Гибридные алгоритмы локального поиска для задач маршрутизации транспортных средств с многократным посещением клиентов

Кулаченко Игорь Николаевич

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Научная специальность: 1.2.2 — Математическое моделирование численные методы и комплексы программ

Научный руководитель: к. ф.-м. н.
Кононова Полина Александровна

Новосибирск, 2025

Цели и задачи

Цель работы: разработка эффективных алгоритмов локального поиска с учетом практических ограничений задач маршрутизации, включая периодичность и согласованность визитов, совместное обслуживание, наличие нескольких депо, временных окон и неопределенностей во входных данных.

Задачи:

1. Построить математические модели новых постановок реальных задач маршрутизации с многократным посещением клиентов.
2. Исследовать и разработать для них гибридные алгоритмы локального поиска и матэвристические методы.
3. Внедрить подходы декомпозиции и робастной оптимизации для решения практических примеров различной размерности.
4. Провести экспериментальную оценку эффективности предложенных методов и их сравнительный анализ.

Актуальность работы

- Оптимизация маршрутов востребована не только в производстве и дистрибуции, но и в других сферах, связанных с планированием перемещения ресурсов, персонала и оборудования.
- Классическая задача маршрутизации, сформулированная Данцигом и Рамсером в 1959 году, постоянно усложняется за счёт новых ограничений и особенностей, отражающих реальные логистические сценарии.
- Практические задачи маршрутизации являются NP-трудными и подвержены неопределённостям во входных данных, что часто требует применения эффективных метаэвристических методов.
- Вклад в развитие данной области внесли как российские учёные (Э. Х. Гимади, Е. М. Бронштейн, М. В. Бацын, М. Ю. Хачай, А. Г. Ченцов), так и зарубежные исследователи (P. Toth, G. Laporte, M. Gendreau, D. Vigo, T. Vidal, Y. Nagata, C. Archetti).

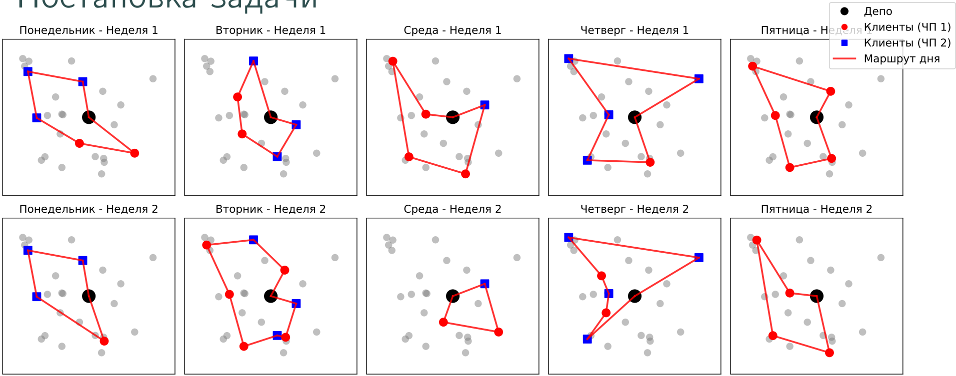
Структура работы

- **Глава 1.** Гибридный алгоритм локального поиска для периодической задачи маршрутизации транспортных средств с условиями согласованности визитов.
- **Глава 2.** Матэвристика для решения задачи маршрутизации буровых установок.
- **Глава 3.** Пороговая робастность для задачи маршрутизации буровых установок.

Глава 1. Содержание

1. Гибридный алгоритм локального поиска для периодической задачи маршрутизации транспортных средств с условиями согласованности визитов

Постановка задачи



Цель: минимизировать суммарное время, затраченное на перемещения, удовлетворив всем ограничениям

Ограничения:

- частота посещения клиентов
- посещение в один и тот же день недели
- посещение одним и тем же ТС
- грузоподъемность ТС
- продолжительность рабочей смены

Актуальность и связанные работы (1/2)

- Задача возникла из интереса ООО «Magnat Logistics».
- Описанная задача относится к классу Consistent VRP [1–3].
- Позже работа [4] расширила рассмотренную в этой главе постановку, введя для клиентов типы продуктов, для каждого из которых задаётся своя частота посещения.

[1] Groër C., Golden B., Wasil E.: The Consistent Vehicle Routing Problem. Manuf. Serv. Oper. Manag. **11**(4), 630–643 (2009).
[2] Kovacs A.A., Golden B.L., Hartl R.F., Parragh S.N.: Vehicle routing problems in which consistency considerations are important: A survey. Networks **64**(3), 192–213 (2014).
[3] Kovacs A.A., Parragh S.N., Hartl R.F.: A Template-based Adaptive Large Neighborhood Search for the Consistent Vehicle Routing Problem. Networks **63**(1), 60–81 (2014).
[4] Messaoudi B., Oulamara A., Salhi S.: A decomposition approach for the periodic consistent vehicle routing problem with an application in the cleaning sector. Int. J. Prod. Res. **61**(22), 7727–7748 (2023).

Актуальность и связанные работы (2/2)

- Алгоритм VNS и его модификации широко применяются для решения задач комбинаторной оптимизации [5, 6].
- Подходы декомпозиции для VRP описаны в [7–9].

[5] Hansen P., Mladenović N., Todosijević R., Hanafi S.: Variable neighborhood search: basics and variants. EURO J. Comput. Optim. **5**(3), 423–454 (2017).
[6] Xu Z., Cai Y.: Variable neighborhood search for consistent vehicle routing problem. Expert Syst. Appl. **113**, 66–76 (2018).
[7] Ribeiro C.C., Hansen P., Taillard É.D., Voss S.: POPMUSIC—Partial optimization metaheuristic under special intensification conditions. Essays and Surveys in Metaheuristics, Springer, 613–629 (2002).
[8] Taillard É.D.: Decomposition Methods. In: Design of Heuristic Algorithms for Hard Optimization: With Python Codes for the Travelling Salesman Problem, Springer, Cham, 131–152 (2023).
[9] Santini A., Schneider M., Vidal T., Vigo D.: Decomposition Strategies for Vehicle Routing Heuristics. INFORMS J. Comput. **35**(3), 543–559 (2023).

Обозначения задачи

- $M = \{0, 1, \dots, m\}$ — множество депо,
- $I = \{m+1, m+2, \dots, n\}$ — множество клиентов,
- $V = M \cup I$ — множество вершин,
- $D = \{0, 1, \dots, L-1\}$ — множество дней,
- $K = \{1, \dots, r\}$ — множество ТС,
- $m(k)$ — депо, соответствующее ТС $k \in K$,
- T — продолжительность рабочего дня,
- s_i — время обслуживания клиента $i \in I$,
- μ_i — частота посещения клиента $i \in I$,
- $\tau_i = \lfloor |D|/\mu_i \rfloor$ — временной интервал между посещениями,
- q_i — запрос клиента $i \in I$,
- v_k — грузоподъёмность ТС $k \in K$,
- d_{ij}, t_{ij} — расстояние и время передвижения между $i, j \in V$.

Переменные задачи

$$w_{id} = \begin{cases} 1, & \text{если клиент } i \text{ в день } d \text{ посещается,} \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$x_{ijkd} = \begin{cases} 1, & \text{если ребро } (i, j) \text{ проходит ТС } k \text{ в день } d, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$y_{ikd} = \begin{cases} 1, & \text{если ТС } k \text{ посещает клиента } i \text{ в день } d, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

u_{id} — номер клиента i в расписании у некоторого ТС в день d.

