

Численное моделирование струйных течений с переменной плотностью

Иващенко В. А.

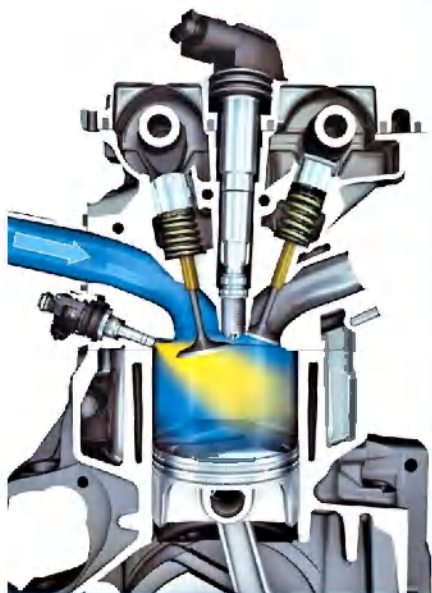
Научный руководитель: Мулляджанов Р. И.

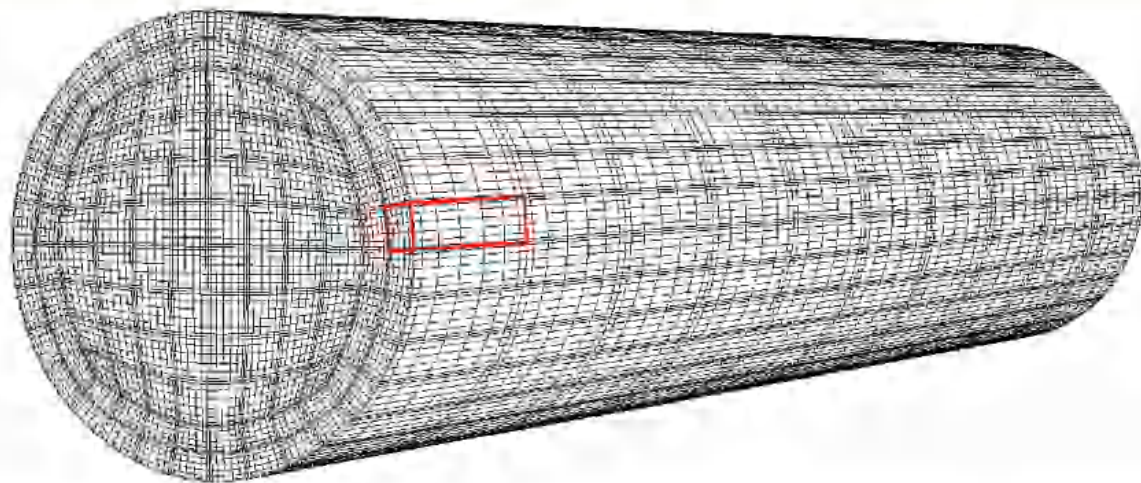
Институт теплофизики СО РАН
Физический факультет
Новосибирский государственный университет

12 апреля, 2018

- 1 Введение
 - Мотивация
 - Метод спектральных элементов
 - Методы моделирования турбулентности
- 2 Вычислительный код Nek5000
 - Уравнения движения
 - Временная дискретизация
 - Пространственная дискретизация
- 3 Течение в плоском канале
- 4 Течение в периодической трубе
 - Течение в периодической трубе: прошлые результаты
 - Баланс турбулентной кинетической энергии
 - Построение новой вычислительной сетки
 - Полученные результаты
- 5 Струйные течения постоянной плотности
- 6 Струйные течения переменной плотности

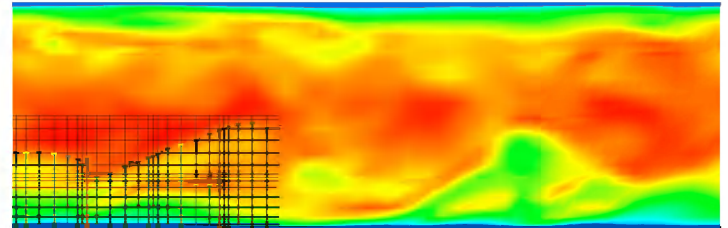
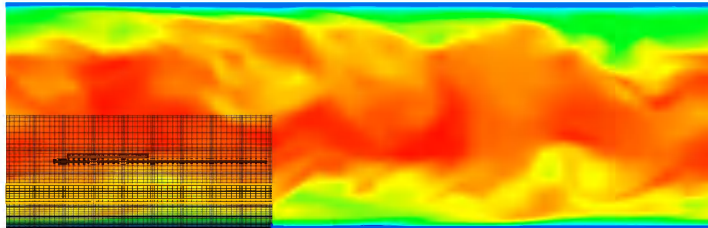
Мотивация и цели работы





Расчетная область делится на некоторые подобъемы (элементы). Далее исследуемые уравнения записываются для каждого элемента, внутри которого функции заданы аппроксимируются некоторым полиномом. В методе конечных элементов используются полиномы невысокого порядка, в то время как в методе спектральных элементов (SEM, от англ. Spectral Element Method) в качестве базисных функций используются полиномы высокого порядка. Впервые этот метод был представлен в работе Патера (A. T. Patera) в 1984 году.

Patera A. T. A spectral element method for fluid dynamics: laminar flow in a channel expansion. *Journal of computational Physics*, 54(3):468–488, 1984.



Прямое численное моделирование (DNS)

Для прямого численного моделирования (DNS, от англ. Direct numerical simulations) уравнений Навье-Стокса необходимо “разрешать” все масштабы движения без каких-либо дополнительных предположений и моделей. Необходимое число точек расчетной сетки для DNS резко возрастает с увеличением числа Рейнольдса по закону $\sim 4.4Re^{9/4}$, поэтому DNS обычно проводится для чисел Рейнольдса $< 10^4 - 10^5$.

Метод моделирования крупных вихрей (LES)

Менее “затратным” с вычислительной точки зрения является метод моделирования крупных вихрей (LES, от англ. Large Eddy Simulations), снижающий потребность в вычислительной мощности за счет применения операции пространственной низкочастотной фильтрации к уравнениям Навье-Стокса.

Уравнения движения.

$$\tilde{x} = Lx, \quad \tilde{t} = tL/\boxed{U}, \quad \tilde{u} = \boxed{c_0} u, \quad \tilde{\rho} = \rho_0\rho, \quad \tilde{c}_p = c_{p0}c_p, \quad \tilde{c}_v = c_{v0}c_v, \quad \tilde{k} = k_0k, \quad \tilde{\mu} = \mu_0\mu. \quad (1)$$

$$\tilde{p} = p\rho_0c_0^2/\gamma, \quad \tilde{T} = Tc_0^2/(c_{p0}[\gamma - 1])$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{M} \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0,$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{M} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{1}{M\gamma} \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{M} u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{M} u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) = \\ = \frac{1}{Pe} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \frac{(\gamma - 1)}{Re} \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\ p = \rho T \end{aligned}$$

$$M = \frac{U}{c_0}, \quad Re = \frac{\rho_0 U L}{\mu_0}, \quad Pe = \frac{\rho_0 c_{p0} U L}{k_0}, \quad \gamma = \frac{c_{p0}}{c_{v0}}. \quad (3)$$

Приближение малых чисел Маха.

$$\tilde{u}_i = c_0 u_i = \overbrace{c_0 M}^U \left(u_i^{(0)} + M u_i^{(1)} + M^2 u_i^{(2)} + o(M^2) \right), \quad (4)$$

$$\tilde{T} = \frac{c_0^2}{c_p(\gamma - 1)} T_0 = \frac{U^2}{M^2 c_p(\gamma - 1)} \left(T^{(0)} + M T^{(1)} + M^2 T^{(2)} + o(M^2) \right), \quad (5)$$

$$\tilde{p} = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma^2} p_0 = \frac{\rho_0 U^2}{M^2 \gamma^2} \left(\boxed{p^{(0)}} + M p^{(1)} + M^2 \boxed{p^{(2)}} + o(M^2) \right), \quad (6)$$

$$\tilde{\rho} = \rho_0 \rho = \rho_0 \left(\rho^{(0)} + M \rho^{(1)} + M^2 \rho^{(2)} + o(M^2) \right), \quad (7)$$

аналогичные разложения можно представить и для μ , k , c_p .

$$\frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho^{(0)}} \frac{D\rho^{(0)}}{Dt}, \quad (8)$$

$$\rho^{(0)} \left(\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial t} + u_j^{(0)} \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p^{(2)}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \tau_{ij}^{(0)}}{\partial x_j}, \quad (9)$$

$$\rho^{(0)} c_p^{(0)} \left(\frac{\partial T^{(0)}}{\partial t} + u_j^{(0)} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{Pe} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho^{(0)} k^{(0)} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial x_j} \right), \quad (10)$$

$$p^{(0)}(t) = \rho^{(0)} T^{(0)}, \quad (11)$$

Paolucci S. Filtering of sound from the Navier-Stokes equations. SNL Livermore, CA, 1982.

1. Находим $T^{(n+1)}$, используя значения c_p , ρ и k с предыдущего шага n :

$$c_p^{(n)} \rho^{(n)} \left(\frac{\partial T^{(n+1)}}{\partial t} + u_j^{(n+1)} \frac{\partial T^{(n+1)}}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{Pe} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho^{(n)} k^{(n)} \frac{\partial T^{(n+1)}}{\partial x_j} \right). \quad (12)$$

Дискретизация производных по времени осуществляется по формуле “дифференцирования назад” с $k = 3$:

$$\frac{\partial T^{(n+1)}}{\partial t} = \sum_{j=0}^k \frac{b_j}{\Delta t} T^{(n+1-j)}, \quad (13)$$

где $b_0 = 11/6$, $b_1 = -18/6$, $b_2 = 9/6$, $b_3 = -2/6$, а Δt – постоянный шаг по времени. По обновленному полю температуры находятся c_p , ρ и k в момент $n + 1$. Стоит отметить, что значение скорости в конвективном слагаемом на $n + 1$ шаге получается при помощи экстраполяции по k предыдущим значениям (в нашем случае $k = 3$):

$$\mathbf{u}^{(n+1)} = \sum_{j=1}^k a_j \mathbf{u}^{(n+1-j)}, \quad (14)$$

где $a_1 = 3$, $a_2 = -3$, $a_3 = 1$ – коэффициенты, взятые из литературы.

