

Омский филиал Федерального государственного бюджетного
учреждения науки Института математики им. С.Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук

На правах рукописи



ВЕРЕМЧУК Наталья Сергеевна

**МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ РАЗМЕЩЕНИЯ
ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ ОБЪЕКТОВ НА ПЛОСКОСТИ С
ЗАПРЕЩЕННЫМИ ЗОНАМИ**

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор
Забудский Г.Г.

Омск – 2017

Оглавление

Введение	4
1 Модели и методы решения задач размещения	15
1.1 Построение моделей	15
1.2 Классификация задач	24
1.3 Точечные объекты	28
1.4 Габаритные объекты	36
2 Размещение точечных объектов с минимаксным критерием на плоскости с запрещенными зонами	39
2.1 Постановка и подходы к решению	39
2.2 Свойства и модель целочисленного программирования	43
2.3 Алгоритм ветвей и границ и результаты вычислительных экспериментов	51
3 Размещение прямоугольных объектов с минисуммным критерием на линиях с запрещенными зонами	55
3.1 О размещении габаритных объектов	56
3.2 Постановка и свойства задачи на линии	60
3.3 Алгоритмы решения задачи на линии и результаты вычислительных экспериментов	67
3.4 Задача на линиях и подходы к решению	84
Заключение	91

Литература	93
Приложение А	110
Приложение В	112

Введение

Актуальность темы. Задачи оптимизации связаны с построением моделей и разработкой эффективных алгоритмов решения. Их актуальность обусловлена широким внедрением в практику и необходимостью развития и совершенствования методов оптимизации с использованием, в частности, целочисленного программирования и комбинаторного анализа [3, 4, 15, 38, 42, 53, 56, 57]. Исследование и решение задач оптимального размещения объектов является одним из интенсивно развивающихся направлений в области оптимизации. Это отражается в множестве научных публикаций. Среди них можно отметить работы В.Л. Береснева, Э.Х. Ги мади, В.Т. Дементьева, Г.Г. Забудского, Л.А. Казаковцева, А.А. Колоколова, А.В. Кононова, Ю.А. Кочетова, А.В. Панюкова, R.L. Francis, S. Nakimi, K. Klamroth, G.O. Wesolowsky [2, 18, 19, 39, 40, 47, 48, 92, 104, 109–111, 129, 132]. Такие задачи необходимо решать в различных сферах практической деятельности: при проектировании генеральных планов предприятий и печатных плат, расстановке технологического оборудования в цехах, определении мест расположения пунктов обслуживания и т.д. В настоящее время ведутся исследования новых постановок задач, строятся новые модели с учетом различных требований, совершенствуются классические методы, разрабатываются точные и приближенные алгоритмы решения.

Степень разработанности темы. В зависимости от наличия связей между объектами в оптимальном размещении можно выделить два

типа задач: размещения–распределения и размещения взаимосвязанных объектов. Для первого типа связи между объектами устанавливаются в процессе их решения. Например, при размещении пунктов обслуживания (склады, телекоммуникационные узлы) к ним прикрепляются клиенты (торговые точки, пользователи услуг связи), в результате чего устанавливаются связи. Наиболее известные представители таких задач: размещение предприятий, задачи о p -медиане и p -центре. Заметный вклад в их исследование внесли В.Л. Береснев, Э.Х. Гимади, А.А. Колоколов, Ю.А. Кочетов, S. Nakimi, O. Kariv и ряд других авторов.

В задачах второго типа необходимо найти места расположения объектов в некоторой области с заданной структурой связей между объектами, при условии выполнения определенных ограничений. Например, при размещении оборудования нефтехимического предприятия связи могут быть трубопроводы, соединяющие единицы технологического оборудования между собой. Одними из наиболее известных задач такого типа являются классическая задача Вебера и квадратичная задача о назначениях. Разработкой этой проблематики занимались Г.Г. Забудский, А.В. Панюков, С.И. Сергеев, И.Х. Сигал, В.А. Трубин, R.L. Francis, G.O. Wesolowsky и другие авторы.

Первые исследования задач оптимального размещения взаимосвязанных объектов относят к XVII веку, когда П. Ферма сформулировал задачу, известную сейчас как задача Вебера: найти такую точку на плоскости, чтобы сумма расстояний от нее до трех фиксированных точек была минимальной. Задача была решена геометрически Э. Торичелли. Т. Симпсон обобщил задачу на случай, когда фиксированные объекты имеют веса. В начале XX века Г. Вебер использовал аналогичную модель для определения оптимального расположения фабрики при заданных точках размещения ресурсов [128]. С развитием исследования операций и математической кибернетики эти задачи стали активно изучаться

архитекторами, экономистами, инженерами, географами и другими специалистами [16, 37, 115, 129].

В данной работе исследуются задачи размещения взаимосвязанных объектов в областях с запрещенными зонами, точечных на плоскости с минимаксным критерием (минимаксная) и прямоугольных на параллельных линиях с критерием минимума суммарной стоимости связей (минисуммная). Запрещенные зоны — это области, в которых не допускается размещение объектов по каким-либо причинам. Примерами запрещенных зон могут быть как естественные преграды (горы, реки, озера), так и искусственные сооружения (здания, оборудование, санитарные зоны).

В литературе много работ, в которых рассматриваются задачи размещения без запрещенных зон. Например, исследованию такой задачи с минимаксным критерием посвящены работы [74, 85, 112]. В [112] введением дополнительного параметра задача сводится к задаче линейного программирования (ЛП). С ограничениями на максимально допустимые расстояния эта задача рассмотрена в [74]. Линейным преобразованием осуществляется переход от метрики l_1 к l_∞ и задача декомпозируется на две по координатам x и y . Двойственная к каждой из которых интерпретируется в виде сетевой: определить в сети поток максимальной общей стоимости. В работе [85] такая задача сводится к поиску кратчайшего пути в сети, длины дуг которой линейно зависят от параметра.

Без учета запрещенных зон минисуммная задача исследовалась разными авторами [80, 82]. Для прямоугольной и евклидовой метрик она принадлежит классу задач выпуклого программирования [55, 86, 130]. В [55] предложен полиномиальный алгоритм решения задачи с прямоугольной метрикой, состоящий в решении последовательности задач о максимальном потоке. В работе [70] решение такой задачи сводится к нахождению потока минимальной стоимости в специально построенной

сети, а в [117] ее решение находится с помощью построения последовательности сетей и нахождения в них минимальных разрезов.

Несмотря на множество работ, посвященных задачам размещения взаимосвязанных объектов, недостаточно исследованы задачи с запрещенными зонами. Как правило, в литературе рассматриваются задачи с одной запрещенной зоной, либо произвольным их числом и одним размещаемым объектом, либо находятся места размещения объектов, а далее решается задача прокладки связей между ними с учетом барьеров (задача трассировки) [62, 63, 68, 69, 94, 99].

Недостаточно изучены задачи с запрещенными зонами для разногабаритных объектов с условиями регулярности размещения, например, вдоль параллельных линий. Поскольку в общей постановке такие задачи являются NP -трудными, то представляются перспективными их исследование в следующих направлениях: построение новых моделей, исследование области допустимых решений, применение декомпозиционного подхода, в котором решение исходной задачи разбивается на ряд задач меньшей размерности, разработка алгоритмов точного и приближенного решений.

Цель работы: построение моделей и разработка алгоритмов решения задач размещения взаимосвязанных объектов на плоскости с запрещенными зонами.

С учетом поставленной цели решались следующие задачи.

1. Построить математические модели целочисленного программирования и исследовать свойства задачи размещения взаимосвязанных прямоугольных объектов с критерием минимума суммарной стоимости связей на параллельных линиях с запрещенными зонами.
2. Разработать алгоритмы точного и приближенного решения указанной задачи с использованием найденных свойств.
3. Исследовать свойства и разработать алгоритмы решения задачи раз-

мещения взаимосвязанных точечных объектов с минимаксным критерием на плоскости с запрещенными зонами.

4. Создать программное обеспечение и провести экспериментальное исследование разработанных алгоритмов, в том числе, с применением известных программных продуктов.

Основные результаты

1. Для задачи размещения взаимосвязанных прямоугольных объектов на параллельных линиях с запрещенными зонами и критерием минимума суммарной стоимости связей:
 - (а) построены новые математические модели целочисленного линейного программирования;
 - (б) предложен декомпозиционный подход с помощью сведения решения исходной непрерывной задачи к решению серии дискретных задач одинаковой структуры меньшей размерности;
 - (в) разработаны комбинаторные алгоритмы поиска приближенного решения, локального и глобального оптимумов.
2. Для задачи размещения взаимосвязанных точечных объектов на плоскости с запрещенными зонами и минимаксным критерием разработан алгоритм ветвей и границ, в котором сокращен перебор вариантов решений на основе доказанного свойства о сужении области допустимых решений при поиске оптимума.
3. Создан программный комплекс, в котором реализованы предложенные алгоритмы. Проведено экспериментальное исследование эффективности решения задач для прямоугольных и точечных объектов с помощью указанных алгоритмов и применения построенных моделей целочисленного линейного программирования и пакета IBM ILOG CPLEX.

Научная новизна. Все результаты диссертации снабжены строгими математическими формулировками и доказательствами, корректным использованием методов математического моделирования, дискретной оптимизации, целочисленного программирования, подтверждением теоретических результатов численными экспериментами, а их новизну раскрывают следующие аргументы (по каждому основному результату).

1. Для задачи размещения взаимосвязанных прямоугольных объектов на параллельных линиях с запрещенными зонами и критерием минимума суммарной стоимости связей построены математические модели целочисленного линейного программирования из п. 1 (а), позволяющие использовать для решения пакеты прикладных программ. Применение подхода из п. 1 (б) дает возможность декомпозировать исходную задачу на задачи меньшей размерности, для решения которых можно применять один и тот же алгоритм. Алгоритмы решения задачи из п. 1 (в) разработаны впервые.
2. Алгоритм размещения взаимосвязанных точечных объектов на плоскости с запрещенными зонами и минимаксным критерием из п. 2 с использованием свойства сужения области допустимых решений построен впервые и позволяет сократить время поиска оптимального решения.
3. Создан программный комплекс из п. 3 с реализацией предложенных алгоритмов, эффективность которых подтверждена численными экспериментами с применением построенных моделей целочисленного линейного программирования и пакета IBM ILOG CPLEX.

Методы исследований. В работе используются методы математического моделирования, дискретной оптимизации, целочисленного программирования, теория вычислительной сложности, методология экспериментальных исследований с применением вычислительной техники и па-

кетов прикладных программ.

Теоретическая значимость и практическая ценность. Теоретическая значимость работы заключается в следующем. Предложенные математические модели развивают теоретические аспекты моделирования оптимального размещения взаимосвязанных объектов с использованием дискретной оптимизации и целочисленного программирования. Разработанные алгоритмы способствуют развитию численных методов решения указанного класса задач на основе использования декомпозиционного подхода.

Практическая ценность работы состоит в том, что построенные модели, разработанные алгоритмы и созданный программный комплекс могут применяться для решения прикладных задач в области автоматизированного проектирования генеральных планов предприятий, размещения оборудования в цехах, расположения пунктов обслуживания и т.д. Кроме того, результаты исследования могут быть применены при написании методических пособий по проектированию схем размещения зданий, сооружений и технологического оборудования.

На защиту выносятся совокупность результатов по построению моделей и решению задач размещения взаимосвязанных прямоугольных объектов с критерием минимума суммарной стоимости связей на параллельных линиях и точечных объектов с минимаксным критерием на плоскости с запрещенными зонами, включая: 1) математические модели целочисленного линейного программирования размещения прямоугольных объектов на параллельных линиях с запрещенными зонами; 2) свойства задач, позволяющие использовать декомпозиционный подход, уменьшить область допустимых решений; 3) алгоритмы поиска приближенного решения и нахождения локального и глобального оптимумов; 4) комплекс программ с реализацией указанных алгоритмов.

Личный вклад автора. Постановки задач предложены научным

руководителем. Построение математических моделей и разработка алгоритмов решения задач осуществлены совместно. Создание программного комплекса и проведение вычислительных экспериментов получены соискателем лично. Конфликт интересов с соавторами отсутствует.

Апробация результатов исследования. Результаты диссертации докладывались на XII, XVI Всероссийских конференциях “Математическое программирование и приложения” (г. Екатеринбург, 2003, 2015), VIII, IX Международных конференциях “Дискретная оптимизация и исследование операций” (г. Новосибирск, 2013, г. Владивосток, 2016), XVI, XVII Байкальских Международных школах–семинарах “Методы оптимизации и их приложения” (г. Иркутск, 2014, с. Максимиха, Бурятия, 2017), V International Conference on Optimization Methods and Applications “Optimization and Applications” (Petovac, Montenegro, 2014), XV Международной научно–инновационной конференции аспирантов, студентов и молодых ученых с элементами научной школы “Теоретические знания — в практические дела” (г. Омск, 2014), VI Международной конференции “Проблемы оптимизации и экономические приложения” (г. Омск, 2015), III Региональной конференции магистрантов, аспирантов и молодых ученых по физике и математике “ФМ ОмГУ 2015” (г. Омск, 2015), Международной научно–практической конференции “Архитектура, строительство, транспорт” (г. Омск, 2015), IV Региональной конференции магистрантов, аспирантов и молодых ученых по физике, математике и химии “ФМХ ОмГУ 2016” (г. Омск, 2016), X Международной IEEE научно–технической юбилейной конференции “Динамика систем, механизмов и машин” (г. Омск, 2016), а также на научных семинарах “Математическое моделирование и дискретная оптимизация” в Омском филиале Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (г. Омск, 2015–2017), “Математические модели принятия решений” в Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН (г. Новосибирск, 2017), семинаре отдела матема-

тического программирования в Институте математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН (г. Екатеринбург, 2017).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 5 рецензируемых научных изданиях, входящих в перечень ВАК, в 11 тезисах и статьях в журналах, сборниках и материалах конференций [6–10, 23–29, 132–135]. Зарегистрирована программа для ЭВМ [136]. Общее число публикаций — 17.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы (135 наименований) и двух приложений. Объем диссертации 119 страниц.

Содержание работы

В первой главе приводится описание этапов моделирования прикладных задач, классификация задач оптимального размещения. Основное внимание уделяется задачам размещения взаимосвязанных объектов. Для точечных объектов описываются формулировки минимаксной и минисуммной задач на плоскости и на сетях в непрерывной и дискретных постановках. Приводится обзор результатов исследований и направлений практического использования указанных задач. Формулируются постановки задач оптимального размещения габаритных объектов.

Вторая глава посвящена решению минимаксной задачи для точечных объектов на плоскости с запрещенными зонами. Приводится обзор результатов исследований близких по постановкам задач. Описаны постановка, свойства задачи и модель целочисленного линейного программирования. Доказано свойство, позволяющее сузить область поиска оптимального решения. Предложены варианты нижних оценок значений целевой функции. Разработан комбинаторный алгоритм ветвей и границ для решения задачи. Алгоритм ветвей и границ реализован программно. Проведен вычислительный эксперимент по анализу эффективности использования свойства сужения допустимой области для решения задачи

с применением двух подходов с помощью разработанного алгоритма и пакета IBM ILOG CPLEX с применением аппарата целочисленной оптимизации.

В третьей главе исследуется минисуммная задача размещения прямоугольных объектов на параллельных линиях с запрещенными зонами.

Построена модель целочисленного линейного программирования для задачи на линии. Найдены свойства, позволяющие решение исходной непрерывной задачи свести к решению серии дискретных задач меньшей размерности. Разработан алгоритм поиска приближенного решения, состоящий из двух этапов. На первом этапе находится очередное допустимое решение, на втором — объекты переставляются в допустимых областях с целью минимизации суммарной стоимости связей. Доказано свойство, что в случае отсутствия связей между объектами в допустимых областях, с помощью предложенного алгоритма находится локальный оптимум. В общем случае, для поиска локального оптимума, предложен алгоритм ветвей и границ с вариантами нижних оценок значений целевой функции. Разработанные алгоритмы поиска приближенного решения, локального и глобального оптимумов реализованы программно. Проведены вычислительные эксперименты по сравнению решений задач с помощью указанных алгоритмов и пакета IBM ILOG CPLEX с применением модели целочисленного линейного программирования.

Приводится постановка и математическая модель задачи на линиях, предложены подходы к решению. В частности, указан частный случай ее сведения к задаче на линии. Построена модель целочисленного линейного программирования для поиска локального оптимума. Проведен вычислительный эксперимент с использованием предложенной модели и пакета IBM ILOG CPLEX.

В заключении приведены основные результаты диссертации.

В приложении А приведен пример решения минимаксной задачи

размещения точечных объектов на плоскости с запрещенными зонами с учетом свойства сужения допустимой области.

В приложении В представлено свидетельство о регистрации программы для ЭВМ в Фонде алгоритмов и программ СО РАН, а также описание созданного программного комплекса, в котором реализованы предложенные алгоритмы. Хранение данных и результатов решений организовано в виде реляционной базы данных.

Автор благодарит научного руководителя профессора Г.Г. Забудского за полезные советы, постоянное внимание и поддержку в работе.

Глава 1

Модели и методы решения задач размещения

Глава посвящена описанию моделей и методов решения задач оптимального размещения взаимосвязанных объектов на плоскости. В п. 1.1 описывается процесс построения моделей при решении прикладных задач. В п. 1.2 приводится классификация задач по различным признакам. В п. 1.3 описаны классические постановки квадратичной задачи о назначениях и задачи Вебера для точечных объектов. Приводятся формулировки и краткий обзор методов решения минисуммной и минимаксной задач Вебера в непрерывной, дискретной и теоретико-графовых постановках. В п. 1.4 формулируются задачи оптимального размещения габаритных объектов на плоскости и на линиях.

1.1 Построение моделей

Области практических приложений задач оптимального размещения объектов достаточно разнообразны. Задачи такого класса имеют важное прикладное значение, их необходимо решать при создании генеральных планов предприятий, в частности нефтехимических, размещении технологического оборудования в цехах, например, швейного производства, проектировании электронных устройств и т.д.

Разработка схем генерального плана предприятия на этапе проектирования требует решения комплекса структурных, функциональных, плоскостных и пространственных задач, связанных как с технологией производства, так и со строительством [1]. Одна их наиболее трудоемких задач проектирования — рациональное размещение технологического оборудования. Трудоемкость обусловлена разнообразной структурой генерального плана и сложностью его оценки, необходимостью многовариантной проработки проектных решений. Один из наиболее дорогостоящих этапов проектирования, например, нефтеперерабатывающего предприятия — это проектирование размещения технологического оборудования (колонны, ёмкости, холодильники), зданий, сооружений и схем прокладки трубопроводов. Целями создания систем автоматизированного проектирования являются:

- снижение протяженности, металлоемкости и стоимости трубопроводов технологических установок при оптимизации взаимного расположения технологического оборудования;
- экономия расхода электроэнергии и тепловой энергии при эксплуатации установок за счет уменьшения протяженности трубопроводов и потерь в них тепла и энергии на транспортировку;
- повышение производительности труда в проектировании за счет выполнения в автоматизированном режиме ряда проектных процедур, в том числе: генерирование вариантов размещения, оценка стоимости трубопроводных сетей.

Важно отметить, что технологические установки нефтепереработки и нефтехимии характеризуются сложной сетью технологических трубопроводов, протяженность и стоимость которых в значительной мере определяют стоимость капитальных и эксплуатационных затрат. Выгодно располагать технологические установки так, чтобы длина соединяющих их трубопроводов была минимальной, это сокращает затраты

на коммуникацию и облегчает регулирование технологического процесса. Затраты выражаются стоимостью трубопроводов, энергетическими и тепловыми потерями на транспортировку газов и жидкостей, затратами на теплоизоляцию.

Для выполнения санитарных норм и правил, требований противопожарной безопасности, создания прямых проездов, зонирования территории, удобства технологического обслуживания и ремонта могут накладываться дополнительные ограничения на размещение оборудования. Например, обеспечение минимально допустимых расстояний, обусловленных требованиями противопожарной безопасности, или размещение оборудования вдоль заданных осевых линий для создания прямых проездов. При модернизации предприятия часть оборудования остается на месте, которое можно рассматривать как области, в которых нельзя размещать объекты (запрещенные зоны).

Общая постановка задачи составления генплана промышленного предприятия заключается в следующем. В заданной области Ω с фиксированными объектами (запрещенными зонами) P_j , $j = 1, \dots, m$, необходимо разместить набор прямоугольных объектов X_i , $i = 1, \dots, n$, так чтобы, соблюдая ограничения, некоторая функция (функции) цели принимала экстремальное значение. Под областью понимается площадка, отводимая для строительства предприятия, а объектами являются отдельные помещения, оборудование, сооружения и т.д.

Будем считать Ω прямоугольником, иначе нетрудно заключить ее в прямоугольную область. Свяжем Ω с системой координат xOy , поместив одну из вершин прямоугольника в начало координат так, что две стороны прямоугольника направлены вдоль положительных координатных полуосей. Пусть объекты X_i со сторонами a_i , b_i имеют координаты центров (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$. Считаем ориентацию прямоугольников фиксированной.

Проектировщиками предложены ряд функций, определяющих качество принимаемого решения. Например, строительные затраты по освоению территории, т.е. по приведению ее в пригодное для строительства состояние, выполнение требований технологической совместимости и блокировки элементов размещения, степень гибкости переоборудования здания в связи с модернизацией. В качестве основных, наиболее часто, используются критерии стоимости коммуникаций и площадь занимаемой территории.

Размещаемые объекты могут быть связаны друг с другом коммуникациями различного типа, которые на первом этапе фактически не проектируются, а оцениваются по стоимости. Стоимость коммуникаций можно считать пропорциональной расстоянию между началом и концом соответствующей коммуникации.

Длина сети, связывающей объекты между собой, вычисляется в прямоугольной метрике. Это связано с особенностью прокладки сети дорог и коммуникаций: дороги пересекаются под прямым углом, а коммуникации проводят вдоль дорог. Тогда стоимость коммуникаций определяется следующим образом:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij}(|x_i - p_{1j}| + |y_i - p_{2j}|) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n u_{ik}(|x_i - x_k| + |y_i - y_k|) \rightarrow \min,$$

где (p_{1j}, p_{2j}) — координаты центра фиксированного объекта P_j , $j = 1, \dots, m$; $w_{ij} \geq 0$ и $u_{ik} \geq 0$ — стоимость единицы длины имеющихся коммуникаций между объектами X_i , P_j , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ и X_i , X_k , $i = 1, \dots, n-1$, $k = i+1, \dots, n$ соответственно. Если между двумя объектами не существует связи, тогда соответствующий коэффициент приравнивается к нулю.

Как уже отмечалось, на размещение объектов могут накладываться различные ограничения. Так, например, условия взаимного непересече-

ния размещаемых объектов X_i и X_k записываются следующим образом:

$$|x_i - x_k| \geq \frac{a_i + a_k}{2},$$

или

$$|y_i - y_k| \geq \frac{b_i + b_k}{2},$$

где $i = 1, \dots, n-1$, $k = i+1, \dots, n$.

Когда имеются запрещенные зоны, условия непересечения размещаемых объектов с зонами имеют следующий вид:

$$|x_i - p_{1j}| \geq \frac{a_i + a_j^0}{2},$$

или

$$|y_i - p_{2j}| \geq \frac{b_i + b_j^0}{2},$$

где $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, а a_j^0 , b_j^0 — стороны запрещенной зоны P_j .

Условия принадлежности размещаемых объектов области Ω размера X , Y :

$$\frac{a_i}{2} \leq x_i \leq X - \frac{a_i}{2},$$

и

$$\frac{b_i}{2} \leq y_i \leq Y - \frac{b_i}{2},$$

$i = 1, \dots, n$.

Часто противопожарными и санитарными нормами диктуются условия на задание кратчайших расстояний d_{ik} между объектами X_i и X_k :

$$Z_{ik} \geq d_{ik}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad k = i+1, \dots, n,$$

где

$$Z_{ik} = \begin{cases} \sqrt{(\Delta x_{ik})^2 + (\Delta y_{ik})^2}, & \text{если } \Delta x_{ik} \geq 0, \Delta y_{ik} \geq 0, \\ \Delta x_{ik}, & \text{если } \Delta x_{ik} \geq 0, \Delta y_{ik} < 0, \\ \Delta y_{ik}, & \text{если } \Delta x_{ik} < 0, \Delta y_{ik} \geq 0, \\ \Delta x_{ik} = |x_i - x_k| - \frac{a_i + a_k}{2}, & \end{cases}$$

$$\Delta y_{ik} = |y_i - y_k| - \frac{b_i + b_k}{2}.$$

Если требуется, чтобы размещаемые объекты располагались не ближе определенного расстояния d_{ij}^0 к запрещенным зонам, должны выполняться следующие ограничения:

$$Z_{ij}^0 \geq d_{ij}^0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m,$$

где

$$Z_{ij}^0 = \begin{cases} \sqrt{(\Delta x_{ij}^0)^2 + (\Delta y_{ij}^0)^2}, & \text{если } \Delta x_{ij}^0 \geq 0, \Delta y_{ij}^0 \geq 0, \\ \Delta x_{ij}^0, & \text{если } \Delta x_{ij}^0 \geq 0, \Delta y_{ij}^0 < 0, \\ \Delta y_{ij}^0, & \text{если } \Delta y_{ij}^0 < 0, \Delta x_{ij}^0 \geq 0, \\ \Delta x_{ij}^0 = |x_i - p_{1j}| - \frac{a_i + a_j^0}{2}, \\ \Delta y_{ij}^0 = |y_i - p_{2j}| - \frac{b_i + b_j^0}{2}. \end{cases}$$

Требованиями технологического процесса или необходимостью поместить объекты в пределах одного участка обуславливаются ограничения на максимально допустимые расстояния D_{ik} между объектами X_i и X_k :

$$|x_i - x_k| + |y_i - y_k| \leq D_{ik}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad k = i+1, \dots, n.$$

Кроме вышперечисленных ограничений, часто требуется выполнение определенных соотношений между сторонами площадки, например,

$$X/Y = L.$$

Введение таких ограничений обуславливается архитектурными требованиями и определенными технологическими нормами для строительства предприятий. При наличии запрещенных зон имеет смысл учитывать следующие соотношения:

$$X \geq \max_{j=1, m} (p_{1j} + a_j^0/2),$$

$$Y \geq \max_{j=1,m} (p_{2j} + b_j^0/2).$$

Таким образом, приведены некоторые технико–экономические показатели, по которым оцениваются варианты генплана и требования, сформулированные в виде неравенств и равенств. Целью является, например, получение схемы генплана, которая обеспечила бы наименьшие капитальные и эксплуатационные затраты при строительстве и эксплуатации проектируемого предприятия.

Решение задачи оптимального размещения может применяться, в частности, и при разработке планов швейных участков и цехов предприятий легкой промышленности, при проектировании роботехнологических комплексов, гибких механообрабатывающих производственных систем и т.д. Проектирование технологических процессов по изготовлению швейных изделий с одной стороны аналогично проектированию различных производственных систем, а с другой стороны имеет свою специфику, определяемую высокой сменяемостью моделей, применением разнообразного оборудования, большая часть которого не может взаимозаменять друг друга. В условиях постоянного увеличения номенклатуры обрабатываемых изделий, сокращения цикла их изготовления, возникает необходимость обработки партий, с высокой производительностью при обеспечении гибкости технологического процесса и его переналадки.

