

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ С.Л. СОБОЛЕВА  
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи



ШИШЛЕНИН МАКСИМ АЛЕКСАНДРОВИЧ

**ПРЯМЫЕ И ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ  
МНОГОМЕРНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ  
АКУСТИКИ И ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ**

Специальность 01.01.07 — «вычислительная математика»

Диссертация на соискание учёной степени  
доктора физико-математических наук

Научный консультант:  
член-корреспондент РАН, профессор  
Кабанихин С.И.

# Содержание

<b>Введение</b> . . . . .	<b>4</b>
<b>1 Методы регуляризации линейных обратных и некорректных задач акустики и электродинамики</b> . . . . .	<b>34</b>
1.1 Введение . . . . .	34
1.2 Задачи продолжения решений с части границы . . . . .	39
1.2.1 Задача продолжения решения уравнения акустики . . . . .	39
1.2.2 Задача продолжения решения уравнения электродинамики . . . . .	45
1.2.3 Оценка сильной сходимости. . . . .	51
1.2.4 Анализ сингулярных чисел оператора задачи продолжения для уравнения Гельмгольца с комплексным волновым числом . . . . .	56
1.2.5 Размер области наблюдения как параметр регуляризации . . . . .	60
1.3 Метод линеаризации двумерной обратной задачи электродинамики . . . . .	67
1.4 Численные расчеты . . . . .	71
<b>2 Итерационный метод решения нелинейных обратных задач акустики и электродинамики</b> . . . . .	<b>82</b>
2.1 Введение . . . . .	82
2.2 Методы градиентного спуска в коэффициентной обратной задаче акустики . . . . .	83
2.2.1 Постановка двумерной коэффициентной обратной задачи для волнового уравнения . . . . .	85
2.2.2 Сведение задачи к системе интегродифференциальных уравнений . . . . .	86
2.2.3 Сходимость проекционного метода . . . . .	87
2.2.4 Сходимость градиентного метода . . . . .	111
2.2.5 Сходимость модифицированного метода простой итерации . . . . .	118
2.3 Численные расчеты . . . . .	120



<b>3</b>	<b>Методы И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана, М.Г. Крейна регуляризации нелинейных обратных задач акустики</b>	<b>129</b>
3.1	Введение	129
3.1.1	Спектральные обратные задачи и обратные задачи рассеяния	133
3.1.2	Метод обратной задачи рассеяния	136
3.1.3	Обратные задачи для гиперболических уравнений	139
3.1.4	Уравнение И.М. Гельфанда и Б.М. Левитана. Одномерный случай	141
3.1.5	Уравнение М.Г. Крейна. Одномерный случай	143
3.2	Двумерный аналог уравнения И.М. Гельфанда и Б.М. Левитана	144
3.3	Двумерный аналог уравнения М.Г. Крейна	147
3.4	Численные алгоритмы решения	150
3.4.1	$N$ -приближение двумерного аналога уравнения И.М. Гельфанда и Б.М. Левитана	150
3.4.2	$N$ -приближение двумерного аналога уравнения М.Г. Крейна	157
	<b>Заключение</b>	<b>173</b>
	<b>Литература</b>	<b>173</b>
<b>А</b>	<b>Подповерхностная радиолокация</b>	<b>202</b>
A.1	Краткое описание георадара	202
A.2	Результаты численных расчетов	203
<b>В</b>	<b>Исследование чувствительности данных к изменению параметров среды в окоскважинном пространстве</b>	<b>206</b>
B.1	Постановка задачи	206
B.2	Результаты численных расчетов	211

# Введение

## Общая характеристика работы

### Актуальность темы.

Диссертационная работа посвящена развитию актуального для приложений научного направления — разработке и обоснованию численных методов решения многомерных обратных и некорректных задач акустики и электродинамики.

Создание и обоснование численных методов решения обратных и некорректных задач является актуальной проблемой, во-первых, в силу практической важности обратных и некорректных задач, а во-вторых, в силу необходимости создания эффективных алгоритмов решения многомерных обратных и некорректных задач акустики и электродинамики.

При исследовании внутреннего строения Земли большую роль играют геофизические методы. Они основаны на измерении на поверхности Земли (либо в скважине) характеристик какого-либо физического поля, которое несет информации о строении Земли. Такими полями, в частности, являются акустическое и электромагнитное поле, которые в случае акустики зависят от скорости распространения волн и плотности, и в электродинамике — от проводимости, диэлектрический и магнитной проницаемости. Некорректные задачи продолжения с части границы акустических и электромагнитных полей в сторону залегания неоднородностей, а также обратные задачи определения коэффициентов уравнений акустики и электродинамики являются актуальными и практически важными.

Разработанные автором методы можно разделить на две основные группы: модифицированные градиентные методы регуляризации некорректных и обратных задач и численные методы решения многомерных аналогов уравнений И. М. Гельфанда, Б. М. Левитана и М. Г. Крейна.

**Целью** работы является создание, обоснование, а также программная реализация новых численных методов решения многомерных обратных и некорректных задач акустики и электродинамики.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Разработать и обосновать новые методы регуляризации задачи продолжения с части границы решений уравнений акустики и электродинамики.
2. Исследовать некорректность задачи продолжения с части границы акустических и электромагнитных полей.
3. Разработать и обосновать новые итерационные методы решения задач продолжения и коэффициентных обратных задач акустики и электродинамики, учитывающие априорную информацию об искомом решении.
4. Разработать новые алгоритмы регуляризации многомерных обратных задач акустики на основе двумерных аналогов уравнений И. М. Гельфанда, Б. М. Левитана и М. Г. Крейна.
5. Создать комплекс программ на основе разработанных алгоритмов решения задач.

**Методы исследования** можно разделить на два основных раздела: теоретические исследования (получение новых оценок скорости сходимости по функционалу, новых оценок условной устойчивости и оценок сильной сходимости) и разработка численных алгоритмов и комплексов программ численного решения многомерных обратных задач акустики и электродинамики.

#### **Теоретические исследования.**

В работе использованы методы математической физики (энергетические и весовые оценки, теория характеристик), функционального анализа (теория компактных и ограниченных операторов, обобщенных функций), вычислительной математики (теоретические основы численных методов решения систем дифференциальных и алгебраических уравнений, уравнений в частных производных), теории обратных и некорректных задач (теория регуляризации, оценки условной устойчивости и сходимости).

## **Алгоритмы и программы.**

При разработке и исследования алгоритмов использованы методы вычислительной математики (методы характеристик, конечных разностей, методы конечных элементов), методы регуляризации, линеаризации и теории оптимального управления, библиотеки Intel MKL, NVIDIA®CUDA cuBLAS и пакет FreeFEM++.

### **Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Новые методы регуляризации задач продолжения с части границы акустических и электромагнитных полей, основанные на сведении задач продолжения к обратным задачам.
2. Новые оценки скорости сходимости по функционалу и оценки скорости сильной сходимости градиентных методов решения задач продолжения с части границы акустических и электромагнитных полей.
3. Исследование некорректности задач продолжения с части границы акустических и электромагнитных полей на основе анализа сингулярных чисел оператора  $A$  обратной задачи  $Aq = f$ .
4. Разработка и обоснование новых итерационно-проекторных методов регуляризации коэффициентных обратных задач акустики и электродинамики, учитывающих априорную информацию об искомом решении.
5. Разработка, исследование и численная реализация новых методов регуляризации многомерных коэффициентных обратных задач акустики на основе аналогов уравнений И. М. Гельфанда, Б. М. Левитана и М. Г. Крейна и проекторных методов.

Выносимые положения соответствуют следующим пунктам паспорта специальности 01.01.07 — вычислительная математика:

1. Положения 1 и 4 соответствуют 1 пункту паспорта.
2. Положения 2, 4 и 5 соответствуют 2 пункту паспорта.
3. Положения 1 и 5 соответствуют 3 пункту паспорта.

### **Научная новизна:**

1. Построены новые алгоритмы регуляризации, получены оценки скорости сходимости по функционалу и оценки скорости сильной сходимости градиентных методов решения задач продолжения с части границы акустических и электромагнитных полей.
2. Впервые получена полная характеристика неустойчивости двумерной задачи продолжения с части границы решения уравнения Гельмгольца в случае комплексного волнового числа.
3. Разработан итерационно-проекторный алгоритм решения коэффициентной двумерной обратной задачи для уравнения акустики. Доказана сходимость  $N$ -приближения к точному решению обратной задачи. Получена оценка скорости сходимости метода, использующая априорную информацию об искомом решении.
4. Построены, исследованы и реализованы алгоритмы регуляризации многомерных аналогов уравнений И. М. Гельфанда, Б. М. Левитана, М. Г. Крейна.

**Теоретическая значимость** диссертационной работы определяется необходимостью создания новых и обоснования существующих численных методов и алгоритмов решения обратных и некорректных задач акустики и электродинамики.

**Практическая значимость** диссертационной работы определяется возможностью применения разработанных алгоритмов и программ в подповерхностной радиолокации, акустической томографии, акустическом и электромагнитном каротаже.

**Достоверность** полученных результатов и выводов подтверждается, во-первых, математическим доказательством основных положений, теорем и обоснованием алгоритмов. Во-вторых, использованием средств математического моделирования и тестирования, реализованных в виде комплекса программ на основе разработанных алгоритмов решения обратных задач акустики и электродинамики. В-третьих, достоверность результатов подтверждена численными расчетами.

### **Апробация работы.**

Результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих международных и всероссийских конференциях: “Inverse Problems: Modeling and Simulation” (г. Анталия–Фетхие, Турция, 2004, 2006, 2008, 2010, 2012, 2014 гг.), международных конференциях “Алгоритмический анализ неустойчивых задач” (г. Екатеринбург, 2004, 2008, 2011 гг.; г. Челябинск, 2014 г.), международной конференции “Тихонов и современная математика” (г. Москва, 2006 г.), международной конференции “Суверенный Казахстан: 15-ти летний путь развития космической отрасли”, (г. Алматы, Казахстан, 2006 г.), First International Congress of the International Association of Inverse Problems: Applied Inverse Problems: Theoretical and Computational Aspects (г. Ванкувер, Канада, 2007 г.), международной конференции “Обратные и некорректные задачи математической физики”, посвященной 75-летию академика М. М. Лаврентьева (г. Новосибирск, 2007 г.), 79-th Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics (г. Бремен, Германия, 2008 г.), международной конференции, посвященной 100-летию С. Л. Соболева (г. Новосибирск, 2008 г.), 1-й, 2-й, 3-й, 4-й и 5-й молодежных научных школах-конференциях “Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач” (г. Новосибирск, 2009, 2010, 2011, 2012 и 2013 гг.), всероссийской конференции “Математика в приложениях”, приуроченной к 80-летию академика С. К. Годунова (г. Новосибирск, 2009 г.), XXXV Дальневосточной Математической Школе-Семинаре имени академика Е. В. Золотова (г. Владивосток, 2010 г.), The International Workshop on Computational Inverse Problems and Applications (г. Пекин–Нанчанг, Китай, 2010, 2013 гг.), International Conference on Inverse Problems (г. Гон-Конг, Китай, 2010 г.), конференции “Гольдинские чтения”, посвященной 75-летию со дня рождения академика РАН С. В. Гольдина (г. Новосибирск, 2011 г.), всероссийской конференции по вычислительной математике КВМ–2011 (г. Новосибирск, 2011 г.), 8th International ISAAC Congress (г. Москва, 2011 г.), международной конференции “Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика”, посвященной 90-летию со дня рождения академика Н. Н. Яненко (г. Новосибирск, 2011 г.), The First Russian-French Conference on Mathematical Geophysics, Mathematical Modeling in Continuum Mechanics and Inverse Problems (г. Биарриц, Франция, 2012 г.),

International Workshop “Computational Mathematics”, (г. Сингапур, 2012 г.), международной конференции “Обратные и некорректные задачи математической физики”, посвященной 80-летию со дня рождения академика М. М. Лаврентьева (г. Новосибирск, 2012 г.), международной конференции “Дифференциальные уравнения, функциональные пространства, теория приближений”, посвященная 105-летию со дня рождения С. Л. Соболева (г. Новосибирск, 2013 г.), международной научной конференции “Методы создания и идентификации математических моделей”, посвященной 85-летию со дня рождения академика А. С. Алексеева (г. Новосибирск, 2013 г.), Applied Inverse Problems Conference (г. Дижон, Корея, 2013 г.), международной конференции “Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования” (г. Москва, 2013 г.), 4th Inverse Problems, Design and Optimization (г. Альби, Франция, 2013 г.), международной конференции “Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики”, посвященной 50-летию ИВМиМГ СО РАН (г. Новосибирск, 2014 г.), международной конференции по биоинформатике регуляции и структуры геномов и системной биологии (Bioinformatics of Genome Regulation and Structure Systems Biology – BGRS) (г. Новосибирск 2014 г.), Inverse Problems – from Theory to Application (г. Бристоль, Великобритания, 2014 г.), XV международной конференции “Супервычисления и математическое моделирование” (г. Саров, 2014 г.), the 7th International Conference on Inverse Problems and Related Topics (г. Тайбей, Тайвань, 2014 г.), 8th International Congress on “Industrial and Applied Mathematics”, (г. Пекин, Китай, 2015 г.), 4th International Conference on Matrix Methods in Mathematics and Applications (г. Москва, 2015 г.), международном семинаре по обратным и некорректно поставленным задачам (г. Москва, 2015 г.), международной конференции “Квазилинейные уравнения, обратные задачи и их приложения” (г. Долгопрудный, 2015 г.).

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на 4 всероссийских конференциях, 36 международных конференциях, а также на научных семинарах:

- в Новосибирске:

– Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН:

- \* семинар секции “Вычислительная математика и численное моделирование физики атмосферы и гидросферы” Ученого совета института под руководством члена-корреспондента РАН Г. А. Михайлова (2015 г.),
- \* объединенный семинар Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН и кафедры вычислительной математики ММФ НГУ “Численный анализ” под руководством профессора В. П. Ильина (2014 г.),
- \* объединенный семинар лаборатории математического моделирования процессов в атмосфере и гидросфере и лаборатории математического моделирования гидротермодинамических процессов в природной среде под руководством профессора В. В. Пененко и профессора В. И. Кузина (2014 г.).

– Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН:

- \* семинар отдела условно-корректных задач под руководством члена-корреспондента РАН В. Г. Романова (2012, 2013, 2014 гг.),
- \* семинар “Геометрия, топология и их приложения” под руководством академика РАН И. А. Тайманова (2013, 2015 гг.),
- \* общеинститутский математический семинар (2013 г.),
- \* семинар лаборатории дифференциальных уравнений и смежных вопросов анализа под руководством профессора В. С. Белоносова и профессора М. В. Фокина (2014 г.).

● в Москве:

– Институт вычислительной математики РАН:

- \* семинар “Актуальные проблемы вычислительной математики и математического моделирования” под руководством академика РАН В. П. Дымникова и члена-корреспондента РАН Е. Е. Тыртышникова (2013 г.).



- Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова:
  - \* семинар “Обратные задачи математической физики” под руководством профессора А. Б. Бакушинского, профессора А. В. Тихонравова и профессора А. Г. Яголы (2013 г.).
- Московский авиационный институт:
  - \* семинар под руководством члена-корреспондента РАН О. М. Алифанова и профессора А. В. Ненарокова (2013 г.).
- Московский физико-технический институт:
  - \* семинар кафедры информатики под руководством члена-корреспондента РАН И. Б. Петрова (2013 г.).

### **Личный вклад.**

Основные научные теоретические и практические результаты диссертационной работы получены автором самостоятельно.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 34 печатных изданиях (из них 7 [1–7] в журналах, рекомендованных ВАК; 7 [8–14] в журналах зарегистрированных в системе Web of Science; 15 [15–29] в журналах зарегистрированных в системе Scopus), три монографии “Алгоритмы и численные методы решения обратных и некорректных задач” (авторы С.И. Кабанихин, К.Т. Искаков, М.А. Бектемесов, М.А. Шишленин) [30], “Методы решения некорректных задач линейной алгебры” (авторы С.И. Кабанихин, М.А. Бектемесов, М.А. Шишленин) [31], “Direct methods of solving inverse hyperbolic problems” (авторы S.I. Kabanikhin, A.D. Satybaev, M.A. Shishlenin) [32] и глава “Numerical Methods for Solving Inverse Hyperbolic Problems” (авторы S.I. Kabanikhin, M.A. Shishlenin) в книге *Computational Methods for Applied Inverse Problems (Ed. by Y. Wang, A. Yagola and C. Yang)* [33], и в 52 тезисах докладов.

В опубликованных работах отражено основное содержание, результаты и выводы диссертационного исследования. Конфликт интересов с соавторами отсутствует. Личный вклад автора заключается в обсуждении постановок задач и выбора методов их решения, в разработке и обосновании численных алгоритмов, составлении и отладки компьютерных программ, проведении вычислительных экспериментов.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложений. Полный объем диссертации **226** страниц текста. Список литературы содержит **299** наименований.

## Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность исследований, проводимых в данной диссертационной работе, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы и приводится краткое изложение результатов диссертации. Формулируются основные положения, выносимые на защиту.

Основные теоретические результаты исследования обратных и некорректно поставленных задач получены А. Н. Тихоновым, В. К. Ивановым, М. М. Лаврентьевым, В. Г. Романовым, В. В. Васиным, А. Г. Яголой, А. Л. Бухгеймом, М. В. Клибановым, С. И. Кабанихиным и многими другими авторами. Метод простой итерации (в зарубежной литературе — метод итераций Ландвебера) для решения операторных уравнений развивали Н. W. Engl, M. Hanke, A. Neubauer, O. Scherzer, В. В. Васин, а его применение к регуляризации обратных задач O. Scherzer, С. И. Кабанихин, R. Ramlau, R. Kowar, M. Schieck. Существенный вклад в развитие теории и численных методов решения коэффициентных обратных задач внесли Л. Д. Фаддеев, М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, О. М. Алифанов. При разработке алгоритмов решения многомерных аналогов уравнений И. М. Гельфанда, Б. М. Левитана и М. Г. Крейна в диссертационной работе использованы результаты работ С. И. Кабанихина, М. И. Белишева, А. С. Благовещенского, Р. Г. Новикова.

В первой главе разработаны и исследованы методы регуляризации линейных обратных и некорректно поставленных задач акустики и электродинамики.

Раздел **1.1** содержит введение и обзор публикаций по задачам продолжения.

Задачи продолжения относятся к линейным некорректным задачам математической физики, основы теории которых были заложены в работах А. Н. Тихонова, М. М. Лаврентьева, В. К. Иванова, а также их учеников и последователей.

Во многих обратных задачах (например, грави- и магниторазведке) искомые неоднородности расположены на некоторой глубине под слоем среды, параметры которой известны (в геофизике это, как правило, однородные или горизонтально-слоистые среды). В этом случае важным инструментом для практиков являются задачи продолжения геофизических полей с земной поверхности в сторону залегания неоднородностей.

Задачи продолжения решения с времениподобной поверхности для гиперболических уравнений исследовались Р. Курантом, М. М. Лаврентьевым, В. Г. Романовым, С. П. Шишатским. В дальнейшем В. Г. Романовым была решена известная проблема о построении весовой функции в методе Карлемана, широко используемом в теории дифференциальных уравнений, и, в частности, в теории некорректно поставленных и обратных задач, для получения априорных оценок решения задачи Коши с данными на времениподобной поверхности. Ранее было известно, как построить ее для уравнений с постоянными коэффициентами, либо близкими к постоянным. Романовым В. Г. найден явный вид этой функции для общего гиперболического уравнения второго порядка, коэффициенты главной части которого не зависят от времени [34–45].

Одной из известных некорректных задач эллиптического типа, имеющей важное практическое значение, является задача Коши для уравнения Лапласа. К ней приводят, например, некоторые проблемы интерпретации гравитационных и магнитных полей, связанные с поиском полезных ископаемых [46]. Во многих случаях данные гравитационных измерений не позволяют однозначно определить место бурения разведочных скважин. Поэтому целесообразно предварительно рассчитать аномальное гравитационное поле на некоторой глубине под поверхностью Земли по имеющимся данным.

В разделе 1.2 изложены и обоснованы методы продолжения физических полей с части границы.

В подразделе 1.2.1 исследована задача продолжения с части границы решения уравнения акустики. Физическая постановка задачи заключается в следующем: предположим, до момента времени  $t = 0$  среда находилась в покое, далее на части границы  $z = 0$  действует источник вида  $u_z|_{z=0} = g(y, t)$  и измеряется дополнительная информация  $u|_{z=0} = f(y, t)$ . Задача состоит в продолжении

функции  $u(z, y, t)$  с части границы  $z = 0$  в область с известными параметрами среды.

Математическая постановка задачи: рассмотрим задачу продолжения в области  $\Omega \times (0, T)$ ,  $\Omega = \{(z, y) : z \in (0, h), y \in (0, L_y)\}$ :

$$\begin{aligned} c^{-2}(z, y)u_{tt} &= u_{zz} + u_{yy} - \nabla \ln \rho(z, y) \nabla u, & (z, y, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u|_{t=0} &= 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \\ u_z(0, y, t) &= g(y, t), \\ u(0, y, t) &= f(y, t). \end{aligned}$$

Здесь  $c(z, y) \geq c_0 > 0$  — скорость распространения волн,  $\rho(z, y) \geq \rho_0 > 0$  — плотность среды,  $u(z, y, t)$  — акустическое давление.

Основной результат подраздела **1.2.1** заключается в получении формулы для вычисления градиента функционала через решение прямой и сопряженной задачи и построении алгоритма простой итерации решения задачи продолжения.

Основная идея решения задачи продолжения заключается в сведении к соответствующей обратной задаче и минимизации целевого функционала.

Сформулируем сначала прямую задачу: определить функцию  $u(z, y, t)$  из уравнения

$$c^{-2}(z, y)u_{tt} = u_{zz} + u_{yy} - \nabla \ln \rho(z, y) \nabla u, \quad (z, y) \in \Omega, \quad t \in (0, T), \quad (1)$$

по заданным начальным

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad z \in (0, h), \quad y \in (0, L_y) \quad (2)$$

и граничным условиям

$$u_z|_{z=0} = g(y, t), \quad u|_{z=h} = q(y, t), \quad y \in (0, L_y), \quad t \in (0, T), \quad (3)$$

$$u|_{y=0} = q_1(z, t), \quad u|_{y=L_y} = q_2(z, t), \quad z \in (0, h), \quad t \in (0, T). \quad (4)$$

Обратная задача: определить функции  $q(y, t)$ ,  $q_1(z, t)$  и  $q_2(z, t)$  из соотношений (1)–(4) и дополнительной информации

$$u|_{z=0} = f(y, t), \quad y \in (0, L_y), \quad t \in (0, T).$$

В подразделе **1.2.2** исследована задача продолжения с части границы решения уравнения электродинамики:

$$\varepsilon(z, y)u_{tt} + \sigma(z, y)u_t = \frac{1}{\mu}(u_{zz} + u_{yy}), \quad (z, y) \in \Omega, \quad t \in (0, T), \quad (5)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad z \in (0, h), \quad y \in (0, L_y), \quad (6)$$

$$u_z|_{z=0} = g(y, t), \quad u|_{z=0} = f(y, t), \quad y \in (0, L_y), \quad t \in (0, T). \quad (7)$$

Здесь  $\varepsilon(z, y)$  — диэлектрическая проницаемость среды,  $\mu$  — магнитная проницаемость среды,  $\sigma(z, y)$  — проводимость,  $u(z, y, t)$  — горизонтальная компонента вектора электрической напряженности электромагнитного поля.

Задача продолжения решения уравнения электродинамики (5), (7), как и в подразделе **1.2.1**, формулируется в виде обратной задачи. Для ее решения применяется градиентный метод минимизации целевого функционала. Получена формула для вычисления градиента функционала через решение прямой и сопряженной задачи.

В подразделе **1.2.3** исследована задача продолжения решения эллиптического уравнения в области цилиндрического типа:

$$u_{zz} + L(y)u = 0, \quad (z, y) \in \Omega, \quad (8)$$

$$u(0, y) = f(y), \quad y \in \mathcal{D} \in \mathbb{R}^2, \quad (9)$$

$$u_z(0, y) = 0, \quad y \in \mathcal{D}, \quad (10)$$

$$u(z, y) = 0, \quad z \in (0, h), \quad y \in \partial\mathcal{D} \quad (11)$$

с условиями согласования

$$f(y) = 0, \quad y \in \partial\mathcal{D}. \quad (12)$$

Здесь  $\Omega = (0, h) \times \mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^2$  связная ограниченная область цилиндрического типа с липшицевой границей  $\partial\mathcal{D}$ ,

$$L(y)u = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_i} \left( a_{ij}(y) \frac{\partial u}{\partial y_j} \right) - c(y)u,$$

$$M_1 \sum_{j=1}^2 \nu_j^2 \leq \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(y) \nu_i \nu_j,$$

$$\forall \nu_i \in \mathbb{R}, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, 2,$$

$$0 \leq c(y) \leq M_2, \quad a_{ij} \in C^1(\overline{\mathcal{D}}), \quad c \in C(\overline{\mathcal{D}}).$$

Условную устойчивость решения задачи Коши для уравнения Лапласа в двумерном случае доказал Т. Карлеман [47] в 1926 г. Исследование условной устойчивости данной задачи можно найти в работах С. Н. Мергеляна [48] в 1956 г., М. М. Лаврентьева, В. Г. Романова, С. П. Шишатского [49] в 1980 г.

Первые результаты, относящиеся к построению эффективного алгоритма решения задачи Коши для уравнения Лапласа, опубликованы одновременно в работах С. Ricci [50] и М. М. Лаврентьева [51] в 1955 году. В 1956 г. в работе М. М. Лаврентьева [52] предложен ряд эффективных методов для решения плоской задачи в классе ограниченных функций (на основе формулы Карлемана), а для пространственной задачи получены оценки, характеризующие ее устойчивость в классе ограниченных решений.

Отметим следующие методы, которые применялись для численного решения задачи Коши для уравнения Лапласа: итерационные (В. А. Козлов, В. Г. Мазья, А. В. Фомин [53], 1991 г.; С. И. Кабанихин, А. Л. Карчевский [54], 1995 г.; D. N. Hào, D. Lesnic [55], 2000 г.; L. Marin, L. Elliott, P. J. Heggs, D. B. Ingham, D. Lesnic, X. Wen [56], 2003 г.); метод квазиобращения (Klibanov, Santosa, [57] 1991 г.; С. Clason, M. V. Klibanov [58], 2007 г.; L. Bourgeois, [59–61], L. Bourgeois, J. Dardé [62]) и регуляризирующие методы [10, 56, 63–67]; метод Backus-Gilbert [68, 69]; метод итеративной регуляризации Mann’а [70]; метод регуляризации производной четвертого порядка [71, 72]; метод Фурье [73, 74]; метод вейвлетов [75, 76]; level-set метод [77].

Основной результат подраздела 1.2.3 заключается в получении новых оценок скорости сходимости по функционалу, скорости сильной сходимости градиентных методов решения задач продолжения стационарных полей. Получена формула для вычисления градиента функционала. Получено правило остановки градиентного метода, основанное на оценках условной устойчивости, в зависимости от уровня ошибки в данных.

Некорректная задача продолжения (8)–(12) сформулирована как обратная задача к следующей прямой задаче

$$u_{zz} + L(y)u = 0, \quad (z, y) \in \Omega, \quad (13)$$

$$u_z(0, y) = 0, \quad y \in \mathcal{D}, \quad (14)$$

$$u(h, y) = q(y), \quad y \in \mathcal{D}, \quad (15)$$

$$u(z, y) = 0, \quad x \in (0, h), \quad y \in \partial\mathcal{D} \quad (16)$$

с условиями согласования

$$q(y) = 0, \quad y \in \partial\mathcal{D}. \quad (17)$$

В прямой задаче (13)–(17) требуется найти  $u(z, y)$  в области  $\Omega$  по функции  $q(y)$  заданной на части границы  $z = h$  области  $\Omega$ .

Обратная задача заключается в определении  $q(y)$  из условий (13)–(17) и заданной дополнительной информации

$$u(0, y) = f(y), \quad y \in \partial\mathcal{D}. \quad (18)$$

Обратная задача (13)–(18) сформулирована в виде операторного уравнения [11, 78]:

$$Aq = f, \quad A : L_2(\mathcal{D}) \rightarrow L_2(\mathcal{D}). \quad (19)$$

Для приближенного решения операторного уравнения (19) на основе градиентных методов

$$q_{n+1} = q_n - \alpha J'(q_n),$$

минимизируется целевой функционал

$$J(q) = \langle Aq - f, Aq - f \rangle_{L_2(\mathcal{D})}.$$

Параметр спуска  $\alpha$  может быть выбран различными способами (в методе простой итерации  $\alpha \in (0, \|A\|^{-2})$ , в методе наискорейшего спуска  $\alpha_n = \arg \min_{\alpha > 0} J(q_n - \alpha J'(q_n))$  и т.д.)

Для вычисления градиента функционала  $J'(q)$  введена сопряженная задача

$$\psi_{zz} + L(y)\psi = 0, \quad (z, y) \in \Omega,$$

$$\psi_z(0, y) = 2(u(0, y) - f(y)), \quad y \in \mathcal{D},$$

$$\psi(h, y) = 0, \quad y \in \mathcal{D},$$

$$\psi|_{\partial\mathcal{D}} = 0, \quad z \in (0, h).$$

Тогда градиент функционала  $J'(q)$  вычисляется по формуле

$$J'(q)(y) = \psi_z(h, y).$$

**Теорема.** (регуляризирующее свойство метода простой итерации) Пусть для  $f \in L_2(\mathcal{D})$  существует решение  $q_T \in L_2(\mathcal{D})$  задачи  $Aq = f$  и найдена оценка условной устойчивости  $\beta(n)$  на некотором множестве  $M$ . Тогда при выполнении условий

$$\|q_0 - q_T\|_{L_2(\mathcal{D})} \leq C,$$

$$\|f - f_\delta\|_{L_2(\mathcal{D})} \leq \delta,$$

последовательность  $\{u_{\delta,n}\}$  решений прямых задач для соответствующей итерации  $\{q_{\delta,n}\}$  сходится к точному решению  $u_T \in L_2(\Omega)$  задачи (1.47)–(1.51) и имеет место оценка:

$$\|u_T - u_{\delta,n}\|_{L_2(\Omega)} \leq C \sqrt{\frac{n\gamma - 1}{n\gamma \ln(n\gamma)}} + \delta\beta(n) \sqrt{\frac{h(\|A\|^2 - 1)}{2 \ln \|A\|}}. \quad (20)$$

Данная теорема позволяет оценить разность между точным решением задачи продолжения  $u_T(z, y)$  и решением  $u_{\delta,n}(z, y)$ , построенным по приближенным данным  $f_\delta(y)$  ( $\|f - f_\delta\|_{L_2(\mathcal{D})} \leq \delta$ ) следующим образом. Выберем  $q_0 \in L_2(\mathcal{D})$  — начальное приближение итерационного процесса

$$q_{n+1} = q_n - \alpha J'(q_n).$$

Покажем, как строится  $u_{\delta,n}(z, y)$  по известному  $q_{\delta,n}(y)$ . Сначала решаем прямую задачу:

$$\begin{aligned} u_{\delta,n_{zz}} + L(y)u_{\delta,n} &= 0, & (z, y) \in \Omega, \\ u_{\delta,n_z}(0, y) &= 0, & y \in \mathcal{D}, \\ u_{\delta,n}(h, y) &= q(y), & y \in \mathcal{D}, \\ u_{\delta,n}(z, y) &= 0, & z \in (0, h), \quad y \in \partial\mathcal{D}, \\ q_{\delta,n}(y) &= 0, & y \in \partial\mathcal{D}. \end{aligned}$$

На следующем шаге считается сопряженная задача

$$\begin{aligned} \psi_{\delta,n_{zz}} + L(y)\psi_{\delta,n} &= 0, & (z, y) \in \Omega, \\ \psi_{\delta,n_z}(0, y) &= 2(u_{\delta,n}(0, y) - f_\delta(y)), & y \in \mathcal{D}, \\ \psi_{\delta,n}(h, y) &= 0, & y \in \mathcal{D}, \\ \psi_{\delta,n}|_{\partial\mathcal{D}} &= 0, & z \in (0, h). \end{aligned}$$



Формально вычисляется градиент функционала по формуле  $J'(q_{\delta,n})(y) = \psi_{\delta,n_z}(h, y)$ . Далее строится приближенное решение на следующей итерации

$$q_{\delta,n+1} = q_{\delta,n} - \alpha J'(q_{\delta,n}).$$

**Замечание.** На основе правой части оценки (20) можно выбрать номер итерации, например, исходя из следующих рассуждений. В силу того, что первое слагаемое монотонно стремится к бесконечности, а второе слагаемое — монотонно стремится к нулю, при  $n \rightarrow \infty$ , критерий остановки для соответствующего номера итераций  $n_*$  можно выбрать по следующему правилу. Дифференцируя правую часть (20) по переменной  $n$ , найдем корень полученного  $n_r$  уравнения и выберем номер остановки  $n_s = [n_r] + 1$ .

Второй способ выбора номера итерации заключается в решении уравнения [79, 80]:

$$C \sqrt{\frac{n\gamma - 1}{n\gamma \ln(n\gamma)}} = \delta\beta(n) \sqrt{\frac{h(\|A\|^2 - 1)}{2 \ln \|A\|}}.$$

В подразделе 1.2.4 исследована задача продолжения с части границы решения уравнения Гельмгольца в случае комплексного волнового числа

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad z \in (0, h), \quad y \in (0, \pi), \quad (21)$$

$$u(0, y) = f(y), \quad y \in (0, \pi), \quad (22)$$

$$u_z(0, y) = 0, \quad y \in (0, \pi), \quad (23)$$

$$u(z, 0) = u(z, \pi) = 0, \quad z \in (0, h). \quad (24)$$

Здесь  $k^2 = \varepsilon\omega^2 - i\sigma\omega$ ;  $\omega$ ,  $\varepsilon$  и  $\sigma$  положительные постоянные,  $i = \sqrt{-1}$ .

Задача продолжения (21)–(24) сформулирована в виде обратной задачи: определить граничное условие

$$u(h, y) = q(y), \quad y \in (0, \pi), \quad (25)$$

из соотношений (21), (23), (24) и по дополнительной информации (22).

Обратная задача (21)–(25) исследована в операторной форме [53, 81]:

$$A_k q = f, \quad A_k : L_2(0, \pi) \rightarrow L_2(0, \pi).$$

Получены формулы для вычисления сингулярных чисел оператора  $A_k$ :

$$\sigma_m(A_k) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cosh(2\alpha_m h) + \cos(2\beta_m h)}}.$$

Здесь

$$\alpha_m = \sqrt{\frac{\sqrt{(m^2 - \varepsilon\omega^2)^2 + \sigma^2\omega^2} + m^2 - \varepsilon\omega^2}{2}},$$

$$\beta_m = \sqrt{\frac{\sqrt{(m^2 - \varepsilon\omega^2)^2 + \sigma^2\omega^2} - m^2 + \varepsilon\omega^2}{2}}.$$

Полученная формула сингулярных чисел оператора задачи продолжения позволяет охарактеризовать некорректность задачи и построить приближенное решение основанное на первых  $m$  сингулярных числах в зависимости от глубины восстановления  $h$ , параметров среды  $\varepsilon$  и  $\sigma$ , частоты  $\omega$  и уровня ошибок в данных  $f$ .

Например, в случае уравнения акустики ( $\varepsilon \neq 0$  и  $\sigma = 0$ ) формула для сингулярных чисел [81] имеет вид

$$\sigma_m(A_k) = \begin{cases} \frac{1}{|\cos(\sqrt{k_m}h)|}, & m^2 \leq \varepsilon\omega^2, \\ \frac{1}{\cosh(\sqrt{k_m}h)}, & \varepsilon\omega^2 < m^2. \end{cases} \quad (26)$$

Полученный вид сингулярных чисел позволяет анализировать метод усеченного сингулярного разложения и согласовывать номер усечения с ошибкой входных данных [82].

Выражение (26) позволяет заключить, что сингулярные числа зависят от волнового числа  $k_m^2 = \varepsilon\omega^2 - m^2$ . Если  $m^2 \leq \varepsilon\omega^2$ , то сингулярные числа оператора  $A_k$  ограничены снизу единицей и, таким образом, можно найти обратный оператор для  $A_{k_m}$ , в то время как при  $m^2 > \varepsilon\omega^2$  сингулярные числа убывают экспоненциально [11, 81].

В подразделе 1.2.5 численно показано, что размер области наблюдения является параметром регуляризации для задачи Коши для двумерного уравнения Лапласа, а именно, привлечение дополнительной информации с большей области наблюдения  $(-b, b) \subset (-b_1, b_1) \subset (-b_2, b_2) \subset \dots$  повышает устойчивость задачи в области  $\Omega(a, b) = \{(z, y) : z \in (0, a), y \in (-b, b)\}$ . Расчеты показали, что численное решение задачи продолжения в сторону залегания неоднородностей, позволяют локализовать эти неоднородности (см. рис. 1 и 2).

В разделе 1.3 исследован метод линеаризации для решения обратной задачи электродинамики. Метод линеаризации в обратных динамических задачах

для гиперболических уравнений применялся многими авторами, начиная с работы М. М. Лаврентьева и В. Г. Романова [83]. Одной из основных особенностей исследованных ранее линеаризованных обратных задач являлось то обстоятельство, что дополнительную информацию требовалось задавать на всей гиперплоскости  $z = 0$ . Отметим, что С. И. Кабанихин исследовал метод линеаризации для двумерной обратной задачи для волнового уравнения [84].

Исследован метод линеаризации для следующей начально-краевой задачи (прямой задачи) электродинамики

$$\varepsilon(z, y)u_{tt} + \sigma(z)u_t = \Delta u, \quad z \in \mathbb{R}_+, \quad y \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (27)$$

$$u|_{t < 0} \equiv 0, \quad (28)$$

$$u_z|_{z=0} = r_0\delta(t), \quad r_0 = \text{const} \neq 0. \quad (29)$$

Здесь  $\delta(t)$  — дельта-функция Дирака.

Обратная задача: определить  $\varepsilon(z, y)$  по дополнительной информации

$$u|_{z=0} = f(y, t), \quad y \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (30)$$

Основным результатом раздела **1.3** является построение регуляризирующего алгоритма решения линеаризованной обратной задачи.

Кратко опишем метод линеаризации. Пусть диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon(z, y)$  имеет следующую структуру:

$$\varepsilon(z, y) = \varepsilon_1(z) + \varepsilon_2(z, y)$$

и сделаны следующие предположения на функции  $\varepsilon_1(z)$ ,  $\varepsilon_2(z, y)$ :

1)  $\varepsilon_1 \in C^2(\mathbb{R}_+)$ ,  $\varepsilon_1'(+0) = 0$ ;

2) существуют положительные постоянные  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$  такие, что при всех  $z \in \mathbb{R}_+$  имеет место

$$0 < M_1 \leq \varepsilon_1(z) \leq M_2, \quad \|\varepsilon_1\|_{C^2(\mathbb{R}_+)} \leq M_3;$$

3) функция  $\varepsilon_2(z, y)$  отлична от нуля при  $(z, y) \in (0, h) \times (0, L)$ ,

4)  $\varepsilon_2(z, y) \in C^2((0, h) \times (0, L))$ ,

$$\alpha = \|\varepsilon_2\|_{C^2((0, h) \times (0, L))} \quad \alpha \ll M_1. \quad (31)$$

Обратная задача: определить  $\varepsilon(z, y)$  из соотношений (27)–(30) и заданной  $\sigma(z)$ .

Используя предположение (31) о малости  $\varepsilon_2$ , проведена линеаризация обратной задачи (27)–(30). Решение  $u(z, y, t)$  представлено в виде

$$u(z, y, t) = u_1(z, t) + u_2(z, y, t).$$

Здесь  $u_1(z, t)$  является решением следующей задачи:

$$\varepsilon_1(z)u_{1tt} + \sigma(z)u_{1t} = u_{1zz}, \quad z \in \mathbb{R}_+, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (32)$$

$$u_1|_{t<0} \equiv 0, \quad u_{1z}|_{z=0} = r_0\delta(t). \quad (33)$$

Здесь  $\widehat{y}$  – фиксированное значение переменной.

Пренебрегая членом  $\varepsilon_2\Delta u_2$ , получена задача определения  $u_2(z, y, t)$  в области  $\Omega \times (0, T)$ ,  $\Omega = \{(z, y) : z \in (0, h), y \in (0, L_y)\}$ :

$$\varepsilon_1 u_{2tt} + \sigma(z)u_{2t} = \Delta u_2 + \varepsilon_2(z, y)u_{1zz}, \quad (z, y) \in \Omega, \quad t \in (0, T), \quad (34)$$

$$u_2|_{t<0} \equiv 0, \quad u_{2z}|_{z=0} = 0, \quad (35)$$

$$u(z, 0, t) = u(z, L_y, t) = 0, \quad z \in (0, h), \quad t \in (0, T). \quad (36)$$

Здесь  $T = 2h(M_1 - \alpha)^{-1}$ ,  $L_y = L + T(M_2 + \alpha)$ .

Дополнительная информация для определения  $u_1(z, t)$  и функции  $\varepsilon_1(z)$  из соотношений (32), (33):

$$u_1(0, t) = f(\widehat{y}, t), \quad t \in (0, T). \quad (37)$$

Дополнительная информация для задачи (34)–(36) об определении  $u_2(z, y, t)$  и  $\varepsilon_2(z, y)$  примет следующий вид:

$$u_2(0, y, t) = f(y, t) - u_1(0, t), \quad y \in (0, L_y), \quad t \in (0, T). \quad (38)$$

Таким образом, решение обратной задачи (27)–(30) об определении  $\varepsilon(z, y)$  и функции  $u(z, y, t)$  состоит из следующих этапов:

1. Решение обратной задачи (32), (33), (37) и нахождение  $\varepsilon_1(z)$  и функции  $u_1(z, t)$ .
2. Решение обратной задачи (34)–(36), (38) и нахождение  $\varepsilon_2(z, y)$ .

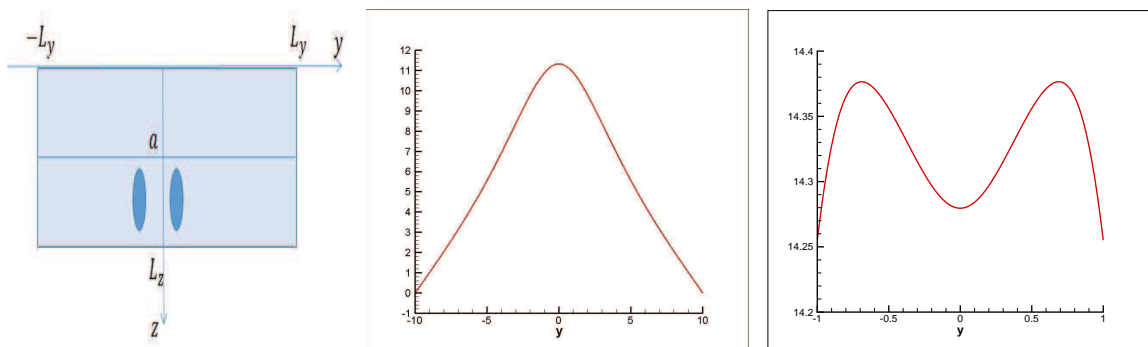


Рисунок 1: Задача Коши для уравнения Лапласа. Модельный пример. Слева — область с неоднородностями. В центре — данные  $u(0, y)$ , наблюдаемые на поверхности  $z = 0$ . Справа — численное решение задачи продолжения  $u(a, y)$  на глубине  $z = a$ .

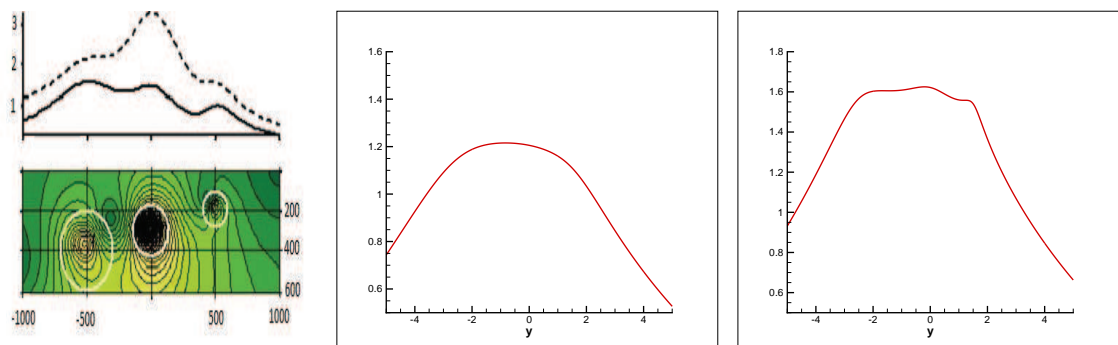


Рисунок 2: Задача Коши для уравнения Лапласа. Слева — модель среды. В центре — данные  $u(0, y)$ , наблюдаемые на поверхности  $z = 0$ . Справа — численное решение задачи продолжения  $u(1, y)$  на глубине 1.

В разделе **1.4** приведены результаты численных расчетов двумерной задачи продолжения. Проведен сравнительный анализ численных методов регуляризации задачи продолжения решения с части границы двумерного уравнения Гельмгольца.

В **главе 2** на основе проекционного метода исследована задача восстановления двумерного коэффициента в уравнении акустики. Обратная задача сведена к нелинейной системе интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра. Доказана сходимость проекционного метода.

Многомерная обратная задача сводена к бесконечной системе одномерных обратных задач с помощью проекционного метода. Построен численный алгоритм решения  $N$ -приближение системы одномерных обратных задач. Основной проблемой на этом пути является обоснование существования решения конечной системы одномерных обратных задач и получение оценки скорости сходимости решения конечной системы одномерных обратных задач к точному решению исходной многомерной обратной задачи при стремлении к бесконечности параметра  $N$  — длины отрезка ряда Фурье в разложении по базисным функциям. Впервые проекционный метод для решения коэффициентной обратной задачи для волнового уравнения применил С. И. Кабанихин [84]. Позднее S. I. Kabanikhin, O. Scherzer, M. A. Shishlenin [85] обобщили данный подход на функции из пространства  $L_2$ .

В разделе **2.2** разработан метод решения двумерной задачи акустики на основе проекционного и градиентного метода.

В подразделе **2.2.1** сформулирована обратная задача восстановления функций  $\bar{u}(x, y)$ ,  $\tilde{u}(x, y, t)$ , заданных на  $\Omega$ ,  $(0, T) \times (-\pi, \pi)$ , соответственно, в волновом уравнении

$$\tilde{u}_{tt} = \Delta \tilde{u}(x, y, t) + \bar{u}(x, y) \tilde{u}(x, y, t) \quad (39)$$

с заданными начальными и граничными условиями

$$\tilde{u}(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad x \in (-T, T), \quad y \in (-\pi, \pi), \quad (40)$$

$$\tilde{u}_t(x, y, 0) = 0, \quad x \in (-T, T), \quad y \in (-\pi, \pi), \quad (41)$$

$$\tilde{u}(x, -\pi, t) = \tilde{u}(x, \pi, t), \quad x \in (t - T, T - t), \quad t \in (0, T), \quad (42)$$

$$\tilde{u}(0, y, t) = \tilde{f}(y, t), \quad y \in (-\pi, \pi), \quad t \in (0, T). \quad (43)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\Delta(x, t) &= \left\{ (\xi, \tau) : 0 < \xi < x, t - x + \xi < \tau < t + x - \xi \right\}, \\ \Delta(T) &= \Delta(T, 0), \\ \Omega &= \left\{ (x, y, t) : (x, t) \in \Delta(T), y \in (-\pi, \pi) \right\}.\end{aligned}$$

В подразделе **2.2.2** обратная задача сводится к системе интегро-дифференциальных уравнений в предположении, что функции  $\tilde{f}$  и  $\varphi$  являются достаточно гладкими и, обозначив

$$u := \tilde{u}_{tt}, \quad f := \tilde{f}_{tt}, \quad \psi := \Delta\varphi,$$

получим, что

$$u_{tt} = \Delta u + \bar{u}u, \quad (44)$$

$$u(x, y, 0) = \psi(x, y) + \bar{u}(x, y)\varphi(x, y), \quad (45)$$

$$u_t(x, y, 0) = 0, \quad (46)$$

$$u(x, -\pi, t) = u(x, \pi, t), \quad (47)$$

$$u(0, y, t) = f(y, t). \quad (48)$$

Продолжим функцию  $f$  четным образом по переменной  $t$ , тогда из формулы Даламбера, получим, что

$$u(x, y, t) = h(x, y, t) + B_{x,t}[Ru], \quad (x, y, t) \in \Omega. \quad (49)$$

Здесь

$$\begin{aligned}h(x, y, t) &= \frac{1}{2}[f(y, t+x) + f(y, t-x)], \\ Ru(x, y, t) &= u_{yy} + \bar{u}(x, y)u(x, y, t), \\ B_{x,t}[u] &= \frac{1}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} u(\xi, y, \tau) d\tau d\xi.\end{aligned}$$

Используя (45) и (49), при  $t = 0$  получим

$$\psi(x, y) + \bar{u}(x, y)\varphi(x, y) = \bar{h}(x, y) + B_{x,0}[Ru], \quad (50)$$

где  $\bar{h}(x, y) = h(x, y, 0)$ .

Тем самым обратная задача определения функций  $\bar{u}$  и  $\tilde{u}$  из соотношений (39)–(43) сведена к системе интегро-дифференциальных уравнений (49), (50). Задача состоит в определении функций  $\bar{u}(x, y)$  и  $u(x, y, t)$  по заданным  $h(x, y, t)$ ,  $\bar{h}(x, y)$ ,  $\psi(x, y)$  и  $\varphi(x, y)$ .

Положим, что  $\psi(x, y) = 0$ ,  $\varphi(x, y) = -1$  и рассмотрим разложение в ряд Фурье по переменной  $y$  функций  $u$  и  $\bar{u}$  в области  $(x, t) \in \Delta(T)$ :

$$u(x, y, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k(x, t) e^{iky},$$

$$\bar{u}(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{u}_k(x) e^{iky}.$$

От уравнений (49), (50) перейдем к бесконечной системе уравнений на коэффициенты Фурье функций:

$$u_n(x, t) = h_n(x, t) - B_{x,t} \left[ n^2 u_n - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{u}_k u_{n-k} \right], \quad (51)$$

$$\bar{u}_n(x) = \bar{h}_n(x) - B_{x,0} \left[ n^2 u_n - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{u}_k u_{n-k} \right], \quad (52)$$

где  $(x, t) \in \Delta(T)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Будем исследовать конечную подсистему (51), (52):

$$v_n(x, t) = h_n(x, t) - B_{x,t} \left[ n^2 v_n - \sum_{|k| \leq N} \bar{v}_k v_{n-k} \right], \quad (x, t) \in \Delta(T), \quad (53)$$

$$\bar{v}_n(x) = \bar{h}_n(x) - B_{x,0} \left[ n^2 v_n - \sum_{|k| \leq N} \bar{v}_k v_{n-k} \right], \quad x \in (0, T), \quad (54)$$

где  $|n| \leq N$ . Конечная система (53), (54) состоит из  $2 \times (2N + 1)$  уравнений с  $2 \times (2N + 1)$  неизвестными.

В подразделе 2.2.3 обратная задача исследована с помощью проекционного метода. Построена специального вида конечная система уравнений, решение которой покомпонентно сходится к решению обратной задачи на коэффициенты Фурье, полученной из системы интегро-дифференциальных уравнений.

$N$ -приближение системы (53), (54) сформулировано в виде нелинейного операторного уравнения

$$\mathcal{A}(V) := V + \mathcal{L}(V) = H. \quad (55)$$



Введем класс функций  $\mathcal{F}(\rho, T)$ . Пусть для  $\tilde{M} > 0$  и  $\rho > 0$

$$\mathcal{F}(\rho, T) := \left\{ u : u(\cdot, y, t) = \sum_k u_k(\cdot, t) e^{iky}, \quad \|u_k\|_{L^2(T)} \leq \tilde{M} e^{-\rho|k|} \right\}.$$

Основным результатом подраздела **2.2.3** является следующая теорема.

**Теорема.** Пусть  $N > 0$  и для некоторых  $\rho > 0$  и  $T > 0$  коэффициенты Фурье функций  $(u, \bar{u}) \in \mathcal{F}(\rho, T)$  удовлетворяют (53), (52).

Тогда существует постоянная  $\mu' > 0$ , такая что для  $T' \in (0, T)$  удовлетворяет  $\mu'T' < \rho$  существует единственное решение  $\vec{V} \in L^2(T')$  системы (53), (54), в которой  $T$  заменено на  $T'$ .

Более того, существует постоянная  $M_1 := M_1(T', \rho)$ , такая что

$$\begin{aligned} \max_{|n| \leq N} \|u_n - v_n\|_{L^2(\Delta(T'))} &\leq T'(M_1 + 1)e^{N(\mu'T' - \rho)}, \\ \max_{|n| \leq N} \|\bar{u}_n - \bar{v}_n\|_{L^2(0, T')} &\leq \sqrt{T'}(M_1 + 1)e^{N(\mu'T' - \rho)}, \end{aligned}$$

В подразделе **2.2.4** исследована сходимость метода простой итерации для решения конечной системы интегральных уравнений (55).

Для итерационных методов параметром регуляризации является номер итерации. Одной из проблем является выбор правила остановки итерационного процесса, согласующего число итераций с погрешностью входных данных.

Общая схема метода

$$V^{(k+1)} = V^{(k)} - \alpha [\mathcal{A}'(V^{(k)})]^* (\mathcal{A}(V^{(k)}) - H), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (56)$$

где  $\alpha$  – некоторый положительный параметр.

Для численного решения уравнения (55) исследованы свойства операторов  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}'$ ,  $(\mathcal{A}')^*$ , где  $\mathcal{A}'$  – производная Фреше оператора  $\mathcal{A}$ ,  $(\mathcal{A}')^*$  – оператор, сопряженный к производной Фреше.

Доказано, что оператор  $\mathcal{A} : L^2(T) \rightarrow L^2(T)$  дифференцируем по Фреше и  $\mathcal{A}' : L^2(T) \rightarrow L^2(T)$ . Найдены явные выражения для  $\mathcal{A}'$  и  $(\mathcal{A}')^*$ .

Из работы М. Hanke, А. Neubauer, О. Scherzer [86] известно, что метод простой итерации (56) локально сходится, если в некоторой окрестности

$$\mathbf{B}_\delta(V^{(0)}) = \left\{ V \in L^2(T) : \|V - V^{(0)}\|_{L^2(T)} \leq \delta \right\}$$

точного решения  $V^\dagger$  уравнения (55) выполняется условие:

$$\|\mathcal{A}(X) - \mathcal{A}(Y) - \mathcal{A}'(Y)(X - Y)\|_{L^2(T)} \leq \eta \|\mathcal{A}(X) - \mathcal{A}(Y)\|_{L^2(T)}, \quad (57)$$

где  $X, Y \in \mathbf{B}_\delta(V^{(0)})$ ,  $\eta \in (0, 1/2)$ .

Показано, что оператор  $\mathcal{A}$  удовлетворяет условию (57), и доказана теорема о сходимости метода простой итерации.

**Теорема.** Пусть выполнены условия предыдущей теоремы. Тогда метод простой итерации локально сходится к точному решению  $V^\dagger$  и выполняется

$$\left\| V^{(k+1)} - V^\dagger \right\|_{L^2(T')} \leq \beta^{k+1} \delta e^{\frac{\mu NT'}{2}},$$

где  $\delta$  такое, что  $V^\dagger \in \mathbf{B}_\delta(V^{(0)})$ .

Нелинейные интегральные операторы вида (55), исследованы в работах В.В. Васина 1995, 1998 гг. [87, 88], В.В. Васина, И.И. Еремина, 2005 г. [89]. В частности, показано, что

$$\|\mathcal{A}'(V)\mathbb{S}\|_{L^2(T)} \leq C_1 \|\mathbb{S}\|_{L^2(T)}, \quad (58)$$

$$\|\mathcal{A}(V_1) - \mathcal{A}(V_2) - \mathcal{A}'(V_2)(V_1 - V_2)\|_{L^2(T)} \leq \eta \|\mathcal{A}(V_1) - \mathcal{A}(V_2)\|_{L^2(T)}. \quad (59)$$

Здесь  $\eta \in (0, 1/2)$  – некоторая постоянная.

Из оценок (58), (59) вытекает оценка скорости сходимости метода простой итерации

$$\begin{aligned} \left\| V^{(n)} - V \right\|_{L^2(T)} &\leq M \beta^n, \\ V^{(n+1)} &= T(V^{(n)}), \\ T(V^{(n)}) &= V^{(n)} - \alpha \left[ \mathcal{A}'(V^{(n)}) \right]^* \left( \mathcal{A}(V^{(n)}) - H \right). \end{aligned}$$

Здесь  $\beta \in (0, 1)$  и  $M > 0$  некоторые постоянные, не зависящие от  $n$ .

Отметим, что из оценки (59) следует оценка [88, 89]:

$$\|\mathcal{A}(V_1) - \mathcal{A}(V_2)\|^2 \leq \kappa \langle \mathcal{A}(V_1) - \mathcal{A}(V_2), \mathcal{A}'(V_1)(V_1 - V_2) \rangle, \quad (60)$$

при  $\kappa = 2/(1 - \eta^2)$ .

В подразделе **2.2.5** рассмотрена модификация метода простой итерации. Предположим, что решение системы интегральных уравнений существует, является достаточно гладким и удовлетворяет оценке  $\|V\|_{L^2(T)} \leq r$ . Рассмотрим модифицированный метод простой итерации

$$V^{(n+1)} = \mathcal{P}T(V^{(n)}). \quad (61)$$

Здесь  $\mathcal{P}$  в общем случае фейеровское (псевдосжимающее отображение) [89].

Условие (60) достаточно для сильной фейеровости оператора шага

$$T(V) = V - \alpha[\mathcal{A}'(V)^*](\mathcal{A}(V) - H),$$

при  $\alpha \in (0, 2/\kappa C_1^2)$ ,  $C_1$  – положительная постоянная из оценки (58).

В качестве  $\mathcal{P}$  рассмотрена метрическая проекция. Из работы В. В. Васина и А. Л. Агеева, 1993 года [90] известно, что метрическая проекция  $\mathcal{P}$  также обладает свойством (60). Поэтому заключаем, что модифицированный метод простой итерации (61) сходится по функционалу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{A}(V^n) - H\| = 0.$$

Используя результаты работ В. В. Васина, И. И. Еремина, 2005 г., В. В. Васина, Г. Г. Скорика, 2010 г. [89, 91], можно обосновать и сильную сходимость метода простой итерации.

В **главе 3** рассматриваются многомерные аналоги уравнений И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана, М.Г. Крейна. Развитие многомерных аналогов уравнений Гельфанда–Левитана–Крейна началось с работы М. И. Белишева, который в 1987 году разработал метод граничного управления [92, 93].

В 1988 году С. И. Кабанихин предложил многомерный аналог уравнений Гельфанда–Левитана и Крейна [94, 95]. В 1992 году М. И. Белишев и А. С. Благовещенский предложили многомерный аналог уравнения Гельфанда–Левитана на основе метода граничного управления [96]. В 2004 году С.И. Кабанихин и М.А. Шишленин показали [29], что дискретный аналог уравнения, получаемый в методе граничного управления, совпадает с дискретным аналогом уравнения М.Г. Крейна в случае одномерной коэффициентной обратной задачи акустики. В 2004 году С.И. Кабанихин, М.А. Сатыбаев, М.А. Шишленин опубликовали монографию о численных методах решения двумерных аналогов уравнения

Гельфанда–Левитана и Крейна для коэффициентных обратных задач для волнового уравнения и уравнения акустики [32].

Одно из преимуществ подхода Гельфанда–Левитана–Крейна для решения коэффициентных обратных задач для гиперболических уравнений заключается в отсутствии многократного решения прямых задач.

Основной результат главы 3 заключается в разработке и обосновании численных методов решения двумерных аналогов уравнений И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана и М.Г. Крейна на основе проекционного метода. Для двумерных аналогов уравнений И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана и М.Г. Крейна построены методы регуляризации, связывающие число восстанавливаемых гармоник Фурье и уровень ошибки в данных.

В подразделе 3.1 проведен краткий исторический обзор по методу И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана, М.Г. Крейна и В.А. Марченко в спектральных обратных задачах, обратных задачах рассеяния и динамических коэффициентных обратных задачах. На примере одномерных задач приведены уравнения И.М. Гельфанда и Б.М. Левитана для спектральной обратной задачи и динамической коэффициентной задачи для волнового уравнения; уравнение М.Г. Крейна для одномерной коэффициентной обратной задачи акустики и уравнение В.А. Марченко при интегрировании уравнения Кортевега–де Фриза методом обратной задачи рассеяния.

В подразделе 3.2 рассмотрена следующая последовательность прямых задач  $k = (k_1, k_2)$ ,  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ :

$$u_{tt}^{(k)} = \Delta u^{(k)} - q(z, y)u^{(k)}, \quad z \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0, \quad (62)$$

$$u^{(k)}|_{t=0} = 0, \quad u_t^{(k)}|_{t=0} = \delta(z)e^{i(k,y)}. \quad (63)$$

Здесь мультииндекс  $(k, y) = k_1 y_1 + k_2 y_2$ .

Обратная задача заключается в определении четной по переменной  $z$  функции  $q(z, y)$  по дополнительной информации:

$$u^{(k)}|_{x=0} = f^{(k)}(y, t), \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0, \quad k \in \mathbb{Z}^2. \quad (64)$$

Постановка обратных задач вида (62)–(64) возникает, например, в геофизике в случае площадной системы измерений (см. 3):

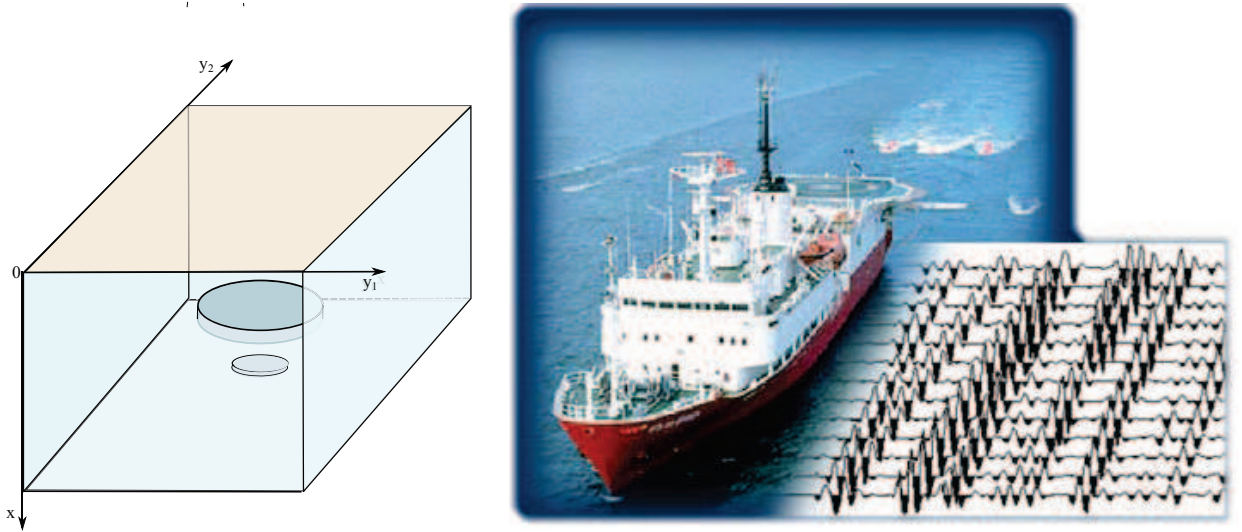


Рисунок 3: Площадная система измерений

Обратная задача (62)–(64) сведена к двумерному семейству  $k \in \mathbb{Z}$  интегральных уравнений в области  $|t| < z, y \in \mathbb{R}$  [94]:

$$\begin{aligned} \tilde{w}^{(k)}(z, y, t) + \int_{-z}^z \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} f_k^{(m)'}(t-s) \tilde{w}^{(m)}(z, y, s) ds = \\ = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial f^{(k)}}{\partial t}(y, t-z) + \frac{\partial f^{(k)}}{\partial t}(y, t+z) \right]. \end{aligned} \quad (65)$$

Семейство интегральных уравнений (65) является многомерным аналогом уравнения Гельфанда–Левитана.

