РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЕКОНВОЛЮЦИИ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ ПРИ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ДАННЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ СКВАЖИН

В.В. Васин, Г.Г. Скорик

Отдел некорректных задач анализа и приложений ИММ УрО РАН

Schlumberger

Найти

Технологии | О нас | HSE | Инвесторам | Пресс-центр | Карьера | Ресурсы | Контакты

- Бурение
- Геофизические исследования скважин
- ГНКТ
- Заканчивание скважин
- Интегрированное управление проектами
- Интенсификация добычи
- Испытание скважин
- Консультационные услуги и обработка данных
- Программное обеспечение, решения и услуги
- Сейсморазведка
- Цементирование
- Механизированная добыча

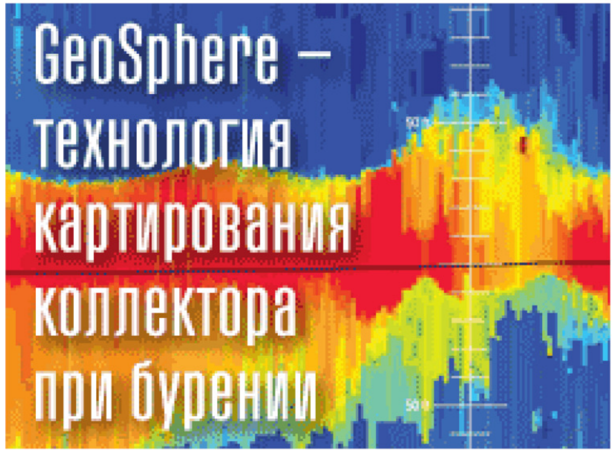
Заканчивание скважин

Надежное оборудование на весь срок службы скважины

подробнее...

Заканчивание скважин

- Вспомогательное оборудование для заканчивания скважин
- Пакеры
- Скважинные клапаны-отсекатели
- Постоянный внутрискважинный мониторинг
- Многоступенчатые системы стимулирования
- Сопутствующие товары и услуги



Шлюмберже в России

- В России с 1929 года
- Инновационные решения
- Наши Заказчики — Российские и мировые нефтегазовые компании
- Уникальные проекты
- Собственное производство
- Совместная научная работа с Российской академией наук

подробнее...

- •120 000 сотрудников
- •140 национальностей
- •85 стран мира

Шлюмберже в России

Компания «Шлюмберже» работает в России с 1929 года. Тогда был заключен первый контракт с советским правительством на реализацию проектов в Баку и Грозном. В 1932-м «Шлюмберже» и правительство СССР создали совместное предприятие, успешно работавшее в течение пяти лет. проведя более семи тысяч геофизических исследований - каротажей - скважин общей протяженностью 1800 километров на всей территории Советского Союза - от Казахстана и Узбекистана до Байкала и Сахалина. Вернувшись в новую Россию в 1991 году, «Шлюмберже» первой из сервисных компаний выполнила геофизические исследования в скважинах на Варьеганском и Тагринском месторождениях в Западной Сибири.

Сегодня среди Заказчиков «Шлюмберже» – гиганты российской и мировой нефтяной и газовой промышленности: ПАО «Газпром», ОАО «НК «Роснефть», ПАО «Лукойл», ПАО «Газпром нефть», BP, Royal Dutch/Shell, Exxon Mobil, Chevron Texaco, Total, Agip и др. Компания активно сотрудничает и с представителями малых и средних нефтегазодобывающих предприятий.

В течение всех этих лет наша компания заботилась о развитии инфраструктуры российской нефтяной и газовой промышленности, подготовке высококвалифицированных специалистов. Сегодня «Шлюмберже» работает во всех нефтедобывающих регионах и располагает 110 производственными базами, научно-исследовательскими центрами, а также собственным производством оборудования.

В целом, из всех сотрудников «Шлюмберже», работающих на производственных базах и в представительствах компании в различных регионах России, 96% – россияне. Остальные 4% представители более 70 национальностей. Ежегодно мы принимаем на работу более 600 инженеров.

Наша цель – предоставление услуг, обеспечивающие расширение и оптимизацию деятельности наших Заказчиков. В достижении этой цели мы опираемся на нашу корпоративную культуру, глубокое понимание рабочих процессов Заказчиков и на обширный опыт в разработке и внедрении инновационных технических решений.

Постановка задачи

Интеграл Дюамеля (уравнение Вольтерра 1-го рода)

$$Ag \equiv \int_0^t q(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau = \Delta p(t), \quad t \in [0,T], \quad \Delta p(t) = p_0 - p(t) \qquad (1)$$

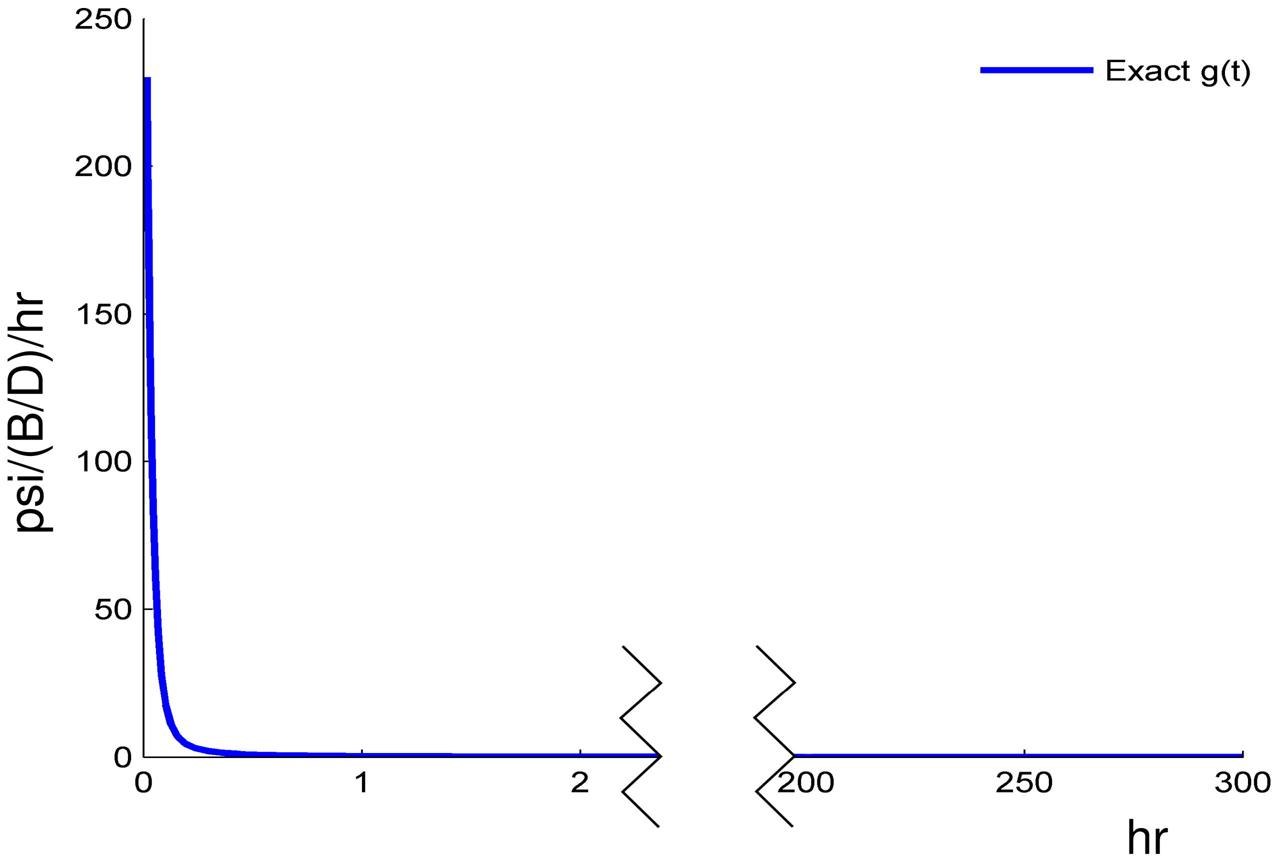
Исходные данные:
$q(t)$ — скорость потока, $p(t)$ — измеряемое давление, p_0 — начальное давление.

Необходимо определить: $g(t) = \mathrm{d}p_u(t)/\mathrm{d}t$ — импульсная характеристика системы скважина/пласт и $p_u(t)$ – падение давления при постоянном единичном дебите.

Функция $p_u(t)$ и ее логарифмическая производная $tg(t) = \mathrm{d}p_u(t)/\mathrm{d}(\ln t)$ используются в дальнейшем для идентификации модели системы скважина/пласт и определения ее основных характеристик.

Особенности задачи

- Реальные экспериментальные данные содержат большие погрешности: до 5% в $p(t)$, p_0 и до 15% в $q(t)$.
- Функция ядра уравнения $q(t)$, как правило, разрывная.
- Решение $g(t)$ имеет разномаштабный характер поведения.