Швейное оборудование обычно группируется в специализированные модули с учетом самого оборудования, зон обслуживания, рабочих мест. Специфику проектирования технологических процессов по изготовлению швейных изделий определяет высокая сменяемость модулей. Определяющим фактором является возможность быстро адаптироваться к изменяющимся условиям функционирования с минимальными затратами и потерями производительности. Модули аппроксимируют прямоугольниками и размещают их на плане производственного участка или цеха. Размещение осуществляется вдоль направляющих осей, характе-

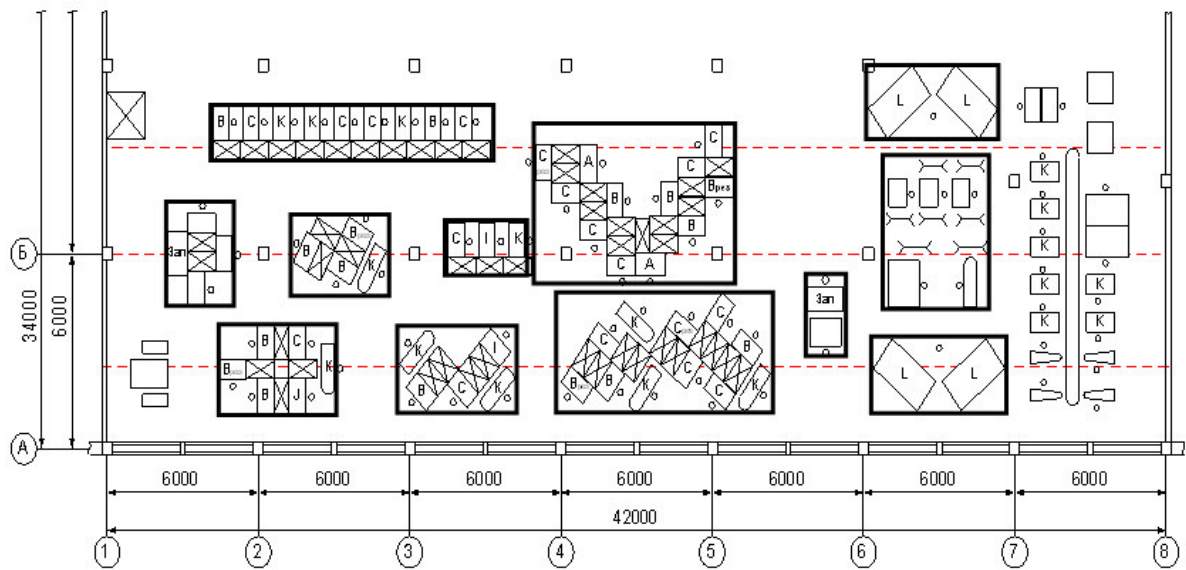


Рис. 1.1: План участка швейного цеха.

ризирующих способ размещения потока в цехе. Положение осей определяется с учетом основных проходов между технологическими модулями, зон запуска и сбора продукции, а также нормативами по размещению оборудования внутри швейного цеха. Модули связаны между собой различными коммуникациями. Связями могут быть, например, количество изделий в час, передаваемых от одного станка к другому [33].

При переналадке производства часть оборудования может оставаться на месте, далее его можно рассматривать в качестве запрещенных зон. Задача размещения формулируется следующим образом: необходимо расположить новое оборудование (модули) среди имеющегося на направляющих осях так, чтобы суммарные затраты на передачу изделий от одного станка к другому были минимальными. На рисунке 1.1 изображен план участка швейного цеха, где обозначены единицы технологического оборудования: В — одноигольная машина, С — транспортер, I — вышивальный автомат, К — утюжильный стол, J — пресс, L — автоматический пароманекен, А — ручное рабочее место. Все расстояния указаны в миллиметрах.

Как уже отмечалось, ввиду постоянного расширения и усложнения ассортимента выпускаемой продукции, требуется технологическая подготовка производства. При изготовлении меняющихся по конструкции и особенностям обработки изделий, это сдерживается переналадками поточных линий, так как нужно менять состав оборудования, параметры обработки. Существуют различные системы автоматизированного проектирования одежды (САПР Ассоль, АвтоКрой, Lektra, Gerbert), которые отличаются между собой структурой и объемом выполняемых процедур, качеством конструкторской и технологической подготовки производства и прочими характеристиками. В этих системах недостаточно разработана подсистема проектирования швейных участков и цехов, предназначенная для оптимальной расстановки оборудования. Создание плана швейного цеха требует учета большого количества логических ограничений, связанных с оптимальной расстановкой оборудования в цехе. Применение автоматизированного проектирования размещения производственного оборудования в швейных цехах предприятия позволит решать указанную задачу при минимальных затратах времени.

Наряду с вышесказанным, одним из приложений указанной задачи можно рассматривать задачу синтеза топологии больших интегральных схем (БИС), а именно методы размещения их структурных элементов. Проектировщики чипа определяют, какие единицы будут использоваться, и какие из них должны быть связаны (логическая стадия проектирования). Обычно логические единицы — прямоугольники (клетки). Кроме размеров, каждая клетка характеризуется ее контактными центрами (терминалами). Терминалы должны быть связаны между собой. Задача состоит в том, чтобы определить местонахождение клеток в определенной прямоугольной области (чип) и соединить их в сеть [127]. При ее решении стремятся с одной стороны обеспечить возможность трассировки соединений, а с другой — минимизировать искажения сигналов в ме-

жэлементных связях. Формальными критериями качества размещения служат различные оценки (прогнозы) трассировки, правильный выбор и последовательность применения которых во многом определяют общие результаты синтеза топологии. Основными этапами решения задачи размещения элементов матричных БИС являются:

- выбор критериев размещения;
- начальное размещение элементов на базовом матричном кристалле;
- итерационная оптимизация начального размещения.

1.2 Классификация задач

Формулировки задач оптимального размещения объектов содержат следующие основные элементы: перечень объектов, связанных между собой некоторыми коммуникациями; область, в которой производится их размещение; ограничения на расположение объектов; критерии оценки вариантов решения. Задача состоит в поиске таких мест расположения объектов в заданной области, чтобы некоторый показатель (показатели) качества расположения был оптимальным при условии выполнения определенных ограничений.

Для классификации таких задач используют следующие основные характеристики: трактовка понятия объект и его геометрическая форма (точки, прямоугольники), структура связей между объектами, критерии оценки качества размещения (минисуммный, минимаксный, максимумный), метрика для измерения расстояний (евклидова, чебышевская, прямоугольная), область, в которой размещаются объекты (линия, плоскость, сеть, дискретное множество точек), ограничения на их расположение (минимально допустимые расстояния между объектами, регулярность размещения, наличие запрещенных зон) и т.д.

Понятие *объект* трактуется достаточно широко. Например, при размещении пунктов обслуживания под объектами понимаются магазины,

склады, телефонные узлы, банкоматы, станции скорой помощи и т.п. При проектировании генеральных планов предприятий и печатных плат, объекты — это единицы технологического оборудования, элементы печатного монтажа. В зависимости от соотношения размеров области размещения и объектов, последние можно рассматривать как материальные точки, либо необходимо учитывать их габариты. Часто протяженные плоские объекты (единицы технологического оборудования), аппроксимируются выпуклыми геометрическими фигурами, например, прямоугольниками.

Определение *связи* между объектами зависит от сферы деятельности, в которой необходимо решать задачу размещения. При размещении пунктов обслуживания связями являются, например, потоки товаров, а при проектировании нефтехимического предприятия — трубопроводы между различным оборудованием. В задачах с пунктами обслуживания сначала находится размещение объектов, а потом устанавливаются связи между ними (задачи размещения–распределения). Например, при размещении логистических центров, телекоммуникационных узлов к ним прикрепляются клиенты — торговые точки, пользователи услуг, в результате чего устанавливаются связи. При размещении технологического оборудования объекты размещаются с заранее заданной структурой связей между ними (задачи размещения взаимосвязанных объектов). Например, при размещении оборудования нефтехимического предприятия связями могут быть трубопроводы, соединяющие элементы оборудования между собой.

Для оценки качества полученных размещений используются различные *критерии*. Например, при размещении оборудования нефтехимического предприятия часто необходимо минимизировать суммарную стоимость трубопроводных связей, как один из дорогостоящих элементов строительства (капитальных затрат). В такой задаче можно применять

минисуммный критерий оценки качества размещения. Если необходимо минимизировать максимальное время передачи сырья между технологическими установками, либо время передачи сигнала между элементами оборудования, электронного устройства, то применяется минимаксный критерий. С целью наибольшей удаленности, например, населенного пункта от опасного производства или объекта используется максиминный критерий [16, 52].

Важное значение для анализа и разработки методов решения задач имеет *метрика*, в которой измеряются расстояния между объектами. Например, при проектировании генеральных планов нефтехимических предприятий часто трубопроводы прокладывают вдоль определенных трасс (линий электропередач и т.п.) с целью удобства обслуживания оборудования, обеспечения прямых проездов, зонирования территории, что приводит к необходимости использования прямоугольной метрики. В задачах размещения одновременно может использоваться несколько видов метрик. Например, минимально допустимые расстояния между объектами измеряются в евклидовой метрике, а длина связей между ними — в прямоугольной.

Структура области, в которой происходит размещение — это также одна из основных характеристик рассматриваемых задач. Область размещения может быть непрерывной или дискретной. Размерность непрерывной области может быть различной: одномерная (линия), двумерная (плоскость) и т.д.

Часто на структуру области размещения накладываются *дополнительные ограничения*. Строительные нормы и правила определяют противопожарные, санитарные и другие нормативы, которые при проектировании генеральных планов, или расстановке оборудования в цехе предприятия, задают ограничения на минимально допустимые расстояния между сооружениями и единицами оборудования. Технологией производства

могут определяться максимально допустимые расстояния между объектами, например, при ограниченной мощности насосных установок. Во многих случаях требуется размещение объектов вдоль заданных траекторий (красных линий) с целью обеспечения прямых проездов, удобства обслуживания, выделения кварталов в расположении объектов. В области размещения могут быть запрещенные зоны или барьеры — это участки, в которых размещать объекты нельзя по каким-либо причинам. Примеры запрещенных зон — здания, сооружения, оборудование, санитарные участки и т.д. Обычно запрещенные зоны аппроксимируются геометрическими фигурами, например, для прямоугольной метрики часто это прямоугольники, для евклидовой — круги. Запрещенные зоны — это, как правило, выпуклые множества с непустой внутренностью, в которых нельзя размещать объекты, но через них можно прокладывать связи между объектами. В задачах с запрещенными зонами выполняется размещение объектов и оценивается стоимость связи между ними с использованием какой-либо метрики. Барьеры — это области, в которых запрещается не только размещать объекты, но и прокладывать трассы через них для установки связи между объектами. Трассы не должны пересекать барьеры, только в обход или через специальные проходы в них [94]. В литературе больше внимание уделяется задачам с барьерами, чем с запрещенными зонами [93, 99, 114, 120].

Для описания оптимизационных моделей, анализа и решения задач размещения применяется различный математический аппарат, в частности, модели и методы вычислительной геометрии, теории графов, комбинаторного анализа, теории сложности, линейного и целочисленного программирования. Методы решения, как правило, определяются характеристиками используемой модели. Многие такие задачи являются NP -трудными, но для отдельных классов задач известны полиномиальные алгоритмы.

1.3 Точечные объекты

Одна из ярких представителей задач размещения взаимосвязанных точечных объектов — это *квадратичная задача о назначениях (КЗН)*. Различают формулировки такой задачи в терминах матриц (постановка Купманса–Бекманна) [96], теории графов [32] и в виде моделей целочисленного линейного и нелинейного программирования с булевыми переменными [67, 78, 100]. Рассмотрим постановку дискретной задачи размещения предприятий. Имеется n предприятий, связанных между собой потоками изделий. Необходимо разместить n предприятий (объектов) в n позиций по одному в каждую так, чтобы минимизировать суммарный поток изделий между предприятиями, который пропорционален стоимостям связей между предприятиями и расстояниям между позициями. Задачу можно сформулировать с помощью трех матриц: $A = (a_{ik})$, где a_{ik} — удельная стоимость связи между объектами i и k ; $B = (b_{jl})$, b_{jl} — расстояние между позициями j и l , $C = (c_{ij})$, c_{ij} — стоимость размещения объекта i в позицию j , где $i, j, k = 1, \dots, n$. Пусть π — это подстановка на множестве $\{1, \dots, n\}$. Целевая функция КЗН в постановке Купманса–Бекманна имеет вид

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{\pi(i)\pi(k)} + \sum_{i=1}^n c_{i\pi(i)} \rightarrow_{\pi \in S_n} \min, \quad (1.1)$$

где S_n — множество всех подстановок на множестве $\{1, \dots, n\}$.

Если в задаче минимизируется максимальная стоимость связей, то задача называется КЗН с минимаксным критерием (минимаксная КЗН), ее целевая функция имеет вид

$$\max_{i,k=1,\dots,n} (a_{ik} b_{\pi(i)\pi(k)}) \rightarrow_{\pi \in S_n} \min. \quad (1.2)$$

КЗН в теоретико–графовой постановке формулируется следующим образом [78]. Дан граф связей $G = (V^f, E^f)$ и граф расстояний $M =$

(V^d, E^d) . Множество $V^f = \{v_i : i = 1, \dots, n\}$ соответствует размещаемым объектам, а множество $V^d = \{v_i : i = 1, \dots, n\}$ — позициям, в которые размещаются объекты. Ребро $\{v_i, v_j\} \in E^f$, если имеется связь между объектами v_i и v_j , $w(v_i, v_j)$ — вес ребра $\{v_i, v_j\} \in E^f$. Через $\rho(\pi(v_i), \pi(v_j))$ обозначим кратчайшее расстояние между вершинами $\pi(v_i)$ и $\pi(v_j)$ в графе M . Целевая функция КЗН в терминах теории графов имеет вид

$$F(\pi) = \sum_{\{v_i, v_j\} \in E^f} w(v_i, v_j) \rho(\pi(v_i), \pi(v_j)) \rightarrow_{\pi \in S_n} \min. \quad (1.3)$$

Для КЗН с минимаксным критерием целевая функция записывается следующим образом

$$F_{max}(\pi) = \max_{\{v_i, v_j\} \in E^f} w(v_i, v_j) \rho(\pi(v_i), \pi(v_j)) \rightarrow_{\pi \in S_n} \min. \quad (1.4)$$

КЗН была исследована многими авторами. Отметим, что *задача коммивояжера* — это частный случай КЗН. Для произвольных матриц и графов КЗН является NP -трудной [118].

В виду трудности КЗН для ее решения используются различные подходы. Для приближенного решения применяют известные эвристические методы, основанные на аналогиях с природой, алгоритмы муравьиной колонии, имитации отжига, поиска с запретами, генетические и другие [71, 79, 102, 125]. Осуществляется поиск эффективных полиномиально разрешимых случаев сформулированной КЗН в терминах теории графов. Здесь основное внимание уделяется разработке эффективных алгоритмов для специальных структур связей между объектами. Известны полиномиальные алгоритмы размещения изоморфных графов специальной структуры, эффективные алгоритмы размещения деревьев на цепи, алгоритм локальной оптимизации и другие [30, 31]. Предложен алгоритм динамического программирования для размещения произвольного взвешенного графа на невзвешенном дереве для минисуммного критерия. Для КЗН на сетях разработаны приближенные алгоритмы с оцен-

ками [61]. Поиск полиномиально разрешимых случаев приведен в работах [13, 66].

Как уже отмечалось, вторая известная задача размещения взаимосвязанных объектов — это *классическая задача Вебера*. Математически задача формулируется следующим образом. На плоскости среди m фиксированных объектов P_1, \dots, P_m размещаются n объектов X_1, \dots, X_n . Обозначим: $J = \{1, \dots, m\}$ — множества номеров фиксированных объектов с координатами (p_{1j}, p_{2j}) , $j \in J$; $I = \{1, \dots, n\}$ — множества номеров размещаемых объектов с координатами (x_i, y_i) , $i \in I$; $d(X_i, P_j)$ и $d(X_i, X_k)$ — расстояния между объектами X_i, P_j и X_i, X_k соответственно, $j \in J, i, k \in I, i < k$; $w_{ij} \geq 0$ и $u_{ik} \geq 0$ — удельные стоимости связи между объектами X_i, P_j и X_i, X_k соответственно $j \in J, i, k \in I, i < k$. Необходимо разместить X_1, \dots, X_n на плоскости среди фиксированных P_1, \dots, P_m так, чтобы суммарная стоимость связи между всеми объектами была минимальной. Математическая модель имеет вид:

$$f(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij} d(X_i, P_j) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n u_{ik} d(X_i, X_k) \rightarrow \min \quad (1.5)$$

Минисуммная задача Вебера (1.5) исследована различными авторами [70, 80, 82, 87]. Доказано, что на плоскости для случаев прямоугольной и евклидовой метрик (1.5) принадлежит классу задач выпуклого программирования [55, 86, 130]. Полиномиальный алгоритм решения такой задачи для прямоугольной метрики, состоящий в решении серии задач о максимальном потоке описан в [55]. В работе [70] решение задачи сводится к нахождению потока минимальной стоимости в специально построенной сети, а в [117] — к построению последовательности сетей и нахождению в них минимальных разрезов. Для евклидовой метрики целевая функция является выпуклой, поэтому локальный минимум совпадает с глобальным. Рекурсивный метод решения такой задачи предло-

жен в [97]. Одна из трудностей решения — это то, что разрешается размещение нескольких объектов в одну позицию. Для учета возможности такого расположения объектов разработан эффективный алгоритм [98]. Метод Ньютона для данной задачи описан в работе [83]. Сведение исходной непрерывной задачи к дискретной и полиномиальный алгоритм решения приведены в [87].

Минимаксная задача Вебера для точечных объектов формулируется следующим образом. На плоскости среди m фиксированных объектов P_1, \dots, P_m требуется найти места расположения n объектов X_1, \dots, X_n так, чтобы максимальная стоимость связи между всеми объектами была минимальной. Математическая модель имеет следующий вид

$$f(X_1, \dots, X_n) = \max\left\{ \max_{i \in I, j \in J} \{w_{ij}d(X_i, P_j)\}; \max_{i, k \in I, i < k} \{u_{ik}d(X_i, X_k)\} \right\} \rightarrow \min. \quad (1.6)$$

Для решения *минимаксной задачи Вебера* (1.6) с прямоугольной метрикой применяются различные подходы. Например, в работе [112] введением дополнительного параметра она сводится к задаче линейного программирования (ЛП). Задача с ограничениями на максимально допустимые расстояния рассматривается в [74]. Линейным преобразованием осуществляется переход от метрики l_1 к l_∞ и задача декомпозируется на две, по координатам x и y . Двойственная к каждой из которых интерпретируется в виде сетевой — определить в сети поток максимальной общей стоимости. В работе [85] (1.6) сводится к поиску кратчайшего пути в сети, длины дуг которой линейно зависят от параметра.

Минимаксной задаче с евклидовой метрикой посвящена работа [101], в которой приведены результаты вычислительного эксперимента на основе построения нелинейной задачи. Аналогичная процедура с учетом теории двойственности представлена в [76].

Отметим, что в сформулированных задачах Вебера допускается раз-

мещение объектов в одной точке, в отличие от КЗН. Такое допущение является важным условием при решении реальных прикладных задач. Например, при размещении промышленного предприятия, состоящего из нескольких объектов (перерабатывающие заводы, склады, торговые точки) технологически разрешается размещение нескольких объектов в одном населенном пункте.

Кроме указанных минисуммной и минимаксной задач Вебера на плоскости, рассматриваются теоретико–графовые постановки таких задач. Приведем формулировку задачи Вебера на сети. Дана связная неориентированная сеть $T = (V, E)$. В узлах $V = \{P_1, \dots, P_m\}$ расположены фиксированные объекты. Новые объекты размещаются в точках $x = \{x_1, \dots, x_n\}$, которые могут быть расположены как в вершинах, так и на дугах. Расстояние $d(x, y)$ между точками x и y в сети T определяется как длина кратчайшего пути. Обозначим через $J = \{1, \dots, m\}$ и $I = \{1, \dots, n\}$ — множества номеров фиксированных и размещаемых объектов, а через $w_{ij} \geq 0$ и $u_{ik} \geq 0$ ($u_{ik} = u_{ki}$) удельные стоимости связей между размещаемым X_i и фиксированным P_j объектами и между размещаемыми X_i, X_k объектами соответственно. Необходимо найти размещение, при котором либо суммарная, либо максимальная стоимость связи между всеми объектами была минимальной и соответствующие модели задачи записываются также как (1.5) и (1.6). Известны постановки задач Вебера на сети с ограничениями на максимально допустимые расстояния между объектами [34, 35, 77]. В частности, разработаны эффективные алгоритмы решения задачи на древовидной сети [34, 35].

В литературе выделяют дискретную (заданы возможные места расположения объектов) и непрерывную постановки задачи Вебера. Все вышперечисленные постановки задач Вебера относятся к непрерывным, такие задачи полиномиально разрешимы. Для дискретной задачи Вебера существуют различные постановки, например, в терминах теории

графов, в виде модели целочисленного линейного и нелинейного программирования и т.д.

Приведем теоретико–графовую постановку *дискретной задачи Вебера*. Пусть дан простой взвешенный связный граф $G = (V(G), E(G))$, где $V(G)$ — множество вершин графа G , соответствующее размещаемым объектам, $E(G)$ — множество ребер графа G , определяющее связи между размещаемыми объектами. Пусть P — конечное множество множество позиций, предназначенных для размещения вершин графа G и $|V(G)| = |P| = n$. Размещением вершин графа G будем называть отображение $\pi : V(G) \rightarrow P$, полагая, что вершина $i \in V(G)$ размещается в позицию $\pi(i) \in P$, причем в одну позицию можно разместить несколько вершин. Обозначим через $\Pi = \{\pi : V(G) \rightarrow P\}$.

Заданы: вес ребра $u(i, k) \geq 0$ для $[i, k] \in E(G)$; расстояние $d(t, j) > 0$ между позициями $t, j \in P$; стоимость размещения $w(i, j) \geq 0$ вершины $i \in V(G)$ в позицию $j \in P$; стоимость связи $c([i, k], t, j)$ между вершинами $i, k \in V(G)$, размещенными в позициях $t, j \in P$, причем полагаем $c([i, k], t, j) = u(i, k) \cdot d(t, j)$. Необходимо разместить вершины графа G в позициях P таким образом, чтобы суммарная стоимость размещения вершин и ребер графа G была минимальной. Формулировка задачи в терминах отображений следующая:

$$F(G, \pi) = \sum_{[i,k] \in E(G)} c([i, k], \pi(i), \pi(k)) + \sum_{i \in V(G)} w(i, \pi(i)) \rightarrow \min_{\pi \in \Pi}, \quad (1.7)$$

Задача (1.7) является NP -трудной [47, 124]. Точные полиномиальные алгоритмы известны для случаев, когда размещаемый граф является деревом [48, 65, 116], последовательно–параллельным графом [107], простым циклом [58], n -последовательной цепью [59], а также, когда $|P| = 2$ [122]. Разработаны эффективные алгоритмы для вычисления нижней границы оптимального значения целевой функции [108], эвристики и метаэвристики [95]. Отметим, что при выполнении условий $u(i, k) = 0$ для

всех $i, k \in E(G)$, дискретная задача Вебера представляет собой линейную задачу о назначениях [37].

В зарубежной литературе выделяют два типа задачи Вебера: *Multifacility Weber Problem (MFWP)* и *Multisource Weber Problem (MSWP)*. Первый тип — *MFWP* принадлежит классу задач размещения взаимосвязанных объектов, когда находится размещение объектов с уже заданной структурой связей между ними [80, 82, 130]. Такие задачи необходимо решать, например, когда требуется разместить взаимосвязанные предприятия, производящие разнородную продукцию, либо оказывающие различные услуги, таким образом, чтобы суммарные транспортные затраты как между всеми предприятиями, так и между предприятиями и клиентами были минимальными. Все рассмотренные выше постановки задач Вебера относятся к типу *MFWP*. Второй тип — *MSWP* принадлежит классу задач размещения–распределения, когда связи между объектами устанавливаются в результате решения задач [64, 105, 126]. Такие задачи необходимо решать, например, при размещении предприятий, производящих один и тот же продукт либо оказывающих одну услугу, с целью минимизации суммарных транспортных затрат между клиентами и ближайшим к ним предприятием.

Рассмотрим постановку задачи *MSWP* в виде модели целочисленного программирования. Задана плоскость $PL = \{x : x \in R^2\}$. Пусть X_1, \dots, X_n — предприятия, которые необходимо разместить на плоскости PL для обслуживания m клиентов P_1, \dots, P_m , расположенных в PL . Далее под предприятиями и клиентами будем понимать точечные объекты. Пусть величина w_j — стоимость снабжения (прикрепления) клиента P_j . Обозначим через (x_i, y_i) и (a_j, b_j) неизвестные координаты предприятия X_i и известные координаты клиента P_j соответственно, а через $d(X_i, P_j)$ — расстояние между предприятием X_i и клиентом P_j , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. Пусть $z_{ij} \in \{0, 1\}$ булева переменная, такая что $z_{ij} = 1$,

если клиент P_j прикреплен к предприятию X_i , иначе $z_{ij} = 0$. Необходимо разместить предприятия X_1, \dots, X_n на плоскости PL так, чтобы суммарная стоимость связей между каждым клиентом и ближайшим к нему размещенным предприятием была минимальной. Математическая модель имеет вид [109]:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m z_{ij} w_j d(X_i, P_j) \rightarrow \min \quad (1.8)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^n z_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, m; \quad (1.9)$$

$$z_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m; \quad (1.10)$$

$$X_i \in PL, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.11)$$

Суммирование в целевой функции (1.8) осуществляется по всем парам предприятие–клиент, причем если для некоторого предприятия X_i и некоторого клиента P_j переменная $z_{ij} = 1$, то стоимость связи (транспортные затраты на поставку товаров) между X_i и P_j равна величине $w_j d(X_i, P_j)$, иначе стоимость связи равна 0. Каждый клиент должен быть прикреплен к одному и только одному предприятию, это описывается в ограничениях (1.9).

Задача (1.8)–(1.11) NP –трудная для евклидовой и прямоугольной метрик [109]. Для ее решения разработаны как точные алгоритмы, например, основанные на методе ветвей и границ, так и эффективные эвристики и метаэвристики [105, 106].

Заметим, что $MSWP$ в дискретной постановке, когда предприятия размещаются в заданном конечном множестве точек, известна как задача о p –медиане [110, 111], которая также NP –трудная, так как к ней сво-

дится задача о вершинном покрытии. Для решения задачи о p -медиане используются алгоритмы ветвей и границ, перебора L -классов и другие методы [39, 104].

Далее будем рассматривать задачу Вебера в смысле постановки *MFWP*.

1.4 Габаритные объекты

Сформулируем задачу Вебера для прямоугольных объектов на плоскости с запрещенными зонами. Дана плоскость $PL = \{x : x \in R^2\}$. Обозначим через X_i — размещаемые прямоугольники с неизвестными координатами центров (x_i, y_i) , $i \in I$, а через F_j — фиксированные прямоугольные объекты на плоскости с координатами центров (b_j, c_j) , $j \in J$, где $I = \{1, \dots, n\}$ и $J = \{1, \dots, m\}$ — множества номеров указанных объектов. Без ограничения общности, фиксированные объекты можно рассматривать в качестве запрещенных зон. Стороны прямоугольников и фиксированных объектов параллельны осям координат. Пусть $d(X_i, F_j)$, $d(X_i, X_k)$ и $w_{ij} \geq 0$, $u_{ik} \geq 0$ — расстояния и удельные стоимости связей между X_i и F_j , X_i и X_k соответственно, $j \in J$, $i, k \in I$, $i < k$. Считаем, что связаны центры объектов.

Необходимо расположить прямоугольники X_1, \dots, X_n на плоскости среди фиксированных объектов F_1, \dots, F_m так, чтобы прямоугольники не пересекались между собой и с фиксированными, и суммарная стоимость связи между всеми объектами была минимальной. Математическая модель задачи имеет следующий вид

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij} d(X_i, F_j) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n u_{ik} d(X_i, X_k) \rightarrow \min, \quad (1.12)$$

$$\text{Int } X_i \cap \text{Int } F_j = \emptyset, \quad i \in I, j \in J, \quad (1.13)$$

$$\text{Int } X_i \cap \text{Int } X_k = \emptyset, \quad i, k \in I, i < k, \quad (1.14)$$

$$X_i \in PL, \quad i \in I, \quad (1.15)$$

где $Int A$ — это внутренность множества A . Ограничения (1.13) и (1.14) — это условия непересечения, кроме как по границе, прямоугольников с фиксированными объектами и прямоугольников между собой.

Для случая, когда прямоугольники размещаются на отрезке длины LS с фиксированными объектами, модель (1.12)–(1.15) имеет вид:

$$G(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij} |x_i - b_j| + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n u_{ik} |x_i - x_k| \rightarrow \min, \quad (1.16)$$

$$|x_i - b_j| \geq \frac{l_i + p_j}{2}, \quad i \in I, j \in J, \quad (1.17)$$

$$|x_i - x_k| \geq \frac{l_i + l_k}{2}, \quad i, k \in I, i < k, \quad (1.18)$$

$$\frac{l_i}{2} \leq x_i \leq LS - \frac{l_i}{2}, \quad i \in I, \quad (1.19)$$

где x_i — неизвестные координаты центров размещаемых объектов X_i с длинами l_i , $i \in I$, b_j — координаты центров фиксированных объектов F_j с длинами p_j , $j \in J$.

В литературе рассмотрены различные подходы к решению задач размещения прямоугольных объектов. При отсутствии связей между объектами рассматривается двухкритериальная задача оптимального размещения технологического оборудования на параллельных линиях, единицы которого аппроксимируются с помощью прямоугольников [21]. Критерии — это минимизация длины и ширины области, занимаемой оборудованием. При произвольном числе линий Парето-оптимальные решения находятся с помощью метода уступок. Для этого предлагается решать серию задач целочисленного линейного программирования с использованием пакета IBM ILOG CPLEX. Для поиска приближенного к Парето-оптимальному решению с минимальной длиной (равномерное распределение оборудования по линиям) и в случае двух линий применяется аппарат динамического программирования. Использование моделей целочисленного линейного программирования, а также методов ветвей и

границ и декомпозиции Бендерса для размещения прямоугольных объектов предложено в [36].