Решение обратной задачи (62)–(64) может быть получено по формуле [13, 32, 33, 94]:

$$q(z, y) = 4 \frac{d}{dz} \tilde{w}^{(0)}(z, y, z-0).$$

В подразделе 3.3 рассмотрена обратная задача определения  $2\pi$ -периодической по переменной  $y \in \mathbb{R}^2$  плотности среды  $\rho(z, y)$ . Сначала исследована последовательность прямых задач  $k \in \mathbb{Z}^2$ :

$$u_{tt}^{(k)} = \Delta u^{(k)} - \nabla \ln \rho(z, y) \nabla u^{(k)}, \quad z > 0, \quad y \in (-\pi, \pi)^2, \quad t > 0, \quad (66)$$

$$u^{(k)}|_{t < 0} \equiv 0; \quad (67)$$

$$\frac{\partial u^{(k)}}{\partial z}(+0, y, t) = e^{i(k, y)} \delta(t). \quad (68)$$

Обратная задача заключается в нахождении функции  $\rho(z, y)$  из соотношений (66)–(68) по дополнительной информации

$$u^{(k)}(0, y, t) = f^{(k)}(y, t), \quad y \in (-\pi, \pi)^2, \quad t > 0. \quad (69)$$

Обратная задача (66)–(69) сведена к двумерному аналогу уравнения М. Г. Крейна [94]:

$$2\Phi^{(k)}(z, t) - \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} \int_{-z}^z f_m^{(k)'}(t-s) \Phi^{(m)}(z, s) ds = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(k,y)}}{\rho(0, y)} dy. \quad (70)$$

Здесь  $|t| < z$ ,  $k \in \mathbb{Z}^2$ .

Решение обратной задачи (66)–(69) находится по формуле [94]:

$$\rho(z, y) = \frac{\pi^2}{\rho(0, y)} \left[ \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} \Phi^{(m)}(z, z-0) e^{-i(m,y)} \right]^{-2}. \quad (71)$$

Для фиксированного  $z_0$  находим решение уравнения (70) функция  $\Phi^{(k)}(z, t)$ . Приближенное решение обратной задачи определяется по формуле (71). Заметим, что решение обратной задачи в точке  $z_0$  находится без вычисления решения на интервале  $(0, z_0)$ .

В подразделе 3.4 приведены результаты численных расчетов  $N$ -приближений двумерных аналогов уравнений Б. М. Гельфанда, И. М. Левитана и М. Г. Крейна.

В **заключении** приведены основные результаты работы:

1. Разработаны новые методы регуляризации задач продолжения с части границы акустических и электромагнитных полей.
2. Получены новые оценки скорости сходимости по функционалу и оценки скорости сильной сходимости градиентных методов решения задач продолжения акустических и электромагнитных полей.
3. Исследована степень некорректности задач продолжения с части границы акустических и электромагнитных полей на основе анализа сингулярных чисел оператора.
4. Разработан и обоснован итерационно-проекционный метод регуляризации коэффициентных обратных задачи акустики, учитывающих априорную информацию об искомом решении.

5. Разработаны новые методы регуляризации двумерных коэффициентных обратных задач акустики на основе аналогов уравнений И. М. Гельфанда, Б. М. Левитана и М. Г. Крейна и проекционных методов.
6. Разработанные алгоритмы решения задач продолжения апробированы на задачах продолжения с части границы электромагнитных полей.

**Приложение** состоит из двух частей. В приложении **А** приведено краткое описание георадара “Лоза”, приведены краткие технические характеристики георадара и проведено сравнение численных экспериментов с данными георадара. В приложении **В** исследована чувствительность данных обратной задачи к изменениям электромагнитных параметров среды в задачах околоскважинного зондирования.

### **Благодарности**

В заключение автор выражает глубокую признательность своему научному консультанту д.ф.-м.н., профессору, член-корреспонденту РАН С. И. Кабанихину за многолетнюю поддержку и научное сотрудничество.

Автор выражает благодарность д.ф.-м.н., профессору, член-корреспонденту РАН В. Г. Романову за ценные советы и замечания.

Автор благодарен сотрудникам отдела некорректных задач Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, лаборатории математических задач геофизики Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН за постоянную поддержку, творческую и благожелательную атмосферу, в которой была выполнена работа.

# Глава 1

## Методы регуляризации линейных обратных и некорректных задач акустики и электродинамики

### 1.1 Введение

В данной главе предложен единый подход к регуляризации задач продолжения решений с части границы эллиптических и гиперболических уравнений математической физики.

Задачи продолжения относятся к некорректно поставленным задачам математической физики, основы теории которых были заложены в работах А. Н. Тихонова, М. М. Лавренyteва, В. К. Иванова, а также их учеников и последователей.

Во многих обратных и некорректных задачах (например, грави- и магниторазведке) искомые неоднородности расположены на некоторой глубине под слоем среды, параметры которой известны (в геофизике это, как правило, однородные или горизонтально-слоистые среды). В этом случае важным инструментом для практиков являются задачи продолжения геофизических полей с земной поверхности в сторону залегания неоднородностей.

Одной из известных некорректных задач, имеющей важное практическое значение, является задача Коши для уравнения Лапласа. К этой задаче приводят, например, некоторые проблемы интерпретации гравитационных и магнитных полей, связанные с поиском полезных ископаемых [46, 97, 98]. Во многих случаях



данные гравитационных измерений не позволяют однозначно определить место бурения разведочных скважин. Поэтому целесообразно предварительно рассчитать аномальное гравитационное поле на некоторой глубине под поверхностью Земли по имеющимся данным, и уточнить тем самым, количество и глубину залегания неоднородностей.

Пусть ось  $y$  совпадает с поверхностью Земли,  $u(z, y)$  — вертикальная компонента напряженности гравитационного поля, порожденного несколькими телами, лежащими ниже уровня  $z = h$ . Тогда функция  $u(z, y)$  есть решение уравнения Лапласа

$$u_{zz} + u_{yy} = 0,$$

с граничными условиями

$$u(0, y) = f(y), \quad u_z(0, y) = g(y).$$

Требуется определить значения функции  $u(z, y)$  при  $0 < z < h$ .

Неустойчивость задачи продолжения показал Ж. Адамар [99, 100] на следующем примере

$$\begin{aligned} u_{zz}^k + u_{yy}^k &= 0, \\ u^k|_{z=0} &= \frac{1}{k} \sin(ky), \\ u_z^k|_{z=0} &= 0. \end{aligned}$$

Решение задачи продолжения

$$u^k(z, y) = \frac{1}{k} (e^{kz} + e^{-kz}) \sin(ky).$$

показывает, что в любой окрестности плоскости  $z = 0$  сколь угодно малым вариациям начальных данных могут соответствовать сколь угодно большие вариации решения задачи при  $k \rightarrow \infty$ .

Условную устойчивость решения задачи Коши для уравнения Лапласа в двумерном случае доказал Т. Карлеман [47] в 1926 г. Исследование условной устойчивости данной задачи можно найти в работах С. Н. Мергеляна [48] в 1956 г., М. М. Лаврентьева, В. Г. Романова, С. П. Шишатского [49] в 1980 г.

Первые результаты, относящиеся к построению эффективного алгоритма решения задачи Коши для уравнения Лапласа, опубликованы одновременно в работах С. Ricci [50] и М. М. Лаврентьева [51] в 1955 году. В 1956 г. в работе

М. М. Лаврентьева [52] предложен ряд эффективных методов для решения плоской задачи в классе ограниченных функций (на основе формулы Карлемана), а для пространственной задачи получены оценки, характеризующие ее устойчивость в классе ограниченных решений.

Отметим, что в работах М. М. Лаврентьева [51, 52] и А. Н. Тихонова [101] задача Коши для уравнения Лапласа сведена к интегральным уравнениям первого рода

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(\xi, y)q(\xi)d\xi = f(y),$$

где

$$K(\xi, y) = \frac{h}{h^2 + (y - \xi)^2}, \quad q(y) = u(h, y).$$

Были исследованы методы регуляризации этой задачи и установлена условная корректность.

В работе А.К. Маловичко [102] в 1956 г. проанализирован ряд методов решения задач, сведенных к интегральному уравнению первого рода: разложение в ряд, сведение к системе алгебраических уравнений, линеаризация, численное интегрирование, сеточный метод, основанный на теореме о главном значении для гармонических функций и др.

А.Р. Calderon [103], а позднее Engl, Leitaо [70] доказали существование и единственность слабого решения.

Н. Han [104], R.S. Falk и P.B. Monk [105], R.S. Falk [106], Н. Han и J.-J. Reinhardt [107], J.-J. Reinhardt, Н. Han и D. Н. Hào [108] получили оценки погрешности и сходимости решения в дискретной форме.

R. Dautray и J. L. Lions [109] показали, что задача продолжения имеет не более одного решения.

L. E. Payne [110, 111]; L. E Payne и D. Sather [112, 113]; Tautenhahn, 1990 [114]; J.-J. Reinhardt, Н. Han и D. Н. Hào [108]; Alessandrini et al., 2009 [115]— исследовали задачу на условную устойчивость.

R. Lattès и J.-L. Lions [116] в 1967 г. предложили метод квазиобращения для решения некорректных задач. В 1968 г. J.-L. Lions [117] рассмотрел метод граничного управления для решения задач для эллиптического уравнения. Если целевой функционал содержит граничное значение функции, то управлением яв-

ляется нормальная производная и наоборот, если целевой функционал содержит нормальную производную, то управление есть значение функции на границе.

V. Isakov в 1981 году доказал существование решения в случае выполнения условия на недоступной части границы [118]. В 2001 году J. Cheng, Y.C. Hon, T. Wei, M. Yamamoto свели задачу продолжения к проблеме моментов [68]. В 2005 году F. Ben Belgacem, H. El Fekih исследовал некорректность задачи, используя подход Стеклова-Пуанкаре [119]. В 2006 году M. Azaïez, F. Ben Belgacem, H. El Fekih [120] используя результаты работы [119] разработали численный алгоритм решения на основе минимизации функционала А. Н. Тихонова. В 2009 г. G. Alessandrini, L. Rondi, E. Rosset, S. Vessella исследовали задачу продолжения решений эллиптического уравнения для системы Ламэ [115].

В работе 1986 г. [121] А. Б. Бакушинский, А. В. Гончарский и Л. Д. Степанова применили метод итеративной регуляризации для решения обратной задачи гравиметрии. В качестве априорной информации об искомом решении использовалась звездность искомого тела.

В этом же году А.С. Немировский [122] предложил для минимизации целевого функционала использовать метод сопряженных градиентов с правилом остановки, обеспечивающим оптимальный порядок сходимости при условии истокорпредставимости точного решения задачи.

В работе В.А. Козлова, В.Г. Мазьи, А.В. Фомина в 1991 году [53] предложен метод решения задачи Коши для эллиптических уравнений, основанный на альтернирующей итерационной процедуре, которая представляет собой последовательное решение корректных смешанных краевых задач для исходного уравнения. Одним из преимуществ этого метода является сохранение исходного уравнения. Доказана сходимость метода и его регуляризирующие свойства, получаемые выбором соответствующих граничных условий.

В работе С. И. Кабанихина и А. Л. Карчевского [54] в 1995 г. предложено свести некорректную задачу Коши для уравнения Лапласа к обратной задаче: требуется восстановить граничное условие на недоступной части границы. Обратная задача была решена оптимизационным методом.

В работе D.N. Hào, D. Lesnic [55] в 2000 г. предложен другой вариационный метод решения задачи Коши для уравнения Лапласа. Заданные граничные усло-

вия на одной части границы рассматриваются как управление  $q$  в постановке прямой задачи для определения данных Коши на оставшейся части границы.

В 2001 г. G. Bastay, V.A. Kozlov, B.O. Turesson [123] предложили итерационный метод решения задач продолжения для параболических и эллиптических задач, необязательно самосопряженных. В этом методе решаются корректные задачи для операторов  $L$  и  $L^*$ , полученные изменением граничных условий. Доказано, что если данные заданы точно, то метод сходится в  $L_2$  к решению исходной задачи. В случае неточных данных доказано, что алгоритмы регуляризуют рассматриваемую задачу. В 2003 г. T. Johansson рассмотрел задачу с несамосопряженным оператором [124].

В 2006 г. С.И. Кабанихин, М.А. Бектемесов и А.Т. Нурсеитова доказали сильную сходимость в общем виде [125].

В работах 2011 года [126, 127] задача Коши для уравнения Лапласа сведена к проблеме моментов.

А.Л. Карчевский в работе [128] предложил метод сопряженного оператора и рассмотрел его применение на четырех примерах. Показано, что метод сопряженного оператора для задачи Коши для эллиптического уравнения — это то же самое, что и сведение задачи Коши для эллиптического уравнения к проблеме моментов.

Также отметим следующие методы, которые применялись для численного решения задачи Коши для уравнения Лапласа: итерационные (В.А. Козлов, В.Г. Мазья, А.В. Фомин [53], 1991 г.; С.И. Кабанихин, А.Л. Карчевский [54], 1995 г.; D.N. Hào, D. Lesnic [55], 2000 г.; L. Marin, L. Elliott, P.J. Heggs, D.B. Ingham, D. Lesnic, X. Wen [56], 2003 г.); метод квазиобращения (Klibanov, Santosa, [57] 1991 г.; С. Clason, M.V. Klibanov [58], 2007 г.; L. Bourgeois, [59–61], L. Bourgeois, J. Dardé [62]) и регуляризующие методы [10, 56, 63–67]; метод Backus-Gilbert [68, 69]; метод итеративной регуляризации Mann'a [70]; метод регуляризации производной четвертого порядка [71, 72]; метод Фурье [73, 74]; метод вейвлетов [75, 76]; level-set метод [77]; метод расширяющихся компактов [129].

Отметим, что в 2014 году D. Maxwell [130] показал, что итерационный метод, предложенный В. А. Козловым, В. Г. Мазья и А. В. Фоминым [53], совпадает с методом итераций Ландвебера.

В работе М. В. Клибанова [131] в 2015 г. проведен обзор теоретических и численных результатов для некорректных задач Коши для уравнений в частных производных. В работе также предложен общий метод регуляризации этих задач. На основе теории Карлемановских оценок предложен глобально сходящийся метод [132–134].

## 1.2 Задачи продолжения решений с части границы

В данном разделе будут исследованы задачи продолжения волновых полей с части границы, расположенной на поверхности Земли. Задачи продолжения решения с времениподобной поверхности для гиперболических уравнений исследовались Р. Курантом, М. М. Лаврентьевым, В. Г. Романовым, С. П. Шишатским. В дальнейшем В. Г. Романовым была решена известная проблема о построении весовой функции в методе Карлемана, широко используемом в теории дифференциальных уравнений, и, в частности, в теории некорректно поставленных и обратных задач, для получения априорных оценок решения задачи Коши с данными на времениподобной поверхности. Ранее было известно, как построить ее для уравнений с постоянными коэффициентами, либо близкими к постоянным. Романовым В. Г. найден явный вид этой функции для общего гиперболического уравнения второго порядка, коэффициенты главной части которого не зависят от времени [34–45].

Применение задач продолжения полей к решению интерпретационных задач сейсморазведки рассмотрен в таких работах, как [135–140].

### 1.2.1 Задача продолжения решения уравнения акустики

Физическая постановка задачи: предположим, до момента времени  $t = 0$  среда находилась в покое, далее на части границы  $z = 0$  действует источник вида  $u_z|_{z=0} = g(y, t)$  и измеряется дополнительная информация  $u|_{z=0} = f(y, t)$ . Зада-

ча состоит в продолжении функции  $u(z, y, t)$  с части границы  $z = 0$  в область с известными параметрами среды.

Математическая постановка задачи: рассмотрим задачу продолжения в области  $\Omega = \{(z, y, t) : z \in (0, h), y \in (0, L_y), t \in (0, T)\}$ :

$$c^{-2}(z, y)u_{tt} = u_{zz} + u_{yy} - \nabla \ln \rho(z, y) \nabla u, \quad (z, y, t) \in \Omega, \quad (1.1)$$

$$u(z, y, 0) = u_t(z, y, 0) = 0, \quad (1.2)$$

$$u_z(0, y, t) = g(y, t), \quad (1.3)$$

$$u(0, y, t) = f(y, t). \quad (1.4)$$

В случае, если источник акустического сигнала  $g(y, t)$  локализован и  $L_y$  достаточно большое, можно считать, что условия на границе области по переменной  $y$  равны нулю:

$$u(z, 0, t) = u(z, L_y, t) = 0. \quad (1.5)$$

Задача продолжения (1.1)–(1.5) является некорректной [12, 141].

#### Сведение задачи продолжения к обратной задаче

Рассмотрим некорректную задачу (1.1)–(1.5) как обратную к следующей прямой (корректной) задаче. В области  $\Omega$  требуется определить  $u(x, y, t)$  по заданным  $q(x, y)$  и  $g(y, t)$  из соотношений:

$$c^{-2}(z, y)u_{tt} = u_{zz} + u_{yy} - \nabla \ln \rho(z, y) \nabla u, \quad (z, y, t) \in \Omega, \quad (1.6)$$

$$u(z, y, 0) = u_t(z, y, 0) = 0, \quad (1.7)$$

$$u_z(0, y, t) = g(y, t), \quad (1.8)$$

$$u(h, y, t) = q(y, t), \quad (1.9)$$

$$u(z, 0, t) = u(z, L_y, t) = 0. \quad (1.10)$$

В **прямой задаче** (1.6)–(1.10) требуется определить  $u(z, y, t)$  по заданным  $c(z, y)$ ,  $\rho(z, y)$ ,  $q(z, y)$  и  $g(y, t)$ .

**Обратная задача** заключается в определении функции  $q(z, y)$  из соотношений (1.6)–(1.10) по заданным  $c(z, y)$ ,  $\rho(z, y)$ ,  $g(y, t)$  и дополнительной информации

$$u(0, y, t) = f(y, t). \quad (1.11)$$

## Решение задачи продолжения для уравнения акустики методом простой итерации

Запишем обратную задачу (1.6)–(1.11) в операторной форме:

$$Aq = f. \quad (1.12)$$

Здесь оператор  $A$ :

$$\begin{aligned} A: q(z, y) &\rightarrow f(y, t), \\ A: H^1((0, h) \times (0, L_y)) &\rightarrow H^1((0, L_y) \times (0, T)). \end{aligned}$$

Введем целевой функционал

$$J(q) = \|Aq - f\|_{L^2((0, L_y) \times (0, T))}^2 = \int_0^{L_y} \int_0^T [u(0, y, t; q) - f(y, t)]^2 dy dt. \quad (1.13)$$

Целевой функционал (1.13) будем минимизировать методом простой итерации:

$$q_{n+1} = q_n - \alpha J'(q_n),$$

где параметр спуска  $\alpha \in (0, \|A\|^{-2})$ ,  $J'(q)$  – градиент функционала.

По определению

$$J(q + \delta q) - J(q) = \langle J'(q), \delta q \rangle_{L^2((0, L_y) \times (0, T))} + o(\|\delta q\|).$$

Обозначим решение прямой возмущенной задачи через

$$\bar{u}(z, y, t) = u(z, y, t; q + \delta q).$$

Тогда  $\bar{u}(z, y, t)$  является решением следующей задачи:

$$\begin{aligned} c^{-2}(z, y)\bar{u}_{tt} &= \bar{u}_{zz} + \bar{u}_{yy} - \nabla \ln \rho(z, y) \nabla \bar{u}, & (z, y, t) \in \Omega; \\ \bar{u}(z, y, 0) &= \bar{u}_t(z, y, 0) = 0; \\ \bar{u}_z(0, y, t) &= g(y, t); \\ \bar{u}(h, y, t) &= (q + \delta q)(y, t), \\ \bar{u}(z, 0, t) &= \bar{u}(z, L_y, t) = 0. \end{aligned}$$

Найдем соотношения, которым удовлетворяет функция

$$\delta u(z, y, t) = \bar{u}(z, y, t) - u(z, y, t; q)$$

с точностью до  $o(\|\delta q\|)$ :

$$\begin{aligned} c^{-2}(z, y)\delta u_{tt} &= \delta u_{zz} + \delta u_{yy} - \nabla \ln \rho(z, y)\nabla \delta u, & (z, y, t) \in \Omega; \\ \delta u(z, y, 0) &= \delta u_t(z, y, 0) = 0; \\ \delta u_z(0, y, t) &= 0; \\ \delta u(h, y, t) &= \delta q(y, t), \\ \delta u(z, 0, t) &= \delta u(z, L_y, t) = 0. \end{aligned}$$

Можно показать, что

$$\begin{aligned} & J(q + \delta q) - J(q) = \\ &= \int_0^{L_y} \int_0^T \left[ u(0, y, t; q + \delta q) - f(y, t) \right]^2 dt dy - \int_0^{L_y} \int_0^T \left[ u(0, y, t; q) - f(y, t) \right]^2 dt dy = \\ &= \int_0^{L_y} \int_0^T 2\delta u(0, y, t) \left[ u(0, y, t) - f(y, t) \right] dt dy + \int_0^{L_y} \int_0^T \left[ \delta u(0, y, t) \right]^2 dt dy. \quad (1.14) \end{aligned}$$

В силу корректности прямой задачи

$$\int_0^{L_y} \int_0^T \left[ \delta u(0, y, t) \right]^2 dy dt = o(\|\delta q\|).$$

Пусть  $\psi(z, y, t)$  — решение сопряженной задачи, постановку которой получим ниже. Найдем

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^h \int_0^{L_y} \int_0^T \left( c^{-2}(z, y)\delta u_{tt} - \delta u_{zz} - \delta u_{yy} + \nabla \ln \rho(z, y)\nabla \delta u \right) \psi(z, y, t) dt dy dz = \\ &= \int_0^h \int_0^{L_y} \int_0^T \left( c^{-2}(z, y)\psi_{tt} - \psi_{zz} - \psi_{yy} + \nabla \ln \rho(z, y)\nabla \psi \right) \delta u(z, y, t) dt dy dz - \\ &\quad - \int_0^{L_y} \int_0^T \delta q(y, t) \psi_z(h, y, t) dt dy + \int_0^{L_y} \int_0^T \delta u(0, y, t) \psi_z(0, y, t) dt dy. \end{aligned}$$

Последнее равенство выполняется в предположении, что  $\psi(z, y, t)$  удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} \psi(z, y, T) &= \psi_t(z, y, T) = 0; \\ \psi(z, 0, t) &= \psi(z, L_y, t) = 0; \\ \psi(h, y, t) &= 0. \end{aligned}$$



Пусть  $\psi(z, y, t)$  удовлетворяет уравнению

$$c^{-2}(z, y)\psi_{tt} = \psi_{zz} + \psi_{yy} - \nabla \ln \rho(z, y)\nabla\psi,$$

тогда получим

$$- \int_0^{L_y} \int_0^T \delta q(y, t)\psi_z(h, y, t)dt dy + \int_0^{L_y} \int_0^T \delta u(0, y, t)\psi_z(0, y, t)dt dy = 0.$$

Объединяя последнее равенство с соотношением (1.14), получим, что градиент функционала формально вычисляется из следующего соотношения

$$J'(q) = \psi_z(h, y, t). \quad (1.15)$$

Здесь  $\psi(z, y, t)$  — решение сопряженной задачи:

$$c^{-2}(z, y)\psi_{tt} = \psi_{zz} + \psi_{yy} - \nabla \ln \rho(z, y)\nabla\psi, \quad (z, y, t) \in \Omega, \quad (1.16)$$

$$\psi(z, y, T) = \psi_t(z, y, T) = 0, \quad (1.17)$$

$$\psi_z(0, y, t) = 2(u(0, y, t) - f(y, t)), \quad (1.18)$$

$$\psi(h, y, t) = 0, \quad (1.19)$$

$$\psi(z, 0, t) = \psi(z, L_y, t) = 0. \quad (1.20)$$

Заметим, что в случае, если источник не является локальным, можно рассмотреть следующую обратную задачу: определить функции  $q(z, y)$ ,  $q^1(z, t)$  и  $q^2(z, t)$  из соотношений

$$c^{-2}(z, y)u_{tt} = u_{zz} + u_{yy} - \nabla \ln \rho(z, y)\nabla u, \quad (z, y, t) \in \Omega, \quad (1.21)$$

$$u(z, y, 0) = u_t(z, y, 0) = 0, \quad (1.22)$$

$$u_z(0, y, t) = g(y, t), \quad (1.23)$$

$$u(h, y, t) = q(y, t), \quad (1.24)$$

$$u(z, 0, t) = q^1(z, t), \quad (1.25)$$

$$u(z, L_y, t) = q^2(z, t) \quad (1.26)$$

по заданным  $c(z, y)$ ,  $\rho(z, y)$ ,  $g(y, t)$  и дополнительной информации

$$u(0, y, t) = f(y, t). \quad (1.27)$$

Приближенное решение обратной задачи (1.21)–(1.27) ищется минимизацией следующего целевого функционала:

$$J(\vec{q}) = \|A(\vec{q}) - f\|_{L^2((0,L_y) \times (0,T))}^2 = \int_0^{L_y} \int_0^T [u(0, y, t; \vec{q}) - f(y, t)]^2 dy dt. \quad (1.28)$$

Здесь  $\vec{q} = (q(y, t), q^1(z, t), q^2(z, t))$ .

Целевой функционал (1.28) минимизируется методом простой итерации:

$$\vec{q}_{n+1} = \vec{q}_n - \alpha J'(\vec{q}_n).$$

Градиент функционала определяется по формуле

$$J'(\vec{q}) = (\psi_z(h, y, t), -\psi_y(z, 0, t), -\psi_y(z, L_y, t)). \quad (1.29)$$

Здесь  $\psi(z, y, t)$  – решение сопряженной задачи (1.16)–(1.20).

**Алгоритм решения обратной задачи (1.21)–(1.27) методом простой итерации**

1. Выбираем начальное приближение  $\vec{q}_0 = (q_0(y, t), q_0^1(z, t), q_0^2(z, t))$ .
2. Пусть приближенное решение  $\vec{q}_n$  на  $n$  шаге уже найдено.
3. Решаем прямую задачу (1.22)–(1.26) в области  $(z, y, t) \in \Omega$  с заданным  $\vec{q}_n$ :

$$c^{-2}(z, y)u_{tt}^n = u_{zz}^n + u_{yy}^n - \nabla \ln \rho(z, y) \nabla u^n,$$

$$u^n(z, y, 0) = u_t^n(z, y, 0) = 0,$$

$$u_z^n(0, y, t) = g(y, t),$$

$$u^n(h, y, t) = q_n(y, t),$$

$$u^n(z, 0, t) = q_n^1(z, t),$$

$$u^n(z, L_y, t) = q_n^2(z, t).$$

4. Вычисляем значение функционала  $J(\vec{q}_n)$ .

5. Если значение целевого функционала не достаточно мало, тогда решаем сопряженную задачу (1.16)–(1.20) в области  $(z, y, t) \in \Omega$ :

$$\begin{aligned} c^{-2}(z, y)\psi_{tt}^n &= \psi_{zz}^n + \psi_{yy}^n - \nabla \ln \rho(z, y) \nabla \psi^n, \\ \psi^n(z, y, T) &= \psi_t^n(z, y, T) = 0, \\ \psi_z^n(0, y, t) &= 2(u^n(0, y, t) - f(y, t)), \\ \psi^n(h, y, t) &= 0, \\ \psi^n(z, 0, t) &= \psi^n(z, L_y, t) = 0. \end{aligned}$$

6. Вычисляем градиент функционала  $J'(\vec{q}_n)$  по формуле (1.29):

$$J'(\vec{q}_n) = (\psi_z^n(h, y, t), -\psi_y^n(z, 0, t), -\psi_y^n(z, L_y, t)).$$

7. Вычисляем следующее приближение

$$\vec{q}_{n+1} = \vec{q}_n - \alpha J'(\vec{q}_n)$$

и переходим пункту 3.

### 1.2.2 Задача продолжения решения уравнения электродинамики

Рассмотрим задачу продолжения с части границы  $z = 0$  горизонтальной компоненты вектора электрической напряженности электромагнитного поля в область  $\Omega$ :

$$\mu\varepsilon(z, y)u_{tt} + \mu\sigma(z, y)u_t = \Delta u; \quad (1.30)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0; \quad (1.31)$$

$$u_z|_{z=0} = g(y, t); \quad (1.32)$$

$$u|_{y=0} = u|_{y=L_y} = 0; \quad (1.33)$$

$$u|_{z=0} = f(y, t). \quad (1.34)$$

Здесь:  $\varepsilon = \varepsilon_a \varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_a = 8.854187 \cdot 10^{-12}$  Ф/м,  $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Н · А<sup>-2</sup>,  $\sigma$  См м.

Задача заключается в продолжении решения  $u(z, y, t)$  уравнения (1.30) с части границы  $z = 0$  в области  $\Omega$ .

Физическая постановка задачи: на границе среды  $z = 0$  исследуемой области  $\Omega$  включается источник электромагнитных волн (1.32). Отклик среды (1.34) измеряется на поверхности  $z = 0$  в течении времени  $t \in (0, T)$ .

Предполагаем, что до момента времени  $t = 0$  среда находилась в покое (1.31) и что функция источника  $g(y, t)$  финитна и ее носитель лежит внутри  $(0, L_y)$  и  $L_y$  достаточно большое, чтобы рассмотреть однородные граничные условия (1.33).

### Сведение задачи продолжения к обратной задаче

Рассмотрим некорректную задачу (1.30)—(1.34) как обратную к следующей прямой (корректной) задаче: в области  $\Omega$  требуется определить  $u(z, y, t)$  по заданным  $\varepsilon(z, y)$ ,  $\sigma(z, y)$ ,  $q(y, t)$  и  $g(y, t)$  из соотношений:

$$\mu\varepsilon(z, y)u_{tt} + \mu\sigma(z, y)u_t = \Delta u; \quad (1.35)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0; \quad (1.36)$$

$$u_z|_{z=0} = g(y, t); \quad (1.37)$$

$$u|_{y=0} = u|_{y=L_y} = 0; \quad (1.38)$$

$$u|_{z=h} = q(y, t). \quad (1.39)$$

Обратная задача заключается в определении функции  $q(z, y)$  из соотношении (1.35)—(1.39) по дополнительной информации:

$$u(0, y, t) = f(y, t). \quad (1.40)$$

### Метод простой итерации

Запишем обратную задачу (1.35)—(1.40) в операторной форме

$$Aq = f. \quad (1.41)$$

Здесь оператор  $A$

$$A: q(z, y) \rightarrow f(y, t),$$

$$A: H^1((0, h) \times (0, L_y)) \rightarrow H^1((0, L_y) \times (0, T)).$$

Введем целевой функционал

$$J(q) = \|A(q) - f\|^2 = \int_0^T \int_0^{L_y} [u(0, y, t; q) - f(y, t)]^2 dy dt.$$

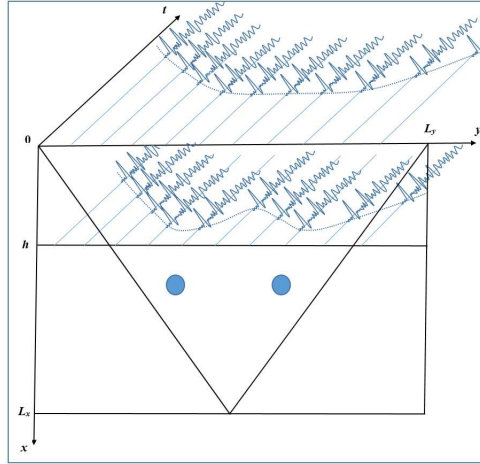


Рисунок 1.1: Модель среды с двумя включениями и принцип продолжения поля на глубину  $h$  в сторону залегания неоднородностей

Целевой функционал минимизируем методом простой итерации:

$$q_{n+1} = q_n - \alpha J' q_n.$$

Здесь параметр спуска  $\alpha \in \left(0, \frac{1}{\|A\|^2}\right)$ ,  $J'(q)$  — градиент функционала  $J(q)$ .

Градиент функционала:

$$J'(q) = \psi_z(h, y, t).$$

Здесь  $\psi(z, y, t)$  — решение следующей сопряженной задачи

$$\mu\varepsilon(z, y)\psi_{tt} + \mu\sigma(z, y)\psi_t = \Delta\psi; \quad (z, y, t) \in \Omega,$$

$$\psi(z, y, T) = \psi_t(z, y, T) = 0,$$

$$\psi_z(0, y, t) = 2(u(0, y, t) - f(y, t)),$$

$$\psi(h, y, t) = 0,$$

$$\psi(z, 0, t) = \psi(z, L_y, t) = 0.$$

### Численные расчеты

На рисунках 1.2—1.7 расчеты проводились в области  $(z, y) = (0, 10) \times (0, 12)$  м. Шаг по пространственным переменным  $h_x = h_y = 0.01$  м. Шаг по времени равен  $h_t = 0.0047$  нс. Источник расположен на плоскости  $z = 0$ , ширина источника (антенны) равна 20 см., в качестве импульса по времени брался импульс Пузырева со следующими параметрами

$$V(t) = \sin(3t)e^{-0.49t^2}.$$

Расчеты проведены для трех различных сред: с одной неоднородностью, с двумя неоднородностями и тремя неоднородностями, расположенными на глубине 6 м. Параметры среды  $\varepsilon = 1$ ,  $\sigma = 0.01$ , значения параметров внутри неоднородностей  $\varepsilon = 20$ ,  $\sigma = 0.001$ . В случае кусочно-постоянных сред на границах раздела сред использовались условия склейки.

На рисунках 1.2–1.4 время наблюдения 50 нс. Задача продолжения решалась до глубины  $z = 3$  м. Расчеты показывают, что решение задачи продолжения электромагнитного поля на глубину  $z = 3$  м. в сторону залегания неоднородностей, позволяет различать неоднородности расположенные на глубине 6 м.

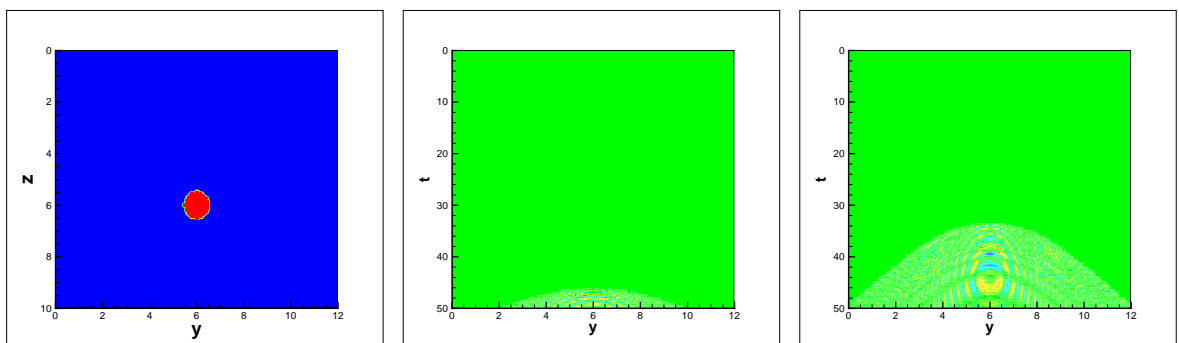


Рисунок 1.2: Слева — модель среды с одной неоднородностью. В центре — наблюдаемое аномальное поле на границе  $z = 0$ . Справа — наблюдаемое аномальное поле на глубине  $z = 3$  м.

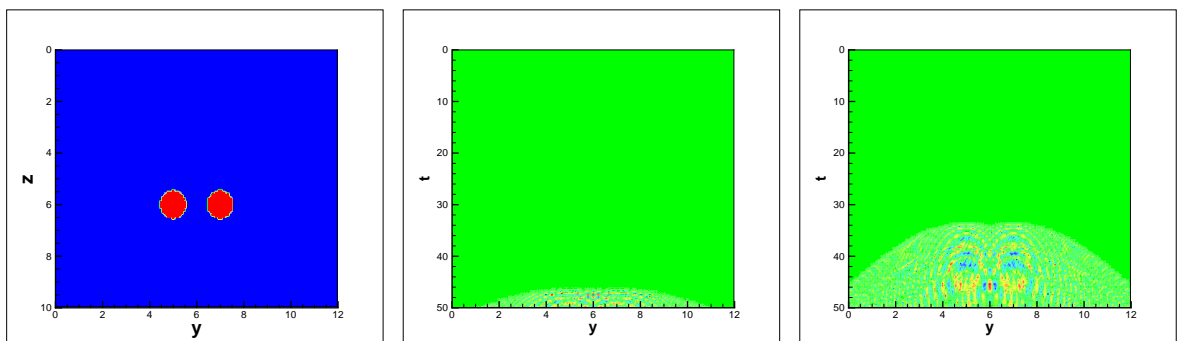


Рисунок 1.3: Слева — модель среды с двумя неоднородностями. В центре — наблюдаемое аномальное поле на границе  $z = 0$ . Справа — наблюдаемое аномальное поле на глубине  $z = 3$  м.

На рисунках 1.5–1.7 время наблюдения 60 нс. Задача продолжения решалась до глубины  $z = 5.5$  м. Расчеты показывают, что решение задачи продолжения электромагнитного поля на глубину  $z = 5.5$  м. в сторону залегания неоднородностей, позволяет различать неоднородности расположенные на глубине 6 м.

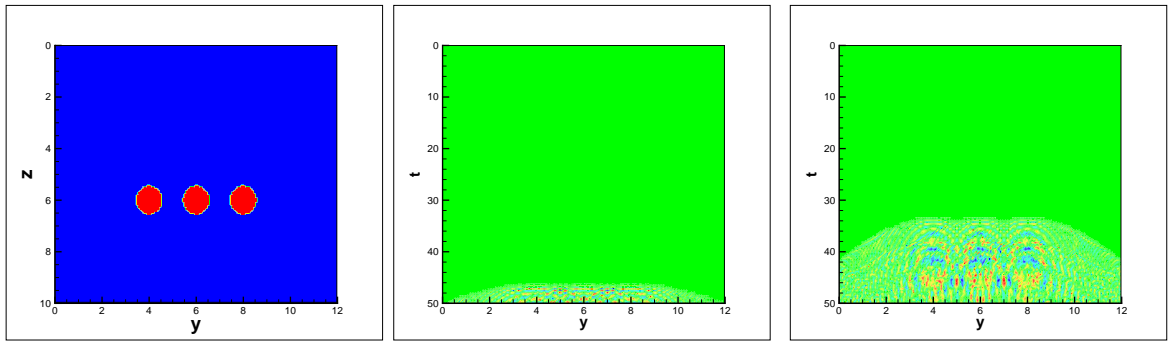


Рисунок 1.4: Слева — модель среды с тремя неоднородностями. В центре — наблюдаемое аномальное поле на границе  $z = 0$ . Справа — наблюдаемое аномальное поле на глубине  $z = 3$  м.

родностей, позволяет различать количество неоднородностей расположенных на глубине 6 м.

На рисунках 1.2—1.4 (в центре и справа) приведено аномальное поле — поле, полученное путем вычитания из наблюдаемого поля от неоднородной среды поля от источника при  $z = 0$  в центре и при  $z = 3$  м. справа.

На рисунках 1.5—1.7 (в центре и справа) приведено аномальное поле — поле, полученное путем вычитания из наблюдаемого поля от неоднородной среды поля от источника при  $z = 0$  в центре и при  $z = 5.5$  м. справа.

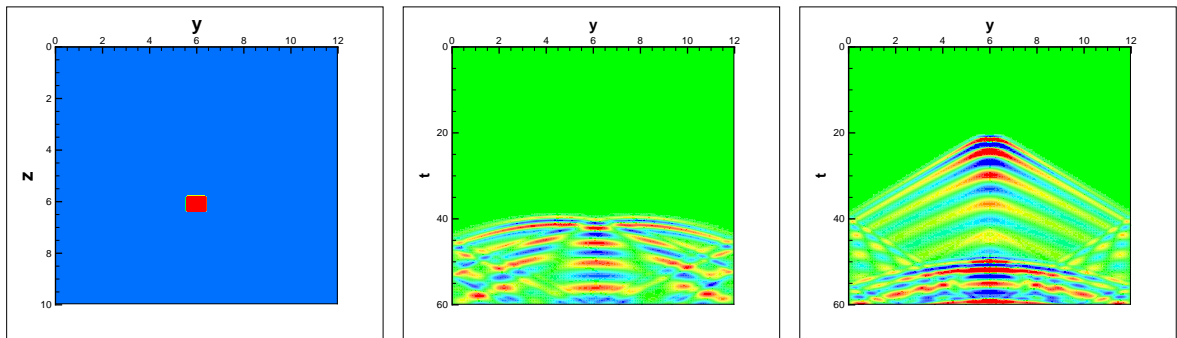


Рисунок 1.5: Слева — модель среды с одной неоднородностью. В центре — наблюдаемое аномальное поле на границе  $z = 0$ . Справа — наблюдаемое аномальное поле на глубине  $z = 5.5$  м.

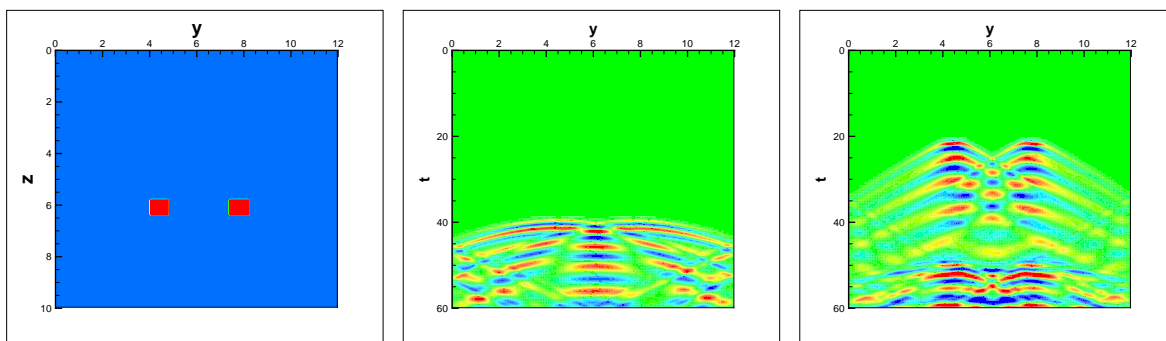


Рисунок 1.6: Слева — модель среды с двумя неоднородностями. В центре — наблюдаемое аномальное поле на границе  $z = 0$ . Справа — наблюдаемое аномальное поле на глубине  $z = 5.5$  м.

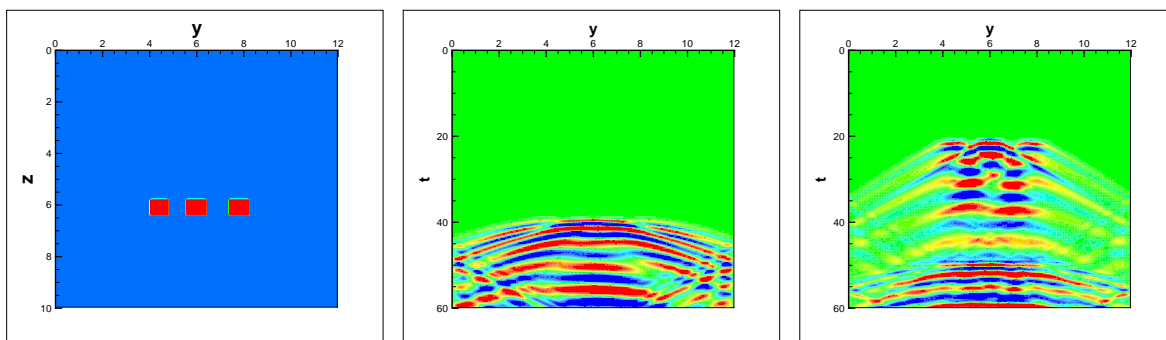


Рисунок 1.7: Слева — модель среды с тремя неоднородностями. В центре — наблюдаемое аномальное поле на границе  $z = 0$ . Справа — наблюдаемое аномальное поле на глубине  $z = 5.5$  м.



### 1.2.3 Оценка сильной сходимости.

Рассмотрим задачу продолжения с части границы решения для эллиптического уравнения:

$$u_{zz} + L(y)u = 0, \quad (z, y) \in \Omega, \quad (1.42)$$

$$u(0, y) = f(y), \quad y \in \mathcal{D}, \quad (1.43)$$

$$u_z(0, y) = 0, \quad y \in \mathcal{D}, \quad (1.44)$$

$$u(z, y) = 0, \quad z \in (0, h), \quad y \in \partial\mathcal{D} \quad (1.45)$$

с условиями согласования

$$f(y) = 0, \quad y \in \partial\mathcal{D}. \quad (1.46)$$

Здесь  $\Omega = (0, h) \times \mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^n$  связная ограниченная область с липшецевой границей  $\partial\mathcal{D}$ ,

$$L(y)u = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \left( a_{ij}(y) \frac{\partial u}{\partial y_j} \right) - c(y)u,$$

$$C_1 \sum_{j=1}^n \nu_j^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(y) \nu_i \nu_j,$$

$$\forall \nu_i \in \mathbb{R}, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

$$0 \leq c(y) \leq C_2,$$

$$a_{ij} \in C^1(\overline{\mathcal{D}}), \quad c \in C(\overline{\mathcal{D}}).$$

Рассмотрим некорректную задачу продолжения (1.42)–(1.46) как обратную задачу к следующей прямой задаче

$$u_{zz} + L(y)u = 0, \quad (z, y) \in \Omega, \quad (1.47)$$

$$u_z(0, y) = 0, \quad y \in \mathcal{D}, \quad (1.48)$$

$$u(h, y) = q(y), \quad y \in \mathcal{D}, \quad (1.49)$$

$$u(z, y) = 0, \quad z \in (0, h), \quad y \in \partial\mathcal{D} \quad (1.50)$$

с условиями согласования

$$q(y) = 0, \quad y \in \partial\mathcal{D}. \quad (1.51)$$

В прямой задаче (1.47)–(1.51) требуется найти  $u(z, y)$  в области  $\Omega$  по функции  $q(y)$  заданной на части границы  $z = h$  области  $\Omega$ .

Обратная задача заключается в определении  $q(y)$  из условий (1.47)–(1.51) и заданной дополнительной информации

$$u(0, y) = f(y), \quad y \in \partial\mathcal{D}. \quad (1.52)$$

Напомним несколько результатов из теории прямых и обратных задач [141, 142].

**Теорема 1.1.** (оценка условной устойчивости, [46, 141]). Пусть  $q(y), f \in L_2(\mathcal{D})$ . Если задача продолжения (1.42)–(1.46) имеет решение  $u \in C^2(\overline{\Omega})$ , тогда выполняется следующая оценка

$$\int_{\mathcal{D}} u^2(z, y) dy \leq \|q\|_{L_2(\mathcal{D})}^{2z/h} \|f\|_{L_2(\mathcal{D})}^{2(h-z)/h}, \quad z \in (0, h).$$

Рассмотрим сопряженную задачу

$$\psi_{zz} + L(y)\psi = 0, \quad (z, y) \in \Omega, \quad (1.53)$$

$$\psi_z(0, y) = \mu(y), \quad y \in \mathcal{D}, \quad (1.54)$$

$$\psi(h, y) = 0, \quad y \in \mathcal{D}, \quad (1.55)$$

$$\psi|_{\partial\mathcal{D}} = 0, \quad z \in (0, h). \quad (1.56)$$

Задача состоит в определении функции  $\psi(z, y)$  по заданной  $\mu(y)$ .

Введем оператор

$$A : q(y) \rightarrow u(0, y),$$

где  $u(z, y)$  есть решение прямой задачи (1.47)–(1.51).

Тогда сопряженный оператор  $A^*$  имеет вид

$$A^* : \mu(y) \rightarrow \psi_z(h, y),$$

где  $\psi(z, y)$  является решение сопряженной задачи (1.53)–(2.36).

Доказано [78, 125, 141], что операторы  $A$  и  $A^*$  отображают  $L_2(\mathcal{D})$  в  $L_2(\mathcal{D})$ . Таким образом, обратная задача (1.47)–(1.52) может быть записана в операторной форме

$$Aq = f. \quad (1.57)$$

Будем решать задачу (1.57) минимизируя функционал

$$J(q) = \|Aq - f\|_{L_2(\mathcal{D})}^2.$$

Для этого используем метод простой итерации:

$$q_{n+1} = q_n - \alpha J'(q_n).$$

Заметим, что градиент функционала  $J'(q)$  вычисляется по формуле

$$J'(q)(y) = \psi_z(h, y),$$

где  $\psi(z, y)$  является решением сопряженной задачи (1.53)–(2.36), в которой

$$\mu(y) = 2[u(0, y) - f(y)].$$

**Теорема 1.2.** (оценка скорости сходимости по функционалу [141]). Пусть для  $f \in L_2(\mathcal{D})$  существует решение  $q_T \in L_2(\mathcal{D})$  задачи  $Aq = f$ . Тогда если начальное приближение удовлетворяет условию

$$\|q_0 - q_T\|_{L_2(\mathcal{D})} \leq C,$$

$\alpha \in (0, \|A\|^{-2})$ , то метод простой итерации сходится по функционалу и верна оценка

$$J(q_n) \leq \frac{C^2}{n\gamma}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Здесь  $\gamma = 4\alpha(1 - \alpha \|A\|^2)$ .

**Теорема 1.3.** Пусть для  $f \in L_2(\mathcal{D})$  существует решение  $q_T \in L_2(\mathcal{D})$  задачи  $Aq = f$  и начальное приближение удовлетворяет условию

$$\|q_0 - q_T\|_{L_2(\mathcal{D})} \leq C,$$

$\alpha \in (0, \|A\|^{-2})$ . Тогда последовательность решений  $\{u_n\}$  прямых задач (1.47)–(1.51) для соответствующей итерации  $q_n$  сходится к точному решению  $u_T \in L_2(\Omega)$  задачи (1.42)–(1.46) и выполняется оценка [125, 141]:

$$\int_{\mathcal{D}} (u_n(z, y) - u_T(z, y))^2 dy \leq C^2 (\gamma n)^{\frac{z-h}{h}}, \quad z \in (0, h). \quad (1.58)$$

Предположим теперь, что все условия теоремы 1.3 выполнены, но функция  $f$  задана приближенно, причем приближение  $f_\delta$  не обязательно находится в  $A(M)$ , где  $M$  — множество условной корректности задачи. Покажем, что при согласованном стремлении  $\delta \rightarrow 0$  и  $n \rightarrow \infty$ , можно получить приближение точного решения  $q_T$  с заданной точностью. Задачу минимизации функционала

$$J_\delta(q) = \|Aq - f_\delta\|_{L_2(\mathcal{D})}^2$$

будем решать методом простой итерации

$$q_{\delta,n+1} = q_{\delta,n} - \alpha J'_\delta(q_{\delta,n}), \quad q_{\delta,0} = q_0, \quad \alpha \in (0, \|A\|^{-2}).$$

Исследуем, насколько может возрасти с ростом числа итераций  $n$  разность между  $q_{\delta,n+1}$  и  $q_{n+1}$ , где  $q_{n+1}$  вычислено по алгоритму с точными данными  $f$  с тем же начальным приближением  $q_0$ . Рассмотрим разность

$$q_{n+1} - q_{\delta,n+1} = q_n - \alpha J'(q_n) - q_{\delta,n} + \alpha J'_\delta(q_{\delta,n}) = q_n - q_{\delta,n} - \alpha(J'(q_n) - J'_\delta(q_{\delta,n})).$$

Оценим второе слагаемое в правой части

$$\alpha(J'(q_n) - J'_\delta(q_{\delta,n})) = 2\alpha A^* \left( A(q_n - q_{\delta,n}) - (f - f_\delta) \right).$$

Очевидно, что

$$\|J'(q_n) - J'_\delta(q_{\delta,n})\| \leq 2\|A\| \left( \|A\| \|q_n - q_{\delta,n}\| + \|f - f_\delta\| \right),$$

откуда получаем

$$\|q_{n+1} - q_{\delta,n+1}\| \leq (1 + 2\alpha \|A\|^2) \|q_n - q_{\delta,n}\| + 2\alpha \|A\| \delta.$$

При  $n = 0$  имеем

$$\|q_1 - q_{\delta,1}\| \leq 2\alpha \|A\| \delta,$$

поскольку два итерационных процесса начинаются с одного начального приближения.

Следовательно, получим, что

$$\|q_n - q_{\delta,n}\| \leq \beta(n)\delta, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Здесь

$$\beta(n) = \frac{(1 + 2\alpha \|A\|^2)^n - 1}{\|A\|}.$$

**Теорема 1.4.** (регуляризирующее свойство метода простой итерации) Пусть для  $f \in L_2(\mathcal{D})$  существует решение  $q_T \in L_2(\mathcal{D})$  задачи  $Aq = f$  и найдена оценка условной устойчивости  $\beta(n)$  на некотором множестве  $M$ . Тогда при выполнении условий

$$\begin{aligned}\|q_0 - q_T\|_{L_2(\mathcal{D})} &\leq C, \\ \|f - f_\delta\|_{L_2(\mathcal{D})} &\leq \delta,\end{aligned}$$

последовательность  $\{u_{\delta,n}\}$  решений прямых задач для соответствующей итерации  $\{q_{\delta,n}\}$  сходится к точному решению  $u_T \in L_2(\Omega)$  задачи (1.47)–(1.51) и имеет место оценка:

$$\|u_T - u_{\delta,n}\|_{L_2(\Omega)} \leq C \sqrt{\frac{n\gamma - 1}{n\gamma \ln(n\gamma)}} + \delta\beta(n) \sqrt{\frac{h(\|A\|^2 - 1)}{2 \ln \|A\|}}. \quad (1.59)$$

Доказательство.

Оценим интеграл

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{D}} (u_n^\delta(z, y) - u_T(z, y))^2 dy &\leq \\ &\leq \int_{\mathcal{D}} (u_n(z, y) - u_T(z, y))^2 dy + \int_{\mathcal{D}} (u_n^\delta(z, y) - u_n(z, y))^2 dy.\end{aligned}$$

Используя теорему 1.1, для первого слагаемого получим оценку:

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{D}} (u_n(z, y) - u_T(z, y))^2 dy \leq \\ &\leq \|u_n(h, y) - u_T(h, y)\|_{L_2(\mathcal{D})} \|u_n(0, y) - u_T(0, y)\|_{L_2(\mathcal{D})} = \\ &= \|q_n - q_T\|_{L_2(\mathcal{D})} \|Aq_n - f_T\|_{L_2(\mathcal{D})} \leq \\ &\leq C^{\frac{2z}{h}} \left( \frac{C^2}{4n\alpha(1 - \alpha \|A\|^2)} \right)^{\frac{h-z}{h}} = C^2(n\gamma)^{\frac{z-h}{h}}.\end{aligned}$$

Проинтегрируем правую и левую части последнего неравенства по  $z$  от 0 до  $h$  и получим

$$\|u_n - u_T\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \frac{C^2(n\gamma - 1)}{n\gamma \ln(n\gamma)}.$$

Теперь оценим

$$\int_{\mathcal{D}} (u_n^\delta(z, y) - u_n(z, y))^2 dy \leq \|q_n - q_{\delta,n}\|_{L_2(\mathcal{D})}^{\frac{2z}{h}} \|Aq_n - Aq_{\delta,n}\|_{L_2(\mathcal{D})}^{\frac{2(h-z)}{h}} \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \|q_n - q_{\delta,n}\|_{\frac{2z}{h}} \|A\|^{\frac{2(h-z)}{h}} \|q_n - q_{\delta,n}\|_{\frac{2(h-z)}{h}} = \\ &= \|q_n - q_{\delta,n}\|^2 \|A\|^{\frac{2(h-z)}{h}} \leq \delta^2 \beta^2(n) \|A\|^{\frac{2(h-z)}{h}}. \end{aligned}$$

Получим, что

$$\begin{aligned} \|u_T - u_{\delta,n}\|_{L_2(\Omega)} &\leq \|u_T - u_n\|_{L_2(\Omega)} + \|u_n - u_{\delta,n}\|_{L_2(\Omega)} \leq \\ &\leq C \sqrt{\frac{n\gamma - 1}{n\gamma \ln(n\gamma)}} + \delta\beta(n) \sqrt{\frac{h(\|A\|^2 - 1)}{2 \ln \|A\|}}. \end{aligned}$$

Аналогичные результаты были получены для метода наискорейшего спуска и метода сопряженных градиентов [125, 141].

Оценка (1.59) показывает, что последовательность  $\{u_n^\delta\}$  является регуляризующей последовательностью и  $n$  является параметром регуляризации.

**Замечание 1.1.** На основе правой части оценки (1.59) можно выбрать номер итерации, например, исходя из следующих рассуждений. В силу того, что первое слагаемое монотонно стремится к бесконечности, а второе слагаемое — монотонно стремится к нулю, при  $n \rightarrow \infty$ , критерий останковки для соответствующего номера итераций  $n_*$  можно выбрать по следующему правилу. Дифференцируя правую часть (1.59) по переменной  $n$ , найдем корень  $n_r$  полученного уравнения и выберем номер останковки  $n_s = [n_r] + 1$ .

Второй способ выбора номера итерации заключается в решении уравнения [79]:

$$C \sqrt{\frac{n\gamma - 1}{n\gamma \ln(n\gamma)}} = \delta\beta(n) \sqrt{\frac{h(\|A\|^2 - 1)}{2 \ln \|A\|}}$$

#### 1.2.4 Анализ сингулярных чисел оператора задачи продолжения для уравнения Гельмгольца с комплексным волновым числом

При исследовании задач акустики и электродинамики во многих случаях переходят к гармоническим колебаниям и переходят к уравнению Гельмгольца.

В этом параграфе проведем анализ сингулярных чисел оператора задачи продолжения для комплекснозначного уравнения Гельмгольца в случае простой геометрии.

Задача Коши для уравнения Гельмгольца является хорошо известным примером некорректной задачи. Решение задачи не является устойчивым по отношению к малым вариациям данных Коши [115, 141, 143].

В работе [143] показано, что оценка условной устойчивости по  $k$  является наилучшей логарифмической оценкой. В [81, 144] было показано, что некорректность задачи Коши для уравнения Гельмгольца зависит от волнового числа  $k$  и возрастает с его ростом.

Численные расчеты, проведенные различными методами, представлены, например, в следующих работах: метод квазиобращения [57], срезка пространственных частот [145], итерационные и регуляризирующие методы [53, 54, 56, 63, 66, 67].

Рассмотрим задачу продолжения для уравнения Гельмгольца для простой геометрии в однородной среде:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad x \in (0, h), \quad y \in (0, \pi), \quad (1.60)$$

$$u(0, y) = f(y), \quad y \in (0, \pi), \quad (1.61)$$

$$u_x(0, y) = 0, \quad y \in (0, \pi), \quad (1.62)$$

$$u(x, 0) = u(x, \pi) = 0, \quad x \in (0, h). \quad (1.63)$$

Здесь

$$k^2 = \varepsilon \omega^2 - i \sigma \omega,$$

$\omega$  является частотой,  $\varepsilon$  и  $\sigma$  положительные постоянные,  $i = \sqrt{-1}$ .

Задача продолжения (1.60)–(1.63) состоит в определении функции  $u(x, y)$  в области  $x \in (0, h)$ ,  $y \in (0, \pi)$  по заданным граничным условиям (1.61)–(1.63).

Сформулируем задачу продолжения в виде обратной задачи по отношению к прямой задаче:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad x \in (0, h), \quad y \in (0, \pi), \quad (1.64)$$

$$u_x(0, y) = 0, \quad u(h, y) = q(y), \quad y \in (0, \pi), \quad (1.65)$$

$$u(x, 0) = u(x, \pi) = 0, \quad x \in (0, h). \quad (1.66)$$

Обратная задача: найти функцию  $q(y)$  по дополнительной информации

$$u(0, y) = f(y), \quad y \in (0, \pi). \quad (1.67)$$

Обратная задача (1.64)–(1.67) исследована в операторной форме [53, 81]:

$$A_k q = f, \quad A_k : L_2(0, \pi) \rightarrow L_2(0, \pi).$$

Найдем сингулярные числа оператора  $A_k$ .

Прежде найдем решение прямой задачи (1.64)–(1.66). Предположим, что  $q(y)$  разлагается в ряд Фурье

$$q(y) = \sum_{m=1}^{\infty} q^{(m)} \sin(my).$$

Решение прямой задачи будем искать в виде ряда

$$u(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} u^{(m)}(x) \sin(my),$$

решая последовательность соответствующих прямых задач:

$$u_{xx}^{(m)} + k_m^2 u^{(m)} = 0, \quad x \in (0, h), \quad (1.68)$$

$$u_x^{(m)}(0) = 0, \quad u^{(m)}(h) = q^{(m)}. \quad (1.69)$$

Здесь

$$k_m^2 = \varepsilon\omega^2 - m^2 - i\sigma\omega.$$

Общее решение уравнения (1.68) имеет вид

$$u^{(m)}(x) = C_1 e^{\lambda_m x} + C_2 e^{-\lambda_m x}.$$

Здесь  $\sqrt{-k_m^2} = \pm\lambda_m$ ,  $\lambda_m = \alpha_m + i\beta_m$  и

$$\alpha_m = \sqrt{\frac{\sqrt{(m^2 - \varepsilon\omega^2)^2 + \sigma^2\omega^2} + m^2 - \varepsilon\omega^2}{2}},$$

$$\beta_m = \sqrt{\frac{\sqrt{(m^2 - \varepsilon\omega^2)^2 + \sigma^2\omega^2} - m^2 + \varepsilon\omega^2}{2}}.$$

Таким образом, решение задачи (1.68), (1.69) дается формулой

$$u^{(m)}(x) = \frac{\cosh(\lambda_m x)}{\cosh(\lambda_m h)} q^{(m)}.$$

Тогда решение прямой задачи (1.64)–(1.66) дается в виде ряда Фурье

$$u(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cosh(\lambda_m x)}{\cosh(\lambda_m h)} q^{(m)} \sin(my).$$



Пусть данные обратной задачи (1.67) представимы в виде ряда Фурье

$$f(y) = \sum_{m=1}^{\infty} f^{(m)} \sin(my).$$

Найдем решение обратной задачи (1.64)–(1.67).

$$u(0, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\cosh(\lambda_m h)} q^{(m)} \sin(my) = f(y) = \sum_{m=1}^{\infty} f^{(m)} \sin(my).$$

Таким образом, решение обратной задачи (1.64)–(1.67) задается рядом Фурье

$$q(y) = \sum_{m=1}^{\infty} f^{(m)} \cosh(\lambda_m h) \sin(my).$$

В силу диагональности оператора  $A$  [81], сингулярные числа имеют вид

$$\sigma_m(A_k) = \frac{1}{|\cosh(\lambda_m h)|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cosh(2\alpha_m h) + \cos(2\beta_m h)}}.$$

В самом деле

$$\begin{aligned} |\cosh(\lambda_m h)| &= \frac{1}{2} \left| e^{(\alpha_m + i\beta_m)h} + e^{-(\alpha_m + i\beta_m)h} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \left| e^{\alpha_m h} \cos(\beta_m h) + e^{-\alpha_m h} \cos(\beta_m h) + i \left( e^{\alpha_m h} \sin(\beta_m h) - e^{-\alpha_m h} \sin(\beta_m h) \right) \right| = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\cos^2(\beta_m h) \left( e^{\alpha_m h} + e^{-\alpha_m h} \right)^2 + \sin^2(\beta_m h) \left( e^{\alpha_m h} - e^{-\alpha_m h} \right)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{e^{2\alpha_m h} + e^{-2\alpha_m h} + 2(\cos^2(\beta_m h) - \sin^2(\beta_m h))} = \\ &= \frac{\sqrt{\cosh(2\alpha_m h) + \cos(2\beta_m h)}}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Рассмотрим несколько частных случаев сингулярных чисел оператора  $A_k$ .

Сингулярные числа оператора задачи продолжения электромагнитного поля ( $\varepsilon \neq 0$ ,  $\sigma \neq 0$ ) имеют вид:

$$\sigma_m(A_k) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cosh(2\alpha_m h) + \cos(2\beta_m h)}}.$$

В случае уравнения акустики ( $\varepsilon \neq 0$  и  $\sigma = 0$ ) получим следующую формулу для сингулярных чисел [81]:

$$\sigma_m(A_k) = \begin{cases} \frac{1}{|\cos(\sqrt{k_m} h)|}, & m^2 \leq \varepsilon \omega^2, \\ \frac{1}{\cosh(\sqrt{k_m} h)}, & \varepsilon \omega^2 < m^2. \end{cases}$$

Выражение (1.2.4) позволяет заключить, что сингулярные числа зависят от волнового числа  $k_m^2 = \varepsilon\omega^2 - m^2$ . Если  $m^2 \leq \varepsilon\omega^2$ , то сингулярные числа оператора  $A_k$  ограничены снизу единицей и, таким образом, можно найти обратный оператор для  $A_{k_m}$ , в то время как  $m^2 > \varepsilon\omega^2$  сингулярные числа убывают экспоненциально.