Модель целочисленного линейного программирования

$$\min \sum_{d\in D}\sum_{k\in K}\sum_{i\in V}\sum_{j\in V} d_{ij}x_{ijkd} \quad \text{суммарное расстояние} \tag{1}$$

$$\sum_{i\in I} q_i y_{ikd} \le v_k, \quad k\in K, d\in D, \quad \text{грузоподъемность} \tag{2}$$

$$y_{mkd} = \begin{cases} 1, & m = m(k), \\ 0, & m \ne m(k), \end{cases} \quad m\in M, k\in K, d\in D, \quad \text{распределение ТС по депо} \tag{3}$$

$$\sum_{k\in K} y_{ikd} = w_{id}, \quad i\in I, d\in D, \tag{4}$$

$$\sum_{d\in D} w_{id} = \nu_i, \quad i\in I, \tag{5}$$

задание частоты посещения клиентов

$$\sum_{t=0}^{\tau_i-1} w_{i(d+t)} = 1, \quad i\in I,\, d\in\{0,\dots,(\nu_i-1)\tau_i\}, \quad \text{равномерные интервалы} \tag{6}$$

$$w_{i\alpha} + w_{i\beta} - 2 \le \quad y_{ik\alpha} - y_{ik\beta}, \quad \text{согласованность ТС}$$
$$i\in I, k\in K, \alpha,\beta\in D,\, \alpha\ne\beta, \tag{7}$$

$$\sum_{i\in V} x_{ijkd} = \sum_{i\in V} x_{jikd} = y_{jkd}, \quad j\in V, k\in K, d\in D, \quad \text{сохранение потока} \tag{8}$$

устранение подциклов

$$u_{id} - u_{jd} + n x_{ijkd} \le n-1, \quad i,j\in I,\; k\in K,\; d\in D, \tag{9}$$

$$\sum_{i\in V}\sum_{j\in V} x_{ijkd}(t_{ij}+s_j) \le T, \qquad k\in K, d\in D, \quad \text{огр. на время рабочей смены} \tag{10}$$

$$n w_{id} \ge u_{id} \ge 0, \quad i\in I,\; d\in D, \tag{11}$$

$$w_{id},\, x_{ijkd},\, y_{ikd} \in \{0,1\}, \quad i,j\in V,\; k\in K,\; d\in D. \tag{12}$$

Штрафы*

$\kappa_{kd} \geq 0$ — превышение грузоподъемности для ТС $k \in K$ в день $d \in D$;
$\varepsilon_{kd} \geq 0$ — сверхурочные часы для ТС $k \in K$ в день $d \in D$;
$\gamma_{kd} \geq 0$ и $\lambda_{kd} \geq 0$ — соответствующие им штрафы.

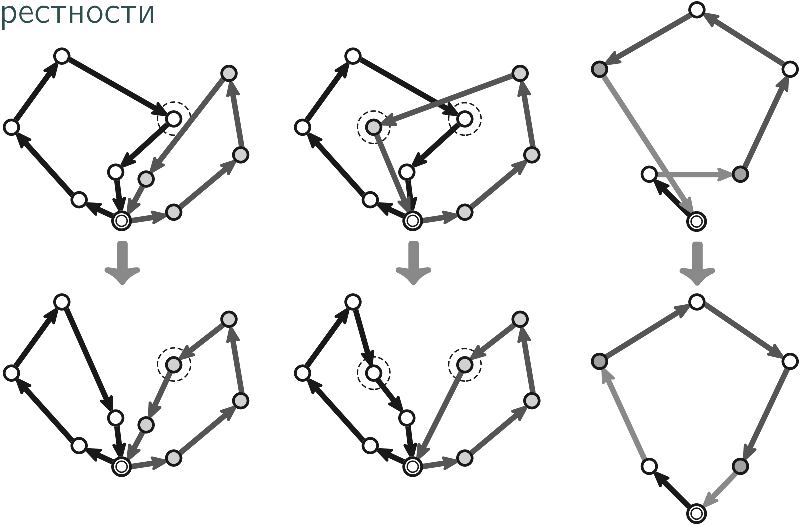
$$L(x, \gamma, \lambda) = \min \sum_{d \in D} \sum_{k \in K} \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} d_{ij} x_{ijkd} + \sum_{d \in D} \sum_{k \in K} (\gamma_{kd} \kappa_{kd} + \lambda_{kd} \varepsilon_{kd}) \quad (13)$$

$$\kappa_{kd} \geq \sum_{i \in V} q_i y_{ikd} - v_k, \quad k \in K, d \in D, \quad (14)$$

$$\varepsilon_{kd} \geq \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} x_{ijkd} (t_{ij} + s_j) - T, \quad k \in K, d \in D. \quad (15)$$

* Glover F., Hao J.-K.: The case for strategic oscillation. Ann. Oper. Res. 183(1), 163–173 (2011).

Окрестности



(а) Окрестность Relocate (б) Окрестность Swap (в) Окрестность 2-opt

Алгоритм использует девять типов окрестностей, включая окрестности Кернигана–Лина и окрестности, направленные на минимизацию нарушений ограничений. Все окрестности рандомизированы для ускорения и диверсификации поиска.

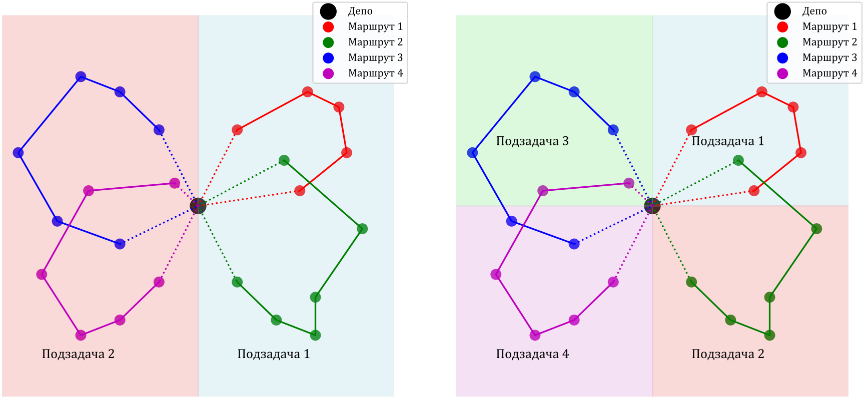
Гибридный алгоритм VNS

1: Построить начальное решение x
2: **while** не достигнут критерий остановки **do**
3: Встряска. Случайно сгенерировать решение x' в окрестности x
4: Задать $x := x'$
5: Локальный поиск
6: Применить локальный поиск по базовым окрестностям
7: Применить локальный спуск по KL окрестностям
8: Применить локальный спуск по окрестности *2-opt* для каждой пары (k, d)
9: Обозначить за x'' лучшее по целевой функции решение из найденных в течение шагов 6–8
10: **if** $L(x'', \gamma, \lambda) < L(x, \gamma, \lambda)$ **then**
11: Задать $x := x''$
12: **if** Не происходило изменения x в течение p итераций **then**
13: Интенсификация и обновление штрафов
14: **if** Произошло уже h процедур интенсификации для x **then**
15: Перейти на шаг 3
16: Применить локальный спуск по окрестностям *Swap* с $g = 1$
17: Применить локальный спуск по окрестности *2-opt* для каждой пары (k, d)
18: **return** Предъявить лучшие найденные решения

Гибридный VNS в среднем превосходит базовую схему на 2 % для задач средней (300–350 клиентов) и большой размерности (620–670 клиентов). На небольших примерах (40–55 клиентов) 1-минутные запуски алгоритма обеспечивают преимущество в 2,82 % по сравнению с 1-часовыми запусками Gurobi.

Методы декомпозиции

Идея: упростить решение примеров большой размерности за счёт разбиения на подзадачи, сформированных из связанных частей решения, с итерационным улучшением. Для оптимизации подзадач можно использовать тот же алгоритм, что и для основной задачи.