Алгоритм локальной оптимизации для задачи размещения взаимосвязанных прямоугольных объектов с критерием минимума длины связывающей сети описан в [46]. В работе [51] приводится комбинаторная постановка задачи размещения модулей при проектировании печатных плат. Необходимо разместить модули на плате так, чтобы суммарная длина проводников была минимальной. Предложен способ построения нижних оценок. Рассматривается применение модифицированного метода последовательного анализа вариантов по типу ветвей и границ. Разработанный метод позволяет получить приближенные решения с заданной точностью для указанной задачи.

Глава 2

Размещение точечных объектов с минимаксным критерием на плоскости с запрещенными зонами

В главе исследуется задача Вебера с минимаксным критерием для точечных объектов на плоскости с запрещенными зонами. В п. 2.1 приведен краткий обзор исследований. В п. 2.2 отмечены свойства и построена модель целочисленного линейного программирования. Доказано свойство, позволяющее уменьшить допустимую область при поиске оптимального решения. В п. 2.3 описан алгоритм ветвей и границ и приведены результаты вычислительного эксперимента с использованием указанного алгоритма и решения задачи с применением модели целочисленного линейного программирования и пакета IBM ILOG CPLEX.

2.1 Постановка и подходы к решению

В классических постановках минисуммных и минимаксных задач Вебера на плоскости нет ограничений на взаимное расположение объектов. Одно из обобщений таких задач — это наличие специальных областей (запрещенных зон) на плоскости, в которых не допускается размещение объектов по каким-либо причинам. Примерами запрещенных зон могут быть как естественные преграды (горы, реки, озера), так и искусствен-

ные сооружения (здания, оборудование, санитарные зоны). Обзору известных результатов исследований задач Вебера для точечных объектов с учетом запрещенных зон посвящен данный раздел.

Приведем постановки минисуммной и минимаксной задач Вебера с запрещенными зонами. На плоскости среди m фиксированных объектов P_1, \dots, P_m размещаются n объектов X_1, \dots, X_n . Обозначим через $J = \{1, \dots, m\}$ и $I = \{1, \dots, n\}$ — множества номеров фиксированных и размещаемых объектов, через $d(X_i, P_j)$ и $d(X_i, X_k)$ — расстояния между объектами X_i, P_j и X_i, X_k , $j \in J, i, k \in I, i < k$, а через w_{ij} и u_{ik} — удельные стоимости связи между объектами X_i, P_j и X_i, X_k соответственно $j \in J, i, k \in I, i < k$. Объект P_j размещен в точке с координатами (p_{1j}, p_{2j}) , $j \in J$, а координаты объекта X_i обозначим как (x_i, y_i) , $i \in I$.

Пусть F_1, \dots, F_z — множество заданных запрещенных зон в R^2 и $\mathcal{B} = \cup_{k=1}^z F_k$. Запрещенные зоны обычно аппроксимируются геометрическими фигурами. Они могут быть произвольной формы, но часто рассматриваются выпуклые фигуры. Необходимо разместить объекты X_1, \dots, X_n на плоскости среди фиксированных P_1, \dots, P_m вне запрещенных зон F_1, \dots, F_z так, чтобы суммарная или максимальная стоимость связи между всеми объектами была минимальной.

Обозначим $\mathcal{F} \subseteq R^2$ — область допустимых решений задачи, тогда $\mathcal{F} = R^2 \setminus \text{Int } \mathcal{B}$, где $\text{Int } \mathcal{B}$ — внутренность множества \mathcal{B} . Отметим, что в общем случае запрещенные зоны могут иметь непустое пересечение и \mathcal{F} невыпуклая и несвязная. Получаем следующие математические модели минисуммной и минимаксной задач Вебера с запрещенными зонами.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij} d(X_i, P_j) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n u_{ik} d(X_i, X_k) \rightarrow \min, \quad (2.1)$$

$$X_i \notin \text{Int } \mathcal{B}, \quad i \in I. \quad (2.2)$$

$$\max\left\{\max_{i \in I, j \in J} \{w_{ij}d(X_i, P_j)\}; \max_{i, k \in I, i < k} \{u_{ik}d(X_i, X_k)\}\right\} \rightarrow \min \quad (2.3)$$

$$X_i \notin \text{Int } \mathcal{B}, \quad i \in I. \quad (2.4)$$

Как уже отмечалось в п. 1.2, что для случаев прямоугольной и евклидовой метрик (2.1) и (2.3) принадлежат классу задач выпуклого программирования [55, 86, 130]. Наличие дополнительных ограничений на размещение объектов, например, в виде запрещенных зон (2.2) и (2.4), или условий регулярности размещения, например, вдоль параллельных линий, приводят к тому, что большинство таких задач являются *NP*-трудными. Поэтому перспективными направлениями являются исследование области допустимых решений, возможность её уменьшения, разработка точных алгоритмов, а также алгоритмов поиска приближенных решений.

В литературе много различных постановок задач Вебера для точечных объектов на плоскости с запрещенными зонами или барьерами. Запрещенные зоны — это, как правило, выпуклые множества с непустой внутренностью, в которых нельзя размещать объекты, но через них можно прокладывать связи между ними. В таких задачах выполняется размещение объектов и оценивается стоимость связи между ними с использованием какой-либо метрики. Барьеры — это области, в которых запрещается не только размещать объекты, но и прокладывать трассы через них для установки связи между объектами. Трассы не должны пересекать барьеры, только в обход или через специальные проходы в них. Как правило, в задачах с барьерами находится расположение объектов, и решается задача трассировки связей между ними. В литературе больше внимание уделяется задачам с барьерами, чем с запрещенными зонами. Для решения задач с барьерами применяются различные подходы [62, 63, 84, 93, 94, 99]. Так, например, эвристические алгоритмы для специального вида метрик описаны в [63], а генетические алгоритмы

в [62]. В [93] исходная невыпуклая задача сведена к серии полиномиально разрешимых задач меньшей размерности. Для случая прямоугольной метрики формулируется серия дискретных задач [99]. Размещение одного объекта с разными видами барьеров рассматривается в [94], а нескольких — в [84]. Обзор результатов исследований задач с барьерами и различными метриками приведен в [94].

Задачам с запрещенными зонами посвящены работы [20, 22, 60, 68, 69, 89–91]. Постановки отличаются между собой по форме зон, наличию возможности их поворотов, изменения положения в области размещения и т.д. Наиболее часто рассматриваются частные случаи, когда размещается один объект, а зон несколько, или наоборот.

Для решения задач Вебера с запрещенными зонами применяются различные подходы. В [89] предложен эвристический алгоритм решения минисуммной задачи для евклидовой метрики и одной запрещенной зоны в виде круга. Алгоритм основан на решении последовательности задач нелинейного программирования. Адаптация предложенного алгоритма на случай нескольких зон в виде кругов и одной многоугольной зоны описаны в [90, 91]. Процедура построения специальной решетки, в узлах которой находится решение задачи с произвольным числом выпуклых многоугольных зон и разными видами метрик (l_p , $1 \leq p \leq 2$) предложена в [60, 68, 69]. В [20, 22] доказано свойство задачи с минисуммным критерием и прямоугольными запрещенными зонами, которое позволяет сузить допустимую область при поиске оптимума и предложен комбинаторный алгоритм ветвей и границ для ее решения.

Модели частично–целочисленного линейного программирования с булевыми переменными (ЧЦЛП) для минисуммной и минимаксной задач Вебера с прямоугольной метрикой и прямоугольными запрещенными зонами построены в [18, 131]. Такой подход позволяет применять аппарат целочисленной оптимизации и пакеты прикладных программ. Алгорит-

мы размещения одного объекта задачи с минимаксным критерием для прямоугольной метрики изложены в [19], а для специального вида метрики в [75].

Оптимальное размещение взаимосвязанных объектов на плоскости с произвольным числом запрещенных зон является значительно более сложной и востребованной задачей. Обзор современной литературы, Internet-источников позволяет сделать вывод о том, что в основном рассматриваются задачи с барьерами и минисуммным критерием. Недостаточно исследованы задачи с прямоугольной метрикой, минимаксным критерием и прямоугольными запрещенными зонами.

2.2 Свойства и модель целочисленного программирования

Рассмотрим постановку минимаксной задачи Вебера на плоскости с запрещенными зонами. На плоскости среди фиксированных объектов P_j с координатами (p_{1j}, p_{2j}) , $j \in J$, размещаются объекты X_i , $i \in I$. Заданы: запрещенные прямоугольные зоны F_k , $k \in Z = \{1, \dots, z\}$, со сторонами, параллельными осям координат, внутри которых не допускается размещение объектов, $F = \bigcup_{k=1}^z F_k$; $w_{ij} \geq 0$ и $u_{ik} \geq 0$ — удельные стоимости связи между объектами X_i и P_j , X_i и X_k , $j \in J$, $i, k \in I$, $i < k$, соответственно. Необходимо разместить объекты вне запрещенных зон таким образом, чтобы максимальная стоимость связи между всеми объектами была минимальной [18]. Математическая модель имеет вид [18, 25, 28]:

$$\max\left\{\max_{i \in I, j \in J} w_{ij}d(X_i, P_j), \max_{i, k \in I, i < k} u_{ik}d(X_i, X_k)\right\} \rightarrow \min, \quad (2.5)$$

$$X_i \notin \text{Int } F, \quad i \in I, \quad (2.6)$$

где $d(\cdot, \cdot)$ — некоторая метрика, $\text{Int } F$ — внутренность множества F .

В данной работе рассматривается прямоугольная метрика, т. е. если координаты размещаемых объектов обозначить как (x_i, y_i) , $i \in I$, то

$$d(X_i, P_j) = |x_i - p_{1j}| + |y_i - p_{2j}|, \quad d(X_i, X_k) = |x_i - x_k| + |y_i - y_k|.$$

Без учета запрещенных зон задача (2.5) с прямоугольной метрикой достаточно хорошо исследована. В работе [112] введением дополнительного параметра она сводится к задаче линейного программирования (ЛП). С ограничениями на максимально допустимые расстояния линейным преобразованием осуществляется переход от метрики l_1 к l_∞ и задача декомпозируется на две по координатам x и y [74]. Двойственная к каждой из которых интерпретируется в виде сетевой — определить в сети поток максимальной общей стоимости. В работе [85] задача (2.5) сводится к поиску кратчайшего пути в сети, длины дуг которой линейно зависят от параметра.

Отметим некоторые свойства задачи (2.5)–(2.6). Пусть зона F_k ограничена прямоугольником $[(a_k, c_k); (b_k, d_k)]$, где (a_k, c_k) — координаты его левого нижнего, а (b_k, d_k) — правого верхнего углов, $\forall k \in Z$. Обозначим

$$A = \min_{j \in J, k \in Z} \{p_{1j}, a_k\}, \quad B = \max_{j \in J, k \in Z} \{p_{1j}, b_k\},$$

$$C = \min_{j \in J, k \in Z} \{p_{2j}, c_k\}, \quad D = \max_{j \in J, k \in Z} \{p_{2j}, d_k\}.$$

Для поиска оптимального решения достаточно рассматривать область \mathcal{F} , ограниченную прямоугольником $[(A, C); (B, D)]$ [94]. Если левый нижний угол области \mathcal{F} не совпадает с началом координат, то этого можно добиться параллельным сдвигом. Если $B_{\mathcal{F}} = B - A$ и $D_{\mathcal{F}} = D - C$, то оптимальное решение находится в прямоугольнике $[(0, 0); (B_{\mathcal{F}}, D_{\mathcal{F}})]$ (см. Рис. 2.1).

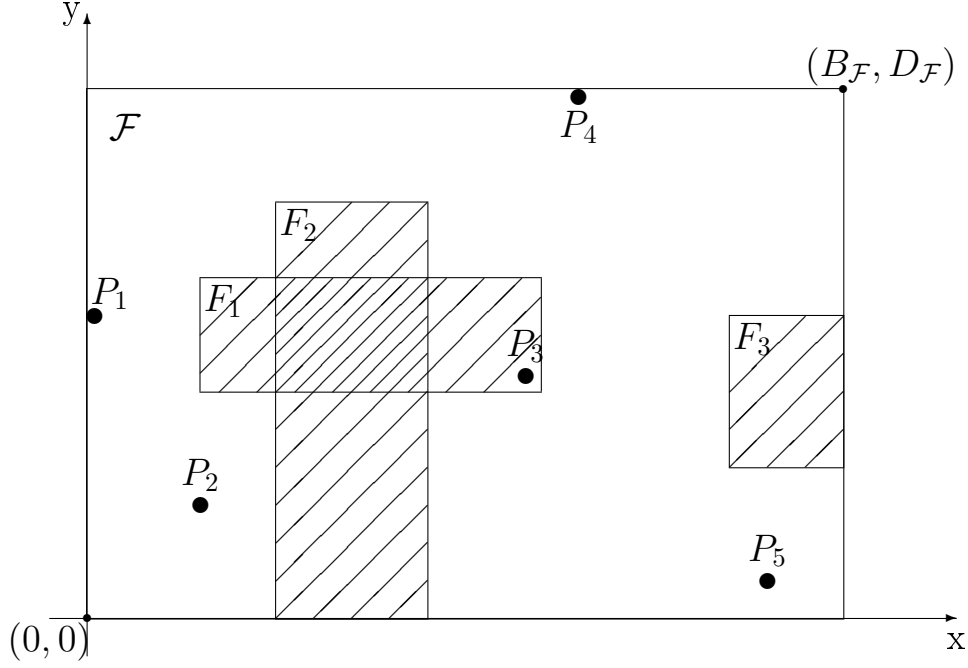


Рис. 2.1: Пример области \mathcal{F} , $A = p_{11}$, $C = c_2$, $B = b_3$, $D = p_{24}$.

Обозначим через R подмножество из \mathcal{F} , в котором допускается размещение объектов, т.е. $R = \mathcal{F} \setminus \text{Int } F$ — область допустимых решений. В общем случае R невыпуклая и несвязная.

Алгоритм решения задачи в случае, когда $n = 1$ описан в работе [18]. Обозначим X'_1, \dots, X'_n оптимальные расположения размещаемых объектов, найденных с помощью указанного алгоритма и (x'_i, y'_i) — их координаты, $i \in I$. Пусть

$$A' = \min_{i \in I} \{x'_i\}, \quad B' = \max_{i \in I} \{x'_i\}, \quad C' = \min_{i \in I} \{y'_i\}, \quad D' = \max_{i \in I} \{y'_i\}.$$

Рассмотрим прямоугольную область \mathcal{F}' , заданную координатами $[(A', C'); (B', D')]$ и через $\partial\mathcal{F}'$ обозначим ее границу. Тогда справедлива

Теорема 2.1 *Если $\partial\mathcal{F}' \subseteq R$, то в области \mathcal{F}' существует оптимальное решение задачи (2.5)–(2.6).*

Доказательство.

Пусть найдено оптимальное решение X^* задачи (2.5)–(2.6), причем некоторые из X_i^* , $i \in I$ расположены вне \mathcal{F}' . Построим новое решение

$\tilde{X} \in \mathcal{F}$, для которого $f(\tilde{X}) = f(X^*)$. Разобьем область \mathcal{F} на подобласти \mathcal{F}' , \mathcal{F}_a , \mathcal{F}_b , \mathcal{F}_c , \mathcal{F}_d и множество I на соответствующие подмножества I' , I_a , I_b , I_c , I_d (см. Рис. 2.2). Пусть $X_i^* \in \mathcal{F}_a$, $i \in I_a = \{1, \dots, t\}$. Построим решение $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_t, X_{t+1}^*, \dots, X_n^*$, для которого $f(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_t, X_{t+1}^*, \dots, X_n^*) = f(X^*)$, где \tilde{X}_i имеет координаты $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) : \tilde{x}_i = A'$, $\tilde{y}_i = y_i^*$, $i \in I_a$.

Функцию $f(X^*)$ можно представить следующим образом:

$$\max \left\{ \max_{i \in I_a, j \in J} w_{ij} d(X_i^*, P_j); \max_{i \notin I_a, j \in J} w_{ij} d(X_i^*, P_j); \max_{i, k \in I_a, i < k} u_{ik} d(X_i^*, X_k^*); \right. \\ \left. \max_{i \in I_a, k \notin I_a} u_{ik} d(X_i^*, X_k^*); \max_{i, k \notin I_a} u_{ik} d(X_i^*, X_k^*) \right\}. \quad (*)$$

Покажем, что для решения $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_t, X_{t+1}^*, \dots, X_n^*$ справедливы три неравенства.

1. Первое неравенство:

$$\max_{i \in I_a, j \in J} w_{ij} d(X_i^*, P_j) \geq \max_{i \in I_a, j \in J} w_{ij} d(\tilde{X}_i, P_j).$$

Имеют место следующие соотношения:

$$\max_{j \in J} w_{ij} d(X_i^*, P_j) \geq \max_{j \in J} w_{ij} d(\tilde{X}_i, P_j), \forall i \in I_a. \\ \max_{j \in J} w_{ij} d(X_i^*, P_j) = \max_{j \in J} w_{ij} (|x_i^* - p_{1j}| + |y_i^* - p_{2j}|) = \\ = \max_{j \in J} w_{ij} (|x_i^* - p_{1j}| + |\tilde{y}_i - p_{2j}|).$$

Так как $\tilde{y}_i = y_i^*$, для $\forall i \in I_a$ по построению, то, не учитывая одинаковые составляющие, для справедливости первого неравенства, необходимо показать, что

$$\max_{j \in J} w_{ij} (|x_i^* - p_{1j}|) \geq \max_{j \in J} w_{ij} (|\tilde{x}_i - p_{1j}|), \forall i \in I_a.$$

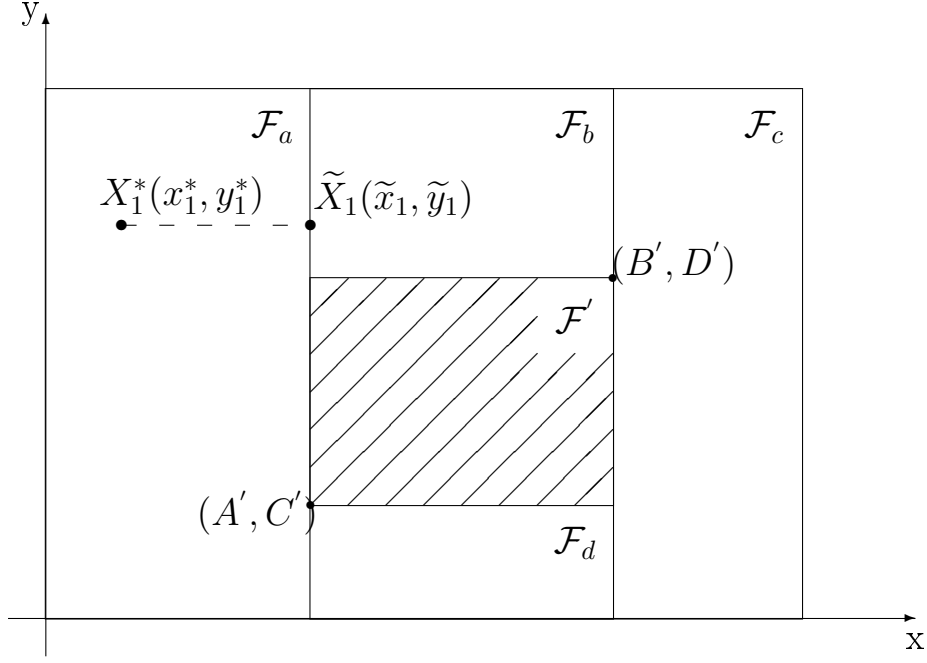


Рис. 2.2: Разбиение области \mathcal{F} на подобласти.

Для каждого i это неравенство выполняется, так как функция $\max_{j \in J} w_{ij}(|x_i - p_{1j}|)$ является выпуклой вниз и $\max_{j \in J} w_{ij}(|x'_i - p_{1j}|)$ — ее оптимальное значение, $x_i^* \leq \tilde{x}_i \leq x'_i$, для $\forall i \in I_a$.

2. Второе неравенство:

$$\max_{i,k \in I_a, i < k} u_{ik} d(X_i^*, X_k^*) \geq \max_{i,k \in I_a, i < k} u_{ik} d(\tilde{X}_i, \tilde{X}_k).$$

Его справедливость следует из цепочки равенств и неравенств:

$$\begin{aligned} \max_{i,k \in I_a, i < k} u_{ik} d(X_i^*, X_k^*) &= \max_{i,k \in I_a, i < k} u_{ik} (|x_i^* - x_k^*| + |y_i^* - y_k^*|) \geq \\ &\geq \max_{i,k \in I_a, i < k} u_{ik} (|y_i^* - y_k^*|) = \max_{i,k \in I_a, i < k} u_{ik} (|\tilde{y}_i - \tilde{y}_k|) = \\ &= \max_{i,k \in I_a, i < k} u_{ik} (|\tilde{x}_i - \tilde{x}_k| + |\tilde{y}_i - \tilde{y}_k|) = \max_{i,k \in I_a, i < k} u_{ik} d(\tilde{X}_i, \tilde{X}_k), \end{aligned}$$

так как $y_i^* = \tilde{y}_i$, $\tilde{x}_i = \tilde{x}_k$, для $\forall i, k \in I_a$ по построению.

3. Третье неравенство:

$$\max_{i \in I_a, k \notin I_a} u_{ik} d(X_i^*, X_k^*) \geq \max_{i \in I_a, k \notin I_a} u_{ik} d(\tilde{X}_i, X_k^*).$$

Это следует из того, что

$$\begin{aligned} \max_{i \in I_a, k \notin I_a} u_{ik} d(X_i^*, X_k^*) &= \max_{i \in I_a, k \notin I_a} u_{ik} (|x_i^* - x_k^*| + |y_i^* - y_k^*|) \geq \\ &\geq \max_{i \in I_a, k \notin I_a} u_{ik} (|\tilde{x}_i - x_k^*| + |y_i^* - y_k^*|) = \max_{i \in I_a, k \notin I_a} u_{ik} (|\tilde{x}_i - x_k^*| + \\ &\quad + |\tilde{y}_i - y_k^*|) = \max_{i \in I_a, k \notin I_a} u_{ik} d(\tilde{X}_i, X_k^*) \end{aligned}$$

и

$$|x_i^* - x_k^*| \geq |\tilde{x}_i - x_k^*|, \forall i \in I_a, \forall k \notin I_a.$$

Подставляя указанные три неравенства в формулу (*), получаем:

$$\begin{aligned} \max\{ \max_{i \in I_a, j \in J} w_{ij} d(\tilde{X}_i, P_j); \max_{i \notin I_a, j \in J} w_{ij} d(X_i^*, P_j); \max_{i, k \in I_a, i < k} u_{ik} d(\tilde{X}_i, \tilde{X}_k); \\ \max_{i \in I_a, k \notin I_a} u_{ik} d(\tilde{X}_i, X_k^*); \max_{i, k \notin I_a} u_{ik} d(X_i^*, X_k^*) \} = f(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_t, X_{t+1}^*, \dots, X_n^*), \end{aligned}$$

т.е.

$$f(X^*) \geq f(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_t, X_{t+1}^*, \dots, X_n^*). \quad (**)$$

Поскольку X^* — оптимальное решение задачи (2.5)–(2.6), то в (**) возможно только равенство.

Таким образом получено решение $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_t, X_{t+1}^*, \dots, X_n^*$ задачи (2.5)–(2.6) с оптимальным значением целевой функции. В построенном решении $\tilde{x}'_i = A', i \in I_a$ и $x_k^* \geq A', k \notin I_a$, т.е. по оси OX все объекты расположены правее или на левой границе области \mathcal{F}' . Далее по полученному решению $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_t, X_{t+1}^*, \dots, X_n^*$ аналогично строим новые решения для множеств $\mathcal{F}_b, \mathcal{F}_c, \mathcal{F}_d$. В результате получим оптимальное решение \tilde{X} задачи (2.5)–(2.6) такое, что $\tilde{X}_i \in \mathcal{F}', i \in I$.

Теорема 2.1 доказана.

Пусть $Z' \subseteq Z$ – множество номеров запрещенных зон таких, что для $j \in Z'$ выполнется условие $\text{Int}(\mathcal{F}' \cap F_j) \neq \emptyset$. Имеет место

Следствие 2.1 *Если $Z' \neq \emptyset$ и $\text{Int}(F_j \cap F_k) = \emptyset$ для любого $j \in Z'$, $k \in Z \setminus Z'$, то для поиска оптимального решения достаточно рассмотреть область, ограниченную контуром $\partial(\mathcal{F}' \cup_{j \in Z'} F_j)$.*

Справедливость следствия 2.1 следует из того, что, как и при доказательстве теоремы 2.1, объект необходимо переместить не на соответствующую границу области, а на границу запрещенной зоны, которая пересекается с \mathcal{F}' . Указанная граница принадлежит R , так как по условию запрещенные зоны не пересекаются с зонами с номерами из Z' . Для построения указанного контура можно использовать алгоритм плоского заметания, основанного на дереве отрезков [49].

Запишем модель частично–целочисленного линейного программирования (ЧЦЛП) для задачи (2.5)–(2.6) [18].

Для учета условия (2.6) отметим, что область R может быть представлена в виде объединения прямоугольников R_k – разрешенных областей со сторонами параллельными осям координат, в которых допускается размещение объектов, $k \in G = \{1, \dots, g\}$. Разрешенные области строятся с помощью алгоритма, описанного в [18].

Пусть область R_k ограничена прямоугольником $[(\tilde{a}_k, \tilde{c}_k); (\tilde{b}_k, \tilde{d}_k)]$, $k \in G$. Условие принадлежности объекта X_i только одной разрешенной области R_k записывается с помощью булевых переменных h_{ik} , $i \in I$, $k \in G$, ($h_{ik} = 1$, если $X_i \in R_k$, иначе $h_{ik} = 0$) и имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} x_i - \tilde{a}_k h_{ik} &\geq 0 \\ y_i - \tilde{c}_k h_{ik} &\geq 0 \\ -x_i + B_{\mathcal{F}} - h_{ik}(B_{\mathcal{F}} - \tilde{b}_k) &\geq 0 \\ -y_i + D_{\mathcal{F}} - h_{ik}(D_{\mathcal{F}} - \tilde{d}_k) &\geq 0 \\ \sum_{k=1}^g h_{ik} &= 1 \\ h_{ik} &\in \{0, 1\} \end{aligned} \right\} i \in I, k \in G. \quad (2.7)$$

Введением дополнительного параметра $x_0 \geq 0$ задача (2.5) сводится к эквивалентной задаче ЛП [112]. С учетом условий (2.7) получаем следующую модель ЧЦЛП :

$$x_0 \rightarrow \min \quad (2.8)$$

$$\left. \begin{aligned} x_i + y_i + \frac{x_0}{w_{ij}} &\geq p_{1j} + p_{2j} \\ -x_i + y_i + \frac{x_0}{w_{ij}} &\geq -p_{1j} + p_{2j} \\ x_i - y_i + \frac{x_0}{w_{ij}} &\geq p_{1j} - p_{2j} \\ -x_i - y_i + \frac{x_0}{w_{ij}} &\geq -p_{1j} - p_{2j} \end{aligned} \right\}, j \in J, i \in I, \quad (2.9)$$

$$\left. \begin{aligned} x_i - x_k + y_i - y_k + \frac{x_0}{u_{ik}} &\geq 0 \\ -x_i + x_k + y_i - y_k + \frac{x_0}{u_{ik}} &\geq 0 \\ x_i - x_k - y_i + y_k + \frac{x_0}{u_{ik}} &\geq 0 \\ -x_i + x_k - y_i + y_k + \frac{x_0}{u_{ik}} &\geq 0 \end{aligned} \right\}, i, k \in I, i < k, \quad (2.10)$$

Условия (2.9) — это ограничения, связывающие значение целевой функции с расстояниями между размещаемыми и фиксированными объектами, а (2.10) — это ограничения, связывающие значение целевой функции с расстояниями размещаемых объектов между собой.

Замечание 2.1 Если существует подмножество $G' \subseteq G$ таких, что $\mathcal{F}' \subseteq \bigcup_{k \in G'} R_k$, то задача (2.5)–(2.6) полиномиально разрешима.

Действительно, для этого достаточно решить задачу ЛП в \mathcal{F}' , при этом в модели (2.7) – (2.10) условия (2.7) заменяются линейными ограничениями.