Рассмотрим параболическое уравнение ( $\varepsilon = 0$  и  $\sigma \neq 0$ ), тогда

$$\sigma_m(A_k) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cosh(2\alpha_m h) + \cos(2\beta_m h)}},$$

$$\alpha_m = \sqrt{\frac{\sqrt{m^4 + \sigma^2\omega^2} + m^2}{2}}, \quad \beta_m = \sqrt{\frac{\sqrt{m^4 + \sigma^2\omega^2} - m^2}{2}}.$$

В случае уравнения Лапласа ( $\varepsilon = 0$  и  $\sigma = 0$ ) сингулярные числа экспоненциально убывают

$$\sigma_m(A_k) = \frac{1}{\cosh(mh)}.$$

### 1.2.5 Размер области наблюдения как параметр регуляризации

Количественные закономерности строения геофизических и геохимических полей на математическом уровне описываются уравнениями в частных производных второго порядка. Так, гравитационное и магнитное поле описываются уравнением Пуассона-Лапласа, электромагнитное — уравнениями Максвелла, сейсмические поля — уравнениями теории упругости, концентрационные поля — уравнением диффузии. К некорректным задачам, эквивалентным задаче Коши для уравнения Лапласа, приводят некоторые задачи интерпретации гравитационных и магнитных полей, связанные с поиском полезных ископаемых.

Неоднородность распределения плотности вещества под поверхностью Земли вызывает гравитационную напряженность гравитационного поля на поверхности Земли, которая отклоняется от своего среднего значения. Отклонения невелики в процентном отношении, но они фиксируются физическими приборами (гравиметрами).

Гравиразведка — метод разведочной геофизики, основанный на изучении строения Земли при помощи измерения ускорения свободного падения и его первых и вторых производных. Ускорение свободного падения определяется параметрами как Земли в целом, так и скоплениями горных пород аномальной

плотности. Цель гравиметрической разведки — определить место и форму подповерхностных неоднородностей на основе гравиметрических данных измерений.

Согласно результатам [146–151] функции  $f(y)$  и  $g(y)$  не могут быть заданы произвольно. Они должны удовлетворять нелокальному краевому условию. Это условие существенно помогает регуляризовать численные алгоритмы решения задачи продолжения.

Основные стадии разведки состоят в бурении разведочных скважин и анализе данных бурения. Если форма аномалии приводит нас к выводу, что она представляет собой единое тело, то естественным выбором будет пробурить скважину в центре аномалии.

Однако, если вывод неправильный, решение бурить в центре приведет к бурению скважины между двумя неоднородностями (см. рис. 1.8 и 1.9).

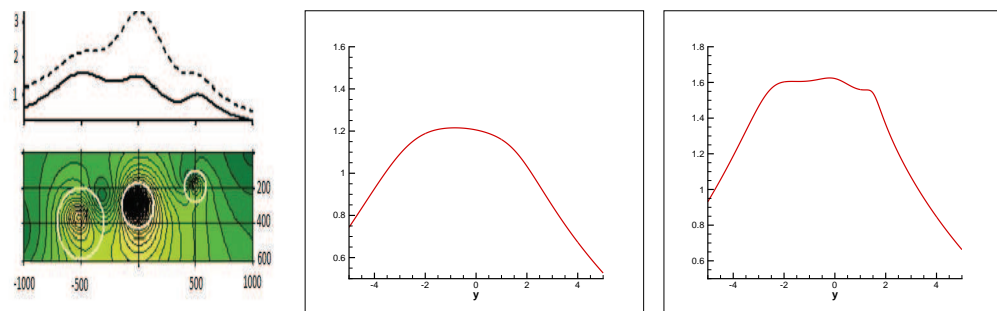


Рисунок 1.8: Задача Коши для уравнения Лапласа. Слева — модель среды. В центре — данные  $u(0, y)$ , наблюдаемые на поверхности  $z = 0$ . Справа — численное решение задачи продолжения  $u(1, y)$  на глубине 1.

Сначала приведем описание метода расширяющихся компактов, идея и обоснование которого принадлежит В. К. Иванову и И. Н. Домбровской [152–154].

Пусть линейный оператор  $A$  инъективный, непрерывный и отображает  $Q \rightarrow F$ ,  $Q, F$  — нормированные пространства [98, 155]. Пусть также имеется следующая априорная информация, которая встречается при решении многих физических задач. Известно, что точное решение  $q_T$  для уравнения  $f = Aq_T$  представимо в виде  $Ds = q_T$ ,  $s \in S$ ;  $D : S \rightarrow Q$ ;  $D$  — инъективный, вполне непрерывный оператор;  $S$  — гильбертово пространство.

Предполагается, что известны данные  $f_\delta$  с ошибкой  $\delta > 0$ :  $\|f - f_\delta\| < \delta$ .

Сначала номер итерации полагается  $n = 1$  и определяется замкнутый шар в пространстве  $S$ :  $\bar{B}_n(0) = \{s : \|s\| \leq n\}$ . Его образ при действии оператора  $D$ :  $Q_n = D(\bar{B}_n(0))$  является компактом, поскольку  $D$  — вполне непрерывный оператор, а  $S$  — гильбертово пространство.

Далее ищем минимум

$$\min_{q \in Q_n} \|Aq - f_\delta\|.$$

Существование минимума гарантируется постановкой задачи — компактностью  $Q_n$  и непрерывностью  $A$ .

Если

$$\min_{q \in Q_n} \|Aq - f_\delta\| \leq \delta,$$

то процесс прекращается, полагая  $n(\delta) = n$ , а в качестве приближенного решения выбирается любой элемент  $q_{n(\delta)} : q_{n(\delta)} \in Q_{n(\delta)}$  и  $\|Aq_{n(\delta)} - f_\delta\| < \delta$ .

Если

$$\min_{q \in Q_n} \|Aq - f_\delta\| > \delta,$$

то нужно расширять компакт, для чего  $n$  увеличивается на единицу, процесс повторяется.

Верна следующая теорема, которая была опубликована в работе [156]:

**Теорема 1.5.** *Описанный выше процесс сходится:  $n(\delta) < \infty$ . Существует  $\delta_0 > 0$  (которое, вообще говоря, зависит от  $q_e$ ) такое, что  $n(\delta) = n(\delta_0)$ ,  $\forall \delta \in (0, \delta_0]$ . Приближенное решение  $q_{n(\delta)}$  сходится к точному решению  $q_e$  при  $\delta \rightarrow 0$ .*

Из сказанного выше понятно название метода. Оказывается, этот метод допускает возможность построения так называемой апостериорной оценки погрешности, т.е. существует функция  $\chi(f_\delta, \delta)$  такая, что  $\chi(f_\delta, \delta) \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ , и  $\chi(f_\delta, \delta) > \|q_{n(\delta)} - q_e\|$  по крайней мере, при достаточно малых  $\delta > 0$ . В качестве апостериорной оценки погрешности можно взять

$$\chi(f_\delta, \delta) = \max\{\|q_{n(\delta)} - q\| : q \in Q_{n(\delta)}, \|Aq - f_\delta\| \leq \delta\}.$$

Апостериорная оценка погрешности не является оценкой погрешности в полном смысле слова, построение оценки погрешности решений некорректно поставленных задач невозможно. Однако при достаточно малых  $\delta > 0$  (а именно  $\forall \delta \in (0, \delta_0]$ ) апостериорная оценка погрешности является оценкой погрешности

решения некорректной задачи при наличии априорной информации об истокорпредставимости.

Данный подход легко обобщается на случаи, когда операторы  $A$  и  $D$  заданы с погрешностями, а также на нелинейные некорректные задачи с условием истокорпредставимости.

Разработаны численные методы решения линейных некорректных задач при условии истокорпредставимости [157, 158], в том числе и построения апостериорной оценки погрешности. Использование последовательности натуральных чисел в качестве радиусов шаров в пространстве  $S$  не обязательно. Может быть взята любая монотонно возрастающая неограниченная последовательность положительных чисел. В работе [159] метод применен для решения нелинейных задач.

Перейдем к описанию численных расчетов. Рассмотрим следующую прямую задачу

$$u_{zz} + u_{yy} = F(z, y), \quad (z, y) \in \Omega(L_z, L_y), \quad (1.70)$$

$$u_z(0, y) = g(y), \quad y \in (-L_y, L_y), \quad (1.71)$$

$$u(z, -L_y) = u(z, L_y) = 0, \quad z \in (0, L_z), \quad (1.72)$$

$$u(L_z, y) = 0, \quad y \in (-L_y, L_y). \quad (1.73)$$

Здесь

$$\Omega(L_z, L_y) = \{(z, y) : z \in (0, L_z), y \in (-L_y, L_y)\},$$

$g(y)$  функция источника, правая часть  $F(z, y)$  имеет вид

$$F(z, y) = 200e^{-40(z-1.6)^2}(e^{-40(y-1)^2} + e^{-40(y+1)^2})$$

и описывает неоднородности расположенные на глубине (см. рис. 1.9 слева). Решив прямую задачу (1.70)–(1.73), найдем данные для решения задачи продолжения

$$f(y) = u(0, y), \quad y \in (-L_y, L_y).$$

Задачу продолжения будем решать в области  $(z, y) \in \Omega(a_1, b) \subset \Omega(L_z, L_y)$ :

$$u_{zz} + u_{yy} = 0, \quad (z, y) \in \Omega(a_1, b), \quad (1.74)$$

$$u_z(0, y) = g(y), \quad y \in (-b, b), \quad (1.75)$$

$$u(0, y) = f(y), \quad y \in (-b, b). \quad (1.76)$$

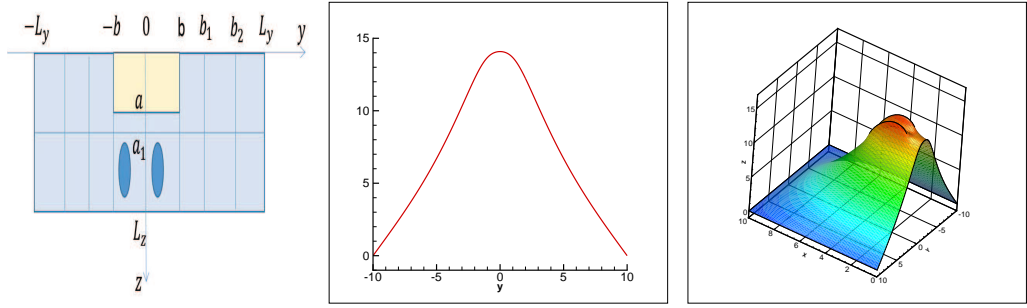


Рисунок 1.9: Решение прямой задачи для уравнения Пуассона (1.70)–(1.73). Слева — область с неоднородностями. В центре — функция  $u(0, y)$ . Справа — численное решение прямой задачи.

Отметим, что функции  $g$  и  $f$  в задаче продолжения (1.74)–(1.76) мы берем из решения прямой задачи (1.70)–(1.73), но рассматриваются на меньшем отрезке  $y \in (-b, b)$ .

Для решения задачи продолжения рассмотрим последовательность расширяющихся областей  $\Omega(a_1, b) \subset \Omega(a_1, b_1) \subset \Omega(a_1, b_2) \subset \dots$

Численно покажем, что размер области наблюдения  $b_k$  является параметром регуляризации.

Для этого сначала рассмотрим прямую задачу:

$$u_{zz} + u_{yy} = 0, \quad (z, y) \in \Omega(a, b), \quad (1.77)$$

$$u_z(0, y) = g(y), \quad y \in (-b, b), \quad (1.78)$$

$$u(z, -b) = q_1(z), \quad z \in (0, a), \quad (1.79)$$

$$u(z, b) = q_2(z), \quad z \in (0, a), \quad (1.80)$$

$$u(h, y) = q(y), \quad y \in (-b, b). \quad (1.81)$$

Обратная задача: определить функции  $q(y)$ ,  $q_1(z)$  и  $q_2(z)$  по дополнительной информации

$$u(0, y) = f(y), \quad y \in (-b, b). \quad (1.82)$$

Отметим, что задача определения трех неизвестных граничных условий, является сильно некорректной. После замены производных конечно-разностными аналогами, можно от непрерывной постановки задачи продолжения (1.77)–(1.77) перейти к дискретной задаче продолжения, которую можно переписать

в виде системы линейных алгебраических уравнений (см. подраздел 1.4). Исследуем сингулярные числа матрицы этой системы. На рисунке 1.10 приведены сингулярные числа дискретного аналога оператора задачи продолжения. Видно, что с увеличением числа неизвестных функций, задача становится все более неустойчиво (минимальное сингулярное число стремится к нулю).

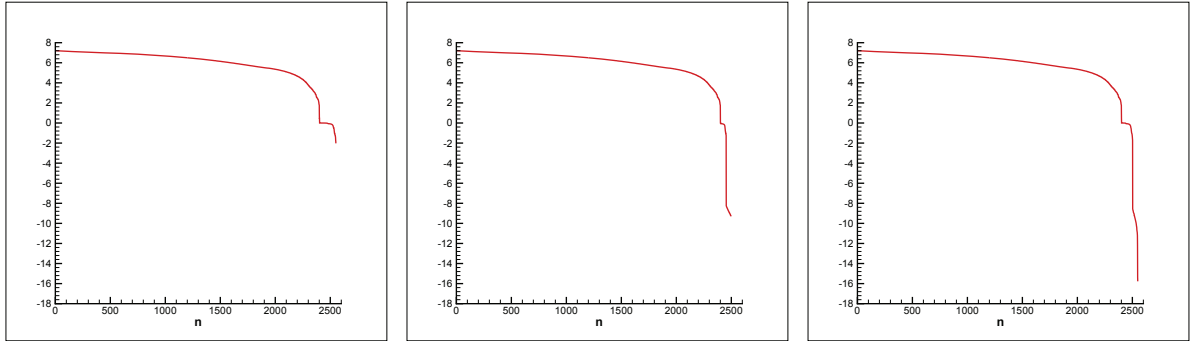


Рисунок 1.10: График сингулярных чисел. Слева — неизвестна одна функция  $q(y)$ . В центре — неизвестны две функции  $q(y)$  и  $q_1(z)$ . Справа — неизвестны три функции  $q(y)$ ,  $q_1(z)$  и  $q_2(z)$

Обозначим  $\bar{q} = (q(y), q_1(z), q_2(z))$ . Для численного решения обратной задачи (1.77)–(1.77) рассмотрим градиентный метод

$$\bar{q}_{n+1} = \bar{q}_n - \alpha J'(\bar{q}_n)$$

минимизации целевого функционала

$$J(\bar{q}) = \int_{-b}^b (u(0, y) - f(y))^2 dy \rightarrow \min.$$

Здесь  $J'(\bar{q}_n)$  — градиент функционала, который вычисляется через решение сопряженной задачи

$$\begin{aligned} \psi_{zz} + \psi_{yy} &= 0, & (z, y) \in \Omega(h, b), \\ \psi_z(0, y) &= 2(u(0, y) - f(y)), & y \in (-b, b), \\ \psi(z, -b) &= \psi(z, b) = 0, & z \in (0, h), \\ \psi(h, y) &= 0, & y \in (-b, b) \end{aligned}$$

по формуле

$$J'(\bar{q}) = \left( \psi_z(a_1, y), -\psi_y(z, -b), -\psi_y(z, b) \right).$$

Пусть  $u_T(z, y)$  является точным решением прямой задачи и  $u_n^{(k)}(z, y)$  является приближенным решением задачи продолжения на  $n$ -ой итерации в области  $\Omega(a, b_k)$ .

Оценим невязку

$$\varepsilon_n = \|u_T - u_n^{(k)}\|_{L_2(\Omega(a,b))}.$$

Покажем, что привлечение дополнительной информации с большей области наблюдения  $(-b, b) \subset (-b_1, b_1) \subset (-b_2, b_2) \subset \dots$  повышает устойчивость задачи в области  $\Omega(a, b)$ .

В численных расчетах (см. рис. 1.11 и 1.12) зафиксированы следующие параметры:  $L_z = 10$ ,  $L_y = 10$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a = 0.9$ ,  $b = 1$ ,  $b_1 = 2$ ,  $b_2 = 3$ ,  $b_3 = 4$ ,  $b_4 = 5$ ,  $b_5 = 6$ ,  $b_6 = 7$ ,  $n = 1000$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $N_z = 1000$ ,  $N_y = 2000$ . Красная сплошная линия — точное решение  $u_T(z, y)$ , зеленая пунктирная линия — приближенное решение  $u_n^{(k)}(z, y)$ .

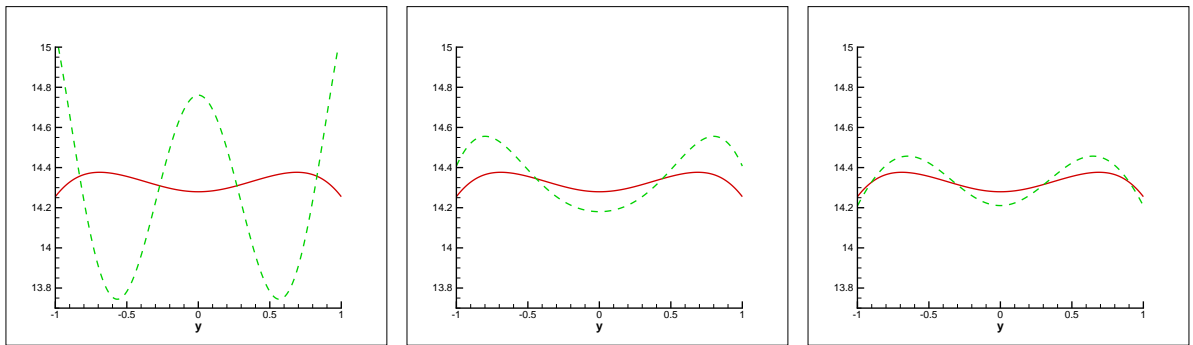


Рисунок 1.11: Решение задачи продолжения. График функции  $u_{1000}^{(k)}(0.9, y)$ . Слева —  $k = 1$ ,  $\varepsilon_{1000} = 0.435$ . В центре —  $k = 2$ ,  $\varepsilon_{1000} = 0.242$ . Справа —  $k = 3$ ,  $\varepsilon_{1000} = 0.154$ .

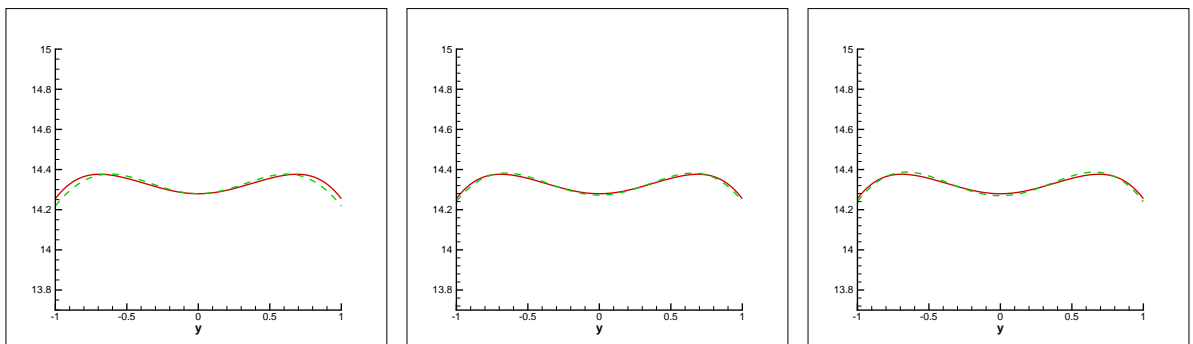


Рисунок 1.12: Решение задачи продолжения. График функции  $u_{1000}^{(k)}(0.9, y)$ . Слева —  $k = 4$ ,  $\varepsilon_{1000} = 0.086$ . В центре —  $k = 5$ ,  $\varepsilon_{1000} = 0.053$ . Справа —  $k = 6$ ,  $\varepsilon_{1000} = 0.062$ .



Из численных расчетов, представленных на рисунках 1.11 и 1.12, видно, что привлечение дополнительной информации с большей области наблюдения  $(-b, b) \subset (-b_1, b_1) \subset (-b_2, b_2) \subset \dots$  повышает устойчивость задачи в области  $\Omega(a, b)$ . И размер области наблюдения  $b_k$  является параметром регуляризации.

### 1.3 Метод линеаризации двумерной обратной задачи электродинамики

Рассмотрим постановку двумерной обратной задачи электродинамики [10–12, 28, 32] об определении  $\varepsilon(z, y)$  из соотношений:

$$\varepsilon(z, y) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma(z) \frac{\partial}{\partial t} u = \frac{1}{\mu} \Delta u, \quad (z, y) \in (0, h) \times (0, L_y), \quad t \in (0, T), \quad (1.83)$$

$$u|_{t < 0} \equiv 0, \quad u_z|_{z=0} = r_0 \delta(t), \quad (1.84)$$

$$u|_{z=0} = f(y, t), \quad y \in (0, L_y), \quad t \in (0, T). \quad (1.85)$$

по заданной дополнительной информации:

$$u|_{z=0} = f(y, t), \quad y \in (0, L_y), \quad t \in (0, T). \quad (1.86)$$

Здесь  $u(z, y, t)$  горизонтальная компонента вектора электрической напряженности электромагнитного поля,  $\varepsilon(z, y)$  диэлектрическая проницаемость. Считаем, что проводимость  $\sigma(z)$  и магнитная проницаемость  $\mu$  нам известны.

Предположим, что  $\varepsilon(z, y)$  имеет следующую структуру:

$$\varepsilon(z, y) = \varepsilon_1(z) + \varepsilon_2(z, y). \quad (1.87)$$

Полагаем, что функции  $\varepsilon_1(z)$ ,  $\varepsilon_2(z, y)$  удовлетворяют следующим условиям  $A_0$  [32, 84]:

1.  $\varepsilon_1 \in C^2(\bar{R}_+)$ ,  $\varepsilon_1'(+0) = 0$ .
2. Существуют константы  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$  такие что при всех  $z \in R_+$  имеет место:  $0 < M_1 \leq \varepsilon_1(z) \leq M_2$ ,  $\|\varepsilon_1\|_{C^2(R_+)} \leq M_3$ .
3. Функция  $\varepsilon_2(z, y)$  отлична от нуля при  $(z, y) \in (0, h) \times (0, T)$ .  
 $\varepsilon_2(z, y) \in C^2((0, h) \times (0, L_y))$ ,  $\alpha = \|\varepsilon_2\|_{C^2((0, h) \times (0, L_y))}$ ,  $\alpha \ll M_1$ .

Проведем линеаризацию, а именно представим решение  $u(z, y, t)$  граничной задачи (1.83)–(1.85) в виде:

$$u(z, y, t) = u_1(z, t) + u_2(z, y, t). \quad (1.88)$$

Здесь  $u_1(z, t)$  есть решение следующей задачи:

$$\varepsilon_1(z) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \sigma(z) \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad z \in (0, h), \quad t \in (0, T), \quad (1.89)$$

$$u_1|_{t<0} \equiv 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{z=0} = r_0 \delta(t). \quad (1.90)$$

Здесь  $\widehat{y}$  — фиксированное значение переменной.

Пренебрегая членом  $\varepsilon_2 u_{2tt}$ , получим задачу для определения  $u_2(z, y, t)$  в области  $(z, y) \in (0, h) \times (0, L_y)$ ,  $t \in (0, T)$ :

$$\varepsilon_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \sigma(z) \frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \Delta u_2 - \varepsilon_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad (1.91)$$

$$u_2|_{t<0} \equiv 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} \Big|_{t<0} \equiv 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{z=0} = 0. \quad (1.92)$$

Дополнительная информация для задачи (1.91), (1.92) об определении  $u_2(z, y, t)$  и функции  $\varepsilon_2(z, y)$  примет вид:

$$u_2|_{z=0} = g(y, t), \quad y \in (0, L_y), \quad t \in (0, T), \quad (1.93)$$

где  $g(y, t) = f(y, t) - u_1(0, t)$ .

В качестве дополнительной информации для задачи (1.89), (1.90) об определении функций  $u_1(z, t)$  и  $\varepsilon_1(z)$  берется

$$u_1|_{z=0} = f(\widehat{y}, t), \quad t \in (0, T). \quad (1.94)$$

Таким образом, решение обратной задачи (1.83)–(1.86) об определении функций  $\varepsilon(z, y)$  и  $u(z, y, t)$  состоит из следующих этапов:

1. Решаем обратную задачу об определении функций  $\varepsilon_1(z)$  и  $u_1(z, t)$  на глубину  $h$  из соотношений (1.89)–(1.90) по известной дополнительной информации (1.94).
2. Решаем прямую задачу (1.89)–(1.90) на глубину  $h$  и определяем  $u_{1tt}$ .

3. Решаем обратную задачу об определении  $\varepsilon_2(z, y)$  из соотношений (1.91), (1.92) по известным функциям  $\varepsilon_1(z)$ ,  $u_{1tt}$  и дополнительной информации  $g(y, t)$ .

Рассмотрим более подробно обратную задачу определения функций  $\varepsilon_1(z)$  и  $u_1(z, t)$  из соотношений:

$$\varepsilon_1(z) \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_1 + \sigma(z) \frac{\partial}{\partial t} u_1 = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_1, \quad z \in (0, h), \quad t \in (0, T), \quad (1.95)$$

$$u_1|_{t=0} = 0, \quad u_{1t}|_{t=0} = 0, \quad (1.96)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} u_1 \Big|_{z=0} = r_0 \delta(t) \quad (1.97)$$

по известной дополнительной информации:

$$u_1|_{z=0} = f(\widehat{y}, t), \quad t \in (0, T). \quad (1.98)$$

Для решения обратной задачи применим оптимизационный метод [32]. Обозначим  $q(z) = \varepsilon_1(z)$ .

Рассмотрим целевой функционал:

$$J_1(q) = \int_0^T [u_1(0, \widehat{y}, t; q) - f(\widehat{y}, t)]^2 dt. \quad (1.99)$$

Приближенное решение  $q^{(n+1)}(z)$  ищем методом простой итерации:

$$q^{(n+1)}(z) = q^{(n)}(z) - \alpha_n J'_1(q^{(n)})(z).$$

Здесь  $\alpha$  — параметр спуска,  $J'_1(q)$  — градиент функционала, который определяется по формуле:

$$J'_1(q) = \int_0^T \psi(z, \widehat{y}, t) u_{1tt} dt,$$

где  $\psi(z, \widehat{y}, t)$  решение соответствующей сопряженной задачи:

$$q(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi + \sigma \frac{\partial}{\partial t} \psi = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi, \quad z \in (0, h), \quad t \in (0, T),$$

$$\psi|_{t=T} = 0, \quad \psi_t|_{t=T} = 0,$$

$$\psi_z \Big|_{z=0} = 2[u_1(0, t) - f(t)].$$

Рассмотрим обратную задачу определения функций  $\varepsilon_2(z, y)$  и  $u_2(z, y, t)$  из соотношений:

$$\varepsilon_1(z) \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_2 + \sigma(z) \frac{\partial}{\partial t} u_2 = \frac{1}{\mu} \Delta u_2 - \varepsilon_2(z, y) Q(z, t), \quad (1.100)$$

$$u_2 \Big|_{t=0} = 0, \quad u_{2t} \Big|_{t=0} = 0, \quad (1.101)$$

$$u_2 \Big|_{y=0} = 0. \quad (1.102)$$

По известной дополнительной информации

$$u_2 \Big|_{z=0} = g(y, t), \quad y \in (0, L_y), \quad t \in (0, T). \quad (1.103)$$

Решив обратную задачу (1.95)–(1.98), определим функцию

$$Q(z, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_1(z, t).$$

Обозначим через  $p(z, y)$  решение обратной задачи (1.100)–(1.103). Рассмотрим целевой функционал

$$J_2(p) = \int_0^T \int_0^{L_y} [u_2(0, y, t) - g(y, t)] dy dt. \quad (1.104)$$

Применим градиентный метод минимизации функционала:

$$p^{(n+1)}(z, y) = p^{(n)}(z, y) - \alpha J_2'(p^{(n)})(z, y),$$

где градиент  $J_2'(p)$  функционала (1.104) определяется по формуле:

$$J_2'(p) = \int_0^T \varphi(z, y, t) Q(z, t) dt.$$

Здесь  $\varphi(z, y, t)$  – решение следующей сопряженной задачи:

$$\varepsilon_1(z) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \sigma(z) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p(z, y) Q(z, t) = \frac{1}{\mu} \Delta \varphi, \quad (1.105)$$

$$\varphi \Big|_{t=T} = 0, \quad \varphi_t \Big|_{t=T} = 0, \quad (1.106)$$

$$\varphi_z \Big|_{z=0} = 2[u_1(0, y, t) - g(y, t)], \quad y \in (0, L_y), \quad t \in (0, T), \quad (1.107)$$

$$\varphi \Big|_{y=0} = 0, \quad z \in (0, h), \quad t \in (0, T). \quad (1.108)$$

## 1.4 Численные расчеты

Рассмотрим задачу продолжения для уравнения Гельмгольца в области  $\Omega = (0, l) \times (0, \pi)$ :

$$u_{xx} + u_{yy} + k^2 u = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1.109)$$

$$u_x(0, y) = 0, \quad y \in [0, \pi], \quad (1.110)$$

$$u(0, y) = f(y), \quad y \in [0, \pi], \quad (1.111)$$

$$u_y(x, 0) = u_y(x, \pi) = 0, \quad x \in [0, l], \quad (1.112)$$

где  $k$  некоторая постоянная. Необходимо найти функцию  $u(x, y)$  в области  $\Omega$  по данным  $f(y)$ .

Задача продолжения является некорректной задачей: решение единственное, но не устойчиво к ошибкам в данных Коши [54, 56, 99, 115, 141, 143, 145, 160–162].

Задача продолжения решения уравнения Гельмгольца исследовалась многими авторами. Например, N.H. Tuan и P.H. Quan [163] исследовали случай  $0 < k < 1$  и предложили регуляризационный метод, который позволяет получить устойчивое решение в двумерной области. T. Regińska и K. Regiński [164] показали, что если  $k$  удовлетворяет определенным условиям, тогда задача Коши для уравнения Гельмгольца имеет устойчивое решение в трехмерной области. V. Isakov и S. Kindermann [81] использовали метод сингулярного разложения для доказательства устойчивости решения с ростом числа  $k$  в прямоугольной области. Единственность решения доказана в работе W. Arendt и T. Regińska [165], в которой было введено понятие слабой производной при постановке задачи. В работах [11] были исследованы сингулярные числа оператора задачи продолжения решения двумерного уравнения Гельмгольца с комплексным волновым числом для прямоугольной области.

Мы рассмотрим два подхода для решения задачи продолжения (1.109)—(1.112).

Первый подход состоит в формулировании задачи (1.109)—(1.112) в виде операторного уравнения  $\mathcal{A}q = f$  и минимизации целевого функционала  $J(q) = \langle \mathcal{A}q - f, \mathcal{A}q - f \rangle$  методом простой итерации [54, 141].

Во втором подходе, задача (1.109)—(1.112) после дискретизации сводится к системе линейных алгебраических уравнений, решение которой находится с

помощью двух методов: метод регуляризации А. Н. Тихонова [166] и прием С. К. Годунова [82].

### Постановка прямой и обратной задач

Рассмотрим прямую задачу: определить функцию  $u(x, y)$  из соотношений

$$u_{xx} + u_{yy} + k^2 u = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1.113)$$

$$u_x(0, y) = 0, \quad y \in [0, \pi], \quad (1.114)$$

$$u(l, y) = q(y), \quad y \in [0, \pi], \quad (1.115)$$

$$u_y(x, 0) = u_y(x, \pi) = 0, \quad x \in [0, l]. \quad (1.116)$$

Заметим, что задачу продолжения (1.109) – (1.112) можно свести к обратной задаче определения функции  $q(y)$  из соотношений (1.113)–(1.116) по дополнительной информации

$$u(0, y) = f(y), \quad y \in [0, \pi]. \quad (1.117)$$

### Метод простой итерации

#### Постановка задачи в операторной форме и описание алгоритма

Рассмотрим обратную задачу (1.113)–(1.117) в операторной форме. Рассмотрим оператор  $\mathcal{A}$ , такой что

$$\mathcal{A}: q(y) \mapsto u(0, y),$$

где  $u(x, y)$  является решение прямой задачи (1.113)–(1.116). Тогда обратная задача (1.113)–(1.117) принимает вид

$$\mathcal{A}q = f. \quad (1.118)$$

Будем искать приближенное решение задачи (1.118) минимизируя целевой функционал [12, 141]:

$$J(q) = \|\mathcal{A}q - f\|^2 = \int_0^\pi [u(0, y; q) - f(y)]^2 dy \quad (1.119)$$

методом простой итерации

$$q_{n+1} = q_n - \alpha J'(q_n), \quad (1.120)$$

где  $\alpha \in \left(0, \frac{1}{\|\mathcal{A}\|^2}\right)$  является параметром спуска [141].

Опишем итерационный алгоритм решения обратной задачи (1.113)–(1.117). Сначала выберем начальное приближение  $q_0(y)$ . Пусть приближенное решение на  $n$  шаге  $q_n$  уже найдено. Покажем, как определить новое приближение  $q_{n+1}$  по уже найденному  $q_n$ .

1. Решаем прямую задачу (1.113)–(1.116) с заданным  $q_n$ .

$$\begin{aligned} u_{xx}^n + u_{yy}^n + k^2 u^n &= 0, & (x, y) \in \Omega, \\ u_x^n(0, y) &= 0, & y \in [0, \pi], \\ u^n(l, y) &= q_n(y), & y \in [0, \pi], \\ u_y^n(x, 0) = u_y^n(x, \pi) &= 0, & x \in [0, l]. \end{aligned}$$

2. Вычисляем значение функционала  $J(q_n)$  по формуле (1.119).

3. Проверяем критерий останковки [167]

$$\sum_{m=0}^n \frac{1}{J(q_m)} > \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Итерационный процесс останавливается, если выполняется это неравенство. Здесь  $\varepsilon$  — уровень шума в данных обратной задачи,  $\|f - f_\varepsilon\| < \varepsilon$ .

4. Решаем сопряженную задачу

$$\psi_{xx}^n + \psi_{yy}^n + k^2 \psi^n = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1.121)$$

$$\psi^n(l, y) = 0, \quad y \in [0, \pi], \quad (1.122)$$

$$\psi_x^n(0, y) = 2(u^n(0, y) - f(y)), \quad y \in [0, \pi], \quad (1.123)$$

$$\psi_y^n(x, \pi) = \psi_y^n(x, 0) = 0, \quad x \in [0, l]. \quad (1.124)$$

5. Вычисляем градиент функционала  $J'(q_n)$  по формуле

$$J'(q_n)(y) = \psi_x^n(l, y).$$

6. Вычисляем новое приближенное решение  $q_{n+1}(y) = q_n(y) - \alpha J'(q_n)(y)$  и переходим на шаг 1.

## Численное решение прямой и сопряженной задачи

Прямая и сопряженная задача решались конечно-разностным методом [168]. Для дискретизации прямой задачи рассмотрим сетку в области  $\Omega$  с шагом  $h_x = \frac{l}{N_x}$ ,  $h_y = \frac{\pi}{N_y}$ , где  $N_x, N_y$  положительные числа. Обозначим сетку через  $\omega_h = \{x = ih_x, y = jh_y; i = \overline{0, N_x}, j = \overline{0, N_y}\}$ . После замены производных конечно разностными аналогами со вторым порядком аппроксимации, мы получим дискретный аналог прямой задачи (1.113)–(1.116):

$$\begin{aligned} \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2} + k^2 u_{i,j} &= 0, \\ i = \overline{1, N_x - 1}, j = \overline{1, N_y - 1}, \\ \frac{u_{1,j} - u_{0,j}}{h_x} &= 0, \quad j = \overline{0, N_y}, \\ u_{N_x,j} &= q_j, \quad j = \overline{0, N_y}, \\ \frac{u_{i,1} - u_{i,0}}{h_y} = \frac{u_{i,N_y} - u_{i,N_y-1}}{h_y} &= 0, \quad i = \overline{0, N_x}. \end{aligned}$$

Обозначив через  $a = \frac{1}{h_x^2}$ ,  $b = \frac{1}{h_y^2}$ ,  $c = k^2 - 2a - 2b$ , перейдем к дискретной прямой задаче:

$$\begin{aligned} au_{i-1,j} + bu_{i,j-1} + cu_{i,j} + bu_{i,j+1} + au_{i+1,j} &= 0, \quad i = \overline{1, N_x - 1}, j = \overline{1, N_y - 1}, \\ u_{1,j} - u_{0,j} &= 0, \quad j = \overline{0, N_y}, \\ u_{N_x,j} &= q_j, \quad j = \overline{0, N_y}, \\ u_{i,1} - u_{i,0} = u_{i,N_y} - u_{i,N_y-1} &= 0, \quad i = \overline{0, N_x}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили систему линейных алгебраических уравнений

$$A_T X_T = B_T. \quad (1.125)$$

где  $A_T$  является матрицей размерности  $(N_x + 1)(N_y + 1)$ ,  $X_T$  неизвестный вектор

$$X_T = (u_{0,0}, u_{0,1}, \dots, u_{0,N_y}, u_{1,0}, u_{1,1}, \dots, u_{1,N_y}, \dots, u_{N_x,0}, u_{N_x,1}, \dots, u_{N_x,N_y}),$$

$B_T$  вектор правой части (граничные условия).



Аналогично вводится дискретная сопряженная задача (1.121)–(1.124), которая имеет следующий вид

$$\begin{aligned}
 a\psi_{i-1,j} + b\psi_{i,j-1} + c\psi_{i,j} + b\psi_{i,j+1} + a\psi_{i+1,j} &= 0, & i = \overline{1, N_x - 1}, j = \overline{1, N_y - 1}, \\
 \psi_{1,j} - \psi_{0,j} &= 2(u_{0,j} - f_j), & j = \overline{0, N_y}, \\
 \psi_{N_x,j} &= 0, & j = \overline{0, N_y}, \\
 \psi_{i,1} - \psi_{i,0} = \psi_{i,N_y} - \psi_{i,N_y-1} &= 0, & i = \overline{0, N_x}.
 \end{aligned}$$

Как и выше, задачу можно сформулировать в матричной форме

$$A_T Y_T = \bar{B}_T.$$

где

$$Y_T = (\psi_{0,0}, \psi_{0,1}, \dots, \psi_{0,N_y}, \psi_{1,0}, \psi_{1,1}, \dots, \psi_{1,N_y}, \dots, \psi_{N_x,0}, \psi_{N_x,1}, \dots, \psi_{N_x,N_y})$$

вектор неизвестных,  $\bar{B}_T$  вектор правой части (граничные условия).

### Результаты численных расчетов

Пусть  $l = 1$ ,  $N_x = N_y = 20$ . Выберем параметр  $k = 0.9$ . Для того, чтобы протестировать алгоритм, в качестве тестового решения возьмем  $q(y) = 1 - \cos(2y)$  и посчитаем соответствующую дополнительную информацию  $f$ . Начальное приближение выберем в следующем виде  $q_0(y) = 0.1$ , найдем приближенное решение обратной задачи методом итераций Ландвебера с параметром спуска  $\alpha = 0.01$ . Если данные заданы с ошибкой  $\varepsilon$ , критерий остановки будет выбран следующий [167]:

$$\sum_{m=0}^n \frac{1}{J(q_m)} > \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Численные расчеты были проведены с разным уровнем шума в данных. В таблицах 1.1, 1.2, 1.3 показаны результаты вычислений для рабочей станции на базе процессора Intel(R)Core(TM) i7 с частотой 3.9 GHz.

Видно, что при отсутствии шума в данных функционал  $J(q)$  монотонно убывает, при наличии шума в данных после 100 итераций монотонного убывания функционал начинает возрастать. Это явление может быть объяснено накоплением ошибок, которые возникают при решении прямой и сопряженной задач.

№	Число итераций $n$	$\ q_T - \tilde{q}\ $	$J(q)$	Время вычисления
1	10	0.8243	0.094	4 сек
2	100	0.0632	$9.42 \cdot 10^{-5}$	40 сек
3	1000	0.0414	$9.55 \cdot 10^{-7}$	6 мин 40 сек
4	5000	0.0311	$1.74 \cdot 10^{-8}$	33 мин 30 сек
5	7318	0.0304	$9.29 \cdot 10^{-9}$	49 мин

Таблица 1.1: Решение задачи без шума в данных

№	Число итераций $n$	$\ q_T - \tilde{q}\ $	$J(q)$	Время вычисления
1	10	0.83	0.09	4 сек
2	100	0.077	$4.91 \cdot 10^{-4}$	40 сек
3	1000	0.047	$3.38 \cdot 10^{-4}$	6 мин 33 сек
4	1508	0.051	$3.32 \cdot 10^{-4}$	10 мин

Таблица 1.2: Решение задачи с уровнем шума в данных 1%  $\varepsilon = 0.01$ .

№	Число итераций $n$	$\ q_T - \tilde{q}\ $	$J(q)$	Время вычисления
1	10	0.86	$9.07 \cdot 10^{-2}$	4 сек
2	100	0.165	$9.20 \cdot 10^{-3}$	40 сек
3	1000	0.210	$8.33 \cdot 10^{-3}$	6 мин 32 сек
4	2000	0.297	$8.15 \cdot 10^{-3}$	13 мин 4 сек
5	2418	0.326	$8.10 \cdot 10^{-3}$	15 мин 48 сек

Таблица 1.3: Решение задачи с уровнем шума в данных 5%  $\varepsilon = 0.05$ .

Обратим внимание, что в случае шума в данных обратной задачи критерий остановки не гарантирует минимальные погрешности при решении обратной задачи. Однако этот критерий гарантирует, что ошибка будет того же порядка, как и минимальная, поскольку дальнейший расчет приводит к увеличению ошибки.

### Методы регуляризации

В данном пункте рассмотрим дискретный аналог задачи продолжения (1.109)–(1.112) и численно исследуем вопрос устойчивости ее решения. Для численного решения применим метод регуляризации А. Н. Тихонова и прием С. К. Годунова и проведем сравнительный анализ этих двух методов.

#### Дискретизация задачи продолжения (1.109) – (1.112)

После дискретизации задачи продолжения (1.109)–(1.112)

$$\begin{aligned}
 au_{i-1,j} + bu_{i,j-1} + cu_{i,j} + bu_{i,j+1} + au_{i+1,j} &= 0, & i = \overline{1, N_x - 1}, j = \overline{1, N_y - 1}, \\
 u_{1,j} - u_{0,j} &= 0, & j = \overline{0, N_y}, \\
 u_{0,j} &= f_j, & j = \overline{0, N_y}, \\
 u_{i,1} - u_{i,0} = u_{i,N_y} - u_{i,N_y-1} &= 0, & i = \overline{0, N_x},
 \end{aligned}$$

сведем ее к системе линейных алгебраических уравнений [17]:

$$AX = B. \quad (1.126)$$

где  $A$  является матрицей размерности  $(N_x + 1)(N_y + 1)$ ,  $B$  вектор правой части,  $X$  вектор неизвестных вида

$$X = (u_{0,0}, u_{0,1}, \dots, u_{0,N_y}, u_{1,0}, u_{1,1}, \dots, u_{1,N_y}, \dots, u_{N_x,0}, u_{N_x,1}, \dots, u_{N_x,N_y}). \quad (1.127)$$

В расчетах положим  $l = 1$ ,  $N_x = N_y = 50$ ,  $k = 0.9$ ,  $q(y) = 1 - \cos(2y)$ .

Найдем число обусловленности матриц  $A_T$  дискретной прямой задачи (1.125) и матрицы  $A$  дискретной задачи продолжения (1.126).

Матрица  $A$  является плохо обусловленной матрицей [169] (см. убывание сингулярных чисел на Рис. 1.16). Число обусловленности и норма матрицы дискретной прямой задачи представлены в таблице 1.4 и на Рис. 1.17. Видно, что прямая задача является корректной.

Матрицы	$\mu(A)$	$\ A\ $
$A_T$	$3.42 \cdot 10^6$	321098.0
$A$	$6.02 \cdot 10^{17}$	321098.0

Таблица 1.4: Характеристики матриц  $A$  и  $A_T$ .

В силу некорректности задачи и плохой обусловленности матрицы  $A$  обратной задачи, применим методы регуляризации.

#### Метод регуляризации А.Н. Тихонова

Рассмотрим метод регуляризации Тихонова уравнения  $AX = B$ . Рассмотрим систему  $(\alpha I + A^*A) \tilde{X} = A^*B$  [166, 170, 171].

Опишем метод выбора параметра регуляризации  $\alpha$  в соответствии с работой [172]. Строится последовательность чисел  $\alpha_i$  по следующему правилу:

$$\alpha_i = \alpha_1 \left( \frac{\alpha_l}{\alpha_1} \right)^{\frac{i-1}{l-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, l.$$

Здесь  $\alpha_1 = \sigma_{\max}(A)$ ,  $\alpha_l = \max\{\sigma_{\min}(A), \epsilon \sigma_{\max}(A)\}$ ,  $\epsilon = 2^{-53}$  — машинное округление для двойной точности (double). В численных расчетах параметр  $l = 10$ .

$\alpha_i$ , на котором достигается минимум невязки  $\|X_{\alpha_i}\| - \|X_{\alpha_{i-1}}\|$ , выбирается в качестве параметра регуляризации  $\alpha = \alpha_i$ .

В численных расчетах положим  $N_x = N_y = 20$ ,  $k = 0.9$ ,  $q(y) = 1 - \cos(2y)$  и посчитаем решение для разных  $\varepsilon = 0$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\varepsilon = 0.05$ . Приближенное решение в случае  $\varepsilon = 0.05$  показано на рисунке 1.14.

#### Прием регуляризации С.К. Годунова

С.К. Годунов предложил рассмотреть расширенную систему [82]:

$$\begin{bmatrix} (1 - \alpha) A \\ \alpha D \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} (1 - \alpha) f \\ 0 \end{bmatrix}$$

где матрица  $D$  содержит некоторую априорную информацию о решении обратной задачи.

В качестве априорной информации возьмем существование второй производной решения [82].

$$\left| \frac{u_{N_x, j+1} - 2u_{N_x, j} + u_{N_x, j-1}}{h_y^2} \right| \leq M$$

Выберем  $\alpha$  из условия минимизации последовательности  $\|X_{\alpha_i}\| - \|X_{\alpha_{i-1}}\|$ .

Для  $N_x = N_y = 20$ ,  $k = 0.9$ ,  $q(y) = 1 - \cos(2y)$  найдем решение для различных  $\varepsilon$ . Результат решения приведен на рис. 1.15.

### Сравнительный анализ численных методов

На таблицах 1.5, 1.6 и 1.7 приведены результаты численного решения задачи (1.109)–(1.112) с различными уровнями шума в данных. Видно, что решение, полученное с помощью приема С. К. Годунова является более точным, по сравнению с другими методами. При этом время, затрачиваемое на получение приближенного решения с помощью приема С. К. Годунова, в два раза больше, чем с помощью метода регуляризации А. Н. Тихонова. Тоже самое видно и на рис. 1.18.

№	Метод	$\ q_T - \tilde{q}\ $	Время расчета
1	Метод простой итерации	0.030	49 мин
2	Регуляризация А.Н. Тихонова	0.021	23 сек
3	Прием С.К. Годунова	0.019	46 сек

Таблица 1.5: Сравнительный анализ в случае отсутствия шума в данных

№	Метод	$\ q_T - \tilde{q}\ $	Время расче- та
1	Метод простой итерации	0.051	10 мин
2	Регуляризация А.Н. Ти- хонова	0.190	15 сек
3	Прием С.К. Годунова	0.055	17 сек

Таблица 1.6: Сравнительный анализ с уровнем шума в данных 1%

№	Метод	$\ q_T - \tilde{q}\ $	Время расче- та
1	Метод простой итерации	0.5349	18 min 24 сек
2	Регуляризация А.Н. Ти- хонова	0.4088	7 сек
3	Прием С.К. Годунова	0.2989	12 сек

Таблица 1.7: Сравнительный анализ с уровнем шума в данных 5%

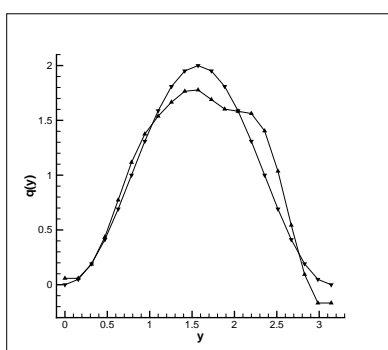


Рисунок 1.13: ▼ — точное решение ▲ — решение полученное методом простой итерации

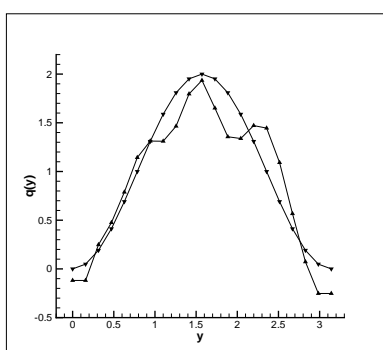


Рисунок 1.14: ▼ — точное решение  $q(y)$  ▲ — решение полученное методом регуляризации А.Н. Тихонова

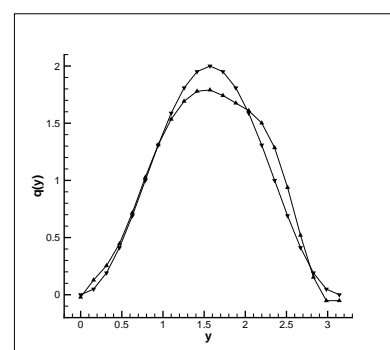


Рисунок 1.15: ▼ — точное решение  $q(y)$  ▲ — решение полученное приемом С.К. Годунова

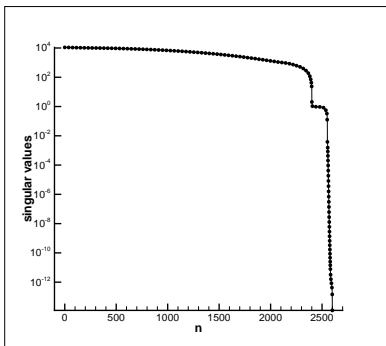


Рисунок 1.16: Сингулярные  
числа матрицы  $A$  при  
 $N = 50$

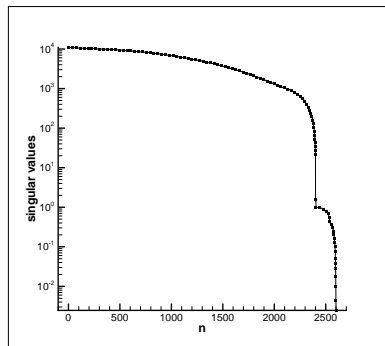


Рисунок 1.17: Сингулярные  
числа матрицы  $A_T$  при  
 $N = 50$

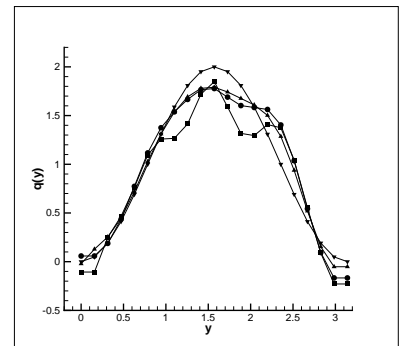


Рисунок 1.18: ▼ — точное  
решение  $q(y)$ , ● — метод  
простой итерации, ■ —  
регуляризация А.Н.  
Тихонова, ▲ — прием С.К.  
Годунова

## Глава 2

# Итерационный метод решения нелинейных обратных задач акустики и электродинамики

### 2.1 Введение

В данной главе на основе проекционного метода исследуется задача восстановления двумерного параметра в уравнении акустики. Обратная задача рассматривается в виде нелинейной системы интегродифференциальных уравнений Вольтерра. Доказывается сходимость проекционного метода.

В 1981 доказана глобальная теорема единственности для многомерных коэффициентных обратных задач с одним измерением [173, 174] для параболических и гиперболических уравнений. Доказательство базируется на идее применения Карлемановских оценок [64, 173–176]. Технику доказательства можно применить к обратным задачам для уравнений в частных производных, для которых можно вывести Карлемановскую оценку. В настоящее время метод Карлемановских оценок обобщен на очень широкие классы обратных задач [177–187].

Основная идея проекционного метода [84] заключается в выделении двух переменных — временной  $t$  и выводящей  $z$  — в качестве основных. Если при этом главной целью является доказательство теоремы единственности и получение оценок условной устойчивости, то оставшиеся переменные  $x, y$  временно принимаются за параметры, а обратная задача с переменными  $z, t$  приводится к си-



стеме нелинейных интегродифференциальных уравнений вольтерровского типа относительно неизвестных коэффициентов. Входящие в систему частные производные функции по  $x, y$  оцениваются, например, при помощи энергетических неравенств, через частные производные искомым коэффициентов, что позволяет сформулировать и доказать теоремы единственности и получить оценки условной устойчивости решения в специальных классах функций.

Если же основной целью является получение численного алгоритма, то многомерная задача проектируется на конечномерное подпространство, порожденное какой-либо ортогональной системой функций. Полученная при этом конечная система одномерных задач может быть решена численно, например, с использованием метода обращения разностной схемы. Основной проблемой на этом пути является обоснование существования решения конечной нелинейной системы одномерных обратных задач и получение оценки сходимости решения конечной системы одномерных обратных задач к точному решению исходной многомерной обратной задачи при стремлении к бесконечности параметра  $N$  — длины отрезка ряда Фурье в разложении по базисным функциям.

## **2.2 Методы градиентного спуска в коэффициентной обратной задаче акустики**

В этом разделе будет рассмотрена задача определения двумерного параметра в волновом уравнении. Обратная задача формулируется как система интегродифференциальных уравнений. Для этой системы исследуется проекционный метод. Применяя проекционный метод, сводим дифференциальную постановку обратной задачи к конечной системе интегральных уравнений. Доказывается сходимость проекционного метода и дается оценка скорости его сходимости.

В работах М. М. Лаврентьева, О. М. Алифанова, А. Б. Бакушинского, Г. М. Вайникко, В. В. Васина, А. Г. Яголы, Н. Engl и других авторов предложены и развиты так называемые итеративные методы решения некорректных задач [63, 80, 89, 90, 170, 171, 188–194]. Для этих методов параметром регуляризации является номер итерации, и должно быть сформулировано правило остановки,

согласующее число итераций с погрешностью входных данных. Метод простой итерации является классическим примером итеративного метода.

Рассмотрим операторное уравнение [155]:

$$Aq = f, \quad A : Q \rightarrow F, \quad (2.1)$$

где  $Q$  и  $F$  гильбертовы пространства, причем  $Q = F$ , оператор  $A$  — самосопряженный, неотрицательно определенный, вполне непрерывный,  $\|A\| < 1$ , и уравнение  $Aq = f$  разрешимо.

Тогда уравнение (2.1) можно переписать в виде

$$q = q - (Aq - f)$$

и, задав начальное приближение  $q^{(0)}$ , организовать итерационный процесс, который называется методом простой итерации:

$$q^{(k+1)} = q^{(k)} - (Aq^{(k)} - f).$$

Процесс сходится к нормальному решению операторного уравнения.

Если  $\|A\| \geq 1$ , то предварительно следует ввести нормирующий множитель.

Если исходное уравнение переписать в виде

$$Aq + \beta q = \beta q + f, \quad \beta > 0,$$

то

$$q = (A + \beta I)^{-1}(\beta q + f),$$

где  $I$  — единичный оператор, то далее можно записать итерационный процесс

$$q^{(k+1)} = (A + \beta I)^{-1}(\beta q^{(k)} + f),$$

который называется неявной итерационной схемой. Она обладает свойством сходимости к нормальному решению операторного уравнения и при невыполнении условия  $\|A\| < 1$ .

Если оператор  $A$  не является самосопряженным и неотрицательно определенным, то для построения итерационных процессов, описанных выше, уравнение нужно предварительно преобразовать к виду

$$A^* A q = A^* f.$$

В случае приближенно заданных входных данных, если задача некорректно поставлена, необходимо сформулировать правила остановки (например, по невязке или по обобщенной невязке). Описанные выше итерационные процессы относятся к линейным итерационным процессам. К нелинейным итерационным процессам, применяемым для решения некорректных задач, относятся обобщения методов наискорейшего спуска, минимальных невязок и другие. В соответствии с принципом итеративной регуляризации [121, 189, 190] многие классические методы, предназначенные, в основном, для минимизации функционала невязки (метод Ньютона, метод сопряженных градиентов и другие) с помощью введения регуляризирующих поправок могут быть преобразованы в регуляризирующие алгоритмы.

### 2.2.1 Постановка двумерной коэффициентной обратной задачи для волнового уравнения

Пусть  $T > 0$  и обозначим

$$\begin{aligned}\Delta(x, t) &:= \left\{ (\xi, \tau) : 0 < \xi < x, t - x + \xi < \tau < t + x - \xi \right\}, \\ \Delta(T) &:= \Delta(T, 0), \\ \Omega &:= \left\{ (x, y, t) : (x, t) \in \Delta(T), y \in (-\pi, \pi) \right\}.\end{aligned}$$

Исследуем задачу восстановления функций  $\bar{u}(x, y)$ ,  $\tilde{u}(x, y, t)$ , заданных на  $\Omega$ ,  $(0, T) \times (-\pi, \pi)$ , соответственно, в волновом уравнении

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + \bar{u}(x, y) \tilde{u} \quad (2.2)$$

с заданными начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x, y, 0) &= \varphi(x, y), \quad -T < x < T, \quad -\pi < y < \pi; \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(x, y, 0) &= 0, \quad -T < x < T, \quad -\pi < y < \pi; \\ \tilde{u}(x, -\pi, t) &= \tilde{u}(x, \pi, t), \quad t - T < x < T - t, \quad 0 < t < T; \\ \tilde{u}(0, y, t) &= \tilde{f}(y, t), \quad -\pi < y < \pi, \quad 0 < t < T.\end{aligned} \quad (2.3)$$

## 2.2.2 Сведение задачи к системе интегродифференциальных уравнений

Предположим, что функции  $\tilde{f}$  и  $\varphi$  являются достаточно гладкими. Обозначим

$$u := \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}, \quad f := \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial t^2}, \quad \psi := \Delta \varphi,$$

тогда получим, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + \bar{u}u, \quad (x, y, t) \in \Omega \quad (2.4)$$

и

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = \psi(x, y) + \bar{u}(x, y)\varphi(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = 0 \end{cases} \quad x \in (-T, T), \quad -\pi < y < \pi,$$

$$u(x, -\pi, t) = u(x, \pi, t) \quad t - T < x < T - t, \quad 0 < t < T,$$

$$u(0, y, t) = f(y, t) \quad -\pi < y < \pi, \quad 0 < t < T. \quad (2.5)$$

Продолжим функцию  $f$  четным образом по переменной  $t$ , тогда из формулы Даламбера, получим, что

$$u(x, y, t) = h(x, y, t) + B_{x,t}[Ru], \quad (x, y, t) \in \Omega. \quad (2.6)$$

Здесь

$$h(x, y, t) = \frac{1}{2}[f(y, t+x) + f(y, t-x)], \quad (2.7)$$

$$Ru(x, y, t) = u_{yy} + \bar{u}(x, y)u(x, y, t), \quad (2.8)$$

$$B_{x,t}[u] = \frac{1}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} u(\xi, y, \tau) d\tau d\xi. \quad (2.9)$$

Используя (2.5) и (2.6), при  $t = 0$  получим

$$\psi(x, y) + \bar{u}(x, y)\varphi(x, y) = \bar{h}(x, y) + B_{x,0}[Ru], \quad (2.10)$$

где обозначили  $\bar{h}(x, y) = h(x, y, 0)$ .

Тем самым мы свели обратную задачу определения функций  $\bar{u}$  и  $\tilde{u}$  из соотношений (2.2), (2.3) к системе интегро-дифференциальных уравнений (2.6), (2.10). Задача состоит в определении функций  $\bar{u}(x, y)$  и  $u(x, y, t)$  по заданным  $h(x, y, t)$ ,  $\bar{h}(x, y)$ ,  $\psi(x, y)$  и  $\varphi(x, y)$ .

### 2.2.3 Сходимость проекционного метода

Без ограничения общности положим, что  $\psi(x, y) = 0$ ,  $\varphi(x, y) = -1$ .

Пусть  $(x, t) \in \Delta(T)$ , рассмотрим разложение в ряд Фурье по переменной  $y$  функций  $u$  и  $\bar{u}$ :

$$u(x, y, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k(x, t) e^{iky},$$

$$\bar{u}(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{u}_k(x) e^{iky}.$$

От уравнений (2.6), (2.10) перейдем к бесконечной системе уравнений на коэффициенты Фурье функций:

$$u_n(x, t) = h_n(x, t) - B_{x,t} \left[ n^2 u_n - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{u}_k u_{n-k} \right], \quad (2.11)$$

$$\bar{u}_n(x) = \bar{h}_n(x) - B_{x,0} \left[ n^2 u_n - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{u}_k u_{n-k} \right], \quad (2.12)$$

где  $(x, t) \in \Delta(T)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Будем исследовать конечную подсистему (2.11), (2.12):

$$v_n(x, t) = h_n(x, t) - B_{x,t} \left[ n^2 v_n - \sum_{|k| \leq N} \bar{v}_k v_{n-k} \right], \quad (x, t) \in \Delta(T), \quad (2.13)$$

$$\bar{v}_n(x) = \bar{h}_n(x) - B_{x,0} \left[ n^2 v_n - \sum_{|k| \leq N} \bar{v}_k v_{n-k} \right], \quad x \in (0, T), \quad (2.14)$$

где  $|n| \leq N$ . Конечная система (2.13), (2.14) состоит из  $2 \times (2N + 1)$  уравнений с  $2 \times (2N + 1)$  неизвестными.

**Определение 2.1.** • Обозначим для  $X = U, V, W, H$  и  $x = u, v, w, h$

$$\vec{X} = \left( (x_{-N}, \dots, x_0, \dots, x_N), (\bar{x}_{-N}, \dots, \bar{x}_0, \dots, \bar{x}_N) \right)$$

первые  $2N + 1$  компоненты определена на  $\Delta(T)$ , вторые  $2N + 1$  компоненты определены на  $(0, T)$ .

- Введем операторы

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_n^{(1)}(\vec{V})(x, t) &= B_{x,t} \left[ n^2 v_n - \sum_{|k| \leq N} \bar{v}_k v_{n-k} \right]; \\
\mathcal{L}_n^{(2)}(\vec{V})(x) &= B_{x,0} \left[ n^2 v_n - \sum_{|k| \leq N} \bar{v}_k v_{n-k} \right]; \\
\mathcal{L}(\vec{V}) &= \left( \mathcal{L}^{(1)}(\vec{V}), \mathcal{L}^{(2)}(\vec{V}) \right).
\end{aligned} \tag{2.15}$$

- 

$$\tilde{C} := C(\Delta(T)) \times C[0, T] := C(\Delta(T); \mathbb{Z}^N) \times C([0, T]; \mathbb{Z}^N) \tag{2.16}$$

обозначает скалярное произведение на  $\overline{\Delta(T)}$  и  $[0, T]$ .

- Введем нормы

1. Для  $(x, t) \in \Delta(T)$  определим

$$\|\vec{V}\| (x, t) := \max_{|n| \leq N} \{ |v_n(x, t)|, |\bar{v}_n(x)| \}.$$

2. Положим для  $x \in [0, T]$

$$\|\vec{V}\|_0 (x) = \sup_{t \in [x-T, T-x]} \{ \|\vec{V}\| (x, t) \}.$$

3. Пусть  $\nu > 0$

$$\|\vec{V}\|_\nu = \sup_{x \in [0, T]} \{ \|\vec{V}\|_0 (x) e^{-\nu x} \},$$

- 4.

$$\|\vec{V}\|_{\tilde{C}} = \sup_{x \in [0, T]} \{ \|\vec{V}\|_0 (x) \}.$$

- Для всех  $\vec{W} \in \tilde{C}$ ,  $\varepsilon > 0$  введем

$$B_\nu(\vec{W}, \varepsilon, T) := \{ \vec{V} \in \tilde{C} : \|\vec{W} - \vec{V}\|_\nu \leq \varepsilon \}.$$

замкнутый шар с центром в точке  $\vec{W}$  и радиусом  $\varepsilon$ .