Karniadakis G. E., Israeli M., and Orszag S. A. High-order splitting methods for the incompressible navier-stokes equations. JCP, 1991.

2. Из уравнения неразрывности (8) и уравнения состояния (11), которое сводится к однозначной связи ρ и T , можно получить следующее соотношение:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\rho c_p T} \left(\rho c_p \frac{DT}{Dt} \right), \quad (15)$$

где в скобках справа стоит левая часть уравнения (10), вместо которой можно подставить уже найденные выражения. Это позволяет определить дивергенцию скорости на $n + 1$ шаге.

3. Для удобства рассмотрим уравнение (9) в векторном операторном виде, при этом выделим нелинейный N и вязкий член L , соответственно:

$$\frac{\partial \mathbf{u}^{(n+1)}}{\partial t} = -\frac{\nabla p^{(n+1)}}{\rho^{(n+1)}} - \frac{1}{\rho^{(n+1)}} N(\mathbf{u}^{(n+1)}) + \frac{1}{Re} \frac{1}{\rho^{(n+1)}} L(\mathbf{u}^{(n+1)}), \quad (16)$$

$$L(\mathbf{u}^{(n+1)}) = \nabla \cdot \left[\mu^{(n+1)} \left(\nabla \mathbf{u}^{(n+1)} + \nabla \mathbf{u}^{T(n+1)} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}^{(n+1)}) \mathbf{I} \right) \right], \quad (17)$$

$$N(\mathbf{u}^{(n+1)}) = \rho^{(n+1)} (\mathbf{u}^{(n+1)} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{(n+1)}, \quad (18)$$

где верхний индекс T обозначает операцию транспонирования.

Nek5000. Временная дискретизация.

Для нелинейного слагаемого, так же как и для скорости в уравнении на температуру, используется экстраполяция по k предыдущим значениям:

$$N(\mathbf{u}^{(n+1)}) = \sum_{j=1}^k a_j N(\mathbf{u}^{(n+1-j)}).$$

Вязкое слагаемое преобразуем как:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{u}^{(n+1)}) &= \nabla \cdot \left[\mu^{(n+1)} \left(\nabla \mathbf{u}^{(n+1)} + \nabla \mathbf{u}^T{}^{(n+1)} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}^{(n+1)}) \mathbf{I} \right) \right] \\ &= \mu^{(n+1)} \left(\Delta \mathbf{u}^{(n+1)} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}^{(n+1)}) \right) + \\ &+ \nabla \mu^{(n+1)} \cdot \left(\nabla \mathbf{u}^{(n+1)} + \nabla \mathbf{u}^T{}^{(n+1)} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}^{(n+1)}) \mathbf{I} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

В итоге имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=0}^k b_j \mathbf{u}^{(n+1-j)} - \frac{b_0}{\Delta t} \mathbf{u}^* + \frac{b_0}{\Delta t} \mathbf{u}^* &= - \sum_{j=1}^k a_j (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^{(n-j+1)} - \\ - \frac{1}{\rho^{(n+1)}} \nabla p^{(n+1)} + \frac{1}{Re} \frac{\mu^{(n+1)}}{\rho^{(n+1)}} \left(\Delta \mathbf{u}^{(n+1)} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}^{(n+1)}) \right) + \\ + \frac{1}{Re} \frac{\nabla \mu^{(n+1)}}{\rho^{(n+1)}} \left(\nabla \mathbf{u}^{(n+1)} + \nabla \mathbf{u}^T{}^{(n+1)} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}^{(n+1)}) \mathbf{I} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

$$\frac{b_0}{\Delta t} \mathbf{u}^* + \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=1}^k b_j \mathbf{u}^{(n+1-j)} = - \sum_{j=1}^k a_j (\mathbf{u}^{(n+1-j)} \cdot \nabla \mathbf{u}^{(n+1-j)}). \quad (21)$$

4. Если вычесть из (20) уравнение (21) и взять от результата дивергенцию, то получим уравнение:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\frac{\nabla p^{(n+1)}}{\rho^{(n+1)}} \right) &= \frac{b_0}{\Delta t} (\nabla \cdot \mathbf{u}^* - \nabla \cdot \mathbf{u}^{(n+1)}) + \\ &+ \frac{1}{Re} \nabla \cdot \left[\frac{\mu^{(n+1)}}{\rho^{(n+1)}} \left(\Delta \mathbf{u}^{(n+1)} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}^{(n+1)}) \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{Re} \nabla \cdot \left[\frac{\nabla \mu^{(n+1)}}{\rho^{(n+1)}} \cdot \left(\nabla \mathbf{u}^{(n+1)} + \nabla \mathbf{u}^{T(n+1)} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}^{(n+1)}) \mathbf{I} \right) \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

$$\Delta \mathbf{u} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}). \quad (23)$$

Дивергенция поля скорости на шаге $n + 1$ уже известна, а ротор поля скорости экстраполируем уже известным образом:

$$(\nabla \times \mathbf{u})^{(n+1)} = \sum_{j=1}^k a_j (\nabla \times \mathbf{u})^{(n+1-j)} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \left(\frac{\nabla p^{(n+1)}}{\rho^{(n+1)}} \right) &= \frac{b_0}{\Delta t} (\nabla \cdot \mathbf{u}^* - \nabla \cdot \mathbf{u}^{(n+1)}) + \\
 &+ \frac{1}{Re} \nabla \cdot \left[\frac{\mu^{(n+1)}}{\rho^{(n+1)}} \left(\frac{4}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}^{(n+1)}) - \sum_{j=1}^k a_j (\nabla \times \mathbf{u})^{(n+1-j)} \right) \right] + \\
 &+ \frac{1}{Re} \nabla \cdot \left[\frac{\nabla \mu^{(n+1)}}{\rho^{(n+1)}} \cdot \left(\nabla \mathbf{u}^{(n+1)} + \nabla \mathbf{u}^{T(n+1)} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}^{(n+1)}) \mathbf{I} \right) \right],
 \end{aligned} \tag{25}$$

5. На последнем шаге подставляем найденное поле градиента давления в уравнение (20) на $\mathbf{u}^{(n+1)}$, которое теперь можно беспрепятственно решить. Стоит отметить, что во всех рассмотренных дифференциальных уравнениях главным является оператор Лапласа. Таким образом, необходимо рассмотреть способ дискретизации по пространству при помощи выбранного метода спектральных элементов на примере модельного уравнения Гельмгольца.

Nek5000. Пространственная дискретизация.

$$-\Delta u + \lambda u = f \quad \text{в } \Omega, \quad (26)$$

где область Ω является единичным отрезком $[-1, 1]$ (рассматривается одномерный случай для простоты), при этом $u = u_0$ на $\partial\Omega$, λ - параметр задачи, f - некоторая функция.

$$-\int_{\Omega} v \Delta u d\Omega + \lambda \int_{\Omega} u v d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega. \quad (27)$$

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega + \lambda \int_{\Omega} u v d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega. \quad (28)$$

$$u = \sum_{l=1}^N a_l \psi_l(x), \quad v = \sum_{m=1}^N b_m \psi_m(x), \quad (29)$$

$$\psi_i(x) = \prod_{i \neq j} \frac{x - \xi_j}{\xi_i - \xi_j}. \quad (30)$$

$$(1 - \xi^2) P'_N(\xi) = 0, \quad (31)$$

$$\sum_l (u_l \int_{\Omega} \nabla \psi_l \cdot \nabla \psi_m d\Omega + u_l \lambda \int_{\Omega} \psi_l \psi_m d\Omega) = \int_{\Omega} f \psi_m d\Omega. \quad (32)$$

$$\begin{aligned} & \sum_l (u_l \sum_n \rho_n \nabla \psi_l(\xi_n) \cdot \nabla \psi_m(\xi_n) + u_l \lambda \sum_n \rho_n \psi_l(\xi_n) \psi_m(\xi_n)) = \\ & = \sum_n \rho_n f \psi_m(\xi_n), \quad \text{для } m = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (33)$$

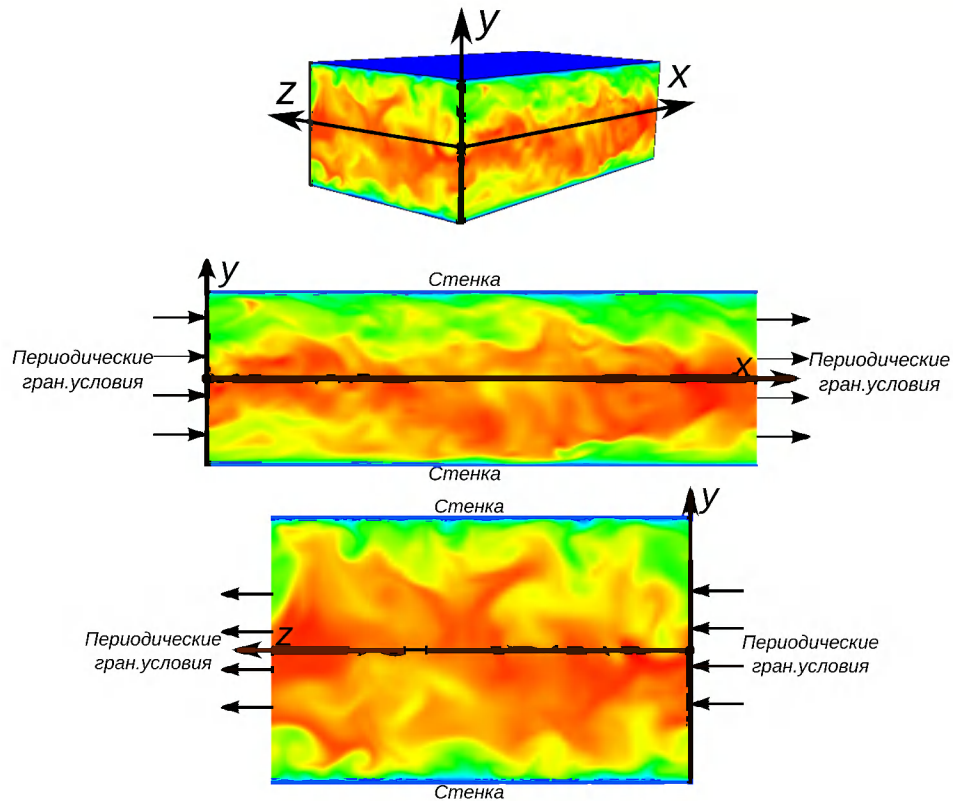
где ρ_n – это квадратурный вес точки ξ_n (вклад в интеграл).

