исследований, сформулированы цель работы и задачи, которые необходимо решить для достижения цели. Приведены основные результаты и положения, выносимые на защиту. Охарактеризована научная новизна и практическая значимость работы. Изложено краткое содержание диссертации по главам.

Глава 1 посвящена трехмерной внешней задаче упругого равновесия, возникающей при моделировании гидроразрыва, и методам ее решения. Приведен обзор методов решения такой задачи: метод конечных элементов (МКЭ) и его модификации (расширенный МКЭ или XFEM/GFEM²) и метод граничных элементов (МГЭ)³ с его разновидностями (прямой и непрямой МГЭ, метод разрывных смещений⁴, симметричный метод Галеркина, дуальный МГЭ (ДМГЭ)⁵).

В МКЭ для решения внешней задачи необходимо рассматривать область достаточно большого размера, чтобы учесть влияние граничных условий на внешней границе, что ведет к существенному увеличению вычислительных затрат. Требуется построение подробной сетки в окрестности фронта трещины и применение специальных элементов, чтобы хорошо описывать поведение решения, которое для напряжений имеет сингулярность на фронте трещины. При распространении трещины необходимо либо перестраивать сетку для каждого шага распространения, либо аппроксимировать область вокруг трещины специальными элементами, обогащенными интерполирующими функциями, учитывающими разрыв смещений на берегах трещины и сингулярное поведение напряжений на её фронте (метод XFEM/GFEM).

Альтернативным методом является МГЭ, в котором дифференциальные уравнения упругого равновесия сводятся к граничным интегральным уравнениям, что позволяет уменьшить на единицу размерность задачи, а также учесть граничные условия на внешней границе S^∞ без ее явной аппроксимации, что обеспечивает значительное снижение вычислительных затрат.

Рассмотрим задачу упругого равновесия. При моделировании процесса гидроразрыва задача упругости характеризуется наличием границы полости S^* , внешней границы S^∞ и двух берегов трещины S^+ и S^- . В точке y на

²Belytschko T., Gracie R., Ventura G. A review of extended/generalized finite element methods for material modeling // *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*. — 2009. — Vol. 18, No. 4. — P. 043001

³Rizzo F.J. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics // *Quarterly of Applied Mathematics*. — 1967. — Vol. 25, No. 1. — P. 83–95.

⁴Crouch S.L. Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method. i. infinite body solution // *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*. — 1976. — Vol. 10, No. 2. — P. 301–343.

⁵Mi Y., Aliabadi M.H. Dual boundary element method for three-dimensional fracture mechanics analysis // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. — 1992. — Vol. 10, No. 2. — P. 161–171

полости S^* для смещений u_i , разрыва смещений $\Delta u_i = u_i^+ - u_i^-$ и напряжений t_i запишем граничное интегральное уравнение смещений (ГИУС)

$$c_{ij}(\mathbf{y})u_i(\mathbf{y}) = \int_{S^*} U_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x})t_i(\mathbf{x})dS - \\ - \int_{S^*} T_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x})u_i(\mathbf{x})dS - \int_{S^-} T_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x})\Delta u_i(\mathbf{x})dS, \quad \mathbf{y} \in S^*. \quad (1)$$

Здесь $c_{ij}(\mathbf{y})$ — коэффициент, зависящий от геометрии поверхности в точке коллокации \mathbf{y} ; функции $U_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ и $T_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ — фундаментальное решение Кельвина о действии сосредоточенной силы на упругую среду, f — главное значение интеграла в смысле Коши. Уравнение (1) получено в предположении, что напряжения на противоположных берегах трещины равны по модулю и противоположны $t_i^+ + t_i^- = 0$. Однако в задачах с трещинами ГИУС для точек коллокации \mathbf{y}^+ и \mathbf{y}^- на противоположных берегах трещины совпадают, что приводит к вырождению результирующей системы интегральных уравнений.

Для преодоления этих трудностей в диссертации разработаны две трехмерные модификации МГЭ для решения внешних задач с полостями и трещинами. В первой модификации трещина заменяется пропилом малой, но конечной ширины. Такая модификация расчетной области вносит погрешность в решение, растущую при увеличении ширины пропила, но позволяет использовать классический МГЭ для решения задач с трещинами, так как противоположные берега трещины S^+ и S^- не совпадают и являются обычной невырожденной границей. Однако существует ограничение снизу на ширину пропила: если он слишком мал, то погрешности при вычислении интегралов для близлежащих точек становятся слишком большими, и для корректного их вычисления требуется всё больше точек интегрирования, что приводит к чрезмерному росту вычислительных затрат.

Исследование на задаче растяжения плоской круглой трещины показало, что оптимальная ширина пропила составляет 0.4–1.6 характерного размера элемента расчетной сетки.

Вторым предложенным методом решения задач с полостями и трещинами является ДМГЭ. В исходном методе на одном из берегов трещины решается ГИУС (1), а на противоположном берегу трещины вместо ГИУС рассматри-

вается граничное интегральное уравнение напряжений (ГИУН)

$$\begin{aligned}
 t_j(\mathbf{y}^-) = & \int_{S^*} D_{kij}(\mathbf{y}^-, \mathbf{x}) n_k(\mathbf{y}) t_i(\mathbf{x}) dS - \int_{S^*} S_{kij}(\mathbf{y}^-, \mathbf{x}) n_k(\mathbf{y}) u_i(\mathbf{x}) dS - \\
 & - \int_{S^-} S_{kij}(\mathbf{y}^-, \mathbf{x}) n_k(\mathbf{y}) \Delta u_i(\mathbf{x}) dS, \quad \mathbf{y} \in S^-, \quad (2)
 \end{aligned}$$

где n_k — нормаль к поверхности в точке коллокации, а функции D_{kij} и S_{kij} получаются из решения Кельвина U_{ij} и T_{ij} дифференцированием по соответствующей координате и использованием закона Гука. Использование ГИУН (2) вместо ГИУС на одном из берегов трещины позволяет решить проблему с вырождением системы уравнений. В предложенной упрощенной модификации ДМГЭ на втором берегу трещины ГИУС не используется ввиду того, что в модели гидроразрыва для вычисления раскрытия трещины необходимо знать только разрыв смещений Δu_i , а значения самих смещений u_i^+ и u_i^- не требуются. Это позволяет уменьшить результирующую СЛАУ до двух раз в задачах без полостей S^* .