- Определим гильбертовы пространства  $L^2(\Delta(T))$ ,  $L^2(0, T)$ ,  $L^2(T)$  со следующими скалярными произведениями:

$$\langle V, U \rangle_{L^2(\Delta(T))} = \sum_{|n| \leq N} \iint_{\Delta(T)} v_n(x, t) u_n(x, t) dt dx,$$

$$\langle \bar{V}, \bar{U} \rangle_{L^2(0, T)} = \sum_{|n| \leq N} \int_0^T \bar{v}_n(x) \bar{u}_n(x) dx,$$

$$\langle \vec{V}, \vec{U} \rangle_{L^2(T)} = \langle V, U \rangle_{L^2(\Delta(T))} + \langle \bar{V}, \bar{U} \rangle_{L^2(0, T)},$$

соответственно. Введем нормы

$$\|V\|_{L^2(\Delta(T))}^2 := \langle V, V \rangle_{L^2(\Delta(T))},$$

$$\|\bar{V}\|_{L^2(0, T)}^2 := \langle \bar{V}, \bar{V} \rangle_{L^2(0, T)},$$

$$\|\vec{V}\|_{L^2(T)}^2 := \|V\|_{L^2(\Delta(T))}^2 + \|\bar{V}\|_{L^2(0, T)}^2.$$

- Для  $\tilde{M} > 0$  и  $\rho > 0$  положим

$$\mathcal{F}(\rho, T) := \left\{ (u, \bar{u}) : \begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k(x, t) e^{iky} \text{ для } (x, y, t) \in \Omega, \\ \|u_k\|_{L^2(\Delta(T))} &\leq \tilde{M} e^{-\rho|k|} \\ \bar{u}(x, y) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{u}_k(x) e^{iky}, \text{ для } x \in (0, T), y \in (-\pi, \pi) \\ \|\bar{u}_k\|_{L^2(0, T)} &\leq \tilde{M} e^{-\rho|k|} \end{aligned} \right\}. \quad (2.17)$$

Используя вышеприведенные определения, систему (2.13), (2.14) перепишем в виде

$$\mathcal{A}(\vec{V}) := \vec{V} + \mathcal{L}(\vec{V}) = \vec{H}. \quad (2.18)$$

Исследуем существование и единственность решения системы (2.13), (2.14) в пространстве  $\mathcal{F}(\rho, T)$ . Покажем, что при  $N \rightarrow \infty$  решение (2.18) стремится к решению (2.11), (2.12), в случае если существует решение (2.11), (2.12) в пространстве  $\mathcal{F}(\rho, T)$ .

Для многомерных обратных задач В. Г. Романов [34] разработал технику шкал Банаховых пространств для доказательства локального существования, глобальной единственности и условной устойчивости решения в классах функций аналитических по переменной  $y$ .

**Теорема 2.1.** Пусть  $N > 0$  и для некоторых  $\rho > 0$  и  $T > 0$  коэффициенты Фурье функций  $(u, \bar{u}) \in \mathcal{F}(\rho, T)$  удовлетворяют (2.13), (2.12).

Тогда существует постоянная  $\mu' > 0$ , такая что для  $T' \in (0, T)$  удовлетворяет  $\mu'T' < \rho$  существует единственное решение  $\vec{V} \in L^2(T')$  системы (2.13), (2.14), в которой  $T$  заменено на  $T'$ .

Более того, существует постоянная  $M_1 := M_1(T', \rho)$ , такая что

$$\max_{|n| \leq N} \|u_n - v_n\|_{L^2(\Delta(T'))} \leq T'(M_1 + 1)e^{N(\mu'T' - \rho)}, \quad (2.19)$$

$$\max_{|n| \leq N} \|\bar{u}_n - \bar{v}_n\|_{L^2(0, T')} \leq \sqrt{T'}(M_1 + 1)e^{N(\mu'T' - \rho)}, \quad (2.20)$$

Доказательство.

Предположим, что  $\vec{V}$  удовлетворяет (2.13) и (2.14). Полагая

$$\vec{W} = ((u_{-N} - v_{-N}, \dots, u_0 - v_0, \dots, u_N - v_N), (\bar{u}_{-N} - \bar{v}_{-N}, \dots, \bar{u}_0 - \bar{v}_0, \dots, \bar{u}_N - \bar{v}_N)) \quad (2.21)$$

и вычитая из (2.11), (2.12) с соответствующим номером  $n$  уравнения (2.13) (2.14) соответственно, мы получим, что при  $(x, t) \in \Delta(T)$ ,  $n \leq |N|$

$$w_n(x, t) + B_{x,t} \left[ n^2 w_n - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{u}_k u_{n-k} + \sum_{|k| \leq N} \bar{v}_k v_{n-k} \right] = 0, \quad (2.22)$$

$$\bar{w}_n(x) + B_{x,0} \left[ n^2 w_n - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{u}_k u_{n-k} + \sum_{|k| \leq N} \bar{v}_k v_{n-k} \right] = 0. \quad (2.23)$$

Введем следующие операторы

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_n^{(1)}(\vec{W})(x, t) &= B_{x,t} \left[ n^2 w_n - \sum_{|k| \leq N} (\bar{w}_k u_{n-k} + \bar{v}_k w_{n-k}) \right], \\ \mathcal{B}_n^{(2)}(\vec{W})(x) &= B_{x,0} \left[ n^2 w_n - \sum_{|k| \leq N} (\bar{w}_k u_{n-k} + \bar{v}_k w_{n-k}) \right], \\ \mathcal{B}(\vec{W}) &= (\mathcal{B}^{(1)}(\vec{W}), \mathcal{B}^{(2)}(\vec{W})) \end{aligned}$$



и функции

$$\begin{aligned} G_n(x, t) &= B_{x,t} \left[ \sum_{|k|>N} \bar{u}_k u_{n-k} \right], \\ \bar{G}_n(x) &= B_{x,0} \left[ \sum_{|k|>N} \bar{u}_k u_{n-k} \right], \\ \vec{G} &= (G, \bar{G}). \end{aligned}$$

Тогда систему интегральных уравнений (2.22), (2.23) можно переписать в операторном виде:

$$\mathcal{P}(\vec{W}) := \vec{W} + \mathcal{B}(\vec{W}) = \vec{G}. \quad (2.24)$$

**Замечание 2.1.** Так как операторы  $B_{x,t}$ ,  $B_{x,0}$  отображают  $L^2(\Delta(T))$  в  $C(\overline{\Delta(T)})$  и  $L^2(0, T)$  в  $C[0, T]$ , из (2.22) следует, что  $w_n \in C(\overline{\Delta(T)})$  и  $\bar{w}_n \in C[0, T]$ . Следовательно  $\vec{W} \in \tilde{C}$ .

Откуда получаем, что

$$\|w_n\|_{L^2(\Delta(T))} \leq T \|w_n\|_{C(\overline{\Delta(T)})}; \quad \|\bar{w}_n\|_{L^2(0,T)} \leq \sqrt{T} \|\bar{w}_n\|_{C[0,T]}. \quad (2.25)$$

**Лемма 2.1.** Пусть  $u, \bar{u} \in \mathcal{F}(\rho, T)$  и  $M_1 = \frac{\sqrt{2T}}{1-e^{2\rho}} \tilde{M}^2$ , где  $\tilde{M}$  как и в (2.17). Тогда для всех  $N > 0$  и  $|n| \leq N$

$$\max \left\{ \|G_n\|_{C(\overline{\Delta(T)})}, \|\bar{G}_n\|_{C[0,T]} \right\} \leq M_1 e^{-N\rho}.$$

**Доказательство леммы 2.1.**

$$\begin{aligned} \|G_n\|_{C(\overline{\Delta(T)})} &= \max_{(x,t) \in \overline{\Delta(T)}} |G_n(x, t)| = \max_{(x,t) \in \overline{\Delta(T)}} \left| B_{x,t} \left[ \sum_{|k|>N} \bar{u}_k u_{n-k} \right] \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \iint_{\Delta(T)} \left[ \sum_{|k|>N} |\bar{u}_k| |u_{n-k}| \right] d\tau d\xi \leq \frac{1}{2} \sum_{|k|>N} \iint_{\Delta(T)} |\bar{u}_k| |u_{n-k}| d\tau d\xi \leq \\ &\leq \frac{\sqrt{2T}}{2} \sum_{|k|>N} \|\bar{u}_k\|_{L^2(0,T)} \|u_{n-k}\|_{L^2(\Delta(T))} \leq \frac{\sqrt{2T}}{2} \tilde{M}^2 \sum_{|k|>N} e^{-|k|\rho} e^{-|n-k|\rho} \leq \\ &\leq \frac{\sqrt{2T}}{2} \tilde{M}^2 e^{|n|\rho} \sum_{|k|>N} e^{-2|k|\rho} \leq \sqrt{2T} \tilde{M}^2 e^{|n|\rho} \sum_{k>N} e^{-2k\rho} \leq \sqrt{2T} \tilde{M}^2 \frac{e^{-N\rho}}{1 - e^{2\rho}}. \end{aligned}$$

Следовательно

$$\|G_n\|_{C(\overline{\Delta(T)})} \leq \sqrt{2T} \tilde{M}^2 \frac{e^{-N\rho}}{1 - e^{2\rho}}.$$

Аналогичным образом мы можем оценить  $\|\bar{G}_n\|_{C[0,T]}$ .

**Лемма 2.2.** Пусть  $\tilde{M}$  определена в (2.17),  $M_1$  выбирается как в лемме 2.1. Положим

$$M_2 := \tilde{M} \left( \frac{3 - e^\rho}{1 - e^\rho} \right) \left( \frac{\sqrt{T}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \right).$$

и

$$\mu_1 = \frac{M_2(M_1 + 1) + \sqrt{(M_2^2(M_1 + 1) + 2)(M_2 + 1)}}{2}, \quad (2.26)$$

Тогда для всех  $\rho > 0$ ,  $\mu \in (\mu_1, \infty)$  и  $T'$  удовлетворяющих

$$0 < \mu T' < \rho, \quad (2.27)$$

оператор  $\mathcal{P}$  отображает  $B_{\mu N}(\vec{G}, e^{-N\rho}, T')$  в себя.

**Доказательство леммы 2.2.**

Рассмотрим покомпонентно оператор  $\mathcal{P}$ :

$$\begin{aligned} |w_n(x, t) - G(x, t)| &\leq B_{x,t} \left[ \left| n^2 w_n - \sum_{|k| \leq N} (\bar{w}_k u_{n-k} + \bar{v}_k w_{n-k}) \right| \right] \leq \\ &\leq n^2 B_{x,t} [ |w_n| ] + \sum_{|k| \leq N} \left( B_{x,t} [ |\bar{w}_k u_{n-k}| ] + B_{x,t} [ |\bar{v}_k w_{n-k}| ] \right). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Оценим каждое слагаемое правой части по-отдельности:

1.

$$\begin{aligned} n^2 B_{x,t} [ |w_n| ] &= \frac{n^2}{2} \iint_{\Delta(x,t)} |w_n|(\xi, \tau) d\tau d\xi \leq \\ &\leq \frac{n^2}{2} \iint_{\Delta(x,t)} \|\vec{W}\|(\xi, \tau) d\tau d\xi \leq \\ &\leq \frac{n^2}{2} \|\vec{W}\|_{\mu N} \iint_{\Delta(x,t)} e^{\mu N \xi} d\tau d\xi = n^2 \|\vec{W}\|_{\mu N} \int_0^x (x - \xi) e^{\mu N \xi} d\xi = \\ &= n^2 \|\vec{W}\|_{\mu N} \int_0^x \int_0^\xi e^{\mu N \zeta'} d\zeta' d\zeta = n^2 \|\vec{W}\|_{\mu N} \frac{e^{\mu N x}}{(\mu N)^2}. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
B_{x,t} \left[ |\bar{w}_k u_{n-k}| \right] &= \frac{1}{2} \iint_{\Delta(x,t)} |\bar{w}_k(\xi) u_{n-k}(\xi, \tau)| \, d\tau d\xi \leq \\
&\leq \frac{1}{2} \left[ \iint_{\Delta(x,t)} \bar{w}_k^2(\xi) \, d\tau d\xi \iint_{\Delta(x,t)} u_{n-k}^2(\xi, \tau) \, d\tau d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \frac{1}{2} \|u_{n-k}\|_{L^2(\Delta(T'))} \left[ \iint_{\Delta(x,t)} \|\vec{W}\|^2(\xi, \tau) \, d\tau d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \frac{1}{2} \|u_{n-k}\|_{L^2(\Delta(T'))} \left[ \iint_{\Delta(x,t)} \|\vec{W}\|_0^2(\xi) \, d\tau d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \frac{1}{2} \|u_{n-k}\|_{L^2(\Delta(T'))} \left[ 2 \int_0^x (x - \xi) \|\vec{W}\|_0^2(\xi) e^{-2\mu N \xi} e^{2\mu N \xi} \, d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|u_{n-k}\|_{L^2(\Delta(T'))} \|\vec{W}\|_{\mu N} \left[ \int_0^x (x - \xi) e^{2\mu N \xi} \, d\xi \right]^{\frac{1}{2}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \|u_{n-k}\|_{L^2(\Delta(T'))} \|\vec{W}\|_{\mu N} \left[ \int_0^x \int_0^\xi e^{2\mu N \xi'} \, d\xi' d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|u_{n-k}\|_{L^2(\Delta(T'))} \|\vec{W}\|_{\mu N} \frac{e^{\mu N x}}{2\mu N}.
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
B_{x,t} \left[ |\bar{v}_k w_{n-k}| \right] &= \frac{1}{2} \iint_{\Delta(x,t)} |\bar{v}_k(\xi) w_{n-k}(\xi, \tau)| \, d\tau d\xi \leq \\
&\leq \frac{1}{2} \left[ \iint_{\Delta(x,t)} \bar{v}_k^2(\xi) \, d\tau d\xi \iint_{\Delta(x,t)} w_{n-k}^2(\xi, \tau) \, d\tau d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \frac{\sqrt{2T}}{2} \|\bar{v}_k\|_{L^2(0,T')} \left[ \iint_{\Delta(x,t)} \|\vec{W}\|^2(\xi, \tau) \, d\tau d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \frac{\sqrt{2T}}{2} \|\bar{v}_k\|_{L^2(0,T')} \|\vec{W}\|_{\mu N} \left[ 2 \int_0^x (x - \xi) e^{2\mu N \xi} \, d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \frac{\sqrt{T}}{2} \|\bar{v}_k\|_{L^2(0,T')} \|\vec{W}\|_{\mu N} \frac{e^{\mu N x}}{\mu N}.
\end{aligned}$$

Для всех  $(x, t) \in \overline{\Delta(T)}$ ,  $\Delta(x, t) \subseteq \Delta(T)$ , используя оценки из (2.28), найдем, что

$$\begin{aligned}
|w_n(x, t) - G_n(x, t)| &\leq n^2 \left\| \vec{W} \right\|_{\mu N} \frac{e^{\mu N x}}{(\mu N)^2} + \\
&+ \frac{\sqrt{2}}{4} \left\| \vec{W} \right\|_{\mu N} \frac{e^{\mu N x}}{\mu N} \sum_{|k| \leq N} \|u_{n-k}\|_{L^2(\Delta(T'))} + \\
&+ \frac{\sqrt{T}}{2} \left\| \vec{W}_N \right\|_{\mu N} \frac{e^{\mu N x}}{\mu N} \sum_{|k| \leq N} \|\bar{v}_k\|_{L^2(0, T')}, \quad (x, t) \in \overline{\Delta(T')}. \quad (2.29)
\end{aligned}$$

Используя оценки

$$\sum_{|k| \leq N} \|u_{n-k}\|_{L^2(\Delta(T'))} \leq \tilde{M} \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^N e^{-\rho k} \right) = \tilde{M} \left( \frac{3 - e^\rho}{1 - e^\rho} \right)$$

и

$$\sum_{|k| \leq N} \|\bar{v}_{n-k}\|_{L^2(\Delta(T'))} \leq \tilde{M} \left( \frac{3 - e^\rho}{1 - e^\rho} \right)$$

в (2.29) мы найдем, что для всех  $(x, t) \in \overline{\Delta(T')}$

$$\begin{aligned}
|w_n(x, t) - G_n(x, t)| &\leq n^2 \left\| \vec{W} \right\|_{\mu N} \frac{e^{\mu N x}}{(\mu N)^2} + \\
&+ \tilde{M} \left( \frac{3 - e^\rho}{1 - e^\rho} \right) \left\| \vec{W} \right\|_{\mu N} \frac{e^{\mu N x}}{\mu N} \left( \frac{\sqrt{T'}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \right). \quad (2.30)
\end{aligned}$$

Аналогично получим, что для всех  $x \in [0, T']$ .

$$\begin{aligned}
|\bar{w}_n(x) - \bar{G}_n(x)| &\leq n^2 \left\| \vec{W} \right\|_{\mu N} \frac{e^{\mu N x}}{(\mu N)^2} + \\
&+ \tilde{M} \left( \frac{3 - e^\rho}{1 - e^\rho} \right) \left\| \vec{W} \right\|_{\mu N} \frac{e^{\mu N x}}{\mu N} \left( \frac{\sqrt{T'}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \right). \quad (2.31)
\end{aligned}$$

Объединяя (2.30) и (2.31), получаем, что для всех  $x \in [0, T']$ :

$$\left\| \mathcal{B}(\vec{W}) - \vec{G} \right\|_0(x) \leq \frac{N^2}{2} \frac{e^{\mu N x}}{(\mu N)^2} \left\| \vec{W} \right\|_{\mu N} + M_2 \frac{e^{\mu N x}}{\mu N} \left\| \vec{W} \right\|_{\mu N}. \quad (2.32)$$

Умножая обе части неравенства (2.32) на  $e^{-\mu N x}$ , получим

$$\left\| \mathcal{B}(\vec{W}) - \vec{G} \right\|_{\mu N} \leq \left( \frac{1}{2\mu^2} + \frac{M_2}{\mu N} \right) \left\| \vec{W} \right\|_{\mu N}.$$

Пусть  $\vec{W} \in B_{\mu N}(\vec{G}, e^{-N\rho}, T')$ , тогда

$$\begin{aligned} \|\vec{W}\|_C &\leq e^{\mu NT'} \|\vec{W}\|_{\mu N} \leq e^{\mu NT'} \left( \|\vec{G}\|_{\mu N} + e^{-N\rho} \right) \leq \\ &\leq (M_1 + 1)e^{(\mu T' - \rho)N} \leq M_1 + 1. \end{aligned}$$

Таким образом из (2.32) следует, что

$$\|\mathcal{B}(\vec{W}) - \vec{G}\|_{\mu N} \leq \left( \frac{1}{2\mu^2} + \frac{M_2}{\mu N} \right) (M_1 + 1)e^{-N\rho},$$

откуда при условии  $\mu > \mu_1$ , получаем, что

$$\|\mathcal{B}(\vec{W}) - \vec{G}\|_{\mu N} \leq e^{-N\rho}.$$

Полученное неравенство показывает что оператор  $\mathcal{P}$  отображает множество  $B_{\mu N}(\vec{G}, e^{-N\rho}, T')$  в себя.

**Лемма 2.3.** *Существует  $\mu_* > 0$ , такое что для всех  $\mu \in (\mu_*, \infty)$  и  $T'$  в (2.27), оператор  $\mathcal{P}$  (см. (2.24)) является сжимающим на шаре  $B_{\mu N}(\vec{G}, e^{-N\rho}, T')$ .*

Доказательство леммы 2.3.

Пусть  $\vec{A}, \vec{B} \in B_{\mu N}(\vec{G}, e^{-N\rho}, T')$  и положим  $\vec{S} = \vec{A} - \vec{B}$ . Из определения оператора  $\mathcal{B}$  следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_n^{(1)}(\vec{A}) - \mathcal{B}_n^{(1)}(\vec{B}) &= \\ &= B_{x,t} \left[ n^2(a_n - b_n) - \sum_{|k| \leq N} ((\bar{a}_k - \bar{b}_k)u_{n-k} + \bar{v}_k(a_{n-k} - b_{n-k})) \right] = \mathcal{B}_n^{(1)}(\vec{S}). \end{aligned}$$

Аналогичным образом, получим:

$$\mathcal{B}(\vec{S}) = \mathcal{B}(\vec{A}) - \mathcal{B}(\vec{B}).$$

Таким образом, для всех  $(x, t) \in \Delta(T)$

$$\|\mathcal{B}(\vec{A}) - \mathcal{B}(\vec{B})\|_{\mu N} \leq \left( \frac{1}{2\mu^2} + \frac{M_2}{2\mu N} \right) \|\vec{S}\|_{\mu N}. \quad (2.33)$$

Пусть  $\mu \in (\mu_1, \infty)$  удовлетворяет условию

$$\mu > \frac{M_2 + \sqrt{M_2^2 + 8}}{4}.$$

Тогда  $\left(\frac{1}{2\mu^2} + \frac{M_2}{2\mu N}\right) < 1$ . Таким образом, оператор  $\mathcal{P}$  является сжимающим на  $B_{\mu N}(\vec{G}, e^{-N\rho}, T')$ .

Перейдем к завершению доказательства теоремы. В силу лемм 2.2 и 2.3 отображение  $\mathcal{P}$  является сжимающим и, следовательно, по теореме о сжимающих отображениях мы можем заключить, что существует единственная фиксированная точка  $\vec{W} \in B_{\mu N}(\vec{G}, e^{-N\rho}, T')$ , где постоянные  $\mu'$  и  $T'$  удовлетворяют неравенству

$$\mu' > \max \left\{ \mu_1, \frac{M_2 + \sqrt{M_2^2 + 8}}{4} \right\} \text{ и } 0 < \mu' T' < \rho.$$

Боле того, мы имеем

$$\|\vec{W}\|_{\mu N} \leq (M_1 + 1)e^{-N\rho}. \quad (2.34)$$

Следовательно  $\vec{V} = \vec{U} - \vec{W}$  (см. (2.21)) является решением (2.13), (2.14). Оценки теоремы следуют из объединения неравенств (2.25) и (2.34).

### Свойства оператора $\mathcal{A}$

Уравнение (2.18) является нелинейным относительно вектора  $\vec{V}$ . Для решения этого уравнения применим градиентный метод, а именно метод простой итерации (в зарубежной литературе метод итераций Ландвебера). Чтобы доказать сходимость метода необходимо сначала исследовать свойства оператора  $\mathcal{A}$  и его сопряженного.

**Лемма 2.4.** *Оператор  $\mathcal{L}$  (см. (2.15)) определен на  $L^2(T)$  и выполняются следующие оценки*

$$\|\mathcal{L}(\vec{V})\|_{L^2(T)}^2 \leq T^2(1 + T) \left( \frac{TN^4}{2} + (2N + 1) \|\vec{V}\|_{L^2(T)}^2 \right) \|\vec{V}\|_{L^2(T)}^2. \quad (2.35)$$

*Доказательство.*

Оценим каждую компоненту оператора  $\mathcal{L}$  по-отдельности

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_n^{(1)}(\vec{V})\|_{L^2(\Delta(T))}^2 &= \iint_{\Delta(T)} \left( B_{x,t} \left[ n^2 v_n - \sum_{|k| \leq N} \bar{v}_k v_{n-k} \right] \right)^2 dt dx \leq \\ &\leq \frac{n^4}{2} \iint_{\Delta(T)} \left[ \iint_{\Delta(x,t)} v_n(\xi, \tau) d\tau d\xi \right]^2 dt dx + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \iint_{\Delta(T)} \left[ \iint_{\Delta(x,t)} \sum_{|k| \leq N} \bar{v}_k(\xi) v_{n-k}(\xi, \tau) d\tau d\xi \right]^2 dt dx \leq \\
& \leq \frac{T^4 n^4}{2} \|v_n\|_{L^2(\Delta(T))}^2 + \frac{T^2}{2} \sum_{|k| \leq N} \iint_{\Delta(T)} \bar{v}_k^2(x) dt dx \sum_{|k| \leq N} \iint_{\Delta(T)} v_{n-k}^2(x, t) dt dx \leq \\
& \leq \frac{T^4 n^4}{2} \|v_n\|_{L^2(\Delta(T))}^2 + T^3 \sum_{|k| \leq N} \|\bar{v}_k\|_{L^2(0,T)}^2 \sum_{|k| \leq N} \|v_k\|_{L^2(\Delta(T))}^2 = \\
& = \frac{T^4 n^4}{2} \|v_n\|_{L^2(\Delta(T))}^2 + T^3 \|\bar{V}\|_{L^2(0,T)}^2 \|V\|_{L^2(\Delta(T))}^2. \tag{2.36}
\end{aligned}$$

Более того,

$$\begin{aligned}
& \left\| \mathcal{L}^{(1)}(\vec{V}) \right\|_{L^2(\Delta(T))}^2 = \sum_{|n| \leq N} \left\| \mathcal{L}_n^{(1)}(\vec{V}) \right\|_{L^2(\Delta(T))}^2 \leq \\
& \leq \sum_{|n| \leq N} \frac{T^4 n^4}{2} \|v_n\|_{L^2(\Delta(T))}^2 + \sum_{|n| \leq N} T^3 \|\bar{V}\|_{L^2(0,T)}^2 \|V\|_{L^2(\Delta(T))}^2 \leq \\
& \leq \frac{T^4 N^4}{2} \|V\|_{L^2(\Delta(T))}^2 + (2N+1) T^3 \|\bar{V}\|_{L^2(0,T)}^2 \|V\|_{L^2(\Delta(T))}^2 \leq \\
& \leq T^3 \left\| \vec{V} \right\|_{L^2(T)}^2 \left( \frac{TN^4}{2} + (2N+1) \left\| \vec{V} \right\|_{L^2(T)}^2 \right). \\
& \left\| \mathcal{L}^{(1)}(\vec{V}) \right\|_1^2 \leq T^3 \left\| \vec{V} \right\|_{L^2(T)}^2 \left( \frac{TN^4}{2} + (2N+1) \left\| \vec{V} \right\|_{L^2(T)}^2 \right). \tag{2.37}
\end{aligned}$$

Аналогично получим, что

$$\left\| \mathcal{L}_n^{(2)}(\vec{V}) \right\|_{L^2(0,T)}^2 \leq \frac{T^3 n^4}{2} \|v_n\|_{L^2(\Delta(T))}^2 + T^2 \|\bar{V}\|_{L^2(0,T)}^2 \|V\|_{L^2(\Delta(T))}^2,$$

Тем самым показали, что

$$\left\| \mathcal{L}^{(2)}(\vec{V}) \right\|_2^2 \leq T^2 \left\| \vec{V} \right\|_{L^2(T)}^2 \left( \frac{TN^4}{2} + (2N+1) \left\| \vec{V} \right\|_{L^2(T)}^2 \right). \tag{2.38}$$

Из объединения оценок (2.36), (2.37) и (2.38), следует неравенство (2.35).

**Лемма 2.5.** Пусть  $T > 0$ .

1. Оператор  $\mathcal{A} : L^2(T) \rightarrow L^2(T)$  дифференцируем по Фреше с производной

$$\mathcal{A}'(\vec{V})\vec{S} = \vec{S} + \mathcal{L}'(\vec{V})\vec{S}. \tag{2.39}$$

Здесь

$$\left[ \mathcal{L}^{(1)'}(\vec{V}) \right]_n \vec{S} = B_{x,t} \left[ n^2 s_n - \sum_{|k| \leq N} (\bar{v}_k s_{n-k} + \bar{s}_k v_{n-k}) \right], \quad (2.40)$$

$$\left[ \mathcal{L}^{(2)'}(\vec{V}) \right]_n \vec{S} = B_{x,0} \left[ n^2 s_n - \sum_{|k| \leq N} (\bar{v}_k s_{n-k} + \bar{s}_k v_{n-k}) \right]. \quad (2.41)$$

2. Более того

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{L}'(\vec{V}) \vec{S} \right\|_{L^2(T)}^2 &\leq \\ &\leq T^2 \left( \frac{TN^4}{2} + 4(2N+1) \left\| \vec{V} \right\|_{L^2(T)}^2 \right) (1+T) \left\| \vec{S} \right\|_{L^2(T)}^2. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Доказательство.

Из определения оператора  $\mathcal{L}$  следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n^{(1)}(\vec{V} + \vec{S}) - \mathcal{L}_n^{(1)}(\vec{V}) &= \\ &= B_{x,t} \left[ n^2 s_n - \sum_{|k| \leq N} (\bar{v}_k s_{n-k} + \bar{s}_k v_{n-k}) \right] - B_{x,t} \left[ \sum_{|k| \leq N} \bar{s}_k s_{n-k} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n^{(2)}(\vec{V} + \vec{S}) - \mathcal{L}_n^{(2)}(\vec{V}) &= \\ &= B_{x,0} \left[ n^2 s_n - \sum_{|k| \leq N} (\bar{v}_k s_{n-k} + \bar{s}_k v_{n-k}) \right] - B_{x,0} \left[ \sum_{|k| \leq N} \bar{s}_k s_{n-k} \right]. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} B_{x,t} \left[ \sum_{|k| \leq N} \bar{s}_k s_{n-k} \right] &= o \left( \left\| \vec{S} \right\|_{L^2(T)} \right), \\ B_{x,0} \left[ \sum_{|k| \leq N} \bar{s}_k s_{n-k} \right] &= o \left( \left\| \vec{S} \right\|_{L^2(T)} \right). \end{aligned}$$

Следовательно, оператор  $\mathcal{L}$  дифференцируем по Фреше и выполняются (2.40), (2.41).

Докажем (2.42):

$$\left\| \left[ \mathcal{L}^{(1)'}(\vec{V}) \right]_n \vec{S} \right\|_{L^2(\Delta(T))}^2 =$$



$$\begin{aligned}
&= \iint_{\Delta(T)} \left( B_{x,t} \left[ n^2 s_n - \sum_{|k| \leq N} (\bar{s}_k v_{n-k} + \bar{v}_k s_{n-k}) \right] \right)^2 dt dx \leq \\
&\leq \frac{1}{2} \iint_{\Delta(T)} \left( \iint_{\Delta(x,t)} n^2 s_n(\xi, \tau) d\tau d\xi \right)^2 dt dx + \\
&+ \frac{1}{2} \iint_{\Delta(T)} \left( \iint_{\Delta(x,t)} \sum_{|k| \leq N} (\bar{s}_k(\xi) v_{n-k}(\xi, \tau) + \bar{v}_k(\xi) s_{n-k}(\xi, \tau)) d\tau d\xi \right)^2 dt dx \leq \\
&\leq \frac{T^4 n^4}{2} \|s_n\|_{L^2(\Delta(T))}^2 + T^2 \left[ \sum_{|k| \leq N} \iint_{\Delta(T)} \bar{s}_k(x) v_{n-k}(x, t) dt dx \right]^2 + \\
&+ T^2 \left[ \sum_{|k| \leq N} \iint_{\Delta(T)} \bar{v}_k(x) s_{n-k}(x, t) dt dx \right]^2 \leq \frac{T^4 n^4}{2} \|s_n\|_{L^2(\Delta(T))}^2 + \\
&+ T^2 \left\{ \sum_{|k| \leq N} \left[ \iint_{\Delta(T)} \bar{s}_k^2(x) dt dx \iint_{\Delta(T)} v_{n-k}^2(x, t) dt dx \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^2 + \\
&+ T^2 \left\{ \sum_{|k| \leq N} \left[ \iint_{\Delta(T)} \bar{v}_k^2(x) dt dx \iint_{\Delta(T)} s_{n-k}^2(x, t) dt dx \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^2 \leq \\
&\leq \frac{T^4 n^4}{2} \|s_n\|_{L^2(\Delta(T))}^2 + T^2 \sum_{|k| \leq N} 2T \|\bar{s}_k\|_{L^2(0,T)}^2 \sum_{|k| \leq N} \|v_{n-k}\|_{L^2(\Delta(T))}^2 + \\
&+ T^2 \sum_{|k| \leq N} 2T \|\bar{v}_k\|_{L^2(0,T)}^2 \sum_{|k| \leq N} \|s_{n-k}\|_{L^2(\Delta(T))}^2 \leq \frac{T^4 n^4}{2} \|s_n\|_{L^2(\Delta(T))}^2 + \\
&+ 2T^3 \left[ \|\bar{S}\|_{L^2(0,T)}^2 \|V\|_{L^2(\Delta(T))}^2 + \|\bar{V}\|_{L^2(0,T)}^2 \|S\|_{L^2(\Delta(T))}^2 \right].
\end{aligned}$$

Таким образом, мы получим

$$\left\| \left[ \mathcal{L}^{(1)'}(\vec{V}) \right]_n \vec{S} \right\|_{L^2(\Delta(T))}^2 \leq \frac{T^4 n^4}{2} \|s_n\|_{L^2(\Delta(T))}^2 + 4T^3 \|\vec{S}\|_{L^2(T)}^2 \|\vec{V}\|_{L^2(T)}^2$$

и соответственно

$$\begin{aligned}
\left\| \mathcal{L}^{(1)'}(\vec{V}) \vec{S} \right\|_{L^2(\Delta(T))}^2 &= \sum_{|n| \leq N} \left\| \left[ \mathcal{L}^{(1)'}(\vec{V}) \right]_n \vec{S} \right\|_{L^2(\Delta(T))}^2 \leq \\
&\leq T^3 \left( \frac{TN^4}{2} + 4(2N+1) \|\vec{V}\|_{L^2(T)}^2 \right) \|\vec{S}\|_{L^2(T)}^2. \tag{2.43}
\end{aligned}$$

Похожим образом можно получить следующие оценки:

$$\begin{aligned} \left\| \left[ \mathcal{L}^{(2)'}(\vec{V}) \right]_n \vec{S} \right\|_{L^2(\Delta(T))}^2 &\leq \frac{T^3 n^4}{2} \|s_n\|_{L^2(\Delta(T))}^2 + 4T^2 \left\| \vec{S} \right\|_{L^2(T)}^2 \left\| \vec{V} \right\|_{L^2(T)}^2. \\ \left\| \mathcal{L}^{(2)'}(\vec{V}) \vec{S} \right\|_{L^2(0,T)}^2 &\leq T^2 \left( \frac{TN^4}{2} + 4(2N+1) \left\| \vec{V} \right\|_{L^2(T)}^2 \right) \left\| \vec{S} \right\|_{L^2(T)}^2. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Из объединения (2.43) и (2.44) следует утверждение (2.42).

**Лемма 2.6.** Для всех  $\vec{V} \in L^2(T)$  сопряженный оператор  $\left[ \mathcal{A}'(\vec{V}) \right]^* : L^2(T) \rightarrow L^2(T)$  к оператору  $\mathcal{A}'(\vec{V}) : L^2(T) \rightarrow L^2(T)$ . Сопряженный оператор определяется следующими соотношениями

$$\left[ \mathcal{A}'(\vec{V}) \right]^* = E + \left[ \mathcal{L}'(\vec{V}) \right]^*. \quad (2.45)$$

Здесь  $E$  является тождественным оператором и для  $\vec{Q} \in L^2(T)$

$$\begin{aligned} \left[ \mathcal{L}^{(1)'}(\vec{V}) \right]_n^* \vec{Q} &= \frac{1}{2} \int_x^T \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[ n^2 q_n(\xi, \tau) - \sum_{|k| \leq N} \bar{v}_k(x) q_{n+k}(\xi, \tau) \right] d\tau d\xi + \\ &+ \frac{n^2}{2} \int_{x+|t|}^T \bar{q}_n(\xi) d\xi - \frac{1}{2} \sum_{|k| \leq N} \bar{v}_k(x) \int_{x+|t|}^T \bar{q}_{n+k}(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \left[ \mathcal{L}^{(2)'}(\vec{V}_N) \right]_n^* \vec{Q} &= -\frac{1}{2} \sum_{|k| \leq N} \int_x^T \int_{\xi-T}^{T-\xi} \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} v_{k-n}(x, \tau) q_k(\xi, t) d\tau dt d\xi - \\ &-\frac{1}{2} \sum_{|k| \leq N} \int_0^x \int_{x-\xi}^{\xi-x} v_{k-n}(x, \tau) \bar{q}_k(\xi) d\tau d\xi, \end{aligned} \quad (2.47)$$

где  $\tau_1 = \max\{\xi - T, t - \xi + x\}$  и  $\tau_2 = \min\{T - \xi, t + \xi - x\}$ .

**Доказательство.**

Из (2.39) следует, что

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}'(\vec{V}) \vec{S}, \vec{Q} \rangle_{L^2(T)} &= \langle \vec{S} + \mathcal{L}'(\vec{V}) \vec{S}, \vec{Q} \rangle_{L^2(T)} \\ &= \langle \vec{S}, \vec{Q} \rangle_{L^2(T)} + \langle \mathcal{L}'(\vec{V}) \vec{S}, \vec{Q} \rangle_{L^2(T)} \\ &= \langle \vec{S}, \vec{Q} \rangle_{L^2(T)} + \langle \left[ \mathcal{L}'(\vec{V}) \right]^* \vec{Q}, \vec{S} \rangle_{L^2(T)} \\ &= \langle \left[ \mathcal{A}'(\vec{V}) \right]^* \vec{Q}, \vec{S} \rangle_{L^2(T)}. \end{aligned}$$

Откуда получаем (2.45).

Сейчас докажем (2.46) и (2.47). Чтобы найти сопряженный оператор  $\mathcal{L}'$  применим

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{L}'(\vec{V})\vec{S}, \vec{Q} \rangle_{L^2(T)} = \\ & = \langle \mathcal{L}^{(1)'}(\vec{V})\vec{S}, Q \rangle_{L^2(\Delta(T))} + \langle \mathcal{L}^{(2)'}(\vec{V})\vec{S}, \bar{Q} \rangle_{L^2(0,T)} \\ & = \langle [\mathcal{L}^{(1)'}(\vec{V})]^* \vec{Q}, S \rangle_{L^2(\Delta(T))} + \langle [\mathcal{L}^{(2)'}(\vec{V})]^* \vec{Q}, \bar{S} \rangle_{L^2(0,T)} . \end{aligned}$$

Достаточно найти сопряженные операторы к операторам  $\mathcal{L}^{(1)'}$  и  $\mathcal{L}^{(2)'}$ . Таким образом

$$\langle \mathcal{L}^{(1)'}(\vec{V})\vec{S}, Q \rangle_{L^2(\Delta(T))} = \sum_{|n| \leq N} \langle [\mathcal{L}^{(1)'}(\vec{V})]_n \vec{S}, q_n \rangle_{L^2(\Delta(T))}$$

достаточно найти сопряженные операторы к каждой из компонент.

Для  $n$ -ой компоненты имеем

$$\begin{aligned} & \langle [\mathcal{L}^{(1)'}(\vec{V})]_n \vec{S}, q_n \rangle_{L^2(\Delta(T))} = \\ & = \langle B_{x,t} \left[ n^2 s_n - \sum_{|n| \leq N} (\bar{s}_k v_{n-k} + \bar{v}_k s_{n-k}) \right], q_n \rangle_{L^2(\Delta(T))} = \\ & = \langle B_{x,t}[n^2 s_n], q_n \rangle_{L^2(\Delta(T))} - \sum_{|n| \leq N} \langle B_{x,t}[\bar{s}_k v_{n-k}], q_n \rangle_{L^2(\Delta(T))} - \\ & \quad - \sum_{|n| \leq N} \langle B_{x,t}[\bar{v}_k s_{n-k}], q_n \rangle_{L^2(\Delta(T))} . \end{aligned} \tag{2.48}$$

Пусть  $t_1 = \max\{x - T, \tau - x + \xi\}$ ,  $t_2 = \min\{T - x, \tau + x - \xi\}$ , и  $\tau_1 = \max\{\xi - T, t - \xi + x\}$ ,  $\tau_2 = \min\{T - \xi, t + \xi - x\}$ , тогда

$$\begin{aligned} \langle B_{x,t}[n^2 s_n], q_n \rangle_{L^2(\Delta(T))} & = \frac{n^2}{2} \iint_{\Delta(T)} \iint_{\Delta(x,t)} s_n(\xi, \tau) q_n(x, t) d\tau d\xi dt dx = \\ & = \frac{n^2}{2} \int_0^T \int_{x-T}^{T-x} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} s_n(\xi, \tau) q_n(x, t) d\tau d\xi dt dx = \\ & = \frac{n^2}{2} \int_0^T \int_0^x \int_{x-T}^{T-x} \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} s_n(\xi, \tau) q_n(x, t) d\tau dt d\xi dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n^2}{2} \int_0^T \int_{\xi}^T \int_{x-T}^{T-x} \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} s_n(\xi, \tau) q_n(x, t) d\tau dt dx d\xi = \\
&= \frac{n^2}{2} \int_0^T \int_{\xi}^T \int_{\xi-T}^{T-\xi} \int_{t_1}^{t_2} s_n(\xi, \tau) q_n(x, t) dt d\tau dx d\xi = \\
&= \frac{n^2}{2} \int_0^T \int_{\xi-T}^{T-\xi} \int_{\xi}^T \int_{t_1}^{t_2} s_n(\xi, \tau) q_n(x, t) dt dx d\tau d\xi = \\
&= \langle s_n, \frac{n^2}{2} \int_x^T \int_{\tau_1}^{\tau_2} q_n(\xi, \tau) d\tau d\xi \rangle_{L^2(\Delta(T))}. \tag{2.49}
\end{aligned}$$

Более того,

$$\begin{aligned}
\langle B_{x,t}[\bar{s}_k v_{n-k}], q_n \rangle_{L^2(\Delta(T))} &= \iint_{\Delta(T)} \iint_{\Delta(x,t)} \bar{s}_k(\xi) v_{n-k}(\xi, \tau) q_n(x, t) d\tau d\xi dt dx = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{x-T}^{T-x} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} \bar{s}_k(\xi) v_{n-k}(\xi, \tau) q_n(x, t) d\tau d\xi dt dx = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T \bar{s}_k(x) \left[ \int_x^T \int_{\xi-T}^{T-\xi} \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} v_{n-k}(x, \tau) q_n(\xi, t) d\tau dt d\xi \right] dx = \\
&= \langle \bar{s}_k, \frac{1}{2} \int_x^T \int_{\xi-T}^{T-\xi} \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} v_{n-k}(x, \tau) q_n(\xi, t) d\tau dt d\xi \rangle_{L^2(0,T)}. \tag{2.50}
\end{aligned}$$

Подставляя (2.49) и (2.50) в (2.48), получим

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{L}^{(1)'(\vec{V})} \vec{S}, Q \rangle_{L^2(\Delta(T))} &= \sum_{|n| \leq N} \langle [\mathcal{L}^{(1)'(\vec{V})}]_n \vec{S}, q_n \rangle_{L^2(\Delta(T))} = \\
&= \sum_{|n| \leq N} \langle B_{x,t}[n^2 s_n], q_n \rangle_{L^2(\Delta(T))} - \\
&- \sum_{|n| \leq N} \sum_{|k| \leq N} \langle B_{x,t}[\bar{s}_k v_{n-k}], q_n \rangle_{L^2(\Delta(T))} - \\
&- \sum_{|n| \leq N} \sum_{|n| \leq N} \langle B_{x,t}[\bar{v}_k s_{n-k}], q_n \rangle_{L^2(\Delta(T))} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{|n| \leq N} \left\langle s_n, \frac{n^2}{2} \int_x^T \int_{\tau_1}^{\tau_2} q_n(\xi, \tau) d\tau d\xi \right\rangle_{L^2(\Delta(T))} - \\
&- \sum_{|n| \leq N} \sum_{|k| \leq N} \left\langle \bar{s}_n, \frac{1}{2} \int_x^T \int_{\xi-T}^{T-\xi} \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} v_{k-n}(x, \tau) q_k(\xi, t) d\tau dt d\xi \right\rangle_{L^2(0,T)} - \\
&- \sum_{|n| \leq N} \sum_{|k| \leq N} \left\langle s_n, \frac{1}{2} \bar{v}_k(x) \int_x^T \int_{\tau_1}^{\tau_2} q_{n+k}(\xi, \tau) d\tau d\xi \right\rangle_{L^2(\Delta(T))}.
\end{aligned}$$

Аналогичным образом, как и выше, найдем

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathcal{L}^{(2)'}(\vec{V}) \vec{S}, \vec{Q} \right\rangle_{L^2(0,T)} &= \sum_{|n| \leq N} \left\langle \left[ \mathcal{L}^{(2)'}(\vec{V}) \right]_n \vec{S}, \vec{q}_n \right\rangle_{L^2(0,T)}. \\
&= \left\langle \left[ \mathcal{L}^{(2)'}(\vec{V}) \right]_n \vec{S}, \vec{q}_n \right\rangle_{L^2(0,T)} = \\
&= \left\langle B_{x,0} \left[ n^2 s_n - \sum_{|k| \leq N} (\bar{s}_k v_{n-k} + \bar{v}_k s_{n-k}) \right], \vec{q}_n \right\rangle_{L^2(0,T)} = \\
&= \left\langle B_{x,0} [n^2 s_n], \vec{q}_n \right\rangle_{L^2(0,T)} - \sum_{|k| \leq N} \left\langle B_{x,0} [\bar{s}_k v_{n-k}], \vec{q}_n \right\rangle_{L^2(0,T)} - \\
&- \sum_{|k| \leq N} \left\langle B_{x,0} [\bar{v}_k s_{n-k}], \vec{q}_n \right\rangle_{L^2(0,T)}. \tag{2.51}
\end{aligned}$$

Представим все слагаемые в виде суммы ряда, получим

$$\begin{aligned}
\left\langle B_{x,0} [n^2 s_n], \vec{q}_n \right\rangle_{L^2(0,T)} &= \frac{n^2}{2} \int_0^T \int_0^x \int_{\xi-x}^{x-\xi} s_n(\xi, \tau) \vec{q}_n(x) d\tau d\xi dx = \\
&= \frac{n^2}{2} \int_0^T \int_{\xi}^T \int_{\xi-x}^{x-\xi} s_n(\xi, \tau) \vec{q}_n(x) d\tau dx d\xi = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\xi-T}^{T-\xi} \int_{\xi+|\tau|}^T s_n(\xi, \tau) \vec{q}_n(x) dx d\tau d\xi = \\
&= \left\langle s_n, \frac{n^2}{2} \int_{x+|t|}^T \vec{q}_n(\xi) d\xi \right\rangle_{L^2(\Delta(T))}. \\
\left\langle B_{x,0} [\bar{s}_k v_{n-k}], \vec{q}_n \right\rangle_{L^2(0,T)} &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^x \int_{\xi-x}^{x-\xi} \bar{s}_k(\xi) v_{n-k}(\xi, \tau), \vec{q}_n(x) d\tau d\xi dx =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = \langle \bar{s}_k, \int_x^T \int_{x-\xi}^{\xi-x} v_{n-k}(x, \tau) \bar{q}_n(\xi) d\tau d\xi \rangle_{L^2(0,T)} \cdot \\
& \langle B_{x,0}[\bar{v}_k s_{n-k}], \bar{q}_n \rangle_{L^2(0,T)} = \langle s_{n-k}, \bar{v}_k(x) \int_{x+|t|}^T \bar{q}_n(\xi) d\xi \rangle_{L^2(\Delta(T))}. \quad (2.52)
\end{aligned}$$

Подставляя (2.52) в (2.50), получим

$$\begin{aligned}
& \langle \mathcal{L}^{(2)'}(\vec{V}) \vec{S}, \bar{q}_n \rangle_{L^2(0,T)} = \sum_{|n| \leq N} \langle [\mathcal{L}^{(2)'}(\vec{V})]_n \vec{S}, \bar{q}_n \rangle_{L^2(0,T)} = \\
& = \sum_{|n| \leq N} \langle B_{x,0}[n^2 s_n], \bar{q}_n \rangle_{L^2(0,T)} - \sum_{|n| \leq N} \sum_{|k| \leq N} \langle B_{x,0}[\bar{s}_k v_{n-k}], \bar{q}_n \rangle_{L^2(0,T)} - \\
& \quad - \sum_{|n| \leq N} \sum_{|k| \leq N} \langle B_{x,0}[\bar{v}_k s_{n-k}], \bar{q}_n \rangle_{L^2(0,T)} = \\
& = \sum_{|n| \leq N} \langle s_n, \frac{n^2}{2} \int_{x+|t|}^T \bar{q}_n(\xi) d\xi \rangle_{L^2(\Delta(T))} - \\
& \quad - \sum_{|n| \leq N} \sum_{|k| \leq N} \langle \bar{s}_n, \frac{1}{2} \int_0^x \int_{x-\xi}^{\xi-x} v_{k-n}(x, \tau) \bar{q}_n(\xi) d\tau d\xi \rangle_{L^2(0,T)} - \\
& \quad - \sum_{|n| \leq N} \sum_{|k| \leq N} \langle s_n, \frac{1}{2} \bar{v}_k(x) \int_{x+|t|}^T \lambda_{n+k}(\xi) d\xi \rangle_{L^2(\Delta(T))}.
\end{aligned}$$

Таким образом

$$\begin{aligned}
& \langle \mathcal{L}'(\vec{V}) \vec{S}, \vec{Q} \rangle_{L^2(T)} = \\
& = \langle \mathcal{L}^{(1)'}(\vec{V}) \vec{S}, Q \rangle_{L^2(\Delta(T))} + \langle \mathcal{L}^{(2)'}(\vec{V}) \vec{S}, \bar{Q} \rangle_{L^2(0,T)} = \\
& = \sum_{|n| \leq N} \langle s_n, \frac{n^2}{2} \int_x^T \int_{\tau_1}^{\tau_2} q_n(\xi, \tau) d\tau d\xi \rangle_{L^2(\Delta(T))} - \\
& \quad - \sum_{|n| \leq N} \sum_{|k| \leq N} \langle \bar{s}_n, \frac{1}{2} \int_x^T \int_{\xi-T}^{T-\xi} \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} v_{k-n}(x, \tau) q_k(\xi, t) d\tau dt d\xi \rangle_{L^2(0,T)} - \\
& \quad - \sum_{|n| \leq N} \sum_{|k| \leq N} \langle s_n, \frac{1}{2} \bar{v}_k(x) \int_x^T \int_{\tau_1}^{\tau_2} q_{n+k}(\xi, \tau) d\tau d\xi \rangle_{L^2(\Delta(T))} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{|n| \leq N} \left\langle s_n, \frac{n^2}{2} \int_{x+|t|}^T \bar{q}_n(\xi) d\xi \right\rangle_{L^2(\Delta(T))} - \\
& - \sum_{|n| \leq N} \sum_{|k| \leq N} \left\langle \bar{s}_n, \frac{1}{2} \int_0^x \int_{x-\xi}^{\xi-x} v_{k-n}(x, \tau) \bar{q}_n(\xi) d\tau d\xi \right\rangle_{L^2(0,T)} - \\
& - \sum_{|n| \leq N} \sum_{|k| \leq N} \left\langle s_n, \frac{1}{2} \bar{v}_k(x) \int_{x+|t|}^T \bar{q}_{n+k}(\xi) d\xi \right\rangle_{L^2(\Delta(T))} = \\
& = \left\langle \left[ \mathcal{L}^{(1)'(\vec{V})} \right]^* \vec{Q}, S \right\rangle_{L^2(\Delta(T))} + \left\langle \left[ \mathcal{L}^{(2)'(\vec{V})} \right]^* \vec{Q}, \bar{S} \right\rangle_{L^2(0,T)}.
\end{aligned}$$

Тем самым (2.46) и (2.47) доказаны.

### Постановка задачи

Рассмотрим двумерную коэффициентную обратную задачу для уравнения акустики и рассмотрим проекционный метод ее решения: найти  $2\pi$  периодическую функцию  $\rho(x, y)$  из соотношений

$$u_{tt} = \Delta u - \nabla \ln \rho(x, y) \nabla u, \quad t > 0, \quad x > 0, \quad y \in (-\pi, \pi); \quad (2.53)$$

$$u|_{t < 0} \equiv 0, \quad (2.54)$$

$$u|_{y=\pi} = u|_{y=-\pi}, \quad (2.55)$$

$$u_x|_{x=0} = h(y)\delta(t), \quad (2.56)$$

$$u|_{x=+0} = f(y, t). \quad (2.57)$$

Решение прямой задачи (2.53)–(2.56) имеет вид [29, 85]:

$$u(x, y, t) = s(x, y)\theta(t - x) + \tilde{u}(x, y, t),$$

где  $\tilde{u}(x, y, t)$  — непрерывная функция при  $x > 0$  и достаточно гладкая при  $t > x > 0$ . Тогда можно перейти от обратной задачи (2.53)–(2.57) к решению

$$u_{tt} = \Delta u - \nabla a \nabla u, \quad (x, t) \in \Delta(T), \quad y \in (-\pi, \pi); \quad (2.58)$$

$$u|_{t=x+0} = s(x, y); \quad (2.59)$$

$$u_x|_{x=+0} = 0; \quad (2.60)$$

$$u|_{y=\pi} = u|_{y=-\pi}; \quad (2.61)$$

$$u|_{x=+0} = f(y, t). \quad (2.62)$$

Здесь

$$a(x, y) = \ln \rho(x, y), \quad s(x, y) = -h(y) \sqrt{\frac{\rho(x, y)}{\rho(0, y)}},$$

функция  $s(x, y)$  является решением следующего интегро-дифференциального уравнения

$$s(x, y) = h(y) + \frac{1}{2} \int_0^x s(\xi, y) \frac{\partial a}{\partial x}(\xi, y) d\xi. \quad (2.63)$$

Применяя формулу Даламбера для задачи Коши (2.58), (2.60), (2.62), получим

$$u(x, y, t) = F(x, y, t) + \frac{1}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} P(\xi, y, \tau) d\tau d\xi, \quad t > x > 0, \quad (2.64)$$

где

$$\begin{cases} F(x, y, t) = \frac{1}{2} [f(y, t+x) + f(y, t-x)], \\ P(x, y, t) = -u_{yy} + \nabla a \cdot \nabla u. \end{cases}$$

Продифференцируем (2.64) по переменной  $x$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y, t) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, t) + \frac{1}{2} \int_0^x [P(\xi, y, t+x-\xi) + P(\xi, y, t-x+\xi)] d\xi \quad (2.65)$$

Предположим,  $h(y) \neq 0$ ,  $y \in (-\pi, \pi)$ . Обозначим

$$g(y) = \frac{1}{h(y)}, \quad w(x, y) = \frac{1}{s(x, y)}.$$

Тогда функция  $w(x, y)$  удовлетворяет уравнению

$$w(x, y) = g(y) - \int_0^x w(\xi, y) \frac{\partial a}{\partial \xi}(\xi, y) d\xi. \quad (2.66)$$

Для получения еще одного уравнения сначала перейдем к пределу при  $t \rightarrow x+0$  в соотношении (2.64) и воспользуемся условием (2.59), тогда

$$s(x, y) = F(x, y, x) + \frac{1}{2} \int_0^x \int_{\xi}^{2x-\xi} P(\xi, y, \tau) d\tau d\xi. \quad (2.67)$$

Дифференцируем (2.67) по  $x$ :

$$\frac{\partial s}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial F(x, y, x)}{\partial x} + \int_0^x P(\xi, y, 2x-\xi) d\xi.$$



Тогда функция

$$b(x, y) = \frac{\partial a}{\partial x}(x, y)$$

является решением уравнения

$$\frac{1}{2}b(x, y)s(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, x) + \int_0^x P(\xi, y, 2x - \xi) d\xi. \quad (2.68)$$

Перемножая равенства (2.66) и (2.68) почленно и используя обозначения

$$f_1(x, y, t) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, t), \quad f_2(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, x),$$

получаем уравнение

$$b(x, y) = -g(y)f_2(x, y) + f_2(x, y) \int_0^x w(\xi, y)b(\xi, y) d\xi \quad (2.69)$$

$$-g(y) \int_0^x P(\xi, y, 2x - \xi) d\xi + \int_0^x w(\xi, y)b(\xi, y) d\xi \int_0^x P(\xi, y, 2x - \xi) d\xi.$$

Дополним систему интегро-дифференциальных уравнений (2.63), (2.64), (2.65), (2.66) и (2.69). Таким образом, мы получим систему из шести интегро-дифференциальных уравнений:

$$a(x, y) = a(0, y) + \int_0^x b(\xi, y) d\xi; \quad (2.70)$$

$$s(x, y) = h(y) + \frac{1}{2} \int_0^x s(\xi, y)b(\xi, y) d\xi; \quad (2.71)$$

$$u(x, y, t) = F(x, y, t) + \frac{1}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} P(\xi, y, \tau) d\tau d\xi; \quad (2.72)$$

$$u_x(x, y, t) = f_1(x, y, t) + \frac{1}{2} \int_0^x [P(\xi, y, t+x-\xi) + P(\xi, y, t-x+\xi)] d\xi; \quad (2.73)$$

$$w(x, y) = g(y) - \int_0^x w(\xi, y)b(\xi, y) d\xi; \quad (2.74)$$

$$\begin{aligned}
b(x, y) = & -g(y)f_2(x, y) + f_2(x, y) \int_0^x w(\xi, y)b(\xi, y) d\xi - \\
& -g(y) \int_0^x P(\xi, y, 2x - \xi) d\xi \\
& + \int_0^x w(\xi, y)b(\xi, y) d\xi \int_0^x P(\xi, y, 2x - \xi) d\xi,
\end{aligned} \tag{2.75}$$

где  $(x, t) \in \Delta(T)$ ,  $y \in (-\pi, \pi)$  и

$$P(x, y, t) = -u_{yy}(x, y, t) + 2b(x, y)u_x(x, y, t) + 2a_y(x, y)u_y(x, y, t).$$

Чтобы окончательно свести обратную задачу к системе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (2.70)–(2.75), необходимо добавить периодические граничные условия по переменной  $y$  для искомого функций.

Обратная задача состоит в определении неизвестной вектор-функцию  $U$  с компонентами

$$U = \left( a(x, y), s(x, y), u(x, y, t), u_x(x, y, t), w(x, y), b(x, y) \right),$$

зная функции  $a(0, y)$ ,  $h(y)$ ,  $F(x, y, t)$ ,  $f_1(x, y, t)$ ,  $g(y)$  и  $f_2(x, y)$ .

### Проекционный метод

Для исследования системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (2.70)–(2.75) с периодическими граничными условиями по переменной  $y$ , мы применим метод, основанный на проекции искомого функций подпространство, образуемое базисной системой функций  $\{e^{iky}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ . Перейдем к следующей системе уравнений на коэффициенты Фурье:

$$a^{(n)}(x) = a_0^{(n)} + \int_0^x b^{(n)}(\xi) d\xi; \tag{2.76}$$

$$s^{(n)}(x) = h^{(n)} + \int_0^x \sum_k s^{(k)}(\xi) b^{(n-k)}(\xi) d\xi; \tag{2.77}$$

$$u^{(n)}(x, t) = F^{(n)}(x, t) + \frac{1}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} P^{(n)}(\xi, \tau) d\tau d\xi; \tag{2.78}$$

$$u_x^{(n)}(x, t) = f_1^{(n)}(x, t) + \frac{1}{2} \int_0^x [P^{(n)}(\xi, t + x - \xi) + P^{(n)}(\xi, t - x + \xi)] d\xi; \quad (2.79)$$

$$w^{(n)}(x) = g^{(n)} - \int_0^x \sum_k w^{(k)}(\xi) b^{(n-k)}(\xi) d\xi; \quad (2.80)$$

$$\begin{aligned} b^{(n)}(x) = & - \sum_k g^{(k)} f_2^{(n-k)}(x) + \sum_{k,m} f_2^{(k)}(x) \int_0^x w^{(m)}(\xi) b^{(n-(k+m))}(\xi) d\xi - \\ & - \sum_k g^{(k)} \int_0^x P^{(n-k)}(\xi, 2x - \xi) d\xi + \\ & + \sum_{k,m} \int_0^x w^{(k)}(\xi) b^{(m)}(\xi) d\xi \int_0^x P^{(n-(k+m))}(\xi, 2x - \xi) d\xi, \end{aligned} \quad (2.81)$$

где  $(x, t) \in \Delta(T)$  и

$$\begin{aligned} P^{(n)}(x, t) = n^2 u^{(n)}(x, t) + 2 \sum_k b^{(k)}(x) u_x^{(n-k)}(x, t) + \\ + 2 \sum_k k(n-k) a^{(k)}(x) u^{(n-k)}(x, t); \end{aligned}$$

$$a(0, y) = - \sum_n a_0^{(n)} e^{iny}, \quad g(y) = - \sum_n g^{(n)} e^{iny}, \quad h(y) = - \sum_n h^{(n)} e^{iny}.$$

Требуется найти неизвестную вектор-функцию

$$\vec{U} = \left( U^{(-N)}, U^{(-N+1)}, \dots, U^{(0)}, \dots, U^{(N)} \right),$$

где

$$U^{(n)} = \left( a^{(n)}(x), s^{(n)}(x), u^{(n)}(x, t), u_x^{(n)}(x, t), w^{(n)}(x), b^{(n)}(x) \right).$$

Свойства решения обратной задачи исследуются с помощью проекционного метода. Для этого строится специального вида конечная система интегральных уравнений, решение которой покомпонентно сходится к решению обратной задачи (2.76)–(2.81). Полагаем  $U^{(n)} \equiv 0$  при  $|n| > N$  и получим систему для  $N$  приближения.

Предположим, что компоненты вектор-функции

$$D^{(n)} = \left( d_1^{(n)}(x), d_2^{(n)}(x), d_3^{(n)}(x, t), d_4^{(n)}(x, t), d_5^{(n)}(x), d_6^{(n)}(x) \right)$$

удовлетворяют системе уравнений

$$d_1^{(n)}(x) = a_0^{(n)} + \int_0^x d_6^{(n)}(\xi) d\xi; \quad (2.82)$$

$$d_2^{(n)}(x) = h^{(n)} + \sum_{k=-N}^N \int_0^x d_2^{(k)}(\xi) d_6^{(n-k)}(\xi) d\xi; \quad (2.83)$$

$$d_3^{(n)}(x, t) = F^{(n)}(x, t) + \frac{1}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} Q^{(n)}(\xi, \tau) d\tau d\xi; \quad (2.84)$$

$$d_4^{(n)}(x, t) = f_1^{(n)}(x, t) + \frac{1}{2} \int_0^x \left[ Q^{(n)}(\xi, t+x-\xi) + Q^{(n)}(\xi, t-x+\xi) \right] d\xi; \quad (2.85)$$

$$d_5^{(n)}(x) = g^{(n)} - \sum_{k=-N}^N \int_0^x d_5^{(k)}(\xi) d_6^{(n-k)}(\xi) d\xi; \quad (2.86)$$

$$\begin{aligned} d_6^{(n)}(x) = & - \sum_{k=-N}^N g^{(k)} f_2^{(n-k)}(x) + \sum_{k,m=-N}^N f_2^{(k)}(x) \int_0^x d_5^{(m)}(\xi) d_6^{(n-(k+m))}(\xi) d\xi \\ & - \sum_{k=-N}^N g^{(k)} \int_0^x Q^{(n-k)}(\xi, 2x-\xi) d\xi \\ & + \sum_{k,m=-N}^N \int_0^x d_5^{(k)}(\xi) d_6^{(m)}(\xi) d\xi \int_0^x Q^{(n-(k+m))}(\xi, x-\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (2.87)$$

где  $(x, t) \in \Delta(T)$ ,  $n = -\overline{N}, \overline{N}$  и

$$\begin{aligned} Q^{(n)}(x, t) = & n^2 d_3^{(n)}(x, t) + 2 \sum_{k=-N}^N d_6^{(k)}(x) d_4^{(n-k)}(x, t) + \\ & + 2 \sum_{k=-N}^N k(n-k) d_1^{(k)}(x) d_4^{(n-k)}(x, t). \end{aligned}$$

Таким образом мы получили систему интегральных уравнений, состоящую из  $6 \times (2N + 1)$  уравнений.

## 2.2.4 Сходимость градиентного метода

Обратную задачу можно рассматривать как задачу решения нелинейного операторного уравнения

$$\mathcal{A}(\vec{V}) := \vec{V} + \mathcal{L}(\vec{V}) = \vec{H}, \quad (2.88)$$

где оператор  $\mathcal{A}$  сопоставляет параметрам  $\vec{V}$  дополнительную информацию о решении прямой задачи

Изучение области определения, области значений и свойств оператора  $\mathcal{A}$  для каждой конкретной постановки обратной задачи представляет собой самостоятельный интерес [195, 196].

Требуется найти  $\vec{V}$  — решение обратной задачи, а именно решить уравнение (2.88) и найти

$$\vec{V} = \mathcal{A}^{-1}(\vec{H}).$$

Другой подход к решению обратных задач основан на применении методов теории оптимального управления. Требуется определить управление  $\vec{V}$ , доставляющее минимум функционалу

$$J(\vec{V}) = \left\| \mathcal{A}(\vec{V}) - \vec{H} \right\|^2.$$

Для приближенного решения задачи минимизации

$$J(\vec{V}) \rightarrow \inf$$

можно применять методы, использующие градиент функционала  $J(\vec{V})$ : метод наискорейшего спуска, методы проекции градиента, методы условного градиента, метод сопряженных градиентов и т.д.

Градиентные методы заключаются в построении последовательности  $\{\vec{V}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  по правилу

$$\vec{V}_{n+1} = \vec{V}_n - \alpha_n J'(\vec{V}_n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.89)$$

где  $\vec{V}_0$  — некоторое заданное начальное приближение,  $\alpha_n$  — положительный параметр (параметр спуска), а  $J'(\vec{V}_n)$  — градиент функционала. Существуют различные способы выбора величины  $\alpha_n$  в методе (2.89) [87, 141, 171, 188, 197].

Приведем некоторые теоретические результаты, которые были получены ранее [85].

Для нелинейного уравнения (2.88) относительно  $\vec{V}$  из  $L^2(T)$  применим метод простой итерации ( $\alpha_n \equiv \text{const} = \alpha$ ):

$$\vec{V}_{n+1} = \vec{V}_n - \alpha J'(\vec{V}_n) \quad (2.90)$$

минимизации целевого функционала  $J(\vec{V})$ .