$$(A + \lambda M)u_h = \tilde{f}, \quad (34)$$

где элементами матриц и векторов являются:

$$\begin{aligned} A_{lm} &= \sum_n \rho_n \nabla \psi_l(\xi_n) \cdot \nabla \psi_m(\xi_n), \\ M_{lm} &= \sum_n \rho_n \psi_l(\xi_n) \psi_m(\xi_n) = \rho_l \delta_{lm}, \\ (u_h)_l &= u(\xi_l), \\ \tilde{f}_m &= \sum_n \rho_n f \psi_m(\xi_n) = \rho_m f(\xi_n). \end{aligned} \quad (35)$$

Течение в плоском канале



$$L_x \times L_y \times L_z = 2\pi H \times 2H \times \pi H,$$

$$Re = UH/\nu = 2800$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_j^2} - \boxed{\frac{\partial \tau_{ij}^{sgs}}{\partial x_j}}, \quad (36)$$

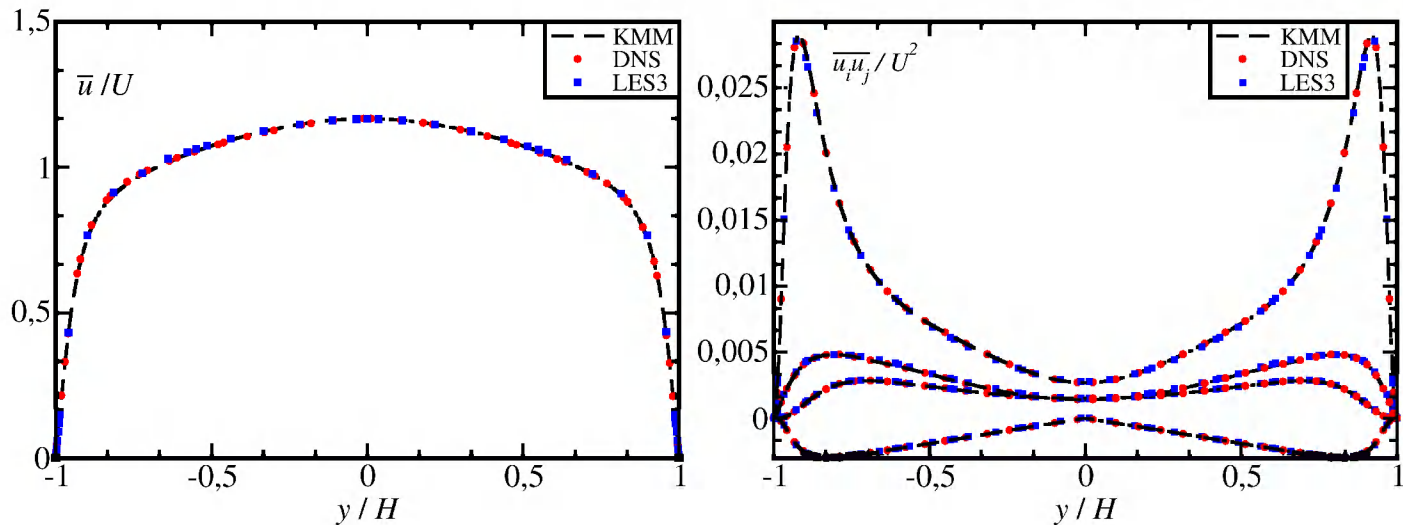
$\tau_{ij}^{sgs} = \widetilde{u_i u_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j$, где волна сверху соответствует отфильтрованным величинам.

$$\tau_{ij}^{sgs} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk}^{sgs} = -2(C_s \Delta)^2 \sqrt{2 \tilde{S}_{nm} \tilde{S}_{nm}} \tilde{S}_{ij}, \quad (37)$$

$$\tilde{S}_{ij} = (\partial \tilde{u}_i / \partial x_j + \partial \tilde{u}_j / \partial x_i) / 2. \quad (38)$$

| | DNS | LES1 | LES2 | LES3 |
|--------------------|-----------------------------|----------------------------|---------------------------|--------------------------|
| N_{se} | $30 \times 20 \times 25$ | $20 \times 14 \times 17$ | $15 \times 10 \times 12$ | $10 \times 6 \times 8$ |
| N_{points} | $211 \times 141 \times 176$ | $141 \times 99 \times 120$ | $106 \times 71 \times 85$ | $71 \times 43 \times 57$ |
| N_{total} (МЮИ.) | 5.2 | 1.7 | 0.6 | 0.17 |

Течение в плоском канале

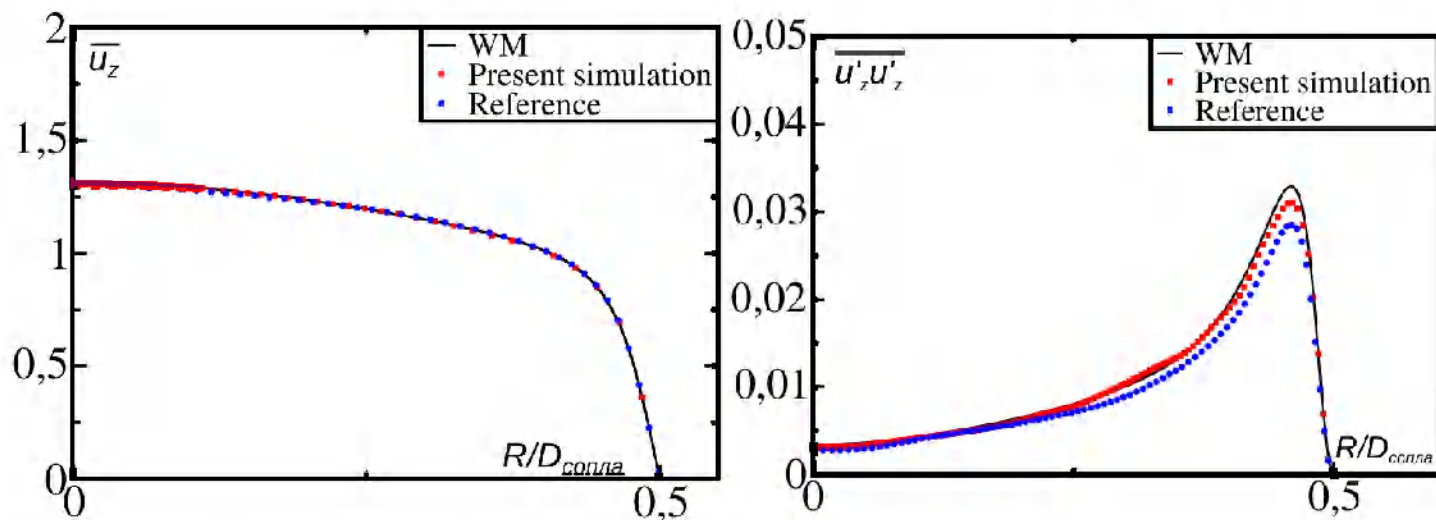


$$u_\tau = \sqrt{\nu \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y}}. \quad (39)$$

| | KMM | DNS | LES1 | LES2 | LES3 |
|----------|---------|---------|-----------------|-----------------|-----------------|
| u_τ | 0.06398 | 0.06397 | 0.06392 (-0.1%) | 0.06338 (-0.9%) | 0.06322 (-1.2%) |

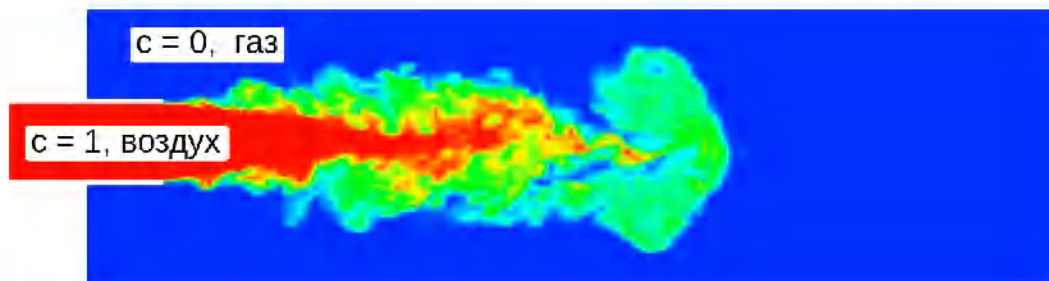
Kim J., Moin P., and Moser R. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *Journal of fluid mechanics*, 177:133–166, 1987.

Течение в периодической трубе: прошлые результаты



- 1) Wu X. and Moin P. A direct numerical simulation study on the mean velocity characteristics in turbulent pipe flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 608:81-112, 2008.
- 2) Mullyadzhyanov R., Abdurakipov S., and Hanjalic K. Helical structures in the near field of a turbulent pipe jet. *Flow, Turbulence and Combustion*, 98(2):367-388, 2017

Стратифицированная затопленная струя



$$\rho \left(\frac{\partial c}{\partial t} + u_j \frac{\partial c}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{ReSc} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho \frac{\partial c}{\partial x_j} \right), \quad (40)$$

