

Доклад по материалам диссертации на соискание учёной
степени кандидата технических наук по специальности
1.2.2

Математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ

**ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО
СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ РЕШЕНИЙ
ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ СИСТЕМ СТОХАСТИЧЕСКИХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА
СУПЕРКОМПЬЮТЕРЕ**

Докладчик: Иванов Александр Александрович
Научный руководитель: к.ф.-м.н. Лукинов Виталий
Леонидович

Общая характеристика работы

Работа посвящена разработке комплекса программ для моделирования и численного анализа решений стохастических дифференциальных уравнений с осциллирующим решением на суперкомпьютерах.

Объектом исследования является

Стохастические дифференциальные уравнения с осциллирующим решением

Общая постановка задачи

Рассматривается система СДУ с винеровской составляющей в дифференциальной форме

$$dy(t) = f(y, t)dt + \sigma(y, t)dw(t),$$

где $w(t)$ – M – мерный Винеровский процесс с независимыми компонентами, $f(y, t)$ – K -мерная функция сноса, $\sigma(y, t)$ – $K \times M$ – мерная матрица диффузии. Решением системы СДУ является вектор-функция $y(t)$ размера K , каждая компонента которого $y_j(t)$, $j = 1, \dots, K$ – случайный процесс.

Задача Коши включает случайные или детерминированные начальные значения $y(0) = y_0$ и временной интервал интегрирования $[0, T]$.

Аддитивный и мультипликативный шум

Простейшее (α и σ - константы) скалярное линейное **СДУ с аддитивным шумом** имеет вид

$$dy = \alpha y dt + \sigma dw(t).$$

СДУ с мультипликативным шумом:

$$dy = \left(\alpha + \sigma \frac{dw(t)}{dt} \right) y dt = \alpha y dt + \sigma y dw(t).$$

Если y_0 – нормальная случайная величина, то решение СДУ с аддитивным шумом является гауссовским процессом. Решение СДУ с мультипликативным шумом можно записать в явной форме:

$$y(t) = y_0 e^{\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma w(t)}.$$

Если начальное значение y_0 – детерминированное, то случайная величина $y(t)$ в предыдущем уравнении имеет логарифмически-нормальное распределение. Математическое ожидание и дисперсия решения СДУ с аддитивным шумом задаются формулами

$$E y(t) = y_0 e^{\alpha t},$$
$$D y(t) = y_0^2 \left\{ e^{2\alpha t} - \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{2\alpha t}) \right\}.$$

Математическое ожидание и дисперсия решения для мультипликативного шума при детерминированном значении y_0 :

$$E y(t) = y_0 e^{\alpha t},$$
$$D y(t) = y_0^2 e^{2\alpha t} (e^{\sigma^2 t} - 1).$$

Метод Эйлера

Простейшим численным методом решения систем СДУ в смысле Ито является обобщенный явный метод Эйлера, который также называют методом Маруямы:

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n, t_n) + \sqrt{h}\sigma(y_n, t_n)\xi_{n+1}.$$

Здесь y_n – значение приближенного решения СДУ в узле равномерной сетки t_n с шагом h , $\{\xi_{n+1}\}$ – последовательность независимых между собой нормальных случайных векторов с независимыми компонентами $\{\xi_{n+1}^{(i)}\}$. Компоненты целесообразно моделировать попарно по формулам

$$\xi_{n+1}^{(i)} = \sqrt{-2\ln\alpha_1}\sin(2\pi\alpha_2), \quad \xi_{n+1}^{(i+1)} = \sqrt{-2\ln\alpha_1}\cos(2\pi\alpha_2),$$

где α_1 , α_2 – равномерно распределенные случайные величины в интервале $(0,1)$, получаемые с помощью генератора псевдослучайных чисел.

Цель исследования

1. Разработка частотных характеристик для численного исследования особенностей поведения осциллирующих систем СДУ.
2. Создание программного комплекса для нахождения и анализа численных решений осциллирующих систем СДУ на суперкомпьютере.
3. Разработка и численное исследование новых стохастических моделей для систем Ван-дер-Поля, Лоренца, Ресслера, связанных осцилляторов Дуффинга, химической реакции окисления водорода на никеле, каскада химических реакций.
4. Численное моделирование и анализ поведения заряженной частицы в магнитной ловушке, с использованием разработанных частотных характеристик и комплекса программ.

ЧИК

Определение 1. Сетка S_{FIC} и ЧИК W_{FIC} :

$$S_{FIC} = \left\{ (Y_i, T_j) \left| \begin{array}{l} h_X = \frac{Y_{end} - Y_0}{N_Y}, Y_i = Y_0 + ih_Y, i = 1, \dots, (N_Y - 1), \\ h_T = \frac{T_{end} - T_0}{N_T}, T_j = T_0 + jh_T, j = 1, \dots, (N_T - 1) \end{array} \right. \right\}$$

Здесь $[T_0, T_{end}] \subseteq [0, t_{end}]$, $Y_0 < Y_{end}$ – произвольны, h_Y и h_T – шаги сетки ЧИК по пространству и времени.

$$W_{FIC} = \{ (W_{ij}) | W_{ij} - \text{количество пар } (y_m(t_n), T_j), \text{ в } (i, j) \text{ ячейке сетки } S \}$$

Номер узла сетки вычисляется как $i = \left[\frac{y_m(t_n) - Y_0}{h_Y} \right]$, $j = \left[\frac{t_n - T_0}{h_T} \right]$, где $n = 0, \dots, N$. В данном определении квадратные скобки $[]$ обозначают целую часть числа; $y_m(t_n)$ – значение m -ой компоненты решения СДУ в узле временной сетки t_n . Для ЧИК шаг интегрирования h и шаг сетки h_T должны быть кратными: $h_T = \mu h$, где $\mu \geq 1$. Смоделированные значения с $i < 0, j < 0$ и $i > N_Y, j > N_T$ в ЧИК не учитываются.

ЧФП

Определение 2. Сетка S_{FP} и ЧФП W_{FP} :

$$S_{FP} = \left\{ (Y_i, Y'_j) \left| \begin{array}{l} h_Y = \frac{Y_{end} - Y_0}{N_Y}, Y_i = Y_0 + ih_Y, i = 1, \dots, (N_Y - 1) \\ h_{Y'} = \frac{Y'_{end} - Y'_0}{N_{Y'}}, Y'_j = Y'_0 + jh_{Y'}, j = 1, \dots, (N_{Y'} - 1) \end{array} \right. \right\}.$$

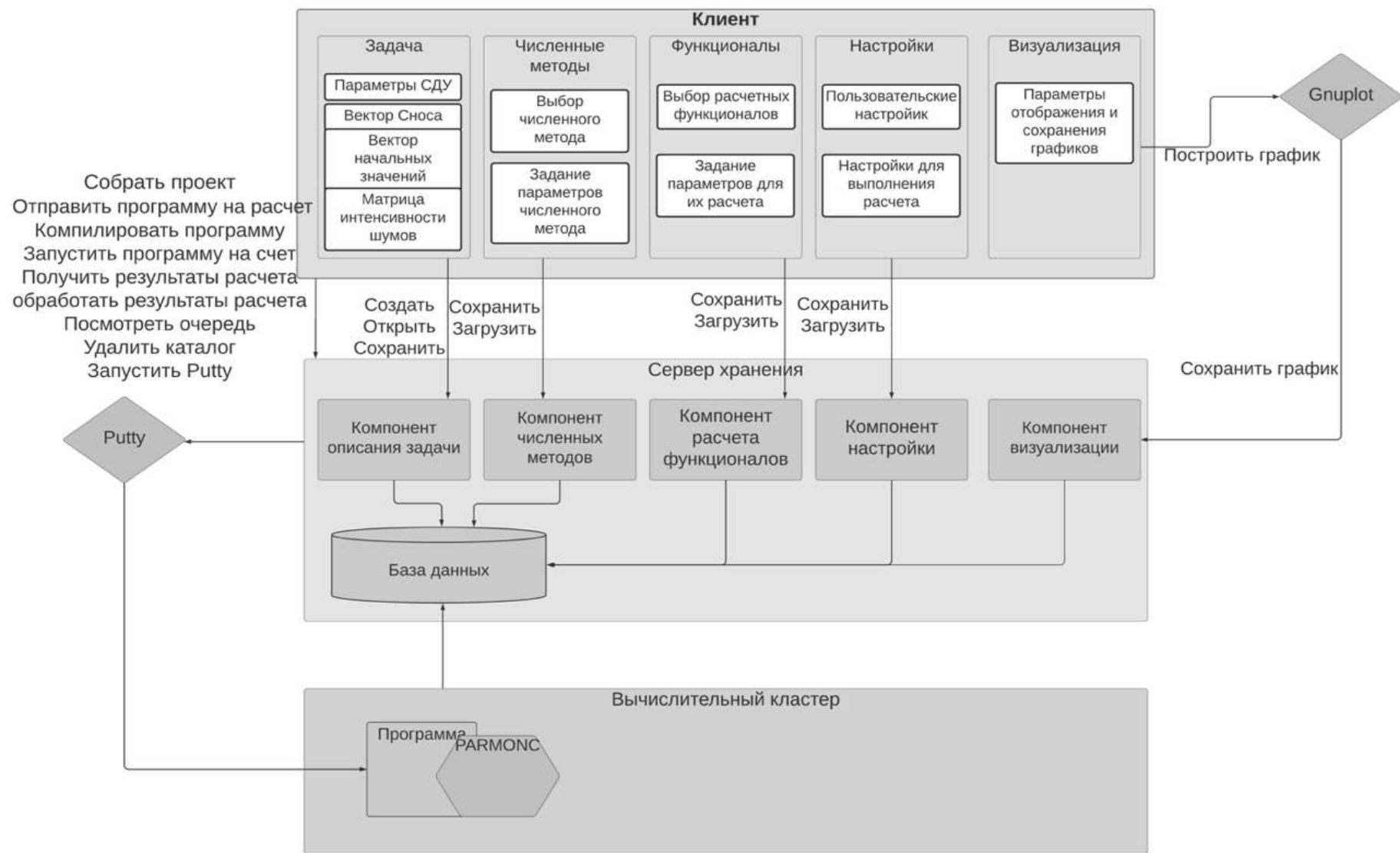
Здесь $Y_0 < Y_{end}$, $Y'_0 < Y'_{end}$ – произвольны, h_Y и $h_{Y'}$ – шаги сетки ЧФП по пространству.