Априорная информация и некоторые подходы

Для решения уравнения *g*(*t*) известны априорные ограничения в виде бесконечной системы неравенств:

$$(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} g(t) \geq 0, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{2}$$

В публикациях привлекались не более 3-х различных неравенств из (2)

$$g(t) \geq 0, \quad g'(t) \leq 0, \quad g''(t) \geq 0. \tag{3}$$

Один из известных подходов — сведение исходного уравнения (1) к нелинейному уравнению:

$$\overline{A}(z) = \int_{-\infty}^{\ln t} q(t - e^{\sigma}) e^{z(\sigma)} d\sigma = \Delta p(t)$$

с помощью замены $\sigma = \ln \tau, \quad z(\sigma) = \ln(\tau g(\tau)),$ что автоматически влечет выполнение условия $g(t) \geq 0.$

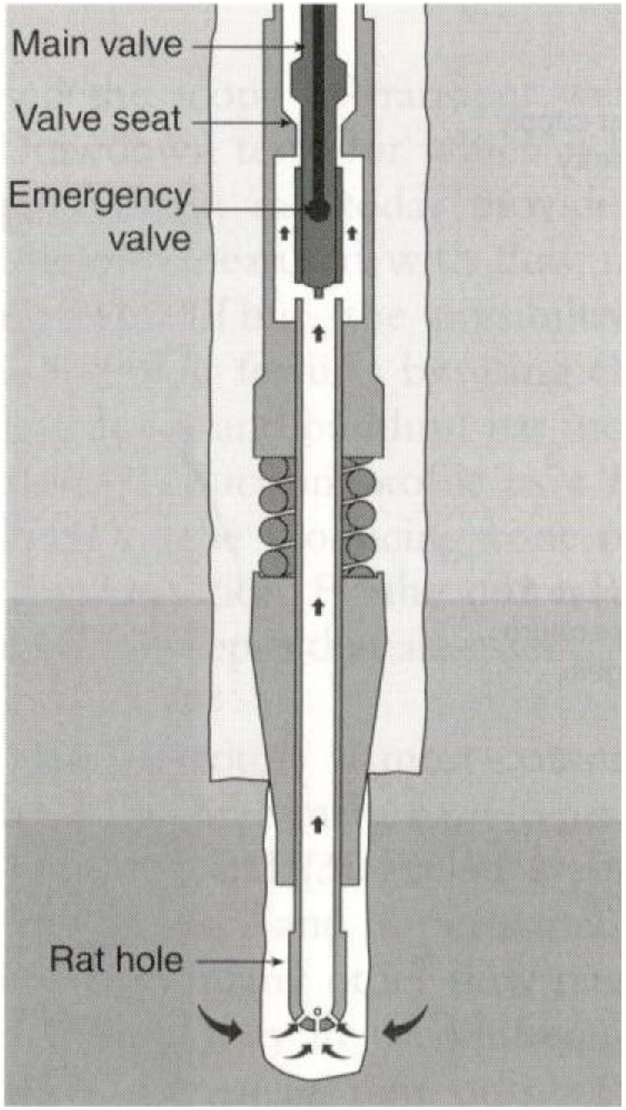
Метод из работы

von Schroeter T., Hollander F., Gringarten A. Analysis of well test data from permanent downhole gauges by deconvolution. SPE 77688, 2002.

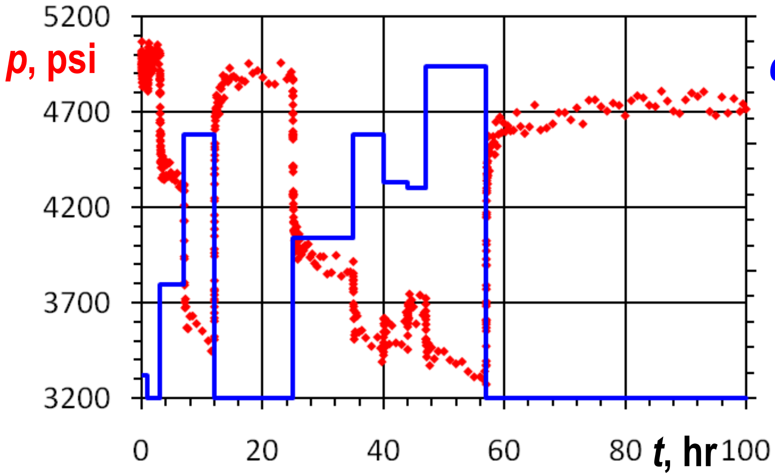
$$\min\left\{\left\|\overline{A}(z)q-\Delta p\right\|^2+\nu\left\|q-q_0\right\|^2+\lambda\left\|Dz-Dz_0\right\|^2\right\}.$$

F.J. Kuchuk, M. Onur, F. Hollander. Pressure Transient Formation and Well Testing. Convolution, Deconvolution and Nonlinear Estimation. Amsterdam: Elsevier. 2010.

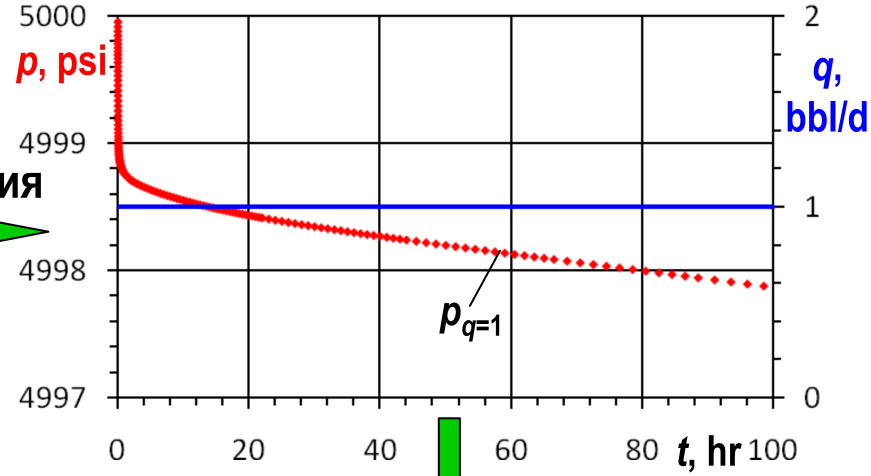
Скважинный тест и его интерпретация



Скважинный тест и его интерпретация



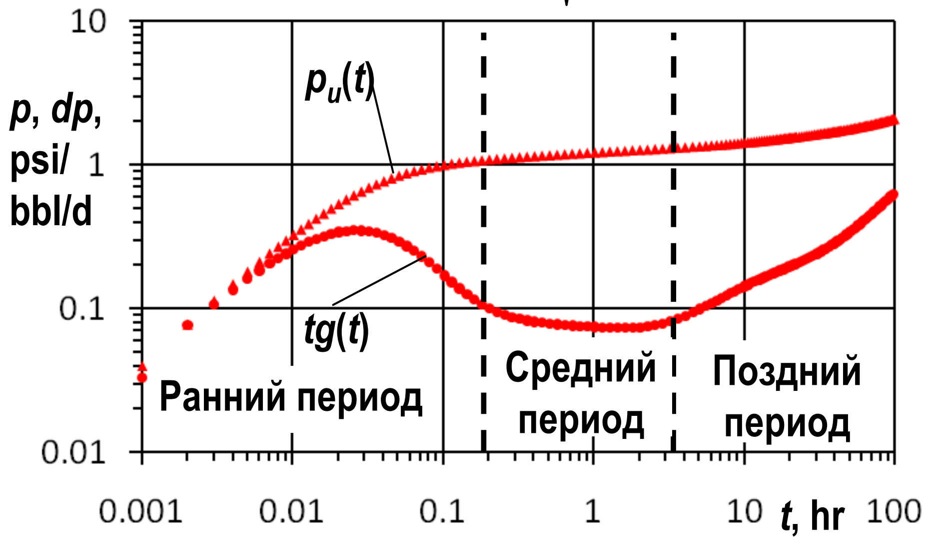
Деконволюция



Интерпретация

$$p_и(t) = p_0 - p_{q=1}(t)$$

$$tg(t) = \frac{dp_и(t)}{d\ln t}$$



Метод квазирешений

Пусть оператор свертки А: $L_2[0, T] \to L_2[0, T]$, и вместо точных значений $q(t)$, $\Delta p(t)$ мы имеем их апроксимации $q_\varepsilon(t)$, $\Delta p_\delta(t)$: $\|q_\varepsilon - q\|_{L_2} \le \varepsilon, \|\Delta p_\delta - \Delta p\|_{L_2} \le \delta$

$$\bar{Q} = \{\ g(t) \in L_2[0,T]:\ \ 0 \le g(t) \le C,\ g(t)\ \text{монотонная и выпуклая}\}$$

Теорема 1. Пусть Ker A = {0}, $\hat{g}$ решение задачи минимизации $\min\left\{\ \|Ag - \Delta p\|_{L_2}^2 :\ \ g \in \bar{Q}\ \right\}$ и выполняются условия $\|q_\varepsilon - q\|_{L_2} \le \varepsilon, \|\Delta p_\delta - \Delta p\|_{L_2} \le \delta$. Тогда задача минимизации $\min\left\{\ \|A_\varepsilon g - \Delta p_\delta\|_{L_2}^2 :\ \ g \in \bar{Q}\ \right\}$, (где $A_\varepsilon g \equiv \int_0^t q_\varepsilon(t-\tau) g(\tau) d\tau$) имеет единственное решение

$$\hat{g}_{\varepsilon,\delta} : \lim_{\varepsilon,\delta \to 0} \left\| \hat{g}_{\varepsilon,\delta} - \hat{g} \right\| = 0$$

Метод регуляризации Тихонова

При больших уровнях погрешности в давлениях требуется модификация метода квазирешений. С этой целью применен метод Тихонова

$$\min\left\{ \left\| A_\varepsilon g - \Delta p_\delta \right\|_{L_2}^2 + \alpha\Omega[g]: \quad g \in \overline{\overline{Q}} \right\} \tag{4}$$

$$\overline{\overline{Q}} = \left\{ g(t) \in L_2[0,T]: \quad 0 < b \le g(t) \le C, \; g(t) \text{ монотонная и выпуклая} \right\}$$

где $\Omega[g] = \int_0^T \left[\tau^{3/2} g''(\tau) / g(\tau) \right]^2 d\tau$ нелинейный стабилизационный функционал.

Теорема 2. Задача минимизации (4) разрешима и при

$$\alpha(\delta,\varepsilon) \to 0, \quad (\delta+\varepsilon)^2 / \alpha(\delta,\varepsilon) \to 0, \quad \delta,\varepsilon \to 0,$$

имеет место сходимость $g^{\alpha(\delta,\varepsilon)}(t) \to \widehat{g}(t)$ в пространстве $C^1[a,T]$.