$$c = m_{\text{возд}} / (m_{\text{газа}} + m_{\text{возд}}) \quad (41)$$

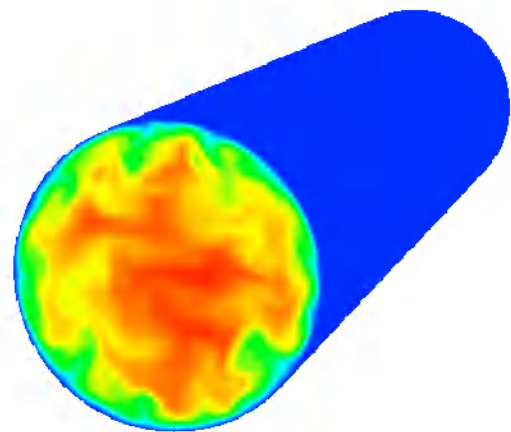
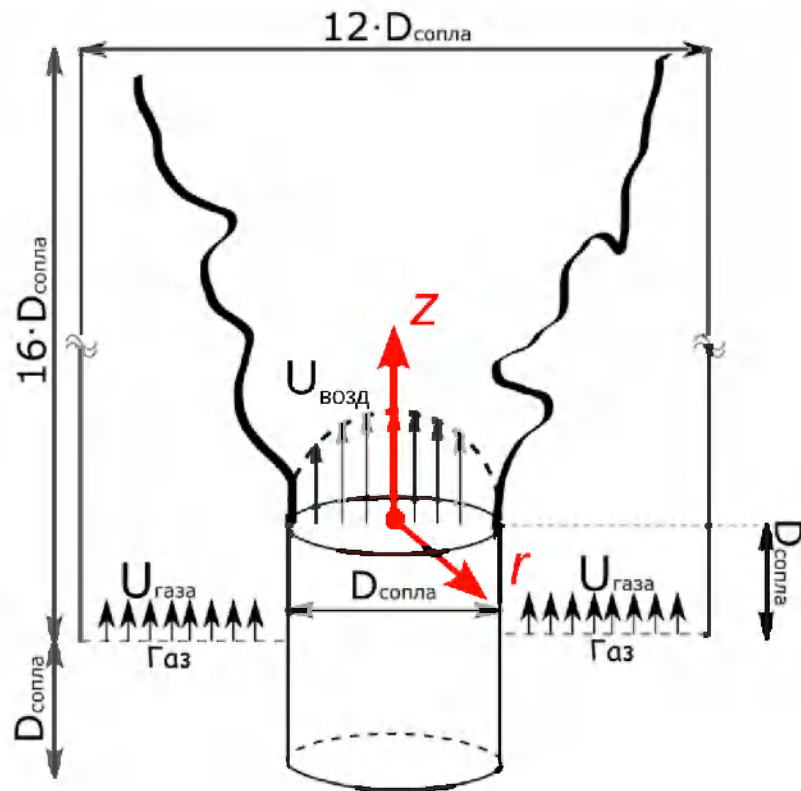
$$\rho = \frac{p^{(0)}}{TR_u} \frac{M_{\text{возд}} M_{\text{газа}}}{M_{\text{возд}} + c(M_{\text{газа}} - M_{\text{возд}})}, \quad (42)$$

$$\mu = \sum_{j=1}^n \frac{X_j \mu_j}{X_j + \sum_{k=1}^n X_k \Phi_{jk} - X_j \Phi_{jj}}, \quad (43)$$

| | ρ , кг/м ³ | $\mu \cdot 10^{-8}$, Па · сек | D , см ² /с | M , г/моль |
|-----------------|----------------------------|--------------------------------|--------------------------|--------------|
| Воздух | 1.293 | 1812 | — | 28.98 |
| He | 0.179 | 1946 | 0.62 | 4.002 |
| CO ₂ | 1.977 | 1463 | 0.21 | 44.01 |

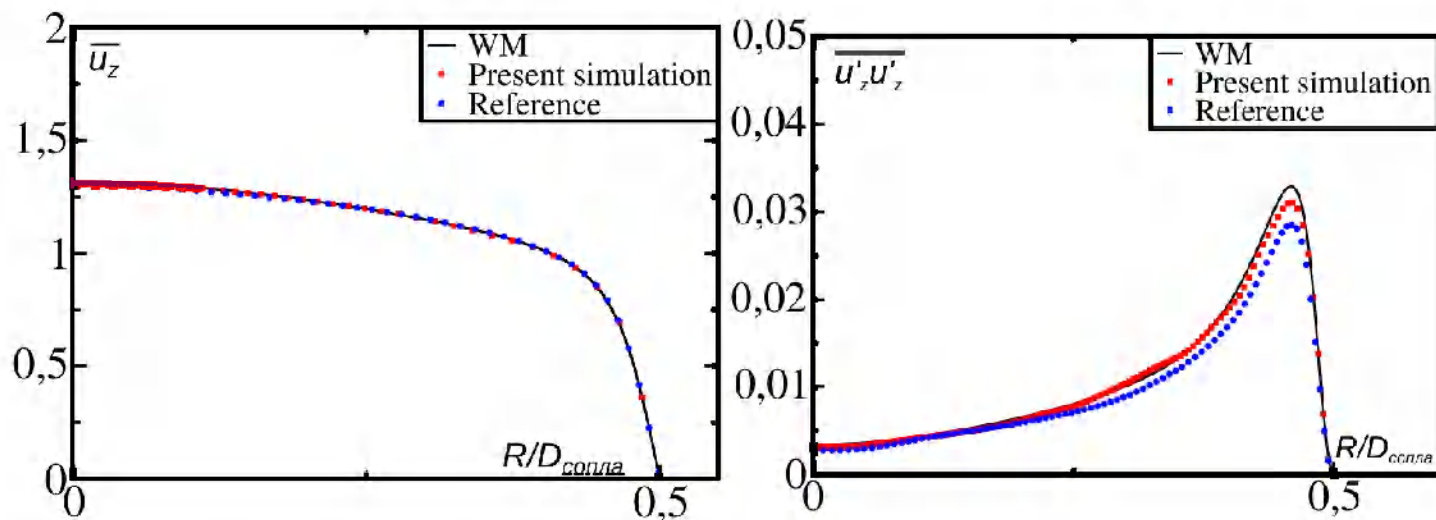
Gordon S. and McBride B. J. Computer program for calculation of complex chemical equilibrium compositions and applications. part 1: Analysis. 1994.

Стратифицированная затопленная струя



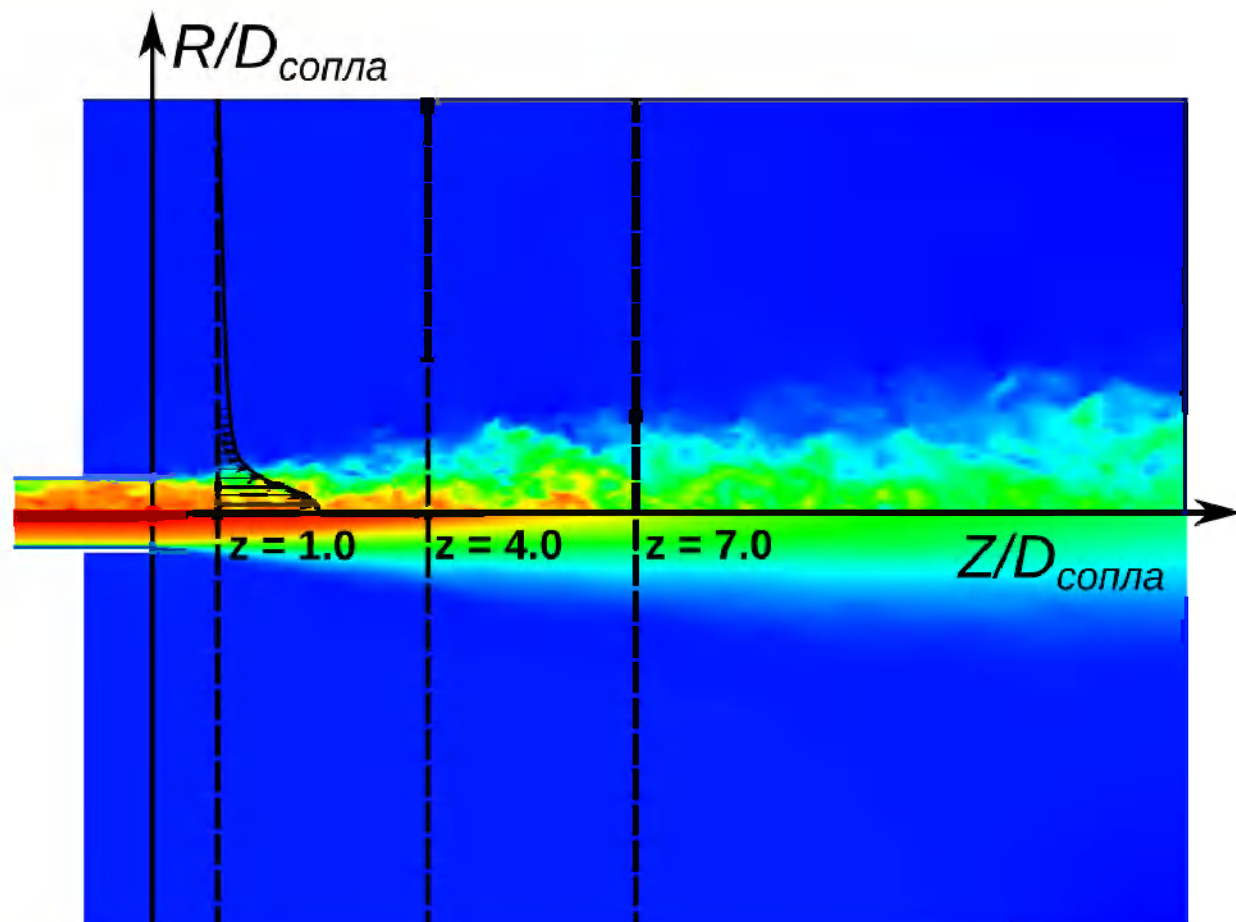
$Re = 5300$, построенное по U и $D_{\text{сопла}}$. 655 тыс. узлов для подводщей трубы и более 15.8 млн. для основной вычислительной области.