(а) Декомпозиция на основе маршрутов (б) Декомпозиция на основе клиентов

POPMUSIC алгоритм

Вход: начальное решение x, состоящее из P частей $x_1, \dots, x_P$, алгоритм оптимизации $\mathcal{A}$
Параметры: количество частей $r \in \mathbb{Z}_{>0}$, критерий остановки $\mathcal{T}$ для $\mathcal{A}$
$O \leftarrow \emptyset$
while $O \neq \{x_1, \dots, x_P\}$ **do**
    Выбрать часть $x_i \notin O$
    Сформировать подзадачу S, состоящую из r частей, наиб. связанных с x_i
    Оптимизировать S с использованием $\mathcal{A}(\mathcal{T})$
    if S улучшено **then**
        Обновить x и все связанные части
        $O \leftarrow \emptyset$
    else
        $O \leftarrow O \cup \{x_i\}$
return x

Эксперименты показали, что декомпозиция по расположению клиентов превосходит декомпозицию на основе маршрутов, особенно при небольшом количестве доступных ТС и, соответственно, длинных маршрутах. Данный подход позволяет получить дополнительное улучшение решений в среднем на 4 % для примеров с числом клиентов около 900.

Заключение

- построена модель смешанного целочисленного линейного программирования, учитывающая требования к равномерности интервалов между визитами и закреплению клиентов за транспортными средствами;
- предложен гибридный алгоритм локального поиска с чередующимися окрестностями, включающий рандомизированный поиск с запретами, механизмы интенсификации, диверсификации и адаптивных штрафов, который в среднем на 2 % превосходит базовую схему;
- реализована схема декомпозиции, обеспечивающая дополнительное улучшение решений алгоритма в среднем на 4 % для примеров большой размерности (до 900 клиентов).

Апробация работы

Работа была представлена на следующих конференциях:

- Международная конференция «Проблемы оптимизации и их приложения», Омск, Россия, июль 2018 г.;
- Международная конференция «Manufacturing Modelling, Management and Control», Берлин, Германия, август 2019 г.;
- Азиатская международная школа-семинар «Проблемы оптимизации сложных систем», Новосибирск, Россия, август 2023 г.;

Публикации автора

- **Kulachenko I. N.**, Kononova P. A., Kochetov Y. A., Kurochkin A. A. The variable neighborhood search for a consistent vehicle routing problem under shift length constraints // *IFAC-PapersOnLine*. 2019. Vol. 52, no. 13. P. 2314–2319.
- **Kulachenko I. N.**, Kononova P. A. The VNS approach for a consistent capacitated vehicle routing problem under the shift length constraints // *Commun. Comput. Inform. Sci.*. 2019. Vol. 1090. P. 51–67.
- **Кулаченко И. Н.**, Кононова П. А. Гибридный алгоритм локального поиска для задачи маршрутизации транспортных средств с многократным посещением клиентов // *Дискрет. анализ и исслед. операций*. 2020. Т. 27, № 2. стр. 43–64. Переведена на английский: «A hybrid local search algorithm for consistent periodic vehicle routing problem», *J. Appl. Industr. Math.*, 2020, Vol. 14, no. 2, P. 339–351.
- **Kulachenko I.** Decomposition Strategies for Solving a Large-Scale Consistent Vehicle Routing Problem // *Proc. 19th Int. Asian School-Seminar on Optimization Problems of Complex Systems (OPCS)*. 2023. P. 48–52.
- *Программа оптимизации маршрутов транспортных средств с многократным посещением клиентов* // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021617091. **Кулаченко И. Н.**, Кононова П. А. 2021.

Глава 2. Содержание

2. Матэвристика для решения задачи маршрутизации буровых установок

Постановка задачи

Ограничения:

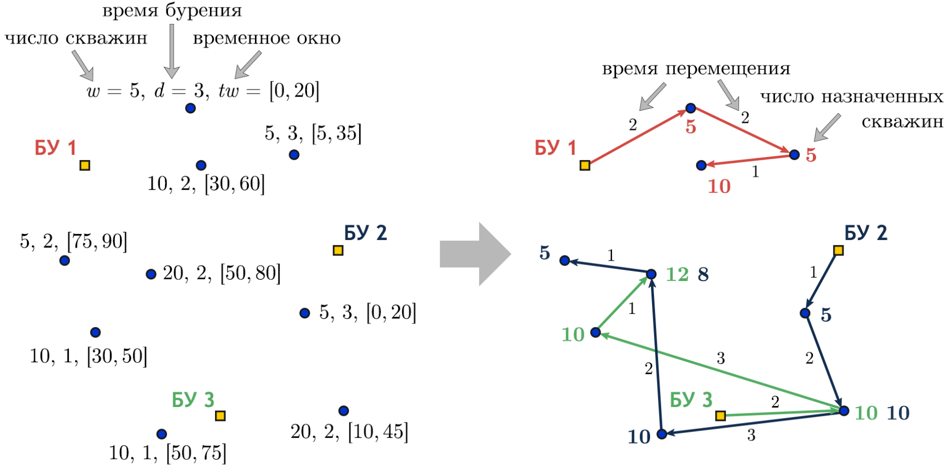
- временные окна
- разделяемое время обслуживания
- одна скважина может буриться только одной БУ
- различные типы БУ

Объекты

Буровые установки (БУ)

Цель: минимизировать суммарное время, затраченное на перемещения, удовлетворив временным окнам

Пример



суммарное время перемещений = 20

Актуальность и связанные работы (1/2)

- Задача возникла из интереса ПАО «Транснефть».
- Описанная задача схожа с задачей маршрутизации транспортных средств (ТС) неограниченной грузоподъемности с разделенными поставками, временными окнами и многими депо [10–12] и с задачами планирования работ буровых установок [13–15].

[10] Yakici E., Karasakal O.: A min–max vehicle routing problem with split delivery and heterogeneous demand. Optim. Lett. **7**, 1611-1625 (2013).
[11] Ho S. C., Haugland D.: A tabu search heuristic for the vehicle routing problem with time windows and split deliveries. Comput. Oper. Res. **31**(12), 1947–1964 (2004).
[12] Archetti C., Speranza M. G.: Vehicle routing problems with split deliveries. Int. Trans. Oper. Res. **19**(1–2), 3–22 (2012).
[13] Santos I.M., Hamacher S., Oliveira F.: A systematic literature review for the rig scheduling problem: Classification and state-of-the-art. Comput. Chem. Eng. **153**, 107443 (2021).
[14] Flager F.: A method to optimize onshore drilling rig fleet size and schedule considering both reservoir management and operational objectives. J. Proj. Prod. Manag. **1**, (2014).
[15] Santos I.M.: Mathematical programming models and local search algorithms for the offshore rig scheduling problem. Master's thesis, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, PUC-Rio, Rio de Janeiro (2018.)

Актуальность и связанные работы (2/2)

- Ряд более поздних работ [16–18], выполненных после представленных в этой главе исследований, рассматривают аналогичную задачу, однако допускают возможность возврата буровых установок на уже посещенные объекты.
- В работе используется матэвристический алгоритм на основе VNS [5, 19, 20].

[5] Hansen P., Mladenović N., Todosijević R., Hanafi S.: Variable neighborhood search: basics and variants. EURO J. Comput. Optim. **5**(3), 423–454 (2017).
[16] Borisovsky P., Eremeev A., Kovalenko Y., Zaozerskaya L.: Rig routing with possible returns and stochastic drilling times. In: MOTOR LNCS, vol. 12755, pp. 51–66. Springer, Cham (2021).
[17] Borisovsky P.: A parallel greedy approach enhanced by genetic algorithm for the stochastic rig routing problem. Optim. Lett. **18**(1), 235–255 (2024)
[18] Заозерская Л.А., Захарова Ю.В.: Модели и алгоритмы локального поиска для маршрутизации транспортных средств с возвратами и временными окнами. Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Матем. **48**, 95-–110 (2024).
[19] Archetti C., Speranza M. G.: A survey on matheuristics for routing problems. EURO J. Comput. Optim. **2**, 223-246 (2014).
[20] Hemmelmayr V. C., Doerner K. F., Hartl R. F., Vigo D. Models and algorithms for the integrated planning of bin allocation and vehicle routing in solid waste management. Transp. Sci. **48**, 103–120 (2014).