2.3 Алгоритм ветвей и границ и результаты вычислительных экспериментов

В алгоритме ветвей и границ важным является построение нижних оценок целевой функции и разбиение множества допустимых решений на подмножества (ветвление).

Ветвление. Осуществляется с помощью последовательного фиксирования объектов в заданном порядке в разрешенных областях.

Нижние оценки. Предложено несколько вариантов построения оценок размещения объектов в разрешенных областях.

В первом варианте X_i фиксируется в области R_k , G' — номера областей, в которых зафиксированы размещаемые объекты, $I(R_s)$ — множество размещаемых объектов в области R_s , $s \in G' \subseteq G$. Тогда нижняя оценка значения целевой функции (2.5) при размещении объекта X_i в области R_k вычисляется по формуле:

$$\max\left\{\max_{j \in J}(w_{ij}d(R_k, P_j)), \max_{s \in G'}(u_{it(s)}d(R_k, R_s))\right\},$$

где $u_{it(s)} = \max_{r \in I(R_s)} u_{ir}$, $s \in G'$ и расстояния между множествами определяются стандартным образом.

Во втором варианте решается задача (2.5)–(2.6) для $n = 1$ алгоритмом из [18], то есть оценивается максимальное взвешенное расстояние каждого размещаемого только по отношению к фиксированным объектам.

В третьем варианте, при фиксации объектов в разрешенных областях, добавляются ограничения на максимально допустимые расстояния между объектами, которые определяются максимальными расстояниями между соответствующими разрешенными областями и решается задача ЛП.

Для описания алгоритма ветвей и границ введем обозначения: res — лучшее значение целевой функции из известных допустимых решений (рекорд) в текущий момент;

f — оптимальное значение целевой функции задачи ЛП с фиксированными булевыми переменными;

D — подмножество допустимых решений;

$\xi(D)$ — нижняя оценка целевой функции на подмножестве D ;

u — уровень ветвления, т.е. номер объекта, который размещается на этом уровне;

$H(u)$ — номер области, в которой фиксируется объект u ;

D_{uj} — разрешенная область с номером j , рассматриваемая в дереве ветвления на уровне u .

Начальное значение rec положим равным $+\infty$.

Итерация 0. Решаем задачу ЛП (2.8)–(2.10). Если все объекты находятся вне $Int F$, то исходная задача решена. Иначе строим разрешенные области и разбиваем множество D на g непересекающихся (кроме как по границе) подмножеств $D = D_{11} \cup D_{12} \cup \dots \cup D_{1g}$. Полагаем $u = 1$ и на итерацию 1.

Итерация $l \geq 1$.

Шаг 1. Если D_u — не пустое семейство подмножеств, для которых не выполнялось ветвление на уровне u , то на Шаг 2. Иначе на Шаг 3.

Шаг 2. Вычисляем нижние оценки $\xi(D_{uk})$, $k \in G$ и выбираем для разбиения подмножество D_{up} : $\xi(D_{up}) = \min_{k \in G} \xi(D_{uk})$.

Если $\xi(D_{up}) \geq rec$, то на Шаг 3, иначе $H(u) := p$ и на Шаг 4.

Шаг 3. Если $u = 1$, то СТОР, задача решена. Иначе $u := u - 1$ и на Шаг 1.

Шаг 4. Если $u = n$, то полагаем $h_{jH(j)} = 1$, $j \in N$ и $h_{jk} = 0$, $k \neq H(j)$, $k \in G$, $j \in N$. На Шаг 5.

Иначе множество D_{up} разбивается на g непересекающихся подмножеств $D_{up} = D_{u+1\ 1} \cup D_{u+1\ 2} \cup \dots \cup D_{u+1\ g}$, $u := u + 1$ и на Шаг 2.

Шаг 5. Решаем задачу ЛП. Если $f < rec$, то полагаем $rec = f$, иначе на Итерацию $l + 1$.

Для решения задачи реализован программно алгоритм ветвей и границ с первым вариантом оценки значений целевой функции. По результатам расчета в контрольных примерах точность второго и третьего вариантов оценки значений целевой функции ниже, чем первого.

Результаты вычислительного эксперимента. Проведен вычислительный эксперимент по сравнению результатов решения задач с учетом найденного свойства (Теорема 2.1) и без него. Решения находились с помощью разработанного алгоритма ветвей и границ и с использованием модели ЧЦЛП и пакета IBM ILOG CPLEX 12.2. Эксперимент проводился на компьютере со следующими техническими характеристиками: процессор Intel® Core™ i5-2450M 2.50 GHz 6,00 ГБ оперативной памяти. Алгоритм ветвей и границ с первым вариантом оценки реализован в среде Borland C++ Builder Version 6.0 (Build 10.166). Координаты фиксированных объектов и удельные стоимости связи между объектами генерировались случайным образом. Численное решение задачи на конкретном примере представлено в приложении А.

Сравнение результатов эксперимента приведено в таблицах 2.1 и 2.2, где используются следующие обозначения $t_{\text{АВГ}}^*$ и $t_{\text{АВГ}}$ — среднее время работы (в секундах) по результатам трех запусков алгоритма с учетом свойства и без него. Аналогично, t_{CPLEX}^* и t_{CPLEX} — среднее время работы пакета IBM ILOG CPLEX (в секундах) по результатам трех запусков с применением свойства и без него. Число разрешенных областей в задаче с учетом свойства и без него обозначены как g^* и g соответственно.

В результате эксперимента можно отметить, что учет доказанного свойства сужения задачи сокращает время ее решения при использовании обоих рассматриваемых подходов. При решении задач алгоритмом ветвей и границ с учетом свойства сужения время решения в среднем сокращается на 49 %, а при использовании CPLEX — на 64 %.

Таблица 2.1: Решение задачи алгоритмом.

№	n	m	g	g^*	t_{ABF}	t_{ABF}^*
1	3	2	3	1	0,202	0,140
2	5	5	8	3	1,076	0,562
3	6	7	5	2	2,371	1,155
4	6	7	4	2	0,873	0,561
5	5	9	10	3	3,712	1,373
6	8	2	5	2	0,889	0,499
7	10	10	10	3	4,586	0,843
8	10	15	10	3	5,928	1,762
9	16	19	7	3	9,142	6,614
10	20	5	7	3	5,897	3,135

Таблица 2.2: Решение задачи пакетом.

№	n	m	g	g^*	t_{CPLEX}	t_{CPLEX}^*
1	3	2	3	1	0,12	0,01
2	5	5	8	3	0,44	0,11
3	6	7	5	2	0,13	0,01
4	6	7	4	2	0,22	0,2
5	5	9	10	3	0,36	0,05
6	8	2	5	2	0,33	0,22

Глава 3

Размещение прямоугольных объектов с минисуммным критерием на линиях с запрещенными зонами

Глава посвящена исследованию и решению задачи Вебера для прямоугольных объектов на линиях с запрещенными зонами и критерием минимума суммарной стоимости связей. В п. 3.1 дан краткий обзор результатов исследований задач размещения габаритных объектов. В п. 3.2 сформулирована минисуммная задача Вебера для прямоугольников на линии с запрещенными зонами. Найдены свойства, позволяющие решение исходной непрерывной задачи свести к решению дискретных задач меньшей размерности. Построена модель целочисленного линейного программирования. В п. 3.3 предложены алгоритмы поиска приближенного решения, локального и глобального оптимумов. Проведены вычислительные эксперименты с использованием разработанных алгоритмов и решения задачи с применением предложенной модели и пакета IBM ILOG CPLEX. В п. 3.4 приводятся постановка и математическая модель задачи на линиях, её сведение к задаче на линии. Построена модель целочисленного линейного программирования для поиска локального оптимума. Проведен вычислительный эксперимент с использованием предложенной модели и пакета IBM ILOG CPLEX 12.2.

3.1 О размещении габаритных объектов

Задачи размещения взаимосвязанных габаритных объектов имеют большое прикладное значение, а также представляют значительный интерес с математической точки зрения. В частности, для таких задач можно выделить два основных направления приложений: размещение элементов электронных устройств и единиц технологического оборудования. В первом направлении решается не только задача размещения элементов, но и выполняется трассировка соединений между ними. Во втором направлении, как правило, основное внимание уделяется размещению единиц оборудования и оценке стоимости связей между ними. Для решения указанных задач используются математические методы и средства вычислительной техники.

Задачей размещения в проектировании электронных устройств является определение оптимального пространственного расположения элементов на заданной поверхности (коммутационном поле). Критерии и ограничения в задаче можно разделить на метрические и топологические. К метрическим относятся: размеры элементов и расстояния между ними, размеры коммутационного поля, расстояния между выводами элементов, допустимые длины соединений; к топологическим — количество пространственных пересечений соединений, количество межслойных переходов, близость расположения друг к другу тепловыделяющих элементов или электромагнитно несовместимых элементов и соединений.

Задача трассировки заключается в определении геометрии соединений конструктивных элементов электронных устройств. Различают три вида трассировки соединений: проводные, печатные и пленочные. Критериями оптимальности решения задачи трассировки могут быть минимальные: суммарная длина соединений, количество слоев монтажа, количество переходов из слоя в слой, наводки в цепях связи элементов. Если связи между соединениями осуществляются проводным монтажом,

то часто основным критерием оптимальности решения задачи размещения является длина соединений.

Задачи второго направления необходимо решать не только при проектировании размещения технологического оборудования, но и при выполнении проектных работ обычно на этапе эскизного проектирования (планировки) в других отраслях. Это размещение цехов предприятия, элементов гидросистемы станка, объектов при прокладке нефте- и газопроводов и т.д. На этапе планировки обычно выполняется предварительная оценка стоимости связей между размещаемыми элементами. В частности, это касается этапа монтажной проработки производства, в результате которого решается задача размещения оборудования и трассировки внутрицеховых трубопроводов. Здесь, в отличие от электронных устройств, не так важен этап трассировки, так как все выполняется в трехмерном пространстве. На вариант размещения влияет ряд факторов, например, тип конструкции цеха, условия безопасной работы, условия транспортировки деталей (заготовок), удобство обслуживания и ремонта, возможность замены оборудования, соблюдение требований строительных норм и правил. Часто для создания прямых проездов, удобства эксплуатации и технического обслуживания оборудования требуется “регулярность” размещения [21], например, его расположение вдоль, так называемых, “красных” линий.

Практическая ценность решения задач второго направления обусловлена повышением эффективности функционирования различных производств, сокращением временных затрат и снижением издержек на производство изделий. В работе [81] утверждается, что до половины производственных затрат в промышленности связаны с обработкой материалов и эффективным размещением оборудования. Улучшение планировки часто приводит к снижению затрат на обработку материалов и транспортировку, уменьшению загруженности оборудования, а также ускорению рабо-

чего процесса. В результате эффективное размещение технологического оборудования имеет существенное значение для конкурентоспособности производства. Для решения таких задач в процессе проектирования нового или модернизации существующего производства используются математический аппарат и прикладное программное обеспечение.

Во всех перечисленных областях практического применения задач размещения часто необходимо учитывать габариты объектов, когда размеры элементов электронных устройств (единиц оборудования) соизмеримы с размерами областей размещения. Учет этого фактора при автоматизированном решении позволяет выбрать оптимальный вариант размещения оборудования, который более адекватно отражает реальную ситуацию.

При решении задач оптимального размещения габаритных объектов обычно объекты, участвующие в процессе размещения, аппроксимируются простейшими геометрическими фигурами, например, прямоугольниками или кругами. Несмотря на то, что аппроксимация деталей сложной формы прямоугольными объектами является приближением к реальным объектам, программы автоматизированного проектирования размещения прямоугольников широко применяются на практике. Это уменьшает дополнительную геометрическую сложность проверки условий взаимного непересечения объектов. Важными направлениями в изучении таких задач являются создание и развитие математического аппарата для построения моделей, адекватно отражающих практические ситуации, разработка оптимизационных методов решения.

Для решения задач оптимального размещения прямоугольных объектов разработаны различные подходы [14, 21, 46, 50, 121]. Хорошо применимым на практике и проработанным с математической точки зрения можно считать частный случай размещения деталей прямоугольной формы на прямоугольных заготовках, так называемые задачи упаковки. Для решения таких задач используются методы линейного программирова-

ния [113], разработаны детерминированные алгоритмы упаковки [5, 45], методы динамического перебора [44] и другие. В [50] рассматривалась задача упаковки несвязанных между собой прямоугольников в полубесконечную полосу минимальной длины с запрещенными зонами. Предложен алгоритм поиска с запретами для нахождения приближенного решения. Для построения множества Парето-оптимальных решений задачи размещения прямоугольников на параллельных линиях без учета запрещенных зон, когда необходимо минимизировать длину и ширину области, занимаемой оборудованием, применялся аппарат целочисленной оптимизации и динамического программирования [21]. В некоторых задачах предусмотрена возможность изменения положения размещаемых объектов. Для задачи, с возможностью поворотов объектов и построением маршрутов для прокладки связей, предложен эвристический алгоритм [14]. Важный подкласс задач оптимального размещения прямоугольных объектов — это задачи планирования сверхбольших интегральных схем (*VLSI chip design*). Известны различные подходы к решению таких задач, например, использование линейного и квадратичного программирования, имитации отжига, генетических алгоритмов [72, 73, 88]. В [127] приведен широкий обзор практических приложений и различных подходов к решению таких задач.

В литературе описаны решения задач, в которых размещаются геометрические объекты в форме кругов. Например, в [54] рассматриваются задачи покрытия плоскости равными кругами и выпуклой области минимальным числом равных кругов. В [103] обсуждаются вопросы, связанные с оценкой качества полученного решения. В работе [41] приводятся практические применения и модификация задачи покрытия выпуклой области равными кругами с учетом обхода препятствий, в виде прямоугольных запрещенных зон. Рассматриваемая задача является *NP*-трудной, поэтому для ее решения часто предлагаются различные

метаэвристики и приближенные методы. Решению минимаксной задачи размещения одного габаритного объекта на плоскости с различными формами барьеров посвящены работы [114, 119, 120].

В приведенных примерах размещаются несвязанные между собой габаритные объекты. Для решения задач размещения взаимосвязанных прямоугольных объектов с критерием минимума суммарной стоимости связей предложены алгоритмы локальной оптимизации в случае плоскости и динамического программирования для линии [46, 121]. В указанных постановках отсутствуют запрещенные зоны в областях размещения.

На сегодняшний день задачи оптимального размещения габаритных объектов интенсивно изучаются и востребованы на практике. К ним относятся задачи раскроя–упаковки и размещения взаимосвязанных объектов. Причем наиболее изучены задачи первого типа. Большинство из них является задачами оптимизационного геометрического моделирования и, с точки зрения комбинаторной сложности, принадлежат к классу NP –трудных. Обзор отечественной и зарубежной литературы, Internet–источников позволяет сделать вывод, что задачи размещения взаимосвязанных габаритных объектов с учетом запрещенных зон недостаточно изучены. В основном рассматриваются подобные задачи без запрещенных зон, либо с учетом зон, но без связей между объектами.

В связи с этим, перспективным направлением дальнейших исследований является изучение и решение задач размещения взаимосвязанных габаритных объектов с учетом запрещенных зон и регулярности размещения, в частности, задачи Вебера для прямоугольных объектов на параллельных линиях с запрещенными зонами.

3.2 Постановка и свойства задачи на линии

Рассмотрим постановку задачи Вебера для прямоугольников на линии с запрещенными зонами. Размещение прямоугольников на линии сводит-

ся к размещению отрезков.

На отрезке длины LS с фиксированными объектами и запрещенными зонами (отрезками) размещаются объекты, центры которых связаны между собой, с фиксированными и с зонами. Необходимо расположить объекты вне зон так, чтобы они не пересекались между собой и с фиксированными, и суммарная стоимость связей объектов между собой и с зонами была минимальной.

Будем называть фиксированные объекты и запрещенные зоны — зонами, а размещаемые объекты — объектами. Далее множество зон будем обозначать через J . Обозначим координаты центров и длины объектов X_i и зон F_j как x_i, b_j и $l_i, p_j, i \in I = \{1, \dots, n\}, j \in J = \{1, \dots, m\}$ соответственно; $w_{ij} \geq 0, u_{ik} \geq 0$ — удельные стоимости связей между X_i и F_j, X_i и $X_k, i, k \in I, j \in J, i < k$. Необходимо разместить объекты X_1, \dots, X_n на отрезке вне зон F_1, \dots, F_m так, чтобы они не пересекались, и суммарная стоимость связей объектов между собой и с зонами была минимальной. Математическая модель имеет вид:

$$G(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij} |x_i - b_j| + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n u_{ik} |x_i - x_k| \rightarrow \min, \quad (3.1)$$

$$|x_i - b_j| \geq \frac{l_i + p_j}{2}, \quad i \in I, j \in J, \quad (3.2)$$

$$|x_i - x_k| \geq \frac{l_i + l_k}{2}, \quad i, k \in I, i < k, \quad (3.3)$$

$$\frac{l_i}{2} \leq x_i \leq LS - \frac{l_i}{2}, \quad i \in I. \quad (3.4)$$

Первая составляющая в (3.1) определяет суммарную стоимость связей между объектами и зонами, вторая — объектов между собой, а (3.2) и (3.3) — это условия на непересечение.

Допустимая область V несвязная и состоит из набора r непересекающихся отрезков (блоков) B_k с длинами L_k , в которые размещаются

объекты X_i , $i \in I$, $B = \bigcup_{k=\overline{1,r}} B_k$. Задача (3.1)–(3.4) NP –трудная, поиск её допустимого решения — это построение одномерной упаковки в контейнеры [11, 12, 43]. В данном случае упаковываются объекты с длинами l_i , $i \in I$, в контейнеры размерами L_k , $k = \overline{1,r}$. Кроме того, если нет зон, то (3.1)–(3.4) — это одномерная задача размещения [123], которая NP –трудна для произвольной структуры связей между объектами.

Для допустимого размещения будем называть *остатком* в блоке B_k отрезок между двумя соседними объектами без общей границы, либо между границей блока и соседним объектом. Блок без объектов будем считать блоком с остатком. Пары элементов (объекты, зоны, остатки) будем называть *склеенными*, если они имеют общую границу.

Обозначим $J_L(B_k)$, $J_R(B_k)$ — множество зон левее, правее блока B_k , $I_L(A)$, $I_R(A)$ — множество объектов левее, правее блока (зоны) A . Для каждого объекта X_i в блоке B_k определим суммарные стоимости связей Lw_i и Rw_i следующим образом

$$Lw_i = \sum_{j \in J_L(B_k)} w_{ij} + \sum_{k \in I_L(B_k)} u_{ik}, \quad Rw_i = \sum_{j \in J_R(B_k)} w_{ij} + \sum_{k \in I_R(B_k)} u_{ik}.$$

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$ — некоторое допустимое решение задачи (3.1)–(3.4), которое однозначно определяет разбиение объектов X_1, \dots, X_n по блокам. Обозначим $I_k(x)$ — множество номеров объектов в B_k , $I = \bigcup_{k=\overline{1,r}} I_k(x)$, а через $H_k(x)$ — множество остатков в B_k для x . Пусть величина n_k задает мощность множества $I_k(x)$, тогда $|H_k(x)| \leq n_k + 1$. Отметим, что x можно представить в виде $x = (x^1, \dots, x^r)$, где x^k — координаты центров объектов, расположенных в B_k с номерами из $I_k(x)$.

Утверждение 3.1 *Для произвольного допустимого решения x задачи (3.1)–(3.4) можно построить другое допустимое решение x' такое, что $|H_k(x')| \leq 1$, $k = 1, \dots, r$ и $G(x') \leq G(x)$.*

Доказательство.

Рассмотрим произвольный блок B_k , для которого $|H_k(x)| \geq 2$. Тогда в B_k найдется совокупность S склеенных объектов, слева и справа от которой имеются остатки. Обозначим через l_L и l_R — длины этих остатков, а через $LI(S)$, $RI(S)$ — подмножество номеров объектов из $I_k(x)$, находящихся левее, правее S соответственно. Если $\sum_{i \in S} Lw_i + \sum_{i \in S} \sum_{j \in LI(S)} u_{ij} \geq \sum_{i \in S} Rw_i + \sum_{i \in S} \sum_{j \in RI(S)} u_{ij}$, то полагаем $x'_i = x_i$, $i \notin S$ и $x'_i = x_i - l_L$, $i \in S$. Тогда целевая функция $G(x')$ уменьшится на величину $l_L(\sum_{i \in S} Lw_i + \sum_{i \in S} \sum_{j \in LI(S)} u_{ij})$, а увеличится на $l_L(\sum_{i \in S} Rw_i + \sum_{i \in S} \sum_{j \in RI(S)} u_{ij})$.

$$\begin{aligned} G(x') - G(x) &= l_L \left(\sum_{i \in S} Rw_i + \sum_{i \in S} \sum_{j \in RI(S)} u_{ij} \right) - l_L \left(\sum_{i \in S} Lw_i + \sum_{i \in S} \sum_{j \in LI(S)} u_{ij} \right) = \\ &= l_L \left(\sum_{i \in S} Rw_i + \sum_{i \in S} \sum_{j \in RI(S)} u_{ij} - \left(\sum_{i \in S} Lw_i + \sum_{i \in S} \sum_{j \in LI(S)} u_{ij} \right) \right) \leq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, число остатков в B_k уменьшится на единицу, а целевая функция не увеличится. Аналогично рассматривается случай, если $\sum_{i \in S} Lw_i + \sum_{i \in S} \sum_{j \in LI(S)} u_{ij} < \sum_{i \in S} Rw_i + \sum_{i \in S} \sum_{j \in RI(S)} u_{ij}$. Повторяем такой процесс пока не будет выполнено равенство $|H_k(x')| = 1$.

Утверждение 3.1 доказано.

Из утверждения 3.1 следует, что для заданного разбиения объектов по блокам и фиксированного порядка их расположения можно построить размещение со значением целевой функции не хуже, в котором не более одного остатка в блоке. Длину остатка в блоке B_k обозначим Δ_k .

Отметим, что число разбиений объектов по блокам не превосходит r^n . Для каждого разбиения достаточно рассматривать не более одного остатка в блоках, поэтому исходная непрерывная задача сводится к дискретной.

Обозначим LB_k , RB_k — координаты левой и правой границ блока B_k . Тогда, при фиксированном разбиении объектов по блокам, целевую

функцию $G(x)$ можно представить в виде

$$G(x) = \sum_{k=1}^r G_k(x^k) + \bar{C}, \quad (3.5)$$

где

$$G_k(x^k) = \sum_{s \in I_k(x)} \sum_{t \in I_k(x), t > s} u_{st} |x_s - x_t| + \sum_{s \in I_k(x)} |x_s - LB_k| \left(\sum_{j \in J_L(B_k)} w_{sj} + \right. \\ \left. + \sum_{i \in I_L(B_k)} u_{si} \right) + \sum_{t \in I_k(x)} |x_t - RB_k| \left(\sum_{j \in J_R(B_k)} w_{tj} + \sum_{i \in I_R(B_k)} u_{ti} \right),$$

\bar{C} — некоторая константа.

Первая составляющая в $G_k(x^k)$ — это суммарная стоимость связей между объектами в блоке B_k , вторая — между объектами из B_k и LB_k , третья — между объектами из B_k и RB_k .

Для случая, когда область размещения на отрезке ограничена слева и справа зонами

$$\bar{C} = \frac{1}{2} p_1 \sum_{k \in I_R(F_1)} w_{k1} + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{m-1} p_j \left(\sum_{k \in I_L(F_j)} w_{kj} + \sum_{k \in I_R(F_j)} w_{kj} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{k \in I_L(F_j)} \sum_{t \in J, t > j} w_{kt} + 2 \sum_{k \in I_R(F_j)} \sum_{s \in J, s < j} w_{ks} + 2 \sum_{k \in I_L(F_j)} \sum_{t \in I_R(F_j)} u_{kt} \right) + \\ + \frac{1}{2} p_m \sum_{k \in I_L(F_m)} w_{km}.$$

Таким образом, для нахождения оптимума задачи (3.1)—(3.4) при фиксированном разбиении объектов по блокам, достаточно найти минимумы функций $G_k(x^k)$, $k = 1, \dots, r$.

Введем следующее определение.

Определение 3.1 Допустимое решение x будем называть локальным минимумом задачи (3.1)—(3.4), если $G(x) \leq G(x')$ для любого $x' : I_k(x) = I_k(x')$, $k = 1, \dots, r$.

При фиксированном разбиении объектов по блокам в каждом B_k можно рассматривать задачу размещения с n_k+2 объектами. При этом размещаются n_k объектов на отрезке с двумя фиксированными объектами F_L и F_R , расположенными в точках с координатами LB_k и RB_k соответственно. Для любого $i \in I_k(x)$ обозначим $w_{iL} = \left(\sum_{j \in J_L(B_k)} w_{sj} + \sum_{i \in I_L(B_k)} u_{si} \right)$ и $w_{iR} = \left(\sum_{j \in J_R(B_k)} w_{tj} + \sum_{i \in I_R(B_k)} u_{ti} \right)$, тогда эта задача записывается следующим образом.

$$G_k(x^k) = \sum_{s \in I_k(x)} \sum_{t \in I_k(x), t > s} u_{st} |x_s - x_t| + \sum_{s \in I_k(x)} w_{sL} |x_s - LB_k| + \sum_{t \in I_k(x)} w_{tR} |x_t - RB_k| \rightarrow \min, \quad (3.6)$$

$$|x_i - x_k| \geq \frac{l_i + l_k}{2}, \quad i, k \in I_k(x), i < k, \quad (3.7)$$

$$LB_k + \frac{l_i}{2} \leq x_i \leq RB_k - \frac{l_i}{2}, \quad i \in I_k(x). \quad (3.8)$$

Необходимо найти координаты центров объектов в B_k , соответствующие вектору x^k , при которых достигается минимум функции (3.6) и выполняются ограничения (3.7), (3.8). Число переменных в (3.6)–(3.8) равно n_k .

Так как $I_k(x) \cap I_l(x) = \emptyset$ для любых $k, l = 1, \dots, r$, то таким образом формулируется r независимых задач вида (3.6)–(3.8) одинаковой структуры. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1 *Для поиска локального минимума задачи (3.1)–(3.4) достаточно решить r задач вида (3.6)–(3.8).*

Доказательство теоремы 3.1 следует из представления целевой функции (3.5).

Отметим, что процесс поиска локального минимума можно распараллелить, так как r задач вида (3.6)–(3.8) независимы между собой [15].

Модель целочисленного линейного программирования

Запишем задачу (3.1)–(3.4) в виде модели ЧЦЛП. Поиск минимума функции (3.1) без условий (3.2), (3.3) можно сформулировать как задачу линейного программирования с помощью введения дополнительных параметров [55]: $s_{ij} \geq 0$, $t_{ik} \geq 0$, $i, k \in I$, $j \in J$, $i < k$, которые позволяют заменить модули в выражении (3.1) линейными неравенствами. Для записи условия непересечения объектов между собой и с зонами и определения взаимного порядка их расположения (левее, правее) введем дополнительные булевы переменные z_{ik}^2 , $i, k \in I$, $i < k$ и z_{ij}^1 , $i \in I$, $j \in J$, ($z_{ik}^2 = 1$, если X_i располагается левее X_k , иначе $z_{ik}^2 = 0$; $z_{ij}^1 = 1$, если X_i левее F_j , иначе $z_{ij}^1 = 0$). Получаем модель ЧЦЛП задачи (3.1)–(3.4):

$$G(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij} \cdot s_{ij} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n u_{ik} \cdot t_{ik} \rightarrow \min, \quad (3.9)$$

$$-s_{ij} \leq x_i - b_j \leq s_{ij}, \quad i \in I, j \in J, \quad (3.10)$$

$$-t_{ik} \leq x_i - x_k \leq t_{ik}, \quad i, k \in I, i < k, \quad (3.11)$$

$$\begin{cases} x_i - b_j - (l_i + p_j)/2 + C \cdot z_{ij}^1 \geq 0, \\ b_j - x_i - (l_i + p_j)/2 + C \cdot (1 - z_{ij}^1) \geq 0, \end{cases} \quad i \in I, j \in J, \quad (3.12)$$

$$\begin{cases} x_i - x_k - (l_i + l_k)/2 + C \cdot z_{ik}^2 \geq 0, \\ x_k - x_i - (l_i + l_k)/2 + C \cdot (1 - z_{ik}^2) \geq 0, \end{cases} \quad i, k \in I, i < k, \quad (3.13)$$

$$s_{ij} \geq 0, \quad i \in I, j \in J, \quad (3.14)$$

$$t_{ik} \geq 0, \quad i, k \in I, i < k, \quad (3.15)$$

$$z_{ij}^1 \in \{0, 1\}, \quad i \in I, j \in J, \quad (3.16)$$

$$z_{ik}^2 \in \{0, 1\}, \quad i, k \in I, i < k, \quad (3.17)$$

$$\frac{l_i}{2} \leq x_i \leq LS - \frac{l_i}{2}, \quad i \in I. \quad (3.18)$$

Достаточно большая константа $C > 0$ необходима для выполнения альтернативных условий и может выбрана, например, так $C = 2 \cdot \sum_{k=1}^r L_k$. Используя указанную модель, задача (3.1)–(3.4) может быть решена, например, с помощью пакета IBM ILOG CPLEX.