Стратифицированная затопленная струя

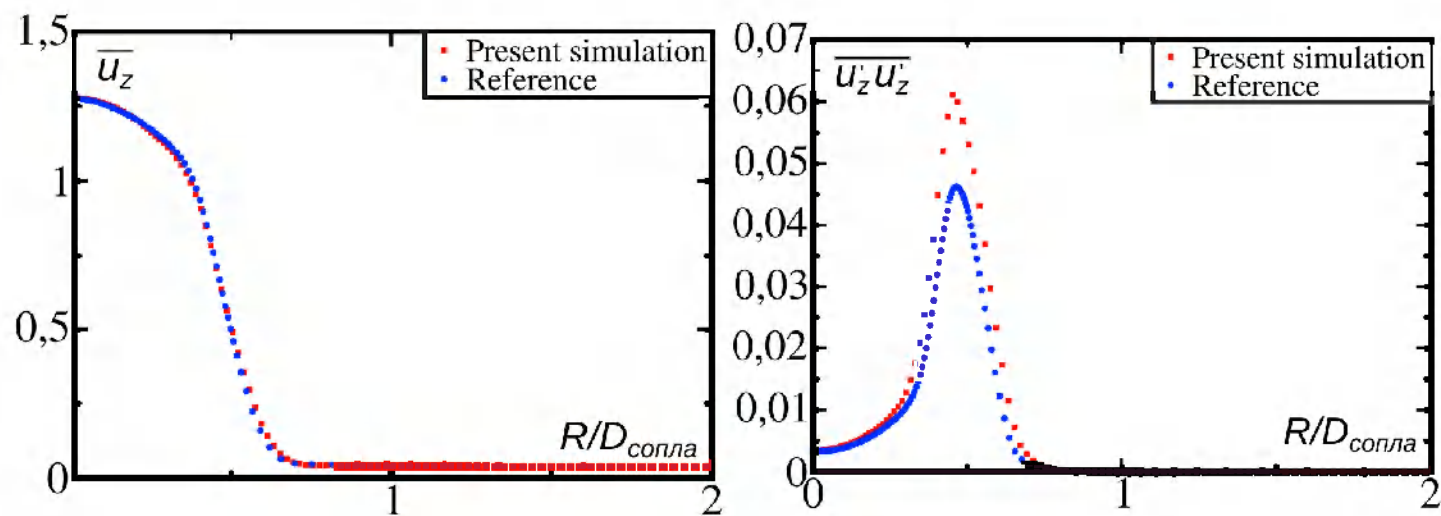


- 1) Wu X. and Moin P. A direct numerical simulation study on the mean velocity characteristics in turbulent pipe flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 608:81-112, 2008.
- 2) Mullyadzhyanov R., Abdurakipov S., and Hanjalic K. Helical structures in the near field of a turbulent pipe jet. *Flow, Turbulence and Combustion*, 98(2):367-388, 2017

