МНОГОСЕТОЧНЫЕ МЕТОДЫ НЕПОЛНОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ

М. А. Баталов, В. П. Ильин

Институт вычислительной математики и математической геофизики

26.03.2024

Литература:

Fedorenko R. — The speed of convergence of one iterative process. — // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1964. — Т. 4, № 3. — С. 227—235.

Bakhvalov N. — On the convergence of a relaxation method with natural constraints on the elliptic operator. — // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1966. — Т. 6, № 5. — С. 101—135.

Il'in V. P. — One version of the multigrid method. — // Siberian Mathematical Journal. — 1985. — Март. — Т. 26, № 2. — С. 240—244.

Algebraic Multigrid Domain and Range Decomposition (AMG-DD/AMG-RD). /. — R. Bank [и др.] // SIAM Journal on Scientific Computing. — 2015. — Т. 37, № 5. — S113—S136.

Shaidurov V. — Some estimates of the rate of convergence for the cascadic conjugate-gradient method. — // Computers & Mathematics with

Applications. — 1996. — Т. 31, № 4. — С. 161—171 ; — Selected Topics in Numerical Methods.

Bornemann F. A., Deuflhard P. — The cascadic multigrid method for elliptic problems. — // Numerische Mathematik. — 1996. — Дек. — Т. 75, № 2. — С. 135—152.

Brandt A. — Algebraic multigrid theory: The symmetric case. — // Applied Mathematics and Computation. — 1986. — Т. 19, № 1. — С. 23—56.

Notay Y. — Algebraic multigrid and algebraic multilevel methods: a theoretical comparison. — // Numerical Linear Algebra with Applications. — 2005. — Т. 12, № 5/6. — С. 419—451.

Saad Y. — Iterative Methods for Sparse Linear Systems. — Second. — Society for Industrial, Applied Mathematics, 2003.

Василевский Ю., Ольшанский М. — Краткий курс по многосеточным методам и методам декомпозиции области: учеб.-метод. пособие. — МАКС Пресс, 2007. — (Формирование системы инновационного образования в МГУ / Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова).

- Notay Y. — Analysis of two-grid methods: The nonnormal case. — // Mathematics of Computation. — 2020. — Т. 89. — С. 807—827.
- Vaněk P. — Smoothed prolongation multigrid with rapid coarsening and massive smoothing. — // Applications of Mathematics. — 2012. — Февр. — Т. 57, № 1. — С. 1—10.
- Demidov D. — AMGCL: An Efficient, Flexible, and Extensible Algebraic Multigrid Implementation. — // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2019. — Май. — Т. 40, № 5. — С. 535—546.
- Xu J., Zikatanov L. — Algebraic multigrid methods. — // Acta Numerica. — 2017. — Т. 26. — С. 591—721.
- Il'in V. P. — Iterative Preconditioned Methods in Krylov Spaces: Trends of the 21st Century. — // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2021. — Нояб. — Т. 61, № 11. — С. 1750—1775.
- Gurieva Y. L., Il'in V. P., Petukhov A. V. — On Multigrid Methods for Solving Two-Dimensional Boundary-Value Problems. — // Journal of Mathematical Sciences. — 2020. — Авг. — Т. 249, № 2. — С. 118—127.

Reusken A. — A Multigrid Method Based on Incomplete Gaussian Elimination. — // Numerical Linear Algebra with Applications. — 1996. — Т. 3, № 5. — С. 369—390.

On Parallel Multigrid Methods for Solving Systems of Linear Algebraic Equations. /. — M. Batalov [и др.] // Parallel Computational Technologies / под ред. L. Sokolinsky, M. Zymbler. — Cham : Springer Nature Switzerland, 2023. — С. 93—109.