3.3 Алгоритмы решения задачи на линии и результаты вычислительных экспериментов

В данном разделе описываются алгоритмы поиска приближенного решения, локального и глобального оптимумов задачи.

Алгоритм поиска приближенного решения. Итерация алгоритма состоит из двух этапов. На первом этапе находится очередное допустимое разбиение объектов по блокам с помощью алгоритма последовательно-одиночного размещения [52], на втором — объекты переставляются в блоках. Критерии останова алгоритма: время работы, число итераций, просмотр всех возможных разбиений. Трудоемкость предложенного алгоритма можно оценить как $O(r^n(mn^2 + n^3))$.

Блок B_k будем называть *допустимым* для объекта X_i , если $L_k \geq l_i$ и *условно-допустимым*, если $L_k \geq \sum_h l_h + l_i$, где $\sum_h l_h$ — суммарная длина объектов, размещенных в B_k . Блок B_k будем называть *просмотренным* для X_i , если при фиксированном размещении X_1, \dots, X_{i-1} , объект X_i размещался в B_k , иначе — *непросмотренным*.

Поиск допустимых разбиений. Пусть $L_1 \geq \dots \geq L_r$, $l_1 \geq \dots \geq l_n$. В ходе работы алгоритма А1 для построения начального допустимого разбиения, в заданном порядке для каждого объекта находится первый условно-допустимый блок. Если такого блока нет, то отменяется принадлежность блоку для предыдущего объекта и т.д. После отмены, для каждого следующего объекта поиск условно-допустимого блока начинается с B_1 . Если допустимое разбиение не построено и при этом для X_1 просмотрены все допустимые блоки, то задача не имеет решения.

Для построения очередного допустимого разбиения, начиная с X_n , осуществляется поиск следующих условно-допустимых блоков для объектов.

Количество вариантов разбиений X_i , $i \in I$, по блокам B_1, \dots, B_r не превосходит r^n . Действительно, в соответствии с алгоритмом А1 объект X_1 в каждом блоке будет фиксироваться не более одного раза, то есть число просмотров не более r . Так как просмотр блоков для любого объекта начинается с B_1 , на каждое изменение блока для X_1 будет просмотрено не более r блоков для X_2 , то есть общее число просмотров для X_1 и X_2 не превосходит r^2 и т.д.

Отметим, что с помощью алгоритма А1 будут просмотрены всевозможные допустимые разбиения. Действительно, при нахождении для произвольного объекта X_i следующего условно-допустимого блока просмотр блоков начинается с B_1 для всех X_j , $j > i$.

Минимизация суммарной стоимости связей. Предлагается два варианта алгоритма минимизации суммарной стоимости связей объектов с учетом их длин (А2) и без учета (А3). Объекты в блоках последовательно склеиваются в зависимости от суммарной стоимости связей с объектами и зонами, расположенными левее (правее) блока. Обозначим $N_L(B_k)$ — множество объектов, склеенных между собой, самый левый из которых склеен с левой границей B_k , а $N_R(B_k)$ — соответственно с правой, и пусть объекты в B_k имеют номера от 1 до n_k .

Алгоритм А2

Шаг 0. $T := I_k(x)$; $N_L(B_k) := \emptyset$; $N_R(B_k) := \emptyset$;

Шаг 1. Если $(N_L(B_k) = \emptyset)$ and $(N_R(B_k) = \emptyset)$, то на Шаг 2,

Иначе

Если $(t \in N_L(B_k))$, то $\forall i \in T$ $Lw_i := Lw_i + Lw_t$, Иначе $\forall i \in T$ $Rw_i := Rw_i + Rw_t$.

Шаг 2. Определяем $t : \max_{i \in T} |Lw_i - Rw_i|/l_i = |Lw_t - Rw_t|/l_t$.

Шаг 3. Если $(Lw_t \geq Rw_t)$, то $x_t := LB_k + \sum_{i \in N_L(B_k)} l_i + \frac{l_t}{2}$;
 $N_L(B_k) := N_L(B_k) \cup \{t\}$;

Иначе $x_t := RB_k - \sum_{i \in N_R(B_k)} l_i - \frac{l_t}{2}$; $N_R(B_k) := N_R(B_k) \cup \{t\}$.

Шаг 4. $T := T \setminus \{t\}$;

Если $(T \neq \emptyset)$, то на Шаг 1,

Иначе СТОП (объекты размещены в B_k).

В варианте А3 для склеивания выбирается объект X_t такой, что $\max_{i \in T} |Lw_i - Rw_i| = |Lw_t - Rw_t|$.

Утверждение 3.2 Если $u_{st} = 0$, $\forall s, t \in I_k(x)$, $s < t$, $\forall k = 1, \dots, r$ и фиксировано разбиение объектов по блокам, то локальный оптимум задачи (3.1)–(3.4) может быть найден с помощью алгоритма А2, применяемого в каждом блоке.

Доказательство.

Для произвольного блока B_k справедливо, что $\forall i \in I_k(x)$ Lw_i , Rw_i не зависят от порядка расположения объектов в B_k и

$$G_k(x^k) = \sum_{s \in I_k(x)} |x_s - LB_k| \left(\sum_{j \in J_L(B_k)} w_{sj} + \sum_{i \in I_L(B_k)} u_{si} \right) + \sum_{t \in I_k(x)} |x_t - RB_k| \left(\sum_{j \in J_R(B_k)} w_{tj} + \sum_{i \in I_R(B_k)} u_{ti} \right)$$

Покажем, что в произвольном локальном оптимуме объекты упорядочены в соответствии с алгоритмом А2. Рассмотрим варианты расположения двух соседних объектов X_s , X_t .

1.) Объекты X_s , X_t склеены, $s, t \in N_L(B_k)$, $(Lw_s - Rw_s)/l_s \geq (Lw_t - Rw_t)/l_t$ и хотя бы одно из неравенств $Lw_s \geq Rw_s$, $Lw_t \geq Rw_t$ — строгое.

Если объекты в локальном оптимуме расположены в порядке X_t , X_s , то, переставляя их, получаем

$$Lw_s \cdot \left(l_t + \frac{l_s}{2} \right) + Lw_t \cdot \frac{l_t}{2} + Rw_s \cdot \left(\frac{l_s}{2} + \Delta_k \right) + Rw_t \cdot \left(\frac{l_t}{2} + l_s + \Delta_k \right) - Lw_s \cdot \frac{l_s}{2} -$$

$$\begin{aligned}
& -Lw_t \cdot \left(l_s + \frac{l_t}{2} \right) - Rw_s \cdot \left(\frac{l_s}{2} + l_t + \Delta_k \right) - Rw_t \cdot \left(\frac{l_t}{2} + \Delta_k \right) = \\
& = Lw_s \cdot \left(l_t + \frac{l_s}{2} - \frac{l_s}{2} \right) + Lw_t \cdot \left(\frac{l_t}{2} - l_s - \frac{l_t}{2} \right) + Rw_s \cdot \left(\frac{l_s}{2} + \Delta_k - \frac{l_s}{2} - l_t - \Delta_k \right) + \\
& + Rw_t \cdot \left(\frac{l_t}{2} + l_s + \Delta_k - \frac{l_t}{2} - \Delta_k \right) = l_t \cdot (Lw_s - Rw_s) + l_s \cdot (Rw_t - Lw_t) < 0,
\end{aligned}$$

что противоречит условию. Случай, когда $s, t \in N_R(B_k)$ рассматривается аналогично.

2.) Объекты X_s, X_t склеены в порядке X_s, X_t и $s \in N_L(B_k), t \in N_R(B_k)$ и хотя бы одно из неравенств $Rw_s \geq Lw_s, Lw_t \geq Rw_t$ — строгое.

По алгоритму А2 оптимальным в этом случае будет расположение X_t, X_s . Предположим, что это не так, тогда имеют место соотношения

$$\begin{aligned}
& Lw_s \cdot \left(l_t + \frac{l_s}{2} \right) + Lw_t \cdot \frac{l_t}{2} + Rw_s \cdot \frac{l_s}{2} + Rw_t \cdot \left(\frac{l_t}{2} + l_s \right) - Lw_s \cdot \frac{l_s}{2} - \\
& - Lw_t \cdot \left(l_s + \frac{l_t}{2} \right) - Rw_s \cdot \left(\frac{l_s}{2} + l_t \right) - Rw_t \cdot \frac{l_t}{2} = \\
& = Lw_s \cdot \left(l_t + \frac{l_s}{2} - \frac{l_s}{2} \right) + Lw_t \cdot \left(\frac{l_t}{2} - l_s - \frac{l_t}{2} \right) + Rw_s \cdot \left(\frac{l_s}{2} - \frac{l_s}{2} - l_t \right) + \\
& + Rw_t \cdot \left(\frac{l_t}{2} + l_s - \frac{l_t}{2} \right) = l_t \cdot (Lw_s - Rw_s) + l_s \cdot (Rw_t - Lw_t) \geq 0,
\end{aligned}$$

что противоречит условию.

3.) Объекты X_s и X_t соседние, остаток Δ_k — между ними. Покажем, что тогда $s \in N_L(B_k), t \in N_R(B_k)$. Возможные расположения X_s и X_t в этом случае — X_s, Δ_k, X_t и X_t, Δ_k, X_s , тогда из оптимальности расположения X_s, Δ_k, X_t получаем

$$\begin{aligned}
& Lw_s \cdot \left(l_t + \Delta_k + \frac{l_s}{2} \right) + Lw_t \cdot \frac{l_t}{2} + Rw_s \cdot \frac{l_s}{2} + Rw_t \cdot \left(\frac{l_t}{2} + l_s + \Delta_k \right) - Lw_s \cdot \frac{l_s}{2} - \\
& - Lw_t \cdot \left(l_s + \Delta_k + \frac{l_t}{2} \right) - Rw_s \cdot \left(\frac{l_s}{2} + l_t + \Delta_k \right) - Rw_t \cdot \frac{l_t}{2} = \\
& = (l_t + \Delta_k) \cdot (Lw_s - Rw_s) + (l_s + \Delta_k) \cdot (Rw_t - Lw_t) \geq 0.
\end{aligned}$$

Если $t \in N_L(B_k)$ и $s \in N_L(B_k)$, то склеивая их, получаем X_s, X_t, Δ_k , что приводит к уменьшению функции $G_k(x^k)$. Противоречие с оптимальностью расположения X_s, Δ_k, X_t .

Если $t \in N_R(B_k)$ и $s \in N_R(B_k)$, то поменяв X_s и X_t местами, получим уменьшение функции $G_k(x^k)$, что также противоречит оптимальности расположения X_s, Δ_k, X_t .

Если $t \in N_L(B_k)$, $s \in N_R(B_k)$, получим противоречие с выполнением последнего неравенства.

Откуда следует, что $t \in N_R(B_k)$, $s \in N_L(B_k)$.

Утверждение 3.2 доказано.

Алгоритм ветвей и границ для поиска локального и глобального оптимумов. Поиск глобального оптимума задачи (3.1)—(3.4) состоит в поочередном выполнении двух этапов. На первом этапе находится очередное допустимое разбиение объектов по блокам с применением алгоритма, описанного выше, а на втором, при фиксированном разбиении, решается серия подзадач меньшей размерности с целью нахождения локального оптимума, с помощью алгоритма ветвей и границ, применяемого в каждом блоке отдельно. Глобальным оптимумом для (3.1)—(3.4) будет локальный оптимум, на котором целевая функция достигает наименьшего значения при переборе всех возможных разбиений объектов по блокам. В качестве критерия остановки можно использовать время работы, число итераций, нахождение точного решения, либо нахождение решения с гарантированной оценкой точности. Отметим, что количество вариантов разбиений объектов X_i , $i \in I$ по блокам B_1, \dots, B_r не превосходит r^n .

Отметим, что если $u_{st} = 0$, $\forall s, t \in I_k(x), s < t$, то за полиномиальное время алгоритмом поиска приближенного решения, находится точное решение задачи (3.6)—(3.8). В этом случае граф, вершинами которого являются левая и правая границы блока B_k и объекты в B_k , имеет вид

последовательно-параллельного с одной вершиной на каждой цепи между источником и стоком. Для такой структуры графа в [17] предложен эффективный алгоритм.

В общем случае, если $\exists s, t \in I_k(x) : u_{st} > 0$, то для решения (3.6)–(3.8) при небольшом значении n_k , например, $n_k \leq 5$, можно использовать перебор возможных $n_k!$ расположений объектов в блоке, а в случае $n_k \geq 10$ можно применить алгоритм ветвей и границ.

Опишем схему алгоритма ветвей и границ для решения задачи (3.6)–(3.8) на примере блока B_k . В алгоритме ветвей и границ важным является разбиение множества допустимых решений на подмножества (ветвление) и построение нижних оценок целевой функции. Пусть объекты в B_k имеют номера от 1 до n_k и в блоке нет остатка. В противном случае остаток можно рассматривать как дополнительный размещаемый объект X_{n_k+1} , для которого $l_{n_k+1} = \Delta_k$ и $Lw_{n_k+1} = Rw_{n_k+1} = 0$.

Ветвление. На первом уровне в дереве ветвления каждый из размещаемых объектов с номерами из $I_k(x)$ поочередно склеивается с левой границей блока B_k , на втором — каждый из неразмещенных объектов поочередно склеивается с правой границей блока. Таким образом на втором уровне один из объектов склеен с левой границей, другой с правой. На последующих — неразмещенные объекты поочередно склеиваются с множеством склеенных между собой объектов, крайний левый из которых склеен с левой границей блока (см. Рис. 3.1). На рисунке 3.1 границы блока обозначены заштрихованными квадратами, а размещенные объекты — квадратами с их номерами. Число вершин дерева на первом уровне равно n_k , на втором $n_k \cdot (n_k - 1)$, на третьем $n_k \cdot (n_k - 1) \cdot (n_k - 2)$ и т.д. Отметим, что высота дерева ветвления (число уровней) равна n_k , а количество его висячих вершин составляет $n_k!$, что соответствует числу возможных перестановок n_k объектов в B_k .

Нижние оценки. Пусть в ходе ветвления в блоке B_k некоторые объ-

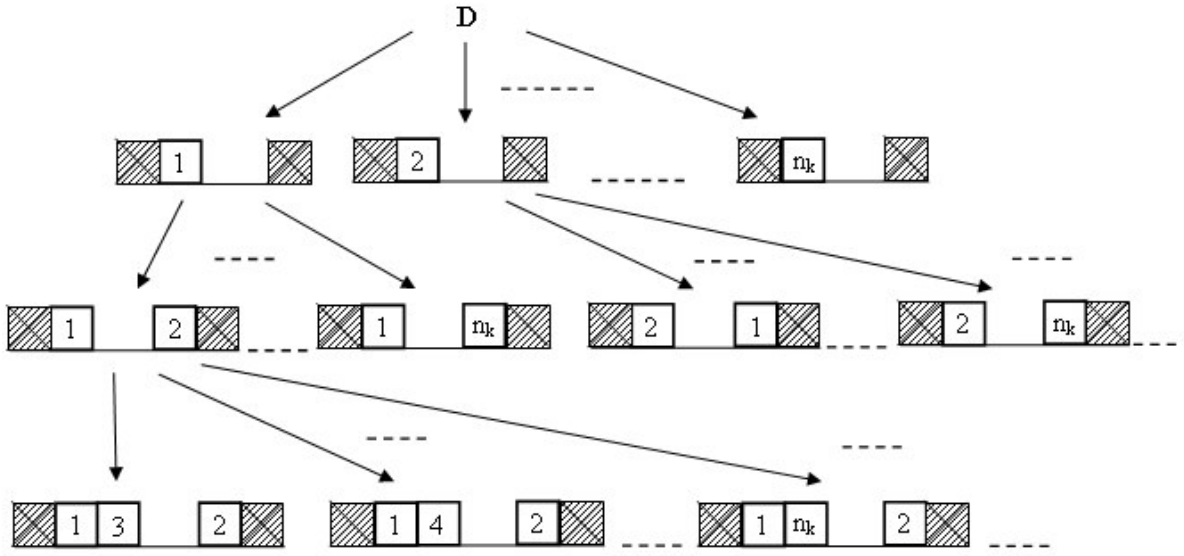


Рис. 3.1: Ветвление в блоке.

екты склеены с его левой границей, часть — с правой, а часть — еще не размещена. Обозначим множества номеров указанных размещенных объектов соответственно NF_l , NF_r , тогда $I_k(x) \setminus \{NF_l \cup NF_r\}$ — это множество номеров еще неразмещенных объектов в B_k . Не ограничивая общности будем считать, что объекты имеют номера от 1 до s в NF_l и от $t + 1$ до n_k в NF_r .

Обозначим через D — подмножество допустимых размещений в B_k , когда часть объектов уже размещена (частичное размещение); через $\xi(D)$ — нижнюю оценку функции $G_k(x^k)$ на подмножестве D . Тогда $\xi(D)$ может быть представлена в виде:

$$\xi(D) = \xi_1(D) + \xi_2(D) + \xi_3(D),$$

где $\xi_1(D)$ — суммарная стоимость связей размещенных в B_k объектов с F_L , F_R и между собой; $\xi_2(D)$ — оценка суммарной стоимости связей еще неразмещенных в B_k объектов с размещенными в B_k и с F_L , F_R ; $\xi_3(D)$ — оценка суммарной стоимости связей неразмещенных объектов между собой.

Так как известны координаты центров размещенных объектов, то зна-

чение $\xi_1(D)$ может быть вычислено точно следующим образом

$$\xi_1(D) = \sum_{s \in \{NF_l \cup NF_r\}} \sum_{t \in \{NF_l \cup NF_r\}, t > s} u_{st} |x_s - x_t| + \sum_{s \in \{NF_l \cup NF_r\}} |x_s - LB_k| \cdot \left(\sum_{j \in J_L(B_k)} w_{sj} + \sum_{i \in I_L(B_k)} u_{si} \right) + \sum_{t \in \{NF_l \cup NF_r\}} |x_t - RB_k| \left(\sum_{j \in J_R(B_k)} w_{tj} + \sum_{i \in I_R(B_k)} u_{ti} \right).$$

Предлагается два варианта вычисления оценок $\xi_2(D)$.

Первый вариант. Для каждого $i \in I_k(x) \setminus \{NF_l \cup NF_r\}$ определяется суммарная стоимость связей с F_L , F_R и объектами, размещенными в B_k , следующим образом:

$$SL(i) = Lw_i + \sum_{k \in NF_l} u_{ik}, \quad SR(i) = Rw_i + \sum_{k \in NF_r} u_{ik}.$$

Далее, находятся расположения неразмещенных объектов в B_k двумя способами. Первый — неразмещенные объекты упорядочиваются по невозрастанию отношений $SL(i)/l_i$ и последовательно склеиваются в указанном порядке с самым левым размещенным объектом в B_k . Пусть, для простоты обозначений, склеенные неразмещенные объекты имеют номера от $s + 1$ до t . Второй — неразмещенные объекты упорядочиваются по невозрастанию $SR(i)/l_i$ и последовательно склеиваются в указанном порядке с самым правым размещенным объектом в B_k . Аналогично как в первом случае считаем, что склеенные неразмещенные объекты имеют номера от t до $s + 1$. Тогда

$$\xi_2(D) = \xi_{2L}(D) + \xi_{2R}(D),$$

где $\xi_{2L}(D)$ и $\xi_{2R}(D)$ — это минимальные оценки суммарной стоимости связей неразмещенных объектов с размещенными в B_k и с F_L , F_R соответственно, которые можно вычислить следующим образом:

$$\xi_{2L}(D) = \sum_{q=s+1}^t \left(Lw_q \sum_{g=1}^{q-1} l_g + \sum_{i=1}^s u_{qi} \sum_{k=i+1}^{q-1} l_k \right),$$

$$\xi_{2R}(D) = \sum_{q=s+1}^t \left(Rw_q \sum_{g=q+1}^{n_k} l_g + \sum_{i=t+1}^{n_k} u_{qi} \sum_{k=q+1}^{n_k} l_k \right).$$

Доказательство того, что $\xi_{2L}(D)$ и $\xi_{2R}(D)$ — это нижние оценки суммарной стоимости связей неразмещенных объектов с размещенными в B_k и с F_L, F_R аналогично доказательству, приведенному в работе [121].

Второй вариант. Множество $I_k(x) \setminus \{NF_l \cup NF_r\}$ можно представить в виде объединения непересекающихся множеств $N_L \cup N_C \cup N_R$, где через N_L, N_C, N_R обозначены множества номеров объектов для которых $SL(i) > SR(i)$, $SL(i) = SR(i)$, $SL(i) < SR(i)$ соответственно. Далее объекты с номерами из N_L (N_R) упорядочиваются по невозрастанию отношений $(SL(i) - SR(i))/l_i$ ($(SR(i) - SL(i))/l_i$) и последовательно склеиваются в указанном порядке с самым левым (правым) размещенным объектом в B_k . Объекты с номерами из N_C размещаются между множествами объектов с номерами из N_L и N_R в произвольном порядке. Таким образом, для любого $i \in I_k(x) \setminus \{NF_l \cup NF_r\}$ определены координаты центров. Пусть как и ранее $I_k(x) \setminus \{NF_l \cup NF_r\} = \{s + 1, \dots, t\}$. Тогда определим следующую величину Z по формуле

$$Z = \sum_{q=s+1}^t \left(Lw_q \sum_{g=1}^{q-1} l_g + \sum_{i=1}^s u_{qi} \sum_{k=i+1}^{q-1} l_k + R w_q \sum_{h=q+1}^{n_k} l_h + \sum_{j=t+1}^{n_k} u_{qj} \sum_{v=q+1}^j l_v \right). \quad (3.19)$$

Докажем, что Z является нижней оценкой суммарной стоимости связей неразмещенных объектов с размещенными в B_k и с F_L, F_R . Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3.3 *Для любого частичного размещения D справедливо неравенство $\xi_2(D) \geq Z$.*

Доказательство.

Приведем доказательство для подмножества N_L . Не ограничивая общности будем рассматривать случай, когда $NF_l = \emptyset$, $NF_r = \emptyset$, иначе можно переопределить величину суммарной стоимости связей для каждого неразмещенного объекта с размещенными в B_k и с объектами $F_L,$

F_R соответственно. Таким образом $I_k(x) \setminus \{NF_l \cup NF_r\} = \{1, \dots, n_k\}$ и $Lw_i > Rw_i$ для любого $i \in I_k(x)$.

Пусть $(Lw_1 - Rw_1)/l_1 > \dots > (Lw_{n_k} - Rw_{n_k})/l_{n_k}$ и объекты в B_k расположены в порядке X_1, \dots, X_{n_k} . Обозначим перестановку номеров объектов, соответствующую данному размещению, как $\Pi^* = (1, \dots, n_k)$.

Для расположения неразмещенных объектов в B_k в соответствии с перестановкой номеров Π^* величина Z , найденная по формуле (3.19), составляет

$$\begin{aligned} Z(\Pi^*) = & Lw_2l_1 + \dots + Lw_t(l_1 + \dots + l_{t-1}) + Lw_{t+1}(l_1 + \dots + l_t) + \\ & + \dots + Lw_{n_k}(l_1 + \dots + l_{n_k-1}) + Rw_1(l_2 + \dots + l_{n_k}) + \dots + \\ & + Rw_t(l_{t+1} + \dots + l_{n_k}) + Rw_{t+1}(l_{t+2} + \dots + l_{n_k}) + \dots + Rw_{n_k-1}l_{n_k}. \end{aligned}$$

Очевидно, что $Z(\Pi^*)$ — это оценка суммарной стоимости связей неразмещенных объектов с размещенными в B_k и с F_L, F_R . Докажем, что указанная оценка является нижней. Предположим, что $Z(\Pi^*)$ не минимальна, то есть существует другая перестановка номеров неразмещенных объектов $\bar{\Pi}$ такая, что $Z(\Pi^*) > Z(\bar{\Pi})$. Учитывая, что любая перестановка несоседних объектов может быть получена путем серии перестановок двух соседних, то достаточно показать справедливость утверждения для перестановки двух соседних объектов. В Π^* поменяем местами два соседних объекта с номерами t и $t+1$ и обозначим $\bar{\Pi} = (1, \dots, t-1, t+1, t, t+2, \dots, n_k)$. Оценка $Z(\bar{\Pi})$ стоимости связей для $\bar{\Pi}$ равна

$$\begin{aligned} Z(\bar{\Pi}) = & Lw_2l_1 + \dots + Lw_{t+1}(l_1 + \dots + l_{t-1}) + Lw_t(l_1 + \dots + l_{t-1} + l_{t+1}) + \\ & + \dots + Lw_{n_k}(l_1 + \dots + l_{n_k-1}) + Rw_1(l_2 + \dots + l_{n_k}) + \dots + \\ & + Rw_{t+1}(l_t + l_{t+2} + \dots + l_{n_k}) + Rw_t(l_{t+2} + \dots + l_{n_k}) + \dots + Rw_{n_k-1}l_{n_k}. \end{aligned}$$

По предположению $Z(\Pi^*) - Z(\bar{\Pi}) > 0$.

$$Z(\Pi^*) - Z(\bar{\Pi}) = Lw_2l_1 + \dots + Lw_t(l_1 + \dots + l_{t-1}) + Lw_{t+1}(l_1 + \dots + l_t) +$$

$$\begin{aligned}
& + \dots + Lw_{n_k}(l_1 + \dots + l_{n_k-1}) + Rw_1(l_2 + \dots + l_{n_k}) + \dots + \\
& + Rw_t(l_{t+1} + \dots + l_{n_k}) + Rw_{t+1}(l_{t+2} + \dots + l_{n_k}) + \dots + Rw_{n_k-1}l_{n_k} - \\
& - Lw_2l_1 - \dots - Lw_{t+1}(l_1 + \dots + l_{t-1}) - Lw_t(l_1 + \dots + l_{t-1} + l_{t+1}) - \dots - \\
& - Lw_{n_k}(l_1 + \dots + l_{n_k-1}) - Rw_1(l_2 + \dots + l_{n_k}) - \dots - \\
& - Rw_{t+1}(l_t + l_{t+2} + \dots + l_{n_k}) - Rw_t(l_{t+2} + \dots + l_{n_k}) - \dots - Rw_{n_k-1}l_{n_k} = \\
& = (Lw_{t+1} - Rw_{t+1})l_t - (Lw_t - Rw_t)l_{t+1} > 0.
\end{aligned}$$

Откуда следует, что

$$\frac{Lw_{t+1} - Rw_{t+1}}{l_{t+1}} > \frac{Lw_t - Rw_t}{l_t}.$$

Противоречие с условием $(Lw_1 - Rw_1)/l_1 > \dots > (Lw_t - Rw_t)/l_t > (Lw_{t+1} - Rw_{t+1})/l_{t+1} > \dots > (Lw_{n_k} - Rw_{n_k})/l_{n_k}$.

Доказательство для подмножества N_R аналогично.

Утверждение 3.3 доказано.

Таким образом, в качестве $\xi_2(D)$ можно рассматривать значение Z , вычисленное по формуле (3.19).

Рассматривая тройки объектов $X_s, X_t, X_q, s, t, q \in I_k(x) \setminus \{NF_l \cup NF_r\}$, таких что $u_{st} > 0, u_{sq} > 0, u_{tq} > 0$, можно вычислять значение $\xi_3(D)$ следующим образом

$$\xi_3(D) = \sum_{s,t,q \in I_k(x) \setminus \{NF_l \cup NF_r\}} \min\{u_{st}l_q; u_{sq}l_t; u_{tq}l_s\}.$$

Результаты вычислительных экспериментов. Для анализа эффективности предложенных в данной работе алгоритмов проведены вычислительные эксперименты. Эффективность предложенных алгоритмов анализировалась как в сравнении алгоритмов между собой, так и с применением аппарата целочисленной оптимизации и пакета IBM ILOG CPLEX. Для этого создан программный комплекс с реализацией предложенных алгоритмов решения задач.

Целью создания прикладного программного обеспечения было решение минимаксной для точечных объектов на плоскости и минисуммной для прямоугольников на линиях задач Вебера с запрещенными зонами. Решение указанных задач находится с помощью пакетов прикладных программ (ППП) с применением аппарата целочисленной оптимизации и разработанных алгоритмов. Однако большинство ППП являются дорогостоящими коммерческими продуктами и требуют значительных временных затрат на получение решения задач. Кроме того, на производстве часто требуется быстрая проектная оценка стоимости затрат на размещение единиц технологического оборудования.