При решении уравнения (2) особую трудность представляет вычисление главного значения интеграла в смысле Адамара \int , которое по определению есть конечная часть от разложения интеграла в ряд Лорана в окрестности особой точки. Ядро S_{kij} в (2) имеет не интегрируемую в смысле Коши особенность, пропорциональную $1/r^3$, где r — длина радиус-вектора между точкой коллокации и точкой интегрирования. Не ограничивая общности рассмотрим задачу интегрирования по граничному элементу S^e , в котором находится особая точка \mathbf{y} , как показано на рис. 1

$$I_{ij}(\mathbf{y}) = \int_{S^e} S_{kij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2)) n_k(\mathbf{y}) \phi_\alpha(\xi_1, \xi_2) |J(\xi_1, \xi_2)| d\xi_1 d\xi_2, \quad (3)$$

где (ξ_1, ξ_2) — локальная система координат, $\phi_\alpha(\xi_1, \xi_2)$ — интерполирующие функции элемента, $J(\xi_1, \xi_2)$ — якобиан перехода в локальную систему координат. Так как ГИУН (2) выведено в предположении гладкости границы в точке коллокации, то использование обычных сеток с узлами, лежащими на границе элементов и образующими углы, затруднено. Поэтому в ДМГЭ используются разрывные элементы, в которых все точки коллокации \mathbf{y} находятся внутри элемента, где поверхность гладкая. При этом функции решения могут испытывать разрыв при переходе от элемента к элементу.

Для вычисления (3) вводится локальная полярная система координат (ρ, θ) с центром в особой точке \mathbf{y} (рис. 1). Все элементарные функции, входящие в подынтегральное выражение, (например $1/r^3$, n_i , ϕ_α , J), раскладываются в ряд Лорана по координате ρ . Затем, подставляя эти разложения в (3)

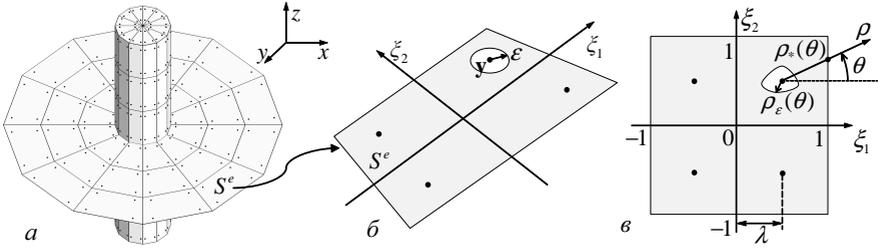


Рис. 1. Расчетная сетка для задачи о нагружении скважины с трещиной (а); граничный элемент с ε -окрестностью узла в декартовой (б) и локальной (ξ_1, ξ_2) (в) системах координат.

и отбрасывая члены высокого порядка, получаем разложение в ряд Лорана всего подынтегрального выражения в (3). Члены порядка $1/r^3$ и $1/r^2$ интегрируются по ρ аналитически, и повторные интегралы сводятся к контурным интегралам по границе элемента $\rho_*(\theta)$ и по ε -окрестности $\rho_\varepsilon(\theta)$. Интеграл по ε -окрестности даст бесконечную часть интеграла, которая не учитывается в главном значении в смысле Адамара. Оставшиеся контурные интегралы и поверхностный интеграл от члена $O(1/r)$ вычисляются с помощью методов численного интегрирования (например, с использованием квадратур Гаусса).

Разработанные методы верифицированы на задачах о растяжении плоской круглой трещины, наклоненной относительно главных напряжений. Показано, что дуальный МГЭ позволяет вычислять НДС с большей точностью, чем метод с представлением трещины пропилом конечной ширины. Однако дуальный МГЭ дает большее количество степеней свободы для фиксированного количества граничных элементов из-за использования разрывных граничных элементов, что приводит к росту результирующей СЛАУ. Также дуальный МГЭ требует больше вычислительных затрат для заполнения матриц, так как подынтегральное выражение в ГИУН (2) имеет более сложный вид по сравнению с ГИУС (1), и для вычисления главного значения Адамара в элементах, содержащих точку коллокации, требуются квадратуры более высокого порядка.

Вычисление НДС с хорошей точностью особенно актуально для вычисления коэффициентов интенсивности напряжений (КИНов) на фронте трещины, необходимое при трехмерном моделировании процесса распространения трещины гидроразрыва. В работе представлен обзор существующих методов вычисления КИНов: метод экстраполяции разрыва смещений на трещине в окрестности ее фронта, экстраполяции напряжений в окрестности фронта трещины и методы типа J -интеграла. В методах экстраполяции разрыва смещений необходимо с хорошей точностью вычислять значения разрыва смещений в окрестности фронта трещины, которые асимптотически ведут себя пропорционально корню из расстояния до фронта \sqrt{l} . Поэтому стандартные

полиномиальные элементы любого порядка точности аппроксимируют эту зависимость с порядком 1/2.