Коррекция ядра оператора

В случае большой погрешности измерения ядра оператора $q_\varepsilon(t)$, для найденного приближенного решения $\tilde{g}(t)$ решается задача

$$Bq \equiv \int_0^T \tilde{g}(t-\tau)q(\tau)d\tau = \Delta p_\delta(t)$$

Задача (2) решается методом Тихонова

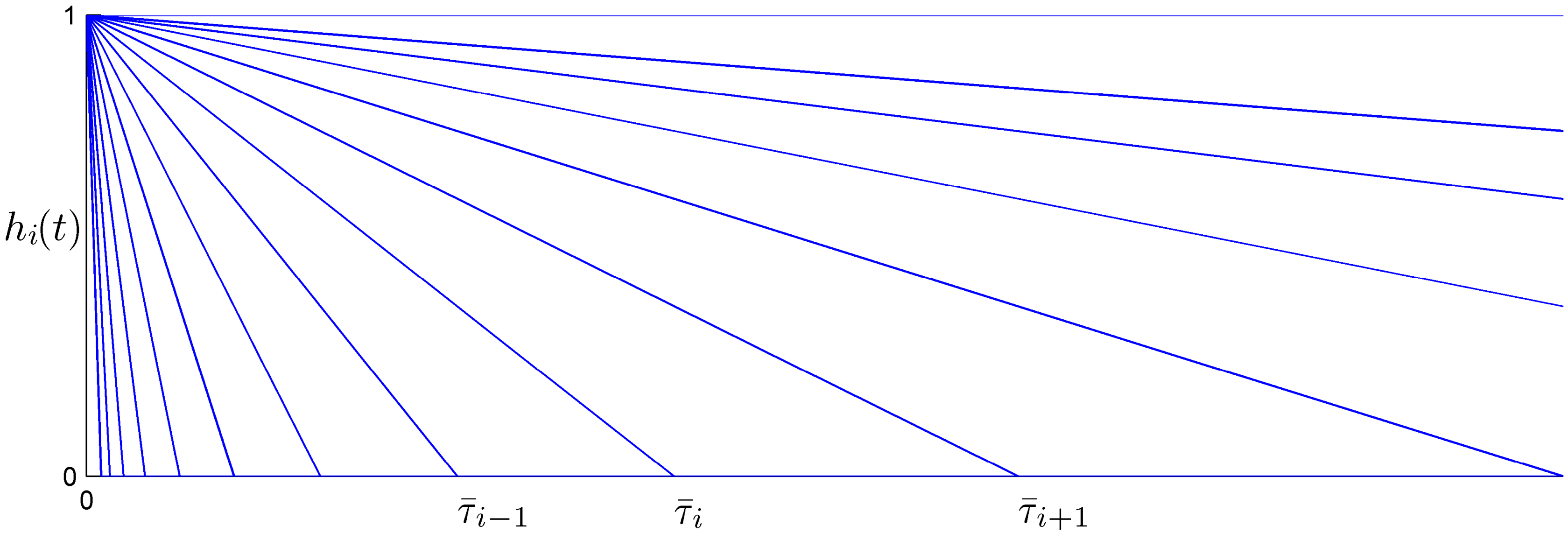
$$\min\left\{\left\|Bq - \Delta p_\delta\right\|_{L_2}^2 + \beta\left\|q - q_\varepsilon\right\|:\ q \in L_2[0,T]\right\}$$

$$\beta(\varepsilon):\quad \left\|q^{\beta(\varepsilon)} - q_\varepsilon\right\| \approx \varepsilon$$

Найденное $q^{\beta(\varepsilon)}$ используется в качестве ядра в уравнении (1).
Процедура коррекции повторяется несколько раз (в численных экспериментах N=20).

Решение задачи в кусочно-линейном базисе

$$h_i(\tau) = \begin{cases} 1, & i = n \\ 1 - \dfrac{\tau}{\bar{\tau}_i}, & \tau < \bar{\tau}_i \\ 0, & \tau \ge \bar{\tau}_i \end{cases}$$



Решение задачи в кусочно-линейном базисе

Теорема 3. Для любой функции $g(t) \in L_2[0,T]$ существует последовательность векторов $c^n = (c_1^n, c_2^n, \ldots, c_{n+1}^n)$, таких что

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \left| g(\tau) - \sum_{i=0}^{n} c_i^n h_i^n(\tau) \right|^2 d\tau = 0.$$

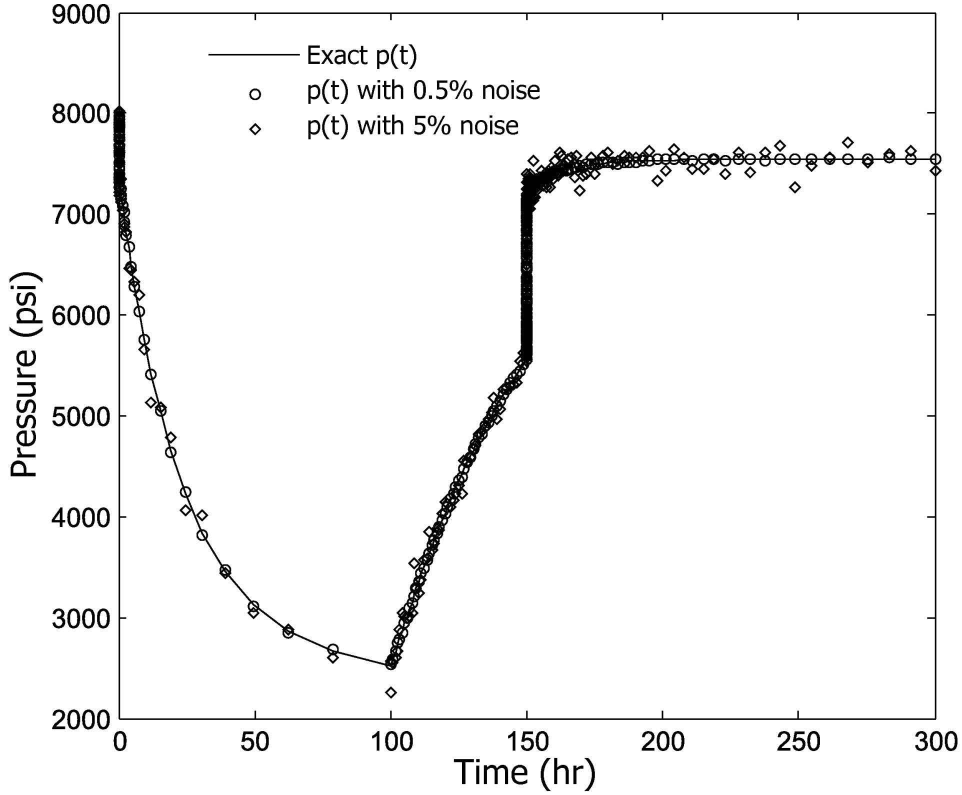
Если $g(t)$ — неотрицательная невозрастающая выпуклая функция, тогда коэффициенты $c_i^n \geq 0.$

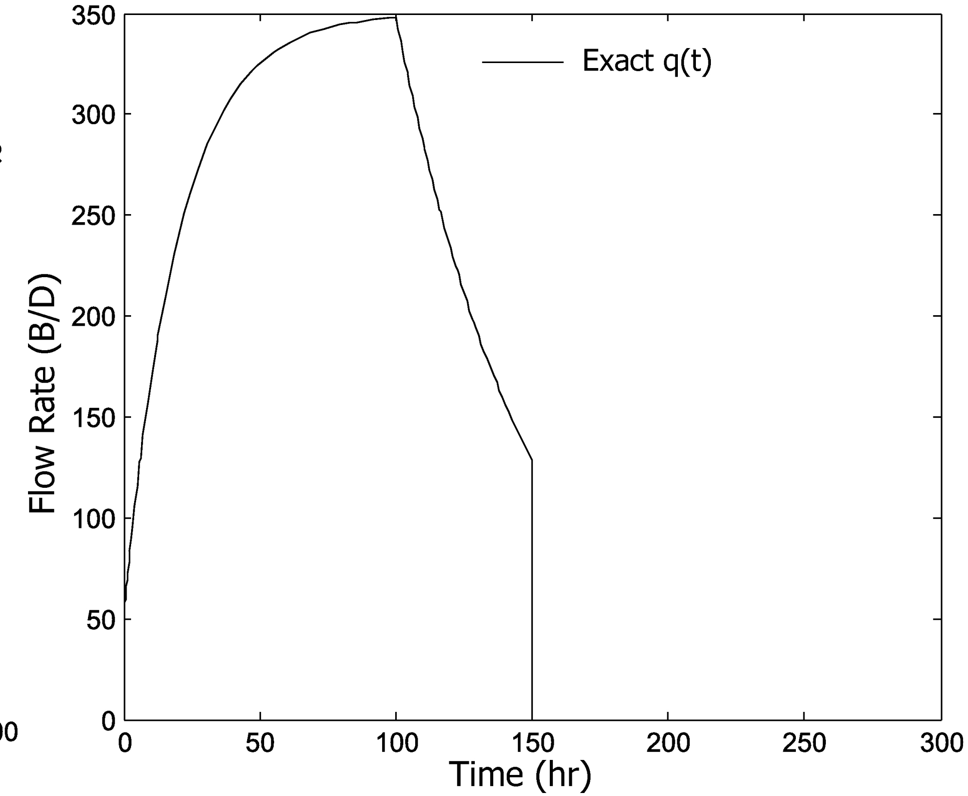
После дискретизации метод квазирешений сводится к задаче

$$\min\left\{ \left\| A_{mn} c^n - \Delta p_m \right\|^2 : \quad c_i^n \geq 0 \right\},$$