$W_{FP} = \{(W_{ij}) | W_{ij} \text{ – количество пар } (y_s(t_n), y_m(t_n)), \text{ в } (i, j) \text{ ячейке сетки } S\}$

Номер узла сетки вычисляется как $i = \left[\frac{y_s(t_n) - Y_0}{h_Y} \right]$, $j = \left[\frac{y_m(t_n) - Y'_0}{h_{Y'}} \right]$, где $n =$

$0, \dots, N$; $y_s(t_n), y_m(t_n)$ – значения s -ой и $-$ ой компонент решения СДУ в узле t_n . Для ЧИК и ЧФП размер и место двумерной сетки выбирается так, чтобы продемонстрировать графически нужный участок поведения решения СДУ. Смоделированные значения с $i < 0, j < 0$ и $i > N_Y, j > N_{Y'}$ в ЧФП не учитываются.

Логико-архитектурная схема комплекса программ AMIKS



Пример решения задачи при помощи AMIKS

Рассмотрим случай “шумящих” коэффициентов в линейном колебательном контуре, который задаётся СДУ 2-го порядка вида

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \left(\lambda + \sigma_1 \frac{dw_1}{dt} \right) \frac{dy}{dt} + \left(\omega^2 + \sigma_2 \frac{dw_2}{dt} \right) y = 0$$

с постоянными $\lambda, \omega, \sigma_1, \sigma_2$. СДУ можно переписать в виде линейной системы с $K = 2, M = 2$:

$$\begin{aligned} dy_1 &= y_2 dt, \\ dy_2 &= -(\omega^2 y_1 + \lambda y_2) dt - \sigma_1 y_2 dw_1(t) - \sigma_2 y_1 dw_2(t). \end{aligned}$$

Если в линейном колебательном контуре “шумит” только частота колебаний решения, а декремент затухания равен нулю, система СДУ переписывается в виде

$$\begin{aligned} dy_1 &= y_2 dt, \\ dy_2 &= -\omega^2 y_1 dt - \sigma_2 y_1 dw_2(t). \end{aligned}$$

Известно точное значение математического ожидания решения $M(t) = \cos(\omega t)$.

AMIKS

Задача Команды Настройки Справка

Вычислительная система ПК

Задача oscillator

Задача Коши Численные методы Функционалы Данные для счёта Просмотр графиков

Размерность системы СДУ, K

Количество винеровских шумов, M

Параметры системы СДУ

```
double pi= 3.1415926535;
double w=6.283185307;
```

Вектор начальных данных задачи Коши

```
void initial_vector(int K, double vinit[MAXDIM])
{
vinit[0] = 2;
vinit[1] = 0;
}
```

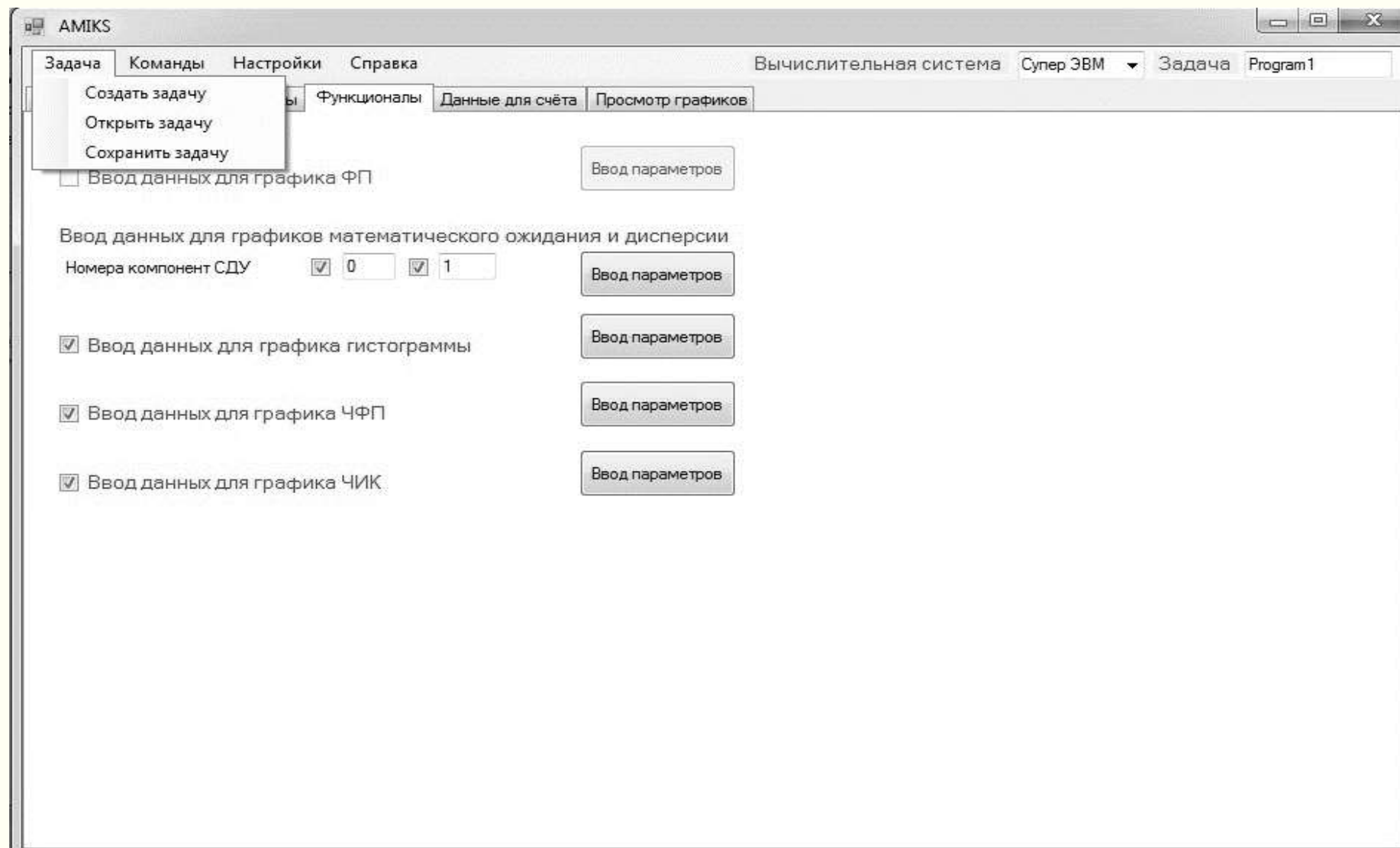
Вектор сноса

```
void ddrift_vector(int K, double t, double *y, double vdrift[MAXDIM])
{
vdrift[0] = y[1];
vdrift[1] = - w*w*y[0];
}
```

Матрица интенсивностей шумов

```
void diffusion_matrix(int K, int M, double t, double *y, double mdiff
[MAXDIM][MAXDIM])
{
mdiff[0][0] = 0;
mdiff[0][1] = 0;
mdiff[1][0] = 0;
mdiff[1][1] = -y[0];
}
```

Ввод данных для расчетов



Результаты расчетов

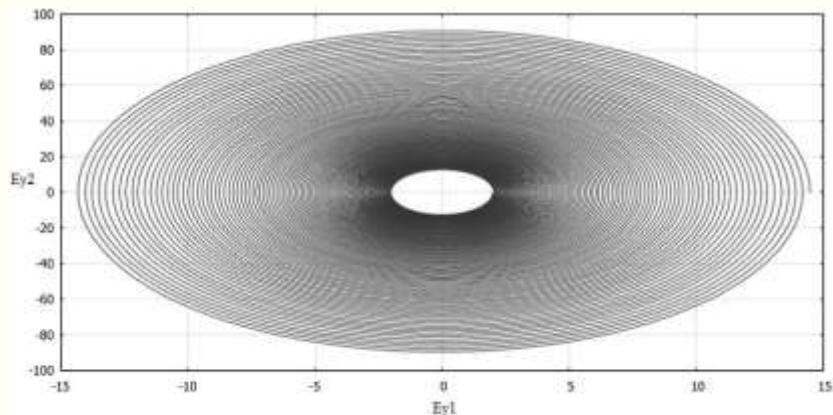


Рис.1 Фазовая траектория (Ey_1, Ey_2)