Для преодоления этой трудности в окрестности фронта трещины обычно используются модифицированные элементы (например, четвертичный элемент), учитывающие асимптотическое поведение функции разрыва смещений. В диссертации предложена модификация прифронтных элементов, в которой геометрия элемента и векторы напряжений аппроксимируются стандартными билинейными разрывными интерполирующими функциями, при этом для разрыва смещений используются форм-функции следующего вида

$$\phi_\alpha(\xi_1, \xi_2) = \left(\frac{b_1^\alpha - \xi_1}{b_1^\alpha - a_1^\alpha} \right) \cdot \left(\frac{F(b_2^\alpha) - F(\xi_2)}{F(b_2^\alpha) - F(a_2^\alpha)} \right), \quad (4)$$

где коэффициенты $a_1^\alpha, a_2^\alpha, b_1^\alpha, b_2^\alpha$ отвечают за положение узлов в элементе и принимают значения $\pm\lambda$ в зависимости от узла α . В качестве функции $F(x)$ при хрупком распространении трещины выбираем функцию $\sqrt{1+x}$. Существуют режимы гидроразрыва, в которых асимптотика разрыва смещений на фронте трещины иная: например, в вязкостном режиме она равна $l^{2/3}$, а в вязкостно-утечковом — $l^{5/8}$. Выбором функции $F(x)$ соответствующего вида улучшаем точность представления разрыва смещений на фронте трещины.

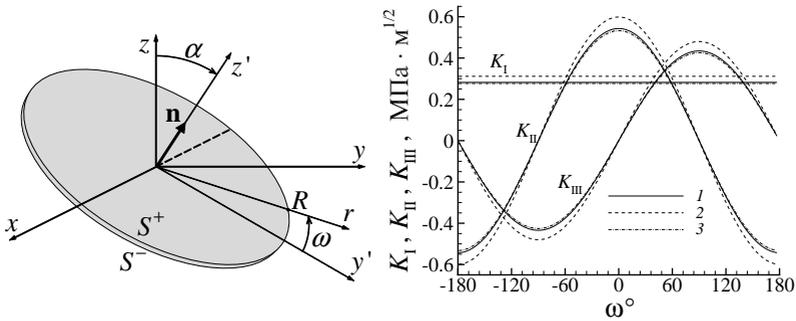


Рис. 2. Плоская круглая трещина, наклоненная на угол $\alpha = 45^\circ$ относительно растягивающих напряжений σ_z (слева); распределения КИНов вдоль ее фронта, полученные из точного решения (1), дуальным МГЭ с использованием обычных билинейных (2) и специальных прифронтных (3) элементов (справа).

На задаче о растяжении плоской круглой трещины, наклоненной на угол $\alpha = 45^\circ$ относительно направления растягивающих напряжений σ_z (см. рис. 2 (слева)), проведено сравнение результатов вычисления КИНов для обычных билинейных и модифицированных прифронтных элементов (4) (рис. 2, справа). В табл. 1 показано, что обычные элементы аппроксимируют разрыв смещений (а следовательно и раскрытие трещины) в окрестности

Таблица 1. Погрешности вычисления ширины трещины ε_W дуальным МГЭ и КИНов $\varepsilon_{K_{I,II,III}}$ на последовательности сгущающихся в радиальном направлении сеток в случае билинейных и модифицированных на фронте трещины элементов

Ошибка на сетке	Билинейные элементы	Модифицированные на фронте трещины элементы
$\varepsilon_W(64 \times 04)$	0.241	0.0274
$\varepsilon_W(64 \times 08)$	0.168	0.0097
$\varepsilon_W(64 \times 16)$	0.118	0.0037
$\varepsilon_{K_I}(64 \times 08)$	0.0295	0.0054
$\varepsilon_{K_{II}}(64 \times 08)$	0.0563	0.0102
$\varepsilon_{K_{III}}(64 \times 08)$	0.0464	0.0079

фронта трещины с порядком $\sim 1/2$, а предложенные элементы — с порядком $\sim 3/2$. Погрешность решения для обычных элементов более чем в 9 раз выше, чем для предложенных модифицированных элементов. Использование модифицированных прифронтовых элементов позволяет снизить погрешность расчета КИНов в 5-6 раз на сетке 64×08 .

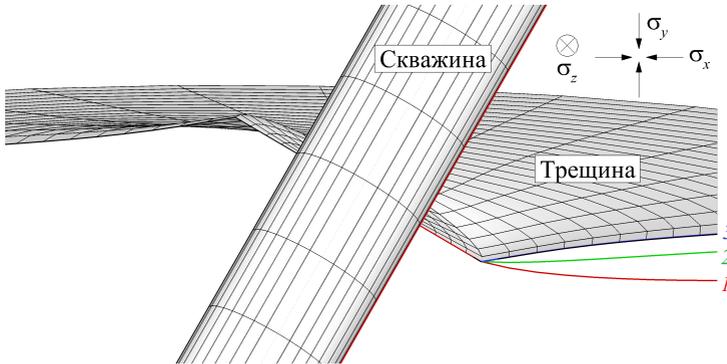


Рис. 3. Вертикальное сечение задачи о невязком распространении трещины от скважины, наклоненной на угол 30° относительно напряжений залегания при его значениях: σ^∞ (1), $2\sigma^\infty$ (2), $4\sigma^\infty$ (3), где $\sigma^\infty = (\sigma_x^\infty; \sigma_y^\infty; \sigma_z^\infty) = (-4; -3; -4)$ МПа.

Разработанные методы были использованы для вычисления НДС в окрестности скважины и трещины и КИНов на ее фронте в трехмерной модели распространения трещины гидроразрыва под действием невязкой жидкости. На рис. 3 приведены траектории распространения трещин от скважины, наклоненной относительно напряжений залегания на угол 30° . Траектории рассчитаны по критерию хрупкого распространения трещины с фиксированной трещиностойкостью $3 \text{ МПа} \sqrt{\text{м}}$ и различных величинах напряжений залегания.