Комплекс разработан в среде Borland C++ Builder Version 6.0 (Build 10.166). Создана база тестируемых задач с помощью SQL Server 2000. Более детально интерфейс и рабочая область программного комплекса описаны в приложении В.

Вычислительные эксперименты проводились на компьютере с техническими характеристиками: процессор *Intel CoreTM i5-2450M* 2.50GHz 6,00ГБ оперативной памяти.

Первый эксперимент. Проведен вычислительный эксперимент по сравнению решений, полученных с помощью разработанного алгоритма А2 поиска приближенного решения и пакета IBM ILOG CPLEX 12.2 с применением модели ЧЦЛП. Исходные данные генерировались случайным образом с равномерным распределением. Протестировано свыше 200 задач, при этом количество запрещенных зон варьировалось от 2 до 10, а объектов от 5 до 40. Критерием остановки предложенного алгоритма был перебор всех допустимых разбиений. Частично результаты сравнения решений, полученных с помощью алгоритма А2 и пакета, приведены в таблице 3.1, где F_{A2} , F_{CPLEX} — значения целевых функций, найденных алгоритмом и пакетом.

Таблица 3.1: Сравнение значений целевых функций, полученных алгоритмом A2 и пакетом CPLEX.

№	n	m	F_{A2}	F_{CPLEX}	Отн.погр.,%
1	4	3	506,5	506,5	0,0
2	3	3	2113	2113	0,0
3	4	3	4751,5	4751,5	0,0
4	5	4	15610	14802	5,5
5	4	3	7850,5	7787,5	0,8
6	5	3	1287	1287	0,0
7	2	3	1120	1120	0,0
8	4	3	1717	1717	0,0
9	4	3	1515	1515	0,0
10	6	3	668	668	0,0
11	6	4	7467	7467	0,0
12	6	5	7841,5	7841,5	0,0
13	5	5	13991	12580	11,2
14	5	5	15459	14519	6,5
15	5	5	14996,5	14996,5	0,0
16	6	5	16277,5	16277,5	0,0
17	6	5	18369	18369	0,0
18	6	5	17646,5	17646,5	0,0
19	8	2	12496,5	11760,5	6,3
20	8	2	27640	26250	5,3
21	7	4	7556	7144	5,8
22	7	4	8172	7657	6,7
23	7	4	7851,5	7851,5	0,0
24	7	4	29638,5	29638,5	0,0
25	8	2	18447,5	17727,5	4,1

В среднем относительная погрешность A2 составила 3%.

Случайным образом с равномерным распределением сгенерировано три серии тестовых задач, каждая из которых включает 15 задач одинаковой размерности. Для каждой серии сравнивалось среднее время работы алгоритма А2 и пакета CPLEX. Частично результаты сравнения представлены в таблице 3.2, где $\overline{t_{A2}}$, $\overline{t_{CPLEX}}$ — среднее время работы алгоритма А2 и пакета CPLEX (в секундах).

Таблица 3.2: Сравнение среднего времени работы алгоритма А2 и пакета CPLEX.

№ серии	n	m	$\overline{t_{A2}}$	$\overline{t_{CPLEX}}$
1	5	5	1,29	0,016
2	20	10	214	—
3	40	6	490	—

“—” решение не удалось получить за приемлемое время 1000 сек.

Для размерностей $|I| = 20$, $|J| = 10$ и $|I| = 40$, $|J| = 6$ не удалось получить решение с помощью пакета CPLEX за время 1000 сек.; среднее время решения задач таких размерностей с помощью предложенного алгоритма А2 составило 214 сек. и 490 сек. при погрешности 3%. Стоит отметить, что среднее время решения задач размерности $|I| = 5$, $|J| = 5$ с помощью алгоритма А2 составило 1,29 сек., что превышает среднее время работы пакета, равное 0,016 сек.

Таким образом, для решения задач небольшой размерности можно использовать разработанный алгоритм или построенную модель ЦЛП и пакет CPLEX, а при числе размещаемых объектов более 20 перспективнее использовать разработанный алгоритм, с помощью которого находятся решения, близкие к оптимальному в среднем в два раза быстрее.

Второй эксперимент. Проведен вычислительный эксперимент по сравнению решений, полученных с помощью разработанных вариантов А2 и А3 алгоритма минимизации суммарной стоимости связей. Варианты А2 и А3 алгоритма также реализованы в среде Borland C++ Builder

Version 6.0 (Build 10.166). Исследовалось влияние учета размеров объектов на полученное решение, для этого рассматривалось три типа тестовых задач, в зависимости от разницы длин объектов. Результаты сравнения значений целевых функций, полученных алгоритмами А2 и А3 приведены в таблице 3.3.

Таблица 3.3: Относительная погрешность отклонений значений целевых функций, полученных алгоритмами А2 и А3.

№ типа	Разница m/u \max и \min длиной разм. объектов	Отн.погр.,%
1	0–5	1,4
2	6–9	2,4
3	10–50	5,5

При разнице длин объектов от 0 до 5 единиц, от 6 до 9, от 10 до 50 вариант алгоритма с учетом длин (А2) находит решение на 1,4%, 2,4%, 5,5% лучше, чем без учета длин (А3). С увеличением разницы в габаритах объектов алгоритмом А2 находятся решения более близкие к оптимальному.

Третий эксперимент. Проведено сравнение времени работы алгоритмов поиска приближенного решения и ветвей и границ (АВГ) для задачи Вебера на линии с запрещенными зонами. Указанные алгоритмы реализованы в одном программном комплексе. Случайным образом с равномерным распределением сгенерирована серия тестовых задач. Протестированы 100 задач. Частично результаты сравнения среднего времени работы, полученного по результатам трех запусков каждого алгоритма, представлены в таблице 3.4, где F_{A2} , F_{ABG} и $\overline{t_{A2}}$, $\overline{t_{ABG}}$ — значения целевых функций и среднее время работы (в секундах) алгоритма А2 поиска приближенного решения и алгоритма ветвей и границ.

Таблица 3.4: Сравнение значений целевых функций и среднего времени работы алгоритмов А2 и АВГ.

№	n	m	F_{A2}	$\overline{t_{A2}}$	$F_{ABГ}$	$\overline{t_{ABГ}}$	Отн.погр.F,%	$\overline{t_{ABГ}} - \overline{t_{A2}}$
1	5	3	1148	2	1136	2	1,056	0
2	5	3	968,5	1	968,5	1	0	0
3	5	3	12238	1	11892	1	2,91	0
4	6	3	1844	1	1844	2	0	1
5	10	3	900,25	2	900,25	8	0	6
6	10	3	1080	3	1080	7	0	4
7	10	4	2888	2	2888	4	0	2
8	10	5	1801	2	1801	3	0	1
9	10	6	1253	50	1253	56	0	6
10	15	2	1420	7	1400	901	1,429	894
11	15	3	3502	6	3496	136	0,172	130
12	15	4	4008	5	4008	21	0	16
13	15	5	4468,5	4	4468,5	10	0	6
14	15	6	8464	5	8464	40	0	35
15	15	10	10296	9	10296	20	0	11
16	20	2	20893,5	13	20573,3	4634	1,555	4621
17	20	3	39374,75	12	38810,75	2469	1,453	2457
18	20	10	21533,5	15	21533,5	45	0	30
19	20	15	19443,5	449	19443,5	724	0	275
20	30	5	57934	18	57934	231	0	213
21	30	10	52840	1331	52840	5460	0	4129
22	30	20	128656	26	128656	27	0	1
23	50	10	181909	86	181909	443	0	357
24	50	20	430112	269	430112	453	0	184
25	50	30	756628	708	756628	833	0	125

Из таблицы 3.4 следует, что алгоритмом А2 находятся решения, близ-

кие по значению целевой функции к оптимальному при меньших затратах времени в сравнении с АВГ. Например, для примера 11 при погрешности значений целевой функции 0,172% время работы алгоритма А2 в 20 раз меньше, чем АВГ.

Случайным образом с равномерным распределением сгенерировано три серии тестовых задач, каждая из которых включает 5 задач одинаковой размерности. Для каждой серии сравнивалось среднее время работы АВГ и пакета CPLEX. Для размерностей $|I| = 20$, $|J| = 15$ и $|I| = 50$, $|J| = 20$ не удалось получить решение с помощью пакета CPLEX за время 1000 сек.; среднее время решения задач таких размерностей с помощью АВГ составило 723 сек. и 898 сек. Среднее время решения задач размерности $|I| = 5$, $|J| = 3$ с помощью АВГ и пакета примерно одинаковое и составило 0,968 сек. и 0,96 сек. Таким образом, для решения задач небольшой размерности можно использовать АВГ или построенную модель ЦЛП и пакет CPLEX, а при числе размещаемых объектов более 20 перспективнее использовать АВГ.

Результаты экспериментов статистически обработаны с помощью критерия χ^2 -Пирсона. Это универсальный критерий, который чувствителен к малому разбросу значений и применим во многих исследованиях. Выдвинуты гипотезы: H_0 — по значению целевой функции алгоритмы А2 и АВГ отличаются между собой незначительно (не более, чем на 3%), то есть нет статистически значимых различий между ними; H_1 — есть существенные различия. По результатам эксперимента получены две независимые выборки — значения целевых функций, найденных алгоритмом А2 и АВГ. Расчитано эмпирическое значение параметра Пирсона $\chi_{\text{эмп}}^2$ на уровне значимости $p = 0,05$ с числом степеней свободы $\nu = 84$, которое составило $\chi_{\text{эмп}}^2 = 39,66$ при объеме выборки 85. Критическое значение $\chi_{\text{кр}}^2$ параметра для этих данных равно $\chi_{\text{кр}}^2 = 106,395$. Так как $\chi_{\text{эмп}}^2 < \chi_{\text{кр}}^2$, то на уровне значимости $p = 0,05$ значение $\chi_{\text{эмп}}^2$ находится в зоне незна-

чимости. Это позволяет сделать статистически обоснованный вывод, что принимается гипотеза H_0 , то есть по значению целевой функции алгоритм А2 и пакет CPLEX отличаются незначительно.

Также проведены расчеты по критерию χ^2 -Пирсона для сравнения времени работы алгоритмов А2 и АВГ. Выдвинуты гипотезы: H_0 — алгоритмы А2 и АВГ по времени счета отличаются между собой незначительно, то есть нет статистически значимых различий между ними; H_1 — есть существенные различия. По результатам эксперимента получены две независимые выборки — время работы алгоритмов А2 и АВГ. Эмпирическое значение параметра Пирсона составило $\chi_{\text{эмп}}^2 = 17573$ на уровне значимости $p = 0,05$ с числом степеней свободы $\nu = 84$ при объеме выборки 85.

Так как $\chi_{\text{эмп}}^2 \geq \chi_{\text{кр}}^2$, то на уровне значимости $p = 0,05$ принимается гипотеза H_1 , то есть есть статистически значимые отличия по времени работы между алгоритмами А2 и АВГ.

Таким образом, статистически обосновано, что алгоритм А2 быстрее по времени находит решения, близкие к оптимальному.

3.4 Задача на линиях и подходы к решению

Запишем математическую модель задачи Вебера на линиях с запрещенными зонами [134]. Имеются параллельные оси OX отрезки длины LS с фиксированными прямоугольными запрещенными зонами и прямоугольниками, центры которых связаны между собой и с зонами. Необходимо расположить прямоугольники (объекты) на заданных отрезках вне зон так, чтобы они не пересекались между собой и с зонами, и суммарная стоимость связей прямоугольников между собой и с зонами была минимальной.

Обозначим через X_i, F_j — объекты и зоны с координатами центров $(x_i, y_i), (b_{1j}, b_{2j})$ и длинами $l_i, p_j, i \in I = \{1, \dots, n\}, j \in J = \{1, \dots, m\}$

соответственно; w_{ij} , u_{ik} — удельные стоимости связей между X_i и F_j , X_i и X_k , $i, k \in I$, $i < k$, $j \in J$. Пусть расположение отрезков длины LS фиксировано и левая граница каждого отрезка — это точка с координатами $0, Ly_i$, где $t \in Q = \{1, \dots, q\}$. Заметим, что множество J может быть представлено в виде объединения $J = \bigcup_{t \in Q} JL_t$, где через JL_t обозначено множество номеров зон, расположенных на линии с номером t , $t \in Q$. Если F_j размещен на линии с номером t , то $b_{2j} = Ly_t$. Необходимо разместить объекты X_1, \dots, X_n на отрезках вне зон F_1, \dots, F_m так, чтобы они не пересекались, и суммарная стоимость связей объектов между собой и с зонами была минимальной. Расстояния измеряются в прямоугольной метрике.

Для записи условия расположения объекта X_i , $i \in I$, на линии с номером t , $t \in Q$, введем булевы переменные: $z_{it} = 1$, если X_i расположен на линии с номером t , иначе $z_{it} = 0$, $i \in I$, $t \in Q$.

Математическая модель имеет следующий вид:

$$G(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij} (|x_i - b_{1j}| + |y_i - b_{2j}|) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n u_{ik} (|x_i - x_k| + |y_i - y_k|) \rightarrow \min, \quad (3.20)$$

$$|x_i - b_{1j}| \geq z_{it} \left(\frac{l_i + p_j}{2} \right), \quad i \in I, j \in JL_t, t \in Q, \quad (3.21)$$

$$|x_i - x_k| \geq (z_{it} + z_{kt} - 1) \left(\frac{l_i + l_k}{2} \right), \quad i, k \in I, i < k, t \in Q, \quad (3.22)$$

$$\frac{l_i}{2} \leq x_i \leq LS - \frac{l_i}{2}, \quad i \in I, \quad (3.23)$$

$$y_i = \sum_{t=1}^q z_{it} Ly_t, \quad i \in I, \quad (3.24)$$

$$\sum_{t=1}^q z_{it} = 1, \quad i \in I, \quad (3.25)$$

$$z_{it} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, t \in Q. \quad (3.26)$$

Первая составляющая в (3.20) определяет суммарную стоимость связей между объектами и зонами, вторая — объектов между собой. Если X_i и X_k будут расположены на одной линии, то связь между этими объектами определяется выражением $u_{ik}|x_i - x_k|$, иначе добавляется составляющая по оси OY , то есть $u_{ik}(|x_i - x_k| + |y_i - y_k|)$. Аналогично определяется связь между объектом X_i и зоной F_j . Ограничения на непересечение объектов и зон и объектов между собой — это (3.21), (3.22), а (3.25) — это условие расположения каждого объекта только на одной линии. Заметим, что (3.20)–(3.26) не декомпозируется по x и y , как в классической задаче Вебера, объединяющими переменными здесь являются булевы переменные.

Пример задачи Вебера (3.20)–(3.26) для трех линий ($q = 3$), пяти запрещенных зон ($m = 5$) и четырех размещаемых объектов ($n = 4$) изображен на рисунке 3.2. На рисунке запрещенные зоны — это заштрихованные прямоугольники. Связи X_1 с другими объектами и зонами показаны линиями разной толщины; чем больше связь, тем толще линия.

В п. 3.3 описан двухэтапный алгоритм решения задачи для одной линии. На первом этапе строится допустимое разбиение объектов по блокам. Для полученного разбиения находится локальный оптимум с помощью алгоритма ветвей и границ. Локальный оптимум с наименьшим значением целевой функции будет решением задачи.

Заметим, что схема решения для линии может быть применима также для задачи на нескольких линиях в случае, если проекции блоков на ось абсцисс не пересекаются. Без ограничения общности, в этом случае можно считать, что все блоки расположены на одной линии.

В общем случае, для получения приближенного решения задачи (3.20)–(3.26) применимы эвристические алгоритмы. Один из них — это адаптация алгоритма из п. 3.3. Опишем кратко идею алгоритма. На первом

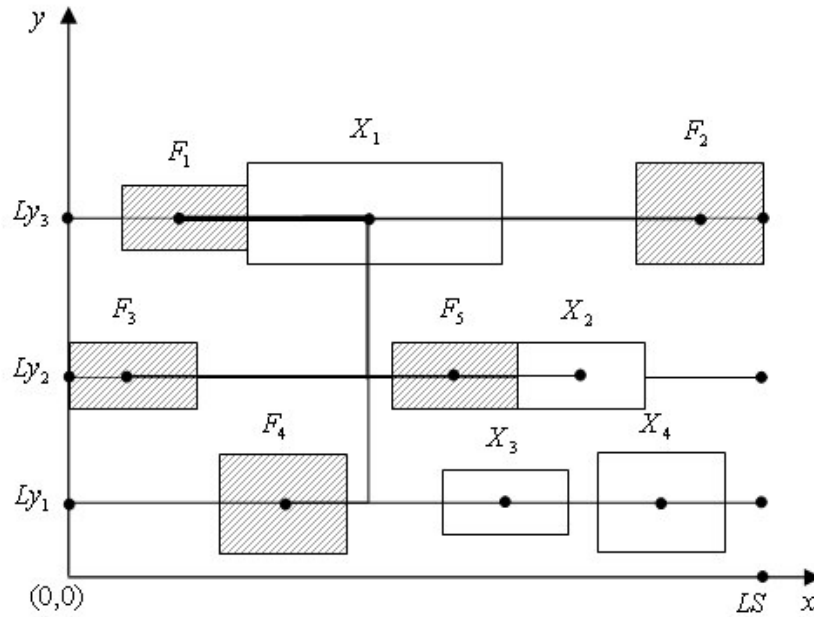


Рис. 3.2: Пример задачи для трех линий.

этапе находится допустимое разбиение объектов по блокам, при этом, без ограничения общности, можно считать, что блоки расположены на одной линии. Далее минимизируется суммарная стоимость связей с помощью перестановки объектов в каждом блоке отдельно.

Рассмотрим блоки B_k и B_s , расположенные на разных линиях. Будем говорить, что B_k и B_s *пересекаются по x координате*, если проекции Bx_k и Bx_s этих блоков на ось абсцисс имеют непустое пересечение, т.е. существует интервал (x', x'') ненулевой длины такой, что $(x', x'') \in Bx_k$ и $(x', x'') \in Bx_s$. Для блока B_k определим множество непересекающихся с ним слева и справа блоков. Будем считать, что указанные множества блоков расположены на одной линии слева и справа от B_k соответственно. Далее, как на втором этапе алгоритма из п. 3.3, для получения приближенного решения задачи (3.20)–(3.26) объекты в B_k упорядочиваются с целью минимизации суммарной стоимости связей.

Поиск локального минимума. Для задачи размещения на линиях, при фиксированном разбиении объектов по блокам, можно записать модель ЧЦЛП поиска локального минимума [8].

Пусть (x, y) — некоторое допустимое решение задачи (3.20)–(3.26), которое однозначно определяет разбиение объектов X_1, \dots, X_n по блокам B_1, \dots, B_r . Обозначим через $I_h(x, y)$ — множество номеров объектов в блоке B_h , $h = 1, \dots, r$. Допустимое решение (x, y) будем называть *локальным минимумом*, если $G(x, y) \leq G(x', y')$ для любого $(x', y') : I_h(x, y) = I_h(x', y')$, $h = 1, \dots, r$.

Расположение линий, на которых происходит размещение объектов, фиксировано, поэтому для каждого разбиения объектов по блокам можно указать значения y_i для любого $i \in I$. Они будут совпадать с y -координатой соответствующей линии, на которой размещаются объекты, то есть $y_i = Ly_t$, если X_i расположен на линии t . Таким образом, при фиксированном разбиении объектов по блокам, выражения $w_{ij}(|y_i - b_{1j}|)$, $u_{ik}(|y_i - y_k|)$, $\forall j \in J, \forall i, k \in I, i < k$, являются константами, и целевая функция (3.20) принимает вид

$$G(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij}(|x_i - b_{1j}|) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n u_{ik}(|x_i - x_k|) + Const \rightarrow \min. \quad (3.27)$$

Введением дополнительных переменных $s_{ij} \geq 0$, $i \in I, j \in J$ и $t_{ik} \geq 0$, $i, k \in I, i < k$, выражение (3.27) можно преобразовать к следующему виду

$$G(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij}s_{ij} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n u_{ik}t_{ik} + Const \rightarrow \min, \quad (3.28)$$

$$\begin{cases} x_i - b_{1j} \leq s_{ij}, \\ x_i - b_{1j} \geq -s_{ij}, \\ s_{ij} \geq 0, \end{cases} \quad i \in I, j \in J, \quad (3.29)$$

$$\begin{cases} x_i - x_k \leq t_{ik}, \\ x_i - x_k \geq -t_{ik}, \\ t_{ik} \geq 0, \end{cases} \quad i, k \in I, i < k. \quad (3.30)$$

Так как разбиение объектов по блокам фиксировано и блоки не пересекаются, то для учета условий непересечения объектов между собой и с зонами достаточно учесть условия непересечения только объектов внутри одного блока и условия непересечения объектов из блока с соседними с ним зонами. Это можно сделать с помощью введения булевых переменных, определяющих взаимное расположение объектов между собой и с зонами. Обозначим через JN_h номера соседних зон слева и справа от B_h . Для записи условий непересечения объектов из блока B_h с соседними с ним зонами введем булевы переменные $z_{ij}^1 = 1$, если X_i расположен левее F_j , $i \in I_h(x)$, $j \in JN_h$, иначе $z_{ij}^1 = 0$. Аналогично, для записи условий непересечения объектов внутри блока B_h между собой, введем булевы переменные $z_{ik}^2 = 1$, если X_i расположен левее X_k , $i, k \in I_h(x)$, $i < k$, иначе $z_{ik}^2 = 0$. Тогда условия непересечения объектов в блоке с соседними с блоком зонами и между собой записываются следующим образом

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i - b_{1j} - (l_i + p_j)/2 + C \cdot z_{ij}^1 \geq 0, \\ b_{1j} - x_i - (l_i + p_j)/2 + C \cdot (1 - z_{ij}^1) \geq 0, \quad i \in I_h(x), j \in JN_h, h = 1, \dots, r, \\ z_{ij}^1 \in \{0, 1\}, \end{array} \right. \quad (3.31)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i - x_k - (l_i + l_k)/2 + C \cdot z_{ik}^2 \geq 0, \\ x_k - x_i - (l_i + l_k)/2 + C \cdot (1 - z_{ik}^2) \geq 0, \quad i, k \in I_h(x), i < k, h = 1, \dots, r, \\ LB_h + l_i/2 \leq x_i \leq RB_h - l_i/2, \\ z_{ik}^2 \in \{0, 1\}, \end{array} \right. \quad (3.32)$$

где C — достаточно большая константа, необходимая для выполнения альтернативных условий, в качестве которой можно взять, например, значение $C = 2 \cdot LS$.

Таким образом, получаем модель ЧЦЛП (3.28)–(3.32). Заметим, что целевая функция и большинство ограничений в построенной модели линейные. С применением предложенной модели и пакетов прикладных программ можно находить локальный минимум исходной задачи.

Проведен вычислительный эксперимент по нахождению локальных минимумов с помощью предложенной модели и пакета IBM ILOG CPLEX 12.2. Эксперимент проводился на компьютере с техническими характеристиками: процессор *Intel CoreTM i5-2450M* 2.50 GHz 6,00 ГБ оперативной памяти. Построена серия тестовых задач на двух линиях. Количество размещаемых объектов, запрещенных зон, их длины, удельные стоимости связей генерировались случайным образом в диапазоне от 1 до 100. Среднее время работы пакета, полученное по результатам трех запусков одной и той же задачи, представлено в таблице 3.5.

Таблица 3.5: Среднее время работы пакета CPLEX.

№	n	m	Ср. время CPLEX, сек.
1	2	4	0,219
2	3	5	0,192
3	4	6	0,219
4	5	5	0,215
5	6	6	0,250
6	7	5	0,509
7	8	6	0,125
8	9	6	0,219
9	10	4	0,220
10	10	5	0,215

Из таблицы 3.5 следует, что с помощью построенной модели и пакета CPLEX можно находить локальные оптимумы задачи при незначительных затратах времени.

Заключение

В работе построены новые математические модели задачи размещения взаимосвязанных прямоугольных объектов с критерием минимума суммарной стоимости связей на параллельных линиях с запрещенными зонами, разработаны алгоритмы поиска приближенного решения, локального и глобального оптимумов. Проведено исследование области допустимых решений для минимаксной задачи размещения точечных объектов на плоскости с запрещенными зонами, разработан алгоритм ветвей и границ. Создан программный комплекс с реализацией предложенных алгоритмов, проведены вычислительные эксперименты.

Основные результаты диссертации заключаются в следующем.

1. Для задачи размещения взаимосвязанных прямоугольных объектов на параллельных линиях с запрещенными зонами и критерием минимума суммарной стоимости связей:
 - (а) построены новые математические модели целочисленного линейного программирования;
 - (б) предложен декомпозиционный подход с помощью сведения решения исходной непрерывной задачи к решению серии дискретных задач одинаковой структуры меньшей размерности;
 - (в) разработаны комбинаторные алгоритмы поиска приближенного решения, локального и глобального оптимумов.
2. Для задачи размещения взаимосвязанных точечных объектов на плоскости с запрещенными зонами и минимаксным критерием разрабо-

тан алгоритм ветвей и границ, в котором сокращен перебор вариантов решений на основе доказанного свойства о сужении области допустимых решений при поиске оптимума.

3. Создан программный комплекс, в котором реализованы предложенные алгоритмы. Проведено экспериментальное исследование эффективности решения задач для прямоугольных и точечных объектов с помощью указанных алгоритмов и применения построенных моделей целочисленного линейного программирования и пакета IBM ILOG CPLEX.

Предложенные математические модели развивают теоретические аспекты моделирования оптимального размещения взаимосвязанных объектов с использованием дискретной оптимизации и целочисленного программирования. Разработанные алгоритмы способствуют развитию численных методов решения указанного класса задач на основе использования декомпозиционного подхода.

Практическая ценность работы состоит в том, что построенные модели, разработанные алгоритмы и созданный программный комплекс могут применяться для решения прикладных задач в области автоматизированного проектирования генеральных планов предприятий, размещения оборудования в цехах, расположения пунктов обслуживания и т.д. Кроме того, результаты исследования могут быть применены при написании методических пособий по проектированию схем размещения зданий, сооружений и технологического оборудования.

Перспективами дальнейшего исследования могут быть построение моделей с учетом зонирования области размещения, разработка эвристических алгоритмов решения, основанных на аналогиях с живой природой и физическими процессами (генетические, имитация отжига).

Литература

- [1] Ахмедов И.С., Сигал И.Х. *Задача компоновки схемы генплана промпредприятий и некоторые подходы к ее решению* // Деп. ВИНТИ. – М., 1983. – № 270. – 57 С.
- [2] Береснев В.Л., Гимади Э.Х., Дементьев В.Т. *Экстремальные задачи стандартизации* // Новосибирск: Наука, 1978. – 335 С.
- [3] Быкова В.В. *Структурная декомпозиция графа и её применение для решения оптимизационных задач на разреженных графах* // ПДМ. Приложение. – 2014. – № 7. – С. 154–157.
- [4] Быкова В.В., Солдатенко А.А. *Оптимальная маршрутизация по ориентирам в нестационарных сетях* // ПДМ. – 2017. – № 37. – С. 114–123.
- [5] Валеева А.Ф. *Алгоритм прямоугольной упаковки и его применение к задаче фигурного раскроя* // Тр. Междунар. конф. по прикладной и индустриальной математике – Новосибирск: ИМ СО РАН. – 1994. – Т. 2. – С. 47–57.
- [6] Веремчук Н.С. *Минимаксная задача Вебера на плоскости с запрещенными зонами* // XV Междунар. науч.-инновац. конф. аспирантов, студентов и молодых учёных с элементами научной школы “Теоретические знания — в практические дела”: Сборник матер. конф. – Омск, 2014. – С. 106–109.