Стратифицированная затопленная струя

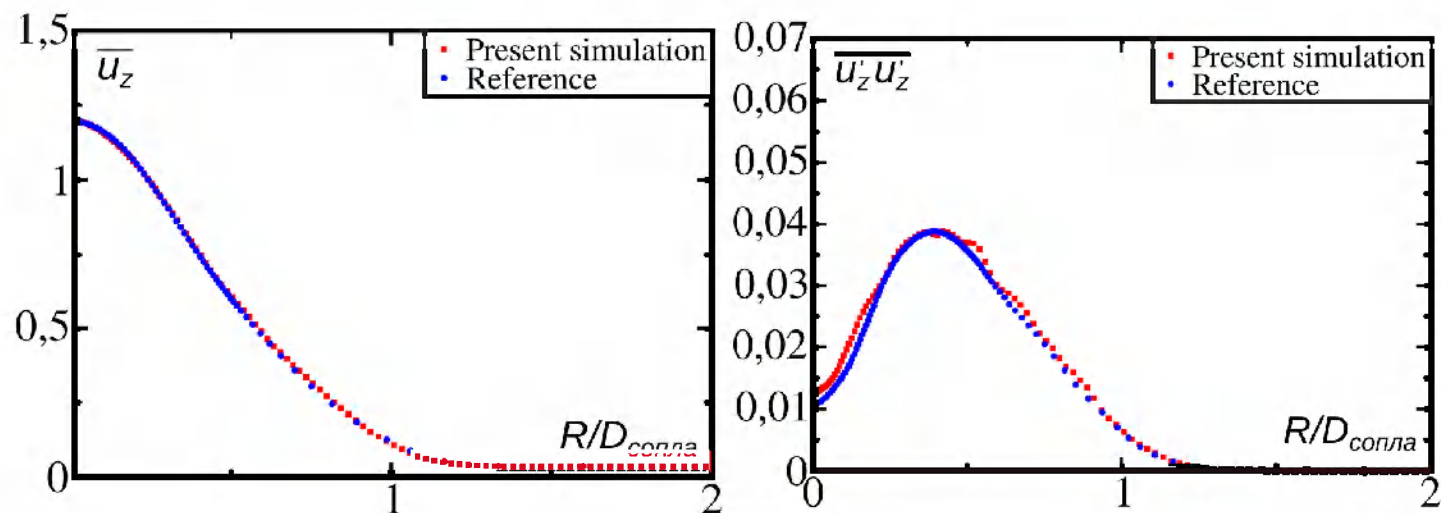


Стратифицированная затопленная струя



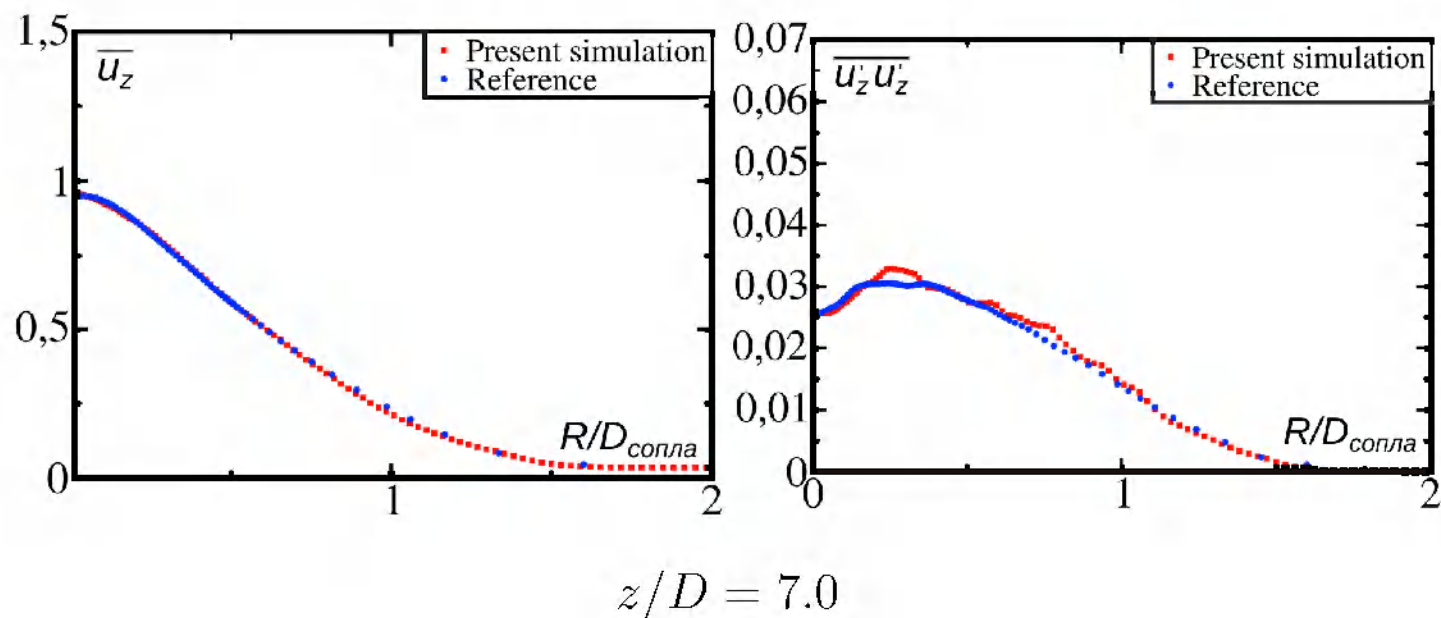
$$z/D = 1.0$$

Стратифицированная затопленная струя

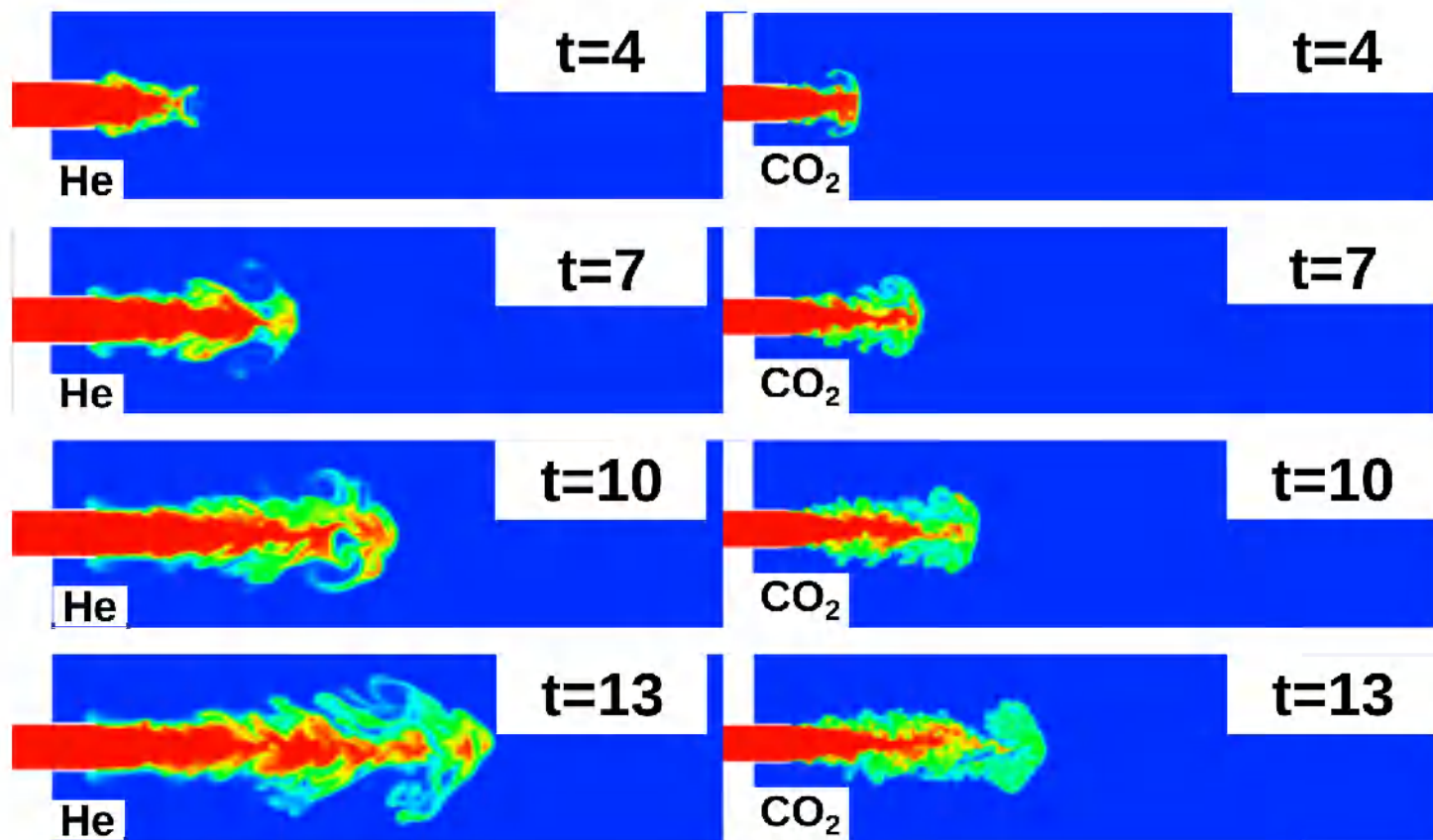


$z/D = 4.0$

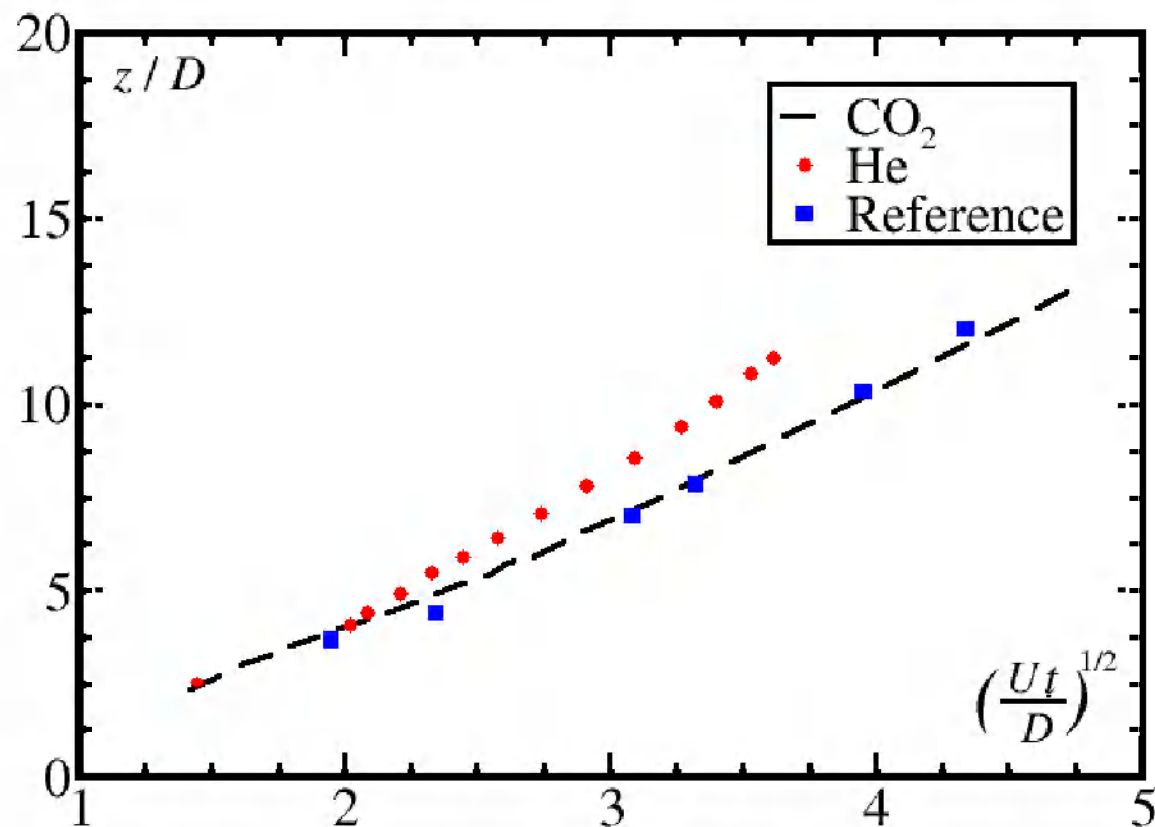
Стратифицированная затопленная струя



Стратифицированная затопленная струя

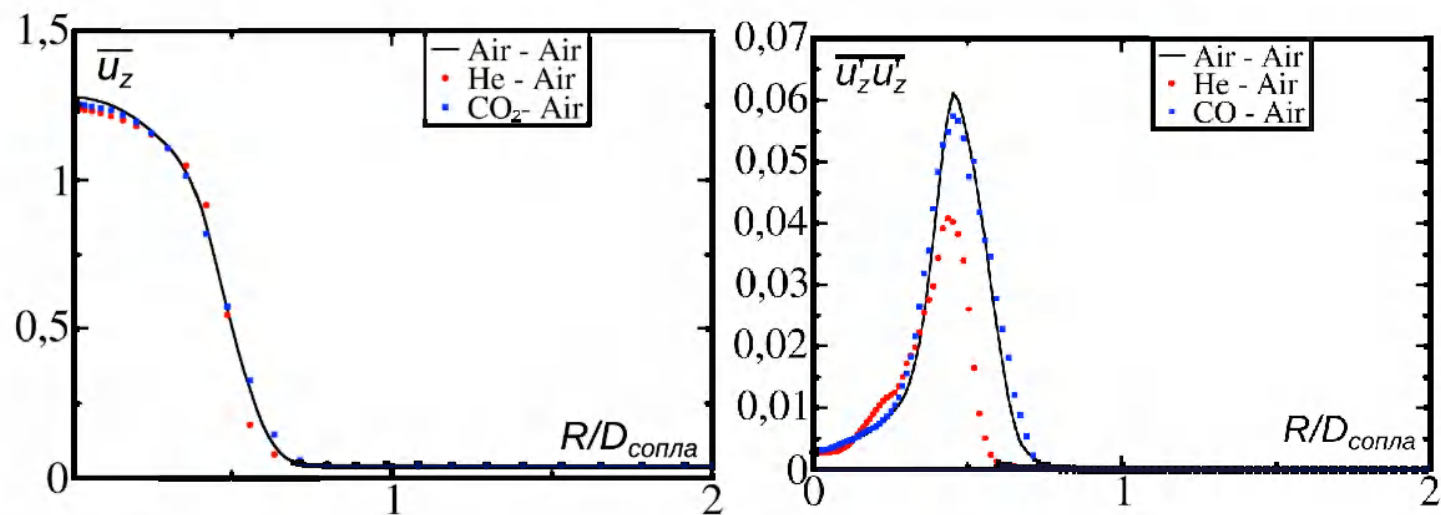


Стратифицированная затопленная струя



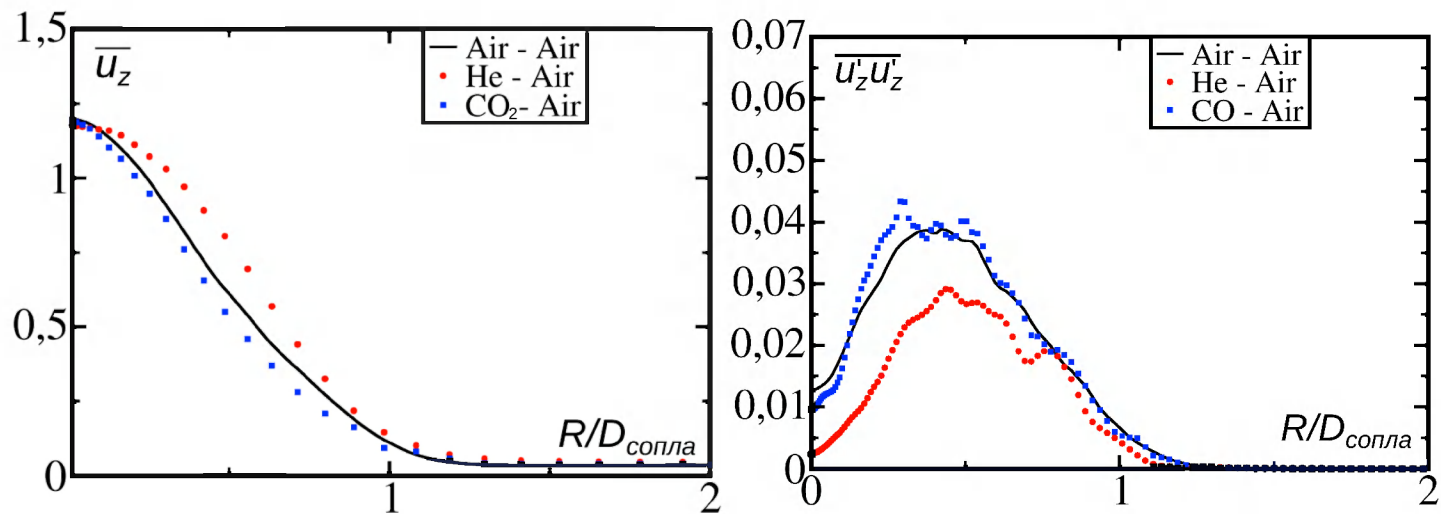
Ghasemi A., Pereira A., and Li X. Large eddy simulation of compressible subsonic turbulent jet starting from a smooth contraction nozzle. *Flow, Turbulence and Combustion*, 98(1):83–108, 2017.