Обозначения задачи

- K — множество разнородных транспортных средств (буровых установок),
- $\mathcal{V}^{\mathrm{DEP}} = \{v_1, v_2, \ldots, v_{|K|}\}$ — множество депо ТС,
- $\mathcal{V}^{\mathrm{CST}} = \{v_{|K|+1}, v_{|K|+2}, \ldots, v_{|K|+n}\}$ — множество клиентов (объектов),
- $\mathcal{V} = \mathcal{V}^{\mathrm{CST}} \cup \mathcal{V}^{\mathrm{DEP}}$,
- $\mathcal{V}_k = \mathcal{V}^{\mathrm{CST}} \cup \{v_k\}$,
- w_i — число скважин для клиента $i \in \mathcal{V}^{\mathrm{CST}}$,
- $[e_i, l_i]$ — временное окно для клиента $i \in \mathcal{V}^{\mathrm{CST}}$,
- d_{ik} — время, требуемое для бурения одной скважины для клиента i ТС k,
- t_{ijk} — время перемещения между $i, j \in \mathcal{V}$ для ТС k.

Переменные задачи

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если ТС } k \in K \text{ проезжает по дуге } (i,j) \in \mathcal{V}_k^2, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$y_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если ТС } k \in K \text{ посещает вершину } i \in \mathcal{V}_k, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Переменные $s_{ik} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $i \in \mathcal{V}_k$, $k \in K$, задают время, в которое ТС k начинает обслуживание клиента i.

Переменные $w_{ik} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $i \in \mathcal{V}_k$, $k \in K$, задают число скважин, которые бурит ТС k для клиента i.

Модель целочисленного линейного программирования

$$\min \sum_{k\in K}\sum_{i\in\mathcal{V}_k}\sum_{j\in\mathcal{V}_k} t_{ijk}x_{ijk} \quad \text{время перемещений} \tag{16}$$

$$y_{ik} = \begin{cases} 1, & v_i = v_k, \\ 0, & v_i \neq v_k, \end{cases} \quad i\in\mathcal{V}^{\mathrm{DEP}}, k\in K, \quad \text{распределение ТС по депо} \tag{17}$$

$$s_{v_k,k} = 0, \;\; w_{v_k,k} = 0, \;\; k\in K, \tag{18}$$

$$\sum\nolimits_{j\in\mathcal{V}_k} x_{ijk} = \sum\nolimits_{j\in\mathcal{V}_k} x_{jik} = y_{ik}, \;\; i\in\mathcal{V}_k, k\in K, \quad \text{сохранение потока} \tag{19}$$

$$\sum\nolimits_{k\in K} w_{ik} = W_i, \;\; i\in\mathcal{V}^{\mathrm{CST}}, \quad \text{все работы выполнены} \tag{20}$$

зависимость числа скважин для бурения от посещения

$$w_{ik} \geq y_{ik}, \;\; i\in\mathcal{V}^{\mathrm{CST}}, k\in K, \tag{21}$$

$$w_{ik} \leq w_i y_{ik}, \;\; i\in\mathcal{V}^{\mathrm{CST}}, k\in K, \tag{22}$$

$$s_{ik} \geq e_i, \;\; s_{ik} + d_{ik}w_{ik} \leq l_i, \;\; i\in\mathcal{V}^{\mathrm{CST}}, k\in K, \quad \text{временные окна} \tag{23}$$

устран. подциклов

$\Delta_{ijk} = \max\{l_i + t_{ijk} - e_j, 0\}$

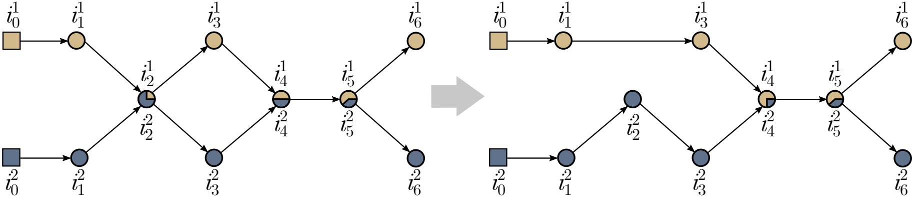
$$s_{ik} + d_{ik}w_{ik} + t_{ijk} - s_{jk} \leq \Delta_{ijk}(1 - x_{ijk}), \;\; i\in\mathcal{V}_k, j\in\mathcal{V}^{\mathrm{CST}}, k\in K, \tag{24}$$

$$x_{ijk}, \; y_{ik} \in \{0,1\}, \; s_{ik}, w_{ik} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \;\; (i,j)\in\mathcal{V}_k^2, k\in K. \tag{25}$$

Распределительная задача

Дано: Маршруты, представленные в виде $I_k = \{i_0^k, i_1^k, \dots, i_{u_k}^k\}$, $i_l^k \prec_{I_k} i_m^k$, если $l < m$, или $l = 0$ или $m = 0$.

Требуется: Найти новые значения для переменных w_{ik}, $i \in \mathcal{V}^{\mathrm{CST}}$, $k \in K$, чтобы улучшить распределение работ.



Задача является NP-трудной.

Математическая модель подзадачи

$$\min \sum_{k\in K} \sum_{i\in I_k} \left(\sum_{j\in I_k, i\prec_{I_k} j} t_{ijk} x'_{ijk} + \lambda\gamma\tau_{ik} \right) + \sum_{i\in \mathcal{V}_k} \gamma\tau^i_{\max} \tag{26}$$

$$y'_{ik} \le y_{ik}, \;\; i \in \mathcal{V}_k, k \in K. \tag{27}$$

$$\sum_{j\in I_k, i\prec_{I_k} j} x'_{ijk} = \sum_{j\in I_k, j\prec_{I_k} i} x'_{jik} = y'_{ik}, \;\; i \in I_k, k \in K, \tag{28}$$

$$\sum\nolimits_{k\in K} w_{ik} = w_i, \;\; i \in \mathcal{V}^{\text{CST}}, \tag{29}$$

$$w_{ik} \ge y'_{ik}, \;\; k \in K, i \in \mathcal{V}^{\text{CST}}, \tag{30}$$

$$w_{ik} \le w_i y'_{ik}, \;\; k \in K, i \in \mathcal{V}^{\text{CST}}, \tag{31}$$

$$s_{ik} \ge e_i, \;\; s_{ik} + d_{ik} w_{ik} \le l_i + \tau_{ik}, \;\; k \in K, i \in I_k, \tag{32}$$

$$s_{ik} + d_{ik} w_{ik} + t_{ij} - s_{jk} \le M(1 - x'_{ijk}), \; i \in I_k, j \in I_k \setminus \{v_k\}, i \prec_{I_k} j, k \in K, \tag{33}$$