- [7] Веремчук Н.С. *О приближенном решении задачи Вебера на параллельных линиях с запрещенными зонами* // Сборник статей IV Регион. конф. магистрантов, аспирантов и молодых учёных по физике, математике и химии “ФМХ ОмГУ 2016” (Омск, 31 мая — 5 июня 2016 г.). — Омск: Изд-во Ом. Гос. ун-та, 2016. — С. 7–10.
- [8] Веремчук Н.С. *Поиск локального минимума в задаче размещения прямоугольников на линиях* // Вестник СибАДИ. — Омск: ИПЦ ФГБОУ ВО «СибАДИ», 2017. —1(53). — С. 122–128.
- [9] Веремчук Н.С. *Применение информационных технологий в оптимальном размещении объектов с запрещенными зонами* // [Электронный ресурс]: матер. Междунар. науч.–практич. конф. “Архитектура, строительство, транспорт” (к 85-летию ФГБОУ ВПО “СибАДИ”) (Омск, 2-3 декабря, 2015 г.). — Электрон. дан. — Омск: СибАДИ, 2015. — Режим доступа: <http://bek.sibadi.org/fulltext/ESD75.pdf>
- [10] Веремчук Н.С. *Экспериментальное исследование алгоритмов поиска приближенного решения одной задачи Вебера на линии* // Сборник статей III Регион. Конф. магистрантов, аспирантов и молодых учёных по физике и математике “ФМ ОмГУ 2015”. — Омск: Изд-во Ом. Гос. ун-та, 2015. — С. 14–16.
- [11] Гэри М., Джонсон Д. *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи* // М.: Мир, 1982. — 416 С.
- [12] Гончаров Е. Н., Кочетов Ю. А. *Вероятностный поиск с запретами для дискретных задач безусловной оптимизации* // Дискретн. анализ и исслед. операций. — Сер. 2. — 2002. — Т. 9, № 2. — С. 13–30.
- [13] Демиденко В. М. *Обобщение условий сильной разрешимости квадратичной задачи о назначениях с матрицами анти-Монжа и*

- Теплица* // Доклады НАН Беларуси. — 2003. — Т. 47, № 2. — С. 15–18.
- [14] Ерзин А. И., Чо Д. Д. *Задача одновременного размещения и маршрутизации при проектировании интегральных схем* // Автоматика и телемеханика. — 2003. — № 12. — С. 177–190.
- [15] Забиняко Г.И., Котельников Е.А. *Параллельные вычисления в некоторых задачах дискретной оптимизации* // Матем. моделирование. — 2009. — № 21:9. — С. 99–107.
- [16] Забудский Г.Г. *Задачи оптимального размещения взаимосвязанных объектов: Учебное пособие* // Омск: ОмГУ, 2007. — 100 с.
- [17] Забудский Г. Г. *О задаче линейного упорядочения вершин параллельно-последовательных графов* // Дискретн. анализ и исслед. операций. — Сер. 2. — 2000. — Т. 7, № 1. — С. 61–64.
- [18] Забудский Г.Г. *Построение моделей и решение задач размещения на плоскости с запрещенными зонами* // Автоматика и телемеханика. — 2006. — № 12. — С. 136–141.
- [19] Забудский Г.Г. *Решение задачи Вебера на плоскости с запрещенными зонами* // Вестник Тюменского университета. — 2006. — № 5. — С. 173–178.
- [20] Забудский Г.Г., Амзин И.В. *Алгоритмы решения задачи Вебера на плоскости в прямоугольной метрике с запрещенными зонами* // XIV Байкальская международная школа-семинар “Методы оптимизации и их приложения”: Труды школы-семинара. — Иркутск: ИСЭ СО РАН, 2008. — Т. 1. — С. 370–379.
- [21] Забудский Г. Г., Амзин И. В. *Алгоритмы компактного размещения технологического оборудования на параллельных линиях* // Сиб. журн. индустр. матем. — 2013. — Т. 16, № 3(55). — С. 86–94.

- [22] Забудский Г.Г., Амзин И.В. *Сужение области допустимых решений в задаче Вебера на плоскости с запрещенными зонами* // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 5. – С. 71–83.
- [23] Забудский Г. Г., Веремчук Н. С. *Алгоритмы поиска приближенного решения задачи Вебера на линии с запрещенными зонами* // Информ. бюллетень Ассоциации математического программирования № 13. Науч. издание. XVI Всерос. конф. “Математическое программирование и приложения” (Екатеринбург, 2–6 марта, 2015) — Екатеринбург: ИММ Уро РАН, 2015. — С. 133.
- [24] Забудский Г. Г., Веремчук Н. С. *Алгоритм приближенного решения задачи Вебера на линии с запрещенными зонами* // Дискрет. анализ и исслед. операций – 2016. Т. 23 –№ 1. – С. 82–96. (*An Algorithm for Finding an Approximate Solution to the Weber Problem on a Line with Forbidden Gaps* // Journal of Applied and Industrial Mathematics –2016. Vol. 10 –No. 1. – pp. 136–144. Pleiades Publishing, Ltd., 2016. Original Russian Text G.G. Zabudskii, N.S. Veremchuk, 2016, published in Diskretnyi Analiz i Issledovanie Operatsii, 2016, Vol. 23, No. 1, pp. 82–96. DOI: 10.1134/S1990478916010154)
- [25] Забудский Г.Г., Веремчук Н.С. *О минимаксной задаче Вебера на плоскости с запрещенными зонами* // Междунар. конф. “Дискретная оптимизация и исследование операций”: Матер. конф. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2013. – С. 123.
- [26] Забудский Г. Г., Веремчук Н. С. *Решение задачи Вебера на линии для прямоугольных объектов с запрещенными зонами* // “Проблемы оптимизации и экономические приложения”: матер. VI Междунар. конф. (Омск, 28 июня — 4 июля 2015 г.) – Омск: Изд-во Ом. гос. ун-та, 2015. – С. 109.

- [27] Забудский Г.Г., Веремчук Н.С. *Решение задачи Вебера на плоскости с минимаксным критерием и запрещенными зонами* // Известия Иркутского государственного университета – Иркутск: Изд-во ИГУ, 2014. – Т. 9. – С. 10–25.
- [28] Забудский Г.Г., Веремчук Н.С. *Решение минимаксной задачи Вебера на плоскости с запрещенными зонами* // XVI Байкальская международная школа–семинар “Методы оптимизации и их приложения”: Тезисы докладов. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2014. – С. 54.
- [29] Забудский Г. Г., Котенева Н. С. *Алгоритмы решения минимаксной задачи Вебера на плоскости с запрещенными областями* // Информ. бюллетень Ассоциации математического программирования № 10. Науч. издание. XII Всерос. конф. “Математическое программирование и приложения”— Екатеринбург: ИММ Уро РАН, 2003. – С. 112.
- [30] Забудский Г. Г., Лагздин А. Ю. *Динамическое программирование для решения квадратичной задачи о назначениях на дереве* // АИТ. – 2012. № 2. – С. 141–155.
- [31] Забудский Г. Г., Лагздин А. Ю. *Полиномиальные алгоритмы решения минимаксной квадратичной задачи о назначениях на сетях* // Дискр. анализ и исслед. опер. – 2011. Т. 18 –№ 4. – С. 49–65.
- [32] Забудский Г. Г., Лагздин А. Ю. *Полиномиальные алгоритмы решения квадратичной задачи о назначениях на сетях* // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2010. № 50(11). – С. 2052–2059.
- [33] Забудский Г. Г., Лёгких С. А. *Математическая модель оптимизации гибких модулей технологического оборудования* // Прикл. математика и информ. технологии: Сб. науч. и метод. трудов, изд. ОмГТУ. – Омск, 2005. – С. 20–28.

- [34] Забудский Г. Г., Филимонов Д. В. *Алгоритм решения минимаксной задачи размещения на дереве с ограничениями на максимальные расстояния* // Омский научный вестник. – 1999. Вып. 9. – С. 37–40.
- [35] Забудский Г. Г., Филимонов Д. В. *Решение дискретной минимаксной задачи размещения на сети* // Известия вузов. Математика. – 2004. № 5. – С. 33–36.
- [36] Жак С. В., Зинченко А. Б. *Решение некоторых задач геометрического размещения модифицированным методом ветвей и границ* // Математическое обеспечение АСУП: Тез. докл. 2-го Всес. сем., М.: ИЛУ. – 1975. – С. 27–28.
- [37] *Исследование операций. Модели и их применение* // Пер. с англ. Под ред. Моудера Дж., Элмаграби С. – М.: Мир, 1981. – 677 с.
- [38] Картак В. М. *Матричный алгоритм поиска оптимального решения для задачи упаковки прямоугольников в полубесконечную полосу* // Информационные технологии. – 2008. – № 1. – С. 36–44.
- [39] Колоколов А. А., Леванова Т. В. *Алгоритмы декомпозиции и перебора L-классов для решения некоторых задач размещения* // Вестник Омского ун-та. – 1996. – № 1. – С. 21–23.
- [40] Кочетов Ю. А., Кононов А. В., Плюсунов А. В. *Конкуренционные модели размещения производства* // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2009. Т. 49, № 6. – С. 1–17.
- [41] Кузнецов В. Ю. *Задачи покрытия ортогональных многоугольников с запретными участками* // Вестник УГАТУ. – Уфа: УГАТУ, 2008. – Т. 10, № 2(27). – С. 177–182.

- [42] Кузьмин О.В., Старков Б.А. *Бинарные матрицы с арифметикой треугольника Паскаля и символные последовательности* // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. — 2016. — № 18. — С. 38–47.
- [43] Мухачева Э.А. *Обзор и перспективы развития комбинаторных методов решения задач раскрытия и упаковки* // Матер. междунар. конф. “Дискретный анализ и исследование операций”. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2002. — С. 80–87.
- [44] Мухачева Э.А., Валеева А.Ф. *Метод динамического перебора в задаче двумерной упаковки* // Информационные технологии. — 2000. — № 5. — С. 30–37.
- [45] Мухачева Э.А., Верхотуров М. А., Мартынов В. В. *Модели и методы расчета раскрытия–упаковки геометрических объектов* — Уфа: УГАТУ, 1999. — 217 С.
- [46] Панюков А. В. *Задача размещения прямоугольных объектов с минимальной стоимостью связывающей сети* // Дискрет. анализ и исслед. операций. — Сер. 2. — Т. 8, № 1.— 2001. — С. 70–87.
- [47] Панюков А. В. *Модели и методы решения задач построения и идентификации геометрического размещения: диссертация на соискание ученой степ. д-ра физ.-мат. наук: 05.13.16* — 1999. — 260 С.
- [48] Панюков А. В., Шангин Р. Э. *Точный алгоритм решения дискретной задачи Вебера для k -дерева* // Дискрет. анализ и исслед. операций. — Т. 21, № 3.— 2014. — С. 64–75.
- [49] Препарата Ф., Шеймос М. *Вычислительная геометрия: Введение.* // — М.: Мир, 1989. — 478 с.

- [50] Руднев А. С. *Вероятностный поиск с запретами для задачи упаковки кругов и прямоугольников в полосу* // Дискрет. анализ и исслед. операций. — Т. 16, № 4. — 2009. — С. 61–86.
- [51] Степанов В. П. *Задачи размещения модулей при проектировании печатных плат* // Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика. — № 2. — 1979. — С. 212–216.
- [52] Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. *Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования.* // Киев: Наукова думка, 1986. — 268 с.
- [53] Стрекаловский А.С., Энхбат Р. *Полиматричные игры и задачи оптимизации* // Автомат. и телемех., — 2014. — № 4. — Р. 51–66.
- [54] Тот Л.Ф. *Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве* М. : Физ-матлит, 1958.
- [55] Трубин В.А. *Эффективный алгоритм для задачи Вебера с прямоугольной метрикой* // Кибернетика. — 1978. — № 6. — С. 67–70.
- [56] Хамисов О.В. *Невыпуклая оптимизация с нелинейными опорными функциями* // Тр. ИММ УрО РАН. — 2013. — № 19:2. — С. 295–306.
- [57] Хачай М.Ю., Дубинин Р.Д. *Аппроксимируемость задачи об оптимальной маршрутизации транспорта в конечномерных евклидовых пространствах* // Тр. ИММ УрО РАН. — 2016. — № 22:2. — С. 292–303.
- [58] Шангин Р.Э. *Алгоритм точного решения дискретной задачи Вебера для простого цикла* // Прикладная дискретная математика. — 2013. — № 4. — С. 96–102.
- [59] Шангин Р.Э. *Детерминированный алгоритм решения задачи Вебера для n -последовательной цепи* // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2013. — Т. 20, № 5. — С. 84–96.

- [60] Aneja Y.P., Parlar M. *Algorithms for Weber facility location in the presence of forbidden regions and/or barriers to travel* // Transportation Science. – 1994. – Vol. 28. – P. 70–76.
- [61] Arkin E., Hassin R., Sviridenko M. *Approximating the maximum quadratic assignment problem* // Inf. Process. Lett. – 2001. – Vol. 77. – P. 13–16.
- [62] Bischoff M., Klamroth K. *An efficient solution method for Weber problems with barriers based on genetic algorithms* // European Journal of Operations Research. – 2007. – № 177. – P. 22–41.
- [63] Bischoff M., Fleischmann T., Klamroth K. *The Multi-Facility Location-Allocation Problem with Polyhedral Barriers* // Computers and Operations Research. – 2009. – Vol. 36. – P. 1376–1392.
- [64] Brimberg J., Hansen P., Mladenovic N., Taillard E. *Improvements and Comparison of Heuristics for Solving the Uncapacitated Multisource Weber Problem* // Operations Research. – 2000. – Vol. 48, No. 3. – P. 444–460.
- [65] Bokhari S.H. *A shortest tree algorithm for optimal assignment across space and time in a distributed processor system* // IEEE Trans. Software Engrg. – 1981. – Vol. 7. – P. 441–456.
- [66] Burkard R.E., Cela E., Pardalos P.M. *The Quadratic Assignment Problem* // Handbook of Combinatorial Optimization. – 1998. – Vol. 2. – P. 238–241.
- [67] Burkard R.E., Dell’Amico M., Mortello S. *Assignment problems* // Philadelphia: SIAM. – 2009. – 402 p.
- [68] Butt S.E., Cavalier T.M. *Facility location in the presence of congested regions with the rectilinear distance metric* // Socio-Economic Planning Sciences. – 1997. – № 31. – P. 103–113.

- [69] Butt S. E., Cavalier T. M. *An efficient algorithm for facility location in the presence of forbidden regions* // European Journal of Operations Research. – 1996. – № 90. – P. 56–70.
- [70] Cabot A.V., Francis R.L., Stury M.A. *A network flow solution to a rectilinear distance facility location problem* // AIIE Transactions. – 1970. – V. 2, № 2. – P. 132–141.
- [71] Chakrapani J., Skorin–Kapov J. *Massively parallel tabu search for the quadratic assignment problem* // Annals of Operations Research. – 1993. – Vol. 41. – P. 327–342.
- [72] Cheng L., Wong M.D.F. *Floorplan design for multi–million gate FPGAs* // Proc. 2004 IEEE/ACM Int. Conf. Comput.– Aided Des. (San Jose, CA, USA, Nov. 7–11, 2004). Washington, DC: IEEE Comput. Soc., 2004. – P. 292–299.
- [73] Cong J., Jagannathan A., Reinman G., Romesis M. *Microarchitecture evolution with physical planning* // Proc. 40th Annu. Des. Autom. Conf. (Anaheim, USA, June 2–6, 2003). New York: ACM, 2003. – P. 32–35.
- [74] Dearing H.V., Francis R.L. *A Network Flow Solution to a Multifacility Minimax Location Problem Involving Rectilinear Distances* // Transportation Science. – 1974. – Vol. 8. – P. 126–141.
- [75] Dearing P.M., Hamacher H.W., Klamroth K. *Center problems with barriers and the Manhattan metric* // Naval Research Logistics. – 2002. – Vol. 49. – P. 647–665.
- [76] Elzinga J., Hearn D., Randolph W.D. *Minimax multifacility location with euclidean distances* // Transportation science. – 1976. – Vol. 10. – No. 4. – P. 321–336.

- [77] Erkut E., Francis R.L., Tamir A. *Distance-constrained multifacility minimax location problems on tree network* // Networks. – 1992. – No. 22. – P. 37–54.
- [78] Farahani R.Z., Hekmatfar M. *Facility location: Concepts, models, algorithms and case studies* – Heidelberg: Physica-Verlag, 2009. – 543 p.
- [79] Fleurent C., Ferland J. *Genetic hybrids for the quadratic assignment problem* // DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. – 1994. – Vol. 16. – P. 173–187.
- [80] Fliege J. *Coincidence conditions in multifacility location problems with positive and negative weights* // European Journal of Operation Research. – 1998. – Vol. 104. – P. 310–320.
- [81] Foulds L.R., Hamacher H.W., Wilson J.M. *Integer programming approaches to facilities layout models with forbidden areas* // Annals of Operations Research. – 1998. – Vol. 81. – P. 405–417.
- [82] Francis R. L., Cabot A. Vol. *Properties of a multifacility location problem involving Euclidean distances* // Naval Res. Log. Quart. – 1972. – Vol. 19. – P. 335–353.
- [83] Francis R.L., White J.A. *Facility layout and location: an analytical approach* // Prentice-Hall, Englewood Cliffs. – 1974.
- [84] Hamacher H.W., Klamroth K. *Planar location problems with barriers under polyhedral gauges* // Annals of Operations Research. – 2000. – Vol. 96. – P. 191–208.
- [85] Ichimori T. *A Shortest Path Approach to a Multifacility Minimax Location Problem with Rectilinear Distances* // Journal of the Operation Research Society of Japan. – 1985. – No. 4. – P. 269–284.

- [86] Jarre F. *On the convergence of the method of analytic centers when applied to convex quadratic programs* // Math. Programming. – 1991. – Vol. 49. – P. 341–358.
- [87] Kacprzyk J., Stanczak W. *A discrete approximation of the Weber problem with Euclidean distance* // Zastosowania Matematyki Applicationes Mathematicae. – 1984. – Vol. 2. – P. 257–270.
- [88] Kahng A. B. *Classical Floorplanning Harmful?* // Proc. 2000 Int. Symp. Phys. Des. (San Diego, USA, Apr. 9–12, 2000). New York: ACM, 2000. – P. 207–213.
- [89] Katz N., Cooper L. *Facility location in the presence of forbidden regions, I: Formulation and the case of Euclidean distance with one forbidden circle* // European Journal of Operation Research. – 1981. – № 6. – P. 166–173.
- [90] Katz I.N., Cooper L. *Facility location in the presence of forbidden regions, II: Euclidean distance and several forbidden circles* // Technical Report OREM 79006, Southern Methodist University, Dallas, TX 75275.
- [91] Katz I.N., Cooper L. *Facility location in the presence of forbidden regions, III: l_p distance and polygonal forbidden regions* // Technical Report OREM 79011, Southern Methodist University, Dallas, TX 75275.
- [92] Kazakovtsev L.A., Stanimirovic P.S. *Algorithm for Weber Problem with a Metric Based on the Initial Fare* // Journal of Applied Mathematics and Informatics. – 2015. – Vol. 33:1-2. – P. 157–172.
- [93] Klamroth K. *Planar Weber location problems with line barrier* // Optimizatiob. – 2001. – Vol. 49. – P. 517–527.

- [94] Klamroth K. *Single-Facility Location Problems with Barriers* // Springer Series in Operation Research. –2002. – 197 p.
- [95] Kratica J., Filipovich V. et al. *Solving the Task Assignment Problem with a variable neighborhood search* // Serdica J. Computing. –2010. – Vol. 4. – P. 435–446.
- [96] Koopmans T.C., Beckmann M. *Assignment problems and the location of economic activities* // Econometrica. –1957. – Vol. 25. – P. 53–76.
- [97] Kuhn H.W. *A note on Fermat's problem* // Math. Programming. – 1973. – Vol. 4. – P. 98–107.
- [98] Kuhn H.W., Kuenne R.E. *An efficient algorithm for the numerical solution of the generalized Weber problem in spatial economics* // J. Reg. Sci. – 1962. – Vol. 4. – P. 21–33.
- [99] Larson R.C., Sadiq G. *Facility locations with Manhattan metric in the presence of barriers to travel* // Operations Research. – 1983. – Vol. 31. – P. 652–669.
- [100] Lawler E.L. *The quadratic assignment problem* // Management Science. – 1963. – No 9. – P. 586–599.
- [101] Love R.F., Wesolowsky G.O., Kraemer S.A. *A multifacility minimax method for euclidean distances* // Int. J. Prod. Res. II. – 1973. – P. 37–45.
- [102] Li Y., Pardalos P.M., and Resende M.G.C. *A greedy randomized adaptive search procedure for the quadratic assignment problem* // DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. – 1994. – Vol. 16. – P. 237–261.
- [103] Lovasz L. *On the ratio of optimal integral and fractional covers* // J. of Discrete Math. – 1975. – Vol. 13. – P. 383–390.

- [104] Love R.F., Morris J.G., Wesolowsky G.O. *Facilities Location: Models and Methods* // North Holland, NY. – 1988.
- [105] Luis M., Salhi S., Nagy G. *A guided reactive GRAPS for the capacitated multi-source Weber problem* // Computers & Operations Research. – 2011. – Vol. 38. – P. 1014–1024.
- [106] Magos D. *Tabu search for the planar three-index assignment problem* // Journal of Global Optimization. – 1996. – Vol. 8. – P. 35–48.
- [107] Malucelli F. *A polynomially solvable class of the quadratic semi-assignment problems* // European J. Oper. Res. – 1996. – Vol. 91. – P. 619–622.
- [108] Malucelli F., Pretolani D. *Lower bounds for the quadratic semi-assignment problem* // European J. Oper. Res. – 1995. – Vol. 83. – P. 365–375.
- [109] Megiddo N., Supowit K. J. *On the complexity of some common geometric location problems* // SIAM J. Comput. – 1984. – Vol. 13. – P. 182–196.
- [110] Mirchandani P.B., Francis R.L. *Discrete Location Theory* // John Wiley and Sons, Inc., New York. – 1990.
- [111] Mladenovic N., Brimberg J., Hansen P., Moreno-Perez J. A. *The p-median problem: a survey of metaheuristic approaches* // European J. Oper. Res. – 2007. – Vol. 3. – P. 927–939.
- [112] Morris J.G. *A Linear Programming Approach to the Solution of Constrained Multi-Facility Minimax Location Problems Where Distances are Rectangular* // Operation Research Quarterly. – 1973. – Vol. 24. – P. 419–435.

- [113] Mukhacheva E.A., Zalgaller V.A. *Linear programming cutting problems* // Intern. J. of Software Engineering and Knowledge Engineering. – 1993. – Vol. 3, No 4. – P. 463–476.
- [114] Nandikonda P., Batta R., Nagi R. *Locating a 1-center on a Manhattan plane with arbitrarily shaped barriers* // Annals of Operation Research. – 2003. – Vol.123. – P. 157–172.
- [115] Nickel S., Puerto J. *Location theory. A unified approach*. – Berlin: Springer, 2005.
- [116] Panykov A.Vol., Pelzwerger B.Vol. *Polynomial Algorithms to Finite Veber Problem for a Tree network* // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 1991. – Vol. 35. – P. 291–296.
- [117] Picard J.C., Ratliff H.D. *A cut approach to the rectilinear distance facility location problem* // Operations Research. – 1978. – V. 26, №. 3. – P. 422–433.
- [118] Sahni S., Gonzalez T. *P-complete Approximation Problems* // Journal of the ACM (JACM). – 1976. – Vol. 23(3). – P. 555–565.
- [119] Sarkar A., Batta R., Nagi R. *Placing a finite size facility with a center objective on a rectangular plane with barriers* // European Journal of Operational Research. – 2006. – Vol. 179, №. 3. – P. 1160–1176.
- [120] Savas S., Batta R., Nagi R. *Finite-size facility placement in the presence of barriers to rectilinear travel* // Operations Research. – 2002. – Vol. 50, №. 6. – P. 1018–1031.
- [121] Simmons D. M. *One-dimensional space allocation: an ordering algorithm* // Oper. Res. – 1969. – Vol. 17. – P. 812–826.
- [122] Stone H. S. *Multiprocessor scheduling with the aid of network flow algorithms* // IEEE Trans. Software Engrg. SE-3(1) — 1977. — P. 85–93.

- [123] Suresh G., Sahu S. *Multiobjective Facility Layout Using Simulated Annealing* // International Journal of Production Economics. — 1993. — Vol. 32. — No. 2. — pp. 239–254.
- [124] Tansel B.C., Francis R.L., Lowe T.J. *Location on Networks: A Survey. Part II: Exploiting Tree Network Structure* // Management Science. — 1983. — Vol. 29. — P. 498–511.
- [125] Taillard E. *Robust tabu search for the quadratic assignment problem* // Parallel Computing. — 1991. — Vol. 17. — P. 443–455.
- [126] Valkonen T., Kärkkäinen T. *Clustering and the perturbed spatial median* // Mathematical and Computer Modelling. — 2010. — Vol. 52, Is. 1–2. — P. 87–106.
- [127] Wai-Kai Chen *The VLSI Handbook*. CRC Press. — 2000. — 1975 p.
- [128] Weber A. *Über den Standort der Industrien, Teil: Reine Theorie des Standortes* // Tübingen: J. C. B. Mohr. — 1909.
- [129] Wesolowsky G.O. *The Weber problem: History and perspectives* // Location Science. — 1999. — № 1. — P. 5–23.
- [130] Xue G. L., Rosen J. B., Pardalos P. M. *A polynomial time dual algorithm for the Euclidean multifacility location problem* // Operation Research Letters. — 1996. — Vol. 18. — P. 201–204.
- [131] Zabudskii G.G. *Model Building and Location Problem Solving in a Plane with Forbidden Gaps* // Automation and Remote Control. — 2006. — V. 67, № 12. — P. 1986–1990.
- [132] Zabudsky G., Veremchuk N. *About Local Optimum of the Weber Problem on Line with Forbidden Gaps* // Proc. DOOR 2016, Vladivostok, Russia, September 19–23, 2016. CEUR-WS. 2016. Vol. 1623. P. 115–124. CEUR-WS.org, online <http://ceur-ws.org/Vol-1623/paperco17.pdf>

- [133] Zabudsky G., Veremchuk N. *About minimax Weber problem in the plane with forbidden gaps* // Abstracts of the 5th International conference “Optimization and Applications” (OPTIMA-2014, September 28 - October 4, 2014, Petrovac, Montenegro). М.: ВЦ РАН, 2014. С. 193.
- [134] Zabudsky G., Veremchuk N. *Weber problem for rectangles on lines with forbidden gaps* // IEEE Conference 2016 Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Omsk, 15-17 Nov. 2016). 2016. DOI: 10.1109/Dynamics.2016.7819109
- [135] Zabudsky G., Veremchuk N. *Weber Problem on Line with Forbidden Gaps* // Abstracts of the 17th Baikal international school–seminar “Methods of Optimization and Their Applications” (July 31- August 6, 2017, Maksimikha, Buryatia). Irkutsk: ESI SB RAS, 2017, p. 128.

Программа для ЭВМ

136. Веремчук Н. С. *Приближенное решение задачи размещения взаимосвязанных габаритных объектов на линии с запрещенными зонами* // Регистрационный номер в ФАП СО РАН: PR17002, дата регистрации: 16.05.2017 г.

Приложение А

Решение задачи (2.5)–(2.6) для $n = 5$, $m = 9$, $\partial\mathcal{F}' \subseteq R$.

Объекты P_1, \dots, P_9 расположены в точках с координатами (21;67), (17;47), (44;10), (19;8), (45;7), (89;75), (44;5), (51;57), (94;52). Необходимо разместить X_1, \dots, X_5 . Удельные стоимости связи между объектами заданы в таблицах 1.1 и 1.2.

Таблица 1.1: Связи размещаемых объектов с фиксированными.

w_{ij}	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9
X_1	1	4	86	21	28	67	32	17	37
X_2	43	9	48	7	84	6	30	91	37
X_3	77	33	70	84	72	31	17	33	47
X_4	25	82	28	48	15	87	29	77	97
X_5	49	88	82	3	14	15	50	3	59

Таблица 1.2: Связи размещаемых объектов между собой.

v_{jk}	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	1	77	65	77
X_2	1	0	71	56	21
X_3	77	71	0	68	59
X_4	65	56	68	0	95
X_5	77	21	59	95	0

По заданным запрещенным зонам построены разрешенные области R_1, \dots, R_9 , координаты углов которых представлены в таблице 1.3.

Таблица 1.3: Координаты разрешенных областей.

	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9
(a_k, c_k)	(49;4)	(86;44)	(12;83)	(86;61)	(0;32)	(43;79)	(61;91)	(92;81)	(7;32)
(b_k, d_k)	(70;7)	(98;55)	(36;94)	(91;77)	(7;89)	(46;85)	(88;98)	(95;83)	(70;60)

Решение задачи (2.5) приведено в таблице 1.4.

Таблица 1.4: Решение задачи без учета запрещенных зон.

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
(82,411; 18,337)	(51; 10,43)	(32,435; 23,398)	(68,485; 46,804)	(46,165; 28,007)

Объекты $X_1, X_2, X_3, X_5 \in \text{Int } F$, следовательно, условие (2.6) не выполнено.

Строим подмножество \mathcal{F}' . Оптимальные размещения объектов только по отношению к фиксированным представлены в таблице 1.5.

Таблица 1.5: Размещения объектов по отношению к фиксированным.