Заметим, что метод простой итерации (2.90) можно переписать в виде итераций Ландвебера [63, 198, 199]:

$$\vec{V}_{n+1} = \vec{V}_n - \alpha \left[ \mathcal{A}'(\vec{V}_n) \right]^* \left( \mathcal{A}(\vec{V}_n) - \vec{H} \right), \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.91)$$

в силу следующей леммы [141]:

**Лемма 2.7.** *Если оператор  $\mathcal{A}$  дифференцируем по Фреше, то функционал  $J(\vec{V})$  также дифференцируем и его градиент  $J'(\vec{V})$  выражается через оператор  $\mathcal{A}'$  по формуле*

$$J'(\vec{V}) = 2(\mathcal{A}'(\vec{V}))^*(\mathcal{A}(\vec{V}) - \vec{H}).$$

Итерации Ландвебера для решения одномерной обратной задачи были рассмотрены в [200]. Для одномерной обратной задачи акустики исследование сходимости итераций Ландвебера проведено в работе [78].

Из [63, 86, 198, 199] известно, что метод локально сходится в окрестности

$$\mathbf{B}_\delta(\vec{V}^{(0)}) := \left\{ \vec{V} \in L^2(T) : \left\| \vec{V} - \vec{V}^{(0)} \right\|_{L^2(T)} \leq \delta \right\}$$

точного решения  $\vec{V}^\dagger$  of (2.88), если выполняются следующие условия:

1. Производная Фреше оператора  $\mathcal{A}$  равномерно ограничена в шаре  $\mathbf{B}_\delta(\vec{V}^{(0)})$ , а именно выполняется для всех  $\vec{V} \in \mathbf{B}_\delta(\vec{V}^{(0)})$

$$\|\mathcal{A}'(\vec{V})\| \leq \mu < 1.$$

2. Для  $\vec{X}, \vec{Y} \in \mathbf{B}_\delta(\vec{V}^{(0)})$

$$\left\| \mathcal{A}(\vec{X}) - \mathcal{A}(\vec{Y}) - \mathcal{A}'(\vec{Y})(\vec{X} - \vec{Y}) \right\|_{L^2(T)} \leq \eta \left\| \mathcal{A}(\vec{X}) - \mathcal{A}(\vec{Y}) \right\|_{L^2(T)}$$

с постоянной  $0 < \eta < 1/2$ .

Для исследования сходимости итерационного метода проверим выполнение условий на операторы  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{L}$ .

Для доказательства сходимости введем весовые  $L^2$ -нормы:

$$\|v_n\|_{L^2(\Delta(T'),m)}^2 = \iint_{\Delta(T')} v_n^2(x,t) e^{-2mx} dt dx;$$

$$\|\bar{v}_n\|_{L^2(0,T'),m}^2 = \int_0^{T'} \bar{v}_n^2(x) e^{-2mx} dx.$$

Очевидно что

$$e^{-mT'} \|\cdot\|_{L^2,m} \leq \|\cdot\|_{L^2} \leq e^{mT'} \|\cdot\|_{L^2,m}. \quad (2.92)$$

Нормы для вектор-функций вводятся аналогично.

**Лемма 2.8.** Для  $\vec{V} \in \mathbf{B}_\delta(\vec{V}^{(0)})$  имеем

$$\|\mathcal{L}'(\vec{V})\|_m \leq \frac{M_3}{\sqrt{m}}, \quad (2.93)$$

где

$$M_3 = \sqrt{T' \left[ \frac{N^4 T'}{2} (1 + T') + 2(2N + 1)(2T' + 1) \left( \|\vec{V}^{(0)}\|_{L^2(T')} + \delta \right)^2 \right]}. \quad (2.94)$$

Доказательство.

Чтобы оценить  $\|\mathcal{L}'(\vec{V})\|$ , оценим каждую компоненту по-отдельности  $\left( [\mathcal{L}^{(1)'(\vec{V})}]_n \vec{S} \right)^2(x, t)$ :

$$\begin{aligned} \left( [\mathcal{L}^{(1)'(\vec{V})}]_n \vec{S} \right)^2(x, t) &= \left( B_{x,t} \left[ n^2 s_n - \sum_{|k| \leq N} (\bar{s}_k v_{n-k} + \bar{v}_k s_{n-k}) \right] \right)^2 \leq \\ &\leq \frac{n^4}{2} \left[ \iint_{\Delta(x,t)} s_n(\xi, \tau) d\tau d\xi \right]^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \iint_{\Delta(x,t)} \sum_{|k| \leq N} (\bar{s}_k(\xi) v_{n-k}(\xi, \tau) + \bar{v}_k(\xi) s_{n-k}(\xi, \tau)) d\tau d\xi \right]^2 \leq \\ &\leq \frac{T'^2 n^4}{2} \int_0^x \int_{\xi-T'}^{T'-\xi} s_n^2(\xi, \tau) d\tau d\xi + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \sum_{|k| \leq N} \iint_{\Delta(x,t)} \bar{s}_k(\xi) v_{n-k}(\xi, \tau) d\tau d\xi \right]^2 + \\
& + \left[ \sum_{|k| \leq N} \iint_{\Delta(x,t)} \bar{v}_k(\xi) s_{n-k}(\xi, \tau) d\tau d\xi \right]^2 \leq \\
& \leq \frac{T'^2 n^4}{2} \int_0^x \int_{\xi-T'}^{T'-\xi} s_n^2(\xi, \tau) d\tau d\xi + \\
& + \sum_{|k| \leq N} \int_0^x \int_{\xi-T'}^{T'-\xi} \bar{s}_k^2(\xi) d\tau d\xi \sum_{|k| \leq N} \int_0^x \int_{\xi-T'}^{T'-\xi} v_{n-k}(\xi, \tau) d\tau d\xi + \\
& + \sum_{|k| \leq N} \int_0^x \int_{\xi-T'}^{T'-\xi} s_k^2(\xi) d\tau d\xi \sum_{|k| \leq N} \int_0^x \int_{\xi-T'}^{T'-\xi} s_{n-k}^2(\xi, \tau) d\tau d\xi \leq \\
& \leq \frac{T'^2 n^4}{2} \int_0^x \int_{\xi-T'}^{T'-\xi} s_n^2(\xi, \tau) d\tau d\xi + \\
& + 2T' \|V\|_{L^2(\Delta(T'))}^2 \sum_{|k| \leq N} \int_0^x \bar{s}_k^2(\xi) d\xi + \\
& + 2T' \|\bar{V}\|_{L^2(0,T')}^2 \sum_{|k| \leq N} \int_0^x \int_{\xi-T'}^{T'-\xi} s_k^2(\xi, \tau) d\tau d\xi.
\end{aligned}$$

Откуда получаем, что

$$\begin{aligned}
& \int_{x-T'}^{T'-x} \left( \left[ \mathcal{L}^{(1)'}(\vec{V}) \right]_n \vec{S} \right)^2(x, t) dt \leq T'^3 n^4 \int_0^x \int_{\xi-T'}^{T'-\xi} s_n^2(\xi, \tau) d\tau d\xi + \\
& + 4T'^2 \|V\|_{L^2(\Delta(T'))}^2 \sum_{|k| \leq N} \int_0^x \bar{s}_k^2(\xi) d\xi \\
& + 4T'^2 \|\bar{V}\|_{L^2(0,T')}^2 \sum_{|k| \leq N} \int_0^x \int_{\xi-T'}^{T'-\xi} s_k^2(\xi, \tau) d\tau d\xi. \tag{2.95}
\end{aligned}$$

Оценим каждое слагаемое правой части в “весовых” нормах пространства  $L^2$ :



$$\begin{aligned}
& \int_0^{T'} e^{-2mx} \left[ \int_0^x \int_{\xi-T'}^{T'-\xi} s_n^2(\xi, \tau) d\tau d\xi \right] dx = \int_0^{T'} \int_{\xi}^{T'} \int_{\xi-T'}^{T'-\xi} s_n^2(\xi, \tau) e^{-2mx} d\tau dx d\xi = \\
& = \int_0^{T'} \int_{\xi-T'}^{T'-\xi} s_n^2(\xi, \tau) \left[ \int_{\xi}^{T'} e^{-2mx} dx \right] d\tau d\xi = \\
& = \int_0^{T'} \int_{\xi-T'}^{T'-\xi} s_n^2(\xi, \tau) \frac{e^{-2m\xi} - e^{-2mT'}}{2m} d\tau d\xi \leq \\
& \leq \int_0^{T'} \int_{\xi-T'}^{T'-\xi} s_n^2(\xi, \tau) \frac{e^{-2m\xi}}{2m} d\tau d\xi = \frac{1}{2m} \|s_n\|_{L^2(\Delta(T')),m}^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{T'} e^{-2mx} \left[ \int_0^x \bar{s}_n^2(\xi) d\xi \right] dx = \int_0^{T'} \int_{\xi}^{T'} \bar{s}_n^2(\xi) e^{-2mx} dx d\xi = \\
& = \int_0^{T'} \bar{s}_n^2(\xi) \frac{e^{-2m\xi} - e^{-2mT'}}{2m} d\xi \leq \frac{1}{2m} \|\bar{s}_n\|_{L^2(0,T'),m}^2.
\end{aligned}$$

Из оценки (2.95) следует, что

$$\begin{aligned}
& \left\| \left[ \mathcal{L}^{(1)'}(\vec{V}) \right]_n \vec{S} \right\|_{L^2(\Delta(T')),m}^2 = \\
& = \int_0^{T'} e^{-2mx} \left\{ \int_{x-T'}^{T'-x} \left( \left[ \mathcal{L}^{(1)'}(\vec{V}) \right]_n \vec{S} \right)^2(x, t) dt \right\} dx \leq \\
& \leq T'^3 n^4 \int_0^{T'} e^{-2mx} \left\{ \int_0^x \int_{\xi-T'}^{T'-\xi} s_n^2(\xi, \tau) d\tau d\xi \right\} dx + \\
& + 4T'^2 \|V\|_{L^2(\Delta(T'))}^2 \sum_{|k| \leq N} \int_0^{T'} e^{-2mx} \left\{ \int_0^x \bar{s}_k^2(\xi) d\xi \right\} dx + \\
& + 4T'^2 \|\bar{V}\|_{L^2(0,T')}^2 \sum_{|k| \leq N} \int_0^{T'} e^{-2mx} \left\{ \int_0^x \int_{\xi-T'}^{T'-\xi} s_k^2(\xi, \tau) d\tau d\xi \right\} dx \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{T'^3 n^4}{2m} \|s_n\|_{L^2(\Delta(T'),m)}^2 + \frac{2T'^2}{m} \|V\|_{L^2(\Delta(T'))}^2 \|\bar{S}\|_{L^2(0,T'),m}^2 + \\ &\quad + \frac{2T'^2}{m} \|\bar{V}\|_{L^2(0,T')}^2 \|S\|_{L^2(\Delta(T'),m)}^2. \end{aligned}$$

Аналогичным образом рассматриваются компоненты оператора  $\mathcal{L}^{(2)'}$ , откуда получаем

$$\begin{aligned} &\left\| \left[ \mathcal{L}^{(2)'}(\vec{V}) \right]_n \vec{S} \right\|_{L^2(0,T'),m}^2 \leq \frac{T'^2 n^4}{2m} \|S\|_{L^2(\Delta(T'),m)}^2 + \\ &+ \frac{T'}{m} \|V\|_{L^2(\Delta(T'))}^2 \|\bar{S}\|_{L^2(0,T'),m}^2 + \frac{T'}{m} \|\bar{V}\|_{L^2(0,T')}^2 \|S\|_{L^2(\Delta(T'),m)}^2. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Объединяя (2.95) и (2.96), получим, что

$$\begin{aligned} &\left\| \mathcal{L}^{(1)'}(\vec{V}) \vec{S} \right\|_{L^2(\Delta(T'),m)}^2 = \sum_{|n| \leq N} \left\| \left[ \mathcal{L}^{(1)'}(\vec{V}) \right]_n \vec{S} \right\|_{L^2(\Delta(T'),m)}^2 \leq \\ &\leq \frac{T'^3 N^4}{2m} \|S\|_{L^2(\Delta(T'),m)}^2 + \frac{2T'^2}{m} (2N+1) \|V\|_{L^2(\Delta(T'))}^2 \|\bar{S}\|_{L^2(0,T'),m}^2 + \\ &\quad + \frac{2T'^2}{m} (2N+1) \|\bar{V}\|_{L^2(0,T')}^2 \|S\|_{L^2(\Delta(T'),m)}^2. \\ &\left\| \mathcal{L}^{(2)'}(\vec{V}) \vec{S} \right\|_{L^2(0,T'),m}^2 \leq \frac{T'^2 N^4}{2m} \|S\|_{L^2(\Delta(T'),m)}^2 + \\ &\quad + \frac{T'}{m} (2N+1) \|V\|_{L^2(\Delta(T'))}^2 \|\bar{S}\|_{L^2(0,T'),m}^2 + \\ &\quad + \frac{T'}{m} (2N+1) \|\bar{V}\|_{L^2(0,T')}^2 \|S\|_{L^2(\Delta(T'),m)}^2. \end{aligned}$$

Тем самым, мы показали, что

$$\begin{aligned} &\left\| \mathcal{L}'(\vec{V}) \vec{S} \right\|_{L^2(T'),m}^2 = \left\| \mathcal{L}^{(1)'}(\vec{V}) \vec{S} \right\|_{L^2(\Delta(T'),m)}^2 + \left\| \mathcal{L}^{(2)'}(\vec{V}) \vec{S} \right\|_{L^2(0,T'),m}^2 \leq \\ &\leq \frac{T'}{m} \left[ \frac{N^4 T'}{2} (1+T') + 2(2N+1)(2T'+1) \|\vec{V}\|_{L^2(T')}^2 \right] \|\vec{S}\|_{L^2(T'),m}^2. \end{aligned}$$

**Теорема 2.2.** Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Тогда метод простой итерации локально сходится к точному решению  $\vec{V}^\dagger$  и выполняется оценка

$$\left\| \vec{V}^{(k+1)} - \vec{V}^\dagger \right\|_{L^2(T')} \leq \beta^{k+1} \delta e^{\frac{\mu N T'}{2}}, \quad (2.97)$$

где  $\delta$  такое, что

$$\vec{V}^\dagger \in \mathbf{B}_\delta(\vec{V}^{(0)}). \quad (2.98)$$

Доказательство.

Перепишем (2.91) в более удобном для исследования виде:

$$\begin{aligned}
\vec{V}^{(k+1)} &= \vec{V}^{(k)} - [\mathcal{A}'(\vec{V}^{(k)})]^* (\mathcal{A}(\vec{V}^{(k)}) - \vec{H}) = \\
&= \vec{V}^{(k)} - \mathcal{A}(\vec{V}^{(k)}) + \vec{H} - [\mathcal{L}'(\vec{V}^{(k)})]^* (\mathcal{A}(\vec{V}^{(k)}) - \vec{H}) = \\
&= \vec{V}^\dagger + \mathcal{L}(\vec{V}^\dagger) - \mathcal{L}(\vec{V}^{(k)}) - [\mathcal{L}'(\vec{V}^{(k)})]^* (\vec{V}^{(k)} - \vec{V}^\dagger + \mathcal{L}(\vec{V}^{(k)}) - \mathcal{L}(\vec{V}^\dagger)) = \\
&= \vec{V}^\dagger + \mathcal{L}(\vec{V}^\dagger) - \mathcal{L}(\vec{V}^{(k)}) - [\mathcal{L}'(\vec{V}^{(k)})]^* (\vec{V}^{(k)} - \vec{V}^\dagger) - \\
&\quad - [\mathcal{L}'(\vec{V}^{(k)})]^* (\mathcal{L}(\vec{V}^{(k)}) - \mathcal{L}(\vec{V}^\dagger)).
\end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned}
&\left\| \vec{V}^{(k+1)} - \vec{V}^\dagger \right\|_{L^2(T'), m} \leq \left\| \mathcal{L}(\vec{V}^\dagger) - \mathcal{L}(\vec{V}^{(k)}) \right\|_{L^2(T'), m} + \\
&+ \left\| [\mathcal{L}'(\vec{V}^{(k)})]^* [\vec{V}^{(k)} - \vec{V}^\dagger] - [\mathcal{L}'(\vec{V}^{(k)})]^* [\mathcal{L}(\vec{V}^{(k)}) - \mathcal{L}(\vec{V}^\dagger)] \right\|_{L^2(T'), m} \leq \\
&\leq \left\| \mathcal{L}(\vec{V}^\dagger) - \mathcal{L}(\vec{V}^{(k)}) \right\|_{L^2(T'), m} + \left\| [\mathcal{L}'(\vec{V}^{(k)})]^* \right\|_m \left\| \vec{V}^{(k)} - \vec{V}^\dagger \right\|_{L^2(T'), m} + \\
&\quad + \left\| [\mathcal{L}'(\vec{V}^{(k)})]^* \right\|_m \left\| \mathcal{L}(\vec{V}^{(k)}) - \mathcal{L}(\vec{V}^\dagger) \right\|_{L^2(T'), m}.
\end{aligned}$$

Таким образом, используя (2.93) мы получим, что

$$\begin{aligned}
\left\| \vec{V}^{(k+1)} - \vec{V}^\dagger \right\|_{L^2(T'), m} &\leq \frac{M_3}{\sqrt{m}} \left( 2 + \frac{M_3}{\sqrt{m}} \right) \left\| \vec{V}^{(k)} - \vec{V}^\dagger \right\|_{L^2(T'), m} = \\
&= \beta \left\| \vec{V}^{(k)} - \vec{V}^\dagger \right\|_{L^2(T'), m} = \beta^{k+1} \left\| \vec{V}^{(0)} - \vec{V}^\dagger \right\|_{L^2(T'), m},
\end{aligned}$$

где  $\beta = \frac{M_3}{\sqrt{m}} \left( 2 + \frac{M_3}{\sqrt{m}} \right)$ .

$$\left\| \vec{V}^{(k+1)} - \vec{V}^\dagger \right\|_{L^2(T'), m} \leq \beta^{k+1} \delta.$$

Тем самым (2.97) доказано. Более того, если  $m$  достаточно большое, такое что

$$m > M_3^2 (3 + 2\sqrt{2}), \tag{2.99}$$

тогда  $\beta < 1$  и метод простой итерации сходится.

Если выберем  $m = \frac{\mu N}{2}$ , тогда условие (2.99) эквивалентно следующему

$$\mu > \frac{2}{N} M_3^2 (3 + 2\sqrt{2}).$$

Таким образом

$$\left\| \vec{V}^{(k+1)} - \vec{V}^\dagger \right\|_{L^2(T')} \leq \beta^{k+1} \delta e^{\frac{\mu N T'}{2}}.$$

**Замечание 2.2.** Предположения, при доказательстве теоремы 2.2 можно интерпретировать следующим образом:

1. При выполнении условий теоремы 2.1, существует  $T' < T$ , такое что (2.13) и (2.14) (где  $T$  заменено на  $T'$ ) имеет единственное решение  $V^\dagger$ .
2. Теорема 2.2 утверждает, что для фиксированного числа рассматриваемых гармоник Фурье  $N$ , имеем

$$\left\| \vec{V}_N^{(k+1)} - \vec{V}_N^\dagger \right\|_{L^2(T')} \rightarrow 0 .$$

В соответствии с теоремой 2.1  $\vec{V}_N^\dagger$  является  $N$ -приближением решения  $\vec{U}$  задачи (2.11), (2.12), если  $\vec{U} \in \mathcal{F}(\rho, T)$ . Таким образом, метод простой итерации дает приближенное решение  $\vec{U} \in \mathcal{F}(\rho, T)$ .

### 2.2.5 Сходимость модифицированного метода простой итерации

Мы применили метод простой итерации для решения уравнения (2.88):

$$\vec{V}_{n+1} = \vec{V}_n - \left[ \mathcal{A}'(\vec{V}_n) \right]^* \left( \mathcal{A}(\vec{V}_n) - \vec{H} \right), \quad n = 0, 1, \dots .$$

Из результата работ [63, 86] известно, что метод локально сходится, если в некоторой окрестности

$$\mathbf{B}_\delta(\vec{V}_0) := \left\{ \vec{V} \in L^2(T) : \left\| \vec{V} - \vec{V}_0 \right\|_{L^2(T)} \leq \delta \right\}$$

точного решения  $\vec{V}^\dagger$  уравнения (2.88) выполняются следующие условия:

1. Производная Фреше  $\mathcal{A}$  ограничена в шаре  $\mathbf{B}_\delta(\vec{V}_0)$ , т.е. для всех  $\vec{V} \in \mathbf{B}_\delta(\vec{V}_0)$

$$\left\| \mathcal{A}'(\vec{V}) \right\| \leq \mu < 1 .$$

2. Для  $\vec{X}, \vec{Y} \in \mathbf{B}_\delta(\vec{V}^{(0)})$

$$\left\| \mathcal{A}(\vec{X}) - \mathcal{A}(\vec{Y}) - \mathcal{A}'(\vec{Y})(\vec{X} - \vec{Y}) \right\|_{L^2(T)} \leq \eta \left\| \mathcal{A}(\vec{X}) - \mathcal{A}(\vec{Y}) \right\|_{L^2(T)} \quad (2.100)$$

где  $0 < \eta < 1/2$ .

Нелинейные интегральные операторы вида (2.88) исследованы в работах [78, 85, 196, 201]. Мы показали, что

$$\left\| \mathcal{A}(\vec{V}) \right\|_{\mathcal{L}_2(T)} \leq C_1 \left\| \vec{V} \right\|_{\mathcal{L}_2(T)}, \quad \left\| \mathcal{A}'(\vec{V})\mathcal{S} \right\|_{\mathcal{L}_2(T)} \leq C_2 \left\| \mathcal{S} \right\|_{\mathcal{L}_2(T)}, \quad (2.101)$$

$$\left\| \mathcal{A}(\vec{V}_1) - \mathcal{A}(\vec{V}_2) - \mathcal{A}'(\vec{V}_2)(\vec{V}_1 - \vec{V}_2) \right\|_{\mathcal{L}_2(T)} \leq \eta \left\| \mathcal{A}(\vec{V}_1) - \mathcal{A}(\vec{V}_2) \right\|_{\mathcal{L}_2(T)}. \quad (2.102)$$

Здесь  $\eta \in (0, 1/2)$  – некоторая постоянная,  $\mathcal{A}'$  – производная Фреше оператора  $\mathcal{A}$ .

Из оценок (2.101), (2.102) вытекает оценка скорости сходимости итераций Ландвебера

$$\begin{aligned} \left\| \vec{V}_n - \vec{V} \right\|_{\mathcal{L}_2(T)} &\leq M\beta^n, \\ \vec{V}_{n+1} &= T(\vec{V}_n), \\ T(\vec{V}_n) &= \vec{V}_n - \alpha \left[ \mathcal{A}'(\vec{V}_n) \right]^* \left( \mathcal{A}(\vec{V}_n) - \vec{H} \right). \end{aligned}$$

Здесь  $\beta \in (0, 1)$  и  $M > 0$  некоторые постоянные, не зависящие от  $n$ .

Отметим, что из оценки (2.102) следует оценка [88, 89]:

$$\left\| \mathcal{A}(\vec{V}_1) - \mathcal{A}(\vec{V}_2) \right\|^2 \leq \kappa < \mathcal{A}(\vec{V}_1) - \mathcal{A}(\vec{V}_2), \mathcal{A}'(\vec{V}_1)(\vec{V}_1 - \vec{V}_2) >, \quad (2.103)$$

при  $\kappa = 2/(1 - \eta^2)$ .

Для одномерной обратной задачи акустики оценки вида (2.101), (2.102) были получены в работе [201].

### Сходимость модифицированного метода

Предположим, что относительно решения системы интегральных уравнений (2.88) нам известно, что оно существует, является достаточно гладким и удовлетворяет оценке  $\left\| \vec{V} \right\|_{\mathcal{L}_2(T)} \leq r$ .

Рассмотрим модифицированный метод простой итерации (метод итераций Ландвебера) в следующем виде:

$$\vec{V}_{n+1} = \mathcal{P}T(\vec{V}_n). \quad (2.104)$$

Здесь  $\mathcal{P}$  в общем случае фейеровское (псевдосжимающее отображение) [89].

Условие (2.103) достаточно для сильной фейеровости оператора шага

$$T(\vec{V}) = \vec{V} - \alpha [\mathcal{A}'(\vec{V})^*] (\mathcal{A}(\vec{V}) - \vec{H}),$$

при  $\alpha \in (0, 2/\kappa C_1^2)$ ,  $C_1$  – положительная постоянная из оценки (2.101).

В нашем случае в качестве  $\mathcal{P}$  рассмотрим метрическую проекцию. Известно [90], что метрическая проекция  $\mathcal{P}$  также обладает свойством (2.103). Поэтому заключаем, что модифицированный метод итераций Ландвебера (2.104) сходится по функционалу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \mathcal{A}(\vec{V}_n) - \vec{H} \right\| = 0.$$

Используя результаты работ [89, 91], можно обосновать и сильную сходимость модифицированного метода простой итерации.

### 2.3 Численные расчеты

Рассмотрим обратную задачу определения коэффициента уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} - \bar{u}(x, y)u$$

по некоторой дополнительной информации относительно решения соответствующей прямой задачи.

Использование априорной информации при решении некорректных задач является одним из способов улучшения сходимости регуляризирующих алгоритмов [88–90, 193]. Учет априорной информации при построении алгоритмов позволяет улучшить скорость сходимости, сократить количество вычислений [90, 91, 129, 171].

Для построения приближенного решения применяется метод простой итерации (метод итераций Ландвебера). Метод модифицируется с учетом априорной информации о принадлежности искомого решения ограниченному множеству

$$B(r) = \{q \in L_2((0, \ell) \times (-\pi, \pi)) : \|q\| \leq r\}.$$

Показано, что модификация метода, основанная на проектировании текущего приближенного решения на каждом шаге итерации на шар, в котором содержится точное решение, существенно сокращает количество итераций.

Рассматриваемые в работе обратные задачи возникают в акустике, сейсмике, электродинамике [141, 202]. В случае обратной задачи акустики коэффициент  $\bar{u}$  связан с акустической жесткостью среды; в обратной задаче электродинамики —

с электромагнитными параметрами среды (если слагаемое  $\bar{u}u$  заменить на  $\bar{u}u_t$ , то  $\bar{u}$  можно трактовать как проводимость среды).

### Постановка обратной задачи

Рассмотрим *обратную задачу* определения коэффициента  $\bar{u}(x, y)$  в случае, когда о решении  $u(x, y, t)$  *прямой задачи*

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} - \bar{u}(x, y)u, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in (-\pi, \pi), \quad t > 0; \quad (2.105)$$

$$u|_{t<0} \equiv 0, \quad u_x|_{x=0} = \gamma\delta(t); \quad (2.106)$$

$$u|_{y=\pi} = u|_{y=-\pi}; \quad (2.107)$$

известна дополнительная информация вида

$$u|_{x=0} = f(y, t), \quad y \in (-\pi, \pi), \quad t \in (0, 2\ell). \quad (2.108)$$

Нетрудно показать [141, 202], что при достаточной гладкости функции  $q$  (например, непрерывной дифференцируемости), решение прямой задачи (2.105)–(2.107) существует, единственно и представимо в виде

$$u(x, y, t) = \gamma\theta(x - t) + \tilde{u}(x, y, t).$$

Здесь  $\theta$  – тета-функция Хевисайда, а функция  $\tilde{u}$  является гладкой при всех  $t \geq x \geq 0$ .

Таким образом, обратную задачу (2.105)–(2.108) можно свести к задаче [29, 141, 203]:

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} - \bar{u}(x, y)u, \quad (x, y, t) \in \Omega(\ell); \quad (2.109)$$

$$u_x|_{x=0} = 0, \quad y \in (-\pi, \pi), \quad t \in (0, 2\ell); \quad (2.110)$$

$$u|_{t=x+0} = \gamma, \quad x \in (0, \ell), \quad y \in (-\pi, \pi); \quad (2.111)$$

$$u|_{y=\pi} = u|_{y=-\pi}, \quad x \in (0, \ell), \quad t \in (0, 2\ell); \quad (2.112)$$

$$u|_{x=0} = f(y, t), \quad y \in (-\pi, \pi), \quad t \in (0, 2\ell). \quad (2.113)$$

Здесь  $\Omega(\ell) = \{x, y, t : (x, t) \in \Delta(\ell), y \in (-\pi, \pi)\}$ ,

$\Delta(\ell) = \{(x, t) : 0 < x < t < 2\ell - x\}$ , а выбор области  $\Omega(\ell)$  осуществляется с учетом теоремы единственности решения обратной задачи [85, 202] (для однозначного определения  $\bar{u}(x, y)$  в области  $(0, \ell) \times (-\pi, \pi)$  необходимо, а в одномерном случае и достаточно, задать функцию  $f(y, t)$  в области  $(-\pi, \pi) \times (0, 2\ell)$ ).

## Численные расчеты

Перепишем обратную задачу (2.109)–(2.113) в виде бесконечной системы дифференциальных уравнений на коэффициенты Фурье функций:

$$u_{ntt} = u_{nxx} - n^2 u_n(x, t) + \sum_k \bar{u}_{n-k}(x) u_k(x, t), \quad (2.114)$$

$$u_{nx}|_{x=0} = 0, \quad (2.115)$$

$$u_n|_{t=x} = \gamma_n, \quad (2.116)$$

$$u_n|_{x=0} = f_n(t). \quad (2.117)$$

Здесь  $(x, t) \in \Delta(\ell)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\gamma_n$  – коэффициенты Фурье  $\gamma$ .

Для численного решения обратной задачи (2.114)–(2.117) перейдем к конечной системе обратных задач. Запишем обратную задачу (2.114)–(2.117) в векторно-матричной форме:

$$V_{tt} = V_{xx} - B(x)V, \quad (x, t) \in \Delta(\ell); \quad (2.118)$$

$$V_x|_{x=0} = 0, \quad t \in (0, 2\ell); \quad (2.119)$$

$$V|_{t=x} = \Gamma, \quad x \in (0, \ell); \quad (2.120)$$

$$V|_{x=0} = F(t), \quad t \in (0, 2\ell). \quad (2.121)$$

Здесь компонента с номером  $n$  вектора  $B(x)V$  имеет вид:

$$[B(x)V]_n = n^2 v_n(x, t) + \sum_{|k| \leq N, |k-n| \leq N} \bar{v}_{n-k}(x) v_k(x, t) \quad n = -\bar{N}, \bar{N};$$

$\Gamma$  – вектор, состоящий из коэффициентов Фурье  $\gamma$ ,  $F(t)$  – вектор-функция, состоящая из коэффициентов Фурье функции  $f(y, t)$ . Обратная задача (2.118)–(2.121) состоит в нахождении вектор-функции  $P(x)$  по известным данным  $F(t)$ .

Обратную задачу (2.118)–(2.121) запишем в операторной форме

$$L(V) = F. \quad (2.122)$$

В силу единственности решения обратной задачи (2.118)–(2.121), доказанной в [85], достаточно найти минимум целевого функционала

$$J(\bar{V}) = \|L(\bar{V}) - F\|_{\mathcal{L}_2(0, 2\ell)}^2. \quad (2.123)$$



Для решения задачи минимизации  $J(V) \rightarrow \inf$  применим метод итераций Ландвебера

$$\bar{V}^{(n+1)} = \bar{V}^{(n)} - \alpha [L'(\bar{V}^{(n)})]^* (L(\bar{V}^{(n)}) - F), \quad n = 0, 1, \dots$$

Найдем приращение функционала невязки

$$J(\bar{V} + \delta\bar{V}) - J(\bar{V}) = \int_0^{2\ell} ([V(0, t; \bar{V} + \delta\bar{V}) - F(t)]^2 - [V(0, t; \bar{V}) - F(t)]^2) dt.$$

Компонента с номером  $m$  приращения функционала невязки имеет следующий вид:

$$[J(\bar{V} + \delta\bar{V}) - J(\bar{V})]_m = \int_0^{2\ell} ([v_m(0, t; \bar{V} + \delta\bar{V}) - f_m(t)]^2 - [v_m(0, t; \bar{V}) - f_m(t)]^2) dt.$$

Обозначим

$$\tilde{v}_n = v_n(0, t; \bar{V} + \delta\bar{V}), \quad \delta v_n = \tilde{v}_n - v_n.$$

Тогда  $\tilde{v}_n$  является решением следующей задачи

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{ntt} &= \tilde{v}_{nxx} - n^2 \tilde{v}_n - \sum_{|k| \leq N, |k-n| \leq N} (\bar{v}_{n-k} + \delta \bar{v}_{n-k}) \tilde{v}_k, \\ \tilde{v}_{nx}|_{x=0} &= 0, \\ \tilde{v}_n|_{t=x} &= 0, \end{aligned}$$

а функция  $\delta v_n$  является решением задачи

$$\begin{aligned} \delta v_{ntt} &= \delta v_{nxx} - n^2 \delta v_n - \sum_{|k| \leq N, |k-n| \leq N} [\bar{v}_{n-k} \delta v_k + \delta \bar{v}_{n-k} v_k], \\ \delta v_{nx}|_{x=0} &= 0, \\ \delta v_n|_{t=x} &= 0. \end{aligned} \tag{2.124}$$

Учитывая введенные выше обозначения, компонента функционала с номером  $m$  можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} [J(\bar{V} + \delta\bar{V}) - J(\bar{V})]_m &= \int_0^{2\ell} \left( [\tilde{v}_m(0, t) - f_m(t)]^2 - [v_m(0, t) - f_m(t)]^2 \right) dt = \\ &= \int_0^{2\ell} \left( [\delta v_m(0, t) + u_m(0, t) - f_m(t)]^2 - [v_m(0, t) - f_m(t)]^2 \right) dt = \\ &= \int_0^{2\ell} \delta v_m(0, t) 2[v_m(0, t) - f_m(t)]^2 dt + \int_0^{2\ell} [\delta v_m]^2(0, t) dt. \end{aligned}$$

Для того, чтобы получить явный вид градиента функционала  $J(P)$ , умножим уравнение (2.124) на некоторую функцию  $\psi_n(x, t)$  и проинтегрируем по области  $\Delta(\ell)$ .

$$0 = \iint_{\Delta(\ell)} \left\{ \delta v_{ntt} - \delta v_{nxx} + n^2 \delta v_n + \sum_{|k| \leq N, |k-n| \leq N} [\bar{v}_{n-k} \delta v_k + \delta \bar{v}_{n-k} v_k] \right\} \psi_n(x, t) dx dt.$$

После интегрирования по частям данного соотношения заключаем, что функция  $\Psi(x, t)$  является решением следующей сопряженной задачи

$$\begin{aligned} \Psi_{tt} &= \Psi_{xx} - B(x)\Psi, \quad (x, t) \in \Delta(\ell); \\ \Psi_x|_{x=0} &= 2[U(0, t) - F(t)], \quad t \in (0, 2\ell); \\ \Psi|_{t=2\ell-x} &= 0, \quad x \in (0, \ell), \end{aligned}$$

а компонента с номером  $m$  градиента функционала (2.123) определяется по формуле

$$[J'(\bar{V})]_m(x) = \sum_{|k| \leq N, |k-m| \leq N} \int_x^{2\ell-x} u_{m-k}(x, t) \psi_m(x, t) dt.$$

Алгоритм метода итераций Ландвебера, таким образом, определен следующей последовательностью действий:

1. Задаем начальное приближение  $\bar{V}^{(0)}(x)$ .
2. Пусть  $\bar{V}^{(n)}(x)$  известно. Решаем прямую задачу:

$$V_{tt}^{(n)} = V_{xx}^{(n)} - B^{(n)}(x)V^{(n)}, \quad (x, t) \in \Delta(\ell);$$

$$\begin{aligned} V_x^{(n)} \Big|_{x=0} &= 0, \quad t \in (0, 2\ell); \\ V^{(n)} \Big|_{t=x} &= \Gamma, \quad x \in (0, \ell). \end{aligned}$$

3. Находим значение функционала  $J(\bar{V}^{(n)})$ . Если значение достаточно мало, то принимаем  $\bar{V}^{(n)}$  за приближенное решение обратной задачи. В противном случае идем на следующий шаг.

4. Решаем сопряженную задачу

$$\begin{aligned} \Psi_{tt}^{(n)} &= \Psi_{xx}^{(n)} - B^{(n)}(x)\Psi^{(n)}, \quad (x, t) \in \Delta(\ell); \\ \Psi_x^{(n)} \Big|_{x=0} &= 2[V^{(n)}(0, t) - F(t)], \quad t \in (0, 2\ell); \\ \Psi^{(n)} \Big|_{t=2\ell-x} &= 0, \quad x \in (0, \ell). \end{aligned}$$

5. Определяем компоненту с номером  $m$  градиента функционала

$$[J'(\bar{V}^{(n)})]_m(x) = \sum_{|k| \leq N, |k-m| \leq N} \int_x^{2\ell-x} v_{m-k}^{(n)}(x, t) \psi_m^{(n)}(x, t) dt,$$

6. Находим приближенное решение на следующем шаге

$$\bar{V}^{(n+1)}(x) = \bar{V}^{(n)}(x) - \alpha[J'(\bar{V}^{(n)})](x).$$

Модифицируем итерационный процесс с использованием константы  $r$  ( $\|\bar{V}_\top\|_{\mathcal{L}_2(0, \ell)} \leq r$ ) [28]. Сначала по известному  $\bar{V}^{(n)}$  построим приближенное решение на шаге  $n + 1$

$$\tilde{V}^{(n+1)} = \bar{V}^{(n)} - \alpha \left[ L'(\bar{V}^{(n)}) \right]^* \left( L(\bar{V}^{(n)}) - F \right).$$

Далее полагаем

$$\bar{V}^{(n+1)} = P(\tilde{V}^{(n+1)}).$$

Здесь

$$P(V^{(n+1)}) = \begin{cases} \tilde{V}^{(n+1)}, & \text{если } \left\| \tilde{V}^{(n+1)} \right\|_{\mathcal{L}_2(0, \ell)} < r; \\ \tilde{V}^{(n+1)} r \left\| \tilde{V}^{(n+1)} \right\|_{\mathcal{L}_2(0, \ell)}^{-1}, & \text{если } \left\| \tilde{V}^{(n+1)} \right\|_{\mathcal{L}_2(0, \ell)} \geq r. \end{cases}$$

Для численных расчетов были выбраны следующие значения: размер области  $\ell = 1$ , количество узлов равномерной сетки  $N_x = 50$ ,  $N = 10$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\alpha = 0.1$ .

Возмущение данных обратной задачи рассматривалось в виде  $f^\varepsilon = f + \varepsilon\alpha(f_{\max} - f_{\min})$ , где  $\varepsilon$  уровень погрешности,  $\alpha$  равномерно распределенное случайное число на отрезке  $[-1, 1]$ ,  $f_{\max}$  и  $f_{\min}$  максимальное и минимальное значение точных данных.

Численные расчеты выполнены для двух случаев в зависимости от выбора начального приближения: в первом случае начальное приближение выбирается по формуле

$$q^{(0)}(x, y) = \sqrt{40x} + 5x + 2x \cos(40y) \sin(10x),$$

во второй серии расчетов начальное приближение выбирается по формуле

$$q^{(0)}(x, y) = \sqrt{40x} |\cos(30y) + 2| + 2x \cos(40y) \sin(10x)\alpha(x, y). \quad (2.125)$$

Здесь  $\alpha(x, y)$  – случайное число, равномерно распределенное на интервале  $(0, 1)$ .

Для первой серии расчетов на рис. 2.2 и 2.3 видно, что введение в алгоритм константы  $r$  существенно уменьшает число итераций (рис. 2.2 и 2.3). Более того, модифицированный алгоритм не зависит от начального приближения (рис. 2.1 и 2.4).

Во второй серии расчетов на рис. 2.4 и 2.5, алгоритм не использующий априорную информацию, расходится (рис. 2.5 слева). При использовании же априорной информации после 800 итераций можно сделать вывод о решении обратной задачи (рис. 2.5 справа).

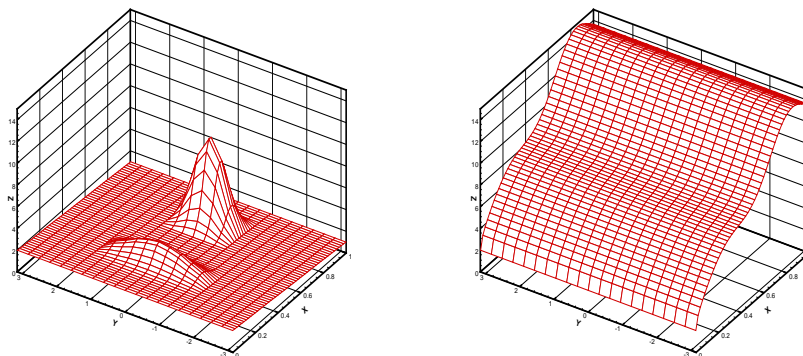


Рисунок 2.1: Слева приведено точное решение  $q(x, y)$ , справа — начальное приближение  $q^{(0)}(x, y)$ .

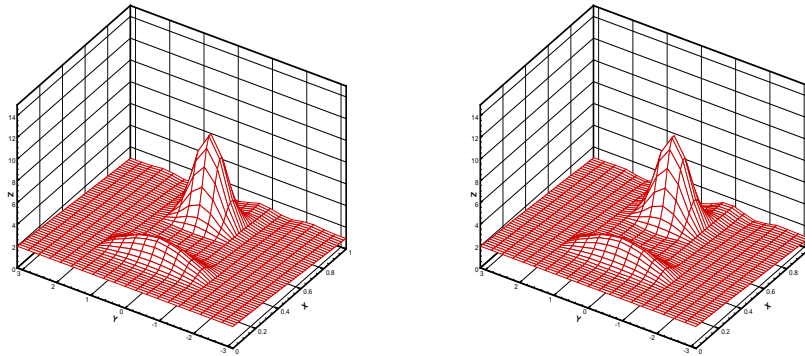


Рисунок 2.2: Слева приведено приближенное решение  $q^{(1000)}(x, y)$ , вычисленное без использования априорной информации; справа — приближенное решение  $q^{(330)}(x, y)$ , вычисленное с учетом априорной информации.

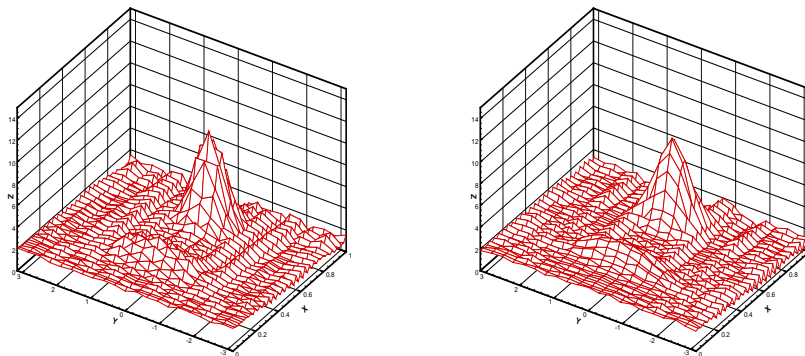


Рисунок 2.3: Результаты расчетов по данным, заданным с погрешностью 3%. Слева приведено приближенное решение  $q^{(1000)}(x, y)$ , вычисленное без использования априорной информации; справа — приближенное решение  $q^{(330)}(x, y)$ , вычисленное с учетом априорной информации.

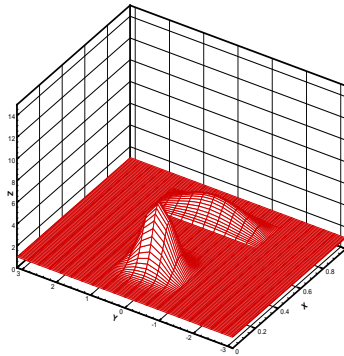


Рисунок 2.4: Точное решение  $q(x, y)$  во второй серии расчетов. Начальное приближение выбрано по формуле (2.125).

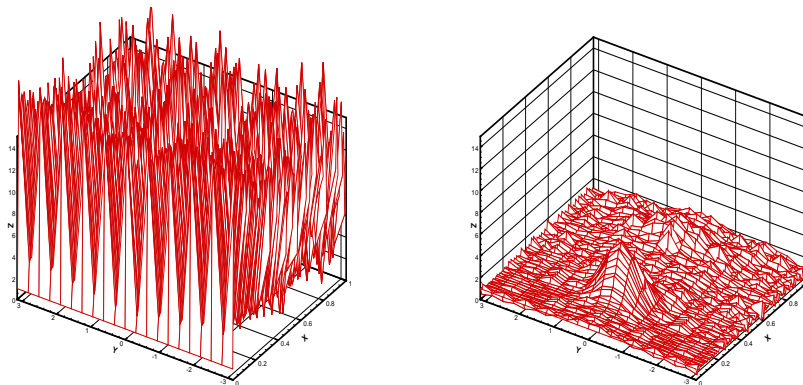


Рисунок 2.5: Слева приведено приближенное решение  $q^{(20)}(x, y)$ , вычисленное без использования априорной информации (при  $n > 20$  метод расходится); справа — приближенное решение  $q^{(800)}(x, y)$ , вычисленное с учетом априорной информации.

## Глава 3

# Методы И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана, М.Г. Крейна регуляризации нелинейных обратных задач акустики

### 3.1 Введение

В данной главе рассматриваются прямые методы решения двумерных коэффициентных обратных задач на основе метода И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана, М.Г. Крейна.

Метод Гельфанда–Левитана является одним из наиболее распространенных в теории обратных задач и заключается в сведении нелинейной обратной задачи к однопараметрическому семейству линейных интегральных уравнений Фредгольма первого или второго рода. Интересно проследить динамику научных исследований в этой области.

В 1951 г. была опубликована работа И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана [204], в которой был указан метод восстановления оператора Штурма–Лиувилля по спектральной функции, а также даны достаточные условия для того, чтобы заданная монотонная функция являлась спектральной функцией оператора. Далее, следует отметить работу М. Г. Крейна [205], в которой рассматривается физическая постановка задачи о натянутой струне и сформулированы теоремы, касающиеся разрешения обратной краевой задачи. В работе А. С. Благовещенского [206] дано новое доказательство результатов М. Г. Крейна по теории обратных

задач для уравнения струны. Новое доказательство замечательно тем, что оно просто по идее и локально (нестационарно). В способах рассмотрения, которые обычно применялись ранее для подобных задач, делалось преобразование Фурье (или Лапласа) по времени и фактически изучался вопрос о восстановлении коэффициента дифференциального уравнения по свойствам собственных функций возникающей при этом спектральной задачи. Здесь же явно отражен локальный характер зависимости искомого коэффициента от дополнительной информации.

Идеи метода Гельфанда–Левитана активно использовались в обратных динамических задачах сейсмологии, начиная с работ А. С. Алексеева [207], G. Kunetz [208], Б. С. Парийского [209, 210]. А. С. Благовещенский [206, 211] разработал динамический (во временной области) вариант метода Гельфанда–Левитана для обратной задачи акустики.

А. С. Алексеев и В. И. Добринский [212] использовали дискретный аналог метода Гельфанда–Левитана при исследовании численных алгоритмов решения одномерной обратной динамической задачи сейсмологии. Подробный обзор численных методов решения уравнений типа Гельфанда–Левитана изложен в работе Б. С. Парийского [210]. В работе С. И. Кабанихина [94] предложен новый алгоритм решения уравнения Гельфанда–Левитана, основанный на использовании достаточного условия разрешимости обратной задачи. В монографии В. Г. Романова и С. И. Кабанихина [213] динамический вариант метода Гельфанда–Левитана применяется к одномерной обратной задаче геоэлектрики для квазистационарного приближения системы уравнений Максвелла. В работах М. И. Белишева [92, 93], С. И. Кабанихина [94, 95], М. И. Белишева и А. С. Благовещенского [96] получены многомерный аналог уравнения Гельфанда–Левитана.

Первые многомерные аналоги уравнения Гельфанда–Левитана были получены Л. Д. Фаддеевым [214] и R.G. Newton [215]

Метод обратной задачи рассеяния введен С. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal и R. M. Miura в 1967 году для исследования некоторых нелинейных уравнений математической физики. Элементы предложенного метода, например преобразование Беклунда, были известны ещё в XIX веке. Метод основан на представлении исследуемого нелинейного уравнения в виде условия совместности для системы линейных уравнений. Первоначальный вариант ме-



тогда, использующий теорию рассеяния для дифференциальных операторов, был применён к уравнению Кортвега - де Фриза.

К прямым методам можно отнести метод обращения разностной схемы и метод граничного управления.

Метод обращения разностной схемы возник при исследовании обратных динамических задач сейсмологии [213]. Первоначально рассматривалась модель среды, состоящей из пачки однородных слоев с горизонтальными границами раздела (модель Гупилло). Искомыми являлись характеристики слоев — скорость распространения волн и плотность в каждом однородном слое [212, 216]. Дальнейшие обобщения привели к исследованию одномерной обратной задачи сейсмологии, в которой требовалось определить акустическую жесткость среды.

В 1976 году А.С. Алексеевым [217] была сформулирована общая идея метода обращения разностной схемы как возможного способа численного определения коэффициентов гиперболических уравнений. Различные аспекты реализации этой идеи в применении к динамической обратной задаче сейсмологии были рассмотрены в работах А.С. Алексеева и В.И. Добринского [212], С.И. Кабанихина и А.Д. Сатыбаева [218] и др. В работе [219] было показано, что включение в алгоритм метода обращения разностной схемы априорно заданной постоянной, ограничивающей норму искомого коэффициента, позволяет доказать сходимость метода обращения исходя из вольтерровости интегрального уравнения относительно искомого коэффициента. В совместных работах С.И. Кабанихина с К.С. Абдиевым [220], Ж.А. Ахметовым [221], К. Бобоевым [222], А.Д. Сатыбаевым [218, 223], С.В. Мартаковым [224], А.Д. Сатыбаевым и М.А. Шишленным [32] метод обращения разностной схемы был применен для исследования обратных задач геоэлектрики, акустики, теории упругости,  $P_1$ -приближения кинетического уравнения переноса. В работе [84] было получено обоснование сходимости метода обращения разностной схемы.

Основная идея метода обращения разностной схемы состоит в следующем: обратная задача заменяется конечно-разностным аналогом и полученная при этом система нелинейных алгебраических уравнений решается (как правило, довольно просто). Полученное решение принимается за приближенное решение исходной обратной задачи.

Метод обращения разностной схемы является довольно естественным с физической точки зрения, поскольку использует теорию характеристик, вдоль которых распространяется, как правило, основная информация об особенностях решения прямой задачи и исследуемой среды. В вычислительном аспекте (по количеству операций) метод обращения разностной схемы эквивалентен однократному решению соответствующей прямой задачи и допускает распараллеливание процедуры вычислений. На основе проекционного метода метод обращения разностной схемы сравнительно просто обобщается на широкий класс многомерных обратных задач и в случае достаточно гладких по горизонтальным переменным коэффициентов полностью обоснован. Основным недостатком метода заключен в следующем: при наличии больших ошибок измерения в данных обратной задачи или несоответствия модели реальной ситуации метод становится не устойчивым.

Метод граничного управления — это подход к решению обратных задач на основе теории управления и систем [225, 226]. Метод обоснован на основе Римановой геометрии, асимптотических методов для уравнений в частных производных, функциональном анализе и операторных уравнений. Метод был предложен в 1987 году [92, 93] и в дальнейшем возник вопрос, является ли такой чисто теоретический метод доступным для численной реализации. Первый численный результат был получен для двумерной задачи определения скорости распространения волны по спектральным данным [227]. Позже, алгоритм, основанный на спектральном варианте метода граничного управления был разработан и апробирован в работах [226, 228].

Динамический вариант метода граничного управления рассматривается во временной области обратных данных, что является ответом оператора (гиперболический вариант Dirichlet-to-Neumann map). Метод обеспечивает оптимальное восстановление по времени: чем продолжительнее время наблюдения, тем больше область, в которой параметры будут восстановлены. Данная особенность делает данный вариант наиболее актуальным в акустике и геофизике. Соответствующий алгоритм был разработан и численно реализован в [229]. Алгоритм восстанавливает скорость распространения волн в ближайшем пограничном слое с данными на всей границе.

Оптимальное по времени восстановление плотности с помощью дополнительной информации в спектральной и временной области измеренной на части границы, предложено в [225]. Предложенный метод восстановления использует сингулярные гармонические функции и спектральный вариант был реализован численно [225]. В работах [230, 231] динамический вариант метода был модифицирован на основе геометрической оптики для геофизики.

Л.Н. Пестов в начале 2000-х годов предложил модификацию метода граничного управления, которая определяет некоторые встроенные билинейные формы, содержащие параметры под реконструкцию через данные обратной задачи и, затем восстанавливает параметры из формы. Этот вариант не является оптимальным по времени, но за счет достаточно большого времени наблюдения, обеспечивает разработку более устойчивых численных алгоритмов [232–234].

Метод граничного управления был применен в [235] для численной реконструкции неоднородности.

### 3.1.1 Спектральные обратные задачи и обратные задачи рассеяния

В 1929 году В.М. Амбарцумян опубликовал работу [236], где показал, что “однородная струна единственным образом определяется множеством собственных частот”, а именно, если собственные числа  $\lambda_n$  краевой задачи

$$\begin{aligned} y'' + (\lambda - q(x))y &= 0, \quad x \in [0, \pi]; \\ y'(0) &= y'(\pi) = 0 \end{aligned}$$

равны  $\lambda_n = n^2$ , то  $q(x) \equiv 0$ .

Долгое время результаты работы не замечались в мире, поэтому следующая статья по этой теме появилась только в 1943 г. В.М. Амбарцумян иронично заметил по этому поводу: “Когда астроном публикует математическую работу в физическом журнале, нельзя ожидать, что она привлечет множество читателей”.

W. Heisenberg рассмотрел обратную задачу рассеяния в 1943 году [237, 238]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - q(x)u, \quad x > 0, \quad t \in \mathbb{R}; \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) - ku(0, t) &= f(t). \\ u(0, t) &= g(t). \end{aligned}$$

Пусть  $\tilde{f}(\omega)$  и  $\tilde{g}(\omega)$  — образы Фурье функций  $f(t)$  и  $g(t)$ .

Обозначим

$$S(\omega) = \frac{\tilde{g}(\omega)}{\tilde{f}(\omega)}.$$

$S(\omega)$  — функция рассеяния.

Обратная задача заключается в определении  $q(x)$  и  $k$  по заданной функции  $S(\omega)$ .

G. Borg рассмотрел обратную задачу для оператора Штурма–Лиувилля в 1946 году [239].

**Теорема.** Пусть  $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$  собственные значения оператора

$$\begin{aligned} -y'' + q(x)y &= \lambda y, & 0 \leq x \leq \pi, \\ y'(0) - hy(0) &= 0, & y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, & h, H \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

Пусть  $\mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots$  собственные значения оператора

$$\begin{aligned} -y'' + q(x)y &= \mu y, & 0 \leq x \leq \pi, \\ y'(0) - hy(0) &= 0, & y'(\pi) + H_1y(\pi) = 0, & H_1 \neq H \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

Тогда последовательности  $\{\lambda_m\}_{m=0}^{\infty}$   $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$  однозначно определяют функцию  $q(x)$  и числа  $h$ ,  $H$  и  $H_1$ .

N. Levinson в 1949 году [240] дал более простые доказательства некоторых результатов из работы G. Borg.

В этом же году N. Levinson рассмотрел обратную задачу квантовой теории рассеяния [241]. Он доказал, что в случае отсутствия отрицательных собственных значений, фаза рассеяния, заданная для всех положительных энергий и любого фиксированного углового момента, определяет потенциал однозначно.

V. Bargmann в 1949 году показал, что в общем случае сферически симметрический потенциал фазой рассеяния (при любом фиксированном угловом моменте) не определяется однозначно [242, 243].

А.Н. Тихонов доказал теорему о единственности решения обратной задачи Штурма–Лиувилля на полуоси по заданной функции Вейля в 1949 году [244].

В 1951 году И.М. Гельфанд, Б.М. Левитан [204] разработали метод восстановления оператора Штурма–Лиувилля по спектральной функции, а также сформулировали достаточные условия для того, чтобы заданная монотонная функция

являлась спектральной функцией оператора Штурма–Лиувилля (на полупрямой или на конечном промежутке).

В частности, из этих условий следует, что для того, чтобы две последовательности действительных чисел  $\{\lambda_n\}_0^\infty$ ,  $\{\alpha_n\}_0^\infty$ ,  $\alpha_n > 0$  являлись спектром и нормировочными числами классического оператора Штурма–Лиувилля достаточно, чтобы для них выполнялась классическая асимптотика

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n^3} + \dots, \quad \alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{b_0}{n^2} + \frac{b_1}{n^4} + \dots$$

В 1950, 1952 годах В.А. Марченко применил к исследованию обратных задач операторы преобразования и доказал, что спектральная функция оператора Штурма–Лиувилля (заданного на полупрямой или на конечном промежутке) однозначно определяет оператор [245, 246]. Эти операторы возникли из общих идей теории операторов обобщенного сдвига, основы которой были заложены французским математиком Ж. Дельсартом.

Теорема, доказанная В.А. Марченко, обобщает результаты, полученные G. Borg и N. Levinson. Более того, теорема Марченко полностью объясняет феномен, открытый Bargmann, что по фазе рассеяния спектральная функция определяется только для положительных значений спектрального параметра.

В 1951, 1952, 1953 годах М.Г. Крейн разработал эффективный метод построения оператора Штурма–Лиувилля по спектральной функции и по двум спектрам [247–251].

В 1953 году М.Ш. Блох исследовал обратную задачу на всей оси по спектральной матрице-функции [252].

В 1956 году Б.Я. Левин ввел операторы преобразования, сохраняющих асимптотику решений на бесконечности [253].

В 1955 году В.А. Марченко использовал новые операторы преобразования, введенные Б.Я. Левиным, для решения обратной задачи рассеяния [254].

В 1959 году T. Regge [255] и затем в 1962 году R.G. Newton [256] начали построение аналога теории Гельфанда-Левитана-Марченко для случая радиального уравнения Шредингера при фиксированной энергии.

В 1960 году З.С. Агранович, В.А. Марченко исследовали обратную задачу квантовой теории рассеяния на оси и полуоси [257].

В 1962 году А.С. Алексеев исследовал одномерную обратную динамическую задачу теории упругости в спектральной области [217].

В 1964 году Б.М. Левитан, М.Г. Гасымов построили оператор Штурма–Лиувилля по двум спектрам на конечном интервале [258].

В 1996 году Р.Г. Новиков предложил явную формулу для решения обратной задачи рассеяния для оператора Штурма–Лиувилля с точностью до гладких функций [259].

### 3.1.2 Метод обратной задачи рассеяния

В 1954 году E. Fermi, J. Pasta и S. Ulam обнаружили аномально медленную стохастизацию динамической системы цепочки нелинейных осцилляторов на ЭВМ [260].

В 1965 году M.D. Kruskal, N.J. Zabusky обнаружили путем численного моделирования, что солитоны в КдФ сталкиваются упруго, в результате чего вскоре были открыты бесконечные серии законов сохранения [261].

В 1967 году C.S. Gardner, J.M. Green, M.D. Kruskal и R.M. Miura открыли метод обратной задачи рассеяния [262] и проинтегрировали уравнение Кортевега–де Фриза

$$q_t = 6qq_x - q_{xxx}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Уравнение Кортевега–де Фриза интегрируется с помощью перехода от потенциала одномерного уравнения Шредингера

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + q(x)\psi = k^2\psi$$

к коэффициенту отражения  $r(k)$  на этом потенциале.

В 1968 году Р. Лах раскрыл алгебраический механизм, лежащий в основе процедуры метода обратной задачи рассеяния [263, 264].

В 1971 году C.S. Gardner построил теорию уравнения КдФ как гамильтоновой системы [265].

В 1971 году В.Е. Захаров, А.Б. Шабат применили метод обратной задачи рассеяния к нелинейному уравнению Шредингера [266].

В этом же году В.Е. Захаров, Л.Д. Фаддеев независимо от C.S. Gardner построили теорию уравнения КдФ как гамильтоновой системы [267].

В 1973 году А.Б. Шабат построил класс квазилинейных уравнений, сводящихся к линейным [268].

В 1974 году были опубликованы работы С.П. Новикова [269], P.D. Lax [270] и В.А. Марченко [271] по исследованию периодической задачи Коши для уравнения КдФ.

Одновременно с первой работой С.П. Новикова появилась работа P. Lax, которая содержала в качестве главного результата некоторую часть основной теоремы С.П. Новикова. Доказательство P. Lax неэффективно и отличалось от метода Новикова. В.А. Марченко опубликовал две работы, в которых развил метод последовательных приближений к решениям уравнения КдФ, базирующийся на спектральной теории оператора Шредингера  $L$ . Некоторые из соображений работы В.А. Марченко пересекаются с отдельными техническими деталями работы С.П. Новикова.

Единственным новым результатом в периодической задаче, который был получен из метода C.S. Gardner, J.M. Green, M.D. Kruskal и R.M. Miura, является теорема Фаддеева–Захарова о том, что собственные числа оператора  $L$  являются коммутирующими интегралами КдФ как гамильтоновой системы.

В 1974 году В.Е. Захаров, А.Б. Шабат предложили общую схему применения метода обратной задачи рассеяния для интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений и предложили алгоритм отыскания уравнений, допускающих такое интегрирование [272].

В этом же году В.Е. Захаров, С.В. Манаков показали, что нелинейное уравнение Шредингера, рассматриваемое как гамильтоновская система, полностью интегрируемо. Переход осуществляется с помощью матрицы рассеяния одномерного оператора Дирака [273].

В 1976 году С.В. Манаков обобщил пару Лакса на двумерные эволюционные уравнения связанные с изоспектральными деформациями двумерных операторов при фиксированной энергии [274].

В 1976 году В.Е. Захаров, С.В. Манаков показали, что с каждым одномерным дифференциальным оператором, коэффициентные функции которого зависят от произвольной совокупности параметров, связана серия интегрируемых с помо-



щью метода обратной задачи рассеяния многомерных нелинейных уравнений в частных производных [275].

В 1976 году Р. Лах рассмотрел почти периодическое поведение во времени периодических решений уравнения КдФ. Он представил новое доказательство, основанное на рекурсии Леннарта [276].

В 1979 году В.Е. Захаров, А.Б. Шабат перенесли метод, разработанный в 1976 г., на случай спектральных задач, рациональным образом зависящих от спектрального параметра. При этом получили описание новых классов интегрируемых методом обратной задачи уравнений вместе с алгоритмом построения их точных решений [277].

Уже в начале 70-х годов были обнаружены другие нелинейные уравнения, интегрируемые методом обратной задачи, в частности, нелинейное уравнение Шредингера, уравнение  $\sin$ -Gordon и др.

В 1980 году В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский в книге “Теория солитонов: метод обратной задачи” систематически изложили метод обратной задачи рассеяния, включая все необходимые математические сведения [278].

В 1982 году Л.П. Нижник, М.Д. Починайко исследовали нелинейное пространственно-двумерное уравнение Шредингера и для его интегрирования применили метод обратной задачи рассеяния [279].

В 1984 году А.П. Веселов, С.П. Новиков рассмотрели двумерное обобщение уравнения КдФ (уравнение Веселова–Новикова), связанное с двумерным потенциальным оператором Шредингера при фиксированной энергии [280]. В этой работе был предложен метод интегрирования этого уравнения в классе квазипериодических “конечно-зонных” решений.

В 1984 году R.G. Novikov и G.M. Khenkin применили адаптировали метод обратной задачи рассеяния для получения слабо локализованных решений уравнения КдФ, в котором коэффициент пропускания матрицы рассеяния может зануляться для конечного множества импульсов [281].

В 1985 году П.Г. Гриневич и Р.Г. Новиков построили первые многосолитонные решения для уравнения Веселова–Новикова при отрицательной энергии [282].



В 1986 году П. Г. Гриневич построил первые многосолитонные решения для уравнения Веселова–Новикова при положительной энергии [283].

В 1992 году в работе J-P Francoise и R.G. Novikov исследовали иерархию системы Калоджеро-Мозера для уравнения Кадомцева-Петвиашвили и Веселова-Новикова [284].

В 2011 году A.V. Kazeuykina и R.G. Novikov исследовали на больших временах асимптотику решения задачи Коши для уравнения Веселова–Новикова при положительной энергии. Показано, что нет изолированных солитонного типа волн на больших временах по сравнению с известными асимптотиками для решений уравнения КдФ с безотражательными исходными данными [285].

### 3.1.3 Обратные задачи для гиперболических уравнений

В 1954 году М. Г. Крейн рассмотрел задачу о струне и сформулировал теоремы о разрешимости обратной задачи [205]. Нелинейная обратная задача для уравнения струны была сведена к интегральному уравнению (уравнение Крейна).

В 1968 году Б.С. Парийский исследовал одномерную обратную задачу для волнового уравнения [209], в которой возмущение находится на глубине и вывел уравнение Крейна.

В 1971 году А.С. Благовещенский дал новое доказательство результатов М. Г. Крейна по теории обратных задач для уравнения струны. Он указал локальный характер зависимости искомого коэффициента от дополнительной информации [211].