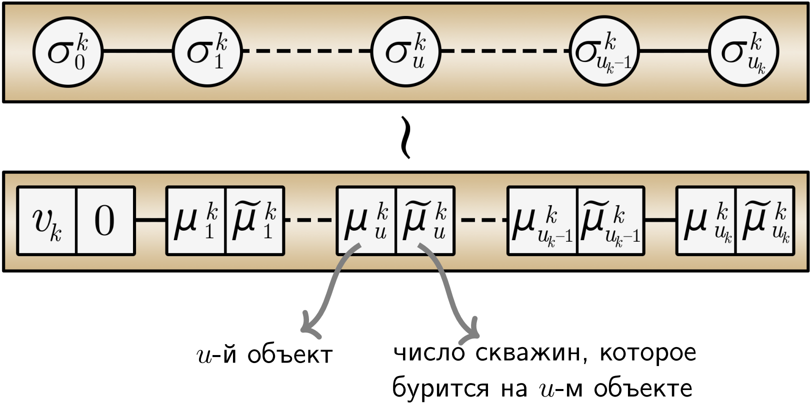
$$\tau_{ik} \ge s_{ik} + d_{ik} w_{ik} - l_i, \;\; i \in I_k, k \in K, \tag{34}$$

$$\tau^i_{\max} \ge \tau_{ik}, \;\; i \in I_k, k \in K, \tag{35}$$

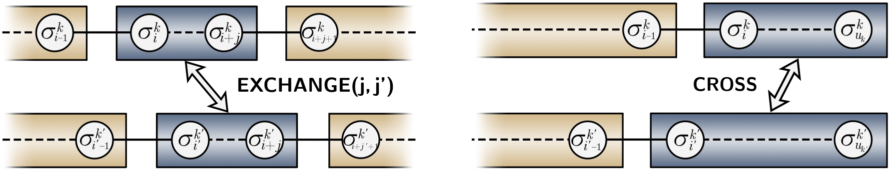
$$x'_{ijk} \in \{0,1\}, \; s_{ik} \ge 0, \; \tau_{ik} \ge 0, \;\; i,j \in I_k, i \prec_{I_k} j, k \in K, \tag{36}$$

$$y'_{ik} \in \{0,1\}, \; w_{ik} \in \mathbb{Z}_{\ge 0}, \; \tau^i_{\max} \ge 0, \;\; i \in \mathcal{V}_k, k \in K. \tag{37}$$

Представление решений



Окрестности для изменения маршрутов

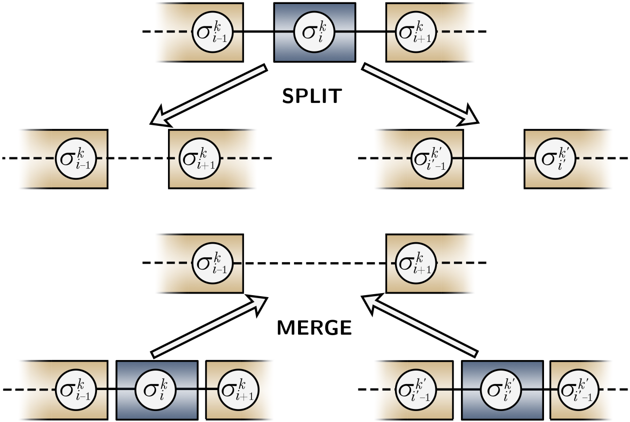


- Relocate: $j \in \{1, 2\}, j' = 0$
- Exchange: $j, j' \in \{1, 2\}$
- Cross-Exchange: $j \in \{1, \ldots, L\}, j' \in \{0, 1, \ldots, L\}$

Для более эффективных вычислений используются структуры для подпоследовательностей, описанные в статье Vidal et al. (2013) †.

† Vidal T., Crainic T. G., Gendreau M., Prins C.: A hybrid genetic algorithm with adaptive diversity management for a large class of vehicle routing problems with time-windows. Comput. Oper. Res. **40**(1), 475–489 (2013).

Окрестности для изменения числа посещений



Кроме этого, используется окрестность Кернигана–Лина, объединяющая все описанные до этого окрестности.

Общий поиск с чередующимися окрестностями

function $\textsc{General\_VNS}(\sigma,\ k_{\max},\ l_{\max},\ \mathcal{N},\ N)$
    while не достигнут критерий остановки **do**
        $k \leftarrow 1$
        while $k \le k_{\max}$ **do**
            $\sigma' \leftarrow \mathtt{Shake}(\sigma,\ k,\ \mathcal{N})$
            $\sigma'' \leftarrow \mathtt{VND}(\sigma',\ l_{\max},\ N)$
            $\mathtt{Neighborhood\_change\_sequential\_SA}(\sigma,\ \sigma'',\ k)$
    Оптимально решить распределительную задачу относительно маршрутов лучшего найденного решения
    return лучшее найденное решение

Спуск с чередующимися окрестностями

function VND(σ, $l_{\max}$, N)
  repeat
    $stop \leftarrow true$
    $l \leftarrow 1$
    $\sigma' \leftarrow \sigma$
    repeat
      $\sigma'' \leftarrow \arg\min_{x \in N_l(\sigma)} L(x)$
      Neighborhood_change_sequential(σ, σ'', l)
    until $l = l_{\max}$
    if $L(\sigma) \neq L(\sigma')$ **then**
      $\sigma' \leftarrow \sigma$
      Решить распределительную задачу относительно маршрутов решения σ
    if $L(\sigma) < L(\sigma')$ **then**
      $stop \leftarrow false$
  until $stop = true$
  return σ

Здесь $L(\sigma)$ обозначает значение штрафованной целевой функции для задачи с релаксированными ограничениями на временные окна.

Численные эксперименты

Три набора примеров:

S1 $d_{ik} = 2 \ \forall i \in \mathcal{V}^{\mathrm{CST}},\, k \in K$

S2 $d_{ik} \in \{1, 2, 3\}, d_{ik} = d_{ik'} \ \forall k, k' \in K$

S3 три типа ТС, влияющие на d_{ik}

И их вариации:

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{S} & & \mathsf{S}' \\ [e_i, l_i] & \Rightarrow & [e_i, \frac{e_i + l_i}{2}] \\ K & & K' = 2K \end{array}$$

- Настройка параметров алгоритма при помощи SMAC3 улучшила результаты на 2,4 %.
- Матэвристика превосходит схему без использования решения подзадачи на 1,4 %, а вариант с поиском с запретами по комбинированной окрестности вместо VND на 7 %.

Заключение

- сформулирована оригинальная постановка задачи, в которой совместное обслуживание объектов определяется временными ограничениями, а не грузоподъёмностью;
- выделена и формализована подзадача в виде модели смешанного целочисленного линейного программирования, для которой доказана NP-трудность;
- разработан матэвристический алгоритм, комбинирующий локальный поиск с чередующимися окрестностями и точное решение подзадачи, способный находить решения, превосходящие результаты схемы без решения подзадачи в среднем на 1,4 %.

Апробация работы и публикации автора

Работа была представлена на следующих конференциях:

- Международная конференция «Теория математической оптимизации и исследование операций», Новосибирск, Россия, июль 2020 г.;
- Международная конференция по локальному поиску с чередующимися окрестностями ICVNS, Абу-Даби, ОАЭ, октябрь 2020 г.;

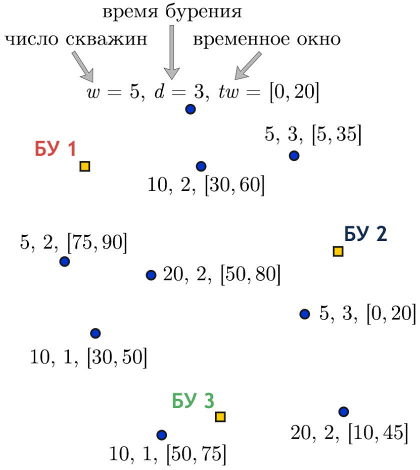
По теме главы опубликовано 2 статьи и получено 1 свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ:

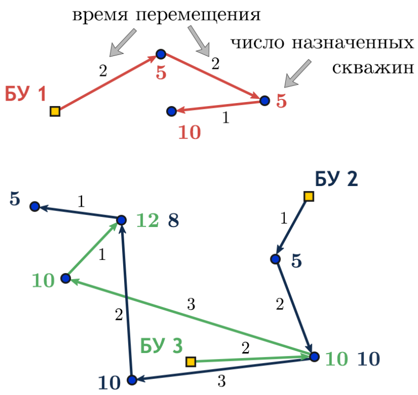
- **Kulachenko I. N.**, Kononova P. A. A Matheuristic for the Drilling Rig Routing Problem // *Lecture Notes in Computer Science*. 2020. Vol. 12095. P. 343–358.
- **Кулаченко И. Н.**, Кононова П. А. Гибридный алгоритм решения задачи маршрутизации буровых установок // *Дискрет. анализ и исслед. операций*. 2021. Т. 28, № 2. стр. 35–59. Переведена на английский: «A hybrid algorithm for the drilling rig routing problem», *J. Appl. Industr. Math.*, 2021, Vol. 15, no. 2, P. 261–276.
- *Программа оптимизации маршрутов мобильных буровых установок* // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022681063. **Кулаченко И. Н.**, Кононова П. А. 2022.