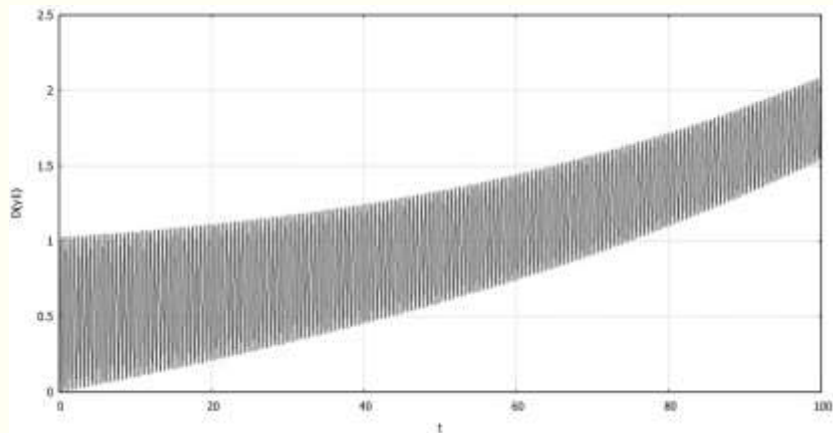


Рис.2 Оценка второго момента $D(y_1)$

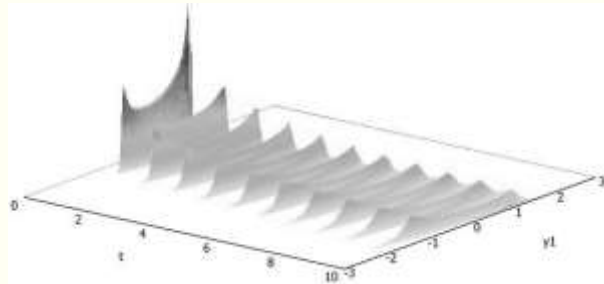


Рис.3 ЧИК (вид сбоку и сверху) компоненты решения $y_1(t)$

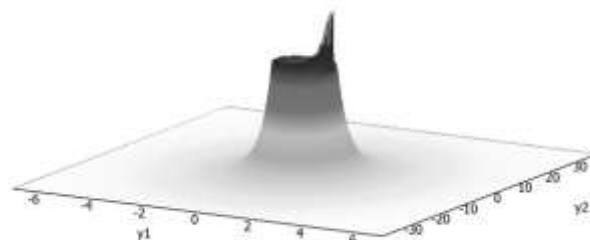
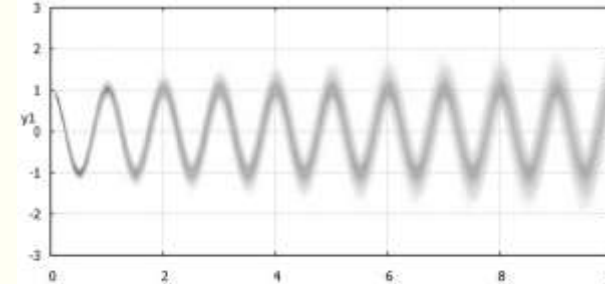


Рис.4 ЧФП (вид сбоку и сверху) для компонент решения (y_1, y_2)

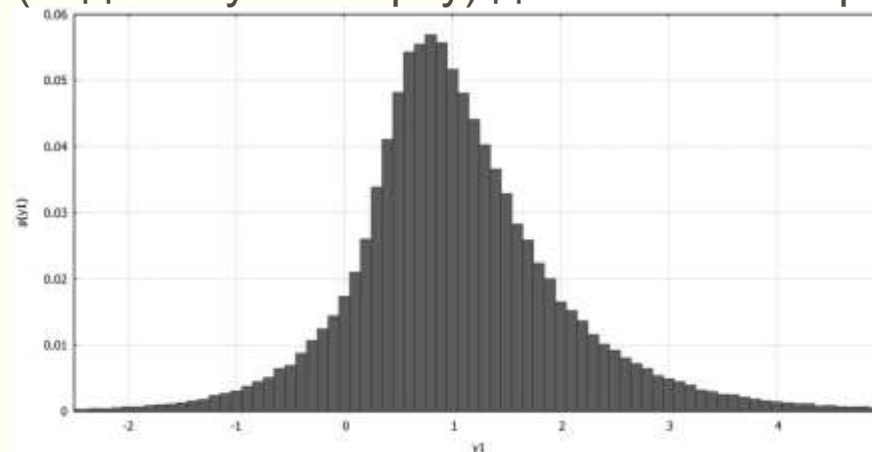
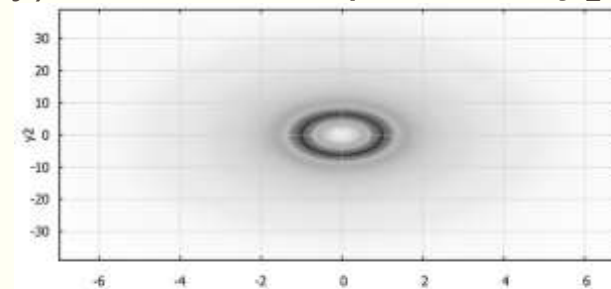


Рис.5 Гистограмма плотности распределения решения $y_1(t)$

Нелинейная система СДУ Ван-дер-Поля

Нелинейная система СДУ Ван-дер-Поля задается в следующем виде:

$$dy_1 = y_2 dt, \quad dy_2 = (ay_2(1 - by_1^2) - \omega^2 y_1) dt + \sigma_1 y_1 dw(t) + \sigma_2 dw(t),$$

и описывает колебания нелинейного контура под воздействием внутреннего шума. Постоянные a, b, ω определяют скорость переходных участков в решении и длину

“поло

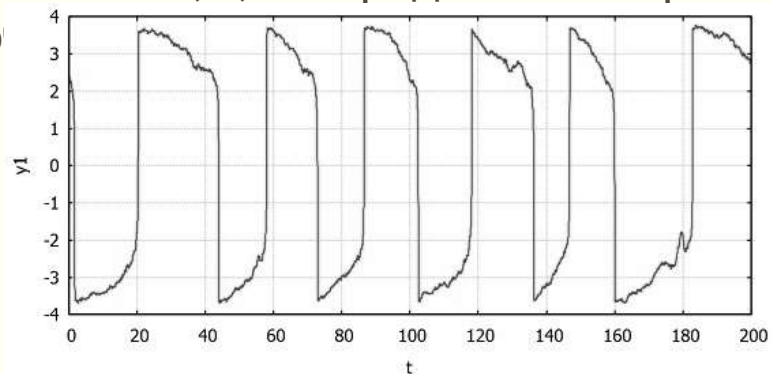


Рис. 6 Траектория численного решения y_1

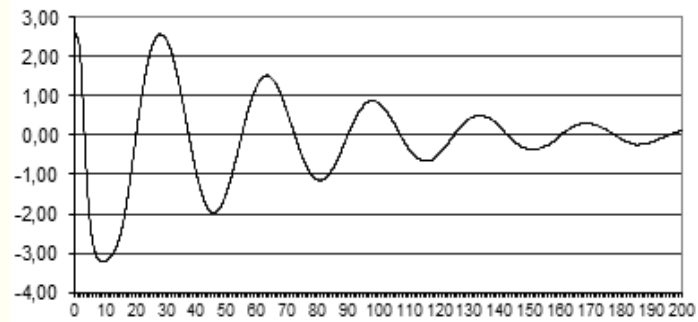


Рис.8 Оценка математического ожидания $E y_1(t)$

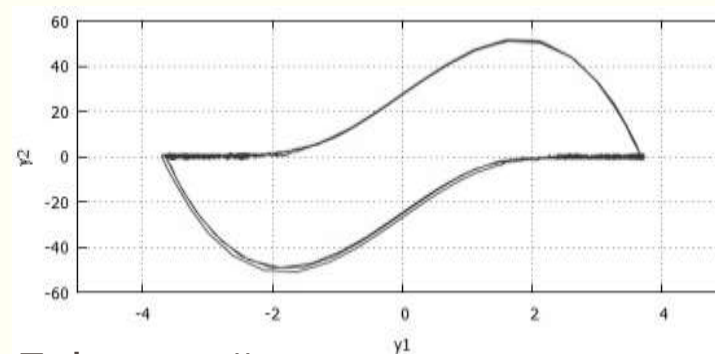


Рис. 7 Фазовый портрет для пары компонент (y_1, y_2)