Ранее для подобных задач, делалось преобразование Фурье (или Лапласа) по времени и фактически изучался вопрос о восстановлении коэффициента дифференциального уравнения по свойствам собственных функций возникающей при этом спектральной задачи.

В 1970 и 1971 году В. Gopinath, М. Sondhi независимо предложили альтернативное интегральное уравнение (также во временной области) в задаче восстановления формы речевого тракта человека по акустическим измерениям [286, 287].

В 1975 году А.С. Алексеев и В.И. Добринский использовали дискретный аналог метода Гельфанда–Левитана при исследовании численных алгоритмов решения одномерной обратной динамической задачи сейсмологии [212].

В 1977 году Б.С. Парийский сделал подробный обзор численных методов решения уравнений типа Гельфанда–Левитана [210].

В 1979 году W. Symes применил нелинейные интегральные уравнения во временной области [288].

В 1980 году R. Burridge исследовал применение уравнений Гельфанда–Левитана–Марченко для теории упругости во временной области и установил связь между ними и уравнением Gopinath–Sondi [289].

В 1982 году Santosa [290] разработал точный метод решения обратной задачи распространения плоской волны с помощью метода Гельфанда–Левитана. В работе апробирована численная схема решения интегрального уравнения, исследованы вопросы устойчивости, проведен анализ численных ошибок и аппроксимации.

В 1988 году С.И. Кабанихин предложил новый алгоритм решения уравнения Гельфанда–Левитана, основанный на использовании достаточного условия разрешимости обратной задачи [94].

В 1991 году В.Г. Романов и С.И. Кабанихин применили динамический вариант метода Гельфанда–Левитана к одномерной обратной задаче геоэлектрики для квазистационарного приближения системы уравнений Максвелла [213].

В 1998 году А.С. Алексеев и В.С. Белоносов применили спектральный метод для восстановления акустического импеданса в одномерной задаче теории распространения волн [291].

Развитие многомерных аналогов уравнений Гельфанда–Левитана–Крейна началось с работы 1987 года М.И. Белишева, который разработал метод граничного управления [92, 93].

В 1989 году С.И. Кабанихин предложил многомерный аналог уравнений Гельфанда–Левитана и Крейна [95].

В 1992 году М.И. Белишев и А.С. Благовещенский предложили многомерный аналог уравнения Гельфанда–Левитана на основе метода граничного управления [96].

В 2004 году С.И. Кабанихин и М.А. Шишленин показали [29], что дискретные аналоги уравнений Крейна и граничного управления совпадают в случае одномерной коэффициентной обратной задачи акустики.

В 2005 году С.И. Кабанихин, М.А. Сатыбаев, М.А. Шишленин опубликовали работу о численных методах решения двумерных аналогов уравнения Гельфанда–Левитана и Крейна для коэффициентных обратных задач для волнового уравнения и уравнения акустики [32].

В 2011 году С.И. Кабанихин и М.А. Шишленин разработали численный метод решения уравнения Крейна для  $N$ -приближения двумерной обратной задачи акустики [13, 18]. Уравнение Крейна для  $N$ -приближения получено в матричном виде, для которого построен численный метод решения на основе метода сингулярного разложения.

В 2011 году М.А. Шишленин и Н.С. Новиков провели сравнительный анализ двух численных методов решения уравнения Гельфанда–Левитана [21]. Разработан метод Монте–Карло решения уравнения Гельфанда–Левитана.

Одно из преимуществ подхода Гельфанда–Левитана–Крейна для решения коэффициентных обратных задач для гиперболических уравнений заключается в отсутствии необходимости многократного решения прямых задач.

### 3.1.4 Уравнение И.М. Гельфанда и Б.М. Левитана. Одномерный случай

Уравнение Гельфанда–Левитана возникает при решении обратной задачи Штурма–Лиувилля и в динамической коэффициентной обратной задаче для уравнения струны.

Сначала рассмотрим прямую задачу Штурма–Лиувилля, которая заключается в исследовании спектра оператора  $l_q$

$$l_q y(x) := -y'' + q(x)y$$

определенного на множестве функций  $y \in W_2^2(0, \pi)$  и удовлетворяющего соотношениям

$$\begin{aligned} l_q y(x) &= \lambda y, & x \in (0, \pi), \\ y'(0) - hy(0) &= 0, & y'(\pi) + Hy(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Здесь  $h, H \in \mathbb{R}$ ,  $q(x) \in L_2(0, \pi)$ .

Пусть  $\lambda_n$  — собственное значение,  $\varphi(x, \lambda_n)$  — собственная функция оператора  $l_q$ . Обозначим

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n) dx.$$

Совокупность  $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \geq 0}$  называется спектральными данными оператора  $l_q$ .

Спектральные данные оператора  $l_q$  обладают асимптотическими свойствами [292]:

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_n} &= n + \frac{\omega}{\pi n} + \frac{\beta_n}{n}, & \alpha_n &= \frac{\pi}{2} + \frac{\beta_{1n}}{n}, & \{\beta_n\}, \{\beta_{1n}\} &\in l_2, \\ \alpha_n &> 0, & \lambda_n &\neq \lambda_m, & (n \neq m). \end{aligned}$$

Обратная задача Штурма–Лиувилля заключается в восстановлении потенциала  $q(x)$  и коэффициентов  $h, H$  по спектральным данным.

Определим функцию  $F(x, t)$ :

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\cos \sqrt{\lambda_n} x \cos \sqrt{\lambda_n} t}{\alpha_n} - \frac{\cos nx \cos nt}{0.5\pi + 0.5\pi \delta_{n0}} \right).$$

Обратная задача Штурма–Лиувилля сводится к решению уравнения Гельфанда-Левитана

$$G(x, t) + F(x, t) + \int_0^x G(x, s)F(s, t) ds = 0, \quad 0 < t < x.$$

Решение уравнения Гельфанда-Левитана позволяет определить решение обратной задачи по формуле

$$q(x) = 2 \frac{d}{dx} G(x, x), \quad h = G(+0, +0), \quad H = \omega - h - \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt.$$

Рассмотрим коэффициентную динамическую обратную задачу: определить  $q(x)$  из соотношений

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \tag{3.1}$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \delta(x); \tag{3.2}$$

$$u|_{x=0} = f(t), \quad u_x|_{x=0} = 0. \tag{3.3}$$

В монографии В. Г. Романова [202] обратная задача (3.1)–(3.3) сведена к уравнению Гельфанда–Левитана:

$$\begin{aligned} \tilde{w}(x, t) + \int_0^x [f'(t - \tau) + f'(t + \tau)] \tilde{w}(x, \tau) d\tau = \\ = -\frac{1}{2}[f'(t - x) + f'(t + x)], \quad t \in [0, x]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Решение обратной задачи находится по формуле:

$$q(x) = 4 \frac{d}{dx} \tilde{w}(x, x - 0), \quad x > 0.$$

В. Г. Романов [202] доказал следующую теорему:

**Теорема 3.1.** *Для однозначной разрешимости обратной задачи (3.1)–(3.3) на отрезке  $-[T/2, T/2]$  в классе непрерывных функций необходимо и достаточно, чтобы функция  $f(t)$  удовлетворяла следующим условиям*

1.  $f(t) \in C^2[0, T]$ ,  $f'(+0) = 1/2$ ,  $f'(0) = 0$ ;
2. интегральное уравнение (3.4), где  $f(-t) = f(t)$ ,  $t \in (0, T]$  однозначно разрешимо  $\forall x \in (0, T/2)$ .

Второе условие теоремы можно заменить эквивалентным ему условием положительной определенности оператора  $A_x$ :

$$A_x \varphi = \varphi(t) + \int_0^x [f'(t - \tau) + f'(t + \tau)] \varphi(\tau) d\tau$$

для  $x \in [0, T/2]$ , т.е. условием

$$(A_x \varphi, \varphi) > 0, \quad x \in (0, T/2], \quad \varphi \in L_2(0, x).$$

### 3.1.5 Уравнение М. Г. Крейна. Одномерный случай

Рассмотрим обратную задачу определения акустической жесткости среды  $\sigma(x)$  из соотношений

$$u_{tt} = u_{xx} - \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} u_x, \quad x > 0, \quad t > 0; \quad (3.5)$$

$$u|_{t < 0} \equiv 0; \quad (3.6)$$

$$u_x|_{x=+0} = \delta(t); \quad (3.7)$$

$$u(+0, t) = r(t). \quad (3.8)$$

В работе А.С. Благовещенского [211] обратная задача акустики (3.6)–(3.8) сведена к уравнению Крейна:

$$-2r(+0)\Phi(x, t) - \int_{-x}^x r'(t-s)\Phi(x, s)ds = \frac{1}{\sigma(+0)}, \quad |t| < x, \quad (3.9)$$

в котором функция  $r(t)$  нечётно продолжено на отрицательные  $t$ .

Решение обратной задачи находится по формуле:

$$\sigma(x) = \frac{1}{4\sigma(+0)\Phi^2(x, x-0)}.$$

Обозначим

$$D_f^x \varphi(t) = -2r(+0)\varphi(t) - \int_{-x}^x r'(t-s)\varphi(s)ds.$$

А.С. Благовещенский [211] доказал следующую теорему:

**Теорема 3.2.** Обратная задача (3.6)–(3.8) эквивалентна уравнению (3.9), если при любых  $x > 0$  и  $\varphi \in L_2(-x, x)$  выполняется неравенство

$$(D_f^x \varphi, \varphi) > 0, \quad \varphi \neq 0.$$

Решение обратной задачи существует и единственно.

## 3.2 Двумерный аналог уравнения И.М. Гельфанда и Б.М. Левитана

Рассмотрим последовательность прямых задач ( $k \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ ):

$$u_{tt}^{(k)} = u_{xx}^{(k)} + u_{yy}^{(k)} - q(x, y)u^{(k)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \quad (3.10)$$

$$u^{(k)}|_{t=0} = 0, \quad u_t^{(k)}|_{t=0} = \delta(x)e^{iky}. \quad (3.11)$$

Предполагаем, что функция  $q(x, y)$  является  $2\pi$ -периодической по переменной  $y$ .

**Обратная задача:** определить четную по переменной  $x$  функцию  $q(x, y)$  по дополнительной информации

$$u^{(k)}|_{x=0} = f^{(k)}(y, t), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3.12)$$

Для фиксированного  $k$  единственность решения обратной задачи (3.10)—(3.12) может быть доказана, используя технику представленную в работах [34] в классах аналитических функций.

Рассмотрим вспомогательную последовательность прямых задач ( $m \in \mathbb{Z}$ ) [32, 95]:

$$w_{tt}^{(m)} = w_{xx}^{(m)} + w_{yy}^{(m)} - q(x, y)w^{(m)}, \quad x > 0, \quad y \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}; \quad (3.13)$$

$$w^{(m)}|_{x=0} = e^{imy}\delta(t), \quad w_x^{(m)}|_{x=0} = 0. \quad (3.14)$$

Используя формулу Даламбера для задачи (3.13), (3.14), получим [32, 293]:

$$w^{(m)}(x, y, t) = \frac{1}{2}e^{imy}[\delta(t-x) + \delta(t+x)] + \frac{1}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} [-w_{yy}^{(m)} + q(x, y)w^{(m)}](\xi, y, \tau) d\xi d\tau. \quad (3.15)$$

Функция  $w^{(m)}$  обладает следующим свойством:

$$w^{(m)}(x, y, t) \equiv 0, \quad 0 < |t| < x, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Обозначим

$$\tilde{w}^{(m)}(x, y, t) = w^{(m)}(x, y, t) - \frac{1}{2}e^{imy}[\delta(t-x) + \delta(t+x)]. \quad (3.16)$$

Подставив (3.16) в уравнение (3.23), получим:

$$\tilde{w}^{(m)}(x, y, t) = \frac{1}{4}e^{imy}\theta(x-|t|) [xm^2 + Q(x, y, t)] + \frac{1}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} [-\tilde{w}_{yy}^{(m)} + q(x, y)\tilde{w}^{(m)}](\xi, y, \tau) d\xi d\tau. \quad (3.17)$$

Здесь ввели обозначение

$$Q(x, y, t) = \int_0^{\frac{x+t}{2}} q(\xi, y) d\xi + \int_0^{\frac{x-t}{2}} q(\xi, y) d\xi.$$

Тогда

$$\tilde{w}^{(m)}(x, y, x-0) = \frac{e^{imy}}{4} \left[ xm^2 + \int_0^x q(\xi, y) d\xi \right]. \quad (3.18)$$

Продолжим нечетным образом функцию  $u^{(k)}(x, y, t)$  на отрицательные  $t$ :

$$u^{(k)}(x, y, t) = -u^{(k)}(x, y, -t), \quad t < 0.$$

Тогда для функции  $f^{(k)}(y, t)$  справедливо представление

$$f^{(k)}(y, t) = \frac{e^{iky}}{2} [\theta(t) - \theta(-t)] + \tilde{f}^{(k)}(y, t), \quad y, t \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Здесь  $\tilde{f}^{(k)}(y, t)$  непрерывная и нечетная по переменной  $t$  функция.

Предположим, что решение обратной задачи (3.10)–(3.12) существует. Тогда функция  $u^{(k)}(x, y, t)$ , как решение соответствующей прямой задачи с учетом нечетного продолжения, удовлетворяет следующей последовательности ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$u_{tt}^{(k)} = u_{xx}^{(k)} + u_{yy}^{(k)} - q(x, y)u^{(k)}, \quad x > 0, \quad y \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}; \quad (3.19)$$

$$u^{(k)}|_{x=0} = f^{(k)}(y, t), \quad u_x^{(k)}|_{x=0} = 0. \quad (3.20)$$

Можно формально проверить, что

$$u^{(k)}(x, y, t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} f_m^{(k)}(t-s) w^{(m)}(x, y, s) ds, \quad x > 0, \quad y, t \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3.21)$$

От соотношения (3.21) в области  $|t| < x$ ,  $y \in \mathbb{R}$  можно перейти к следующей системе интегральных уравнений первого рода ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$\int_{-x}^x \sum_m f_m^{(k)}(t-s) \tilde{w}^{(m)}(x, y, s) ds = -\frac{1}{2} [f^{(k)}(y, t-x) + f^{(k)}(y, t+x)], \quad (3.22)$$

либо второго рода, продифференцировав (3.21) по переменной  $t$ :

$$\begin{aligned} \tilde{w}^{(k)}(x, y, t) + \int_{-x}^x \sum_m f_m^{(k)'}(t-s) \tilde{w}^{(m)}(x, y, s) ds = \\ = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} f^{(k)}(y, t-x) + \frac{\partial}{\partial t} f^{(k)}(y, t+x) \right]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Система уравнений (3.48) или (3.23) называется двумерным аналогом уравнения Гельфанда–Левитана.

Заметим, что в соответствии с формулой (3.18), решение  $q(x, y)$  обратной задачи (3.10)–(3.12) может быть вычислено, например, по формуле

$$q(x, y) = 4 \frac{d}{dx} \tilde{w}^{(0)}(x, y, x-0).$$



### 3.3 Двумерный аналог уравнения М.Г. Крейна

Рассмотрим последовательность прямых задач ( $k \in \mathbb{Z}$ ):

$$u_{tt}^{(k)} = u_{xx}^{(k)} + u_{yy}^{(k)} - \nabla \ln \rho(x, y) \nabla u^{(k)}, \quad x > 0, y \in \mathbb{R}, t > 0; \quad (3.24)$$

$$u^{(k)}|_{t < 0} \equiv 0, \quad u_x^{(k)}(+0, y, t) = e^{iky} \delta(t); \quad (3.25)$$

**Обратная задача:** требуется определить функцию  $\rho(x, y)$  из соотношений (3.24), (3.25) по дополнительной информации

$$u^{(k)}(+0, y, t) = f^{(k)}(y, t), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3.26)$$

Предположим, что  $\ln \rho(x, y)$  является  $2\pi$ -периодической функцией.

Необходимое условие разрешимости обратной задачи [13, 94, 95]:

$$f^{(k)}(y, +0) = -e^{iky}, y \in (-\pi, \pi), k \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим вспомогательную последовательность прямых задач ( $m \in \mathbb{Z}$ ):

$$w_{tt}^{(m)} = w_{xx}^{(m)} + w_{yy}^{(m)} - \nabla \ln \rho(x, y) \nabla w^{(m)}, \quad x > 0, y \in (-\pi, \pi), t \in \mathbb{R}, \quad (3.27)$$

$$w^{(m)}|_{x=0} = e^{imy} \delta(t), \quad w_x^{(m)}|_{x=0} = 0. \quad (3.28)$$

Тогда решение вспомогательной прямой задачи имеет следующую структуру (3.27)-(3.28) [13, 94, 95]:

$$w^{(m)}(x, y, t) = \frac{1}{2} e^{imy} \sqrt{\frac{\rho(x, y)}{\rho(0, y)}} [\delta(x+t) + \delta(x-t)] + \tilde{w}^{(m)}(x, y, t)$$

Здесь  $\tilde{w}^{(m)}(x, y, t)$  кусочно-постоянная функция.

Продолжим функции  $f^{(k)}$  и  $u^{(k)}$  на  $t < 0$  нечетным образом:

$$\begin{aligned} f^{(k)}(y, t) &= -f^{(k)}(y, -t), t < 0 \\ u^{(k)}(x, y, t) &= -u^{(k)}(x, y, -t), t < 0 \end{aligned}$$

Тогда функция  $u^{(k)}(x, y, t)$  после нечетного продолжения по переменной  $t$  удовлетворяет условиям:

$$u_{tt}^{(k)} = u_{xx}^{(k)} + u_{yy}^{(k)} - \nabla \ln \rho(x, y) \nabla u^{(k)}, \quad x > 0, y \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}; \quad (3.29)$$

$$u^{(k)}|_{x=0} = f^{(k)}(y, t), \quad u_x^{(k)}|_{x=0} = 0. \quad (3.30)$$

Решения последовательностей прямых задач (3.27), (3.28) и (3.29), (3.30) связаны соотношением

$$u^{(k)}(x, y, t) = \int_{\mathbb{R}} \sum_m f_m^{(k)}(t-s) w^{(m)}(x, y, s) ds, \quad x > 0, y \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}. \quad (3.31)$$

Здесь

$$f^{(k)}(y, t) = \sum_m f_m^{(k)}(t) e^{imy}.$$

Применим операцию

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^x \frac{(\cdot)}{\rho(\xi, y)} d\xi$$

к соотношению (3.31) и обозначим

$$V^{(m)}(x, y, t) = \int_0^x \frac{w^{(m)}(\xi, y, t)}{\rho(\xi, y)} d\xi,$$

тогда мы получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^x \frac{u^{(k)}(\xi, y, t)}{\rho(\xi, y)} d\xi &= \frac{\partial}{\partial t} \sum_m \int_{\mathbb{R}} V^{(m)}(x, y, s) f_m^{(k)}(t-s) ds = \\ &= -2V^{(k)}(x, y, t) + \sum_m \int_{-x}^x V^{(m)}(x, y, s) \left(f_m^{(k)}\right)'(t-s) ds. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Было показано [13, 95], что правая часть уравнения (3.32) после интегрирования по переменной  $y$  от  $-\pi$  до  $\pi$  не зависит от  $x$  и  $t$  и удовлетворяет следующему соотношению:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^x \frac{u^{(k)}(\xi, y, t)}{\rho(\xi, y)} d\xi dy = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^x \frac{u_t^{(k)}(\xi, y, t)}{\rho(\xi, y)} d\xi dy = - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{iky}}{\rho(0, y)} dy. \quad (3.33)$$

В самом деле, покажем, что производные по переменной  $x$  и  $t$  функции

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^x \frac{u_t^{(k)}(\xi, y, t)}{\rho(\xi, y)} d\xi dy$$

равны нулю в области  $|t| < x$ .

Продифференцируем по переменной  $x$  и получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^x \frac{u_t^{(k)}(\xi, y, t)}{\rho(\xi, y)} d\xi dy = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{u_t^{(k)}(x, y, t)}{\rho(x, y)} dy = 0, \quad |t| < x.$$

Найдем производную по переменной  $t$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^x \frac{u_t^{(k)}(\xi, y, t)}{\rho(\xi, y)} d\xi dy &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^x \left[ \left( \frac{u_\xi^{(k)}(\xi, y, t)}{\rho(\xi, y)} \right)_\xi + \left( \frac{u_y^{(k)}(\xi, y, t)}{\rho(\xi, y)} \right)_y \right] d\xi dy = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{u_x^{(k)}(x, y, t)}{\rho(x, y)} - \frac{u_x^{(k)}(0, y, t)}{\rho(0, y)} \right] dy = 0, \quad |t| < x. \end{aligned}$$

Следовательно

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^x \frac{u_t^{(k)}(\xi, y, t)}{\rho(\xi, y)} d\xi dy \equiv \text{const}, \quad |t| < x.$$

Найдем значение этой постоянной. Для этого продолжим функции  $u^{(k)}(x, y, t)$  и  $\rho(x, y)$  четным образом на отрицательные  $x$ . Тогда получим, что  $u^{(k)}(x, y, t)$  удовлетворяет следующим соотношениям

$$u_{tt}^{(k)} = u_{xx}^{(k)} + u_{yy}^{(k)} - \nabla \ln \rho(x, y) \nabla u^{(k)}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad (3.34)$$

$$u^{(k)}|_{t=0} = 0, \quad u_t^{(k)}|_{t=0} = -2e^{iky} \delta(x). \quad (3.35)$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +0} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^x \frac{u_t^{(k)}(\xi, y, t)}{\rho(\xi, y)} d\xi dy &= \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow +0} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-x}^x \frac{u_t^{(k)}(\xi, y, t)}{\rho(\xi, y)} d\xi dy = - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{iky}}{\rho(0, y)} dy. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\Phi^{(m)}(x, t) = \int_{-\pi}^{\pi} V^{(m)}(x, y, t) dy,$$

и получим из (3.33) и (3.32):

$$2\Phi^{(k)}(x, t) - \sum_m \int_{-x}^x (f_m^{(k)})'(t-s) \Phi^{(m)}(x, s) ds = - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{iky}}{\rho(0, y)} dy, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3.36)$$

Для каждого фиксированного значения  $x$  система уравнений (3.36) является линейным интегральным уравнением второго рода. Система уравнений (3.36) является многомерным аналогом уравнения М.Г. Крейна [32, 95].

Показано [32, 95], что

$$V^{(m)}(x, y, x - 0) = \frac{e^{imy}}{2} \int_{-x}^x \frac{1}{\rho(\xi, y)} \sqrt{\frac{\rho(\xi, y)}{\rho(0, y)}} \delta(x - \xi) d\xi = \frac{e^{imy}}{2\sqrt{\rho(x, y)\rho(0, y)}}.$$

Таким образом

$$\Phi^{(m)}(x, x - 0) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{imy}}{2\sqrt{\rho(x, y)\rho(0, y)}} dy.$$

Откуда решение обратной задачи  $\rho(x, y)$  можно определить по формуле

$$\rho(x, y) = \frac{\pi^2}{\rho(0, y)} \left[ \sum_m \Phi^m(x, x - 0) e^{-imy} \right]^{-2} \quad (3.37)$$

Для того, чтобы найти решение  $\rho(x, y)$  обратной задачи в точке  $x_0 > 0$ , необходимо решить систему (3.36) полагая  $x = x_0$ , и вычислить решение  $\rho(x_0, y)$  по формуле (3.37).

Дискретные аналоги уравнения Гельфанда–Левитана исследованы в работах [32, 294–297].

## 3.4 Численные алгоритмы решения

### 3.4.1 $N$ -приближение двумерного аналога уравнения И.М. Гельфанда и Б.М. Левитана

Для численного решения двумерной обратной задачи (3.10)–(3.12) мы применим метод регуляризации, основанный на проекции изначальной постановки задачи на  $N$ -мерное подпространство, образуемое базисной системой функций  $\{e^{iky}\}_{k=0, \pm 1, \dots, \pm N}$  [13, 28]. Данный подход сводит двумерную обратную задачу к системе одномерных обратных задач [32].

Пусть

$$u^{(k)}(x, y, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n^{(k)}(x, t) e^{iny}. \quad (3.38)$$

Перейдем от (3.10)–(3.12) к следующей постановке обратной задачи на коэффициенты Фурье функций:

$$\frac{\partial^2 u_n^{(k)}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_n^{(k)}}{\partial x^2} - n^2 u_n^{(k)}(x, t) - \sum_{m \in \mathbb{Z}} q_m(x) u_{n-m}^{(k)}(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \quad (3.39)$$

$$u_n^{(k)}|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u_n^{(k)}}{\partial t}|_{t=0} = \delta_{kn} \delta(x); \quad (3.40)$$

$$u_n^{(k)}|_{x=0} = f_n^{(k)}(t); \quad (3.41)$$

$$k, n \in \mathbb{Z}.$$

Здесь

$$q(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} q_k(x) e^{iky},$$

и  $\delta_{kn}$  символ Кронеккера

$$\delta_{kn} = \begin{cases} 1, & k = n; \\ 0, & \end{cases}$$

Обратной задаче (3.39)–(3.41) сопоставим ее  $N$ -приближение:

$$\frac{\partial^2 \vec{V}^{(k)}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vec{V}^{(k)}}{\partial x^2} - (K + P(x)) \vec{V}^{(k)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (3.42)$$

$$\vec{V}^{(k)}|_{t=0} = 0, \quad \vec{V}_t^{(k)}|_{t=0} = \vec{E} \delta(t), \quad (3.43)$$

$$\vec{V}^{(k)}|_{x=0} = \vec{F}^{(k)}(t). \quad (3.44)$$

Здесь

$$\vec{V}^{(k)}(x, t) = (v_{-N}^{(k)}(x, t), v_{-N+1}^{(k)}(x, t), \dots, v_0^{(k)}(x, t), \dots, v_{-N}^{(k)}(x, t));$$

$$\vec{E} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0),$$

где 1 стоит на месте  $k = n$ ;

$$\vec{F}^{(k)}(t) = (f_{-N}^{(k)}(t), f_{-N+1}^{(k)}(t), \dots, f_{-N}^{(k)}(t));$$

$K, P$  являются квадратными матрицами размерности  $2N + 1$ :

$$K_{km} = k^2 \delta_{km}, \quad |k|, |m| \leq N;$$

$$P_{km} = q_{k-m}, \quad |k|, |m| \leq N, \quad |k - m| \leq N.$$

Заметим, что решение прямой задачи (3.42), (3.43) обладает следующим свойством

$$\vec{V}^{(k)}(x, t) \equiv 0, \quad |x| > t,$$

поэтому вместо (3.42), (3.43) будем решать эквивалентную ей прямую задачу:

$$\frac{\partial^2 \vec{V}^{(k)}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vec{V}^{(k)}}{\partial x^2} - (K + P(x))\vec{V}^{(k)}, \quad |x| < t, \quad (3.45)$$

$$\vec{V}_x^{(k)}|_{x=0} = 0, \quad (3.46)$$

$$\vec{V}^{(k)}|_{t=x} = \frac{1}{2}\vec{E}. \quad (3.47)$$

Рассмотрим двумерный аналог уравнения Гельфанда–Левитана (3.23) для  $N$ -приближения:

$$\begin{aligned} \tilde{w}^{(k)}(x, y, t) + \int_{-x}^x \sum_{|m| \leq N} f_m^{(k)'}(t-s) \tilde{w}^{(m)}(x, y, s) ds = \\ = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} f^{(k)}(y, t-x) + \frac{\partial}{\partial t} f^{(k)}(y, t+x) \right], \quad |k| \leq N, \quad |t| < x, \quad y \in (-\pi, \pi). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Проведем дискретизацию системы уравнений (3.67). Для этого разобьем отрезок  $(-x, x)$  на  $2N_x + 1$  равных частей. Обозначим  $h = x/N_x$ ,  $h_y = \pi/N_y$ ,  $\bar{w}_{l,n}^{(k)} = w^{(k)}(x, lh_y, nh)$  и пусть  $t = jh$  и  $|j| \leq N_x$ . Тогда получим следующую систему линейных алгебраических уравнений

$$\bar{w}_{l,j}^{(k)} + \sum_{|m| \leq N} \frac{h}{2} \left[ [f_m^{(k)'}]_{j-N_x} \bar{w}_{l,N_x}^{(m)} + [f_m^{(k)'}]_{j+N_x} \bar{w}_{l,-N_x}^{(m)} \right] + \quad (3.49)$$

$$+ h \sum_{|m| \leq N} \sum_{i=-N_x+1}^{N_x-1} [f_m^{(k)'}]_{j-i} \bar{w}_{l,i}^{(m)} = \quad (3.50)$$

$$= -\frac{1}{2} \left[ [f_t^{(k)}]_{l,j-N_x} + [f_t^{(k)}]_{l,j+N_x} \right], \quad |k| \leq N, \quad |j| \leq N_x, \quad |l| \leq N_y. \quad (3.51)$$

С.И. Кабанихиным и Г.Б. Бакановым было доказано [297], что если решение дискретного аналога обратной задачи (3.42)–(3.44) существует, то система уравнений (3.51) (дискретный аналог двумерного уравнения Гельфанда–Левитана) однозначно разрешима. Если система уравнений (3.51) однозначно разрешима, то решение дискретного аналога обратной задачи (3.42)–(3.44) существует и единственно.

### Проверка численного решения прямой задачи

Найдем решение прямой задачи, в случае, когда  $q(x, y) = a^2 = \text{const}$  в области  $(x, y) \in (0, 2.5) \times (-\pi, \pi)$ ,  $t \in (0, 5)$ :

$$u_{tt}^{(k)} = u_{xx}^{(k)} + u_{yy}^{(k)} - a^2 u^{(k)}; \quad (3.52)$$

$$u^{(k)}|_{t=0} = 0, \quad u_t^{(k)}|_{t=0} = \delta(x)e^{iky}. \quad (3.53)$$

Рассмотрим семейство прямых задач на первые  $N$  коэффициентов Фурье:

$$\frac{\partial^2 u_n^{(k)}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_n^{(k)}}{\partial x^2} - (n^2 + a^2)u_n^{(k)}(x, t), \quad |n| \leq N; \quad (3.54)$$

$$u_n^{(k)}|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u_n^{(k)}}{\partial t}|_{t=0} = \delta_{kn}\delta(x). \quad (3.55)$$

Отметим, что решение прямой задачи (3.54), (3.55) дается через функцию Бесселя нулевого порядка [298]:

$$u_n^{(k)}(x, t) = \delta_{kn} J_0\left(-\sqrt{(n^2 + a^2)(t^2 - x^2)}\right) \theta(t - |x|). \quad (3.56)$$

Здесь

$$J_0(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(s!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s}.$$

Для численного решения прямой задачи (3.54), (3.55) перейдем к эквивалентной постановке (задаче Гурса) [28, 32, 85]:

$$\frac{\partial^2 u_n^{(k)}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_n^{(k)}}{\partial x^2} - (n^2 + a^2)u_n^{(k)}(x, t), \quad 0 < x < t, \quad |n| \leq N, ; \quad (3.57)$$

$$u_n^{(k)}|_{t=x} = \frac{1}{2}\delta_{kn}, \quad \frac{\partial u_n^{(k)}}{\partial x}|_{x=0} = 0. \quad (3.58)$$

Введем равномерную сетку по переменной  $x$  с шагом  $h$ ,  $h = 2.5/N_x$ ,  $N_x = 500$ . Число коэффициентов Фурье  $N = 30$ .

Решим последовательность прямых задач (3.54), (3.55) конечно-разностным методом в случае, когда  $a \equiv 1$ . На рисунке 3.1 приведены коэффициенты Фурье функции  $u_n^{(k)}(0, t)$ .

Исследуем устойчивость решения прямой задачи. Найдем решение прямой задачи в области  $(x, y) \in (0, 1) \times (-\pi, \pi)$ ,  $t \in (0, 2)$ . Пусть число разбиений по переменной  $x$  равно  $N_x = 200$ .

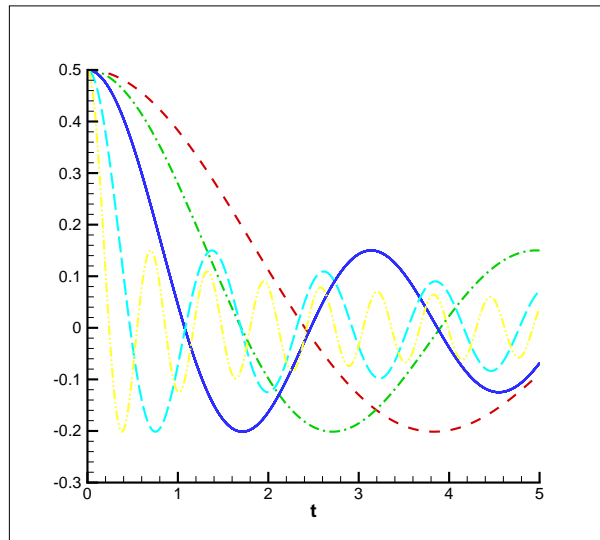


Рисунок 3.1: Коэффициенты Фурье  $u_0^{(0)}(0, t)$ ,  $u_1^{(1)}(0, t)$ ,  $u_2^{(2)}(0, t)$ ,  $u_5^{(5)}(0, t)$ ,  $u_{10}^{(10)}(0, t)$

### Проверка численного решения обратной задачи

Рассмотрим задачу восстановления константы  $a \equiv 1$  (см. рис. 3.2, 3.4). На рис. 3.3, 3.5 приведено приближенное решение обратной задачи в случае данных с шумом  $\varepsilon = 0.05$ . Приближенное решение обратной задачи, полученное для  $N$  гармоник, обозначим через  $q_N$ . Расчеты показывают, что норма невязки  $\|1 - q_N\|_{L^2((0,2.5) \times (-\pi, \pi))}$  для  $N = 1$ ,  $N = 2$ ,  $N = 5$ ,  $N = 10$ ,  $N = 20$  примерно одинакова. На 3.6 приведен график функции  $\|1 - q_N\|$  в зависимости от числа восстанавливаемых гармоник Фурье  $N$  в случае данных с шумом  $\varepsilon = 0.05$ . Видно, что  $N$  является параметром регуляризации.

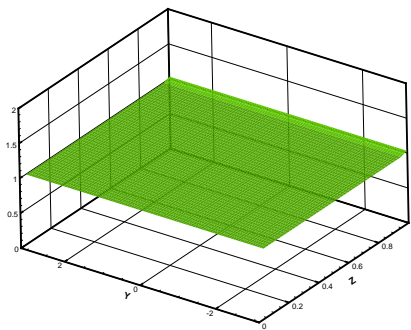


Рисунок 3.2: Приближенное решение обратной задачи,  $N = 2$ ,  $\varepsilon = 0$ .

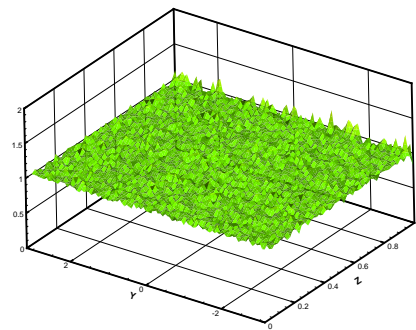


Рисунок 3.3: Приближенное решение обратной задачи,  $N = 2$ ,  $\varepsilon = 0.05$ .

Исследуем свойства матрицы  $\mathbb{A}$ .



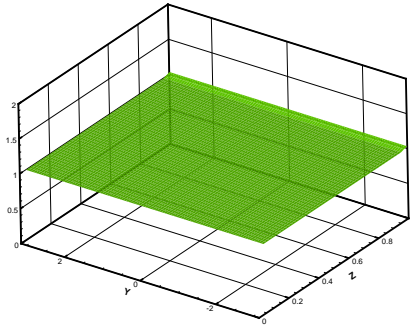


Рисунок 3.4: Приближенное решение обратной задачи,  $N = 10$ ,  $\varepsilon = 0$ .

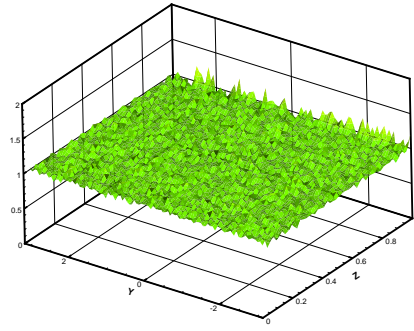


Рисунок 3.5: Приближенное решение обратной задачи,  $N = 10$ ,  $\varepsilon = 0.05$ .

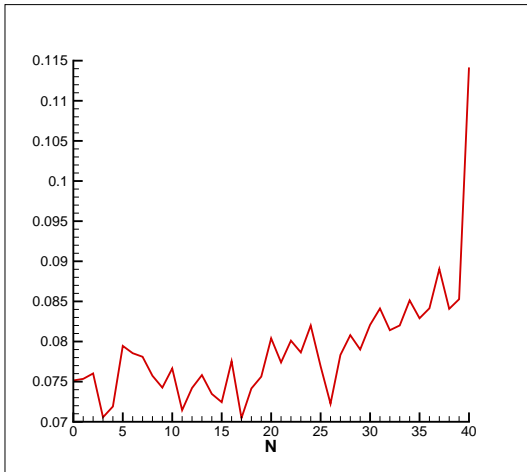


Рисунок 3.6: График функции  $\|1 - q_N\|$ ,  $\varepsilon = 0.05$ .

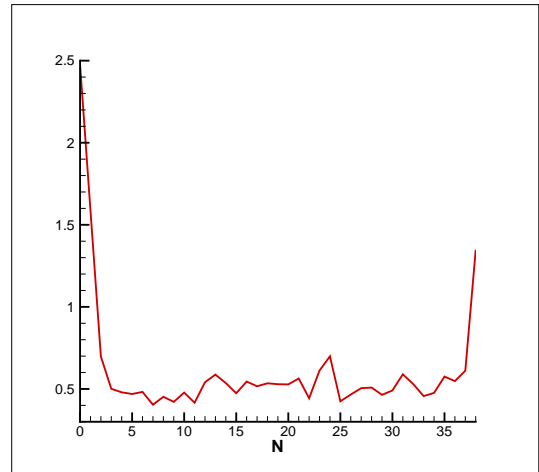


Рисунок 3.7: График функции  $\|1 - q_N\|$ ,  $\varepsilon = 0.1$ .

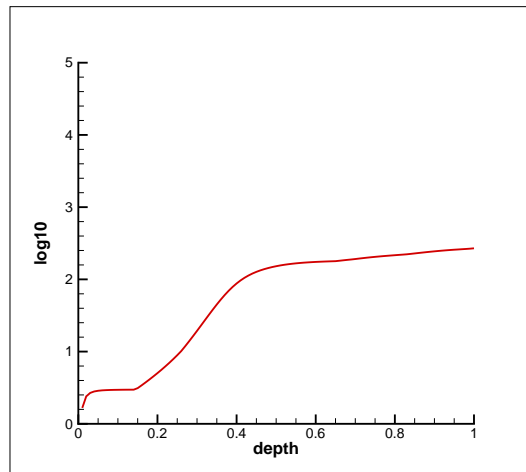


Рисунок 3.8: График функции  $\log(\mu(A))$ . Параметры задачи:  $T = 1$ ,  $N_x = 100$ ,  $N = 10$

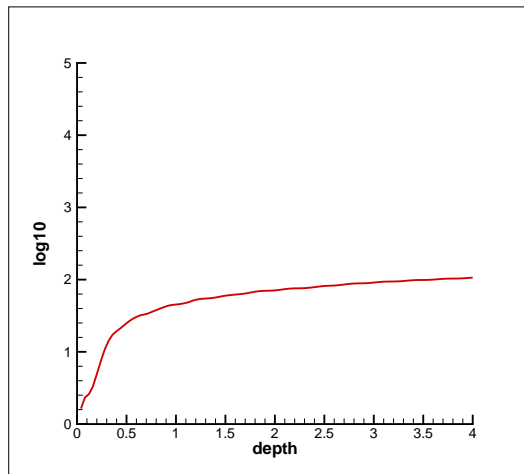


Рисунок 3.9: График функции  $\log(\mu(A))$ . Параметры задачи:  $T = 4$ ,  $N_x = 100$ ,  $N = 10$ .

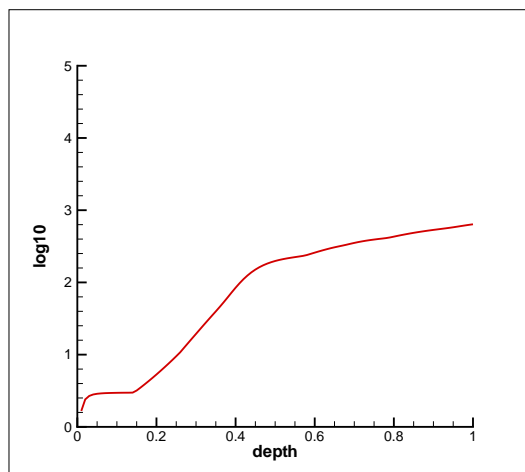


Рисунок 3.10: График функции  $\log(\mu(A))$ . Параметры задачи:  $T = 1$ ,  $N_x = 100$ ,  $N = 10$ ,  
 $\varepsilon = 0.05$

На рисунках 3.8–3.10 приведены графики десятичного логарифма числа обусловленности матрицы  $\log(\mu(A))$  двумерного аналога уравнения Гельфанда–Левитана после дискретизации. На всех рисунках горизонтальная ось означает глубину. Из рисунков видно, что глубина решения уравнения Гельфанда–Левита влияет на число обусловленности матрицы.

Рассмотрим задачу восстановления функции  $q(x, y)$  (см. рис. 3.11). Данные для решения обратной задачи насчитывались при  $x = 1$ ,  $N_x = 200$ ,  $N = 40$ . На рисунке 3.12 приведены коэффициенты Фурье данных обратной задачи:  $f_0^{(0)}(t)$ ,  $f_2^{(2)}(t)$ ,  $f_3^{(3)}(t)$ ,  $f_5^{(5)}(t)$ ,  $f_{10}^{(10)}(t)$ ,  $f_{20}^{(20)}(t)$ . На рисунках 3.13–3.24 приведены результаты численного решения двумерного аналога уравнения Гельфанда–Левитана (3.48) для различного числа гармоник Фурье — приближенное решение обратной задачи  $q(x, y)$ .

Приближенные данные брались в виде

$$f^\varepsilon(y, t) = f(y, t) + \varepsilon\alpha(y, t)(f_{\max} - f_{\min}).$$

Здесь  $\varepsilon$  уровень шума в данных,  $\alpha(y, t)$  равномерно распределенное случайное число на отрезке  $[-1, 1]$  для фиксированного значения переменных  $y$  и  $t$ ,  $f_{\max}$  и  $f_{\min}$  максимум и минимум значений точных данных.

На рисунках 3.23 и 3.24 для сглаживания поверхности использовалось преобразование Гильберта по переменной  $y$ :

$$\tilde{f}(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{y - \tau} d\tau. \quad (3.59)$$

### 3.4.2 $N$ -приближение двумерного аналога уравнения М.Г. Крейна

Как и предыдущем пункте, рассмотрим метод регуляризации для численного решения двумерной обратной задачи (3.24)–(3.26), основанный на проекции изначальной постановки задачи на  $N$ -мерное подпространство.

Предположим, что решение задачи (3.24), (3.25) можно представить в виде ряда:

$$u^{(k)}(x, y, t) = \sum_m u_m^{(k)}(x, t) e^{imy}.$$

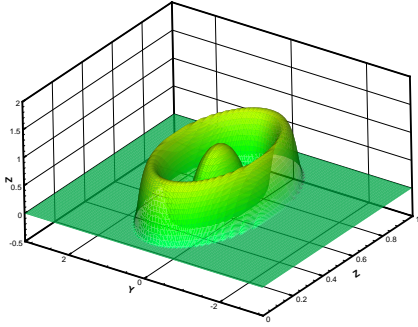


Рисунок 3.11: Точное решение.

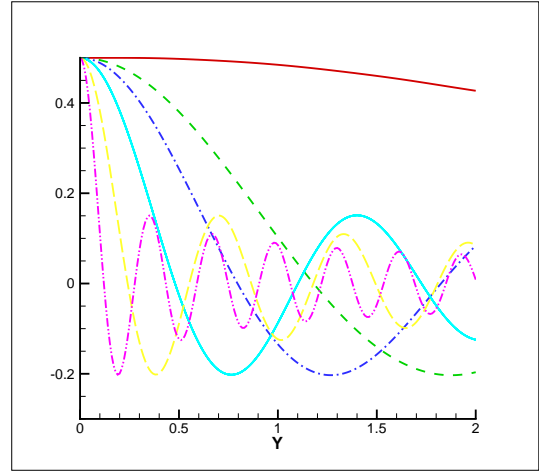


Рисунок 3.12: Коэффициенты Фурье данных обратной задачи:  $f_0^{(0)}(t)$ ,  $f_2^{(2)}(t)$ ,  $f_3^{(3)}(t)$ ,  $f_5^{(5)}(t)$ ,  $f_{10}^{(10)}(t)$ ,  $f_{20}^{(20)}(t)$ .

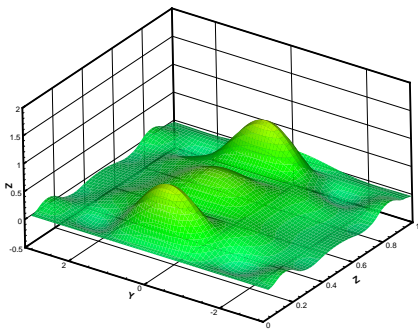


Рисунок 3.13: Приближенное решение,  $N = 2$ ,  $\varepsilon = 0$ .

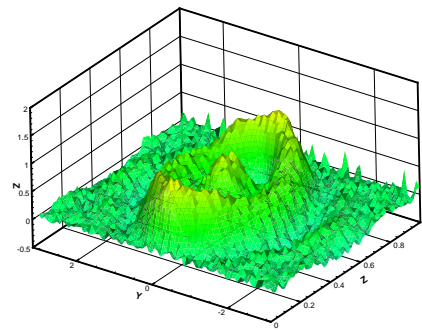


Рисунок 3.14: Приближенное решение,  $N = 2$ ,  $\varepsilon = 0.02$ .

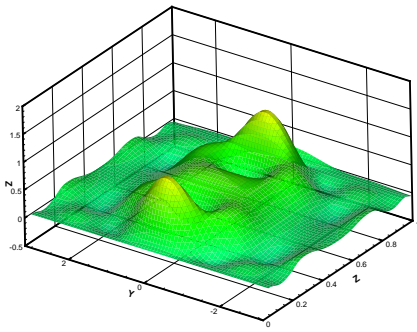
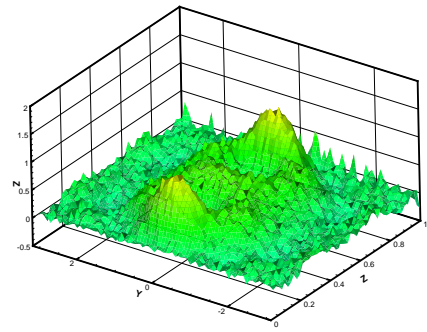


Рисунок 3.15: Приближенное решение,  $N = 3$ ,  $\varepsilon = 0$ .



$\varepsilon = 0.02$ .

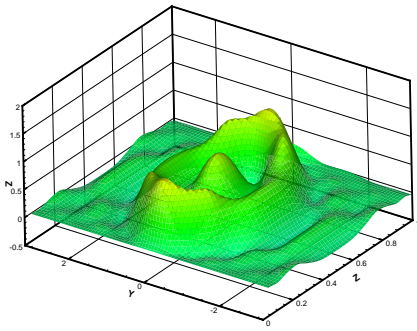
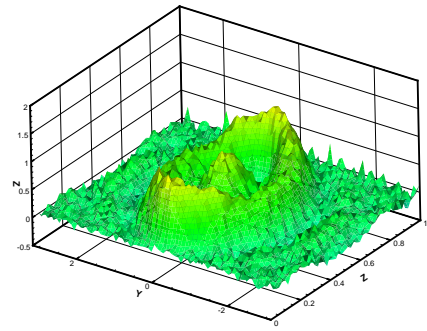


Рисунок 3.17: Приближенное решение,  $N = 5$ ,  $\varepsilon = 0$ .



$\varepsilon = 0.02$ .

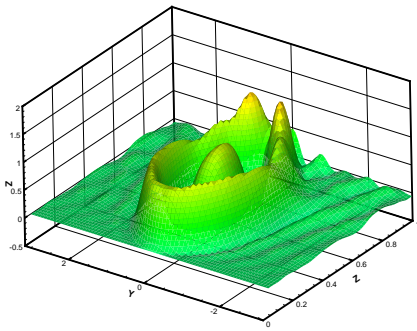


Рисунок 3.19: Приближенное решение,  
 $N = 10$ ,  $\varepsilon = 0$ .

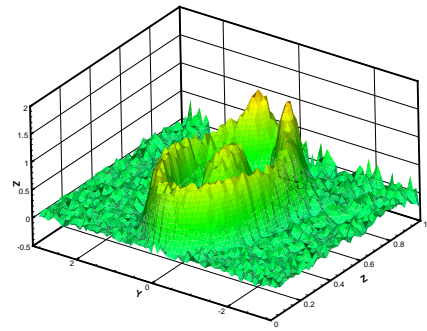


Рисунок 3.20: Приближенное решение,  
 $N = 10$ ,  $\varepsilon = 0.02$ .

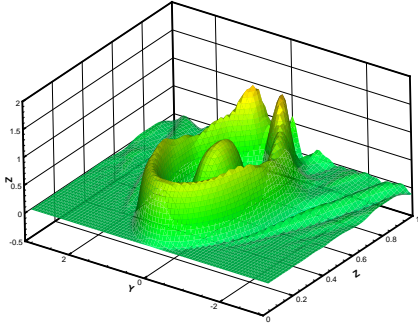


Рисунок 3.21: Приближенное решение,  
 $N = 10, \varepsilon = 0$ .

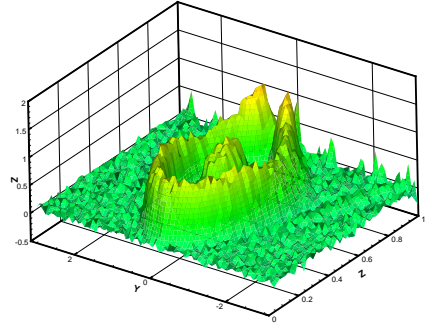


Рисунок 3.22: Приближенное решение,  
 $N = 10, \varepsilon = 0.02$ .

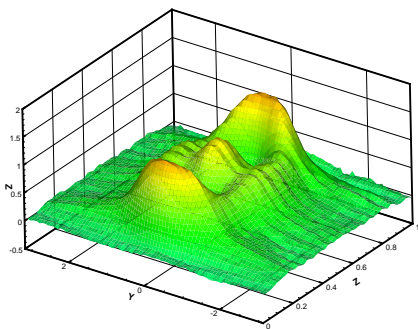


Рисунок 3.23: Приближенное сглаженное  
решение,  $N = 10, \varepsilon = 0$ .

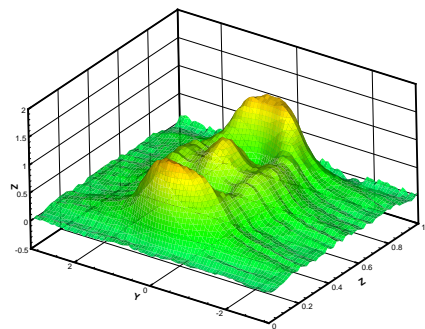


Рисунок 3.24: Приближенное сглаженное  
решение,  $N = 20, \varepsilon = 0.02$ .

Мы также предположим, что функция  $\ln \rho(x, y)$  представима в виде ряда:

$$\ln \rho(x, y) = \sum_m a_m(x) e^{imy}.$$

Тогда обратную задачу (3.24)–(3.26) можно записать в виде бесконечной системы одномерных обратных задач на коэффициенты Фурье функций:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_n^{(k)}}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u_n^{(k)}}{\partial x^2} - n^2 u_n^{(k)}(x, t) - \\ &- \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{\partial}{\partial x} a_m(x) \frac{\partial}{\partial x} u_{n-m}^{(k)}(x, t) + \sum_{m \in \mathbb{Z}} m(m-n) a_m(x) u_{n-m}^{(k)}(x, t), \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad k, n \in \mathbb{Z};$$

$$u_n^{(k)}|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} u_n^{(k)}|_{t=0} = \delta_{kn} \delta(x); \quad (3.61)$$

$$u_n^{(k)}|_{x=0} = f_n^{(k)}(t). \quad (3.62)$$

Здесь  $\delta_{kn}$  — символ Кронеккера.

Обратной задаче (3.60)–(3.62) сопоставим ее  $N$ -приближение:

$$\frac{\partial^2 \vec{V}^{(k)}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vec{V}^{(k)}}{\partial x^2} - K \vec{V}^{(k)} + A(x) \vec{V}^{(k)} - B(x) \frac{\partial \vec{V}^{(k)}}{\partial x}, \quad x > 0, \quad t > 0; \quad (3.63)$$

$$\vec{V}^{(k)}|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \vec{V}^{(k)}}{\partial t}|_{t=0} = \vec{I}^{(k)} \delta(x); \quad (3.64)$$

$$\vec{V}^{(k)}|_{x=0} = \vec{F}^{(k)}(t). \quad (3.65)$$

Здесь  $\vec{V}^{(k)}(x, t) = (v_{-N}^{(k)}(x, t), v_{-N+1}^{(k)}(x, t), \dots, v_0^{(k)}(x, t), \dots, v_{-N}^{(k)}(x, t))$ ,  $\vec{F}^{(k)}(t) = (f_{-N}^{(k)}(t), f_{-N+1}^{(k)}(t), \dots, f_{-N}^{(k)}(t))$ ,  $\vec{I}^{(k)}$  — вектор,  $k$ -ый элемент которого, равен 1, а все остальные элементы — нули.

Здесь квадратные матрицы  $K$ ,  $A$ ,  $B$  имеют размерность  $(2N+1) \times (2N+1)$  и состоят из следующих элементов:

$$K_{km} = m^2 \delta_{km}, \quad |k| \leq N, \quad |m| \leq N;$$

$$A_{km}(x) = \theta(N - |k - m|) m(k - m) p_{k-m}(x), \quad |k|, |m| \leq N, \quad |k - m| \leq N;$$

$$B_{km}(x) = \theta(N - |k - m|) \frac{\partial}{\partial x} p_{k-m}(x), \quad |k|, |m| \leq N, \quad |k - m| \leq N.$$

Выпишем  $N$ -приближение для двумерного аналога уравнения М. Г. Крейна (3.36):

$$2\Phi^{(k)}(x, t) - \sum_{|m| \leq N} \int_{-x}^x f_m^{(k)'}(t - s) \Phi^{(m)}(x, s) ds = G^{(k)}, \quad (3.66)$$

где  $|t| < x$ ,  $|k| \leq N$ . Уравнение (3.66) можно записать в векторно–матричной форме:

$$2\vec{\Phi}(x, t) - \int_{-x}^x \mathbb{F}(t-s) \vec{\Phi}(x, s) ds = \vec{G}, \quad |t| < x. \quad (3.67)$$

Здесь неизвестная вектор-функция

$\vec{\Phi}(x, t) = (\Phi^{(-N)}(x, t), \dots, \Phi^{(0)}(x, t), \dots, \Phi^{(N)}(x, t))^T$ , вектор правой части  $\vec{G} = (G^{(-N)}, \dots, G^{(0)}, \dots, G^{(N)})^T$  и матрица

$$\mathbb{F}(t) = \begin{pmatrix} f_{-N}^{(-N)'} & f_{-N+1}^{(-N)'} & \cdots & f_{-N+1}^{(-N)'} & \cdots & f_N^{(-N)'} \\ f_{-N}^{(-N+1)'} & f_{-N+1}^{(-N+1)'} & \cdots & f_{-N+1}^{(-N+1)'} & \cdots & f_N^{(-N+1)'} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_{-N}^{(0)'} & f_{-N+1}^{(0)'} & \cdots & f_{-N+1}^{(0)'} & \cdots & f_N^{(0)'} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_{-N}^{(N)'} & f_{-N+1}^{(N)'} & \cdots & f_{-N+1}^{(N)'} & \cdots & f_N^{(N)'} \end{pmatrix} (t).$$

Проведем дискретизацию системы уравнений (3.67). Для этого разобьем отрезок  $(-x, x)$  на  $2N_x + 1$  равных частей. Обозначим  $h = x/N_x$ ,  $\vec{\Psi}_k = \vec{\Phi}(x, kh)$  и пусть  $t = jh$  и  $|j| \leq N_x$ . Тогда получим следующую систему линейных алгебраических уравнений

$$2\vec{\Psi}_j - \frac{h}{2} [\mathbb{F}_{j-N_x} \vec{\Psi}_{N_x} + \mathbb{F}_{j+N_x} \vec{\Psi}_{-N_x}] - h \sum_{k=-N_x+1}^{N_x-1} \mathbb{F}_{j-k} \vec{\Psi}_k = \vec{G}, \quad |j| \leq N_x.$$

Запишем полученную систему в виде

$$\mathbb{A} \vec{\Psi} = \vec{G}. \quad (3.68)$$

Квадратная матрица  $\mathbb{A}$  имеет размерность  $(2N_x + 1) \times (2N_x + 1)$ .

Восстановление функции плотности  $\rho(x, y)$ . Зафиксируем следующие параметры задачи:  $x = 1$ ,  $N_x = 50$ ,  $N_y = 50$ .

Рассмотрим восстановление функции плотности в двух случаях:

1) восстановление гладкой функции  $\rho(x, y)$  (см. рис. 3.25):

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1 + 4 \cos(\frac{\pi y}{2} + 1) e^{-160(x-0,3)^2}, & x \in [0.1, 0.5], y \in [-2, 2] \\ 1 + 1.5 \cos(\pi y + 1) e^{-200(x-0,8)^2}, & x \in [0.7, 0.9], y \in [-1, 1] \\ 1, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$



2) восстановление кусочно-постоянной функции  $\rho(x, y)$  (см. рис. 3.37):

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 2, & x \in [0.2, 0.5], y \in [-1, 1] \\ 1.5, & x \in [0.7, 0.8], y \in [-0.5, 0.5] \\ 1, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Приближенные данные брались в виде

$$f^\varepsilon(y, t) = f(y, t) + \varepsilon \alpha(y, t)(f_{\max} - f_{\min}).$$

Здесь  $\varepsilon$  уровень шума в данных,  $\alpha(y, t)$  равномерно распределенное случайное число на отрезке  $[-1, 1]$  для фиксированного значения переменных  $y$  и  $t$ ,  $f_{\max}$  и  $f_{\min}$  максимум и минимум значений точных данных.

### Восстановление гладкой функции. Точные данные.

На рисунках 3.26—3.30 восстанавливается гладкая функция плотности  $\rho(x, y)$  (см. рисунок 3.25) в случае точных данных.

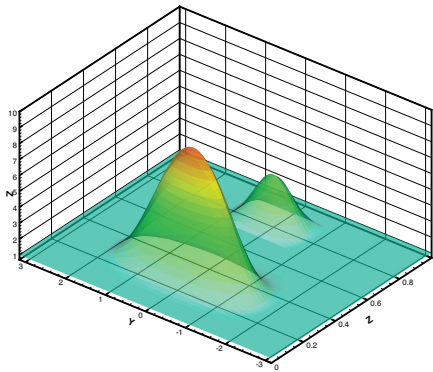


Рисунок 3.25: Точное решение обратной задачи  $N = 30$ .

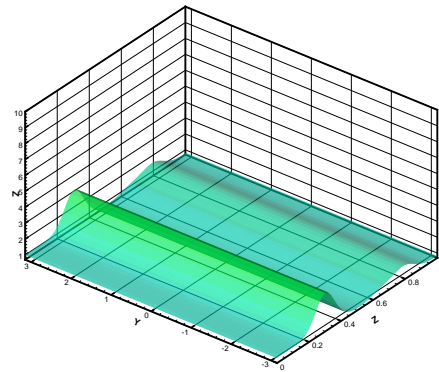


Рисунок 3.26: Приближенное решение обратной задачи,  $N = 0$ .

### Восстановление гладкой функции. Уровень шума в данных 5%.

На рисунках 3.32—3.34 восстанавливается гладкая функция плотности  $\rho(x, y)$  (см. рисунок 3.25) в случае зашумленных данных  $\varepsilon = 0.05$ .

### Восстановление гладкой функции. Уровень шума в данных 5%. Сглаживание преобразованием Гильберта.

На рисунках 3.36, 3.34, 3.40, 3.42, 3.44, 3.46, 3.48, 3.50 для сглаживания использовалось преобразование Гильберта по переменной  $y$  (3.59).

### Восстановление кусочно-постоянной функции

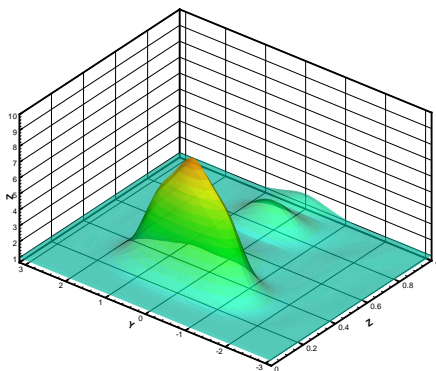


Рисунок 3.27: Приближенное решение  
обратной задачи,  $N = 5$ .

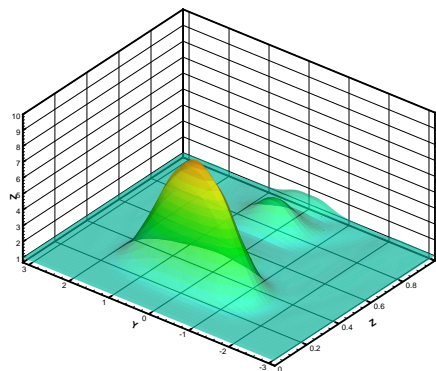


Рисунок 3.28: Приближенное решение  
обратной задачи,  $N = 10$ .

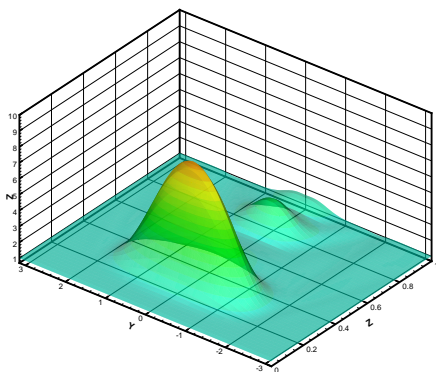


Рисунок 3.29: Приближенное решение  
обратной задачи,  $N = 20$ .

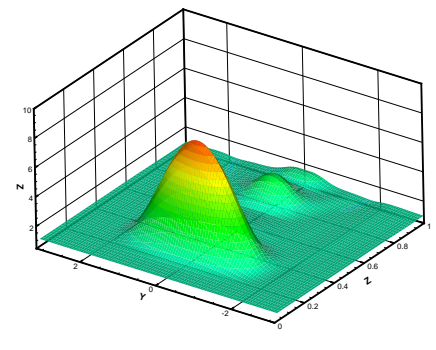


Рисунок 3.30: Приближенное решение  
обратной задачи,  $N = 30$ .

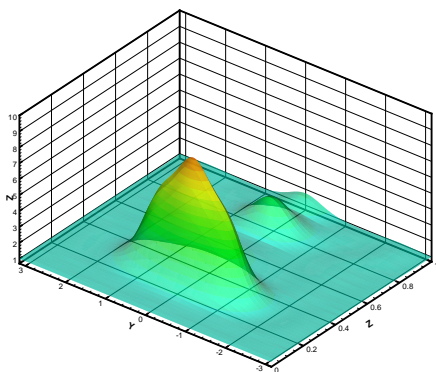


Рисунок 3.31: Приближенное решение  
обратной задачи,  $N = 5$ .

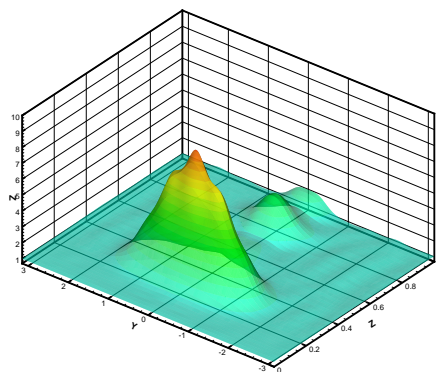


Рисунок 3.32: Приближенное решение  
обратной задачи,  $N = 10$ .

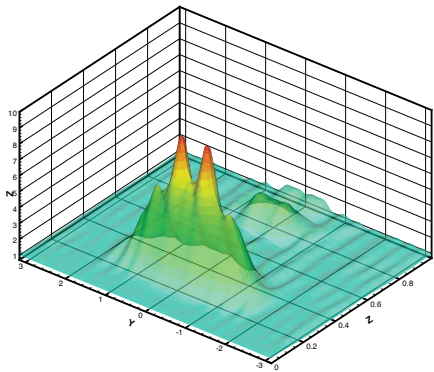


Рисунок 3.33: Приближенное решение обратной задачи,  $N = 20$ .