Глава 3. Содержание

3. Пороговая робастность для задачи маршрутизации буровых установок

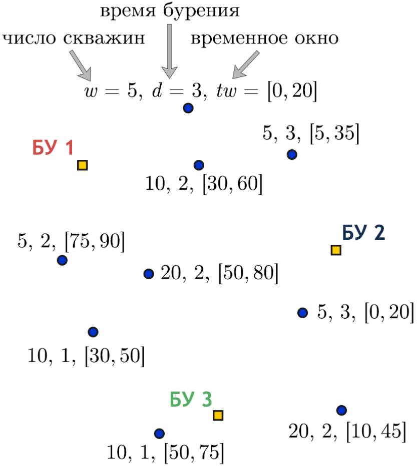
Пример 1

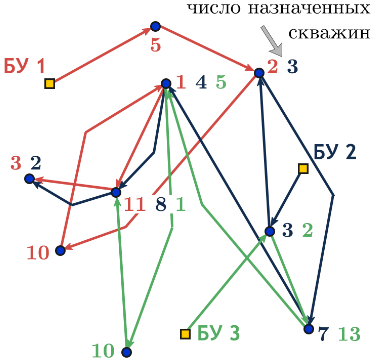




суммарное время перемещений = 20, нет устойчивости

Пример 2





суммарное время перемещений = 37, решение остается допустимым, когда все времена бурения умножены на 1.2

Актуальность и связанные работы (1/2)

- Большинство практических сценариев VRP содержат в себе неопределенности во входных данных.
- Пороговая робастность впервые была введена в [21] с продолжением исследований в [22–25].
- Схожим направлением является оптимизация радиуса устойчивости [26, 27].

[21] Carrizosa E., Nickel S.: Robust facility location. Math. Methods Oper. Res. **58**(2), 331–349 (2003).
[22] Blanquero R., Carrizosa E., Hendrix E.M.T.: Locating a competitive facility in the plane with a robustness criterion. Eur. J. Oper. Res. **215**(1), 21-24 (2011).
[23] Ciligot-Travain M., Traoré, S.: On a robustness property in single-facility location in continuous space. TOP **22**(1), 321-330 (2014).
[24] Carrizosa E., Ushakov A., Vasilyev I.: Threshold robustness in discrete facility location problems: a bi-objective approach. Optim. Lett. **9**, 1297-1314 (2015).
[25] Ратушный А.В., Кочетов Ю.А.: Матэвристика для минимизации времени ожидания трейлеров при неточных временах прибытия. Дискретн. анализ и исслед. опер. **29**(3), 85–101 (2022). (Перевод: Matheuristics for Waiting Time Minimization for Trailers with Uncertain Arrival Times. J. Appl. Industr. Math. **16**, 540–549 (2022).
[26] Poort E.S.V.D.: Aspects of sensitivity analysis for the traveling salesman problem. Ph.D. Thesis, University of Groningen, Groningen, The Netherlands (1997).
[27] Borisovsky P., Battaïa O.: MIP-based heuristics for a robust transfer lines balancing problem. In: International Conference on Optimization and Applications, pp. 123–135. Springer (2021).

Актуальность и связанные работы (2/2)

- В [16, 17] рассматривается стохастическая постановка задачи, для решения которой применяется метод оптимизации на квантилях [28].
- Алгоритм ALNS является одним из наиболее успешных и часто применяемых для VRP [29–31].

[16] Borisovsky P., Eremeev A., Kovalenko Y., Zaozerskaya L.: Rig routing with possible returns and stochastic drilling times. In: MOTOR LNCS, vol. 12755, pp. 51–66. Springer, Cham (2021).
[17] Borisovsky P.: A parallel greedy approach enhanced by genetic algorithm for the stochastic rig routing problem. Optim. Lett. **18**(1), 235–255 (2024).
[28] Kibzun A.I., Naumov A.V., Norkin V.I.: On reducing a quantile optimization problem with discrete distribution to a mixed integer programming problem. Autom. Remote Control **74**, 951–967 (2013). Springer.
[29] Ropke S., Pisinger D.: An adaptive large neighborhood search heuristic for the pickup and delivery problem with time windows. Transp. Sci. **40**(4), 455–472 (2006).
[30] Azi N., Gendreau M., Potvin J.-Y.: An adaptive large neighborhood search for a vehicle routing problem with multiple routes. Comput. Oper. Res. **41**, 167–173 (2014).
[31] Hemmelmayr V.C., Cordeau J.-F., Crainic T.G.: An adaptive large neighborhood search heuristic for Two-Echelon Vehicle Routing Problems arising in city logistics. Comput. Oper. Res. **39**(12), 3215–3228 (2012).

Обозначения задачи

- K — разнородное множество буровых установок,
- $\mathcal{V}^{\mathrm{DEP}} = \{v_1, v_2, \ldots, v_{|K|}\}$ — множество депо установок,
- $\mathcal{V}^{\mathrm{CST}} = \{v_{|K|+1}, v_{|K|+2}, \ldots, v_{|K|+n}\}$ — множество объектов,
- $\mathcal{V} = \mathcal{V}^{\mathrm{CST}} \cup \mathcal{V}^{\mathrm{DEP}}$,
- $\mathcal{V}_k = \mathcal{V}^{\mathrm{CST}} \cup \{v_k\}$ — множество вершин, доступных для установки k (объединение объектов и её депо),
- w_i — число скважин, запланированных для объекта $i \in \mathcal{V}^{\mathrm{CST}}$,
- $[e_i, l_i]$ — временное окно для объекта $i \in \mathcal{V}^{\mathrm{CST}}$,
- d_{ik} — время, необходимое для бурения одной скважины на объекте i буровой установкой k,
- t_{ijk} — время перемещения между вершинами i и $j \in \mathcal{V}$ для установки k.

Переменные задачи

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если установка } k \in K \text{ проходит по дуге } (i,j) \in \mathcal{V}_k^2, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$y_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если установка } k \in K \text{ посещает вершину } i \in \mathcal{V}_k, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Переменные s_{ik}, $i \in \mathcal{V}_k$, $k \in K$, задают время начала обслуживания объекта i буровой установкой k.

Переменные $w_{ik} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $i \in \mathcal{V}_k$, $k \in K$, задают число скважин, которые установка k должна пробурить на объекте i.

Переменные $\varepsilon_{ik} \geq 0$, $i \in \mathcal{V}^{\mathrm{CST}}$, $k \in K$, задают коэффициент-множитель для d_{ik}, отражающий дополнительное время бурения скважины на объекте i буровой установкой k.