Предобусловленные методы сопряженных направлений

Рассмотрим СЛАУ с с.п.о. матрицей

$$Au = f, \quad A^\top = \{a_{t,s}\} \in \mathcal{R}^{N,N}, \quad u = \{u_t\}, \quad f = \{f_t\} \in \mathcal{R}^N.$$

Двухстороннее предобуславнивание:

$$B = L_B U_B, \quad B^{-1} = U_B^{-1} L_B^{-1}, \quad U_B = L_B^\top,$$

$$\begin{aligned} &\bar{r}^0 = \bar{f} - \bar{A}\bar{u}^0, \quad \bar{p}^0 = \bar{r}^0, \quad n = 0, 1, \ldots, : \\ &\bar{u}^{n+1} = \bar{u}^n + \alpha_n \bar{p}^n = \bar{u}^0 + \alpha_0 \bar{p}^n + \ldots + \alpha_n \bar{p}^n, \\ &\bar{r}^{n+1} = \bar{f} - \bar{A}\bar{u}^{n+1} = \bar{r}^n - \alpha_n \bar{A}\bar{p}^n = \bar{r}^0 - \alpha_0 \bar{A}\bar{p}^0 - \ldots - \alpha_n \bar{A}\bar{p}^n, \end{aligned} \tag{1}$$

Предобусловленные методы сопряженных направлений

Методы минимальных ошибок (γ=0), сопряженных градиентов (γ=1) и сопряженных невязок (γ=2).

$\gamma = 0,\ 1,\ 2$:

$$\left(\bar{A}^{\gamma}\bar{p}^{n},\bar{p}^{k}\right) = (\bar{p}^{n},\bar{p}^{k})_{\gamma} = \rho_{n}^{(\gamma)}\delta_{k,n}, \quad \rho_{n}^{(\gamma)} = (\bar{p}^{n},\bar{p}^{n})_{\gamma},$$

$$\mathcal{K}_{n+1}\left(\bar{r}^{0},\bar{A}\right) = Span\left\{\bar{r}^{0},\bar{A}\bar{r}^{0},\ldots,\bar{A}^{n}\bar{r}^{0}\right\},$$

$$\Phi_{\gamma}\left(\bar{r}^{n+1}\right) \equiv \left(\bar{r}^{n+1},\bar{r}^{n+1}\right)_{\gamma-2} = \Phi_{\gamma}\left(\bar{r}^{0}\right) - \sum_{k=0}^{n}(\sigma_{k}^{(\gamma)})^{2}/\rho_{k}, \quad \sigma_{k}^{(\gamma)} = \left(\bar{r}^{0},p^{k}\right)_{\gamma-1}.$$

$\gamma = 1,\ 2$:

$$\alpha_{n}^{(\gamma)} = \sigma_{n}^{(\gamma)}/\rho_{n}^{(\gamma)}, \quad \bar{p}^{0} = \bar{r}^{0}, \quad \bar{p}^{n+1} = \bar{r}^{n+1} + \beta_{n}^{(\gamma)}\bar{p}_{n},$$

$$\beta_{n}^{(\gamma)} = -\left(\bar{r}^{n+1},\bar{p}^{n}\right)_{\gamma}/\rho_{n}^{(\gamma)} = \sigma_{n+1}^{(\gamma)}/\sigma_{n}^{(\gamma)}, \quad \sigma_{n}^{(\gamma)} = (\bar{A}^{\gamma-1}\bar{r}^{n},\bar{r}^{n}).$$

Предобусловленные методы сопряженных направлений

Предобусловленный метод минимальных ошибок (PME – Preconditioned Minimal Error). $\gamma = 0$:

$$v^n = \bar{u} - u^n, \quad \bar{r}^n = \bar{A} v^n, \quad \bar{u} = U_B u :$$

$$\bar{u} = \bar{u}^0 + \alpha_0^{(0)} \bar{p}^0 + \ldots + \alpha_n^{(0)} \bar{p}^n + \ldots, \; v^n = \alpha_n^{(0)} \bar{p}^n + \alpha_{n+1}^{(0)} \bar{p}^{n+1} + \ldots, \; \bar{r}^n =$$

$$= \alpha_n^{(0)} \bar{A} \bar{p}^n + \alpha_{n+1}^{(0)} \bar{A} \bar{p}^{n+1} + \ldots,$$