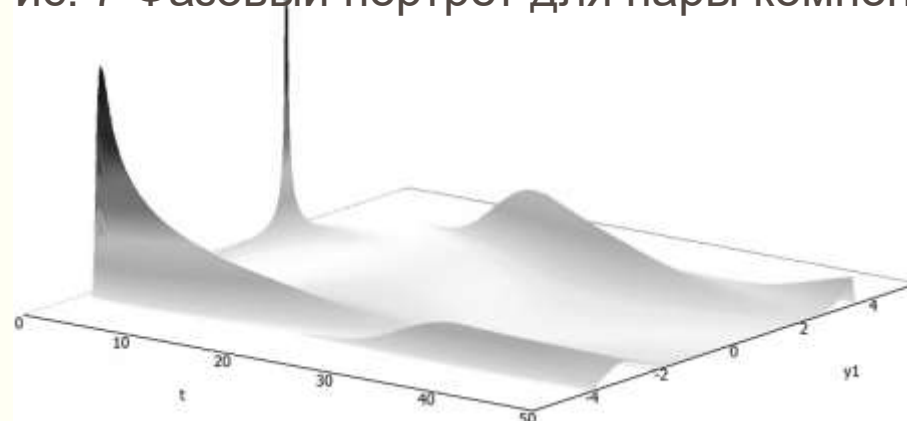


Рис. 9 ЧИК (вид сбоку, усечён) компоненты y_1

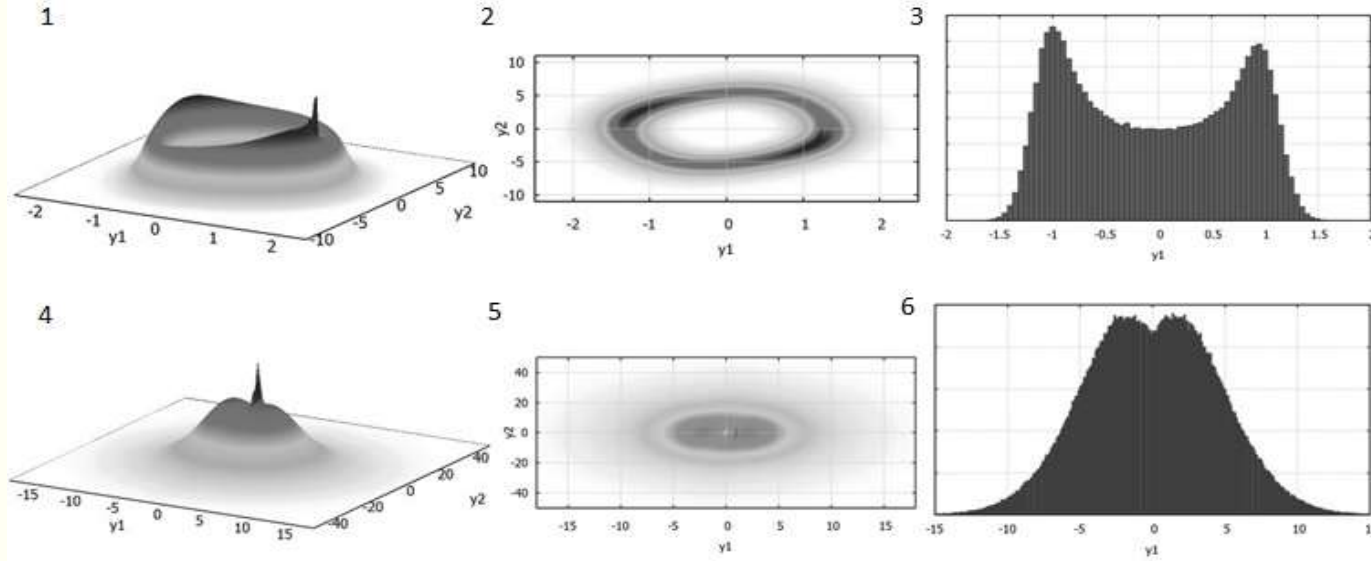


Рис. 10.1, 10.2, 10.3: $a = 0.5, b = 3.5, \omega = 2\pi, \sigma_1 = 1, \sigma_2 = 0$; Рис. 10.4, 10.5, 10.6: $\sigma_1 = 20$

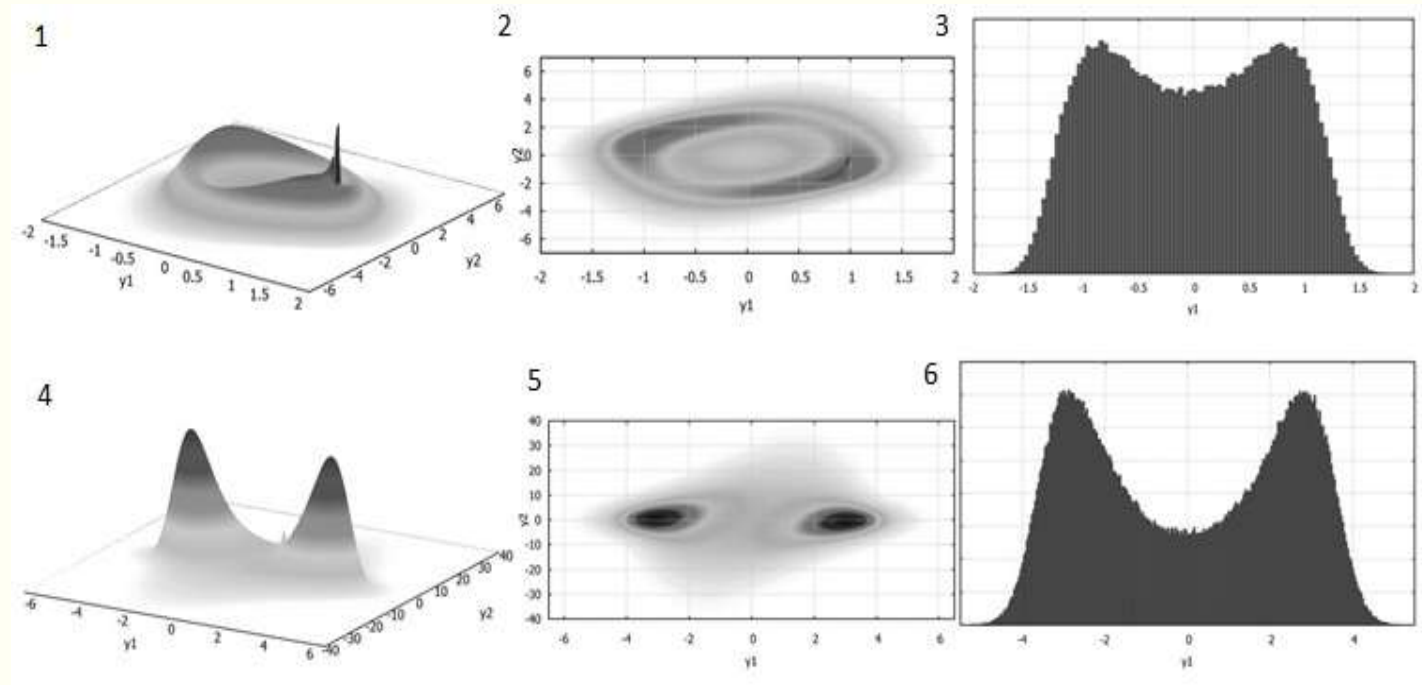


Рис. 11.1, 11.2, 11.3: $a = 0.5, b = 3.5, \omega = 2\pi, \sigma_1 = 0, \sigma_2 = 1$; Рис. 11.4, 11.5, 11.6: $\sigma_2 = 20$

Система СДУ Лоренца

$$dy_1 = -10(y_1 - y_2)dt, \quad y_1(0) = 1,$$

$$dy_2 = (-y_2 - y_1y_3 + ry_1)dt + \sigma y_1 dw(t), \quad y_2(0) = 1,$$

$$dy_3 = \left(-\frac{8}{3}y_3 + y_1y_2\right)dt, \quad y_3(0) = 20.$$

Точкой бифуркации является значение $r \approx 19.4$.

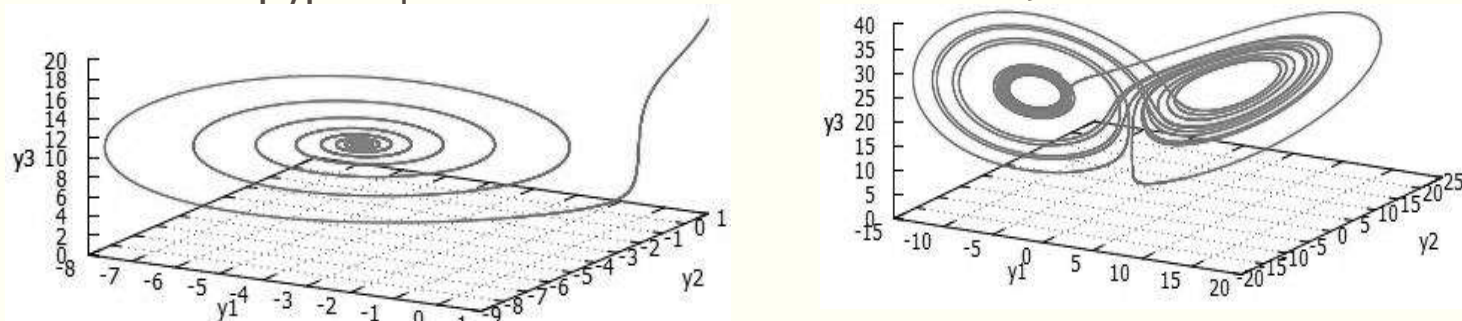


Рис. 12 Компоненты решения (y_1, y_2, y_3) при $r = 10$ слева и $r = 24$ справа

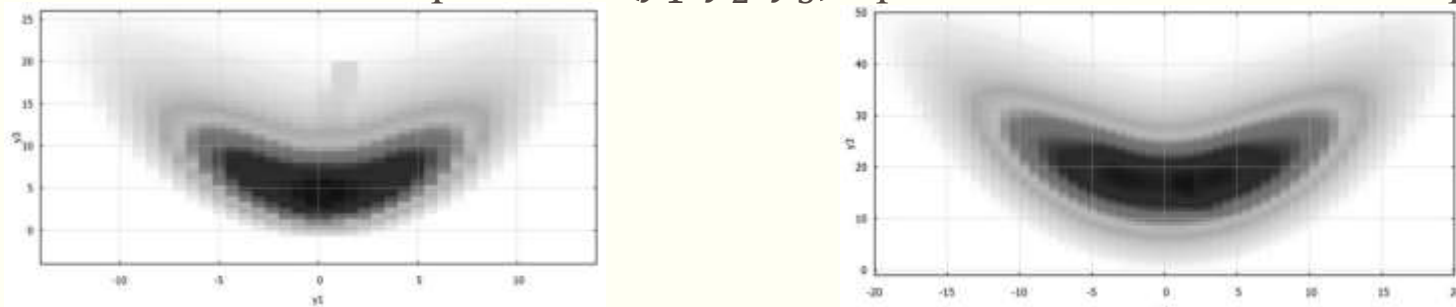


Рис. 13 ЧФП (вид сверху) пары компонент (y_1, y_3) при $r = 10$ слева и при $r = 24$ справа

Эффект проявляется для $\sigma > 0.08$ при моделировании 1000 траекторий. Для одной траектории при $\sigma > 0.3$.