Переменная $\varepsilon_{\min} \geq 0$ соответствует минимальному значению произведения весового коэффициента α_i и ε_{ik} для объектов $i \in \mathcal{V}^{\mathrm{CST}}$ и установок $k \in K$.

Нелинейная модель целочисленного программирования

$$\max \varepsilon_{\min} \quad \text{\{ макс. устойчивость} \tag{38}$$

$$\sum_{k\in K}\sum_{i\in\mathcal{V}_k}\sum_{j\in\mathcal{V}_k} t_{ijk}x_{ijk} \le T, \quad \text{\{ порог на время в пути} \tag{39}$$

$$\varepsilon_{\min} \le \alpha_i\varepsilon_{ik}, \ \ i\in\mathcal{V}^{\mathrm{CST}}, k\in K, \tag{40}$$

переменные для депо:

$$y_{ik} = \begin{cases} 1, & v_i = v_k, \\ 0, & v_i \ne v_k, \end{cases} \quad i\in\mathcal{V}^{\mathrm{DEP}}, k\in K, \tag{41}$$

$$s_{v_k,k} = 0, \ \ w_{v_k,k} = 0, \ \ k\in K, \tag{42}$$

$$\sum\nolimits_{j\in\mathcal{V}_k} x_{ijk} = \sum\nolimits_{j\in\mathcal{V}_k} x_{jik} = y_{ik}, \ \ i\in\mathcal{V}_k, k\in K, \quad \text{\{сохр. потока} \tag{43}$$

$$\sum\nolimits_{k\in K} w_{ik} = W_i, \ \ i\in\mathcal{V}^{\mathrm{CST}}, \quad \text{\{ назначение скважин} \tag{44}$$

$$w_{ik} \ge y_{ik}, \ \ i\in\mathcal{V}^{\mathrm{CST}}, k\in K, \quad \text{\{ берем } \ge 1 \text{ скважин, если посещаем} \tag{45}$$

$$w_{ik} \le W_i y_{ik}, \ \ i\in\mathcal{V}^{\mathrm{CST}}, k\in K, \quad \text{\{не берем, если не пос.} \tag{46}$$

$$s_{ik} \ge e_i, \ \ s_{ik} + (1+\varepsilon_{ik})d_{ik}w_{ik} \le l_i, \ \ i\in\mathcal{V}^{\mathrm{CST}}, k\in K, \quad \text{\{врем. окна} \tag{47}$$

устранение подциклов

$$\Delta_{ijk} = \max\{l_i + t_{ijk} - e_j, 0\}$$

$$s_{ik} + (1+\varepsilon_{ik})d_{ik}w_{ik} + t_{ijk} - s_{jk} \le \Delta_{ijk}(1 - x_{ijk}), \ \ i\in\mathcal{V}_k, j\in\mathcal{V}^{\mathrm{CST}}, k\in K, \tag{48}$$

$$x_{ijk}, \ y_{ik}\in\{0,1\}, \ \varepsilon_{ik}, \varepsilon_{\min}\in[0, M_\varepsilon], \ s_{ik}, w_{ik}\in\mathbb{Z}_{\ge 0}, \ \ (i,j)\in\mathcal{V}_k^2, k\in K. \tag{49}$$

Линеаризация

$\xi_{ik} = \varepsilon_{ik} w_{ik} = \sum_{j=1}^{W_i} j \varepsilon_{ik} w_{ikj}$

$$w_{ik} = \sum_{j=1}^{W_i} j w_{ikj}, \;\; i \in \mathcal{V}^{\mathrm{CST}}, k \in K, \tag{50}$$

$$\sum_{j=1}^{W_i} w_{ikj} \le 1, \;\; i \in \mathcal{V}^{\mathrm{CST}}, k \in K, \tag{51}$$

$$\xi_{ik} \ge j\varepsilon_{ik} - M_\varepsilon W_i(1 - w_{ikj}), \quad i \in \mathcal{V}^{\mathrm{CST}}, k \in K, j \in \{1, \ldots, W_i\}, \tag{52}$$

$$\xi_{ik} \le j\varepsilon_{ik} + M_\varepsilon W_i(1 - w_{ikj}), \quad i \in \mathcal{V}^{\mathrm{CST}}, k \in K, j \in \{1, \ldots, W_i\}, \tag{53}$$

$$s_{ik} + d_{ik}(w_{ik} + \xi_{ik}) \le l_i, \;\; i \in \mathcal{V}^{\mathrm{CST}}, k \in K, \tag{54}$$

$$s_{ik} + d_{ik}(w_{ik} + \xi_{ik}) + t_{ijk} - s_{jk} \le \Delta_{ijk}(1 - x_{ijk}), \;\; i \in \mathcal{V}_k, j \in \mathcal{V}^{\mathrm{CST}}, k \in K, \tag{55}$$

$$x_{ijk}, \; y_{ik} \in \{0,1\}, \varepsilon_{ik}, \varepsilon_{\min} \in [0, M_\varepsilon], \; s_{ik}, w_{ik} \in \mathbb{Z}_{\ge 0}, \;\; (i,j) \in \mathcal{V}_k^2, k \in K, \tag{56}$$

$$w_{ikj} \in \{0,1\}, \; \xi_{ik} \in [0, M_\varepsilon W_i], \;\; i \in \mathcal{V}_k, k \in K, j \in \{1, \ldots, W_i\}. \tag{57}$$

Комбинированная целевая функция

устойчивость на уровне маршрутов   устойчивость на уровне клиентов

$$\max\left(C_1\varepsilon_{\min}+\frac{C_2}{|K|}\sum_{k\in K}\varepsilon_k^{\text{veh}}+\frac{C_3}{|\mathcal{V}^{\text{CST}}|}\sum_{i\in\mathcal{V}^{\text{CST}}}\varepsilon_i^{\text{cst}}\right)\tag{58}$$

$$\varepsilon_{\min}\le\alpha_i\varepsilon_{ik},\;\; i\in\mathcal{V}^{\text{CST}},k\in K,\tag{59}$$

$$\varepsilon_k^{\text{veh}}\le\alpha_i\varepsilon_{ik},\;\; i\in\mathcal{V}^{\text{CST}},k\in K,\tag{60}$$

$$\varepsilon_i^{\text{cst}}\le\alpha_i\varepsilon_{ik},\;\; i\in\mathcal{V}^{\text{CST}},k\in K,\tag{61}$$

$$\varepsilon_k^{\text{veh}}\le M_\varepsilon\sum\nolimits_{j\in\mathcal{V}^{\text{CST}}}x_{kjk},\tag{62}$$

$$\varepsilon_{\min},\varepsilon_i^{\text{cst}},\varepsilon_k^{\text{veh}}\in[0,M_\varepsilon],\;\; i\in\mathcal{V}^{\text{CST}},k\in K.\tag{63}$$

Алгоритм адаптивного поиска по большим окрестностям

```
 1: function ALNS(σ)
 2:     σ* ← σ
 3:     Инициализировать веса операторов
 4:     while критерий остановки не выполнен do
 5:         for I итераций do
 6:             Выбрать операторы разрушения и восстановления слу-
                чайно в соответствии с текущими весами
 7:             Применить операторы разрушения и восстановления к σ
                для получения σ'
 8:             if σ' удовлетворяет критерию принятия then
 9:                 σ ← σ'
10:                 if f(σ*) < f(σ') then
11:                     σ* ← σ'
12:         Скорректировать веса операторов
13:     return σ*
```

Одно выполнение цикла (5)–(11) называется *сегментом*.

Операторы

Операторы разрушения:

- Случайные
- Основанные на схожести

Три уровня удаления: посещения, объекты или маршруты.