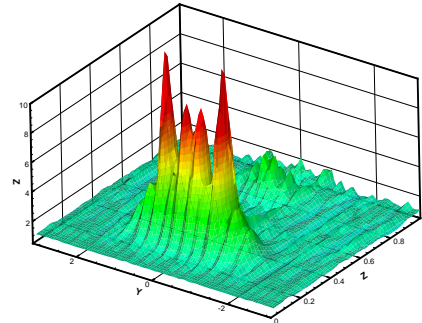


Рисунок 3.34: Приближенное решение,  $N = 30$ .

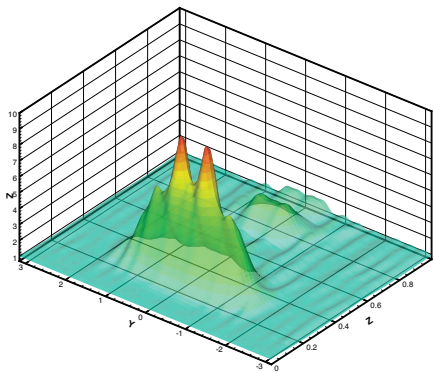


Рисунок 3.35: Приближенное решение обратной задачи,  $N = 20$ . Сглаживание преобразованием Гильберта (3.59).

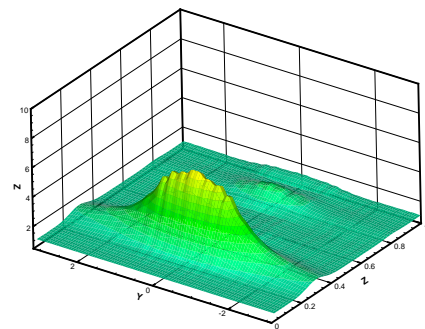


Рисунок 3.36: Приближенное решение обратной задачи,  $N = 30$ . Сглаживание преобразованием Гильберта.

На рисунках 3.37—3.50 восстанавливается кусочно-постоянная функция плотности  $\rho(x, y)$ .

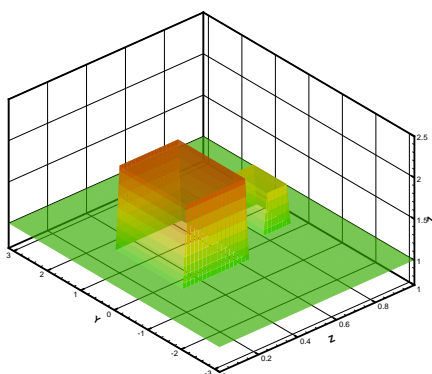


Рисунок 3.37: Точное решение обратной задачи,  $N = 30$ .

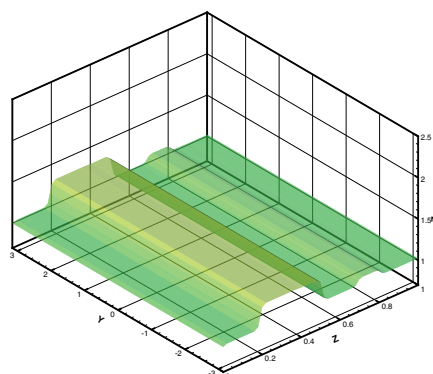


Рисунок 3.38: Приближенное решение обратной задачи,  $N = 0$ ,  $\varepsilon = 0$ .

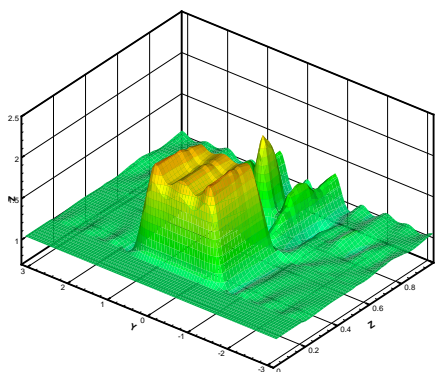


Рисунок 3.39: Приближенное решение обратной задачи,  $N = 10$ ,  $\varepsilon = 0$ .

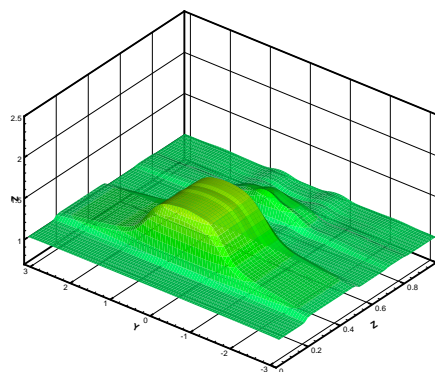


Рисунок 3.40: Приближенное решение обратной задачи,  $N = 10$ ,  $\varepsilon = 0$ . Сглаживание преобразованием Гильберта (3.59).

### Восстановление кусочно-постоянной функции в акустическом томографе

Рассмотрим математическую модель двумерного акустического томографа в случае, когда дополнительная информация задается на части границы области. Считаем, что скорость распространения звука нам известна и задача состоит в определении плотности тела.

Считаем, что акустический томограф представляет из себя квадрат со стороной 18 см. Внутри томографа находится вода, в который помещается часть

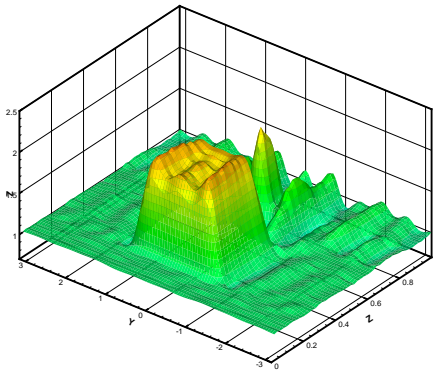


Рисунок 3.41: Приближенное решение обратной задачи,  $N = 10$ ,  $\varepsilon = 0.02$ .

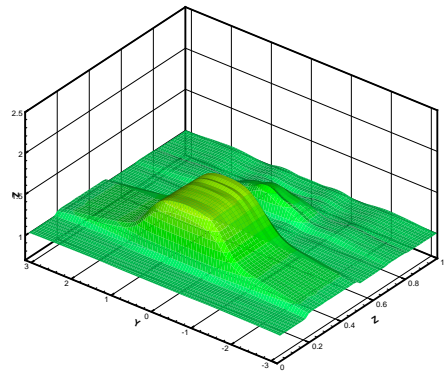


Рисунок 3.42: Приближенное решение обратной задачи,  $N = 10$ ,  $\varepsilon = 0.02$ . Сглаживание преобразованием Гильберта (3.59).

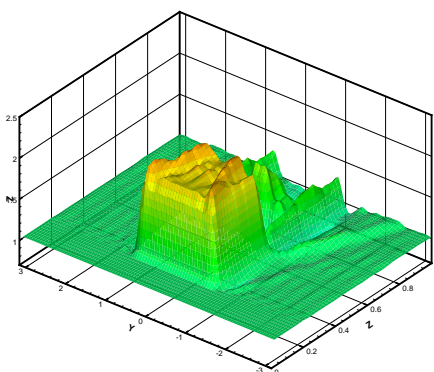


Рисунок 3.43: Приближенное решение обратной задачи,  $N = 20$ ,  $\varepsilon = 0$ .

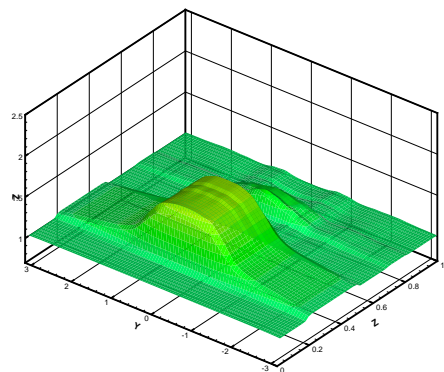


Рисунок 3.44: Приближенное решение обратной задачи,  $N = 20$ ,  $\varepsilon = 0$ . Сглаживание преобразованием Гильберта (3.59).



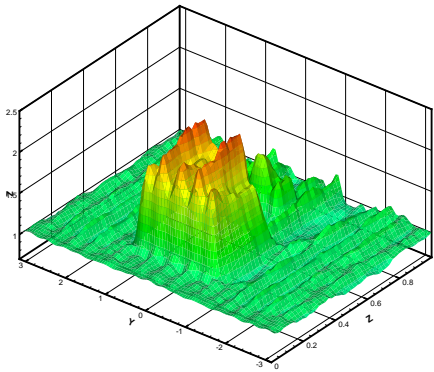


Рисунок 3.45: Приближенное решение обратной задачи,  $N = 20$ ,  $\varepsilon = 0.02$ .

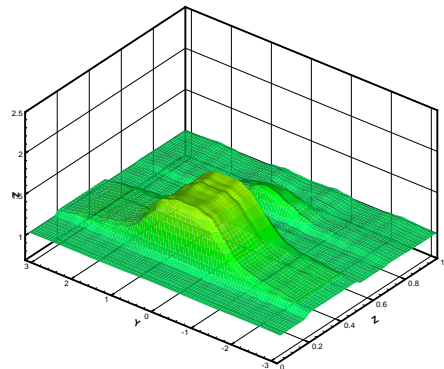


Рисунок 3.46: Приближенное решение обратной задачи,  $N = 20$ ,  $\varepsilon = 0.02$ . Сглаживание преобразованием Гильберта (3.59).

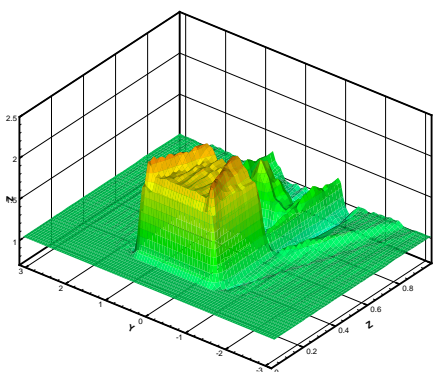


Рисунок 3.47: Приближенное решение обратной задачи,  $N = 30$ ,  $\varepsilon = 0$ .

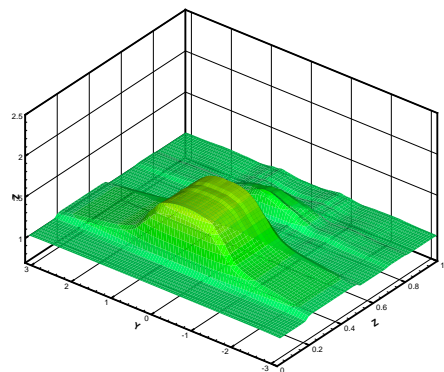


Рисунок 3.48: Приближенное решение обратной задачи,  $N = 30$ ,  $\varepsilon = 0$ . Сглаживание преобразованием Гильберта (3.59).

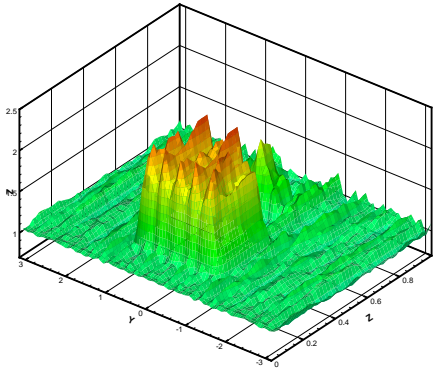


Рисунок 3.49: Приближенное решение обратной задачи,  $N = 30$ ,  $\varepsilon = 0.02$ .

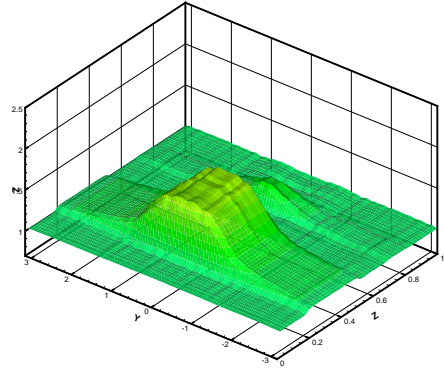


Рисунок 3.50: Приближенное решение обратной задачи,  $N = 30$ ,  $\varepsilon = 0.02$ . Сглаживание преобразованием Гильберта (3.59).

человеческого тела. Задача состоит в определении опухолей в мягких тканях человека. Так как скорость звука в воде составляет около 1500 м/с, то после замены переменной расчетная область составляет квадрат со стороной 270. Плотность воды 1000 кг/м<sup>3</sup>, средняя плотность тела человека (здоровая ткань) 904 кг/м<sup>3</sup> [299], плотность тела человека с опухолью 1085 кг/м<sup>3</sup>.

Рассмотрим следующую модель плотности (см. рис. 3.51):

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 904, & (x - 135)^2 + y^2 \leq 62 \\ 1085, & (x - 165)^2 + \frac{y^2}{4} \leq 0.3 \\ 1000, & \text{в остальных случаях} \end{cases}.$$

Для получения данных обратной задачи, сначала решалась последовательность прямых задач в области  $x \in (0, 270)$ ,  $y \in (-135, 135)$ ,  $t \in (0, 540)$  со следующими параметрами:  $N_x = 5000$ ,  $N = 100$ . На рисунках 3.53–3.60 приведены результаты восстановления функции плотности  $\rho(x, y)$ .

**Число восстанавливаемых гармоник Фурье  $N$  — параметр регуляризации**

Анализ графика невязки 3.61 показывает, что число восстанавливаемых гармоник Фурье  $N$  является параметром регуляризации. Для определения оптимального числа гармоник  $N$  используется следующий алгоритм.

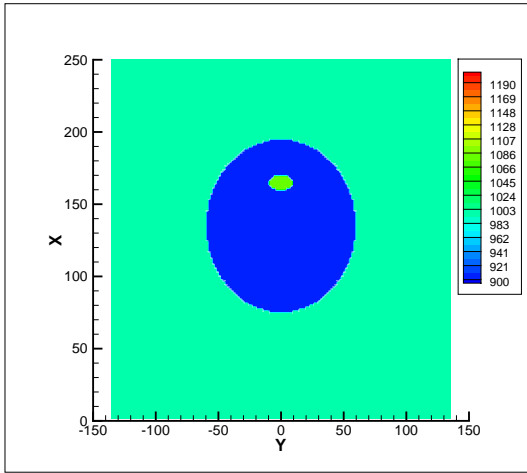


Рисунок 3.51: Точное решение,  $N = 40$ .

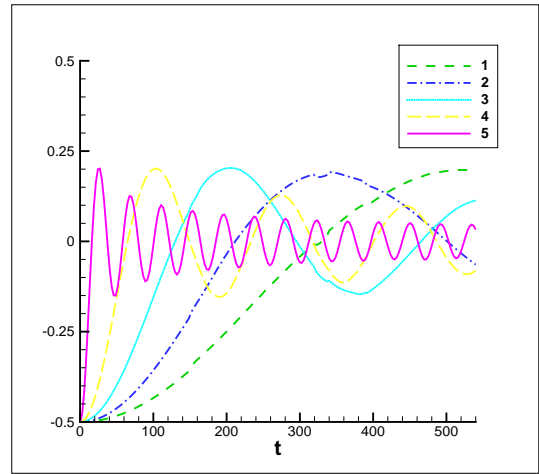


Рисунок 3.52: Коэффициенты Фурье данных обратной задачи: 1 —  $f_0^{(0)}(t)$ , 2 —  $f_2^{(2)}(t)$ , 3 —  $f_3^{(3)}(t)$ , 4 —  $f_5^{(5)}(t)$ , 5 —  $f_{10}^{(10)}(t)$ .

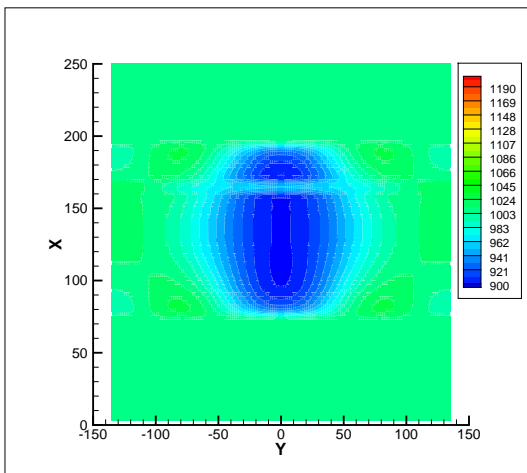


Рисунок 3.53: Приближенное решение обратной задачи,  $N_x = 150$ ,  $N = 2$ ,  $\varepsilon = 0$ .

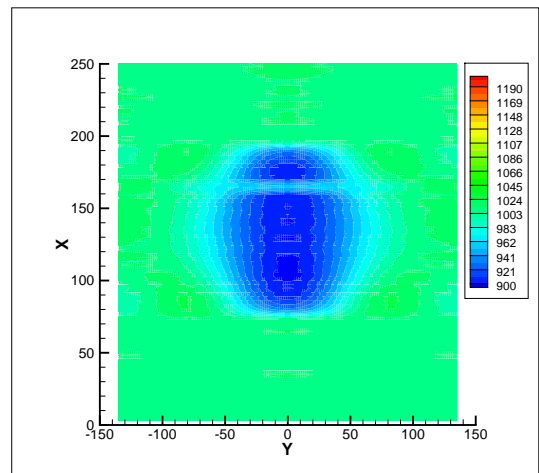


Рисунок 3.54: Приближенное решение обратной задачи,  $N_x = 150$ ,  $N = 2$ ,  $\varepsilon = 0.02$ .



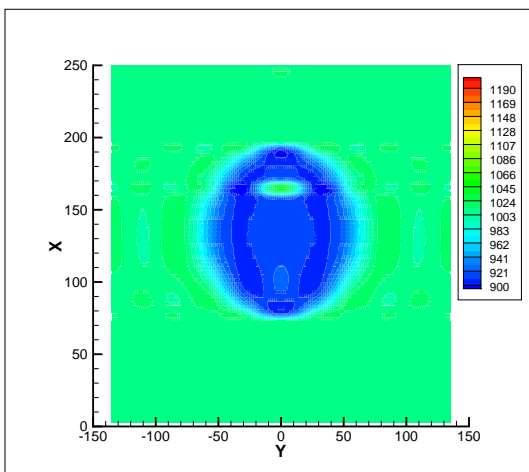


Рисунок 3.55: Приближенное решение обратной задачи,  $N_x = 150$ ,  $N = 5$ ,  $\varepsilon = 0$ .

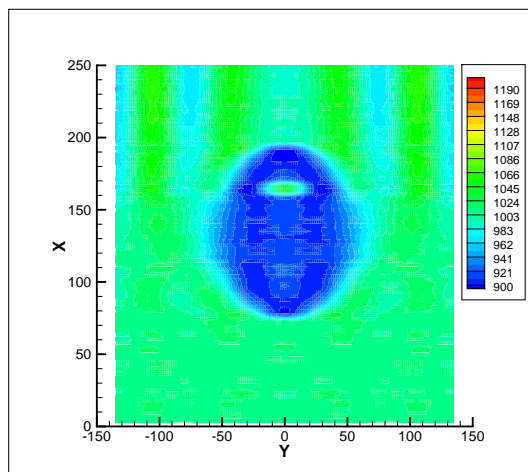


Рисунок 3.56: Приближенное решение обратной задачи,  $N_x = 150$ ,  $N = 5$ ,  $\varepsilon = 0.02$ .

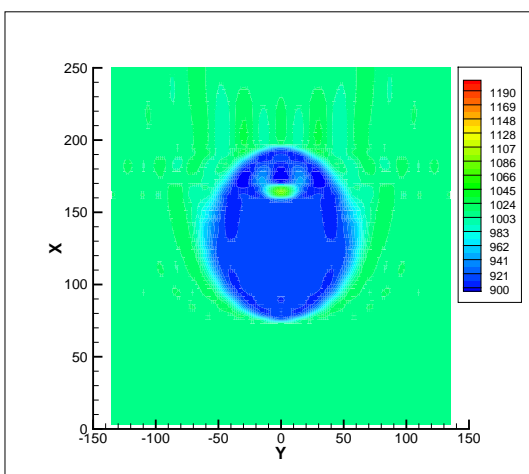


Рисунок 3.57: Приближенное решение обратной задачи,  $N_x = 150$ ,  $N = 10$ ,  $\varepsilon = 0$ .

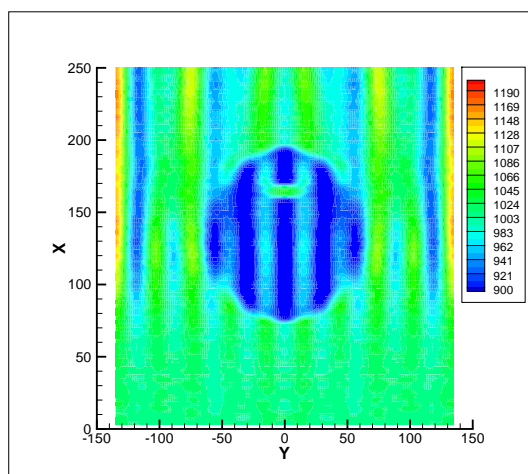


Рисунок 3.58: Приближенное решение обратной задачи,  $N_x = 150$ ,  $N = 10$ ,  $\varepsilon = 0.02$ .

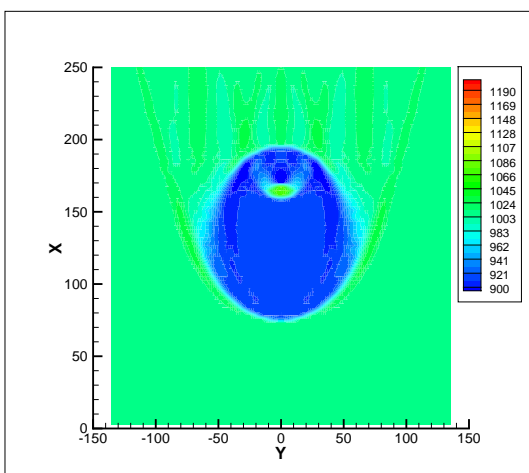


Рисунок 3.59: Приближенное решение обратной задачи,  $N_x = 150$ ,  $N = 15$ ,  $\varepsilon = 0$ .

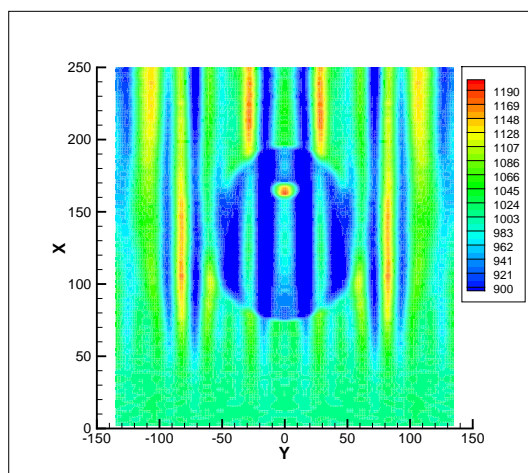


Рисунок 3.60: Приближенное решение обратной задачи,  $N_x = 150$ ,  $N = 20$ ,  $\varepsilon = 0$ .

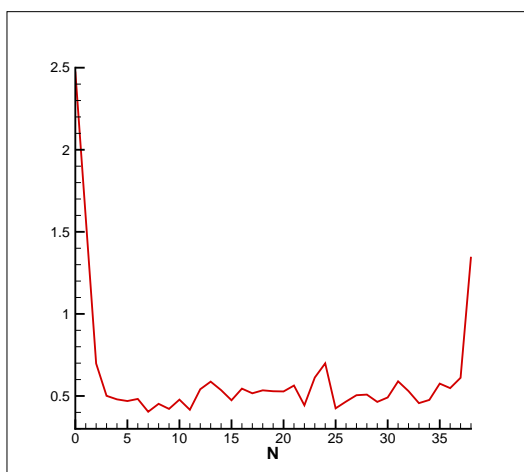


Рисунок 3.61: Невязка в зависимости от числа коэффициентов Фурье  $N$ . Уровень шума в данных 5%

Зафиксируем  $N$  и решив двумерный аналог уравнения М. Г. Крейна (3.67) найдем приближенное решение обратной задачи  $\rho^{(N)}(x, y)$ . По восстановленной функции плотности решаем семейство прямых задач (3.63), (3.64) при  $k = -\overline{N}, \overline{N}$  и находим  $u^{(k)}(x, y, t)$  для всех  $k = -\overline{N}, \overline{N}$ . Для каждого  $N$  ищем значение невязки

$$\max_{|k| \leq N} \left\| u^{(k)}(0, y, t) - f^{(k)}(y, t) \right\|_{L_2}^2.$$

Число гармоник Фурье  $N$ , для которых невязка принимает минимальное значение, возьмем в качестве оптимального числа восстанавливаемых гармоник приближенного решения обратной задачи.

# Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Разработаны новые методы регуляризации задач продолжения с части границы акустических и электромагнитных полей.
2. Получены новые оценки скорости сходимости по функционалу и оценки скорости сильной сходимости градиентных методов решения задач продолжения акустических и электромагнитных полей.
3. Исследована степень некорректности задач продолжения с части границы акустических и электромагнитных полей на основе анализа сингулярных чисел оператора.
4. Разработан и обоснован итерационно-проекционный метод регуляризации коэффициентных обратных задачи акустики, учитывающих априорную информацию об искомом решении.
5. Разработаны новые методы регуляризации двумерных коэффициентных обратных задач акустики на основе аналогов уравнений И. М. Гельфанда, Б. М. Левитана и М. Г. Крейна и проекционных методов.
6. Разработанные алгоритмы решения задач продолжения апробированы на задачах продолжения с части границы электромагнитных полей.

## Литература

1. Kabanikhin S. I., Bektemesov M., Shishlenin M. A. The size of the domain of measurements is the regularization parameter in continuation problem // Вычислительные технологии. 2015. Vol. 20, no. 3(86). P. 130–136.
2. Kabanikhin S. I., Shishlenin M. A. Multidimensional analogues of Gelfand-Levitan, Marchenko and Krein equations. Theory, numerics and applications // Вычислительные технологии. 2015. Vol. 20, no. 3(86). P. 63–69.
3. С.И. Кабанихин, О.И. Криворотько, М.А. Шишленин. О численном решении обратной задачи термоакустики // Сибирский журнал вычислительной математики. 2013. Т. 16, № 1. С. 39–44.
4. А.Э. Рязанцев, С.И. Кабанихин, М.А. Шишленин. Математическое обоснование использования систем телеметрии погружных насосов для непрерывного мониторинга работы добывающих скважин // Вестник ЦКР Роснедра. 2013. Т. 5. С. 32–36.
5. С.И. Кабанихин, М.А. Шишленин. Об использовании априорной информации в коэффициентных обратных задачах для гиперболических уравнений // Труды ИММ УрО РАН. 2012. Т. 18, № 1. С. 147–164.
6. С.И. Кабанихин, А.Н. Черемисин, М.А. Шишленин. Обратная задача определения обводненности и дебита в вертикальной фонтанной скважине // Сибирский журнал индустриальной математики. 2011. Т. 14, № 3(47). С. 31–36.
7. Сравнительный анализ двух методов расчета электромагнитных полей в околоскважинном пространстве нефтегазовых коллекторов / Эпов М.И.,

Кабанихин С.И., Миронов В.Л. [и др.] // Сибирский журнал индустриальной математики. 2011. Т. 14, № 2. С. 132–138.

8. Fast Toeplitz linear system inversion for solving two-dimensional acoustic inverse problem / S. I. Kabanikhin, N. S. Novikov, I. V. Oseledets et al. // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2015. Vol. 23, no. 6. P. 687–700.
9. Numerical solution of the multidimensional Gelfand–Levitan equation / S. I. Kabanikhin, K. K. Sabelfeld, N. S. Novikov et al. // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2015. Vol. 23, no. 5. P. 439–450.
10. Comparative Analysis of Methods for Regularizing an Initial Boundary Value Problem for the Helmholtz Equation / S. I. Kabanikhin, M. A. Shishlenin, D. B. Nurseitov et al. // Journal of Applied Mathematics. 2014. Vol. 2014. p. 7. URL: <http://dx.doi.org/10.1155/2014/786326>.
11. Regularization of the continuation problem for elliptic equations / S. I. Kabanikhin, Y. S. Gasimov, D. B. Nurseitov et al. // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2013. Vol. 21, no. 6. P. 871–884.
12. Inverse problems for the ground penetrating radar / S. I. Kabanikhin, D. B. Nurseitov, M. A. Shishlenin et al. // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2013. Vol. 21, no. 6. P. 885–892.
13. Kabanikhin S. I., Shishlenin M. A. Numerical algorithm for two-dimensional inverse acoustic problem based on Gelfand-Levitan-Krein equation // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 2011. Vol. 18, no. 9. P. 979–996.
14. Clason C., Shishlenin M. A. Recent advances in analytical and numerical methods in inverse problems for PDEs // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 2011. Vol. 18, no. 9. P. 955–958.
15. Numerical solution of an inverse problem of coefficient recovering for a wave equation by a stochastic projection methods / S. I. Kabanikhin, K. K. Sabelfeld, N. S. Novikov et al. // Monte Carlo Application. 2015. Vol. 21, no. 3. P. 189–203.

16. А.С. Белоносов, М.А. Шишленин. Задача продолжения для параболического уравнения с данными на части границы // Сиб. электрон. матем. изв. 2014. Т. 11. С. С.22–С.34.
17. М.А. Шишленин. Матричный метод в задачах определения источников колебаний // Сиб. электрон. матем. изв. 2014. Т. 11. С. С.161–С.171.
18. С.И. Кабанихин, М.А. Шишленин. Алгоритмы решения обратных задач гидроакустики // Сибирские Электронные Математические Известия. 2011. Т. 8. С. С.85–С.94.
19. Г. Даирбаева, М.А. Шишленин. Граничная обратная задача для уравнений Стокса // Сибирские Электронные Математические Известия. 2011. Т. 8. С. С.210–С.223.
20. С.И. Кабанихин, М.А. Шишленин, О.И. Криворотько. Оптимизационный метод решения обратной задачи термоакустики // Сибирские Электронные Математические Известия. 2011. Т. 8. С. С.263–С.292.
21. М.А. Шишленин, Н.С. Новиков. Сравнительный анализ двух численных методов решения уравнения Гельфанда–Левитана–Крейна // Сиб. электрон. матем. изв. 2011. Т. 8. С. С.379–С.393.
22. Совмещенная постановка двух обратных задач геоэлектрики / Эпов М.И., Ельцов И.Н., Кабанихин С.И. [и др.] // Сибирские Электронные Математические Известия. 2011. Т. 8. С. С.394–С.399.
23. Об определении граничных условий в околоскважинном пространстве на недоступной части границы / Эпов М.И., Ельцов И.Н., Кабанихин С.И. [и др.] // Сибирские Электронные Математические Известия. 2011. Т. 8. С. С.400–С.410.
24. М.А. Шишленин. Прямой метод решения обратной задачи акустики // Сиб. электрон. матем. изв. 2010. Т. 7. С. С.123–С.129.
25. С.И. Кабанихин, М.А. Шишленин. Акустическое зондирование методами линеаризации и обращением волнового поля // Сибирские Электронные Математические Известия. 2010. Т. 7. С. С.199–С.206.

26. В.Г. Романов, С.И. Кабанихин, М.А. Шишленин. Исследование математической модели электромагнитного зонда в осесимметричной скважине // Сибирские Электронные Математические Известия. 2010. Т. 7. С. С.307–С.321.
27. С.И. Кабанихин, А.Н. Черемисин, М.А. Шишленин. Задача определения обводненности и дебита в вертикальной скважине // Сибирские Электронные Математические Известия. 2010. Т. 7. С. С.362–С.379.
28. Kabanikhin S. I., Shishlenin M. A. Quasi-solution in inverse coefficient problems // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 2008. Vol. 16, no. 7. P. 705–713.
29. Kabanikhin S. I., Shishlenin M. A. Boundary control and Gelfand-Levitan-Krein methods in inverse acoustic problem // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 2004. Vol. 12, no. 2. P. 125–144.
30. Алгоритмы и численные методы решения обратных и некорректных задач / Кабанихин С.И., Искаков К.Т., Бектемесов М.А. [и др.]. Астана, Казахстан: КазНПУ, 2012.
31. Кабанихин С.И., Бектемесов М.А., Шишленин М.А. Методы решения некорректных задач линейной алгебры. Алматы, Казахстан: КазНПУ, 2012.
32. Kabanikhin S. I., Satybaev A. D., Shishlenin M. A. Direct Methods of Solving Inverse Hyperbolic Problems. The Netherlands: VSP, 2004.
33. Kabanikhin S. I., Shishlenin M. A. Numerical Methods for Solving Inverse Hyperbolic Problems // Computational Methods for Applied Inverse Problems (Ed. by Y. Wang, A. Yagola, and C. Yang). Berlin–Boston–Beijing: De Gruyter and Higher Education Press, 2012. P. 369–393.
34. В.Г. Романов. Устойчивость в обратных задачах. Москва: Научный мир, 2005.
35. В.Г. Романов. Оценка устойчивости решения волнового уравнения с данными Коши на времениподобной цилиндрической поверхности // Сиб. матем. журн. 2005. Т. 46, № 5. С. 1152–1162.

36. В.Г. Романов. Оценки решения одного дифференциального неравенства // Сиб. матем. журн. 2006. Т. 47, № 3. С. 626–635.
37. В.Г. Романов. Оценки решения для одного неравенства, связанного с гиперболическим оператором второго порядка и данными Коши на времениподобной поверхности // Доклады АН. 2006. Т. 406, № 3. С. 314–316.
38. Lorenzi A., Romanov V. G. Stability estimates for an inverse problem related to viscoelastic media // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2006. Vol. 14, no. 1. P. 57–82.
39. В.Г. Романов. Оценка устойчивости решения уравнений упругости с данными на времениподобной поверхности // Доклады АН. 2006. Т. 410, № 2. С. 161–163.
40. В.Г. Романов. Оценка решения задачи Коши для ультрагиперболического уравнения // Доклады АН. 2006. Т. 410, № 6. С. 737–754.
41. He S., Liao R., Romanov V. G. Analytical method for the identification of a thin-strip defect in a planar waveguide // J. Optical Society of America A. 2006. Vol. 23, no. 10. P. 2650–2656.
42. В.Г. Романов. Оценка устойчивости решения задачи для уравнений электродинамики с данными на времениподобной поверхности // Доклады АН. 2006. Т. 411, № 1. С. 16–19.
43. Romanov V. G. Stability estimates in inverse problems for hyperbolic equations // Milan J. Math. 2006. Vol. 74. P. 357–385.
44. В.Г. Романов. Карлемановские оценки для гиперболического уравнения второго порядка // Сиб. матем. журн. 2006. Т. 47, № 1. С. 169–187.
45. В.Г. Романов. Оценка устойчивости решения в двумерной обратной задаче для уравнений упругости // Тр. ИММ УрО РАН. 2006. Т. 12, № 2. С. 152–161.
46. М.М. Лаврентьев, Л.Я. Савельев. Теория операторов и некорректные задачи. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1999. с. 702.



47. Carleman T. Les fonctions quasi analytiques. Paris, 1926. p. 115.
48. С.Н. Мергелян. Гармоническая аппроксимация и приближённое решение задачи Коши для уравнения Лапласа // УМН. 1956. Т. 11, № 5(71). С. 3–26.
49. М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. Теория операторов и некорректные задачи. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1980. с. 285.
50. Púcci C. Sui problema di Cauchy non ben posti // Atti Accad. Naz.d. Lincei. 1955. Vol. 18, no. 5. P. 473–477.
51. М.М. Лаврентьев. О задаче Коши для уравнения Лапласа // Доклады АН СССР. 1955. Т. 102, № 2. С. 205–206.
52. М.М. Лаврентьев. О задаче Коши для уравнения Лапласа // Известия АН СССР. 1956. Т. 20, № 6. С. 819–842.
53. В.А. Козлов, В.Г. Мазья, А.В. Фомин. Об одном итерационном методе решения задачи Коши для эллиптических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1991. Т. 31, № 1. С. 64–73.
54. Kabanikhin S. I., Karchevsky A. L. Method for solving the Cauchy problem for an elliptic equation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1995. Vol. 3, no. 1. P. 21–46.
55. Hào D. N., Lesnic D. The Cauchy problem for Laplace's equation via the conjugate gradient method // IMA J. Applied Math. 2000. Vol. 65. P. 199–217.
56. An alternating iterative algorithm for the Cauchy problem associated the Helmholtz equation / L. Marin, L. Elliott, P. J. Heggs et al. // Comput. Methods Appl. Mech. Engin. 2003. Vol. 192. P. 709–722.
57. Klibanov M. V., Santosa F. A computational quasi-reversibility method for Cauchy problems for Laplace's equation // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1991. Vol. 51, no. 6. P. 1653–1675.
58. Clason C., Klibanov M. V. The quasi-reversibility method for thermoacoustic tomography in a heterogeneous medim // SIAM J. Sci. Comp. 2007. Vol. 30. P. 1–23.

59. Bourgeois L. A mixed formulation of quasi-reversibility to solve the Cauchy problem for Laplace's equation // *Inverse Problems*. 2005. T. 21, № 3. c. 1087.
60. Bourgeois L. Convergence rates for the quasi-reversibility method to solve the Cauchy problem for Laplace's equation // *Inverse Problems*. 2006. T. 22, № 2. c. 413.
61. Bourgeois L. About stability and regularization of ill-posed elliptic Cauchy problems: the case of  $C^{1,1}$  domains // *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*. 2010. Vol. 44, no. 4. P. 715–735.
62. Bourgeois L., Dardé J. A duality-based method of quasi-reversibility to solve the Cauchy problem in the presence of noisy data // *Inverse Problems*. 2010. T. 26, № 9. c. 095016.
63. Engl H. W., Hanke M., Neubauer A. *Regularization of Inverse Problems*. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996.
64. Klivanov M. V., Timonov A. *Carleman Estimates for Coefficient Inverse Problems and Numerical Applications*. The Netherlands: VSP, Utrecht, 2004.
65. Xiong X.-T., Fu C.-L. Two approximate methods of a Cauchy problem for the Helmholtz equation // *Computational Applied Mathematics*. 2007. Vol. 26, no. 2. P. 285–307.
66. Qin H. H., Wen D. W. Tikhonov type regularization method for the Cauchy problem of the modified Helmholtz equation // *Appl. Math. Comput.* 2009. Vol. 203. P. 617–628.
67. Regińska T., Tautenhahn T. Conditional stability estimates and regularization with applications to Cauchy problems for the Helmholtz equation // *Numerical Functional Analysis and Optimization*. 2009. Vol. 30, no. 9-10. P. 1065–1097.
68. Numerical computation of a Cauchy problem for Laplace's equation / J. Cheng, Y. C. Hon, T. Wei et al. // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2001. Vol. 81, no. 10. P. 665–674.
69. Hon Y. C., Wei T. Backus-Gilbert algorithm for the Cauchy problem of the Laplace equation // *Inverse Problems*. 2001. Vol. 17, no. 2. P. 261–271.

70. Engl H. W., Leitao A. A Mann iterative regularization method for elliptic Cauchy problems // Numer. Funct. Anal. and Optimiz. 2001. Vol. 22, no. 7–8. P. 861–884.
71. Qian Z., Fu C.-L., Xiong X.-T. Fourth-order modified method for the Cauchy problem for the Laplace equation // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2006. Vol. 192, no. 2. P. 205–218.
72. Shi R., Wei T., Qin H. H. A fourth-order modified method for the Cauchy problem of the modified Helmholtz equation // Inverse Problems. 2009. Vol. 2. P. 326–340.
73. Fourier regularization method for solving a Cauchy problem for the Laplace equation / C.-L. Fu, H.-F. Li, Z. Qian et al. // Inverse Problems in Science and Engineering. 2008. Vol. 16, no. 2. P. 159–169.
74. Yang F. The truncation method for identifying an unknown source in the Poisson equation // Applied Mathematics and Computation. 2011. Vol. 217, no. 22. P. 9334–9339.
75. Qiu C.-Y., Fu C.-L. Wavelets and regularization of the Cauchy problem for the Laplace equation // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2008. Vol. 338, no. 2. P. 1440–1447.
76. Regińska T., Wakulicz A. Wavelet moment method for the Cauchy problem for the Helmholtz equation // J. Comput. Appl. Math. 2009. Vol. 223, no. 1. P. 218–229.
77. Leitão A., Alves M. M. On level set type methods for elliptic Cauchy problems // Inverse Problems. 2007. Vol. 23, no. 5. P. 2207–2222.
78. С.И. Кабанихин, М.А. Бектемесов, А.Т. Аяпбергенова. Итерационные методы решения обратных и некорректных задач. Алматы: Наука, 2004.
79. М.М. Лаврентьев. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1962. с. 96.
80. В.А. Морозов. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. Москва: Наука, 1987.

81. Isakov V., Kindermann S. Subspaces of stability in the Cauchy-Problem for the Helmholtz equation // *Meth. Appl Anal.* 2011. Vol. 18, no. 1. P. 1–30.
82. Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах / Годунов С.К., Антонов А.Г., Кирилюк О.П. [и др.]. Новосибирск: Наука, 1992. с. 360.
83. М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов. О трех линейризованных обратных задачах для гиперболических уравнений // *Докл. АН СССР.* 1966. Т. 171, № 6. С. 1279–1281.
84. С.И. Кабанихин. Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений. Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1988.
85. Kabanikhin S. I., Scherzer O., Shishlenin M. A. Iteration methods for solving a two dimensional inverse problem for a hyperbolic equation // *J. Inverse and Ill-Posed Problems.* 2003. Vol. 11, no. 1. P. 87–109.
86. Hanke M., Neubauer A., Scherzer O. A convergence analysis of the Landweber iteration for nonlinear ill-posed problems // *Numer. Math.* 1995. Vol. 72. P. 21–37.
87. В.В. Васин. Методы итеративной регуляризации для некорректных задач // *Изв. вузов. Матем.* 1995. Т. 11. С. 69–84.
88. Vasin V. V. On the convergence of gradient-type methods for nonlinear equations // *Doklady Mathematics.* 1998. Vol. 57, no. 2. P. 173–175.
89. В.В. Васин, И.И. Еремин. Операторы и итерационные процессы Фейеровского типа. Теория и приложения. Москва-Ижевск: ИКИ, НИЦ РХД, 2005.
90. В.В. Васин, А.Л. Агеев. Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: УИФ “Наука”, 1993. с. 264.
91. Vasin V. V., Skorik G. G. Iterative processes of gradient type with applications to gravimetry and magnetometry inverse problems // *J. Inverse and Ill-Posed Problems.* 2010. Vol. 18, no. 8. P. 855–876.

92. М.И. Белишев. Уравнения типа Гельфанда–Левитана в многомерной обратной задаче для волнового уравнения // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1987. Т. 165. С. 15–20.
93. М.И. Белишев. Об одном подходе к многомерным обратным задачам для волнового уравнения // ДАН СССР. 1987. Т. 297, № 3. С. 524–527.
94. С.И. Кабанихин. Линейная регуляризация многомерных обратных задач для гиперболических уравнений. Препринт №27 института математики СО АН СССР, Новосибирск. 1988.
95. С.И. Кабанихин. О линейной регуляризации многомерных обратных задач для гиперболических уравнений // Доклады РАН. 1989. Т. 309, № 4. С. 791–795.
96. М.И. Белишев, А.С. Благовещенский. Многомерные аналоги уравнений типа Гельфанда–Левитана–Крейна в обратной задаче для волнового уравнения // Условно-корректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск: Наука, 1992. С. 50–63.
97. А.А. Булычев, И.В. Лыгин, В.Р. Мелихов. Численные методы решения прямых задач грави- и магниторазведки. Геологический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, 2010. с. 164.
98. Обратные задачи и методы их решения. Приложения к геофизике / Ягола А.Г., Степанова И.Э., Титаренко В.Н. [и др.]. Москва: Бинум, 2014. с. 216.
99. Hadamard J. Lectures on the Cauchy Problem in Linear Differential Equations. New Haven, CT: Yale University Press, 1923.
100. Hadamard J. Le problem de Cauchy et les equations aux derivees partielles lineares hyperboliques. Paris: Herman, 1932. p. 542.
101. А.Н. Тихонов. О нелинейных уравнениях первого рода // ДАН СССР. 1965. Т. 161, № 5. С. 1023–1026.

102. А.К. Маловичко. Методы аналитического продолжения аномалий силы тяжести и их приложения к задачам гравиразведки. Москва: Недра, 1956. с. 302.
103. Calderón A. P. Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations // Amer. J. Math. 1958. Vol. 80. P. 16–36.
104. Han H. The finite element method in a family of improperly posed problems // Math. Comp. 1982. Vol. 38. P. 55–65.
105. Falk R. S., Monk P. B. Logarithmic convexity for discrete harmonic functions and the approximation of the Cauchy problem for Poisson's equation // Math. Comp. 1986. Vol. 47. P. 135–149.
106. Falk R. S. Approximation of inverse problems // Inverse Problems in Partial Differential Equations / Ed. by W. R. D. Colton, R. Ewing. Philadelphia, PA: SIAM, 1990. P. 7–16.
107. Han H., Reinhardt J.-J. Some stability estimates for Cauchy problems of elliptic equations // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1997. Vol. 5, no. 5. P. 437–454.
108. Reinhardt J.-J., Han H., Hào D. N. Stability and regularization of discrete approximation to the Cauchy problem for the Laplace's equation // SIAM Numer. Anal. 1999. Vol. 36. P. 890–905.
109. Dautray R., Lions J. L. Mathematical analysis and numerical methods for science and technology Functional and Variational Methods. Berlin: Springer, 1988.
110. Payne L. E. Bounds in the Cauchy problem for the Laplace equation // Rational Mechanics and Analysis. 1960. Vol. 5, no. 1. P. 35–45.
111. Payne L. E. On *a priori* bounds in the Cauchy problem for elliptic equations // SIAM J. Math. Anal. 1970. Vol. 1. P. 82–89.
112. Payne L. E., Sather D. On some improperly posed problems for the Chaplygin equation // Math. Anal. Appl. 1967. Vol. 19. P. 67–77.
113. Payne L. E., Sather D. On some improperly posed problems for quasilinear equations of mixed type // Trans. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 128. P. 135–141.

114. Tautenhahn. Optimal stable solution of cauchy problems for elliptic equations // J. Anal. Appl. 1990. Vol. 4. P. 961–984.
115. The stability for the cauchy problem for elliptic equations / G. Alessandrini, L. Rondi, E. Rosset et al. // Inverse Problems. 2009. Vol. 25. p. 123004.
116. Lattès R., Lions J.-L. Méthode de quasi réversibilité et applications. Paris: Dunod, 1967. p. 302.
117. Lions J.-L. Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Paris: Dunod Gauthier-Villars, 1968. p. 216.
118. Isakov V. Inverse Problems for Partial Differential Equations. New York: Applied Mathematical Sciences Springer, Verlag, 1998.
119. Belgacem F. Ben, Fekih H. El. On Cauchy's problem: I. A variational Steklov–Poincaré theory // Inverse Problems. 2005. T. 21, № 6. с. 1915.
120. Azaiez M., Belgacem F. B., Fekih H. E. On Cauchy's problem: II. Completion, regularization and approximation // Inverse Problems. 2006. Vol. 22, no. 4. p. 1307.
121. А.Б. Бакушинский, А.В. Гончарский, Л.Д. Степанова. Применение алгоритмов итерационной регуляризации для решения обратных задач гравиметрии // Физика Земли. 1986. Т. 10, № 1. С. 43–50.
122. А.С. Немировский. О регуляризирующих свойствах метода сопряженных градиентов для решения некорректных задач // ЖВМ и МФ. 1986. Т. 26, № 3. С. 332–347.
123. Bastay G., Kozlov V. A., Turesson B. O. Iterative methods for an inverse heat conduction problem // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2001. Vol. 9, no. 4. P. 375–388.
124. Johansson T. An iterative procedure for solving a Cauchy problem for second order elliptic equations // Linköping Studies in Science and Technology. 2003. Vol. 832. P. 47–60.
125. С.И. Кабанихин, М.А. Бектемесов, А.Т. Нурсейтова. Итерационные методы решения обратных и некорректных задач с данными на части границы. Алматы–Новосибирск: Международный фонд обратных задач, 2006. с. 425.

126. Belaid L., Abda A. B., Malki N. The Cauchy problem for the Laplace equation and application to image inpainting // *ISRN Math. Anal.* 2011. Т. 2011. с. 11. URL: doi:10.5402/2011/150979.
127. Abda A., Belaid L., Sakat A. Data recovering problem using moments theory and applications to some inverse problems // *Int. J. Tomogr. Stat.* 2011. Vol. 17, no. S11. P. 1–16.
128. Karchevsky A. L. Reformulation of an inverse problem statement that reduces computational costs // *Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications.* 2013. Vol. 1, no. 2. P. 5–20.
129. Titarenko V. N., Yagola A. G. Cauchy Problems for Laplace Equation on Compact Sets // *Inverse Problems in Engineering.* 2002. Vol. 10, no. 3. P. 235–254.
130. Maxwell D. Kozlov-Maz'ya iteration as a form of Landweber iteration // *Inverse Problems & Imaging.* 2014. Vol. 8, no. 2. P. 537–560.
131. Klibanov M. V. Carleman estimates for the regularization of ill-posed Cauchy problems // *Applied Numerical Mathematics.* 2015. Vol. 94. P. 46–74.
132. Beilina L., Klibanov M. V. A globally convergent numerical method for a coefficient inverse problem // *SIAM J. Sci. Comp.* 2008. Vol. 31. P. 478–509.
133. Beilina L., Klibanov M. V., Kokurin M. Y. Adaptivity with relaxation for ill-posed problems and global convergence for a coefficient inverse problem // *J. of Mathematical Sciences.* 2010. Vol. 167. P. 279–325.
134. Beilina L., Klibanov M. V. *Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient Inverse Problems.* New York: Springer, 2012.
135. В.Д. Завьялов. О применимости принципов голографии в сейсморазведке. Москва: ВИЭМС, 1969.
136. Silverman D. Seismic holography — oil finding tool of the future? // *Ocean Ind.* 1970. Vol. 5, no. 1. P. 40–53.
137. С.А. Васильев, А.К. Урупов. Новое в принципах и оценках применимости сейсмической голографии // *Уч. зап. Пермск. унив.* 1972. Т. 292. С. 12–19.



138. Interpretation of discontinuities by seismic imaging / J. Behrens, R. Bortfold, G. Commlish et al. // *Geophysis*. 1972. Vol. 38, no. 3. P. 481–498.
139. Hoover C. M. Acoustical holography using digital processing // *Geophysics*. 1972. Vol. 37, no. 1. P. 1–19.
140. Г.И. Петрашень, С.А. Нахамкин. Продолжение волновых полей в задачах сейсморазведки. Ленинград: Наука, 1973.
141. С.И. Кабанихин. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009.
142. Ж.-Л. Лионс. Некоторые решения нелинейных краевых задач. Москва: Мир, 1972. с. 588.
143. John F. Continuous dependence on data for solutions of partial differential equations with a prescribed bound // *Commun. Pure Appl. Math.* 1960. Vol. 13. P. 551–585.
144. Hrycak T., Isakov V. Increased stability in the continuation of solutions to the Helmholtz equation // *Inverse Problems*. 2004. Т. 20, № 3. с. 697.
145. Regińska T., Regiński K. Approximate solution of a Cauchy problem for the Helmholtz equation // *Inverse Problems*. 2006. Vol. 22. P. 975–989.
146. Т.Ш. Кальменов. О полупериодической проблеме Дирихле для класса уравнений смешанного типа // *Дифференциальные уравнения*. 1978. Т. 14, № 3. с. 546.
147. Т.Ш. Кальменов, У.А. Исакова. Критерий сильной разрешимости смешанной задачи Коши для уравнения Лапласа // *Доклады Академии наук*. 2007. Т. 414, № 2. С. 168–171.
148. Т.Ш. Кальменов, Б.Д. Кошанов. Представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений в шаре // *Сибирский математический журнал*. 2008. Т. 49, № 3. С. 534–539.
149. Т.Ш. Кальменов, У.А. Исакова. Об одном методе решения задачи Коши для уравнения Лапласа // *Доклады Академии наук*. 2008. Т. 423, № 4. С. 449–451.

150. Т.Ш. Кальменов, Б.Д. Кошанов, М.Ю. Немченко. Представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений в шаре // Доклады Академии наук. 2008. Т. 421, № 3. С. 305–307.
151. Т.Ш. Кальменов, У.А. Исакова. Критерий сильной разрешимости смешанной задачи Коши для уравнения Лапласа // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 10. С. 1429–1434.
152. И.Н. Домбровская. О решении некорректных линейных уравнений в гильбертовом пространстве // Мат.записки Уральского университета. 1964. Т. 4, № 4. С. 36–40.
153. И.Н. Домбровская. О линейных операторных уравнениях первого рода // Изв. вузов. Матем. 1964. Т. 2. С. 74–78.
154. И.Н. Домбровская, В.К. Иванов. Некорректные линейные уравнения и исключительные случаи уравнений типа свёртки // Изв. вузов. Матем. 1964. Т. 4. С. 69–74.
155. А.Г. Ягола. Некорректные задачи и методы их численного решения. 2005.
156. Yagola A. G., Dorofeev K. Y. Sourcewise representation and a posteriori error estimates for ill-posed problems // Fields Institute Communications: Operator Theory and Its Applications / Ed. by A. Ramm, P. N. Shivakumar, A. V. Strauss. Providence, RI: American Mathematical Society, 2000. Vol. 25. P. 543–550.
157. Titarenko V. N., Yagola A. G. Linear ill-posed problems on sets of convex functions on two-dimensional sets // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. 2007. Vol. 14, no. 7. P. 735–750.
158. Dorofeev K. Y., Nikolaeva N. N., Yagola A. G. New approaches to error estimation to ill-posed problems with applications to inverse problems of heat conductivity // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. 2002. Vol. 10, no. 2. P. 155–170.
159. Dorofeev K. Y., Yagola A. G. The method of extending compacts and a posteriori error estimates for nonlinear ill-posed problems // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. 2004. Vol. 12, no. 6. P. 627–636.

160. The detection of the source of acoustical noise in two dimensions / T. DeLillo, V. Isakov, N. Valdivia et al. // *SIAM J. Appl. Math.* 2001. Vol. 61. P. 2104–2121.
161. The detection of surface vibrations from interior acoustical pressure / T. DeLillo, V. Isakov, N. Valdivia et al. // *Inverse Problems*. 2003. Vol. 19. P. 507–524.
162. Hall W. S., Mao X. Q. Boundary element investigation of irregular frequencies in electromagnetic scattering // *Eng. Anal. Bound. Elem.* 1995. Vol. 16. P. 245–252.
163. Tuan N. H., Quan P. H. A Cauchy problem for Helmholtz equation: regularization and error estimates // *Acta Universitatis Apulensis*. 2011. Vol. 25. P. 177–188.
164. Regińska T., Regiński K. A Cauchy problem for the Helmholtz equation: application to analysis of light propagation in solids: Tech. Rep. 06-4, *Berichtsreihe des Mathematischen Seminars*: : Christian-Albrechts-University of Kiel, 2006.
165. Arendt W., Regińska T. An ill-posed boundary value problem for the Helmholtz equation on Lipschitz domains // *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*. 2009. Vol. 17, no. 7. P. 703–711.
166. А.Н. Тихонов. О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивом методе их решения // *ДАН СССР*. 1965. Т. 163, № 3. С. 591–594.
167. Namarik U., Palm R. Comparison of stopping rules in conjugate gradient type methods for solving ill-posed problems // *MMA2005 Proceedings: 10th International Conference MATHematical Modelling and Analysis and 2nd International Conference Computational Methods in Applied Mathematics*. Trakai, Lithuania: Technika, 2005. 1–5 June. P. 285–291.
168. А. Самарский А. Теория разностных схем. Москва: Наука, 1977.
169. С.К. Годунов. Лекции по современным аспектам линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 2002. с. 216.
170. А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. Методы решения некорректных задач. Москва: Наука, 1979.

171. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация / Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В. [и др.]. Москва: Наука, 1983.
172. Wu L. A parameter choice method for Tikhonov regularization // *Electronic Transactions on Numerical Analysis*. 2003. Vol. 16. P. 107–128.
173. А.Л. Бухгейм, М.В. Клибанов. Единственность в целом одного класса многомерных обратных задач // *ДАН СССР*. 1981. Т. 260, № 2. С. 269–272.
174. М.В. Клибанов. Единственность в “целом” некоторых многомерных обратных задач // *Неклассические проблемы математической физики*. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1981. С. 101–114.
175. Klibanov M. V. Carleman estimates for global convergence, stability and numerical methods for inverse problems // *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. 2013. Vol. 21, no. 4. P. 477–560.
176. Klibanov M. V. Inverse problems and Carleman estimates // *Inverse Problems*. 1992. Vol. 8. P. 575–596.
177. Baudouin L., Puel J.-P. Uniqueness and stability in an inverse problem for the Schrödinger equation // *Inverse Problems*. 2002. Vol. 18. P. 1537–1554.
178. Cavaterra C., Lorenzi A., Yamamoto M. A stability result via Carleman estimates for an inverse source problem related to a hyperbolic integro-differential equation // *Comput. Appl. Math*. 2006. Vol. 25. P. 229–250.
179. O. Y. Imanuvilov V. I., Yamamoto M. An inverse problem for the dynamical Lamé system with two sets of boundary data // *Comm. Pure and Applied Math*. 2003. Vol. 56. P. 1–17.
180. Li S. An inverse problem for Maxwell’s equations in bi-isotropic media // *SIAM J. Math. Anal*. 2005. Vol. 37. P. 1027–1043.
181. Li S., Yamamoto M. An inverse source problem for Maxwell’s equations in anisotropic media // *Appl. Anal*. 2005. Vol. 84. P. 1051–1067.
182. Romanov V. G. Estimates of a solution to a differential inequality related to a second order hyperbolic operator an Cauchy data on a timelike surface // *Dokl. Math*. 2006. Vol. 73. P. 51–53.

183. Romanov V. G. Stability estimates in inverse problems for hyperbolic equations // Milan J. Math. 2006. Vol. 74. P. 357–385.
184. Romanov V. G., Yamamoto M. Recovering a Lamé kernel in a viscoelastic equation by a single boundary measurement // Appl. Anal. 2010. Vol. 89. P. 377–390.
185. Yamamoto M. Carleman estimates for parabolic equations. Topical Review // Inverse Problems. 2009. Vol. 25. p. 123013.
186. Yamamoto M. On an inverse problem of determining source terms in Maxwell's equations with a single measurement // in: Inverse Problems, Tomography, and Image Processing. 1998. P. 241–256.
187. Bellassoued M., Cristofol M., Soccorsi E. Inverse boundary value problem for the dynamical heterogeneous Maxwell's system // Inverse Problems. 2012. Vol. 28. p. 095009.
188. О.М. Алифанов, Е.А. Артюхин, С.В. Румянцев. Экстремальные методы решения некорректных задач. Москва: Наука, 1988.
189. А.Б. Бакушинский, А.В. Гончарский. Итеративные методы решения некорректных задач. Москва: Наука, 1989.
190. А.Б. Бакушинский, А.В. Гончарский. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. Москва: Изд-во МГУ, 1989.
191. Г.М. Вайникко, А.Ю. Веретенников. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. Москва: Наука, 1986.
192. В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. Москва: Наука, 1978.
193. А.Н. Тихонов, А.С. Леонов, А.Г. Ягола. Нелинейные некорректные задачи. Москва: Наука, 1995.
194. Численные методы решения некорректных задач / Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В. [и др.]. Москва: Наука, 1990.

195. Kabanikhin S. I., Iskakov K. T., Yamamoto M.  $H_1$ -conditional stability with explicit Lipschitz constant for a one-dimensional inverse acoustic problem // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 2001. Vol. 9, no. 3. P. 249–267.
196. Azamatov J. S., Kabanikhin S. I. Nonlinear Volterra operator equations.  $L_2$  — theory // J. Inv. Ill-Posed Problems. 1999. Vol. 7, no. 6. P. 487–510.
197. Ф.П. Васильев. Методы решения экстремальных задач. Москва: Наука, 1981. с. 400.
198. Engl H. W., Scherzer O. A convergent rate result for a steepest descent method and a minimal error method for the solution of nonlinear ill-posed problems // ZAA. 1995. Vol. 14. P. 369–377.
199. Engl H. W., Hanke M., Scherzer O. A convergence analysis of the Landweber iteration for nonlinear ill-posed problems // Numer. Math. 1995. Vol. 72. P. 21–37.
200. Numerical comparison of iterative regularization methods for a parameter estimation problem in a hyperbolic PDE / S. I. Kabanikhin, R. Kowar, O. Scherzer et al. // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 2001. Vol. 9, no. 6. P. 615–626.
201. Kabanikhin S. I., Ayapbergenova A. T. Estimation of the rate of convergence of the Lanweber iteration method in an inverse problem of acoustics // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2002. Vol. 2. P. 75–97.
202. В.Г. Романов. Обратные задачи математической физики. Москва: Наука, 1984.
203. He S., Kabanikhin S. I. An optimization approach to a three-dimensional acoustic inverse problem in the time domain // J. Math. Phys. 1995. Vol. 36, no. 8. P. 4028–4043.
204. И.М. Гельфанд, Б.М. Левитан. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Известия АН СССР. 1951. Т. 15, № 4. С. 309–360.
205. М.Г. Крейн. Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи // Доклады АН СССР. 1954. Т. 94, № 6. С. 987–990.

206. А.С. Благовещенский. Об обратной задаче теории распространения сейсмических волн // Проблемы мат. физики. 1966. Т. 1. С. 68–81.
207. А.С. Алексеев. Обратные динамические задачи сейсмологии // Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных. Москва: Наука, 1967. С. 9–84.
208. Kunetz G. Essai d'analyse de traces sismiques // Geophysical Prospecting. 1961. Vol. 9. P. 317–341.
209. Б.С. Парийский. Обратная задача для волнового уравнения с воздействием на глубине // Некоторые прямые и обратные задачи сейсмологии. Москва, 1968. С. 139–169.
210. Б.С. Парийский. Экономичные методы численного решения уравнений в свертках и систем алгебраических уравнений с теплицевыми матрицами. Москва: ВЦ АН СССР, 1977.
211. А.С. Благовещенский. О локальном методе решения нестационарной обратной задачи для неоднородной струны // Тр. МИАН СССР. 1971. Т. 115. С. 28–38.
212. А.С. Алексеев, В.И. Добринский. Некоторые вопросы практического использования обратных динамических задач сейсмологии. Математические проблемы геофизики // АН СССР. Сиб. отд-ние. Вычислительный центр. Новосибирск. 1975. Т. 6, № 2. С. 7–53.
213. В.Г. Романов, С.И. Кабанихин. Обратные задачи геоэлектрики. Москва: Наука, 1991. с. 304.
214. Л.Д. Фаддеев. Обратная задача квантовой теории рассеяния. II // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. 1974. Т. 3. С. 93–180.
215. Newton R. G. Inverse Schrödinger scattering in three dimensions. Texts and Monographs in Physics. Berlin: Springer-Verlag, 1989.
216. В. Баранов, Г. Кюнэтц. Синтетические сейсмограммы с многократными отражениями // Проблемы сейсмической разведки. Москва: Гостоптехиздат, 1962. С. 179–188.

217. А.С. Алексеев. Некоторые обратные задачи теории распространения волн // Изв. АН СССР. Сер. геофизика. 1962. Т. 11–12. С. 65–72.
218. С.И. Кабанихин, А.Д. Сатыбаев. Конечно-разностный алгоритм решения смешанной задачи для двумерного волнового уравнения // Математический анализ и дифференциальные уравнения. Новосибирск: НГУ, 1987. С. 45–51.
219. С.И. Кабанихин. Конечно-разностная регуляризация обратной задачи для уравнения колебаний // Вопросы корректности задач математической физики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1977. С. 57–69.
220. С.И. Кабанихин, К.С. Абдиев. Проекционно-разностный метод решения трехмерной обратной задачи геоэлектрики // Вопросы корректности задач математической физики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1986. С. 61–72.
221. С.И. Кабанихин, Ж.А. Ахметов. Конечно-разностная регуляризация обратной задачи для гиперболической системы первого порядка // Методы решения обратных задач. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1983. С. 65–74.
222. С.И. Кабанихин, К. Бобоев. Конечно-разностный метод определения сечений в  $P_3$ -приближении нестационарного кинетического уравнения переноса // Методы решения некорректных задач и их приложения. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1983. С. 213–217.
223. С.И. Кабанихин, А.Д. Сатыбаев. Конечно-разностная регуляризация линейаризованной обратной задачи для двумерного волнового уравнения // Условно-корректные задачи. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1988. С. 39–57.
224. С.И. Кабанихин, С.В. Мартаков. Исследование проекционно-разностного метода решения прямой и обратной задачи геоэлектрики. 1988.
225. Belishev M. I. Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC method) // Inverse Problems. 1997. Vol. 13, no. 5. P. R1–R45.
226. Belishev M. I. Recent progress in the boundary control method // Inverse Problems. 2007. Vol. 23, no. 5. P. R1–R67.