Кинетическая модель реакции окисления водорода на никеле

Кинетическая модель реакции окисления водорода на никеле на металлах платиновой группы при наличии внутренних и внешних случайных возмущений задается системой СДУ с аддитивным и мультипликативным шумами [Чумаков Г.А., Слинько М.Г]

$$\begin{aligned} dy_1 &= (0.2(1 - y_1 - y_2)^2 - ay_1^2 - 200 \exp(-30y_2) y_1^2 y_2) dt + \sigma_1 dw_1(t), & y_1(0) &= 1, \\ dy_2 &= (8(1 - y_1 - y_2)^2 - 2 \exp(-12y_2 + 10y_3) y_2 - 100 \exp(-30y_2) y_1^2 y_2) dt + \sigma_2 y_2 dw_2(t), & y_2(0) &= 1, \\ dy_3 &= \left(8.837 \cdot 10^{-7} (y_2(1 - y_3) - y_3(1 - y_1 - y_2)) \right) dt + \sigma_3 y_3 dw_3(t), & y_3(0) &= 1. \end{aligned}$$

Здесь y_1, y_2, y_3 – безразмерные концентрации водорода и кислорода, внедренного в приповерхностный слой металла.

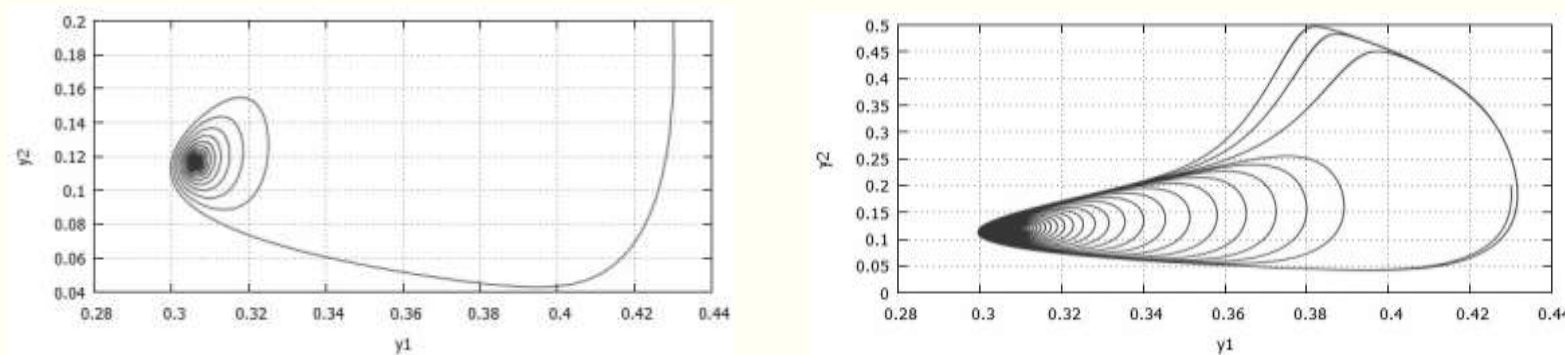


Рис.14 Фазовые траектории пары компонент (y_1, y_2) при $k = 0.001$ и справа при $k = 0.01$

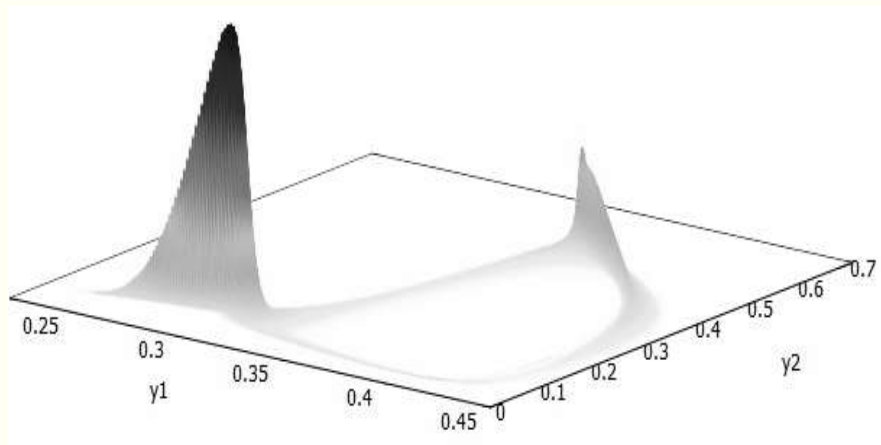


Рис.15 ЧФП (вид сбоку) при $k=0.001$

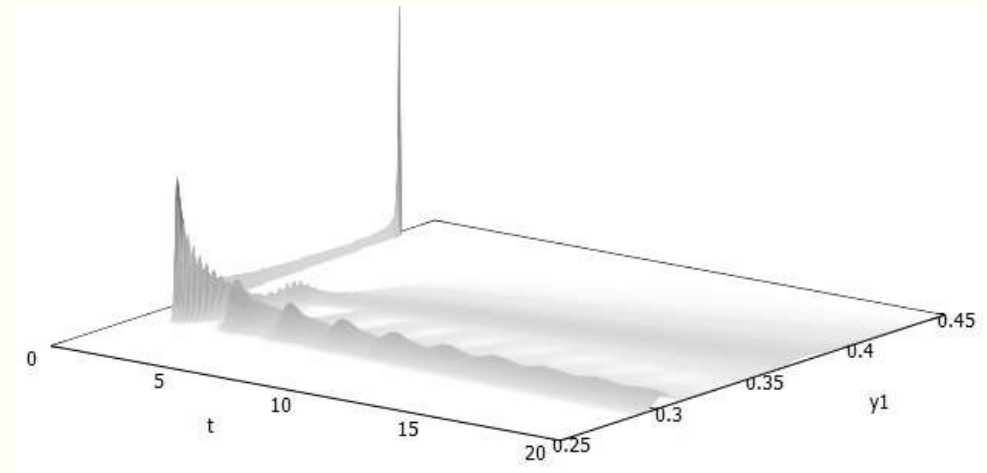


Рис.17 ЧИК компоненты решения y_1

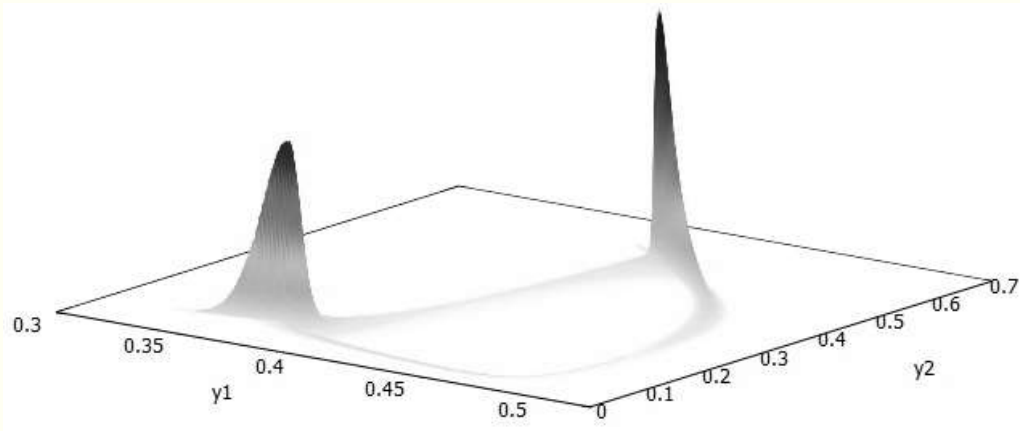


Рис. 16 ЧФП (вид сбоку) при $k=0.01$

ЧИК и ЧФП построены с использованием 120 ядер суперкомпьютерного центра НКС-30Т при $T = 500$, $h = 10^{-6}$, $N_{tr} = 10^5$, при $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0.1$. Заметим, что расчет данной задачи является трудоемким, так как среднее время расчета одной моделируемой траектории составляет 90 секунд.

Учет в модели химической реакции даже малых случайных возмущений нарушает бифуркационный переходы.