Операторы восстановления:

- Жадный без перераспределения работ
- С учетом альтернатив без перераспределения работ
- Жадный со случайным перераспределением работ
- Жадный с жадным перераспределением работ

Веса операторов рассчитываются перед началом каждого сегмента:

$w_i^j = \gamma w_i^{j-1} + (1-\gamma)\pi_i^{j-1}$, где w_i^j — вес оператора i в сегменте j, а π_i^{j-1} — успешность оператора i за сегмент $j-1$, $0 \le \gamma \le 1$.

Численные эксперименты

- Проведён анализ чувствительности, оценивающий влияние параметров задачи на устойчивость решений и эффективность алгоритма. Установлено, что на примерах с 20 объектами и 3 буровыми установками разработанный алгоритм находит (суб)оптимальные решения в более чем 95 % случаев за 10 секунд вычислений.
- На примерах с 50 объектами и 6 буровыми установками алгоритм значительно превосходит Gurobi по производительности, находя оптимальные или близкие к ним решения за 10 минут вычислений.
- Алгоритм успешно справляется и с примерами задачи большей размерности.

Все представленные эксперименты, если не указано иначе, выполнены на компьютере с процессором `Intel Core i5-12600k` 3.69 ГГц и 32 ГБ ОЗУ под управлением `Microsoft Windows 11` (64-bit). И ALNS и Gurobi запускались в многопоточном режиме, используя все доступные ядра. Хорошие оценки на оптимум задачи получены с помощью долгих запусков Gurobi (от 1 ч до 5 ч) для каждого рассматриваемого примера и конфигурации параметров задачи.

Заключение

- впервые применен подход пороговой робастности для задач маршрутизации, разработана соответствующая модель смешанного целочисленного линейного программирования;
- предложен алгоритм для пересчёта комбинированной целевой функции, учитывающей различные показатели устойчивости решения;
- разработан метод на основе адаптивного поиска по большим окрестностям, позволяющий находить (суб)оптимальные решения в подавляющем большинстве случаев для примеров малой и средней размерности;
- проведён анализ чувствительности, оценивающий влияние параметров задачи на оптимальные значения устойчивости и результаты алгоритма.

Апробация работы и публикации автора

Работа была представлена на следующих конференциях:

- Международная летняя школа-семинар MESS, Катания, Италия, июнь 2021 г.;
- Международная конференция «Теория математической оптимизации и исследование операций», Иркутск, Россия, июль 2021 г.;
- Международная конференция по вычислительной логистике ICCL, Энсхеде, Нидерланды, сентябрь 2021 г.;
- Международная конференция «Теория математической оптимизации и исследование операций», Петрозаводск, Россия, июль 2022 г.;
- Международная конференция «Теория математической оптимизации и исследование операций», Екатеринбург, Россия, июль 2023 г.;

По теме главы опубликовано 1 статья:

- **Kulachenko I. N.**, Kononova P. A. An adaptive large neighborhood search for the robust rig routing // *Expert Systems with Applications*. 2023. Vol. 231. P. 120626.

Основные положения, выносимые на защиту (1/2)

1. Для задачи маршрутизации транспортных средств с условиями на согласованность визитов предложен гибридный алгоритм локального поиска с чередующимися окрестностями, сочетающий рандомизированный поиск с запретами, интенсификацию, диверсификацию, адаптивные штрафы и схему декомпозиции, что приводит к значительному сокращению погрешности по сравнению с базовой схемой.
2. Для задачи маршрутизации буровых установок предложен матэвристический алгоритм, интегрирующий точное решение выделенной NP-трудной подзадачи в схему локального поиска.

Основные положения, выносимые на защиту (2/2)

3. Впервые в задачах маршрутизации транспортных средств применён подход пороговой робастности, рассмотренный на примере маршрутизации буровых установок. Разработан алгоритм пересчёта комбинированной целевой функции с учётом различных показателей устойчивости. Представлен метод адаптивного поиска по большим окрестностям, обеспечивающий стабильное нахождение оптимальных решений для задач малой и средней размерности. Проведён анализ чувствительности, исследующий влияние параметров задачи на оптимальные значения устойчивости и эффективность алгоритма.

Апробация работы

1. Международная конференция «Проблемы оптимизации и их приложения», Омск, Россия, июль 2018 г.;
2. Международная конференция «Manufacturing Modelling, Management and Control», Берлин, Германия, август 2019 г.;
3. Международная конференция «Теория математической оптимизации и исследование операций», Новосибирск, Россия, июль 2020 г.;
4. Международная конференция по локальному поиску с чередующимися окрестностями ICVNS, Абу-Даби, ОАЭ, октябрь 2020 г.;
5. Международная летняя школа-семинар MESS, Катания, Италия, июнь 2021 г.;
6. Международная конференция «Теория математической оптимизации и исследование операций», Иркутск, Россия, июль 2021 г.;
7. Международная конференция по вычислительной логистике ICCL, Энсхеде, Нидерланды, сентябрь 2021 г.;
8. Международная конференция «Теория математической оптимизации и исследование операций», Петрозаводск, Россия, июль 2022 г.;
9. Международная конференция «Теория математической оптимизации и исследование операций», Екатеринбург, Россия, июль 2023 г.;
10. Азиатская международная школа-семинар «Проблемы оптимизации сложных систем», Новосибирск, Россия, август 2023 г.;

Публикации автора по теме диссертации (1/2)

1. **Kulachenko I. N.**, Kononova P. A., Kochetov Y. A., Kurochkin A. A. The variable neighborhood search for a consistent vehicle routing problem under shift length constraints // *IFAC-PapersOnLine*. 2019. Vol. 52, no. 13. P. 2314–2319.
2. **Kulachenko I. N.**, Kononova P. A. The VNS approach for a consistent capacitated vehicle routing problem under the shift length constraints // *Commun. Comput. Inform. Sci.*. 2019. Vol. 1090. P. 51–67.
3. **Кулаченко И. Н.**, Кононова П. А. Гибридный алгоритм локального поиска для задачи маршрутизации транспортных средств с многократным посещением клиентов // *Дискрет. анализ и исслед. операций*. 2020. Т. 27, № 2. стр. 43–64. Переведена на английский: «A hybrid local search algorithm for consistent periodic vehicle routing problem», *J. Appl. Industr. Math.*, 2020, Vol. 14, no. 2, P. 339–351.
4. **Kulachenko I. N.**, Kononova P. A. A Matheuristic for the Drilling Rig Routing Problem // *Lecture Notes in Computer Science*. 2020. Vol. 12095. P. 343–358.
5. **Кулаченко И. Н.**, Кононова П. А. Гибридный алгоритм решения задачи маршрутизации буровых установок // *Дискрет. анализ и исслед. операций*. 2021. Т. 28, № 2. стр. 35–59. Переведена на английский: «A hybrid algorithm for the drilling rig routing problem», *J. Appl. Industr. Math.*, 2021, Vol. 15, no. 2, P. 261–276.

Публикации автора по теме диссертации (2/2)

6. **Kulachenko I. N.**, Kononova P. A. An adaptive large neighborhood search for the robust rig routing // *Expert Systems with Applications*. 2023. Vol. 231. P. 120626.
7. **Kulachenko I.** Decomposition Strategies for Solving a Large-Scale Consistent Vehicle Routing Problem // *Proc. 19th Int. Asian School-Seminar on Optimization Problems of Complex Systems (OPCS)*. 2023. P. 48–52.
8. *Программа оптимизации маршрутов транспортных средств с многократным посещением клиентов* // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021617091. **Кулаченко И. Н.**, Кононова П. А. Зарегистрировано: 06.05.2021.
9. *Программа оптимизации маршрутов мобильных буровых установок* // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022681063. **Кулаченко И. Н.**, Кононова П. А. Зарегистрировано: 09.11.2022.

Благодарю за внимание!