$$\alpha_n^{(0)} = (v^n, \bar{p}^n)/\rho_n^{(0)} = -\alpha_{n-1}^{(0)} (v^n, \bar{A}\bar{p}^{n-1})/\rho_n^{(0)} = -\alpha_{n-1}^{(0)} (r^n, \bar{p}^{n-1})/\rho_n^{(0)},$$

$$u^{n+1} = u^n + \alpha_n^{(0)} p^n.$$

Процесс ортоганализации векторов Ланцоша:

$$\bar{p}^0 = \bar{A}\bar{r}^0, \quad \bar{p}^1 = \bar{A}\bar{p}^0 - \bar{\alpha}_0 p^0, \quad n = 1, 2, \ldots :$$

$$\bar{p}^{n+1} = \bar{A}\bar{p}^n - \bar{\alpha}_n \bar{p}^n - \bar{\beta}_n \bar{p}^{n-1},$$

$$\bar{\alpha}_n = (\bar{A}\bar{p}^n, \bar{p}^n)/\rho_n^{(0)}, \quad \bar{\beta}_n = (\bar{p}^n, \bar{p}^n)/\rho_{n-1}^{(0)}, \quad \rho_n^{(0)} = (\bar{p}^n, \bar{p}^n),$$

$$\sigma_0^{(0)} = (\bar{r}^0, \bar{A}^{-1}\bar{p}^0), \bar{p}^0 = A r^0, \quad \sigma_0^{(0)} = (r^0, r^0).$$

Предобусловленные методы сопряженных направлений

Односторонне предобусловленный метод МЕ ($\gamma = 0$):

$$L_B \bar{p}^n = \widetilde{p}^n, \quad \bar{r}^0 = L_B^{-1} r^0 :$$

$$\widetilde{p}^0 = AB^{-1} r^0, \quad \widetilde{p}^1 = AB^{-1} \widetilde{p}^0 - \bar{\alpha}_0 \widetilde{p}^0,$$

$$\widetilde{p}^{n+1} = AB^{-1} \widetilde{p}^n - \bar{\alpha}_n \widetilde{p}^n - \bar{\beta}_n \widetilde{p}^{n-1},$$

$$\bar{\alpha}_n = (AB^{-1} \widetilde{p}^n, B^{-1} \widetilde{p})/\rho_n, \quad \bar{\beta}_n = (\widetilde{p}^n, B^{-1} \widetilde{p}^n)/\rho_{n-1}, \quad \rho_n = (\widetilde{p}^n, B^{-1} \widetilde{p}^n),$$

$$u^{n+1} = \widetilde{u}^{n+1} = \widetilde{u}^n + \alpha_n^{(0)} B^{-1} \widetilde{p}^n,$$

$$\widetilde{r}^0 = r^0, \quad \widetilde{r}^{n+1} = \widetilde{r}^n - \alpha_n^{(0)} AB^{-1} \widetilde{p}^n.$$

Предобусловленные методы сопряженных направлений

Односторонне предобусловленный метод PCG ($\gamma = 1$):

$$\bar{u}^0 = U_B u^0, \quad \bar{r}^0 = \bar{p}^0 = L_B^{-1} r^0, \quad r^n = L_B^{-1} r^n, \quad r^n = f - Au^n, \quad p^0 = B^{-1} r^0,$$

$$u^{n+1} = u^n + \alpha_n p^n, \quad \alpha_n = \sigma_n / \rho_n,$$

$$r^{n+1} = r^n - \alpha_n A p^n, \quad \sigma_n = (B^{-1} r^n, r^n), \quad \rho_n = (Ap^n, p^n),$$

$$p^{n+1} = B^{-1} r^{n+1} + \beta_n p^n, \quad \beta_n = \sigma_{n+1} / \sigma_n.$$