$$g^n(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i^n h_i^n(t).$$

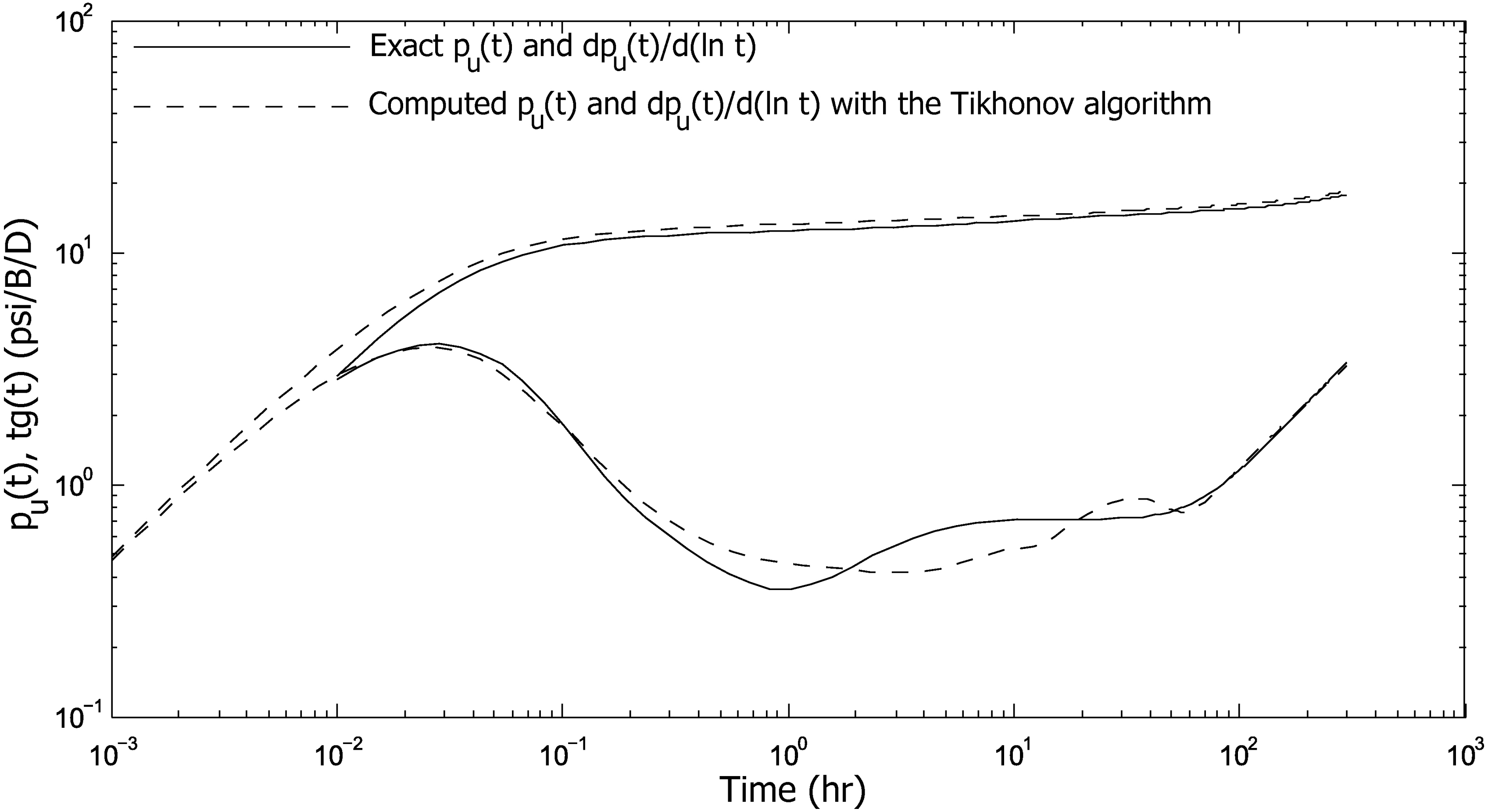
Решение задачи в кусочно-линейном базисе





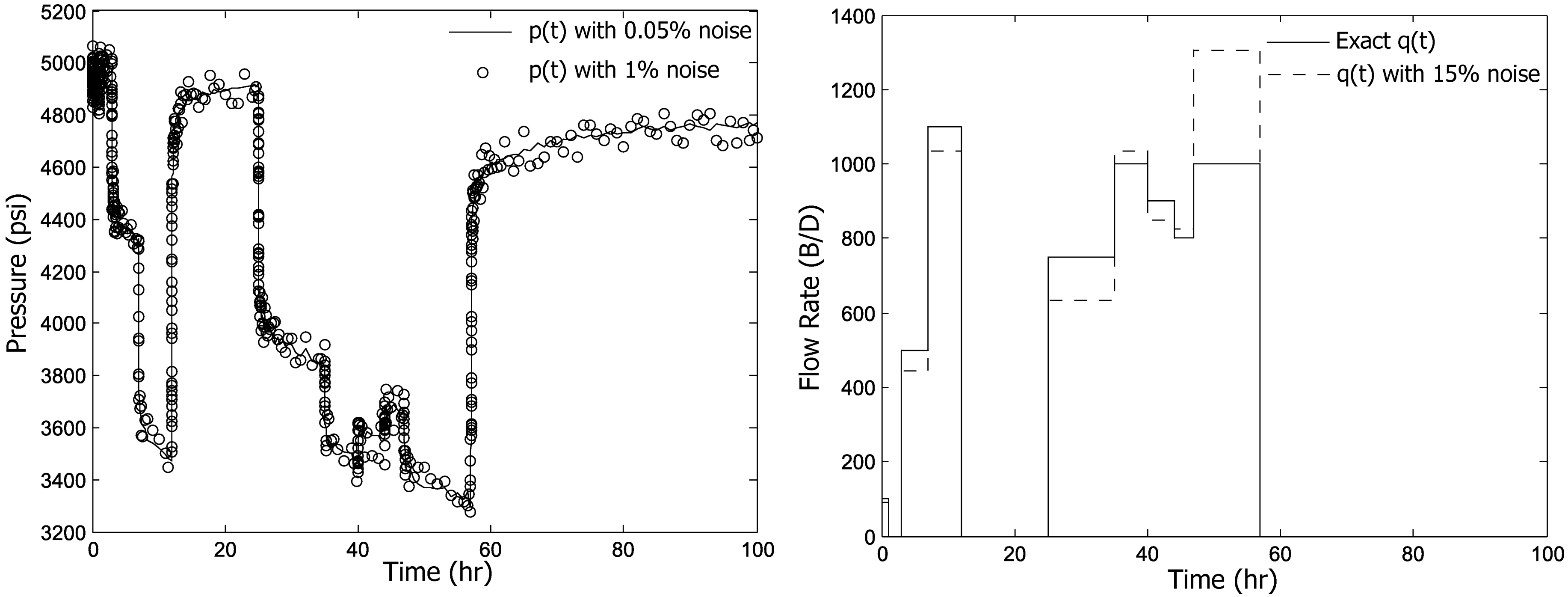
Исходные данные №1

Решение задачи в кусочно-линейном базисе



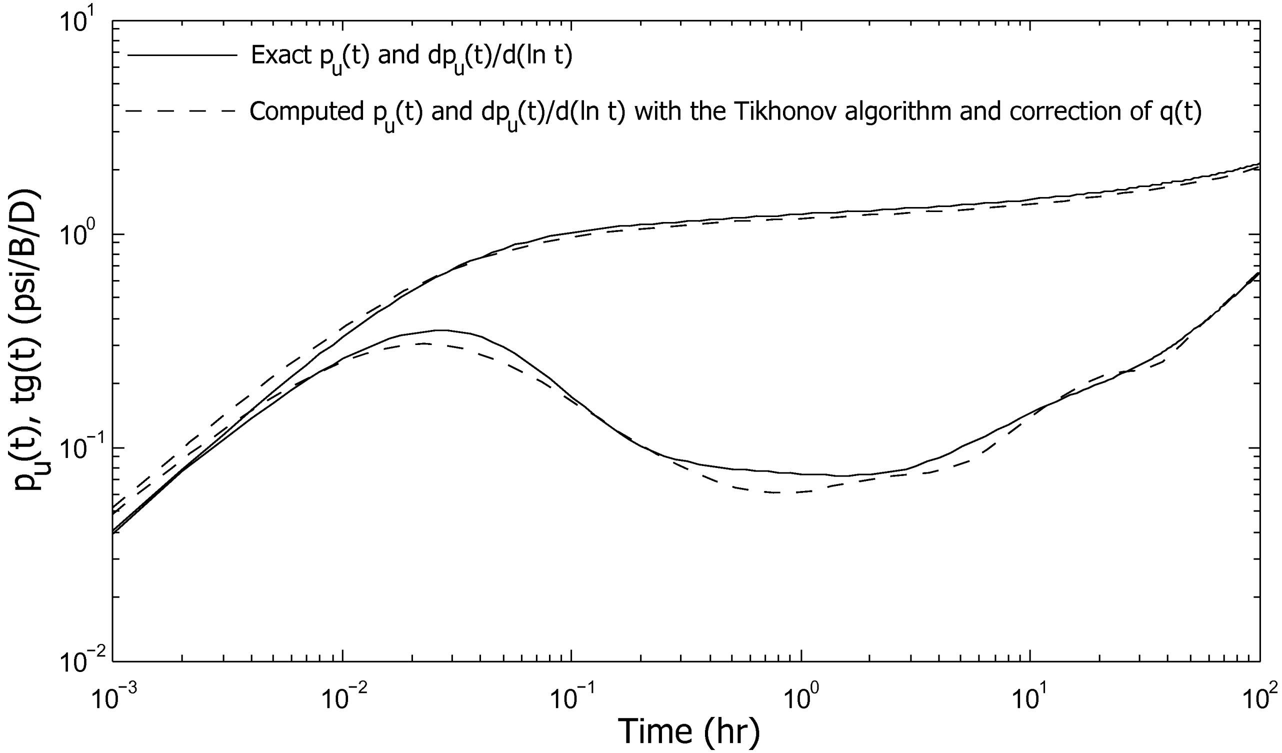
Численное решение для $p(t)$ с ошибкой 5% и точной $q(t)$