X'_1	X'_2	X'_3	X'_4	X'_5
(44; 58,17)	(45; 36,12)	(28,942; 36,12)	(56,8; 58,489)	(49,184; 43,312)

Прямоугольник \mathcal{F}' имеет координаты $[(28, 942; 36, 12), (56, 8; 58, 489)]$. Отметим, что $\mathcal{F}' \subseteq R$, т.е. условия теоремы 2.1 выполнены.

В модели (2.7)–(2.10) блок (2.7) заменяем на линейные ограничения, соответствующие принадлежности размещаемых объектов прямоугольнику \mathcal{F}' . Решение полученной задачи ЛП приведено в таблице 1.6.

Таблица 1.6: Оптимальное решение задачи.

X_1^*	X_2^*	X_3^*	X_4^*	X_5^*
(44,789; 58,489)	(28,942; 36,12)	((28,942; 36,12)	(56,8; 58,489)	(38,052; 36,12)

Время вычисления составляет $t = 0,01$ сек., а при решении задачи (2.5)–(2.6) пакетом CPLEX $t = 0,11$ сек.

Приложение В

Описание программного комплекса. Хранение первоначальных данных и результатов решений задач организовано в виде реляционной базы данных (БД), созданной на основе Microsoft SQL Server 2000. БД обеспечивает удобное физическое представление информации, а также её хранение. Схема структуры БД представлена на рисунке 2.1.

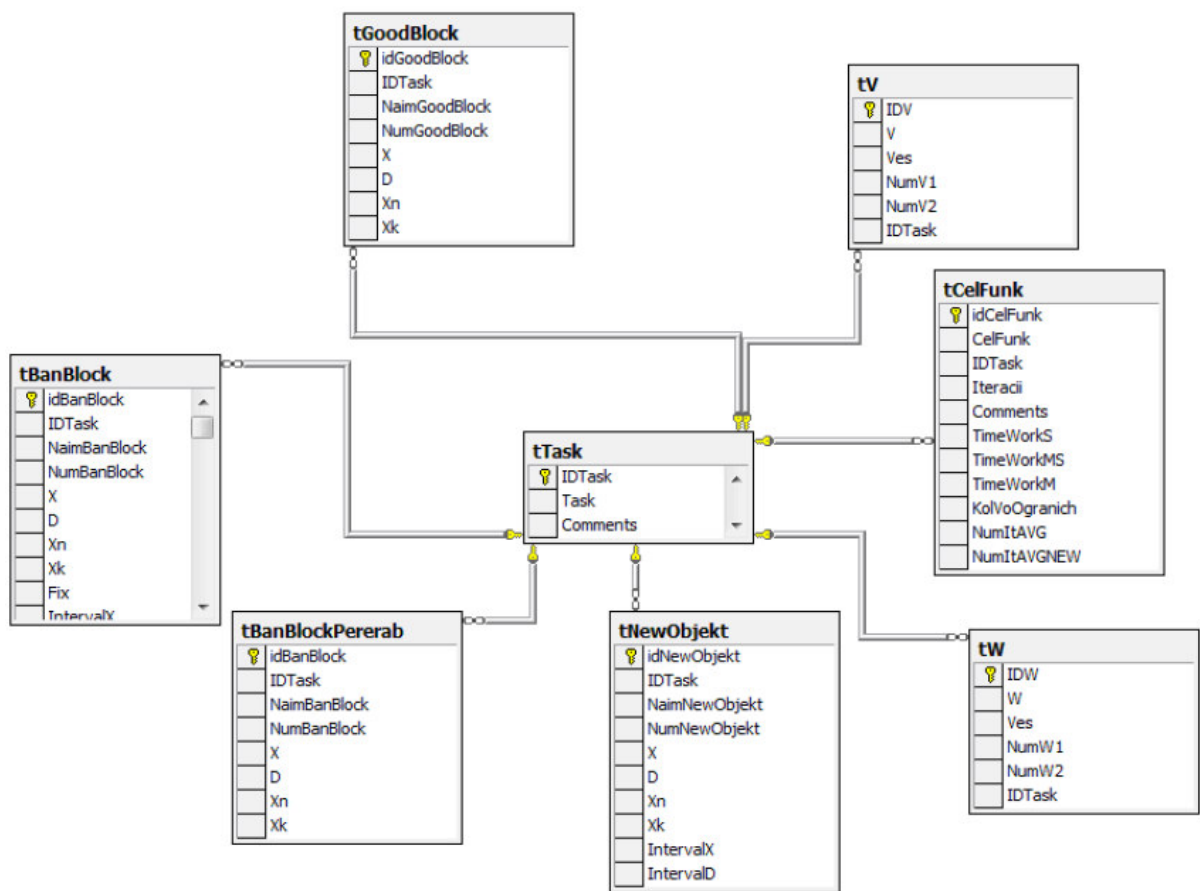


Рис. 2.1: Схема структуры базы данных.

Все данные тестируемых задач логически разделены и объединены в

соответствующие таблицы, например, `tVanBlock` — таблица запрещенных зон, `tGoodBlock` — разрешенных блоков (областей), `tV` и `tW` — стоимостей связей размещаемых объектов между собой и с фиксированными (зонами). Результаты решения задачи фиксируются в таблицах: `tNewObject` — координаты размещаемых объектов, `tGetFunc` — значения целевой функции, время счета, количество итераций. Таблица `tTask` играет роль справочника всех тестируемых задач, она связывает все перечисленные выше таблицы по ключу. Возможность работы с БД осуществляется с помощью программы, которая предоставляет пользователю возможности просмотра, редактирования и дополнения информации о тестируемых задачах.

На рисунке 2.2 изображена рабочая форма программного комплекса, где на верхней панели инструментов указаны три основных пункта меню, каждый из которых соответствует реализованному алгоритму. В каждом пункте два подпункта, один из которых — это форма справочника решаемых задач, второй — для открытия окна для ввода начальных данных и решения выбранной из справочника задачи.

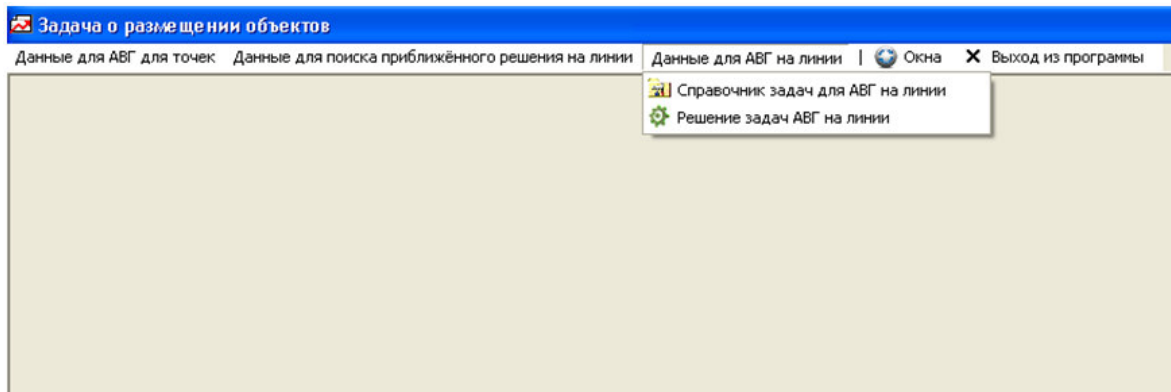


Рис. 2.2: Рабочая форма программного комплекса.

При выборе пользователем подпункта *Справочник задач* открывается окно справочника, где указан список всех тестируемых задач, решаемых соответствующим алгоритмом (см. Рис. 2.3). На верхней панели инструментов справочника расположены стандартные кнопки ввода, ре-

дактирования, удаления записи для соответствующей задачи, обновления списка задач.

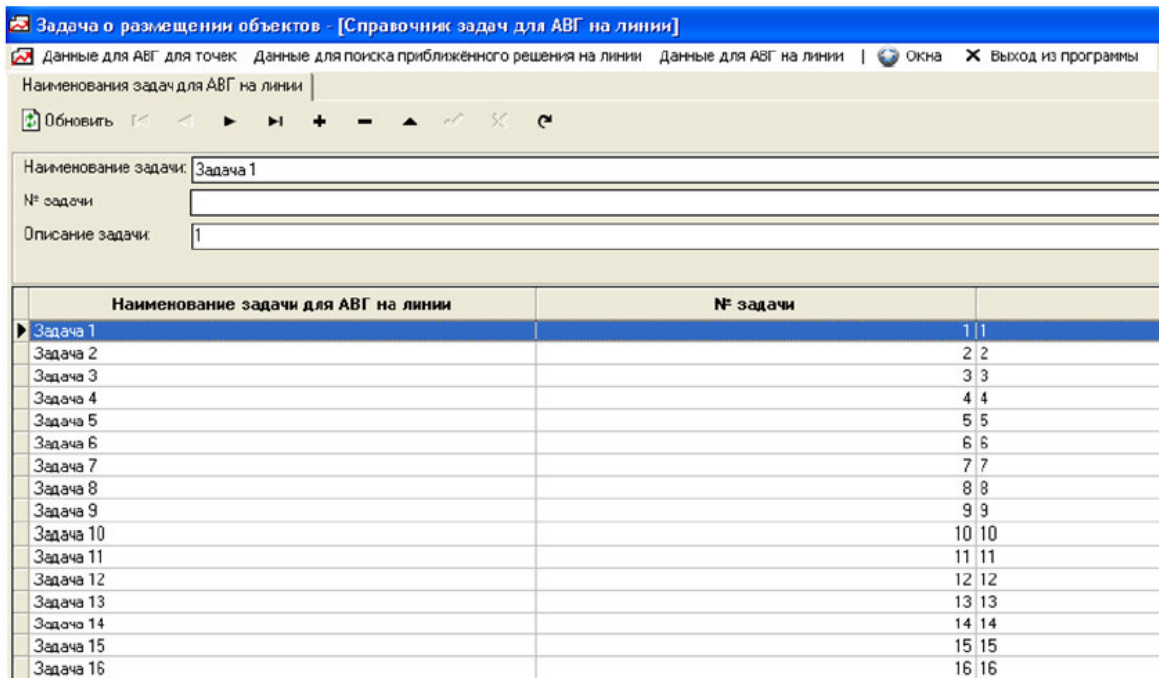


Рис. 2.3: Справочник задач для АВГ на линии.

При выборе подпункта *Решение задач* открывается окно, где содержатся две вкладки: *Начальные данные* и *Статистика* (см. Рис. 2.4). Во вкладке *Начальные данные* содержатся все основные инструменты, с помощью которых вводятся начальные данные и решается задача. К начальным данным, например, относится информация о числе размещаемых, фиксированных объектов, запрещенных зон, длины, координаты фиксированных объектов, удельные стоимости связей. Результат решения задачи — координаты размещаемых объектов, значение целевой функции, время работы алгоритма, число итераций и т.д.

В поле *Текущая задача* можно выбрать конкретную задачу из справочника, при этом все данные по выбранной задаче отразятся в одноименных вкладках на этой форме. Так, например, информация о запрещенных зонах и построенных по ним разрешенных блоках (областей) выбранной задачи отразится во вкладке *Массив запрещенных зон*, сто-

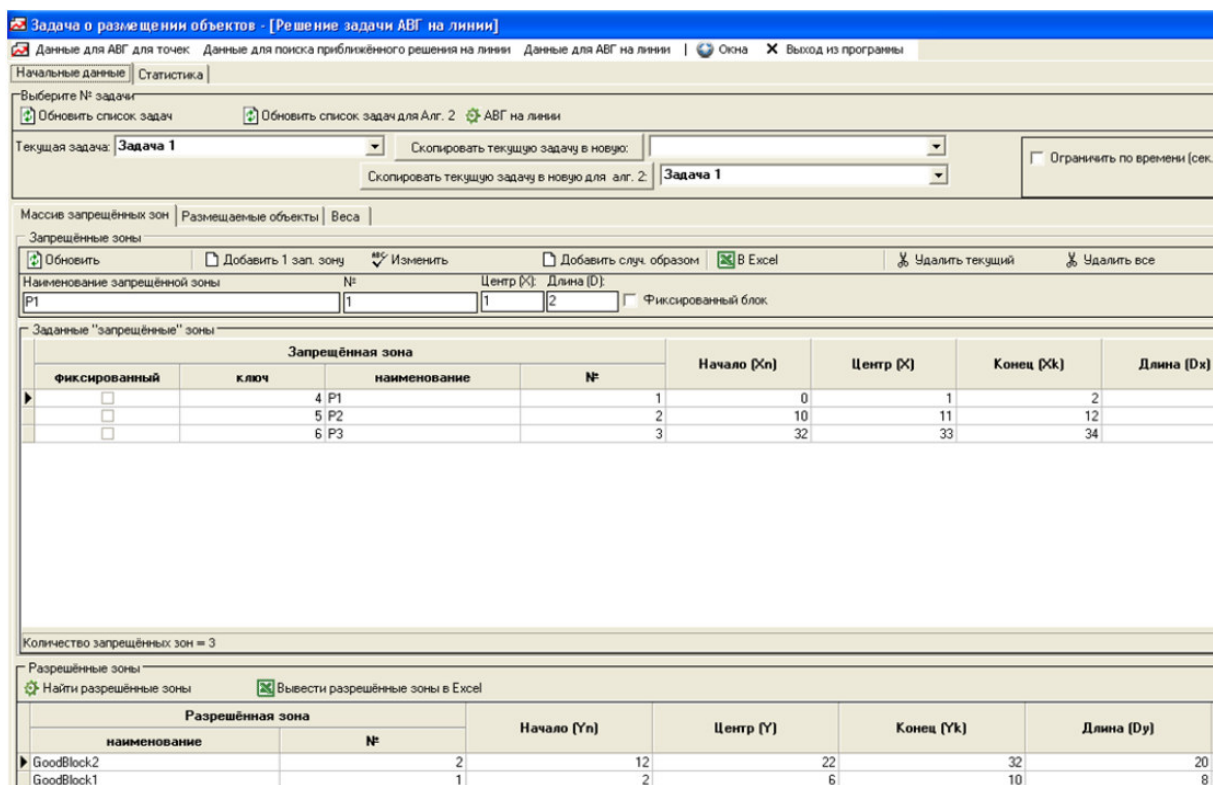


Рис. 2.4: Решение задач АВГ на линии. Вкладка *Массив запрещённых зон*.

имости связи между объектами — во вкладке *Веса*. На каждой из перечисленных вкладок есть функциональные кнопки для ввода, редактирования, удаления и добавления случайным образом соответствующих данных, а также для вывода в Excel с целью последующей визуализации для удобства пользователя (см. Рис. 2.5, Рис. 2.6).

Сведения о размещаемых объектах, например, их количество, длины, а также результат решения задачи, в виде значений координат размещаемых объектов, целевой функции, времени счета, числа итераций алгоритма отражаются во вкладке *Размещаемые объекты* рабочей формы. Здесь также есть функциональные кнопки для ввода, редактирования, удаления, добавления случайным образом соответствующих данных, а также для вывода результата решения в соответствующие поля формы и в Excel (см. Рис. 2.7).

В режиме онлайн пользователь может увидеть все данные по выбран-

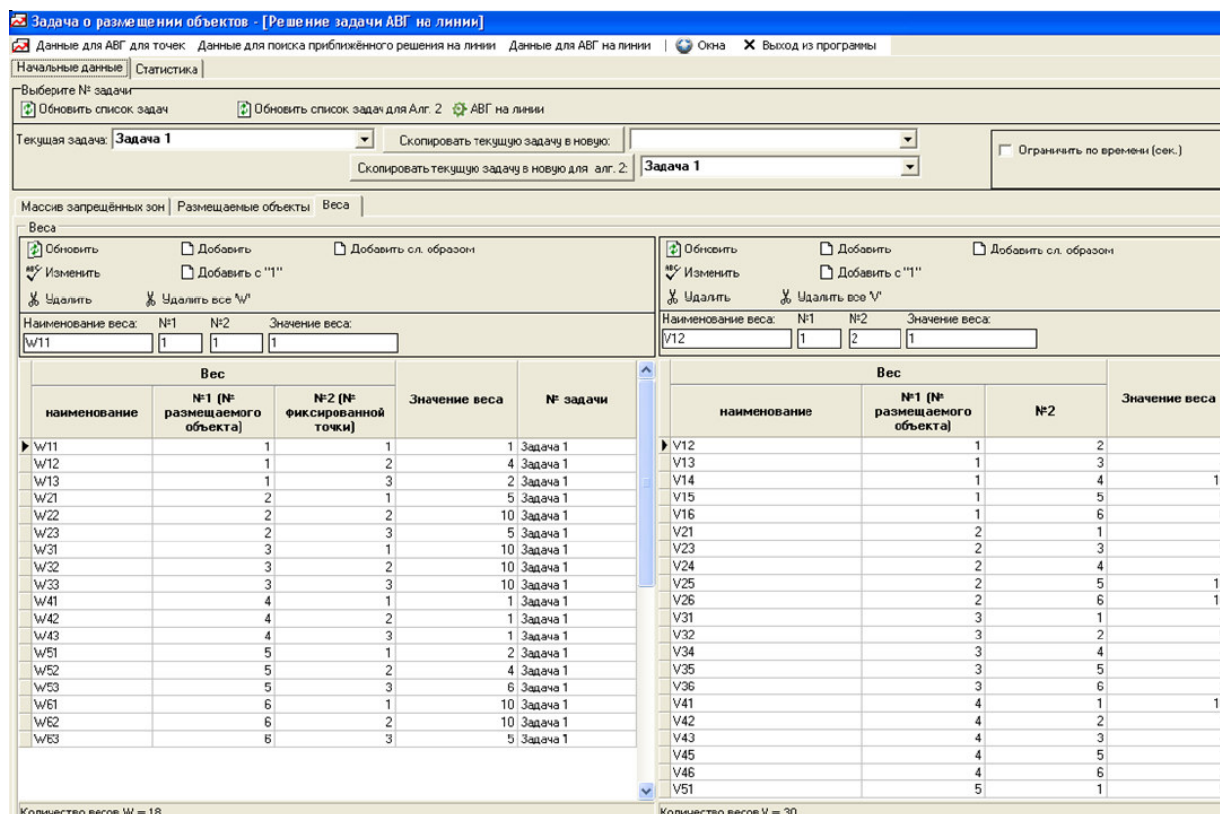


Рис. 2.5: Решение задач АВГ на линии. Вкладка *Вес*.

ной задаче из справочника, что очень удобно для анализа полученных решений и тестирования задач. Возможность визуализации также создаст удобства для восприятия результатов решения, так как пользователь может наглядно увидеть размещаемые, фиксированные объекты, запрещенные зоны для выбранной задачи из справочника. Во вкладке *Статистика* рабочей формы можно посмотреть результаты тестирования всех задач из справочника для последующего анализа решений, и вывести эти данные в Excel (см. Рис. 2.8, Рис. 2.9).

Разработанный программный комплекс предназначен для получения проектных решений, например, по размещению единиц технологического оборудования в цехах промышленного объекта. Основной областью применения является проектирование генеральных планов производств.

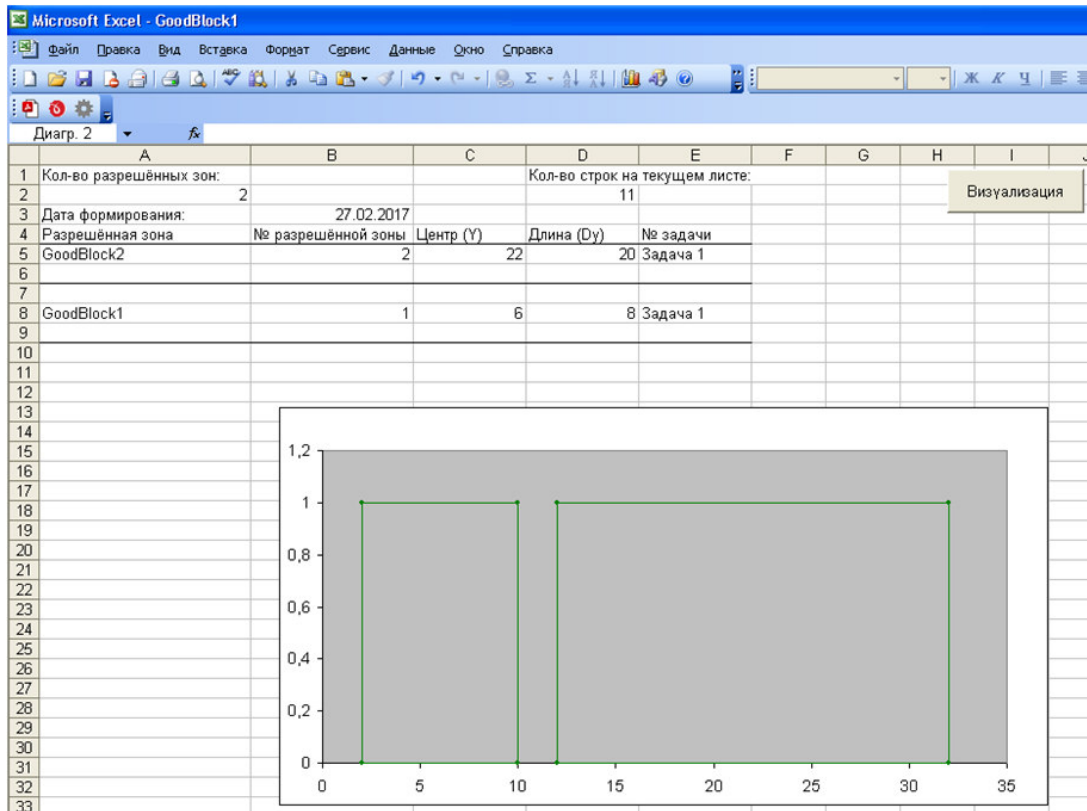


Рис. 2.6: Вывод и построение разрешенных областей в Excel.

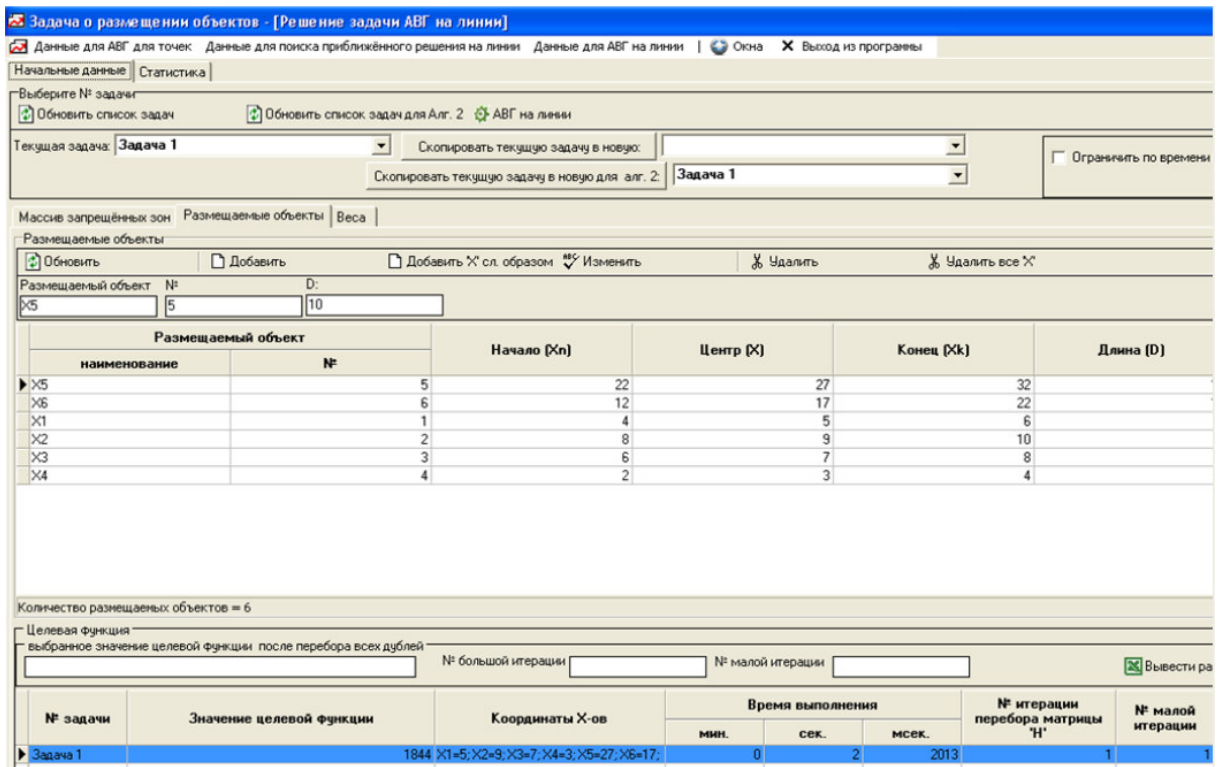


Рис. 2.7: Решение задач АВГ на линии. Вкладка *Размещаемые объекты*.

Задача о размещении объектов - [Решение задачи АВГ на линии]

Данные для АВГ для точек Данные для поиска приближённого решения на линии Данные для АВГ на линии Окна Выход из программы

Начальные данные Статистика

Обновить статистику Вывести в Excel

Задачи, имеющие решения						
№ задачи	кол-во R	кол-во P	кол-во X	кол-во W	кол-во V	кол-во ограничений
Задача 24	2	3	10	30	90	
Задача 25	3	4	10	40	90	
Задача 26	4	5	10	50	90	
Задача 27	5	6	10	60	90	
Задача 28	9	10	10	100	90	
Задача 29	3	4	10	40	90	
Задача 30	1	2	15	30	210	
Задача 31	2	3	15	45	210	
Задача 32	3	4	15	60	210	
Задача 33	4	5	15	75	210	
Задача 34	5	6	15	90	210	
Задача 35	9	10	15	150	210	
Задача 36	14	15	15	225	210	
Задача 37	1	2	20	40	380	
Задача 38	2	3	20	60	380	
Задача 39	4	5	20	100	380	
Задача 40	9	10	20	200	380	
Задача 41	14	15	20	300	380	
Задача 42	19	20	20	400	380	
Задача 43	4	5	30	150	870	
Задача 44	9	10	30	300	870	
Задача 45	19	20	30	600	870	

Рис. 2.8: Решение задач АВГ на линии. Вкладка *Статистика*.

Microsoft Excel - Statistics1

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

Q34

1	A	B	C	D	E	F	H	I	J	K	L
2	№ задачи	Количество					Время		Кол-во итераций	F	
3		R	P	X	W	V	мин.	сек.	исек.	АВГ	
3	Задача 1	2	3	6	18	30	0	2	2013	1	1844
4	Задача 2	2	3	5	15	20	0	0	968	1	1031
5	Задача 3	2	3	5	15	20	0	1	1388	1	959
6	Задача 4	2	3	5	15	20	0	1	2137	2	1136
7	Задача 5	2	3	5	15	20	0	0	952	1	1229
8	Задача 6	2	3	5	15	20	0	0	948	1	970,5
9	Задача 7	2	3	5	15	20	0	1	1430	1	968,5
10	Задача 8	2	3	5	15	20	0	1	1393	1	961,5
11	Задача 9	2	3	5	15	20	0	1	2241	2	1149
12	Задача 10	2	3	5	15	20	0	0	969	1	999,5
13	Задача 11	2	3	5	15	20	0	1	1390	1	931,5
14	Задача 12	2	3	5	15	20	0	1	1005	1	1400
15	Задача 13	2	3	5	15	20	0	1	1399	1	1246,5
16	Задача 14	2	3	5	15	20	0	1	2255	2	1764
17	Задача 15	2	3	5	15	20	0	0	932	1	1643,5
18	Задача 16	2	3	5	15	20	0	0	946	1	2438,5
19	Задача 17	2	3	5	15	20	0	1	1298	1	3057,5
20	Задача 18	2	3	5	15	20	0	1	1464	1	2421
21	Задача 19	2	3	5	15	20	0	1	2229	2	3181,5
22	Задача 20	2	3	5	15	20	0	0	973	1	2617
23	Задача 21	2	3	5	15	20	0	2	2078	1	1309,5
24	Задача 22	2	3	10	30	90	0	7	7769	1	900,25
25	Задача 23	1	2	10	20	90	0	38	38592	1	597
26	Задача 24	2	3	10	30	90	0	7	7365	1	1080
27	Задача 25	3	4	10	40	90	0	4	4221	1	2888
28	Задача 26	4	5	10	50	90	0	3	3037	1	1801
29	Задача 27	5	6	10	60	90	0	51	56521	26	1253
30	Задача 28	9	10	10	100	90	0	20	22776	20	1524

Рис. 2.9: Вывод результатов тестирования в Excel.



Рис. 2.10: Свидетельство о регистрации программы в ФАП СО РАН.