ния σ^∞ . Во всех расчетах соотношение между главными напряжениями σ_x^∞ , σ_y^∞ , σ_z^∞ было фиксированным, при этом варьировалась их соотношение с фиксированным значением трещиностойкости. Видно, что это соотношение значительно влияет на излом траектории и дальнейшее её распространение.

В Главе 2 рассмотрена трехмерная задача зарождения трещины от поверхности упругого тела. Задача состоит в определении местоположения и ориентации зародышевой трещины, а также нагрузки, которую необходимо приложить к упругому телу для его разрушения согласно выбранному критерию. Задача зарождения включает в себя подзадачу вычисления НДС тела при различных приложенных нагрузках, решенную с помощью МГЭ, и критерий трещинообразования. В диссертации проведен обзор существующих критериев разрушения. Одной из особенностей задачи зарождения трещины, которую должен учитывать критерий разрушения, является эффект размера — зависимость нагрузки, необходимой для разрушения тела, от его размеров. Типичная такая зависимость представлена на рис. 4. В диссертации

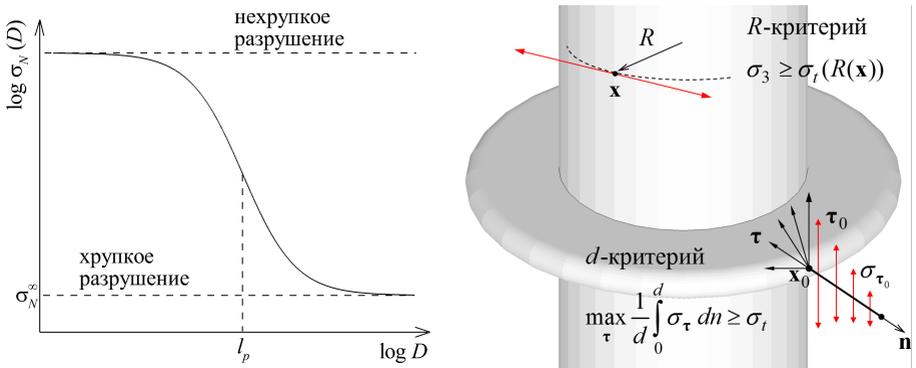


Рис. 4. Эффект размера: $\sigma_N(D)$ — прочность образца; D — характерный размер образца; l_p — характерный масштаб нехрупкого разрушения, σ_N^∞ — хрупкая прочность образца большого размера ($D \rightarrow \infty$) (слева) и схематическое представление R -критерия и d -критерия (справа).

ции сформулированы два критерия разрушения, способных учесть эффект размера и пригодных для анализа трехмерных задач сложной конфигурации с заранее неизвестным местоположением зародышевой трещины.

В первом критерии (d -критерии) касательное к поверхности напряжение σ_τ , осредненное по отрезку длины d , нормальному к поверхности, сравнивается с локальной прочностью материала на разрыв σ_t

$$\max_{\tau} \frac{1}{d} \int_0^d \sigma_\tau dn \geq \sigma_t. \quad (5)$$

Критерий (5) ранее использовался в плоских задачах разрушения. В диссертации он был обобщен на трехмерные задачи, в которых неизвестна ориентация τ зародышевой трещины, и ее необходимо выбрать из условия максимума величины осредненных касательных напряжений σ_τ (рис. 4, *справа*).

Во втором критерии (R -критерии) прочность материала на разрыв σ_t зависит от минимального радиуса кривизны R поверхности тела в предполагаемой точке \mathbf{x} зарождения трещины и сравнивается с максимальными растягивающими напряжениями σ_3

$$\sigma_3(\mathbf{x}) \geq \sigma_t(R(\mathbf{x})), \mathbf{x} \in S, \quad (6)$$

где зависимость прочности от радиуса кривизны взята в виде

$$\sigma_t(R(\mathbf{x})) = \frac{\sigma_t^0 + \tilde{R}(\mathbf{x})\sigma_t^\infty}{1 + \tilde{R}(\mathbf{x})}, \quad \tilde{R}(\mathbf{x}) = \frac{R(\mathbf{x})}{l_p}. \quad (7)$$

Здесь l_p — характерный размер, при котором происходит переход от хрупкого разрушения к нехрупкому, σ_t^∞ — хрупкая прочность материала на разрыв для больших тел ($D \gg l_p$), σ_t^0 — прочность материала для маленьких тел ($D \ll l_p$). Функция (7) соответствует закону эффекта размера, показанному на рис. 4, и способна описывать эту зависимость локально в каждой точке поверхности трехмерного тела сложной конфигурации.

Предложенные критерии, а также классический критерий максимальных растягивающих напряжений (МРН), были валидированы на задачах о разрушении трехмерных тел различной формы и варьируемого размера.

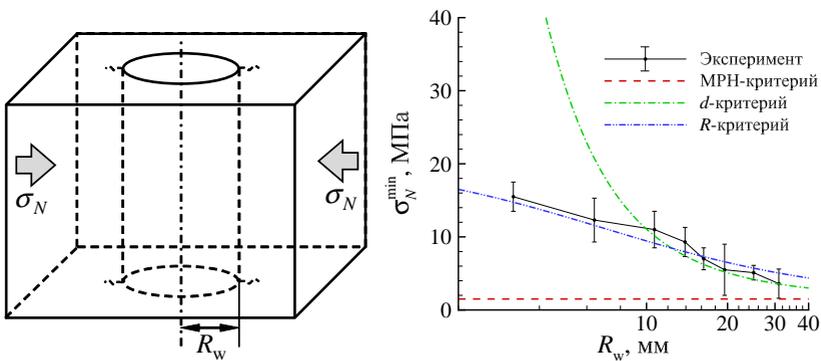


Рис. 5. Схема нагружения блоков с цилиндрическими отверстиями (*слева*) и зависимость давления зарождения p_{init} от характерного размера задачи (*справа*): точки с вертикальными отрезками — экспериментальные данные с величиной погрешности; *штриховая* — критерий максимальных растягивающих напряжений; *штрих-пунктир* — d -критерий; *штрих-два пунктира* — R -критерий.