Математическая модель каскада реакторов идеального смешения

Математическая модель каскада реакторов идеального смешения описывает ситуацию, при которой необходимо обеспечить полное перемешивание реагентов до определённой степени завершения процесса, которую нельзя получить в единичном реакторе. Для этого используют несколько соединённых реакторов идеального перемешивания, или каскад реакторов. В общем виде математическое описание каскада из 9 реакторов с учетом случайных возмущений можно представить как систему СДУ вида

[Чумаков Г.А., Слинько М.Г.]:

$$dy_1 = \left(f(y_K) - \frac{K-1}{r_1\tau_1} y_1 + \frac{K-1}{r_1\tau_2} y_2 - 0.1y_1 \right) dt + \sigma_1 y_1 dw_1,$$
$$dy_i = \left(\frac{K-1}{r_{i-1}\tau_1} (y_{i-1} - y_i) - \frac{K-1}{r_i\tau_2} (y_i - y_{i+1}) - 0.1y_i \right) dt,$$
$$dy_{K-1} = \left(\frac{K-1}{r_{K-2}\tau_1} (y_{K-2} - y_{K-1}) - \frac{K-1}{r_{N-1}\tau_2} y_{K-1} - 0.1y_{K-1} \right) dt,$$
$$dy_K = \left(\frac{K-1}{r_{K-1}\tau_1} y_{K-1} - 2y_K \right) dt + \sigma_2 dw_2,$$

$$f(y_K) = \frac{5}{1+y_K^{\gamma}}, \quad r_i = 1 + y_i^{0.2}, \quad y_i(0) = 0, \quad i = 1, \dots, K, \quad K = 9.$$

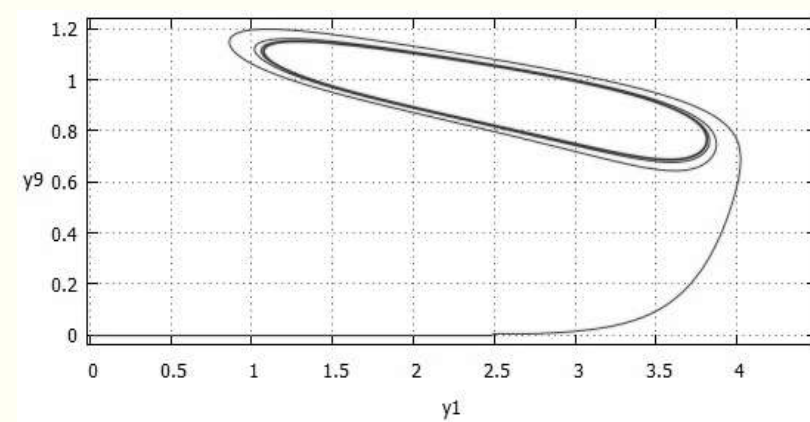
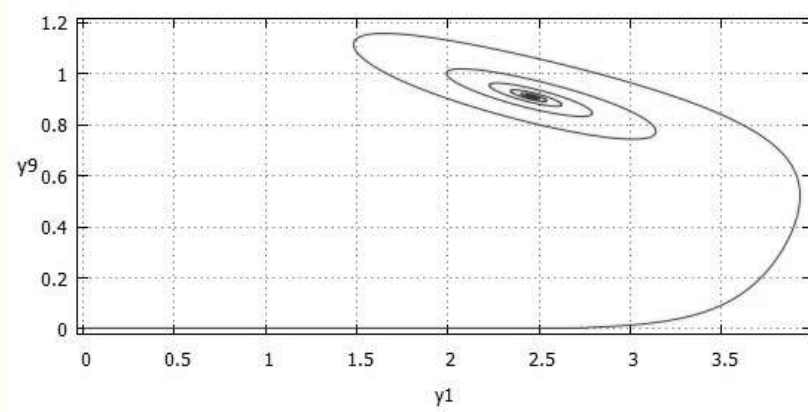


Рис.18 фазовые траектории пары компонент (y_1, y_9) при $\gamma = 5$ и справа при $\gamma = 10$

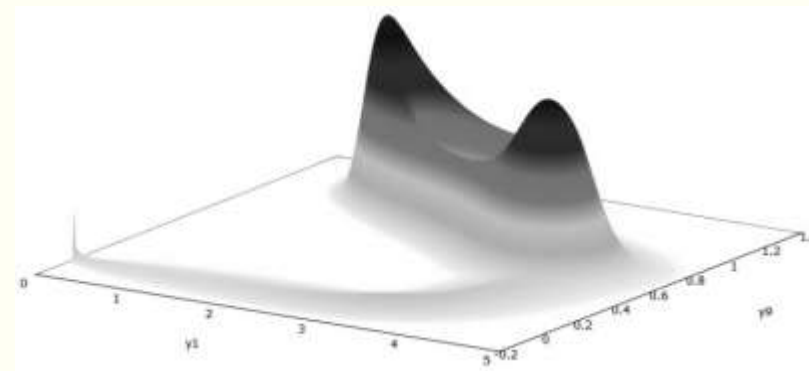
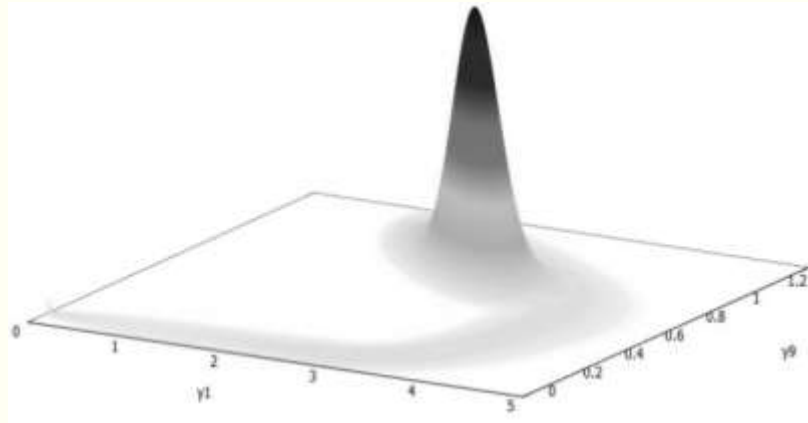


Рис.19 ЧФП пары компонент (y_1, y_9) при $\gamma = 5$ и справа при $\gamma=10$

Проведённые численные эксперименты рассмотренных химических реакций показали, что случайные шумы могут нарушать бифуркационные переходы из одного состояния колебаний в другой при фиксированных параметрах СДУ, тогда как в сопутствующей системе ОДУ такие переходы явно присутствуют. Так же демонстрируется обратный эффект – случайные шумы даже с малой интенсивностью вызывают все возможные переходы из одного режима колебаний в другой при фиксированных параметрах СДУ.

Модель движения заряженной частицы в магнитной ловушке

Модель пространственного движения нерелятивистского электрического заряда в постоянном неоднородном магнитном поле напряжённостью $\vec{H}(\vec{r})$ при заданных начальных условиях (\vec{R}_0, \vec{v}_0) , для безразмерных переменных, задаётся системой ОДУ второго порядка

$$\begin{cases} \dot{\vec{r}} = \vec{v}, \\ \ddot{\vec{r}} = 2\pi [\vec{v} \times \vec{H}(\vec{r})], \end{cases}$$

где безразмерные начальные условия вычисляются следующим образом: $\vec{R}_0 = \frac{\vec{R}_0}{|\vec{R}_0|}$ – начальное положение частицы, $\vec{v}_0 = \frac{\vec{v}_0 T_0}{|\vec{R}_0|}$ – начальная скорость частицы, $T_0 = \frac{2\pi m c}{|q| |\vec{H}_0|}$ – период движения заряда по ларморовской окружности в магнитном поле в плоскости перпендикулярной вектору напряжённости \vec{H}_0 , $\vec{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{R}_0|}$ – текущее положение частицы.

Выражение для безразмерной напряженности магнитного поля имеет следующий вид $\vec{H}(\vec{r}) = \frac{a(\vec{\mu}\vec{r})\vec{r}}{|\vec{r}|^5} - \frac{\vec{\mu}}{|\vec{r}|^3}$, где $\vec{\mu} = \frac{\vec{\mu}}{|\vec{\mu}|}$ – единичный вектор магнитного момента, a – параметр магнитного поля.

При $a = 3$ аналитическое выражение для напряжённости магнитного поля совпадает с напряжённостью магнитного поля диполя. Тогда при задании соответствующих параметров система ОДУ описывает движение частиц, движущихся в магнитных полях, создаваемых космическими объектами. В частности, движение заряженной частицы, находящейся в геомагнитной ловушке Земли. Проводя параметрический анализ коэффициента a в небольших пределах, можно получить описание движения частицы для разных космических объектов, у которых расположение оси вращения к магнитной оси отличается от Земной конфигурации.

Отметим, что аналитическое решение такой системы ОДУ второго порядка удастся найти в некоторых случаях:

- для постоянного однородного магнитного поля ($\vec{H}(\vec{r}) = \text{const}$), в котором заряд движется по спирали;
- для неоднородных магнитных полей, величина напряженности которых медленно меняется вдоль пути частицы.