Стратифицированная затопленная струя



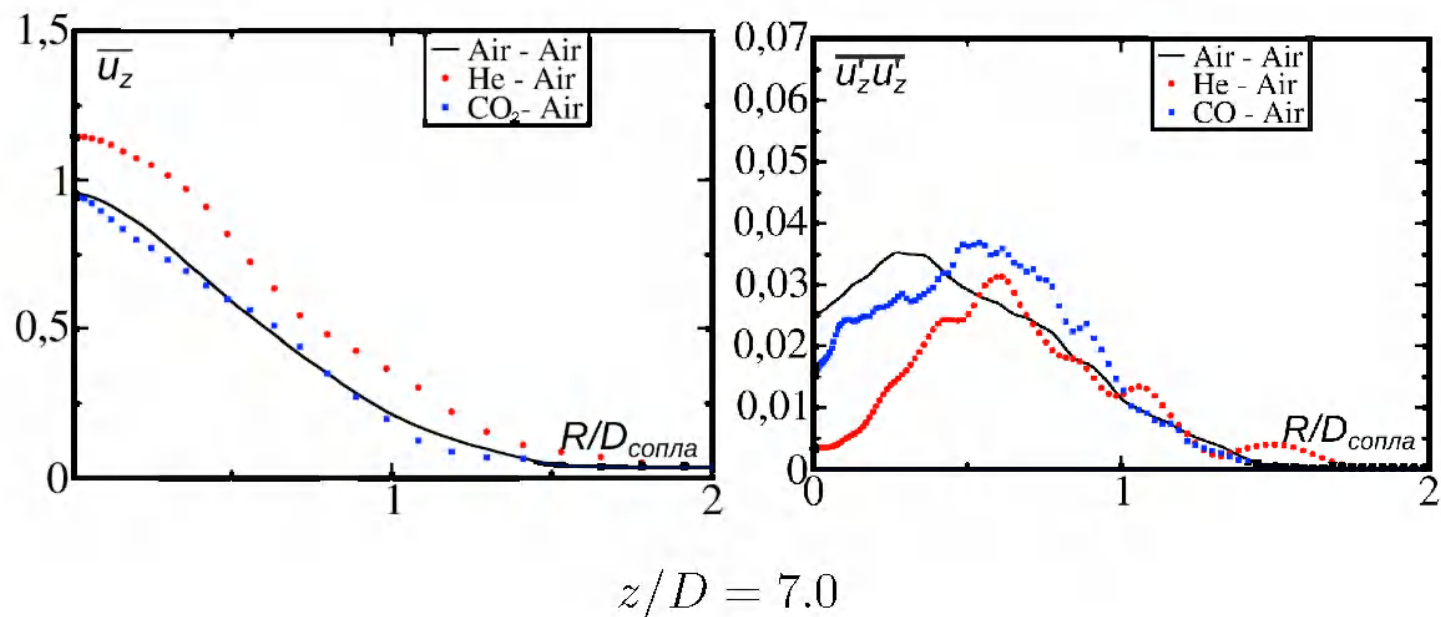
$$z/D = 1.0$$

Стратифицированная затопленная струя



$$z/D = 4.0$$

Стратифицированная затопленная струя



Баланс турбулентной кинетической энергии

$$\frac{Dk}{Dt} = P^k + \epsilon + \Pi^k + D^k + T^k \quad (44)$$

$$k = (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})/2 \quad (45)$$

$$P^k = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} \quad (46)$$

$$\epsilon = -\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \quad (47)$$

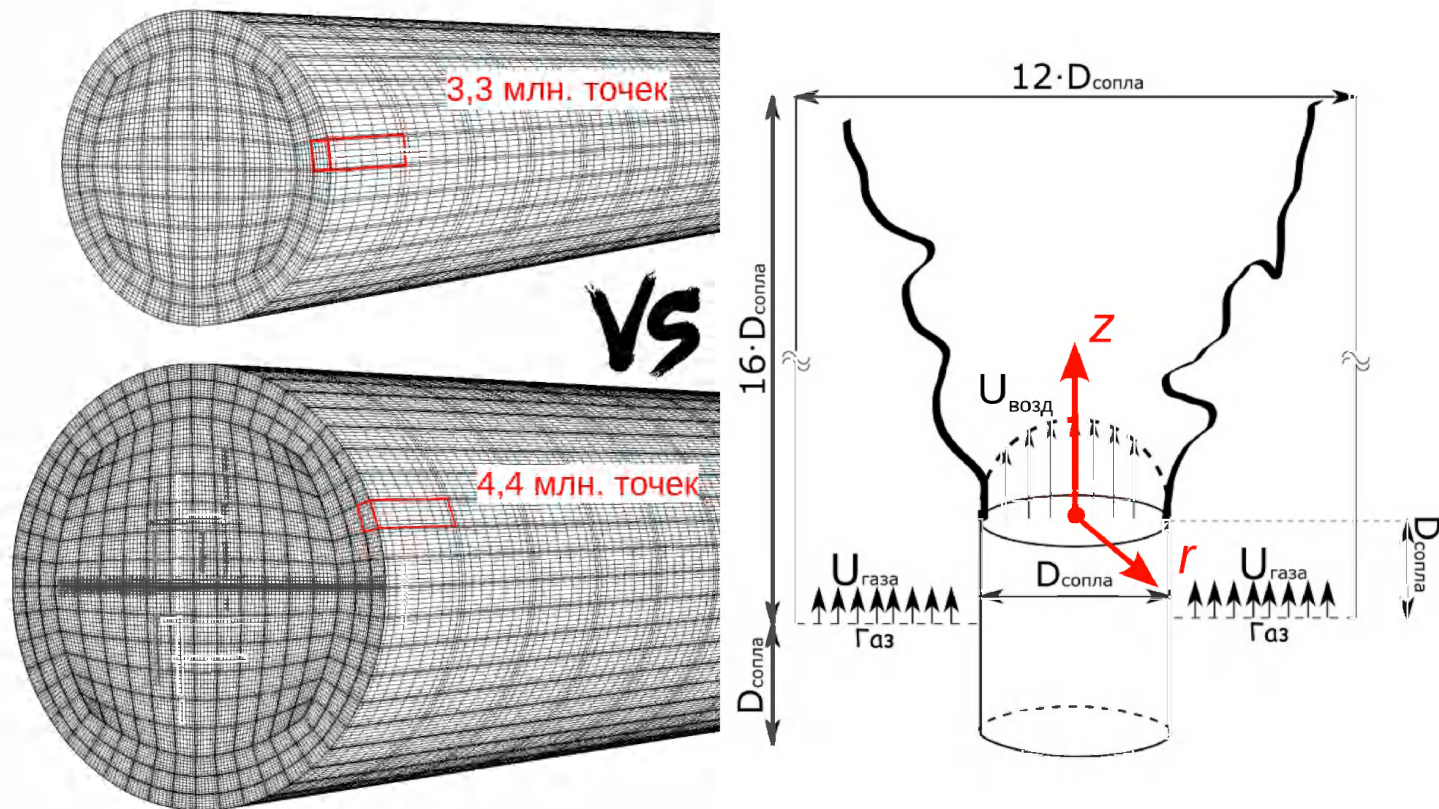
$$\Pi^k = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p' u'_i}}{\partial x_i} \quad (48)$$

$$D^k = \frac{\nu}{2} \frac{\partial^2 \overline{u'_i u'_i}}{\partial x_j^2} \quad (49)$$

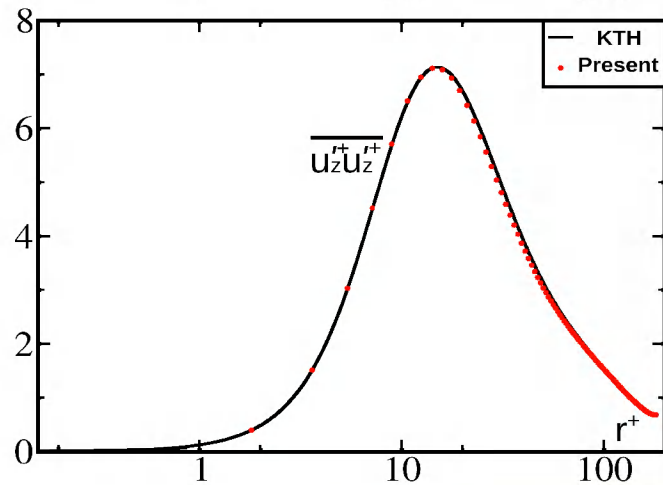
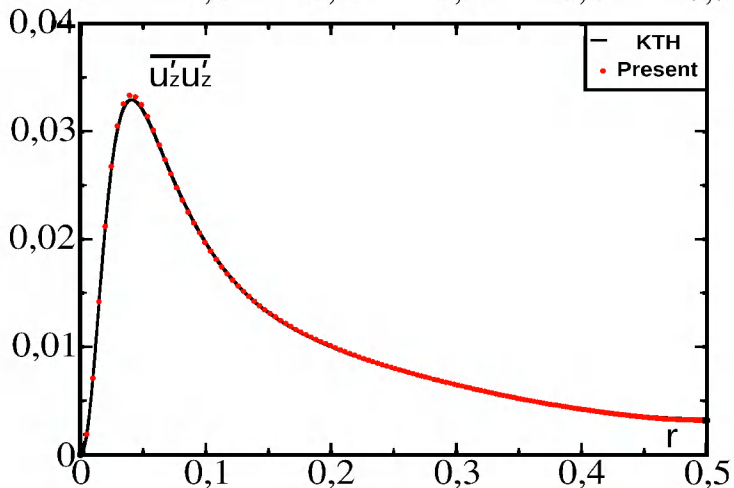
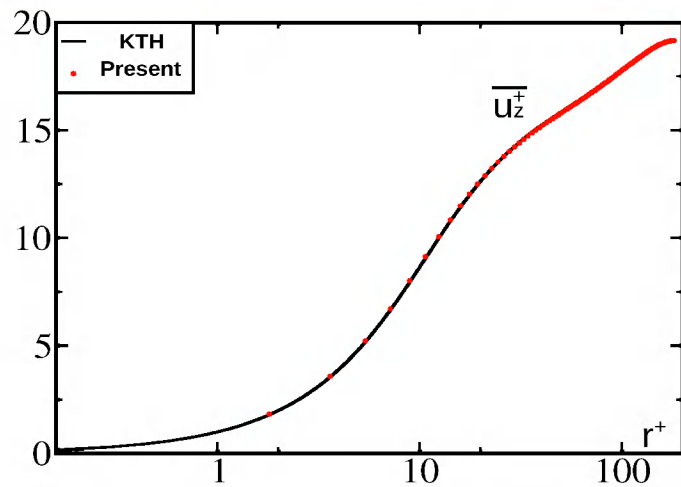
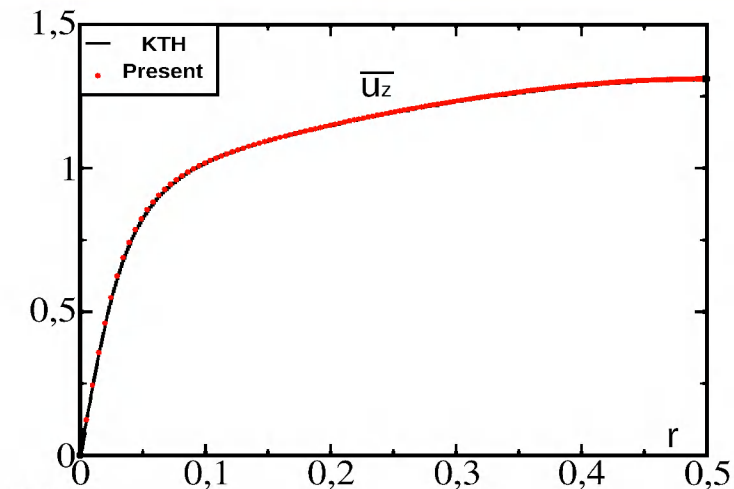
$$T^k = -\frac{1}{2} \frac{\partial \overline{u'_i u'_i u'_j}}{\partial x_j}, \quad (50)$$

- k - турбулентная кинетическая энергия,
- P^k - производство турбулентной кинетической энергии,
- ϵ - диссипация,
- Π^k - диффузия за счет пульсаций давления,
- D^k - диффузия за счет сил внутреннего трения (молекулярной вязкости),
- T^k - диффузия за счет пульсационной компоненты скорости.