Сравнение полученных результатов с экспериментами по сжатию блоков с цилиндрическими отверстиями различного диаметра показало, что при использовании критерия МРН результаты не зависят от размера образца, а предложенные критерии позволяют корректно описывать эффект размера (см. рис. 5). Однако d -критерий (5) существенно завышает прочность образцов малых размеров, когда размер d превосходит характерный размера отверстия: для выполнения критерия осредняются напряжения на большом относительном расстоянии от границы отверстия, что требует большей разрушающей нагрузки, неограниченно растущей при стремлении размера отверстия к нулю. Для R -критерия при малых размерах отверстия нагрузка выходит на горизонтальную асимптоту, соответствующую прочности σ_t^0 . R -критерий позволяет подобрать параметры, наилучшим образом описывающие зависимость, представленную на рис. 4.

Критерии, учитывающие эффект размера, валидированы на серии экспериментов по разрушению бетонных блоков различного размера с боковыми вырезами. Как и в предыдущем примере, наилучшее соответствие результатам экспериментов показал R -критерий.

Проведена валидация предложенных критериев на экспериментах по разрушению блоков с цилиндрической скважиной и поперечными пропилами под воздействием закачиваемой в скважину жидкости гидроразрыва.

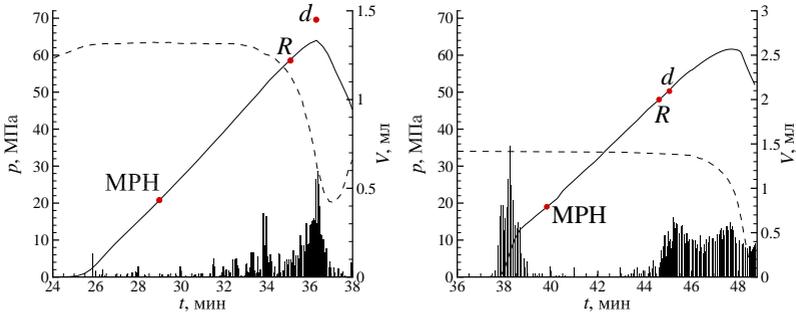


Рис. 6. Эволюция нагнетаемого давления (сплошная), объем жидкости в гидравлических прессах (штриховая), акустические события (гистограмма), рассчитанные давления зарождения трещин по критерию МРН, d -критерию и R -критерию (кружки) в экспериментах по разрушению блоков с цилиндрической скважиной и поперечными пропилами различной глубины d_N : $d_N = 9.5$ мм (слева); $d_N = 25.4$ мм (справа). Геометрия зародившихся трещин показана на рис. 7.

Эксперименты показали, что в этой задаче могут образовываться как продольные (вдоль оси скважины), так и поперечные (перпендикулярные оси скважины) трещины. Расчеты с помощью критерия МРН всегда предсказывают образование поперечной трещины при любой глубине пропила, а давление зарождения существенно ниже, чем в эксперименте (рис. 6). При

этом для образования продольной трещины на скважине требуется существенно большее давление, чем для трещины на пропилах.

При использовании предложенных критериев, учитывающих эффект размера (d -критерия и R -критерия), давление, необходимое для зарождения поперечной трещины от пропила становится большим, что приводит к первоочередному образованию продольной трещины на скважине, как показано на рис. 7 (*слева*), что соответствует результатам экспериментов. Давление зарождения, рассчитанное по этим критериям, хорошо согласуется с экспериментальным. Построенные зародышевые трещины являются начальными данными для полной трехмерной модели распространения трещины гидро разрыва.

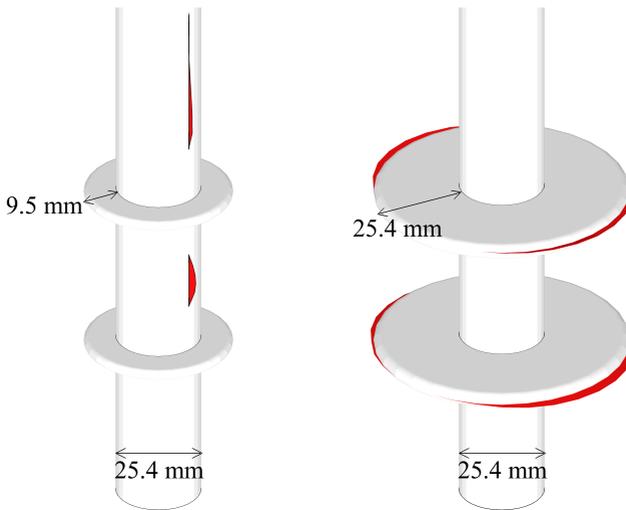


Рис. 7. Зародившиеся трещины в задаче о скважине с пропилами, рассчитанные с помощью d -критерия: $d_N = 9.5$ мм, продольные трещины (*слева*); $d_N = 25.4$ мм, поперечные трещины (*справа*).