Модифицированный вариант с рекурсивным определением коэффицентов ρ_n:

$$\rho_{n+1} = (Ap^{n+1}, p^{n+1}) = (AB^{-1} r^{n+1}, B^{-1} r^{n+1}) + 2\beta_n (B^{-1} r^{n+1}, Ap^n) + \beta_n^2 (Ap^n, p^n) =$$

$$= \gamma_{n+1} - 2\beta_n / \alpha_n (B^{-1} r^{n+1}, r^{n+1}) + \beta_n^2 \rho_n = \gamma_{n+1} + \beta_n^2 \rho_n (1 - 2\sigma_n),$$

$$\gamma_{n+1} = (AB^{-1} r^{n+1}, B^{-1} r^{n+1}), \quad \sigma_{n+1} = (B^{-1} r^{n+1}, r^{n+1}).$$

Одновременное вычисление γ_{n+1} и σ_{n+1}!

Предобусловленные методы сопряженных направлений

Односторонне предобусловленный метод PCR ($\gamma = 2$):

$$\widetilde{u}^0 = u^0 = U_B^{-1}\bar{u}^0, \widetilde{r}^0 = \widetilde{p}^0 = B^{-1}r^0 = B^{-1}(f - Au^0),$$

$$\widetilde{u}^{n+1} = \widetilde{u}^n + \alpha_n\widetilde{p}^n, \quad \alpha_n = \sigma_n/\rho_n, \quad \sigma_n = (A\widetilde{p}^n, \widetilde{p}^n)$$

$$\widetilde{r}^{n+1} = \widetilde{r}^n - \alpha_n B^{-1}A\widetilde{p}^n, \quad \rho_n = (B^{-1}A\widetilde{p}^n, A\widetilde{p}^n),$$

$$\widetilde{p}^{n+1} = \widetilde{r}^{n+1} + \beta_n\widetilde{p}^n, \quad \beta_n = \sigma_{n+1}/\sigma_n,$$

$$\widetilde{u}^n = U_B^{-1}\bar{u}^n, \quad \widetilde{r}^n = U_B^{-1}\bar{r}^n, \quad \widetilde{p}^n = U_B^{-1}\bar{p}^n.$$

Рекурсивное вычисление коэффициентов ρ_n:

$$\rho_{n+1} = (B^{-1}A\widetilde{p}^{n+1}, A\widetilde{p}^{n+1}) = \gamma_{n+1} + 2\beta_n(B^{-1}A\widetilde{r}^{n+1}, A\widetilde{p}^n) + \beta_n^2\rho_n =$$

$$= \gamma_{n+1} - 2\beta_n/\alpha_n(B^{-1}A\widetilde{r}^{n+1}, A\widetilde{r}^{n+1}) + \beta_n^2\rho_n = \gamma_{n+1} + \beta_n^2\rho_n(1 - 2\sigma_n\kappa_{n+1}),$$

$$\gamma_{n+1} = (B^{-1}A\widetilde{r}^{n+1}, A\widetilde{r}^{n+1}), \quad \kappa_{n+1} = (B^{-1}A\widetilde{r}^{n+1}, \widetilde{r}^{n+1}), \quad \sigma_{n+1} = (A\widetilde{r}^{n+1}, \widetilde{r}^{n+1}).$$

Одновременное определение γ_{n+1}, κ_{n+1} и σ_{n+1}!

Классификация узлов сетки

$$Au = f, \quad A = \{a_{t,s}\} \in \mathcal{R}^{N,N}, \quad u = \{u_t\}, \quad f = \{f_l\} \in \mathcal{R}^N,$$

$$\Omega_1^h : x_{i+1} = x_i + h, \quad y_{j+1} = y_j + h, \quad z_{k+1} = z_k + h; \quad i, j, k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\Omega_2^h : x_{i+2} = x_i + 2h, \quad y_{j+2} = y_j + 2h, \quad z_{k+2} = z_k + 2h; \quad i, j, k = 0, 2, 4, \ldots,$$

$$\Omega_1^h = \Omega_1^1 \cup \Omega_1^2 \cup \Omega_1^3 \cup \Omega_1^4, \quad \Omega_1^4 = \Omega_2^h$$