При наличии внешних случайных возмущений и при соответствующей замене переменных система ОДУ переписывается в виде системы СДУ:

$$\begin{aligned}
 dy_1 &= y_4 dt, & y_1(0) &= R_1, \\
 dy_2 &= y_5 dt, & y_2(0) &= R_2, \\
 dy_3 &= y_6 dt, & y_3(0) &= R_1, \\
 dy_4 &= \frac{2\pi}{r^5} \left((ay_3^2 - r^2)y_5 - ay_2y_3y_6 \right) dt + \sigma_1 dw_1(t), & y_4(0) &= V_1, \\
 dy_5 &= \frac{2\pi}{r^5} (ay_1y_3y_6 - (ay_3^2 - r^2)y_4) dt + \sigma_2 dw_2(t), & y_5(0) &= V_2, \\
 dy_6 &= \frac{2\pi}{r^5} (ay_2y_3y_4 - ay_1y_3y_5) dt + \sigma_3 dw_3(t), & y_6(0) &= V_3.
 \end{aligned}$$

Здесь y_1, y_2, y_3 – координаты положения частицы в пространстве, $r^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$, $\vec{R}_0 = (R_1, R_2, R_3)$ – начальное положение частицы, $\vec{V}_0 = (V_1, V_2, V_3)$ – вектор безразмерной начальной скорости частицы, a – параметр магнитного поля. Для рассматриваемой системы СДУ проведен параметрический анализ для разных значений параметров: a , начальной скорости, интенсивности шумов. Значения шага интегрирования h и конца интервала интегрирования t_{end} так же являются параметрами. Добавление аддитивного шума к трём последним уравнениям моделирует случайные возмущения напряжённости магнитного поля, что интерпретируется как влияние на частицу внешних сил, характер которых зависит от величины интенсивности рассматриваемого шума.

Параметрический анализ сопутствующей системы ОДУ показал:

- Стартовое положение частицы не влияет на характер движения внутри магнитной ловушки. Для дальнейших расчетов выбрано начальное положение частицы $R_0 = (0.5; 0.4; 0.3)$
- Смоделировать поведения частицы в магнитной ловушке удастся в пределах значения параметра $a \in [-0.8, 6]$, при этом качественные изменения поведения частицы в магнитной ловушке наблюдаются при $a = 1, 3$ – значения параметра, которые были выбраны для дальнейшего анализа стохастической системы. За пределами приведенного интервала для значения параметра a магнитную ловушку смоделировать не удастся, наблюдается неустойчивое поведение численного решения
- Для параметров начальной скорости установлено, что разные компоненты начальной скорости по-разному влияют на характер движения частицы. При $V_0 = (0.75; 0; 0)$, $V_0 = (0; 0.36; 0)$, $V_0 = (0; 0; 0.51)$ происходят срывы режима колебаний. Так же если модуль начальной скорости превышает значение $|V_0| > 0.75$ наблюдается срыв режима колебаний – возникает неустойчивое движение.

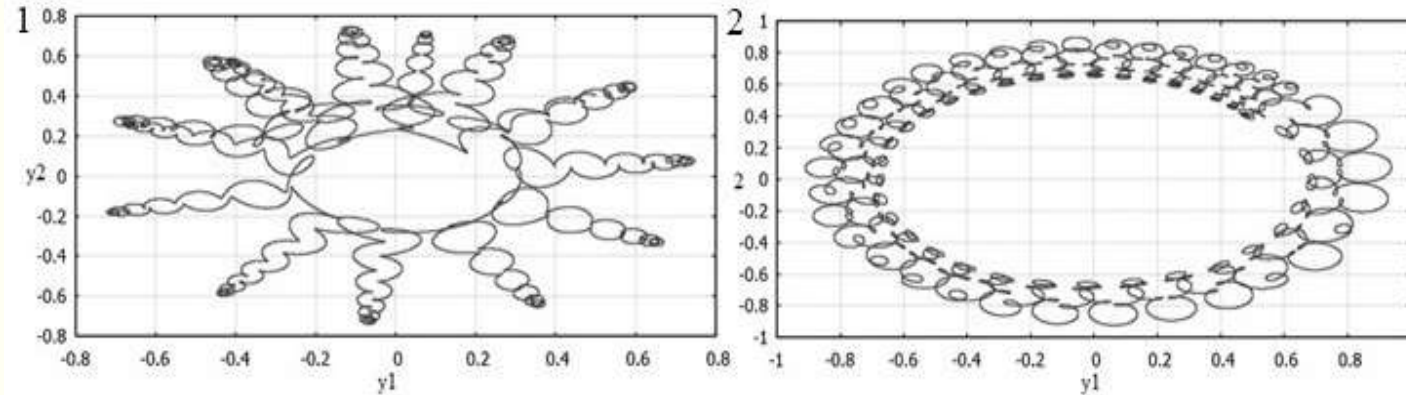


Рис. 20 фазовые траектории (y_1, y_2) при $a = 1$ и справа при $a = 3$ для $V_0 = (0.01; 0.06; 0.36)$

На больших расстояниях форма магнитосферы космических объектов оказывается сильно искажённой из-за потока заряженных частиц излучаемых Солнцем - так называемым солнечным ветром. Искажения могут быть вызваны и другими частицами, порождёнными другими космическими объектами. В частности, если влияние солнечного ветра можно описать относительно небольшим внешним шумом, то влияние магнитной бури может описываться шумом большей интенсивности. Чтобы смоделировать подобного рода случайные воздействия целесообразно в систему добавить внешний аддитивный случайный шум

Для выявления общих закономерностей движения заряженной частицы внутри магнитной ловушки под воздействием аддитивных шумов были проведены расчёты при различных значениях параметра магнитного поля, начальной скорости, интенсивности шумов.

Графики ЧФП, построенные при $\sigma = (0.001; 0.001; 0.036)$, $a = 1$, $h = 10^{-4}$, $V_0 = (0.01; 0.06; 0.36)$, $t_{\text{end}} = 100$, $N_{\text{tr}} = 10^8$ и при $a = 3$, имеют по своей форме и области схожий вид, как и в расчетах аттракторов и химических реакций, что идет в разрез с рассмотрением фазовых портретов. Оценка дисперсии компонент решения y_1, y_2 имеет экспоненциальный рост, а значение оценки в конце интервала интегрирования $Dy_1 = 510$.

График ЧФП имеет темный фон, который появляется за счет возникающей неустойчивости некоторых траекторий в следствии воздействия случайного шума. Если уменьшить интервал интегрирования до $t_{\text{end}} = 40$, уменьшить интенсивность шума до значений $\sigma = (0.005; 0.005; 0.005)$, то оценка дисперсии компонент решения y_1, y_2 по прежнему имеет экспоненциальный рост, однако значение $Dy_1 = 0.75$. Уменьшение дисперсии компоненты решения y_1 не привело к устойчивости решения, что проиллюстрировано на графике ЧИК.

Начиная с $t = 27$ видно, что некоторые траектории теряют устойчивость и вылетают за пределы рассматриваемой области. График ЧИК иллюстрирует динамику развития плотности распределения компоненты решения системы СДУ.

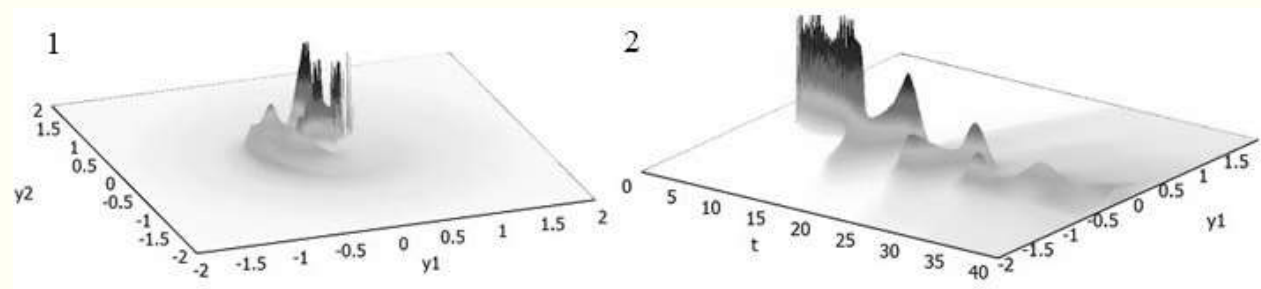


Рис. 21 ЧФП пары компонент решения (y_1, y_2) и ЧИК компоненты решения y_1 при $a = 1$, $h = 10^{-5}$, $V_0 = (0.01; 0.06; 0.36)$

Научная новизна и личный вклад

- Реализован программный комплекс, который позволяет рассчитывать системы СДУ как на ПК так и на суперкомпьютере. Совокупность выбранных для реализации методов обеспечивает высокую эффективность вычислительного алгоритма. Автоматическое распараллеливание позволяет запускать программы без специальных знаний о параллельном программировании.
- В рамках исследования разработаны и включены в программный комплекс новые частотные характеристики, которые позволяют получить дополнительную информацию о поведении численного решения системы СДУ.
- Разработаны программные модули, при помощи которых исследовалось влияние случайных шумов на свойства и поведение различных нелинейных систем СДУ. Для проведения дополнительных исследований программные модули могут использоваться без проведения новых расчетов.

Научная новизна и личный вклад

В список программных модулей попали классические системы уравнений, встречающиеся во многих работах в виде систем ОДУ. Переход от ОДУ к СДУ позволяет проанализировать влияние шумов на свойства численного решения, выявить как интенсивность внутреннего или внешнего шума изменяет рассматриваемые свойства, позволяет полнее описать и изучить поведение системы. В работе исследованы следующие системы СДУ:

- линейного осциллятора,
- Ван-дер-Поля,
- аттрактора Лоренца и Рёсслера,
- несколько систем химических реакций,
- движение заряженной частицы в магнитном поле,
- системы СДУ связанных осцилляторов.