В *Главе 3* представлены результаты исследования сценариев зарождения трещин для скважины с перфорацией. Массив породы нагружен напряжениями залегания $\sigma^\infty = (\sigma_h, \sigma_H, \sigma_v)$. Ориентация скважины относительно напряжений залегания характеризуется полярным θ и азимутальным ϕ углами, а ориентация перфорации — углом β . Для ускорения расчетов НДС всевозможных конфигураций θ, ϕ, β разработана методика, позволяющая проводить серийные расчеты, используя линейную комбинацию решений базовых подзадач упругости (например, нагружение только скважины с перфорацией, одноосные сжатия породы по каждому из направлений, сдвиговые нагружения породы), и не пересчитывать НДС для каждого положения скважины и перфорации. Предложенный подход позволяет увеличивать скорость рас-

четов пропорционально количеству рассматриваемых углов.

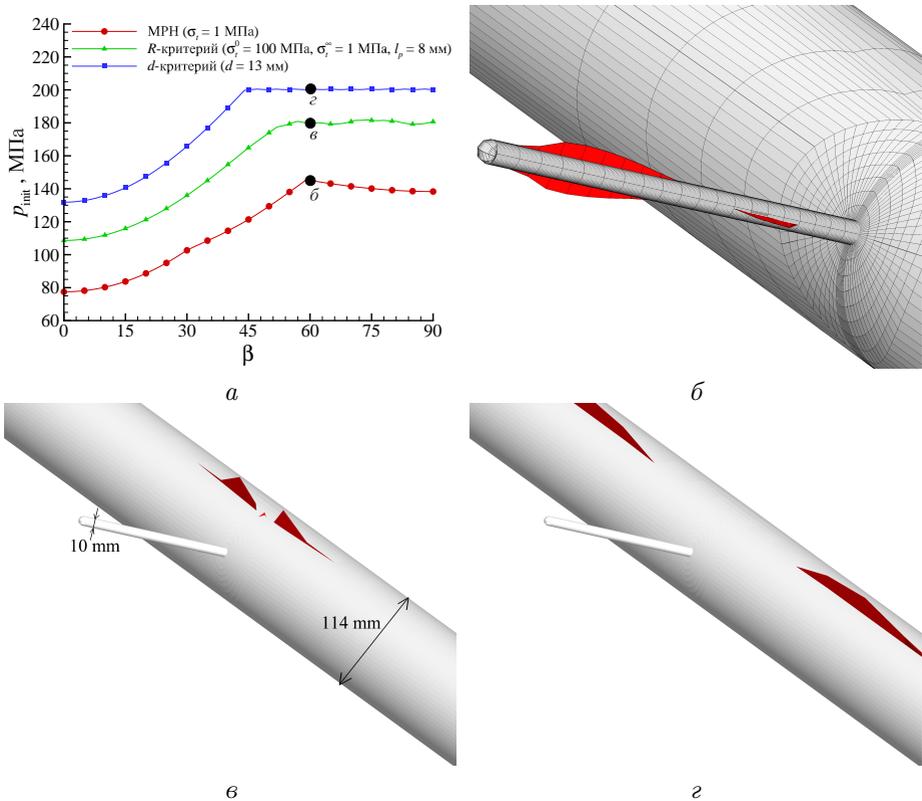


Рис. 8. Зависимость давления зарождения трещины p_{init} от угла перфорации β (a) и зародышевые трещины (b, e, z) для горизонтальной скважины ($\theta = 90^\circ, \phi = 0^\circ$), одной ориентации перфорации ($\beta = 59^\circ$) и различных критериев разрушения: максимальных растягивающих напряжений (b); R -критерий (e), d -критерий (z)

В скважину и перфорацию закачивается жидкость, и в результате при давлении жидкости p_{init} на поверхности скважины и перфорации образуются зародышевые трещины. Трещина, направленная вдоль ствола скважины, называется продольной, а перпендикулярная оси скважины — поперечной.

С помощью трех критериев зарождения трещины (МРН, R -критерия, d -критерия) проведено моделирование зарождения трещины от горизонтальной скважины, направленной вдоль направления минимальных сжимающих напряжений при различных углах β ориентации перфорации. На рис. 8 показаны результаты сравнения давления зарождения трещины и положения зародышевых трещин для различных критериев. Выяснено, что использова-

ние критериев, учитывающих эффект размера, приводит к увеличению давления, необходимого для зарождения трещины, и может приводить к изменению сценария зарождения трещин при одних и тех же условиях нагружения. При использовании критерия МРН трещины зарождаются на перфорации, продольные возле скважины и поперечные вдали от скважины (рис. 8, б). При использовании d -критерия и R -критерия образуются продольные трещины на скважине (рис. 8, в, з)

Проведено моделирование зарождения трещины при реальных геофизических параметрах, соответствующих месторождению Амин в Омане, характеризующимся глубоким залеганием газа (~ 5000 м), что является причиной высоких сжимающих напряжений от 95 до 180 МПа и высокой прочностью породы σ_t от 15 до 25 МПа. Проведен анализ чувствительности давления зарождения и положения зародышевой трещины от всех трех углов.