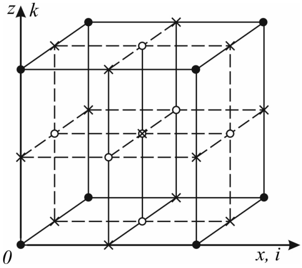

Рис. 1: Обозначения узлов двухуровневого метода на кубических сетках

Блочная структура СЛАУ

$$A^{(l)}u^{(l)} = f^{(l)}, \quad l = 1, 2$$

$$(Au)_{i,j,k} = 6u_{i,j,k} - u_{i-1,j,k} - u_{i,j-1,k} -$$

$$-u_{i+1,j,k} - u_{i,j+1,k} - u_{i,j,k-1} - u_{i,j,k+1} = f_{i,j,k},$$

$$i = 1, 2, .., N_x; \quad j = 1, 2, .., N_y; \quad k = 1, 2, .., N_z;$$

$$Au = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & 0 & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & 0 \\ 0 & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \\ 0 & 0 & A_{4,3} & A_{4,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \\ \bar{f}_3 \\ \bar{f}_4 \end{bmatrix},$$

$$u, \ f \in \mathcal{R}^N, \quad N = N_1 N_y N_z,$$

$$\bar{u}_s, \ \bar{f}_s \in \mathcal{R}^{N_s}, \quad s = 1, 2, 3, 4$$

Рекурсивные СЛАУ на вложенных структурах

$$\Omega^h = \Omega_1^h = \hat{\Omega}_2^h \cup \check{\Omega}_1^h, \ \check{\Omega}_1^h = \Omega_2^h,$$

$$u = u^{(1)} = \left((\hat{u}^{(1)})^\top, (\check{u}^{(1)})^\top\right)^\top, \ \check{u}^{(1)} = u^{(2)}.$$

$$\Omega^h = \Omega_1^h = \hat{\Omega}_1^h \cup \hat{\Omega}_2^h \ldots \cup \hat{\Omega}_{m-1}^h \cup \Omega_m^h,$$

$$u = u^{(1)} = \left((\hat{u}^{(1)})^\top, (\hat{u}^{(2)})^\top, \ldots, (\hat{u}^{(m-1)})^\top, (u^{(m)})^\top\right),$$

$$\Omega_l^h = \hat{\Omega}_l^h \cup \check{\Omega}_l^h, \ \check{\Omega}_l^h = \Omega_{l+1}^h, u^{(l)} = \left((\hat{u}^{(l)})^\top, (\check{u}^{(l)})^\top\right)^\top, \ \check{u}^{(l)} = u^{(l+1)}.$$

$$Au = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}^{(1)} \\ u^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{f}^{(1)} \\ f^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Рекурсивные СЛАУ на вложенных структурах

$$Au = Au^{(1)} =$$

$$= \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & 0 & & \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & & \text{\Large 0} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & A_{m-1,m-1} & A_{m-1,m} \\ \text{\Large 0} & & \ldots 0 & A_{m,m-1} & A_{m,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}^{(1)} \\ \hat{u}^{(2)} \\ \vdots \\ \hat{u}^{(m-1)} \\ u^{(m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{f}^{(1)} \\ \hat{f}^{(2)} \\ \vdots \\ \hat{f}^{(m-1)} \\ f^{(m)} \end{bmatrix}$$

Блочная неполная факторизация

$$B = (G + L)G^{-1}(G + U), \quad G = D + \overline{LG^{-1}U},$$

$$B = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 \\ A_{2,1} & G_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_{3,2} & G_3 & 0 \\ 0 & 0 & A_{4,2} & G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 & A_{,12} & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & A_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & A_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & G_4 \end{bmatrix}$$