Решение задачи в кусочно-линейном базисе



Исходные данные №2

Решение задачи в кусочно-линейном базисе

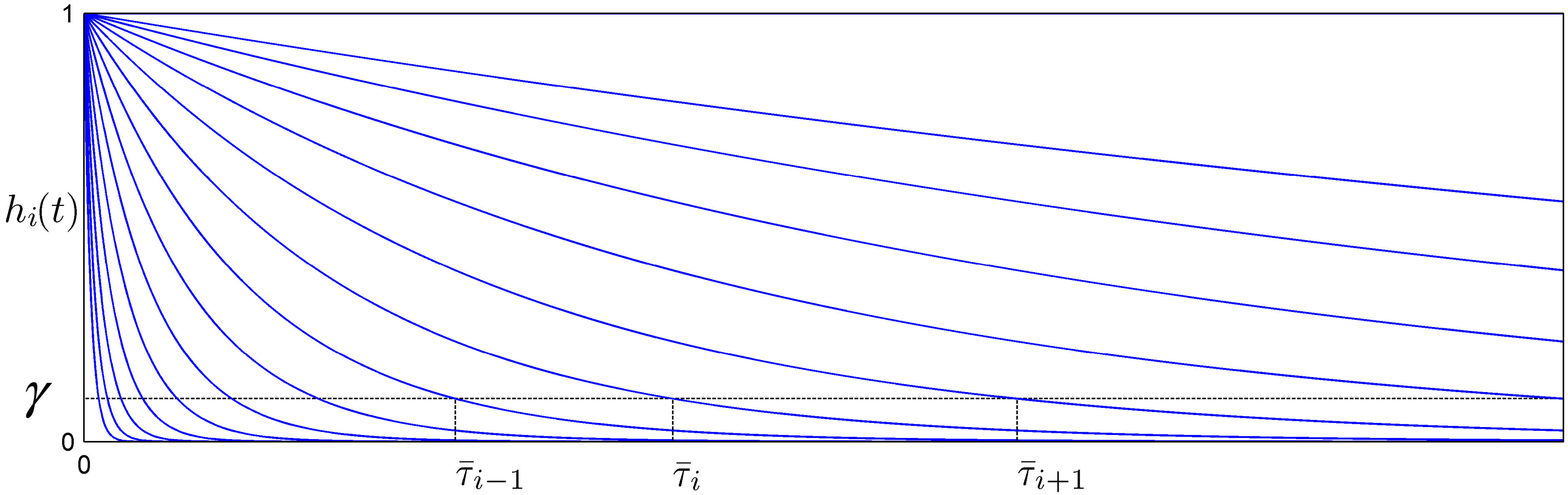


Численное решение для $p(t)$ с ошибкой 1% и $q(t)$ с ошибкой 15%

V. Vasin, G. Skorik, E. Pimonov, F. Kuchuk "New regularization algorithm for solving the deconvolution problem in vell test data interpretation" // Applied Mathematics, 2010. Vol 1, No 5. P. 387-399.

Решение задачи в экспоненциальном базисе

$$h_i(\tau) = e^{-\lambda_i \tau}, \quad e^{-\lambda_i \bar{\tau}_i} = \gamma, \quad i = 0,1,\ldots n-1, \quad \lambda_n = 0.$$



Решение задачи в экспоненциальном базисе
Метод квазирешений

Лемма 1. Пусть функция $g(t)=\sum_{i=0}^{n} c_i e^{-\lambda_i t}, \quad \lambda_i \ge 0,$ удовлетворяет всем априорным ограничениям (2). Тогда все коэффициенты $c_i \ge 0, \quad i=0,1,\dots n.$

Пусть точное решение уравнения (1) имеет вид

$$\hat{g}(t)=\sum_{i=0}^{n} \hat{c}_i e^{-\lambda_i t}, \quad \hat{c}_i \ge 0;$$

и задача (1) решается методом квазирешений

$$\min\left\{ \left\| A_\varepsilon g-\Delta p_\delta \right\|_{L_2}^2 : \ g(t)=\sum_{i=0}^{n} c_i e^{-\lambda_i t}, c_i \ge 0, \sum_{i=0}^{n} c_i \le d \right\}. \qquad (5)$$

Теорема 3. Задача минимизации (5) имеет решение $g_{\delta,\varepsilon}(t)$, равномерно сходящееся к точному решению $\hat{g}(t)$ со всеми ее производеными:

$$\lim_{\delta,\varepsilon\to 0} \max_{t\in[0,T]} \left| \frac{d^m}{dt^m} g_{\delta,\varepsilon}(t) - \frac{d^m}{dt^m} \hat{g}(t) \right| = 0, \quad m=0,1,\dots$$

Решение задачи в экспоненциальном базисе

Метод Тихонова

$$\min\left\{ \left\| A_\varepsilon g - \Delta p_\delta \right\|_{L_2}^2 + \alpha\Omega[g]:\ \ g(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i e^{-\lambda_i t},\ c_i \geq 0,\ 0 \leq b \leq \sum_{i=0}^{n} c_i \leq d \right\}, \qquad (6)$$

$$\Omega[g] = \int_0^T \left[\tau^2 g''(\tau)/g(\tau) + \tau g'(\tau)/g(\tau) - (\tau g'(\tau)/g(\tau))^2 \right]^2 \frac{d\tau}{\tau}.$$

Теорема 4. Задача минимизации (6) имеет решение $g^{\alpha(\delta,\varepsilon)}(t)$, возможно неединственное. Если $\alpha(\delta,\varepsilon) \to 0$ при $\delta,\varepsilon \to 0$, то $g^{\alpha(\delta,\varepsilon)}(t)$ равномерно сходится к точному решению $\hat{g}(t)$ со всеми ее производеными:

$$\lim_{\delta,\varepsilon \to 0} \max_{t \in [0,T]} \left| \frac{d^m}{dt^m} g^{\alpha(\delta,\varepsilon)}(t) - \frac{d^m}{dt^m} \hat{g}(t) \right| = 0, \quad m = 0, 1, \ldots$$

Vasin V.V., Skorik G.G. Pressure/rate deconvolution problem and reconstruction of solution satisfying all apriori constraints // Int. Conf. Proc. (8th Intern. Conf. on Inverse Problems in Engineering, 12-15 May, 2014, Krakov, Poland), P.343-352.

Случай точного решения в виде бесконечной суммы экспонент

Теорема Мюнтца. Пусть $0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots$, $\lambda_n\to\infty$, $n\to\infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n = \infty$. Тогда система функций $\left\{x^{\lambda_n}\right\}$ замкнута в $C[0,T]$. Если $-1/p<\lambda_1<\lambda_2<\ldots$, то система функций $\left\{x^{\lambda_n}\right\}\cup 1$ замкнута в $L_p[0,T]$. Условия необходимы и достаточны.

Из теоремы Мюнтца при $x=e^{-t}$ вытекает следующая лемма.

Лемма 2. Пусть $0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots$, $\lambda_n\to\infty$, $n\to\infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n = \infty$. Тогда система функций $\left\{e^{-\lambda_n t}\right\}$ замкнута в $C[0,T]$. Если $-1/p<\lambda_1<\lambda_2<\ldots$, то система функций $\left\{e^{-\lambda_n t}\right\}\cup 1$ замкнута в $L_p[0,T]$.

Müntz H. Über den Approximationssatz von Weierstrass // H. A. Schwarz’s Festchrift, Berlin. 1914. P. 303-312.

Случай точного решения в виде бесконечной суммы экспонент

Лемма 3. Пусть функция $g(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i e^{-\lambda_i t}$ и ряд $\sum_{i=0}^{\infty} c_i$ абсолютно сходится.

Если $g(t)$ удовлетворяет априорным ограничениям $(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} g(t) \geq 0,\ k = 0,1,\ldots,$

то все коэффициенты $c_i \geq 0$.

Теорема 5. Пусть $A, A_\varepsilon :\ L_p[0,T] \to L_2[0,T]$ — взаимнооднозначные операторы.

Тогда существует единственное решение $g_{\delta,\varepsilon}(t)$ задачи

$$\min\left\{ \left\| A_\varepsilon g - \Delta p_\delta \right\|_{L_2}^2 : \quad 0 \leq (-1)^m \frac{d^m}{dt^m} g(t) \leq d_m < \infty,\ m = 0,1,\ldots \right\}$$

и имеет место сходимость к точному решению $\hat{g}(t)$

$$\lim_{\delta,\varepsilon \to 0} \left\| g_{\delta,\varepsilon} - \hat{g} \right\|_{W_p^{(m)}} = 0, \quad m = 0,1,\ldots.$$

Случай точного решения в виде бесконечной суммы экспонент

Теорема 6. Пусть $A, A_\varepsilon :\ L_p[0,T] \to L_2[0,T]$ — взаимнооднозначные операторы.

Тогда существует, возможно неединственное, решение $g_{\alpha(\delta,\varepsilon)}(t)$ задачи

$$\min\left\{ \left\| A_\varepsilon g - \Delta p_\delta \right\|_{L_2}^2 + \alpha\Omega[g]:\quad 0 \le \kappa \le g(t) \le d_0, \right.$$

$$\left. 0 \le (-1)^m \frac{d^m}{dt^m} g(t) \le d_m < \infty,\ m = 1, 2, \ldots \right\},$$

$$\Omega[g] = \int_0^T \left[\tau^2 g''(\tau) / g(\tau) + \tau g'(\tau) / g(\tau) - (\tau g'(\tau) / g(\tau))^2 \right]^2 \frac{d\tau}{\tau}.$$

и при $\delta, \varepsilon \to 0, \quad \alpha(\delta, \varepsilon) \to 0$ имеет место сходимость к точному решению $\hat{g}(t)$

$$\lim_{\delta,\varepsilon\to 0} \left\| g_{\alpha(\delta,\varepsilon)} - \hat{g} \right\|_{W_p^{(m)}} = 0, \quad m = 0, 1, \ldots.$$

Конечномерная аппроксимация

В дальнейшем рассматривается приближенное операторное уравнение

$$(A^a g)(t) \equiv \int_a^T q(t-\tau)g(\tau)d\tau = \Delta p(t)$$

и его зашумленный выриант

$$(A_\varepsilon^a g)(t) \equiv \int_a^T q_\varepsilon(t-\tau)g(\tau)d\tau = \Delta p_\delta(t). \qquad (7)$$

Обозначим через $\hat{g}^a(t)$ точное решение уравнения (7).