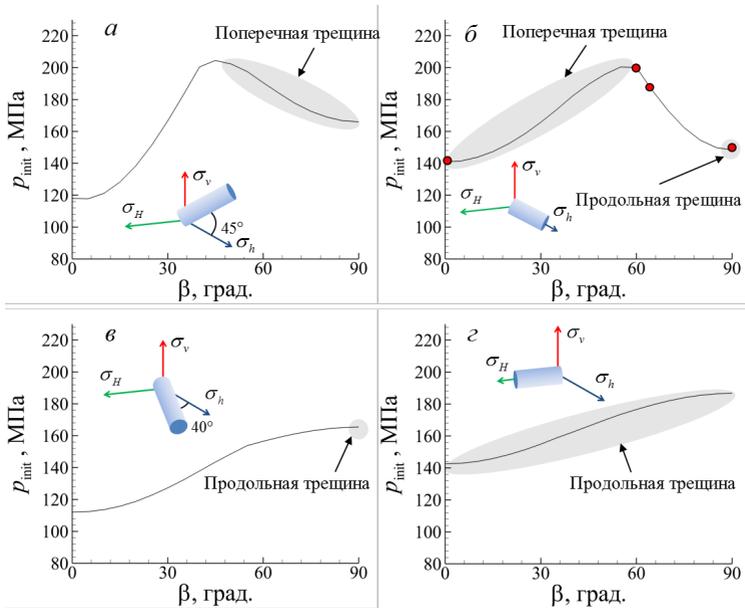


Рис. 9. Зависимость давления зарождения трещины от угла перфорации. Отмечены углы β , соответствующие зарождению ортогональной к скважине поперечной трещины и продольной трещины. $a - \theta = 45^\circ, \phi = 0^\circ$, $б - \theta = 90^\circ, \phi = 0^\circ$, $в - \theta = 90^\circ, \phi = 40^\circ$, $з - \theta = 90^\circ, \phi = 90^\circ$.

На рис. 9 показано влияние угла перфорации β на давление зарождения трещины p_{init} при различных ориентациях скважины θ, ϕ . Показаны углы, при которых зарождаются продольная и ортогональная к скважине поперечная трещина. Во всех случаях минимальное p_{init} наблюдалось для перфорации, лежащей в плоскости, перпендикулярной направлению мини-

мальных сжимающих напряжений. Ориентация перфорации сильно влияет на p_{init} . Например, отклонение перфорации на 30° увеличивает давление зарождения на 30% по сравнению с минимальным значением. Для скважины с углами ориентации $\theta = 90^\circ$, $\phi = 40^\circ$ влияние угла перфорации меньше, то же время отклонение перфорации на 30° увеличивает давление зарождения трещины всего на 15% . В случае горизонтальной скважины, пробуренной в направлении $\theta = 90^\circ$, $\phi = 90^\circ$, при любом угле перфорации зарождается продольная трещина.

На рис. 10 приведены зоны зарождения трещины для скважины, ориентированной в направлении минимальных горизонтальных напряжений σ_h ($\theta = 90^\circ$, $\phi = 0^\circ$) и различных углов перфорации β . При такой ориентации скважины угол β есть угол отклонения перфорации от вертикального направления σ_v . Известно, что с энергетической точки зрения трещине выгодно распространяться в плоскости, перпендикулярной направлению минимальных сжимающих напряжений σ_h . Несмотря на то, что все перфорации лежат в этой плоскости, трещина не всегда зарождается ортогонально σ_h . Так, при $\beta = 0^\circ$ зарождается поперечная трещина, перпендикулярная σ_h , а при $\beta = 90^\circ$ зарождается продольная трещина, которая ортогональна плоскости минимального сжатия. Переход от поперечной трещины к продольной происходит в интервале $\beta = 60 - 70^\circ$.

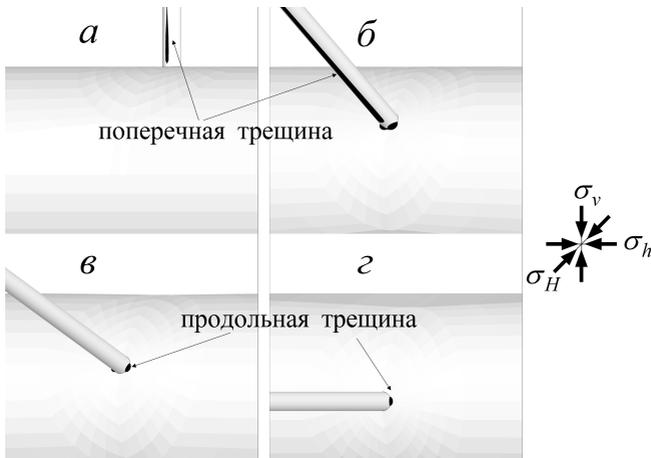


Рис. 10. Зоны зарождения трещины для скважины, ориентированной в направлении минимальных горизонтальных напряжений σ_h , при различных углах перфорации β (см. рис. 9, б): 0° (а), 60° (б), 70° (в), 90° (г).

В *Заключении* диссертационной работы сформулированы основные результаты диссертационной работы: разработана трехмерная модель зарождения трещины, учитывающая эффект размера; разработаны модификации

МГЭ для задач с полостями и трещинами, решена задача разрушения перфорированной скважины при всевозможных ее ориентациях относительно напряжений залегания.

В *Приложении А* представлено описание метода вычисления главного значения Адамара в граничном интегральном уравнении напряжений.

В *Приложении В* приведено описание разработанных программных комплексов [18, 19].

Список основных публикаций по теме диссертации

Монография

1. Черный С.Г., Лапин В.Н., Есипов Д.В., **Куранаков Д.С.** Методы моделирования зарождения и распространения трещин (монография). — Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2016. — 312 с.

Публикации в периодических изданиях, рекомендованных ВАК

2. Есипов Д.В., **Куранаков Д.С.**, Лапин В.Н., Черный С.Г. Многозонный метод граничных элементов и его применение к задаче инициации трещины гидроразрыва из перфорированной обсаженной скважины // Вычислительные технологии. — 2011. — Т. 16, № 6. — С. 13–26.
3. **Куранаков Д.С.**, Есипов Д.В., Лапин В.Н., Черный С.Г. Трехмерный дуальный метод граничных элементов решения задач упругости с трещинами // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. — 2015. — Т. 13, № 1. — С. 74–90.