двухсеточный метод:

$$G_1 = A_{1,1}, \quad G_2 = A_{2,2} - (A_{2,1}G^{-1}A_{1,2})_1 - \theta S_2,$$

$$S_2 e = [A_{2,1}G_1^{-1}A_{1,2} - (A_{2,1}G_1^{-1}A_{1,2})_1]e$$

$$G_3 = A_{3,3} - (A_{3,2}G_2^{-1}A_{3,4})_1 - \theta S_3, \; S_3 e = [A_{3,2}G_2^{-1}A_{2,3} - (A_{3,2}G_2^{-1}A_{2,3})_1]e,$$

$$G_4 = A_{4,4} - (A_{3,4}G_3^{-1}A_{3,4})_7 - \theta S_4, \; S_4 e = [A_{4,3}G_3^{-1}A_{3,4} - (A_{4,3}G_3^{-1}A_{3,4})_7]e.$$

Двустороннее экономическое предобуславливание СЛАУ

$$A = D + L + U, \quad D = D^\top, \quad L = U^\top, \quad Au = f$$

$$\bar{A}\bar{u} = \bar{f}, \quad \bar{A} = L_B^{-1} A U_B^{-1}, \quad \bar{u} = U_B u, \quad \bar{f} = L_B^{-1} f,$$

$$B = L_B U_B, \quad L_B = (G + L) U_G^{-1}, \quad G = L_G U_G, \quad U_G = L_G^\top$$

$$\bar{A} = (I + \bar{L})^{-1} + (I + \bar{U}^{-1}) + (I + L)^{-1}(\bar{D} - 2I)(I + \bar{U})^{-1},$$

$$\bar{D} = L_G^{-1} D U_G^{-1},\ \bar{L} = L_G^{-1} L U_G^{-1}, \bar{U} = L_G^{-1} U U_G^{-1}$$

$$\bar{A}v = (I + \bar{L})^{-1}[v + (\bar{D} - 2I)w] + w, \quad w = (I + \bar{U})^{-1} v,$$

Двухсеточный метод

$$Bv^n = r^n \equiv f - Au^n, \quad v^n = (v_1^n, v_2^n, v_3^n, v_4^n)$$

$$(G + L)w^n = r^n, \quad (G + U)v^n = Gw^n, \quad G = diag\{G_k\}$$

$$G_1 w_1^n = r_1^n, \quad k = 2, 3, 4 : G_k w_k^n = r_k^n - A_{k,k-1} w_{k-1}^n,$$

$$v_4^n = w_4^n, \quad k = 3, 2, 1 : v_k = w_k - G_k^{-1} A_{k,k+1} w_k^n.$$

$$u^{n+1} = u^n + v^n, \quad G_4 = A^{(2)} = L_A^{(2)} U_A^{(2)}$$

Структура многосеточного метода

$$(A^l u^{(l)})_t = a_t^{(l)} u_t + \sum_{q=1}^{6} a_{t,t+s_{t,q}}^{(l)} u_{t+s_{t,q}}^{(l)} = \bar{f}_t, \qquad (2)$$

$$t = 1, \ldots, N_l, \ \ l = 1, 2, \ldots, m,$$

$$A^{(l)} u^{(l)} = f^{(l)}, \quad A^{(l+1)} u^{(l+1)} = f^{(l+1)}, \quad l = 1, \ldots, m-1.$$

$$\Omega_l = \Omega_l^1 \cup \Omega_l^2 \cup \Omega_l^3 \cup \Omega_l^4, \quad \Omega_l^4 = \Omega_{l+1}$$

$$Au = \begin{bmatrix} A_{1,1}^{(l)} & A_{1,2}^{(l)} & 0 & 0 \\ A_{2,1}^{(l)} & A_{2,2}^{(l)} & A_{2,3}^{(l)} & 0 \\ 0 & A_{3,2}^{(l)} & A_{3,3}^{(l)} & A_{3,4}^{(l)} \\ 0 & 0 & A_{4,3}^{(l)} & A_{4,4}^{(l)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1^{(l)} \\ \bar{u}_2^{(l)} \\ \bar{u}_3^{(l)} \\ \bar{u}_4^{(l)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}_1^{(l)} \\ \bar{f}_2^{(l)} \\ \bar{f}_3^{(l)} \\ \bar{f}_4^{(l)} \end{bmatrix},$$