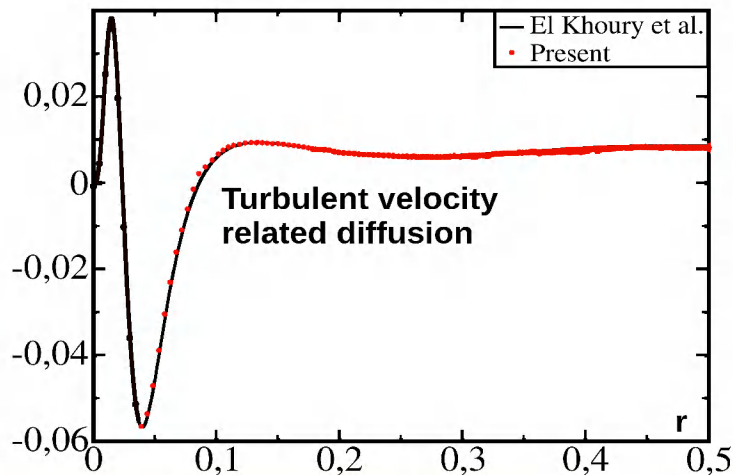
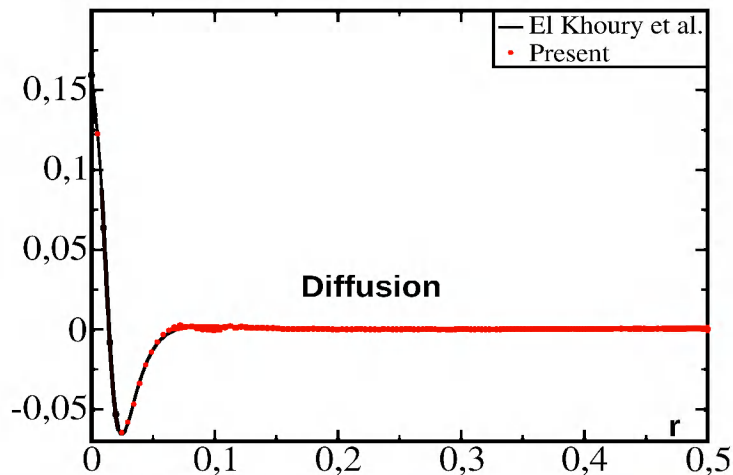
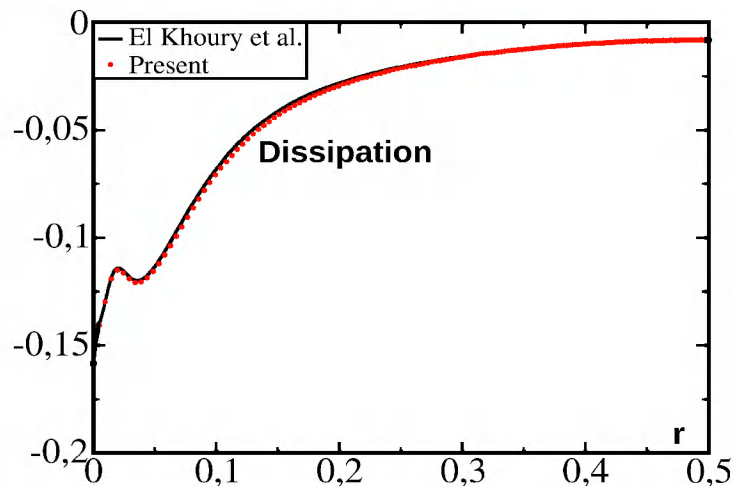
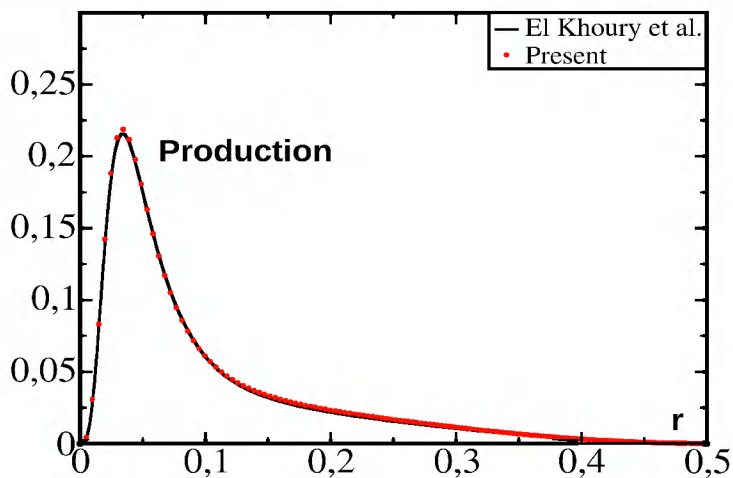
Построение новой вычислительной сетки



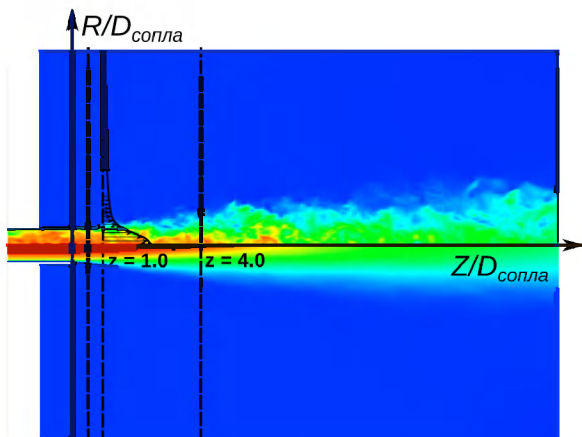
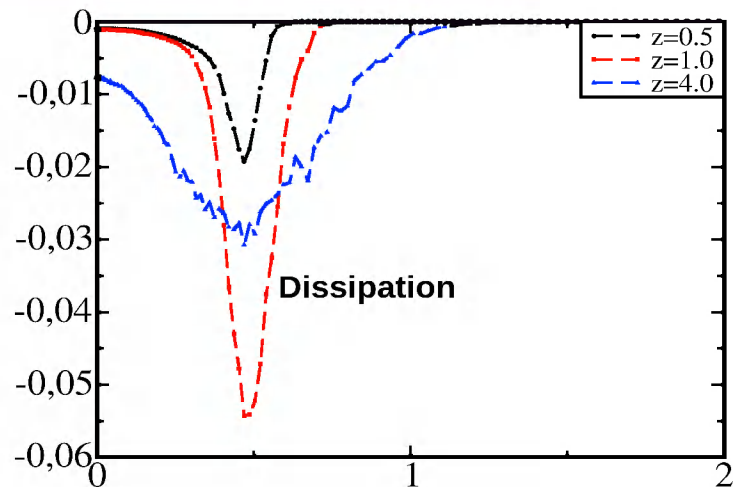
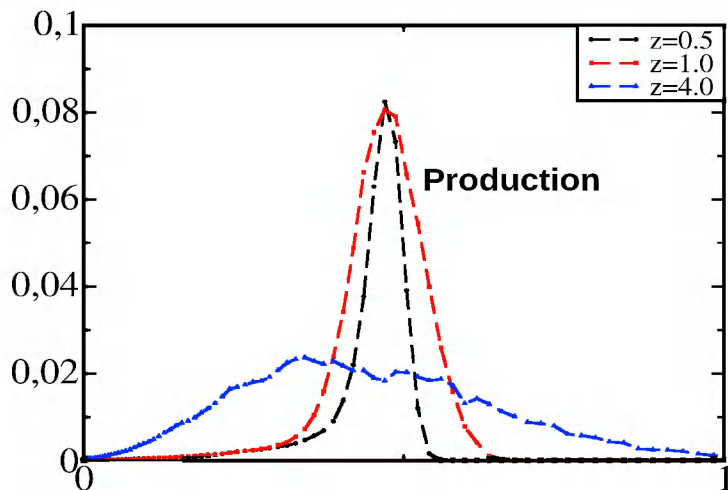
Полученные результаты: течение в периодической трубе



Полученные результаты: течение в периодической трубе



Полученные результаты: струя воздуха



Pope S. B. Turbulent flows. – 2001.

Баланс турбулентной кинетической энергии

$$0 = C^{\bar{k}} + P^{\bar{k}} + M^{\bar{k}} + T^{\bar{k}} + \Phi^{\bar{k}} + \epsilon^{\bar{k}}$$

$$C^{\bar{k}} = -\frac{\partial}{\partial x_n} (\tilde{u}_n \bar{\rho} \bar{k})$$

$$P^{\bar{k}} = -\bar{\rho} \tilde{R}_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + a_i \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i}$$

$$M^{\bar{k}} = -a_i \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j}$$

$$T^{\bar{k}} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{R}_{jii} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i'' \tau_{ji}'} - \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_i'' P'}$$

$$\Phi^{\bar{k}} = \overline{P' \frac{\partial u_i''}{\partial x_i}}$$

$$\epsilon^{\bar{k}} = -\overline{\frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \tau_{ji}'}$$

- $\tilde{\cdot}$ - осреднение по Фавру, $\tilde{u} = (\overline{\rho u})/\bar{\rho}$
- $u = \bar{u} + u' = \tilde{u} + u''$
- $\tilde{R}_{ij} = \frac{1}{\bar{\rho}} \overline{\rho u_i'' u_j''}$
- $a_i \equiv -\overline{u_i''} = \overline{\rho u_i''}/\bar{\rho}$
- \bar{k} - турбулентная кинетическая энергия,
- $C^{\bar{k}}$ - конвекция,
- $P^{\bar{k}}$ - производство,
- $M^{\bar{k}}$ - молекулярный сдвиг,
- $T^{\bar{k}}$ - транспорт,
- $\Phi^{\bar{k}}$ - растяжение давления,
- $\epsilon^{\bar{k}}$ - диссипация

- Было проведено прямое численное моделирование для течения в периодической трубе и струйного течения постоянной плотности.
- Был исследован баланс турбулентной кинетической энергии для случая постоянной плотности в периодической трубе и затопленной струи воздуха, выходящей в пространство, затопленное воздухом при числе Рейнольдса $Re = 5300$
- Проанализированы уравнения баланса турбулентной кинетической энергии для случая переменной плотности; расчеты планируется запустить в ближайшее время

Спасибо за внимание!