При помощи комплекса программ проведен численный анализ математической модели практически важной задачи удержания заряженной частицы в магнитной ловушке.

Основные результаты и выводы по работе

- Программный комплекс AMIKS для проведения численного анализа систем СДУ как на ПК так и на супер-ЭВМ. Устранены недостатки рассмотренных библиотек и программ. Разработанные частотные характеристики ЧИК и ЧФП реализованы в AMIKS. Доказана работоспособность на примерах рассмотренных задач.
- Проанализированы системы СДУ описывающие колебательные процессы, бифуркации, химические реакции, физические процессы, связанные системы. Параметрический анализ позволил получить новую информацию о поведении численных решений СДУ при помощи частотных характеристик ЧИК и ЧФП.
- Для СДУ Ван-дер-Поля показано, что оценка математического ожидания теряет информацию о поведении численного решения под воздействием шумов. Сравнение нелинейного уравнения Ван-дер-Поля и линейного осциллятора продемонстрировало, что метод линеаризации может давать ошибочное

- Изучено влияние случайных шумов на аттракторы Лоренца и Рёсслера. Обнаружено, что наличие внутренних шумов может приводить к нарушению бифуркации. Для аттрактора Лоренца найдено граничное значение мультипликативного шума, начиная с которого эффект нарушения бифуркации проявляется.
- В модели автоколебательной кинетической химической реакции удалось пронаблюдать эффект нарушения бифуркации, как для аттрактора Лоренца. Однако, для математической модели каскада реакторов идеального смешения, наличие шума содействовало появлению притягивающих множеств и изменению структуры колебаний.
- Проведен параметрический анализ модели движения заряженной частицы в магнитном поле. Модель описывает задачу удержания частицы в магнитной ловушке Земли при должных параметрах. Найдены два вида наиболее вероятных движения частицы на плоскости компонент решения (y_1, y_2) . Найдено время, начиная с которого происходит срыв режима колебаний у некоторых траекторий компоненты решения y_1

- Изучено свойство синхронизации под влиянием случайного шума на примере уравнений связанных осцилляторов Дуффинга. Показано, что при изменении величины связи синхронизирующим осциллятором может выступать как первый осциллятор, так и второй, но при появлении мультипликативного шума такой эффект пропадает. Был получен порог значения величины связи, при котором наступает полная синхронизация осцилляторов. Обнаружен эффект, при котором с помощью малой синхронизации удается сместить колебания первого осциллятора в положительную область. В случае слабой связи мультипликативный шум большой интенсивности способствует затуханию колебаний обоих осцилляторов. В аналогичных условиях аддитивный шум разбалтывает амплитуду колебаний. С помощью графика ЧИК выявлено, что наличие мультипликативного шума небольшой интенсивности может приводить к переходам из одного режима колебаний в другой. Такой же результат есть и в случае малого аддитивного шума, что продемонстрировано с помощью графика ЧФП.

Положения выносимые на защиту

На защиту выносятся результаты, соответствующие четырем пунктам (6, 7, 8, 9) паспорта специальности «1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»:

(Направление исследований по паспорту специальности: 6. «Разработка систем компьютерного и имитационного моделирования, алгоритмов и методов имитационного моделирования на основе анализа математических моделей»)

1. Разработан программный комплекс AMIKS для нахождения и анализа численных решений осциллирующих систем СДУ на суперкомпьютере.

(Направление исследований по паспорту специальности: 7. «Качественные или аналитические методы исследования математических моделей»)

2. Разработаны новые частотные характеристики, позволяющие численно исследовать особенности поведения осциллирующих систем СДУ

(Направление исследований по паспорту специальности: 9. «Постановка и проведение численных экспериментов, статистический анализ их результатов, в том числе с применением современных компьютерных технологий»)

3. Предложены новые стохастические модели следующих систем: Ван-дер-Поля, Лоренца, Рёсслера, связанных осцилляторов Дуффинга, химической реакции окисления водорода на никеле, каскада химических реакций. Получена новая информация об их поведении под воздействием случайных шумов.

(Направление исследований по паспорту специальности: 8. «Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента»)

4. Проведено численное моделирование и анализ поведения заряженной частицы в магнитной ловушке, с использованием разработанных частотных характеристик и комплекса программ AMIKS.

Апробация работы

Основные результаты диссертационных исследований представлены на:

- международной научной студенческой конференции “Студент и научно-технический прогресс” (г. Новосибирск, 2013),
- международной молодежной научной школе-конференции «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» (г. Новосибирск, 2013, 2016, 2017),
- международной научной конференции «АПВПМ-2015» (г. Новосибирск, 2014),
- международной конференции молодых учёных института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (г. Новосибирск, 2014),
- международной конференции «ВПМ 2017» (г. Новосибирск, 2017),
- международной научной конференции «ПаВТ-2018» (г. Ростов-на-Дону, 2018).

Публикации на тему диссертации, попадающие в список ВАК:

-
- Артемьев С.С., Иванов А.А., Корнеев В.Д., “Численный анализ стохастических осцилляторов на суперкомпьютерах”, Сиб. ЖВМ. - Новосибирск, 15:1 (2012), 31–43; Num. Anal. Appl., 5:1 (2012), 25–35
 - Артемьев С. С, Иванов А.А., Смирнов Д.Д. Новые частотные характеристики численного решения стохастических дифференциальных уравнений. Сиб. ЖВМ. – Новосибирск, 2015. - Т.18, №1. - С.15-26.
 - Артемьев С. С, Иванов А.А. Анализ влияния случайных шумов на странные аттракторы методом Монте-Карло на суперкомпьютерах. Сиб. ЖВМ. – Новосибирск, 2015. - Т.18, №2. - С.121-133.
 - Артемьев С. С, Иванов А.А. Анализ влияния случайных шумов на течение автоколебательных химических реакций методом Монте-Карло на суперкомпьютерах. Сиб. ЖИМ. – Новосибирск, 2016. - Том XIX, №4(68)
 - Иванов А.А. Анализ стохастического движения заряженной частицы в магнитном поле методом Монте-Карло на суперкомпьютерах. Сиб. ЖИМ. – Новосибирск, 2017. №3. С. 31-38

- Марченко М.А., Иванов А.А., Смирнов Д.Д. Комплекс программ AMIKS для численного решения СДУ методом Монте Карло на суперкомпьютерах. ИВТ СО РАН – Новосибирск, 2017.- Т.22, №3. – С.61-70
- Иванов А.А. Анализ влияния случайных шумов на синхронизацию в системе двух связанных осцилляторов Дуффинга. Сиб. ЖИМ. – Новосибирск, Январь–март, 2019. Том XXII, № 1(77)

Публикации на тему диссертации, попадающие в базу цитирования РИНЦ:

- Артемьев С.С., Иванов А.А. Анализ решений стохастического уравнения Бюргерса методом Монте-Карло. 2017
- Ivanov A.A. Analysis of the influence of random noise upon the properties of stochastic oscillators by the Monte Carlo method using supercomputers. 2018

Монографии на тему диссертации:

- Артемьев С.С., Марченко М.А., Корнеев В.Д., Иванов А.А., Смирнов Д.Д., Якунин М.А. Анализ стохастических колебаний методом Монте-Карло на суперкомпьютерах. Новосибирск: Издательство СО РАН, 2016. ISBN: 978-5-7600-1400-8

Программы для ЭВМ:

- Марченко М.А., Иванов А.А., Смирнов Д.Д. AMIKS – программа для численного анализа стохастических осцилляторов на массивно-параллельных вычислительных системах. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2016616439, дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 10.06.2016г.
- Артемьев С.С., Иванов А.А. SPARDE1D – программный комплекс для численного анализа стохастических дифференциальных уравнений в частных производных на суперкомпьютере. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2018617942, дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 05.07.2018

Материалы конференций

- Иванов А.А. Анализ странных аттракторов методом Монте-Карло на суперкомпьютере. Международная научная студенческая конференция “Студент и научно-технический прогресс”. Новосибирск, 2013
- Иванов А.А., Смирнов Д.Д. Стохастические дифференциальные модели странных аттракторов и движения летательных аппаратов. Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач. Новосибирск, 2013
- Иванов А.А. Анализ влияния случайных шумов на течение автоколебательных химических реакций методом Монте-Карло на суперкомпьютерах. Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск, 2014
- Иванов А.А., Смирнов Д.Д. Стохастические дифференциальные модели двух аспаралл осцилляторов Ван-Дер-Поля и движения летательных аппаратов. Конференция молодых учёных института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН. Новосибирск, 2014

- Иванов А.А., Смирнов Д.Д. Комплекс программ AMIKS для численного решения стохастических дифференциальных уравнений на суперкомпьютере. Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач. Новосибирск, 2016
- Артемьев С. С., Иванов А.А. Анализ СДУ в частных производных методом Монте-Карло на суперкомпьютерах. Международная конференция "Вычислительная и прикладная математика 2017" (ВПМ 2017). Новосибирск, 2017
- Иванов А.А., Смирнов Д.Д. Использование комплекса программ AMIKS для численного анализа стохастического уравнения теплопроводности методом Монте-Карло на суперкомпьютере. IX международная молодёжная школа–конференция «теория и численные методы решения обратных и некорректных задач». Новосибирск, 2017
- Ivanov A.A. Analysis of the influence of random noise upon the properties of stochastic oscillators by the Monte Carlo method using supercomputers. Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ-2018). Ростов-на-Дону, 2018.

Спасибо за внимание