Многосеточная неполная факторизация 1

$$B^{(l)} = (G^{(l)} + U^{(l)})(G^{(l)})^{-1}(G^{(l)} + U^{(l)} =$$

$$= \begin{bmatrix} G_{1,1}^{(l)} & 0 & 0 & 0 \\ A_{2,1}^{(l)} & G_2^{(l)} & 0 & 0 \\ 0 & A_{3,2}^{(l)} & G_3^{(l)} & 0 \\ 0 & 0 & A_{4,3}^{(l)} & G_4^{(l)} \end{bmatrix} G^{(l)})^{-1} \begin{bmatrix} G_1^{(l)} & A_{1,2}^{(l)} & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & A_{2,3}^{(l)} & 0 \\ 0 & 0 & G_3^{(l)} & A_{3,4}^{(l)} \\ 0 & 0 & 0 & G_4^{(l)} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Многосеточная неполная факторизация 2

$$G_1^{(l)} = A_{1,1}^{(l)}, \quad G_2^{(l)} = A_{2,2}^{(l)} - (A_{2,1}^{(l)}(G_1^{(l)})^{-1}A_{1,2}^{(l)})_1 - \theta_2 S_2^{(l)},$$

$$S_2^{(l)} e_2 = [A_{2,1}^{(l)}(G_1^{(l)})^{-1}A_{1,2}^{(l)} - (A_{2,1}^{(l)}(G_1^{(l)})^{-1})A_{1,2}^{(l)})_1]e_2$$

$$G_3^{(l)} = A_{3,3}^{(l)} - (A_{3,2}^{(l)}(G_2^{(l)})^{-1}A_{2,3}^{(l)})_1 - \theta_3 S_3^{(l)}$$

$$S_3^{(l)} e_3 = [A_{3,2}^{(l)}(G_3^{(l)})^{-1}A_{2,3}^{(l)} - (A_{3,2}^{(l)}(G_2^{(l)})^{-1})A_{3,2}^{(l)})_1]e_3$$

$$G_4^{(l)} = A_{4,4}^{(l)} - (A_{4,3}^{(l)}(G_3^{(l)})^{-1}A_{3,4}^{(l)})_7 - \theta_4 S_4^{(l)}$$

$$S_4^{(l)} e_4 = [A_{4,3}^{(l)}(G_3^{(l)})^{-1}A_{3,4}^{(l)} - (A_{4,3}^{(l)}(G_3^{(l)})^{-1})A_{3,4}^{(l)})_7]e_4$$

Теорема 1

Теорема

Пусть матрица $A = A^{(1)}$ *является стилтьесовой. Тогда матрицы* $B^{(l)}$ *и* $G_4^{(l)} = A^{(l+1)}$ *из (2), (3),* $l = 1, 2, ..., m$, *также являются стилтьесовыми, причем для* $v \in \mathbb{R}^{N_l}$ *выполняются условия*

$$\delta_l(B^{(l)}v, v) \leq (A^{(l)}v, v) \leq \Delta_l(B^{(l)}v, v),$$

где $0 \leq \delta_l \leq \Delta_l$, *суть константы эквивалентности матриц, вычисляемые через коэффициенты соотношений (2), (3).*

Теорема 2

Теорема

В условиях теоремы 1 предобусловленные методы сопряженных направлений (1) сходятся, причем для выполнения услоия $\|r^n\| \leq \epsilon \|f\|$ при заданном значении $\epsilon \ll 1$ число итераций оценивается величиной

$$n(\epsilon) \leq \sqrt{\kappa}[\log{(2\epsilon^{-1})}]/2,$$

где κ – спектральное число обусловленности матрицы $B^{-1}A$.