Публикации в научных журналах, индексируемые в базах данных Scopus и Web of Science

4. Alekseenko O.P., Potapenko D.I., Cherny S.G., Esipov D.V., **Kuranakov D.S.**, Lapin V.N. 3D modeling of fracture initiation from perforated noncemented wellbore // SPE J. — 2013. — Vol. 18, No. 3. — P. 589–600.
5. Shokin Yu., Cherny S., Esipov D., Lapin V., Lyutov A., **Kuranakov D.** Three-dimensional model of fracture propagation from the cavity caused by quasi-static load or viscous fluid pumping // Communications in Computer and Information Science. — Springer Science + Business Media, 2015. — P. 143–157.
6. **Kuranakov D.S.**, Esipov D.V., Lapin V.N., Cherny S.G. Modification of the boundary element method for computation of three-dimensional fields of strain-stress state of cavities with cracks // Eng. Frac. Mech. — 2016. — Vol. 153. — P. 302–318.
7. Cherny S., Lapin V., Esipov D., **Kuranakov D.**, Avdyushenko A., Lyutov A., Karnakov P. Simulating fully 3D non-planar evolution of hydraulic fractures // Int. J. Frac. — 2016. — Vol. 201, No. 2. — P. 181–211.
8. Cherny S., Esipov D., **Kuranakov D.**, Lapin V., Chirkov D., Astrakova A. Prediction of fracture initiation zones on the surface of three-dimensional structure using the surface curvature // Eng. Frac. Mech. — 2017. — Vol. 172. — P. 196–214.

Публикации в трудах конференций, индексируемых в базе данных Scopus

9. Aidagulov G., Alekseenko O., Chang F., Bartko K., Cherny S., Esipov D., **Kuranakov D.**, Lapin V. Model of hydraulic fracture initiation from the notched openhole // Proceedings of the 2015 Annual Technical Symposium & Exhibition. — Al Khobar, Saudi Arabia, 2015. — P. 1–12. — SPE-178027-MS.
10. Briner A., Florez J.C., Nadezhdin S., Alekseenko O., Gurmen N., Cherny S., **Kuranakov D.**, Lapin V. Impact of perforation tunnel orientation and length in horizontal wellbores on fracture initiation pressure in maximum tensile stress criterion model for tight gas fields in the Sultanate of Oman // SPE Middle East Oil & Gas Show and Conference. — Manama, Bahrain, 2015. — SPE-172663-MS.
11. Briner A., Florez J.C., Nadezhdin S., Gurmen N., Alekseenko O., Cherny S., **Kuranakov D.**, Lapin V. Impact of wellbore orientation on fracture initiation pressure in maximum tensile stress criterion model for tight gas field in the Sultanate of Oman // SPE North Africa Technical Conference and Exhibition. — Cairo, Egypt, 2015. — SPE-175725-MS.

Публикации в трудах всероссийских и международных конференций

12. Черный С.Г., Лапин В.Н., Есипов Д.В., **Куранаков Д.С.** Метод граничных элементов и его приложение к задаче разрушения перфорированной скважины // 10-я Всероссийская научная конференция «Краевые задачи и математическое моделирование». — Новокузнецк: Новокузнецкий филиал КемГУ, 2010. — С. 159–168.
13. Есипов Д.В., Черный С.Г., **Куранаков Д.С.**, Лапин В.Н. Моделирование многозонным методом граничных элементов процесса инициации трещины гидроразрыва пласта из перфорированной обсаженной скважины // Междунар. конф. «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика», посвященная 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Яненко. — Новосибирск: НТЦ «Информрегистр», № гос. рег. 0321101160, 2011.
14. Черный С.Г., Есипов Д.В., Лапин В.Н., **Куранаков Д.С.** Проблемы моделирования гидравлического разрыва пласта в двумерной и трехмерной постановках // Материалы IX междунар. конф. по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2012). — Алушта: МАИ-ПРИНТ, 2012. — С. 441–443.
15. Лапин В.Н., Черный С.Г., Есипов Д.В., **Куранаков Д.С.** Трехмерная модель зарождения и распространения трещины от полости в упругой среде нагруженной постоянным давлением // VIII Казахстанско-

Российская международная научно-практическая конференция «Математическое моделирование в научно-технологических и экологических проблемах нефтегазовой отрасли», Казахстан, г. Атырау. — 2014. — С. 1–7.

16. **Куранаков Д.С.**, Есипов Д.В., Лапин В.Н., Черный С.Г. Трехмерная численная модель зарождения трещин, учитывающая «эффект размера» // VIII Казахстанско-Российская международная научно-практическая конференция «Математическое моделирование в научно-технологических и экологических проблемах нефтегазовой отрасли», Казахстан, г. Атырау. — 2014. — С. 1–6.
17. Briner A., Florez J.C., Nadezhdin S., Gurmen N., Alekseenko O., Cherny S., **Kuranakov D.**, Lapin V. Impact of wellbore completion type on fracture initiation pressure in maximum tensile stress criterion model for tight gas field in the Sultanate of Oman // International Petroleum Technology Conference. — Doha, Qatar, 2015. — IPTC-18261-MS.

Свидетельства о регистрации программы для ЭВМ

18. Черный С.Г., Есипов Д.В., Лапин В.Н., **Куранаков Д.С.**, Астракова А.С. Программа расчета напряженно-деформированного состояния произвольного кусочно-однородного упругого тела в конечных или бесконечных трехмерных областях методом граничных элементов «CADBEM/2013». — 2013. — Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2013611577.
19. Черный С.Г., Лапин В.Н., Есипов Д.В., **Куранаков Д.С.**, Астракова А.С. Программа трехмерного моделирования зарождения трещины в хрупком материале под воздействием приложенной нагрузки «CADINIT/2019». — 2019. — Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2019613363.

Подписано в печать...

Формат 60 × 84/16

Тираж 100 экз.

Издательство...

Адрес...