Конечномерная аппроксимация

Теорема 7. Пусть $A, A_\varepsilon:\ L_p[0,T] \to L_2[0,T]$ — взаимнооднозначные операторы

и решение задачи

$$\min\left\{\left\|A_\varepsilon^a g - \Delta p_\delta\right\|_{L_2}^2 :\quad 0 \le (-1)^m \frac{d^m}{dt^m} g(t) \le d_m < \infty,\ m = 0,1,\ldots\right\}$$

представимо в виде

$$g_{\delta,\varepsilon}^a(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i^{\delta,\varepsilon} e^{-\lambda_i t}, \quad c_i^{\delta,\varepsilon} \ge 0.$$

Тогда существует единственное решение $\hat{g}^n(t)$ задачи

$$\min\left\{\left\|A_\varepsilon^a g - \Delta p_\delta\right\|_{L_2}^2 :\quad g(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i e^{-\lambda_i t},\ c_i \ge 0, \sum_{i=0}^{n} c_i \le d_0 < \infty\right\}$$

и имеет место сходимость

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\hat{g}^n - g_{\delta,\varepsilon}^a\right\|_{W_p^{(m)}} = 0, \quad m = 0,1,\ldots.$$

Теорема 8. Пусть $A, A_\varepsilon :\ L_p[0,T] \to L_2[0,T]$ — взаимнооднозначные операторы

и решение задачи

$$\min\left\{ \left\| A_\varepsilon g - \Delta p_\delta \right\|_{L_2}^2 + \alpha\Omega[g]:\quad 0 \le \kappa \le g(t) \le d_0, \right.$$

$$\left. 0 \le (-1)^m \frac{d^m}{dt^m} g(t) \le d_m < \infty,\ m = 1, 2, \ldots \right\},$$

представимо в виде

$$g_\alpha^a(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i^{\delta,\varepsilon} e^{-\lambda_i t}, \quad c_i^{\delta,\varepsilon} \ge 0.$$

Тогда существует, возможно неединственное, решение $\hat{g}_\alpha^n(t)$ задачи

$$\min\left\{ \left\| A_\varepsilon^a g - \Delta p_\delta \right\|_{L_2}^2 + \alpha\Omega[g]:\quad g(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i e^{-\lambda_i t},\ c_i \ge 0,\ \sum_{i=0}^{n} c_i \le d_0 < \infty \right\}$$

и имеет место сходимость

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \hat{g}_\alpha^n - g_\alpha^a \right\|_{W_p^{(m)}} = 0, \quad m = 0, 1, \ldots.$$

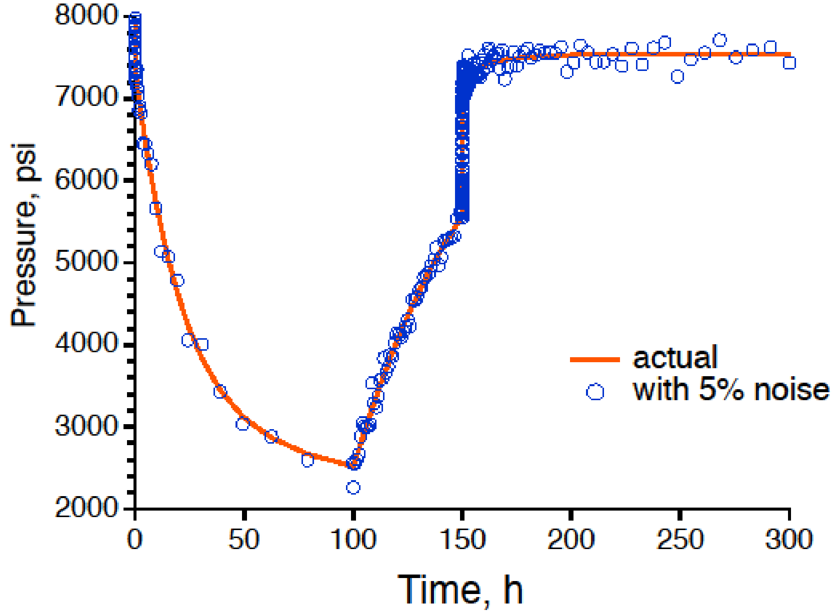
Алгоритмы задач минимизации

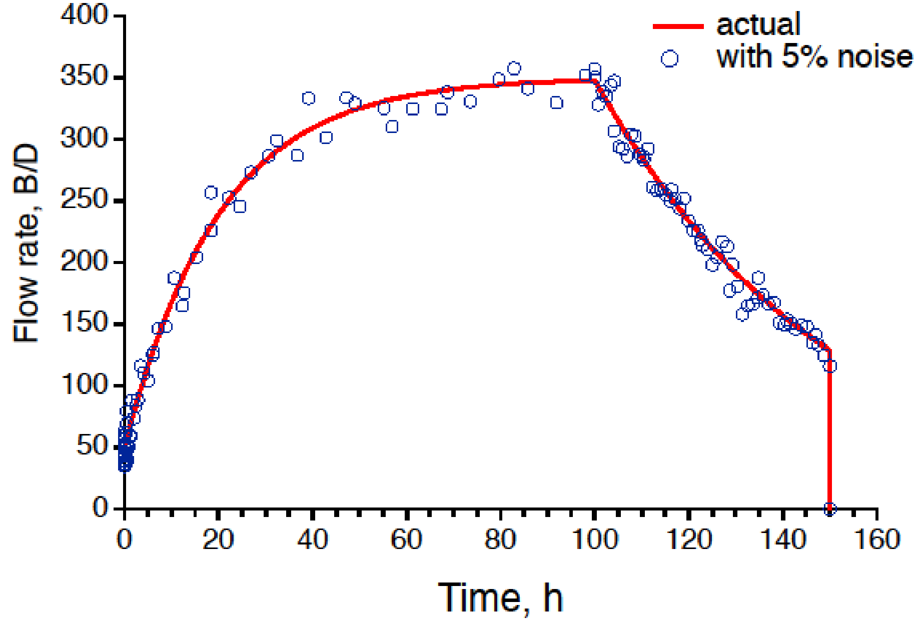
1. Задача минимизации в методе квазирешений реализуется на основе метода условного градиента [1] с остановом по правилу обобщенной невязки.
2. В методе Тихонова в качестве алгоритма минимизации с ограничениями используется метод активных ограничений [2] с итерационным шагом по регуляризованному методу Ньютона.

1. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука. 1979.
2. Nocedal J., Wright S.J. Numerical Optimization (2nd ed.) Berlin, New York: Springer-Verlag. 2006.

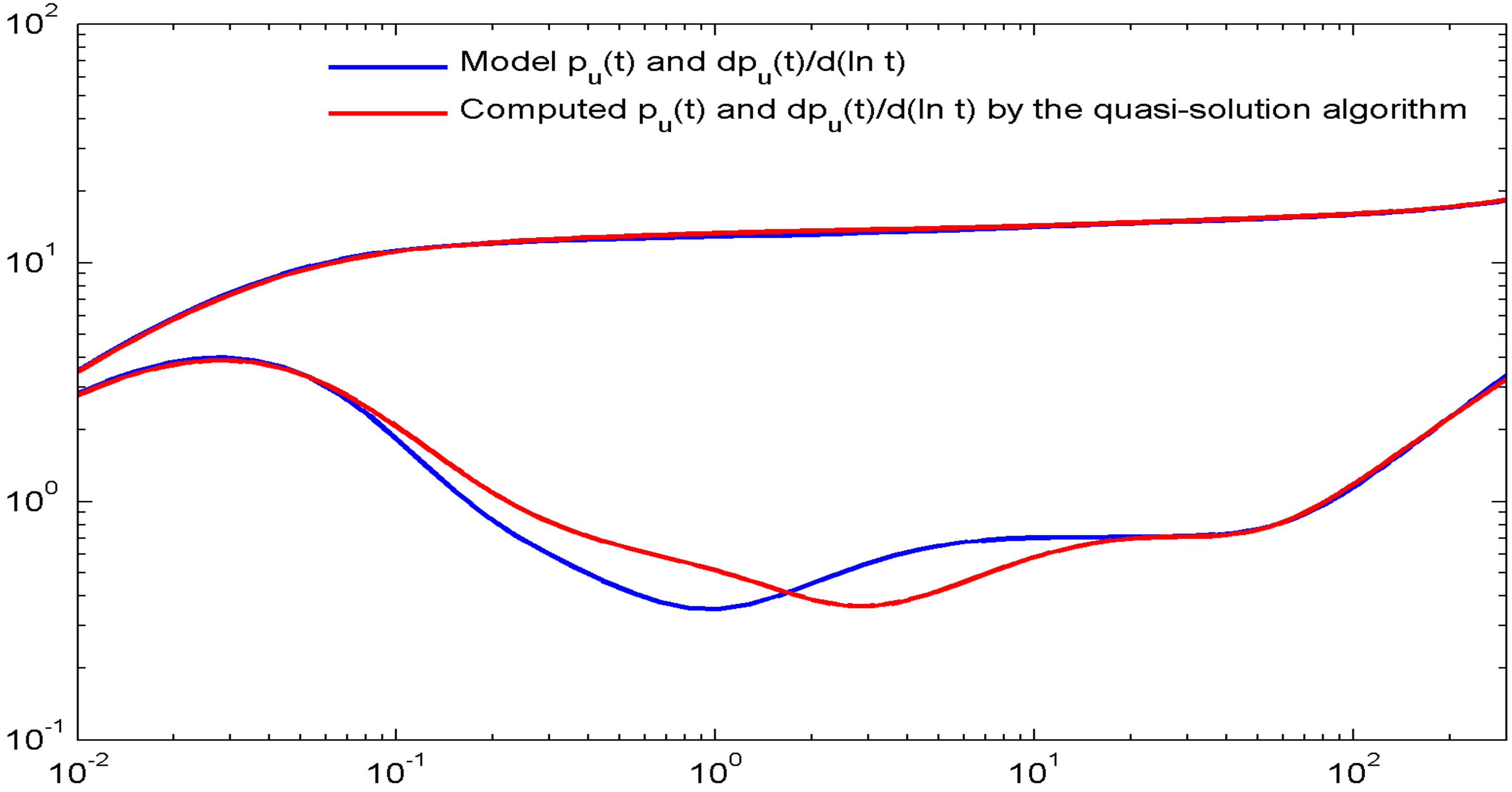
Васин В.В., Скорик Г.Г. Решение задачи деконволюции о общей постановке. // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т.22, №2.