Вычислительные эксперименты 1

В качестве тестового примера бралось уравнение Пуассона $\triangle u = f$ в единичном кубе с точным решением $u(x, y, z) = sin(\pi x)sin(\pi y)sin(\pi z)$. Вектор правой части рассчитывался по формуле $f^h = \triangle^h u$, а начальное приближение бралось равным $u^0 = 0$. В Таблице 1 приводятся результаты решения сеточных СЛАУ с числами неизвестных $N = 3^3, 7^3, 15^3, 31^3, 63^3$ и со значением компенсирующего параметров $\theta_2 = \theta_3 = 1$. Здесь даны количество итераций для описанного выше двухсеточного метода, алгебраическая система на редкой сетке решалась “прямым алгоритмом” PARDISO из библиотеки MKL INTEL и для алгоритма сопряженных градиентов без предобуславливания, т.е. односеточного метода с $B = I$.

Вычислительные эксперименты 2

N	7^3	15^3	31^3	63^3	127^3
B	14 0,001	16 0,004	17 0,062	18 0,685	18 8,667
I	26 0,001	44 0,005	77 0,076	108 1,036	109 12,531

Таблица 1: Числа итераций и время итераций для двухсеточного и односеточного

N / m	1	2	3	4	5
127^3	276 11.9	18 13.3	38 3.81	75 5.99	136 10.4
255^3	529 239	18 202	37 50.4	74 59	143 110

Таблица 2: Таблица 3 из [18] для трехмерной задачи, где первая строка – число итераций, вторая строка – время выполнения

Вычислительные эксперименты 3

Точное решение $\bar{u}(i) = i$.

N	15^3	31^3	63^3	127^3
B	13 0,005	14 0,062	13 0,516	13 6,204
I	48 0,006	96 0,095	185 1,783	349 29,744

Таблица 3: точное решение $\bar{u}$ и $\epsilon = 10^{-7}$

Вычислительные эксперименты 4

N	$15^3 - 9^3$	$31^3 - 17^3$	$63^3 - 33^3$	$127^3 - 65^3$
B	8 0,002	9 0,025	10 0,291	9 3,243
I	26 0,002	48 0,038	88 0,691	165 13,237
vertex	2,646	24,878	214,110	1,773,758

Таблица 4: Числа итераций и время итераций с точным решением $\bar{u}$ и $\epsilon = 10^{-5}$

Вычислительные эксперименты 5

N	$15^3 - 9^3$	$31^3 - 17^3$	$63^3 - 33^3$	$127^3 - 65^3$
B	12 0,006	14 0,045	14 0,433	14 5,429
I	32 0,003	66 0,063	122 0,967	213 17,993
vertex	2,646	24,878	214,110	1,773,758

Таблица 5: Числа итераций и время итераций с точным решением $\bar{u}$ и $\epsilon = 10^{-7}$

Вычислительные эксперименты 6

N	$15^3 - 9^3$	$31^3 - 17^3$	$63^3 - 33^3$	$127^3 - 65^3$
B	16 0,004	19 0,051	19 0,569	19 7,041
I	42 0,003	83 0,067	161 1,263	305 24,171
vertex	2,646	24,878	214,110	1,773,758

Таблица 6: Числа итераций и время итераций с точным решением $\bar{u}$ и $\epsilon = 10^{-9}$

Вычислительные эксперименты 7

N	$127^3 - 57^3$	$127^3 - 77^3$	$127^3 - 97^3$	$127^3 - 117^3$
B	14 5,425	14 4,257	14 2,611	15 0,842
I	247 19,821	204 14,049	130 6,141	53 0,894
vertex	1,863,190	1,591,850	1,135,710	446,770

Таблица 7: Числа итераций и время итераций с точным решением $\bar{u}$ и $\epsilon = 10^{-7}$, для разных полостей одного куба

Вычислительные эксперименты 8

θ	итерации
2	677
1,5	2997
1,01	73
1,001	15
1,0001	15
1,00001	14
1	14
0,99999	14
0,9999	15
0,999	16
0,995	17
0,75	35
0,5	40

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!