Численные решения с использованием экспоненциального базиса

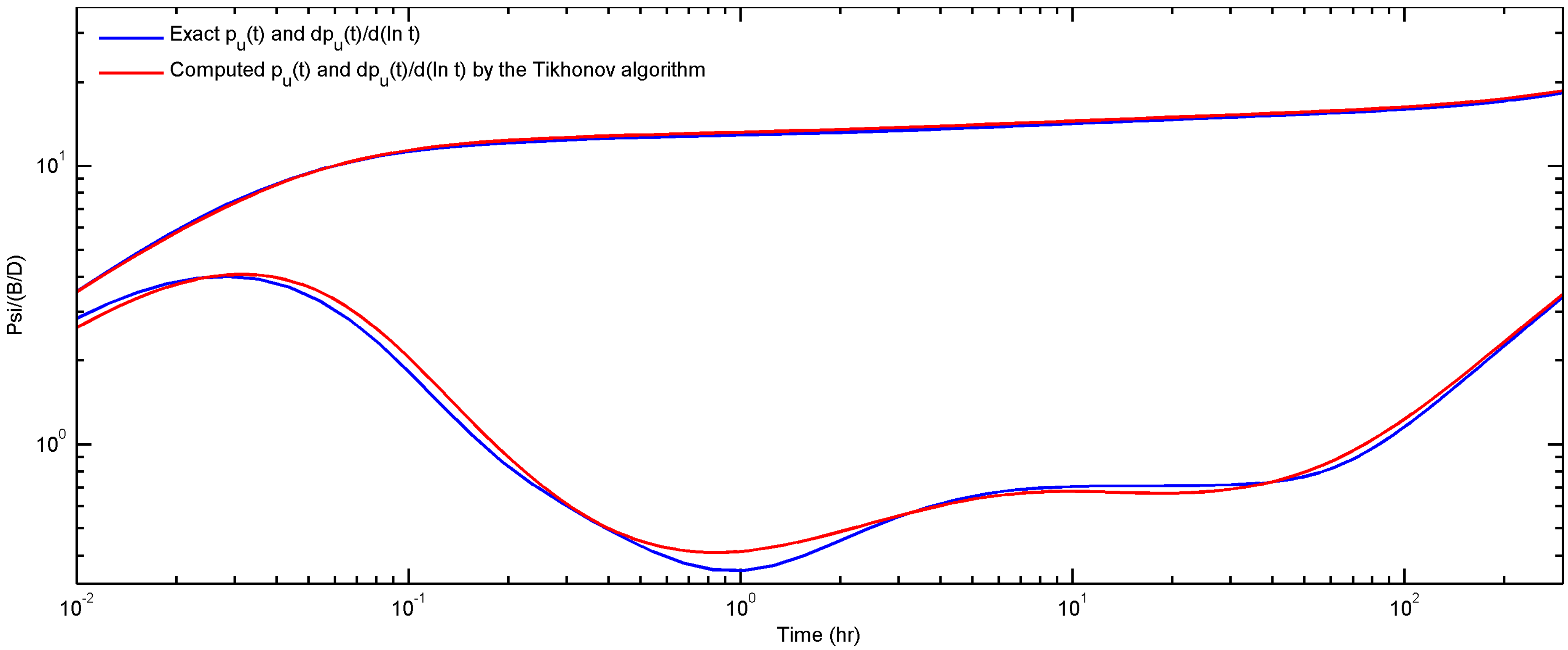




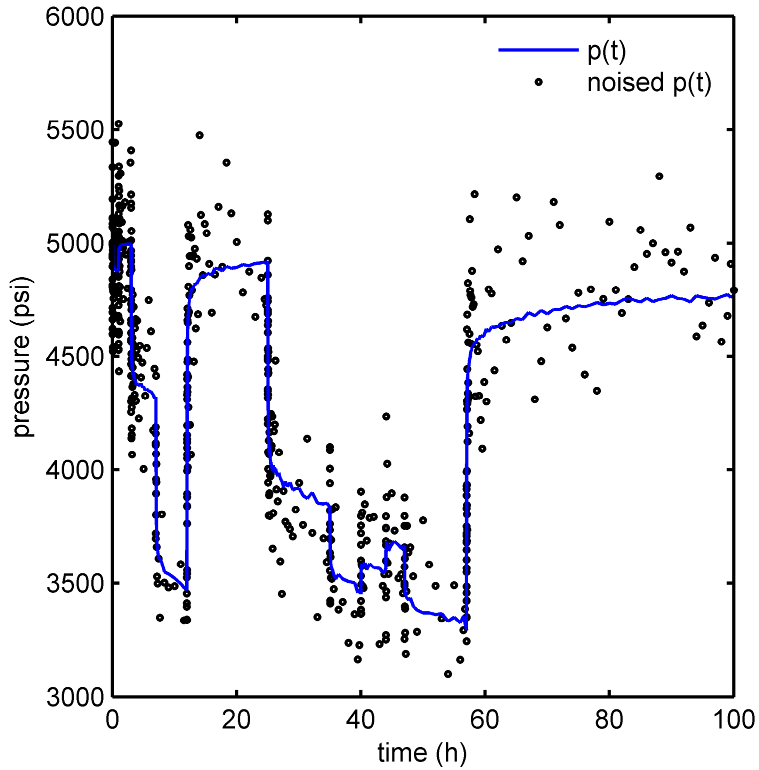
Исходные данные №1 с ошибками 5% в *p*(*t*) и 5% в *q*(*t*)

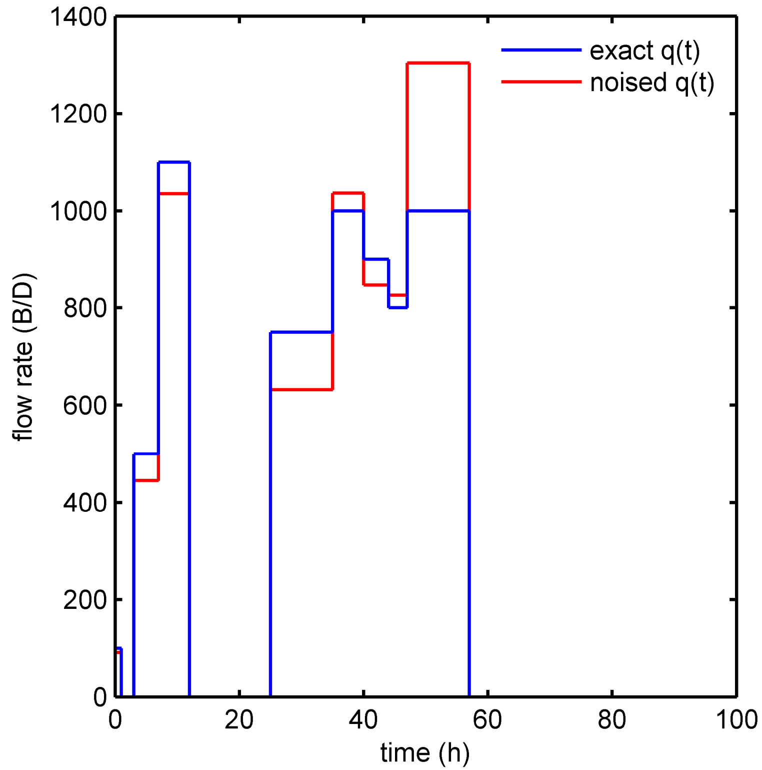


Численное решение методом квазирешений для $p(t)$ с ошибкой 5% $q(t)$ с ошибкой 1%

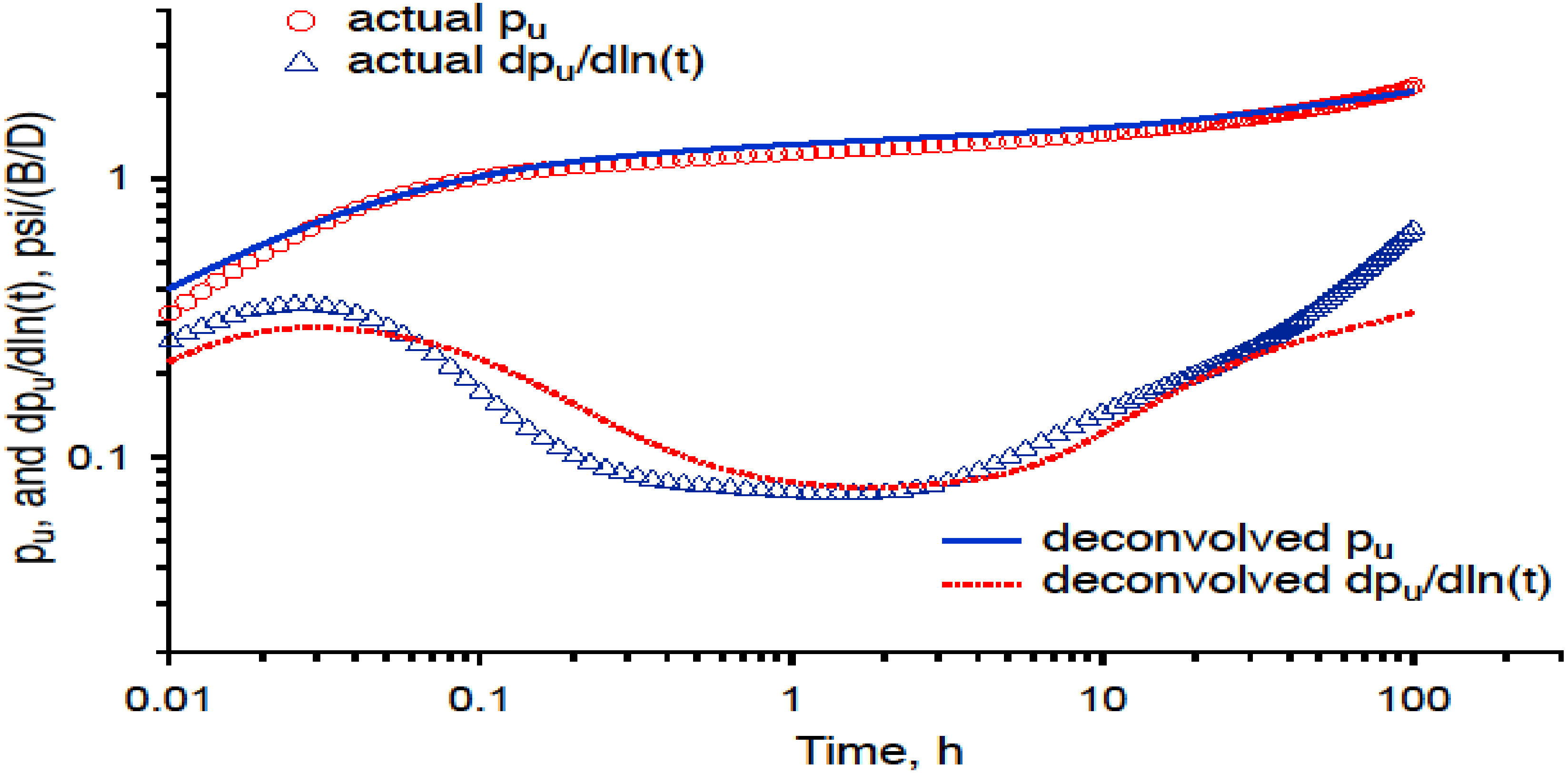


Численное решение методом Тихонова для $p(t)$ с ошибкой 5% и $q(t)$ с ошибкой 5%

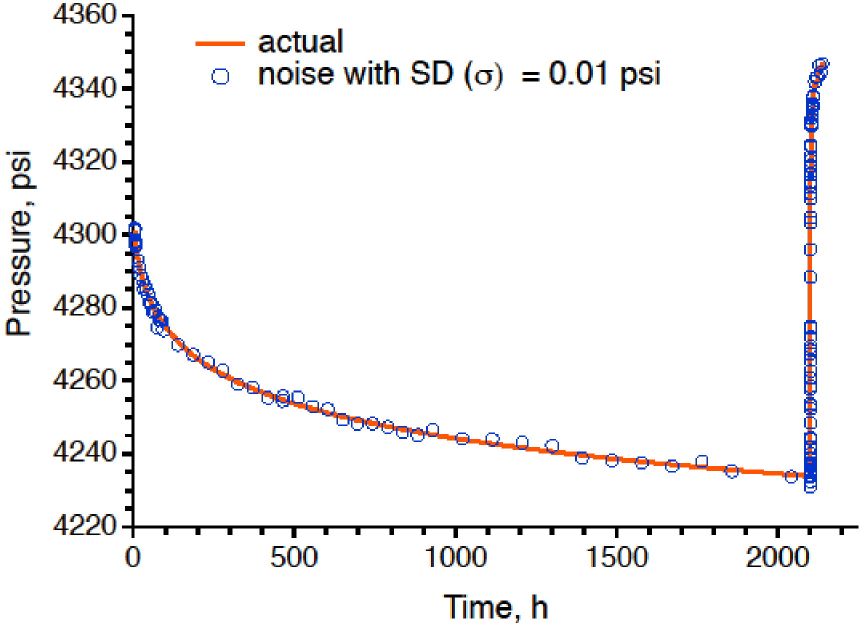


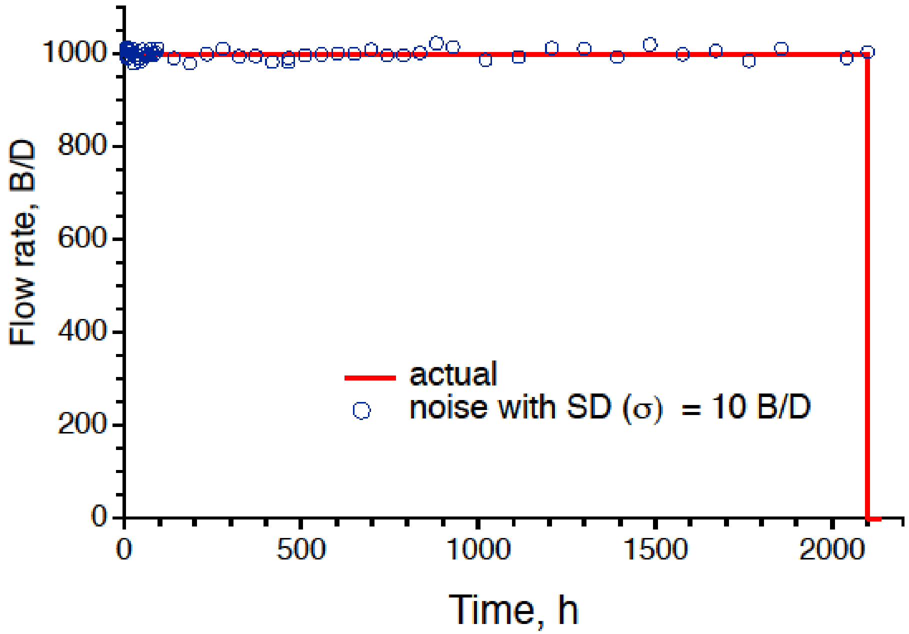


Исходные данные №2 с ошибками 5% в $p(t)$ и 15% в $q(t)$



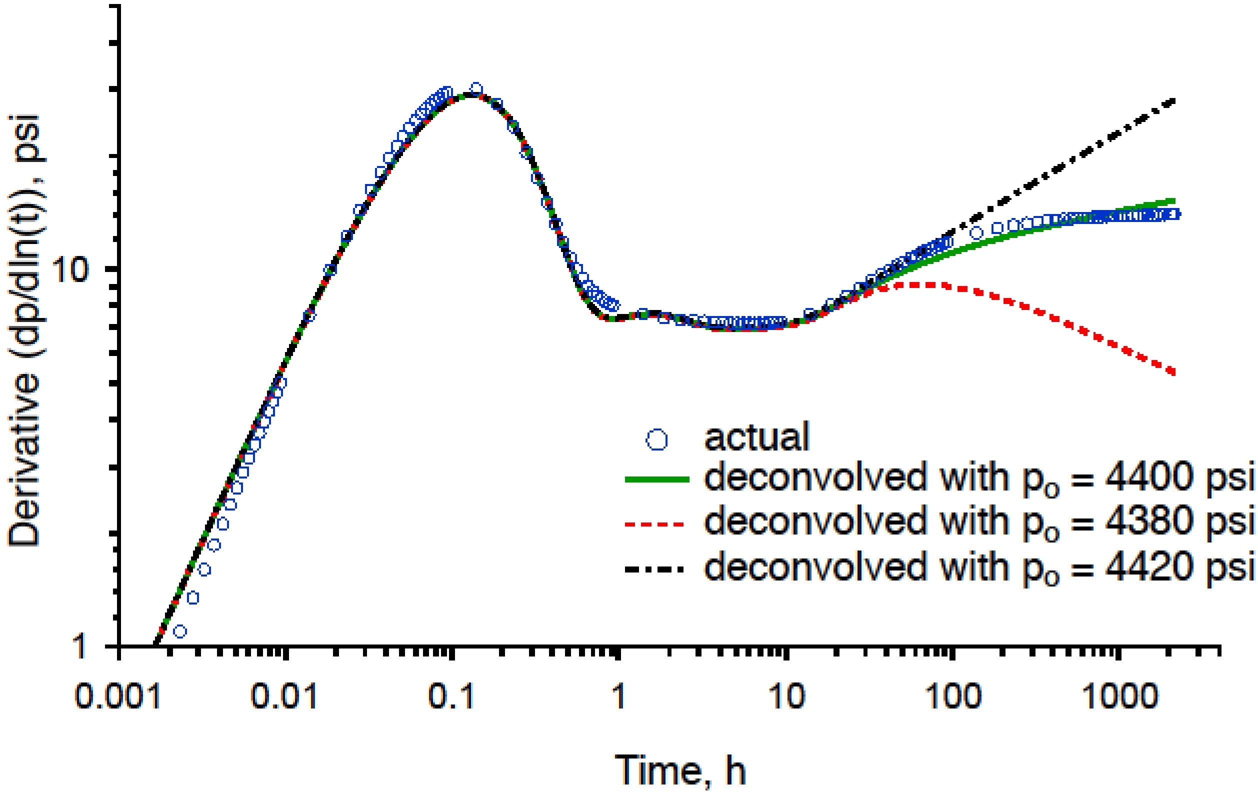
Численное решение методом Тихонова для *p*(*t*) с ошибкой 5% и *q*(*t*) с ошибкой 15%





Исходные данные №3

В численных экспериментах использовались данные по давлению $p(t)$ только за последние 37 часов, когда скважина была перекрыта ($q(t)=0$, $t\in[2100,2137]$), а решение $g(t)$ восстанавливалось на всем промежутке $t\in[0,2137]$.



Численное решение методом Тихонова для различных значений $p_{0.}$

G. Skorik, V. Vasin, F. Kuchuk. A new technique for solving pressure-rate deconvolution problem in pressure transient testing // Journal of Engineering Mathematics, 2016.