227. М.И. Белишев, В.А. Рыжов, В.Б. Филиппов. Спектральный вариант ВС–метода: теория и численный эксперимент // ДАН. 1994. Т. 332, № 4. С. 414–417.
228. Belishev M. I., Gotlib V. Y., Ivanov S. A. The BC–method in multidimensional spectral inverse problem: theory and numerical illustrations // Control, Optimization and Calculus of Variations. 1997. Vol. 2. P. 307–327.
229. Belishev M. I., Gotlib V. Y. Dynamical variant of the BC–method: theory and numerical testing // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 1999. Vol. 7, no. 3. P. 221–240.
230. Belishev M. I. How to see waves under the Earth surface (the BC–method for geophysicists) // Ill-Posed and Inverse Problems / Ed. by S. I. Kabanikhin, V. G. Romanov. Boston: VSP, Utrecht, 2002. P. 67–84.
231. Belishev M. I. Dynamical Inverse Problem for the Equation  $u_{tt} - \Delta u - \nabla \rho \nabla u = 0$  (the BC–method) // CUBO A Mathematical Journal. 2008. Vol. 10, no. 2. P. 17–33.
232. Pestov L., Kazarina O., Bolgova V. Numerical recovering a density by the boundary control method // Inverse Problems and Imaging. 2011. Vol. 4, no. 4. P. 703–712.
233. Pestov L. N. Inverse problem of determining absorption coefficient in the wave equation by BC–method // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2012. Vol. 20, no. 1. P. 103–110.
234. Pestov L. N. On determining an absorption coefficient and a speed of sound in the wave equation by the BC–method // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2013. Vol. 21, no. 2. P. 245–250.
235. Oksanen L. Solving an inverse obstacle problem for the wave equation by using the boundary control method // Inverse Problems. 2013. Vol. 29, no. 3. p. 035004.
236. Ambarzumijan V. A. Uber eine Frage der Eigenwerttheorie // Zeitschrift für Physik. 1929. Vol. 53. P. 690–695.

237. Heisenberg W. Die beobachtbaren Grossen in der Theorie der Elementarteilchen. I // Z. Phys. 1943. Vol. 120, no. 7–10. P. 513–538.
238. Heisenberg W. Die beobachtbaren Grossen in der Theorie der Elementarteilchen. II // Z. Phys. 1943. Vol. 120, no. 11–12. P. 673–702.
239. Borg G. Eine Umkehrung der Sturm–Liouvilleschen Eigenwertanfgabe. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte // Acta Math. 1946. Vol. 78, no. 1. P. 1–96.
240. Levinson N. The inverse Sturm–Liouville problem // Mat. Tidsskr. B. 1949. P. 25–30.
241. Levinson N. On the uniqueness of the potential in a Schrodinger equation for a given asymptotic phase // Danske Vid. Selsk. Mat.–Fys. Medd. 1949. Vol. 25, no. 9. P. 1–29.
242. Bargmann V. On the connection between phase shifts and scattering potential // Rev. Mod. Phys. 1949. Vol. 21. P. 488–493.
243. Bargmann V. Remarks on the determination of a central field of force from the elastic scattering phase shifts // Phys. Rev. 1949. Vol. 75. P. 301–302.
244. А.Н. Тихонов. О единственности решения задачи электроразведки // ДАН СССР. 1949. Т. 69, № 6. С. 797–800.
245. В.А. Марченко. Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка // Докл. АН СССР. 1950. Т. 72, № 3. С. 457–460.
246. В.А. Марченко. Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка, I // Труды Матем. о-ва. 1952. Т. 1. С. 327–420.
247. М.Г. Крейн. Решение обратной задачи Штурма–Лиувилля // Доклады АН СССР. 1951. Т. 76, № 1. С. 21–24.
248. М.Г. Крейн. Определение плотности неоднородной симметричной струны по спектру ее частот // Доклады АН СССР. 1951. Т. 76, № 3. С. 345–348.

249. М.Г. Крейн. Об обратных задачах для неоднородной струны // Доклады АН СССР. 1952. Т. 82, № 5. С. 669–672.
250. М.Г. Крейн. О некоторых случаях эффективного определения плотности неоднородной струны по ее спектральной функции // Доклады АН СССР. 1953. Т. 93, № 4. С. 617–620.
251. М.Г. Крейн. О переходной функции одномерной краевой задачи второго порядка // Доклады АН СССР. 1953. Т. 88, № 3. С. 405–408.
252. М.Ш. Блох. Об определении дифференциального уравнения по его спектрально функции-матрице // ДАН СССР. 1953. Т. 92, № 2. С. 209–212.
253. Б.Я. Левин. Распределение корней целых функций. Москва: Гостехиздат, 1956. с. 632.
254. В.А. Марченко. Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка, II // Доклады АН. 1955. Т. 104, № 5. С. 695–698.
255. Regge T. Introduction to complex orbital momenta // Nuovo Cimento. 1959. Vol. 10, no. 14. P. 951–976.
256. Newton R. G. Construction of potentials from the phase shifts at fixed energy // J. Mathematical Phys. 1962. Vol. 3. P. 75–82.
257. З.С. Агранович, В.А. Марченко. Обратная задача теории рассеяния. Харьков, 1960.
258. Б.М. Левитан, М.Г. Гасымов. Определение дифференциального уравнения по двум спектрам // УМН. 1964. Т. 19, № 2(116). С. 3–63.
259. Novikov R. G. Inverse scattering for the Schrodinger equation in dimension 1 up to smooth functions // Bulletin des Sciences Math'ematiques. 1996. Vol. 120. P. 473–491.
260. Fermi E., Pasta J., Ulam S. Studies of nonlinear problems, I.: Report: : Los Alamos Scintific Laboratory of the University of California, 1954.

261. Kruskal N. J., Zabusky M. D. Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // *Phys. Rev. Letters*. 1965. Vol. 15. P. 240–244.
262. Method for solving the Korteweg–de Vries equation / C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal et al. // *Physical Review Letters*. 1967. Vol. 19. P. 1095–1097.
263. Lax P. D. Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves // *Comm. on Pure and Applied Math*. 1968. Vol. XXI. P. 467–490.
264. П.Д. Лакс. Интегралы нелинейных эволюционных уравнений и уединенные волны // *Математика*. 1969. Т. 13, № 5. С. 128–150.
265. Gardner C. S. The Korteweg–de Vries Equation and Generalizations, IV. The Korteweg–de Vries Equation as a Hamiltonian System // *J. Math. Phys.* 1971. Vol. 12. P. 1548–1551.
266. В.Е. Захаров, А.Б. Шабат. Тонкая теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // *ЖЭТФ*. 1971. Т. 61, № 1. С. 118–134.
267. В.Е. Захаров, Л.Д. Фаддеев. Уравнение Кортевега–де Фриза — вполне интегрируемая гамильтонова система // *Функц. анализ и его приложения*. 1971. Т. 5, № 4. С. 18–27.
268. А.Б. Шабат. Об уравнении Кортевега–де Фриза // *Докл. Акад. наук СССР*. 1973. Т. 211, № 6. С. 1310–1313.
269. С.П. Новиков. Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза. I // *Функц. анализ и его прил.* 1974. Т. 8, № 3. С. 54–66.
270. Lax P. D. Periodic solutions of the KdV equation // *Lectures Appl. Math.* 1974. Vol. 15. P. 85–96.
271. В.А. Марченко. Периодическая задача Кортевега–де Фриза // *Матем. сб.* 1974. Т. 95(137), № 3(11). С. 331–356.

272. В.Е. Захаров, А.Б. Шабат. Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. I // Функц. анализ и его приложения. 1974. Т. 8, № 3. С. 43–53.
273. В.Е. Захаров, С.В. Манаков. О полной интегрируемости нелинейного уравнения Шредингера // Теоретическая и математическая физика. 1974. Т. 19, № 3. С. 332–343.
274. С.В. Манаков. Метод обратной задачи рассеяния и двумерные эволюционные уравнения // УМН. 1976. Т. 31, № 5(191). С. 245–246.
275. В.Е. Захаров, С.В. Манаков. Об обобщении метода обратной задачи рассеяния // Теоретическая и математическая физика. 1976. Т. 27, № 3. С. 283–287.
276. Lax P. D. Almost periodic solutions of the KdV equation // SIAM Review. 1976. Vol. 18. P. 351–375.
277. В.Е. Захаров, А.Б. Шабат. Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. II // Функц. анализ и его приложения. 1979. Т. 13, № 3. С. 13–22.
278. Теория солитонов. Метод обратной задачи / Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П. [и др.]. Москва: Наука, 1980.
279. Л.П. Нижник, М.Д. Починайко. Интегрирование пространственно-двумерного нелинейного уравнения Шрёдингера методом обратной задачи // Функц. анализ и его прил. 1982. Т. 16, № 1. С. 80–82.
280. А.П. Веселов, С.П. Новиков. Конечнозонные двумерные операторы Шредингера. Потенциальные операторы // ДАН СССР. 1984. Т. 279, № 4. С. 20–24.
281. Novikov R. G., Khenkin G. M. Oscillating weakly localized solutions of the Korteweg–de Vries equation // Theoretical and Mathematical Physics. 1984. Vol. 61, no. 2. P. 1089–1099.
282. Р.Г. Гриневич П.Г. и Новиков. Аналогии многосолитонных потенциалов для двумерного оператора Шрёдингера // Функц. анализ и его прил. 1985. Т. 19, № 4. С. 32–42.

283. П.Г. Гриневич. Рациональные солитоны уравнений Веселова–Новикова — безотражательные при фиксированной энергии двумерные потенциал // ТМФ. 1986. Т. 69, № 2. С. 307–310.
284. Francoise J.-P., Novikov R. G. Solutions rationnelles des equations de type Korteweg-de-Vries en dimension 2+1 et problemes a m corps sur la droite // Comptes rendus de l'Academie des sciences. Serie 1, Mathematique. 1992. Vol. 314, no. 2. P. 109–113.
285. Kazeykina A. V., Novikov R. G. A large time asymptotics for transparent potentials for the Novikov–Veselov equation at positive energy // Journal of Nonlinear Mathematical Physics. 2011. Vol. 18, no. 3. P. 377–400.
286. Gopinath B., Sondhi M. Determination of the shape of the human vocal tract from acoustical measurements // Bell System Tech. J. 1970. Vol. 49. P. 1195–1214.
287. Gopinath B., Sondhi M. Inversion of telegraph equation and synthesis of nonuniform lines // Proc. IEEE. 1971. Vol. 59. P. 383–392.
288. Symes W. W. Inverse boundary value problems and a theorem of Gel'fand and Levitan // J. Math. Anal. Appl. 1979. Vol. 71. P. 378–402.
289. Burrige R. The Gelfand-Levitan, the Marchenko and the Gopinath–Sondhi integral equation of inverse scattering theory, regarded in the context of inverse impulse-response problems // Wave Motion. 1980. Vol. 2. P. 305–323.
290. Santosa F. Numerical scheme for the inversion of acoustical impedance profile based on the Gelfand-Levitan method // Geophys. J. Roy. Astr. Soc. 1982. Т. 70. С. 229–244.
291. А.С. Алексеев, В.С. Белоносов. спектральные методы в одномерных задачах теории распространения волн // Труды ИВМиМГ, Мат. моделир. в геофизике. Новосибирск, 1998. Т. 6. С. 7–39.
292. В.А. Юрко. Введение в теорию обратных спектральных задач. Москва: Физматлит, 2007.

293. Kabanikhin S.I. On linear regularization of multidimensional inverse problems for hyperbolic equations // *Sov. Math. Dokl.* 1990. T. 40, № 3. С. 579–583.
294. Gladwell G. M. L., Willms N. B. A discrete Gelfand–Levitan method for band-matrix inverse eigenvalue problems // *Inverse Problems.* 1989. Vol. 5. P. 165–179.
295. Natterer F. A discrete Gelfand-Levitan theory: Technical report: : Institut fuer Numerische und instrumentelle Mathematik Universitaet Muenster Germany, 1994.
296. Kabanikhin S. I., Bakanov G. B. Discrete analogy of Gelfand-Levitan method // *Doklady Akademii Nauk.* 1997. Vol. 356, no. 2. P. 157–160.
297. С.И. Кабанихин, Г.Б. Баканов. Дискретный аналог метода Гельфанда-Левитана в двумерной обратной задаче для гиперболического уравнения // *Сиб. мат. журн.* 1999. Т. 40, № 2. С. 307–324.
298. В.И. Смирнов. Курс высшей математики. Том II. Москва: Физ.-мат. Лит., 1962.
299. А.Н. Голубинский, С.В. Дворянкин. К вопросу о параметризации результатов акустического зондирования тела человека при реализации контактно-разностного метода аудиоидентификации // *Спецтехника и связь.* 2011. Т. 2. С. 38–43.

# Приложение А

## Подповерхностная радиолокация

### А.1 Краткое описание георадара



Рисунок А.1: Курган

Георадар “ЛОЗА-В” был использован для предварительного обнаружения и исследования мест древних захоронений в Кызыл-Ординской области. Просвечиваемый участок состоял из большого холма, малого холма и перешейка между ними.

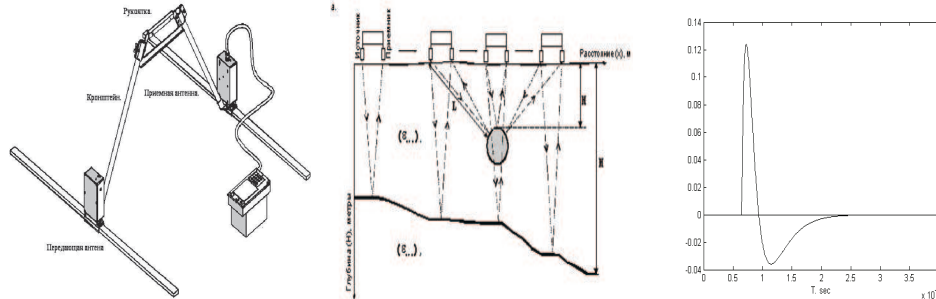


Рисунок А.2: Взлетно-посадочная полоса



Проведение диагностики участка взлетно-посадочной полосы с видимым внешним дефектом и исследование структуры грунта для обнаружения причин дефекта поверхности полосы неразрушающим методом.

Диагностика проводилась с помощью георадара “ЛОЗА-В”.



Краткие характеристики георадара “ЛОЗА-В”: диапазон рабочих частот 50-300 МГц, дискретность отсчета данных – 1.2 наносекунд, длина антенн – 1 м.

Максимальная глубина зондирования в некоторых грунтах с помощью георадара “ЛОЗА-В” на частоте 100 МГц.

Среда	$\epsilon$	Глубина, (м)	Разрешение по глубине, (м)
Сухой песок	2,6	42	0.1
Влажный песок	25	25	0.03
Глина сухая	2,4	13	0.1
Глина влажная	15	3	0.07

## A.2 Результаты численных расчетов

Численные расчеты проводились для следующей математической модели:

$$\epsilon\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma\mu \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \quad z \in (0, h), \quad y \in (0, L_y), \quad t \in (0, T), \quad (\text{A.1})$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$u_z|_{z=0} = g(y)r(t), \quad u|_{z=h} = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=L_y} = 0. \quad (\text{A.4})$$

Здесь  $g(y)$  отвечает за расположение источника на поверхности, а форма импульса задается формулой

$$r(t) = e^{-\frac{(t-t_0)^2}{t_1^2}},$$

где  $t_1 = 0.5$  нс,  $t_0 = 4t_1$ .

В численных расчетах  $h = 6$  м.,  $L_y = 12$  м.,  $T = 90$  нс., число разбиений по переменной  $z$  равно 1800, число разбиений по переменной  $y$  равно 3600.

Численные расчеты показывают, что продолжение поля помогает лучше видеть неоднородности.

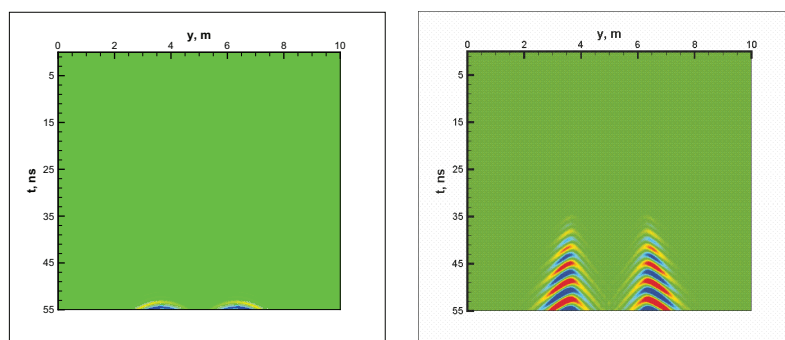


Рисунок А.3: Слева — наблюдаемое на поверхности anomальное электрическое поле (наблюдаемое поле  $u(0, y, t)$  в среде с неоднородностями минус поле в однородной среде). Справа — рассчитанное на глубине  $h = 2$  м. anomальное электрическое поле (поле  $u(2, y, t)$  в среде с неоднородностями минус поле в однородной среде). Уровень ошибки в данных 5%

На рис. А.3 максимальная амплитуда волны слева — 0.001, справа — 0.011, — уровень полезного сигнала увеличивается в 11 раз.

Если параметры горизонтально-слоистой среды известны, то пересчитывая время прихода отраженного сигнала, можно оценить глубину залегания неоднородности.

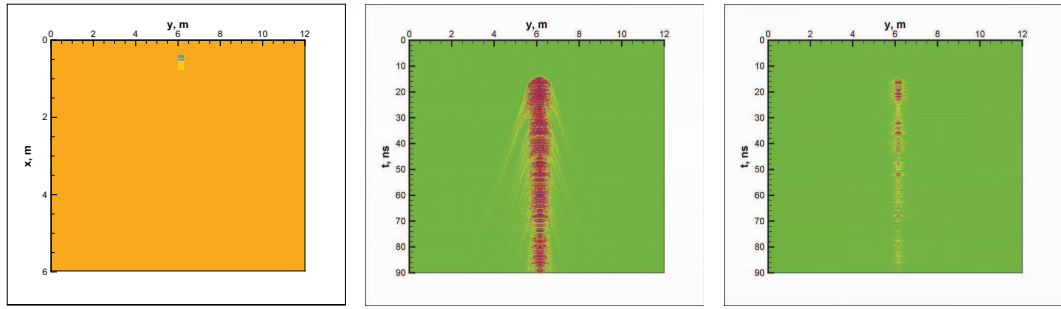


Рисунок А.4: Слева – среда со стальным цилиндром диаметром 30 см и высотой 8 см на глубине 50 см. В центре – наблюдаемое на поверхности anomальное электромагнитное поле (наблюдаемое поле  $u(0, y, t)$  в среде с неоднородностями минус поле в однородной среде) от одного источника в центре области. Справа – наблюдаемое на поверхности усредненное anomальное электромагнитное поле от 20 источников (наблюдаемые поля суммируются и усредняются)

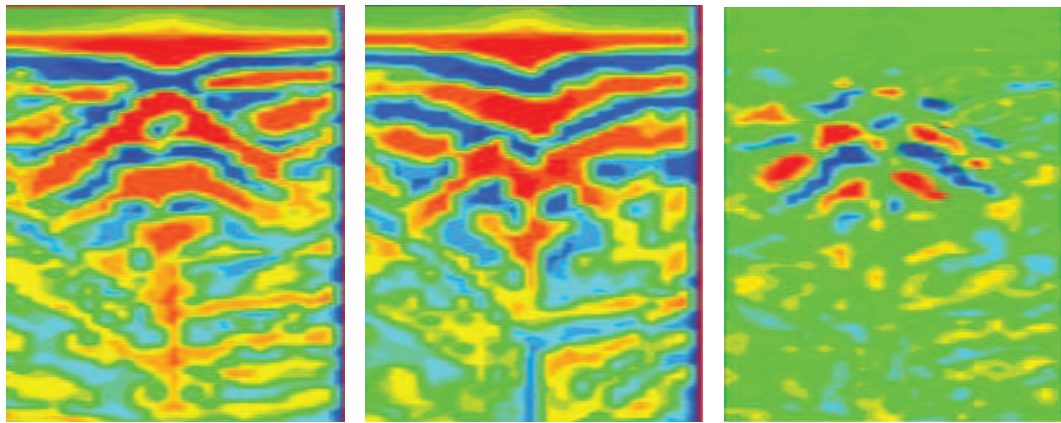


Рисунок А.5: Один источник. Слева данные георадара от однородной среды. В центре — с неоднородностью. Справа — anomальное поле

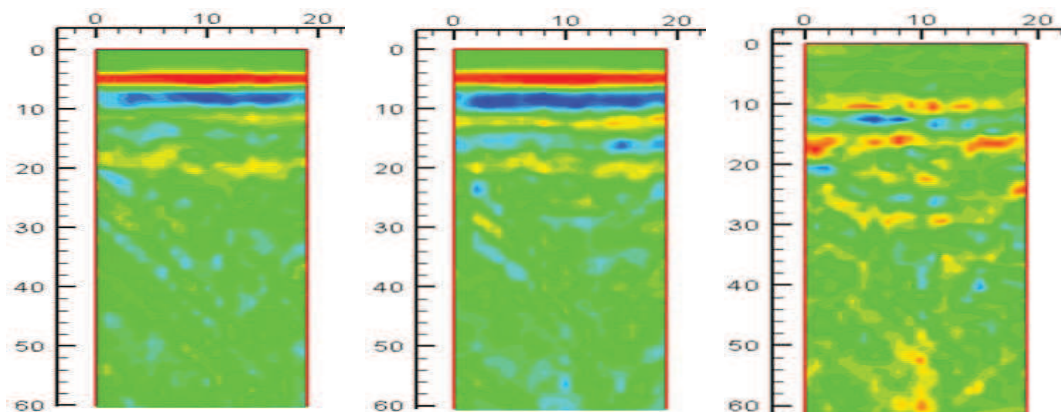


Рисунок А.6: Усредненные данные от 20 источников и приемников. Слева данные георадара от однородной среды. В центре — с неоднородностью. Справа — anomальное поле

## **Приложение В**

# **Исследование чувствительности данных к изменению параметров среды в околоскважинном пространстве**

### **В.1 Постановка задачи**

**Работа проводилась в три этапа:**

1. Исследования простейшей плоской модели на предмет применимости метода конечных разностей в субнаносекундном диапазоне (результаты были доложены и обсуждены на семинаре в Красноярске в 2009 г.).
2. Теоретическое исследование цилиндрически слоистой модели и построение алгоритма решения прямой задачи при отсутствии антенны (дельта-образный источник).
3. Исследование, построение алгоритма и проведение расчетов при наличии антенны.

На первом этапе была выбрана плоская модель с электромагнитными параметрами, соответствующими первому техническому заданию. Был построен, исследован и протестирован алгоритм численного решения прямой задачи, основанный на методе конечных разностей. Была проведена серия тестовых расчетов, подтвердившая численную устойчивость алгоритма (расчеты проводились для разных шагов дискретизации, а результаты расчетов сравнивались в кон-

трольных точках). Был проведен физический анализ результатов расчетов, показавший соответствие рассчитанного электромагнитного поля основным физическим характеристикам (время прихода возмущения в заданную точку, годограф отражений от границ раздела и т.п.).

На втором этапе был проведен математический анализ функций, описывающих источник, антенну, условия склейки на границах раздела сред. Для компонент поля в цилиндрической системе координат получены уравнения второго порядка, условия склейки, формулы пересчета для компонент электромагнитного поля.

Был разработан конечно-разностный алгоритм определения компонент электромагнитного поля в цилиндрической системе координат. Проведен цикл расчетов по исследованию устойчивости алгоритма, по проверке соответствия результатов математического моделирования физическим представлениям о распространении электромагнитных волн в субнаносекундном диапазоне.

На третьем этапе были проведены тестовые расчеты по исследованию чувствительности электромагнитного поля по отношению к изменениям параметров вмещающей среды и зоны проникновения. Показано, что возрастание диэлектрической проницаемости приводит к монотонному изменению амплитуды отраженного сигнала, что позволяет наметить способ определения диэлектрической проницаемости по амплитуде отраженного сигнала. Был проведен физический анализ результатов расчетов, показавший соответствие рассчитанного электромагнитного поля основным физическим характеристикам (время прихода возмущения в заданную точку, годограф отражений от границ раздела и т.п.).

Введем цилиндрическую систему координат равенствами  $x_1 = r \cos \varphi$ ,  $x_2 = r \sin \varphi$ ,  $x_3 = z$  и соответствующие компоненты векторов электрической и магнитной напряженности

$$\begin{aligned} E_r &= E_1 \cos \varphi + E_2 \sin \varphi, & E_\varphi &= -E_1 \sin \varphi + E_2 \cos \varphi, & E_z &= E_3, \\ H_r &= H_1 \cos \varphi + H_2 \sin \varphi, & H_\varphi &= -H_1 \sin \varphi + H_2 \cos \varphi, & H_z &= H_3. \end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned} E_1 &= E_r \cos \varphi - E_\varphi \sin \varphi, & E_2 &= E_r \sin \varphi + E_\varphi \cos \varphi, & E_3 &= E_z, \\ H_1 &= H_r \cos \varphi - H_\varphi \sin \varphi, & H_2 &= H_r \sin \varphi + H_\varphi \cos \varphi, & H_3 &= H_z. \end{aligned}$$

Обозначим

$$j_r = j_1 \cos \varphi + j_2 \sin \varphi, \quad j_\varphi = -j_1 \sin \varphi + j_2 \cos \varphi, \quad j_z = j_3.$$

Выведем уравнения для компонент поля в цилиндрической системе. Воспользуемся вначале векторным уравнением  $\varepsilon \mathbf{E}_t + \sigma \mathbf{E} + j = \text{rot} \mathbf{H}$ . Умножая первую компоненту этого равенства на  $\cos \varphi$ , а вторую на  $\sin \varphi$ , находим, что

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial E_r}{\partial t} + \sigma E_r + j_r &= \left( \frac{\partial H_3}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_3} \right) \cos \varphi + \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_3} - \frac{\partial H_3}{\partial x_1} \right) \sin \varphi \\ &= \left( \frac{\partial H_z}{\partial x_2} \cos \varphi - \frac{\partial H_z}{\partial x_1} \sin \varphi \right) + \left( \frac{\partial H_1}{\partial z} \sin \varphi - \frac{\partial H_2}{\partial z} \cos \varphi \right) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z}. \end{aligned}$$

Аналогично, умножая первую компоненту этого равенства на  $-\sin \varphi$ , а вторую на  $\cos \varphi$ , находим, что

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial E_\varphi}{\partial t} + \sigma E_\varphi + j_\varphi &= -\left( \frac{\partial H_3}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_3} \right) \sin \varphi + \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_3} - \frac{\partial H_3}{\partial x_1} \right) \cos \varphi \\ &= \left( \frac{\partial H_1}{\partial z} \cos \varphi + \frac{\partial H_2}{\partial z} \sin \varphi \right) - \left( \frac{\partial H_z}{\partial x_1} \cos \varphi + \frac{\partial H_z}{\partial x_2} \sin \varphi \right) \\ &= \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r}. \end{aligned}$$

Преобразуем теперь третью компоненту равенства  $\varepsilon \mathbf{E}_t + \sigma \mathbf{E} + j = \text{rot} \mathbf{H}$  следующим образом

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} + \sigma E_z + j_z &= \frac{\partial H_2}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} (H_r \sin \varphi + H_\varphi \cos \varphi) - \frac{\partial}{\partial x_2} (H_r \cos \varphi - H_\varphi \sin \varphi) \\ &= \frac{\partial}{\partial r} (H_r \sin \varphi + H_\varphi \cos \varphi) \cos \varphi + \frac{\partial}{\partial \varphi} (H_r \sin \varphi + H_\varphi \cos \varphi) \left( -\frac{\sin \varphi}{r} \right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial r} (H_r \cos \varphi - H_\varphi \sin \varphi) \sin \varphi - \frac{\partial}{\partial \varphi} (H_r \cos \varphi - H_\varphi \sin \varphi) \left( \frac{\cos \varphi}{r} \right) \\ &= \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} + \frac{H_\varphi}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Вторая серия формул, использующая равенство  $\text{rot} \mathbf{E} = -\mu \mathbf{H}_t$ , совершенно симметрична первой. В итоге, система уравнений Максвелла в цилиндрической си-

стеме координат имеет вид

$$\begin{aligned}
\varepsilon \frac{\partial E_r}{\partial t} + \sigma E_r + j_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z}, \\
\varepsilon \frac{\partial E_\varphi}{\partial t} + \sigma E_\varphi + j_\varphi &= \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r}, \\
\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} + \sigma E_z + j_z &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} \right), \\
-\mu \frac{\partial H_r}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z}, \\
-\mu \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} &= \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r}, \\
-\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rE_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right).
\end{aligned} \tag{B.1}$$

Полагаем, что  $\mathbf{H}_{t<0} = 0$ ,  $\mathbf{E}_{t<0} = 0$ .

Если решение системы не зависит от  $\varphi$ , то система распадается на две независимых подсистемы

$$\begin{aligned}
\varepsilon \frac{\partial E_r}{\partial t} + \sigma E_r + j_r &= -\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}, \\
\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} + \sigma E_z + j_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r}, \\
-\mu \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} &= \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r},
\end{aligned} \tag{B.2}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon \frac{\partial E_\varphi}{\partial t} + \sigma E_\varphi + j_\varphi &= \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r}, \\
-\mu \frac{\partial H_r}{\partial t} &= -\frac{\partial E_\varphi}{\partial z}, \\
-\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\varphi)}{\partial r}.
\end{aligned} \tag{B.3}$$

В дальнейшем полагаем  $j_r = 0$  и рассматриваем только систему (B.2) в предположении, что в рассматриваемой области параметры среды постоянны. Компонента  $H_\varphi$  удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon \mu \frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial t^2} + \sigma \mu \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} + \frac{\partial j_z}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial z^2}, \quad H_\varphi|_{t<0} = 0. \tag{B.4}$$

Остальные компоненты системы (B.2) находятся интегрированием по  $t$ . Подходящие для этого формулы имеют вид

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{(\partial E_r e^{\sigma_0 t})}{\partial t} &= -e^{\sigma_0 t} \frac{\partial H_\varphi}{\partial z}, \\ \varepsilon \frac{\partial (E_z e^{\sigma_0 t})}{\partial t} + j_z e^{\sigma_0 t} &= e^{\sigma_0 t} \frac{1}{r} \frac{\partial (r H_\varphi)}{\partial r},\end{aligned}\quad (\text{B.5})$$

в которых  $\sigma_0 = \sigma/\varepsilon$ . Отсюда находим

$$\begin{aligned}E_r(r, z, t) &= -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{\sigma_0(\tau-t)} \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} d\tau, \\ E_z(r, z, t) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{\sigma_0(\tau-t)} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (r H_\varphi)}{\partial r} - j_z \right) d\tau.\end{aligned}\quad (\text{B.6})$$

В предположении, что носитель  $j_z$  локализован внутри первого цилиндрического слоя, для функции  $H_\varphi$  имеем нелокальные по времени граничные условия

$$[H_\varphi]_{r=r_k} = 0, \quad \left[ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{\sigma_0(\tau-t)} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (r H_\varphi)}{\partial r} \right) d\tau \right]_{r=r_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (\text{B.7})$$

которые выражают непрерывность компонент поля  $H_\varphi$  и  $E_z$  при переходе через границы разрывов коэффициентов  $\varepsilon$  и  $\sigma$ . Кроме того, при  $r = 0$  имеем условие  $H_\varphi|_{r=0} = 0$ , которое удобно использовать при численном решении уравнения (B.5).

Для малых цилиндров, размещенных на оси скважины  $D_k = \{(r, z) | r \in [0, r_0], z \in [a_k, b_k]\}$ ,  $k = 1, 2$ , граничные условия имеют вид

$$[H_\varphi]_{r=r_0} = 0, \quad \left[ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{\sigma_0(\tau-t)} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (r H_\varphi)}{\partial r} \right) d\tau \right]_{r=r_0} = 0, \quad z \in [a_k, b_k], \quad (\text{B.8})$$

$$[H_\varphi]_{z=a_k} = 0, \quad \left[ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{\sigma_0(\tau-t)} \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} d\tau \right]_{z=a_k} = 0, \quad 0 \leq r \leq r_0, \quad k = 1, 2, \quad (\text{B.9})$$

$$[H_\varphi]_{z=b_k} = 0, \quad \left[ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{\sigma_0(\tau-t)} \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} d\tau \right]_{z=b_k} = 0, \quad 0 \leq r \leq r_0, \quad k = 1, 2. \quad (\text{B.10})$$



Преобразование Фурье системы (B.2) по переменным  $t$  и  $z$  приводит к равенствам

$$\begin{aligned}(i\varepsilon\omega + \sigma)\tilde{E}_r &= -i\lambda\tilde{H}_\varphi, \\(i\varepsilon\omega + \sigma)\tilde{E}_z + \tilde{j}_z &= \frac{1}{r}\frac{\partial(r\tilde{H}_\varphi)}{\partial r}, \\-i\mu\omega\tilde{H}_\varphi &= i\lambda\tilde{E}_r - \frac{\partial\tilde{E}_z}{\partial r}.\end{aligned}\quad (\text{B.11})$$

Отсюда

$$\tilde{E}_r = -\frac{i\lambda}{i\varepsilon\omega + \sigma}\tilde{H}_\varphi, \quad \tilde{E}_z = \frac{1}{i\varepsilon\omega + \sigma}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\tilde{H}_\varphi)}{\partial r} - \tilde{j}_z\right).\quad (\text{B.12})$$

Функция  $\tilde{H}_\varphi$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\tilde{H}_\varphi)}{\partial r}\right) + (k^2 - \lambda^2)\tilde{H}_\varphi = \frac{\partial\tilde{j}_z}{\partial r},\quad (\text{B.13})$$

где  $k^2 = \mu\varepsilon\omega^2 - i\mu\sigma\omega$ , и соотношениям

$$[\tilde{H}_\varphi]_{r=r_k} = 0, \quad \left[\frac{1}{i\varepsilon\omega + \sigma}\frac{\partial(r\tilde{H}_\varphi)}{\partial r}\right]_{r=r_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots\quad (\text{B.14})$$

Заметим, что уравнение (B.13) является неоднородным уравнением Бесселя. Любое его ограниченное решение выражается через функции Бесселя первого порядка от аргумента  $\sqrt{k^2 - \lambda^2}r$  и поэтому  $\tilde{H}_\varphi \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$ . Отсюда следует, что  $H_\varphi \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$ . Из формул (B.12) следует также, что  $\tilde{E}_r \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$  и  $E_r \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$ .

## B.2 Результаты численных расчетов

Обозначим  $w(z, r, t) = H_\varphi(z, r, t)$ . Тогда

$$\varepsilon\mu\frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial t^2} + \sigma\mu\frac{\partial H_\varphi}{\partial t} + \frac{\partial j_z}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial z^2},\quad (\text{B.15})$$

$$H_\varphi|_{t=0} = \frac{\partial H_\varphi}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0,\quad (\text{B.16})$$

$$\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0, \quad H_\varphi|_{r=0} = 0;\quad (\text{B.17})$$

$$H_\varphi|_{z=l_z} = 0; \quad H_\varphi|_{r=l_r} = 0.\quad (\text{B.18})$$

Здесь  $\varepsilon = \varepsilon_a\varepsilon_o$ .

Источник задается в виде стороннего тока

$$j_z = \frac{\varepsilon_a}{2a} V'(t) \theta(a - z) \theta(a - r),$$

где форма импульса задается формулой

$$V(t) = e^{-\frac{(t-t_0)^2}{t_1^2}}.$$

Здесь  $a = 0.025$  м – радиус источника,  $t_1 = 0.5$  нс,  $t_0 = 4t_1$ .

Таким образом

$$\frac{\partial j_z}{\partial r} = -\frac{\varepsilon_a}{2a} V'(t) \theta(a - z) \delta(a - r).$$

### Однородное поле

Значение  $H_\varphi$  при  $z = 0.8$  и при  $z = 1.5$  м измерялось при  $r = a$ , где  $a = 0.025$  м радиус источника

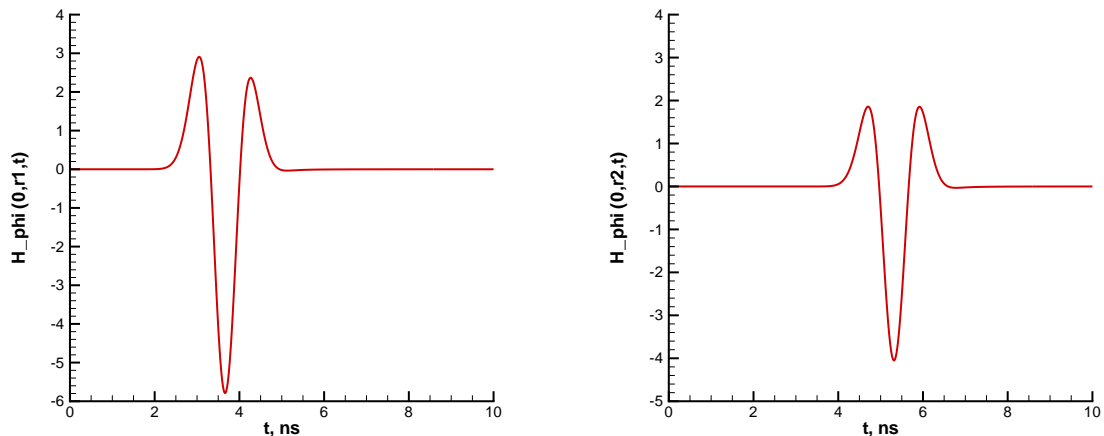


Рисунок В.1:  $H_\varphi(0, 0.5 \text{ м}, t)$ ,  $H_\varphi(0, 1 \text{ м}, t)$

На рисунках В.1–В.12 задача решалась в области  $z = 3$  м,  $r = 3$  м, время наблюдения  $t = 10$  нс. На рисунках В.13–В.14 задача решалась в области  $z = 3$  м,  $r = 3$  м, время наблюдения  $t = 15$  нс. Параметры для каждого рисунка приведены в таблице.

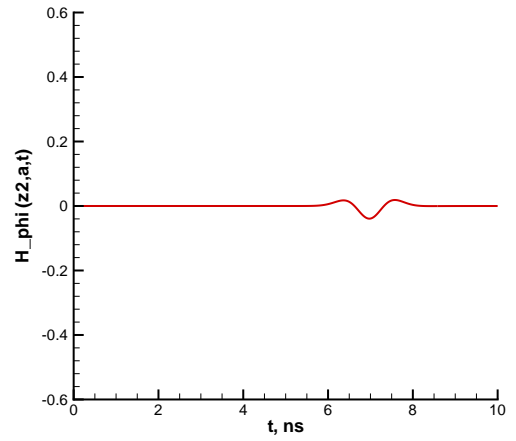
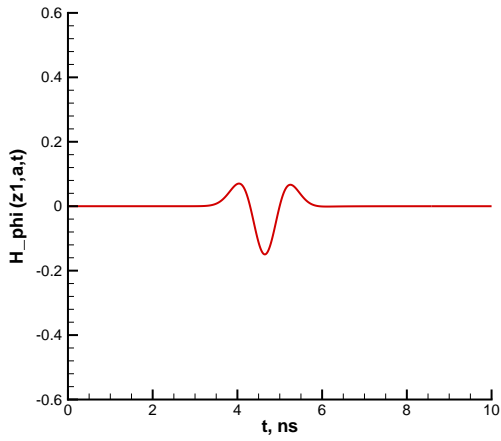


Рисунок В.2:  $H_\varphi(0.8 \text{ м}, a, t)$ ,  $H_\varphi(1.5 \text{ м}, a, t)$

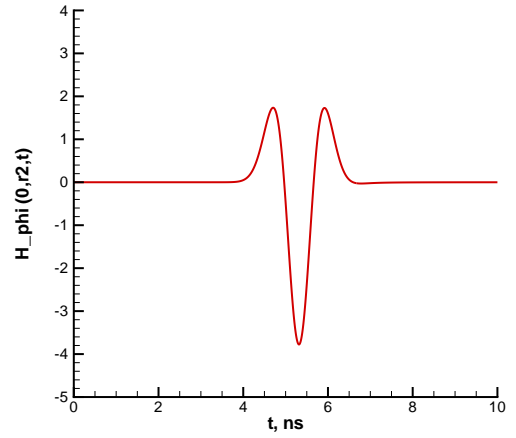
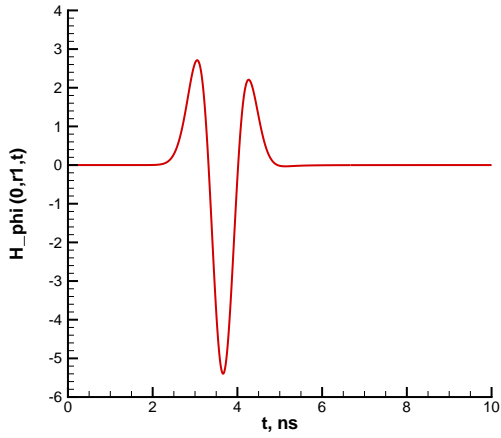


Рисунок В.3:  $H_\varphi(0, 0.5 \text{ м}, t)$ ,  $H_\varphi(0, 1 \text{ м}, t)$

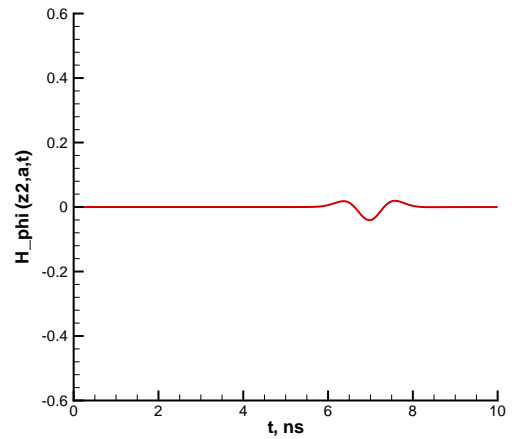
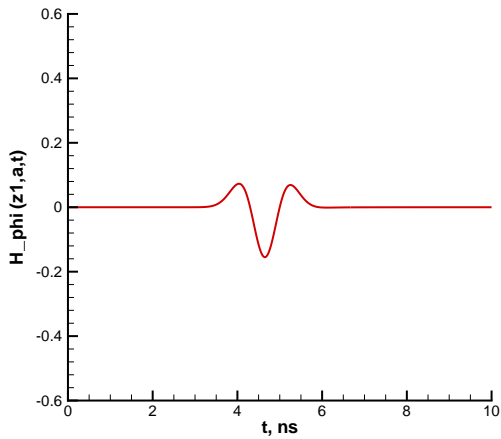


Рисунок В.4:  $H_\varphi(0.8 \text{ м}, a, t)$ ,  $H_\varphi(1.5 \text{ м}, a, t)$

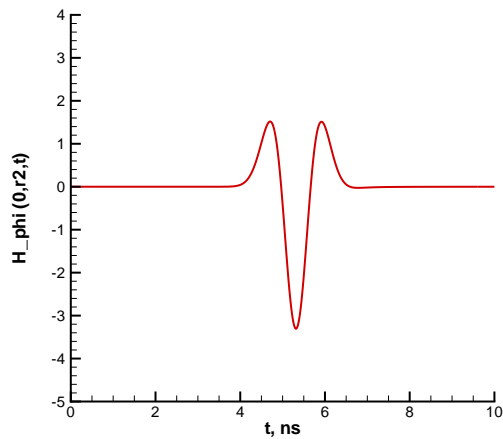
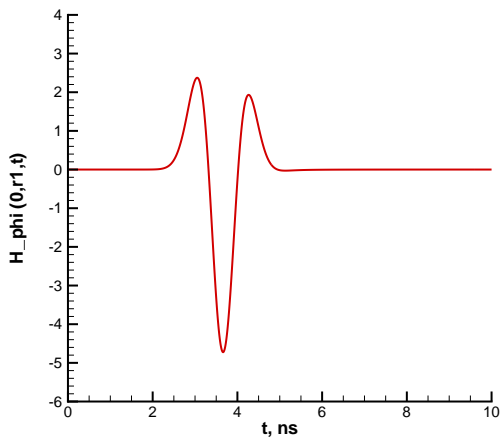


Рисунок В.5:  $H_\varphi(0, 0.5 \text{ м}, t)$ ,  $H_\varphi(0, 1 \text{ м}, t)$

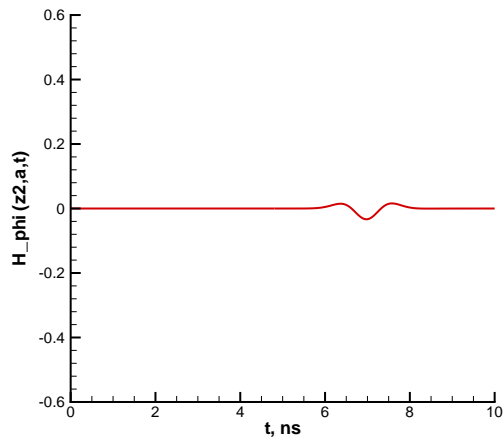
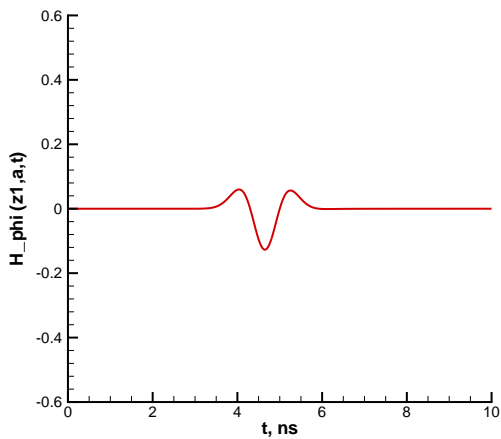


Рисунок В.6:  $H_\varphi(0.8 \text{ м}, a, t)$ ,  $H_\varphi(1.5 \text{ м}, a, t)$

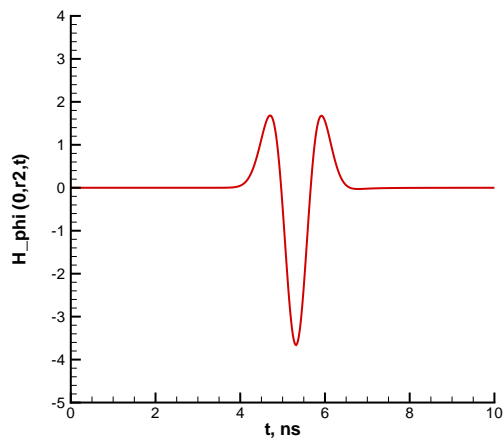
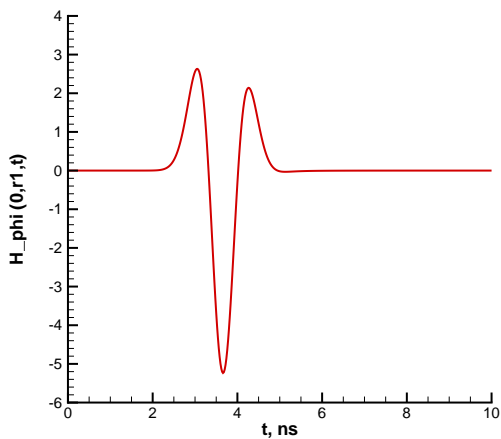


Рисунок В.7:  $H_\varphi(0, 0.5 \text{ м}, t)$ ,  $H_\varphi(0, 1 \text{ м}, t)$

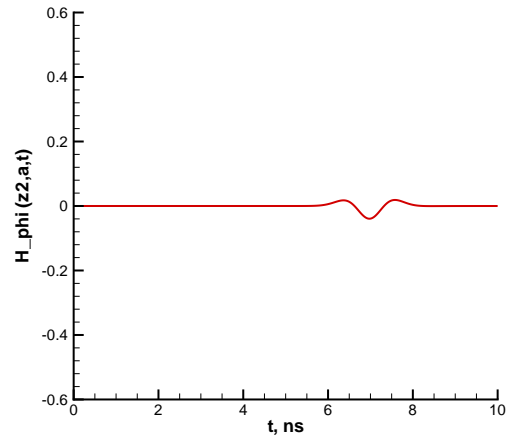
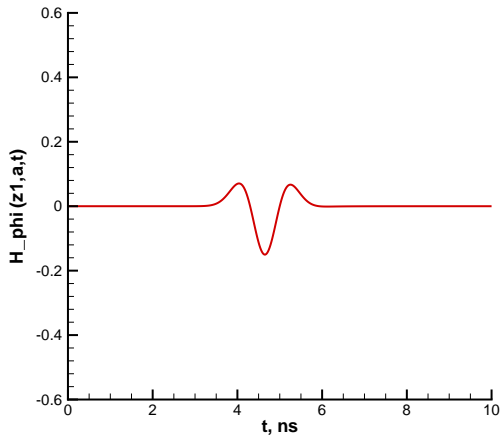


Рисунок В.8:  $H_\varphi(0.8 \text{ м}, a, t)$ ,  $H_\varphi(1.5 \text{ м}, a, t)$

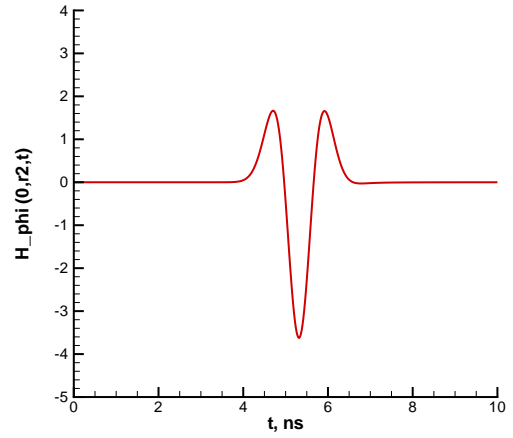
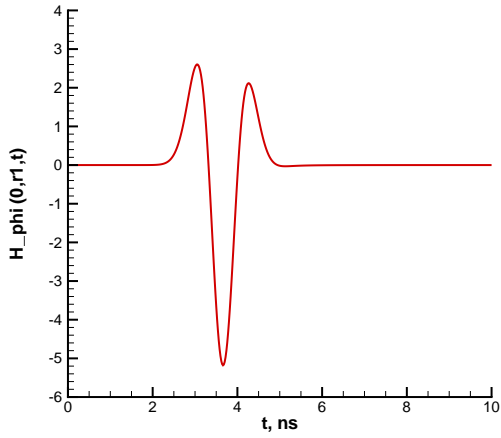


Рисунок В.9:  $H_\varphi(0, 0.5 \text{ м}, t)$ ,  $H_\varphi(0, 1 \text{ м}, t)$

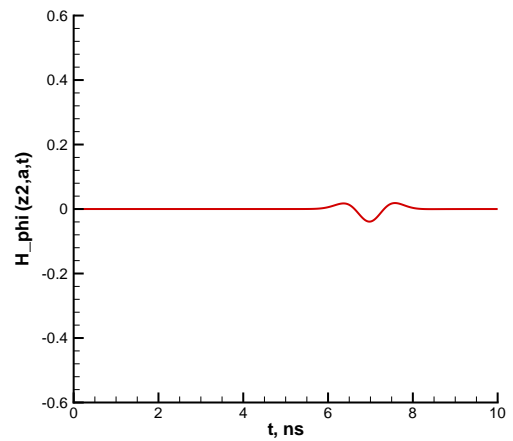
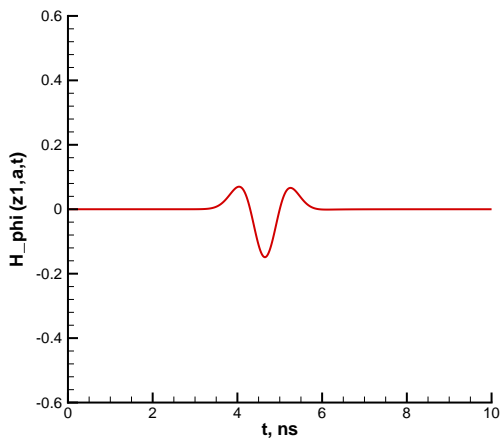


Рисунок В.10:  $H_\varphi(0.8 \text{ м}, a, t)$ ,  $H_\varphi(1.5 \text{ м}, a, t)$

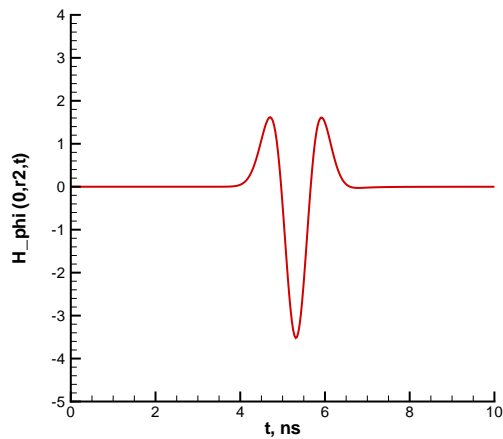
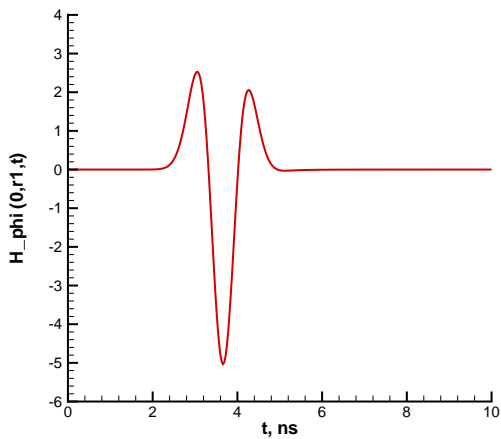


Рисунок В.11:  $H_\varphi(0, 0.5 \text{ м}, t)$ ,  $H_\varphi(0, 1 \text{ м}, t)$

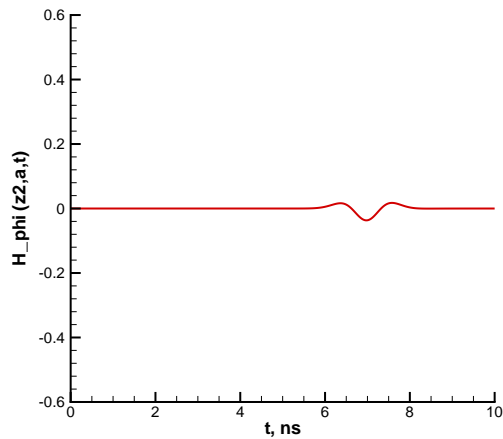
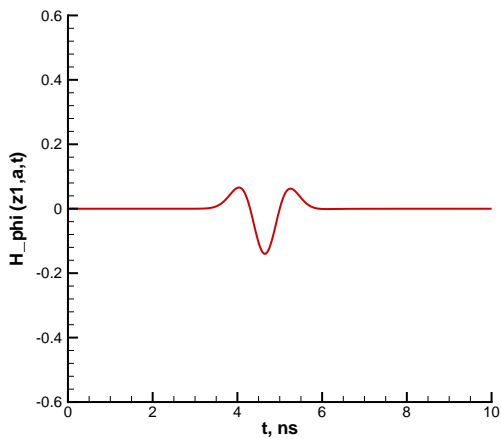


Рисунок В.12:  $H_\varphi(0.8 \text{ м}, a, t)$ ,  $H_\varphi(1.5 \text{ м}, a, t)$

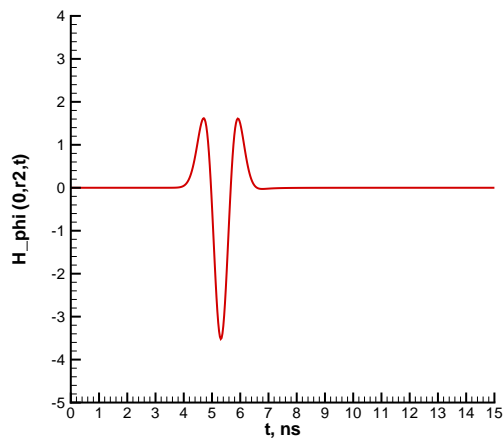
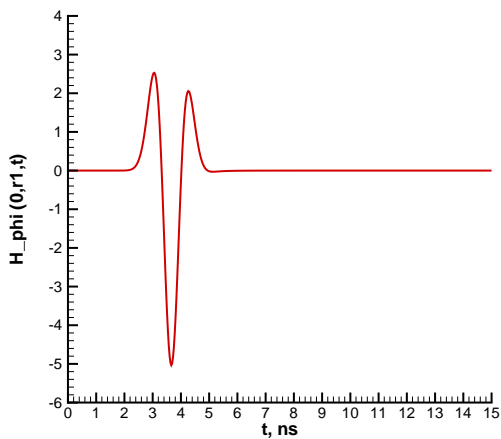


Рисунок В.13:  $H_\varphi(0, 0.5 \text{ м}, t)$ ,  $H_\varphi(0, 1 \text{ м}, t)$

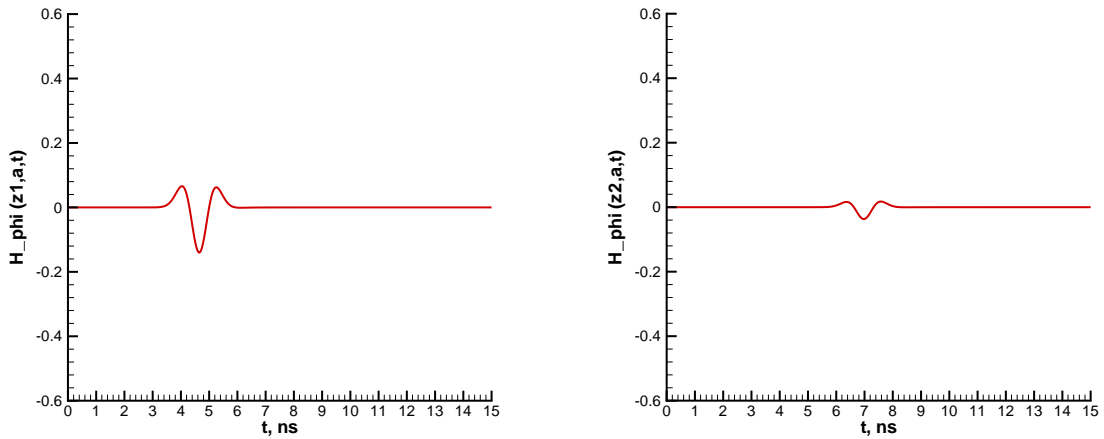


Рисунок В.14:  $H_\varphi(0.8 \text{ м}, a, t)$ ,  $H_\varphi(1.5 \text{ м}, a, t)$

Рисунки	$h_z$ , м	$h_r$ , м	$h_t$ , нс	$\epsilon_{\text{отн}}$	$\sigma$	Время наблюдения, нс
<b>В.1–В.2</b>	0.0033	0.0033	0.0714	1	0	10
<b>В.3–В.4</b>	0.0025	0.0025	0.05537	1	0	10
<b>В.5–В.6</b>	0.002	0.002	0.03999	1	0	10
<b>В.7–В.8</b>	0.0025	0.001	0.02	1	0	10
<b>В.9–В.10</b>	0.002	0.00083	0.02	1	0	10
<b>В.11–В.12</b>	0.0025	0.0009	0.02498	1	0	10
<b>В.13–В.14</b>	0.0025	0.0009	0.02498	1	0	15

### Неоднородное поле. Одна граница. Отклик среды

Время наблюдения 30 нс.

$h_z = 0.0025 \text{ м}$ ,  $h_r = 0.00083 \text{ м}$ ,  $h_t = 0.004615 \text{ м}$ .

Абсолютное значение в точке минимума = 2.831824

Рассмотрим среду со следующими параметрами

$$\epsilon_{\text{отн}} = \begin{cases} \epsilon_1 = 81, & z \in [0, 0.1] \text{ м} \\ \epsilon_2 = 5, & z \in (0.1, 3] \text{ м} \end{cases};$$

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_1 = 0.5, & z \in [0, 0.1] \text{ м} \\ \sigma_2 = 0.006, & z \in (0.1, 3] \text{ м} \end{cases}.$$

**Замечание.** Рисунки для всех неоднородных полей выводились нормированными по максимальному абсолютному значению.

Неоднородное поле. Одна граница,  $r_1 = 0.1 \text{ м}$ . Отклик среды

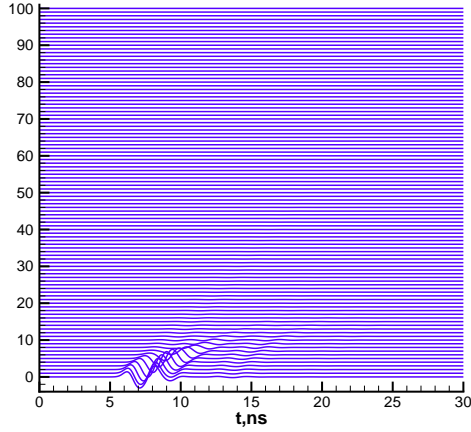


Рисунок В.15: Пример В.2. Одна граница  $r_1 = 0.1$  м. Аномальное поле.

$$H_{\varphi(2)}(z, a, t) - H_{\varphi(1)}(z, a, t)$$

Время наблюдения 30 нс.

$$h_z = 0.0025 \text{ м}, h_r = 0.00083 \text{ м}, h_t = 0.004615 \text{ м}.$$

Абсолютное значение в точке минимума = 2.819306

Рассмотрим среду со следующими параметрами

$$\varepsilon_{\text{отн}} = \begin{cases} \varepsilon_1 = 81, & z \in [0, 0.1] \text{ м} \\ \varepsilon_2 = 5, & z \in (0.1, 3] \text{ м} \end{cases};$$

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_1 = 0.5, & z \in [0, 0.1] \text{ м} \\ \sigma_2 = 0.01, & z \in (0.1, 3] \text{ м} \end{cases}.$$

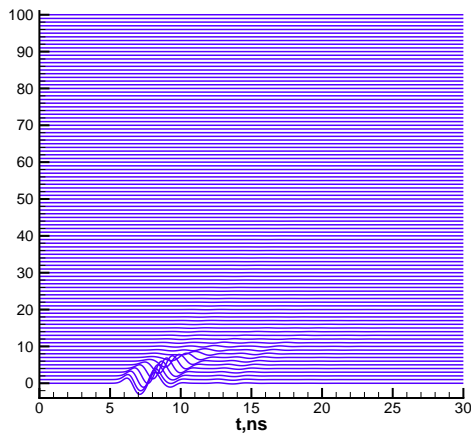


Рисунок В.16: Пример В.2. Одна граница  $r_1 = 0.1$  м. Аномальное поле.

$$H_{\varphi(2)}(z, a, t) - H_{\varphi(1)}(z, a, t)$$



Неоднородное поле. Одна граница,  $r_1 = 0.1$  м. Отклик среды

Время наблюдения 30 нс.

$h_z = 0.0025$  м,  $h_r = 0.00083$  м,  $h_t = 0.004615$  м.

Абсолютное значение в точке минимума = 1.024501

Рассмотрим среду со следующими параметрами

$$\varepsilon_{\text{отн}} = \begin{cases} \varepsilon_1 = 81, & z \in [0, 0.1] \text{ м} \\ \varepsilon_2 = 40, & z \in (0.1, 3] \text{ м} \end{cases} ;$$

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_1 = 0.5, & z \in [0, 0.1] \text{ м} \\ \sigma_2 = 0.006, & z \in (0.1, 3] \text{ м} \end{cases} .$$

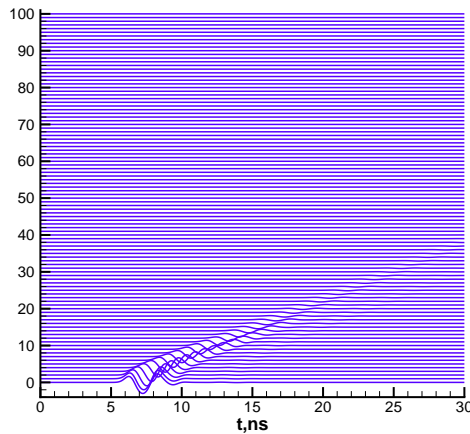


Рисунок В.17: Пример В.2. Одна граница  $r_1 = 0.1$  м. Аномальное поле.

$$H_{\varphi(2)}(z, a, t) - H_{\varphi(1)}(z, a, t)$$

Неоднородное поле. Одна граница,  $r_1 = 0.1$  м. Отклик среды

Время наблюдения 30 нс.

$h_z = 0.0025$  м,  $h_r = 0.00083$  м,  $h_t = 0.004615$  м.

Абсолютное значение в точке минимума = 1.021403

Рассмотрим среду со следующими параметрами

$$\varepsilon_{\text{отн}} = \begin{cases} \varepsilon_1 = 81, & z \in [0, 0.1] \text{ м} \\ \varepsilon_2 = 5, & z \in (0.1, 3] \text{ м} \end{cases} ;$$

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_1 = 0.5, & z \in [0, 0.1] \text{ м} \\ \sigma_2 = 0.01, & z \in (0.1, 3] \text{ м} \end{cases} .$$

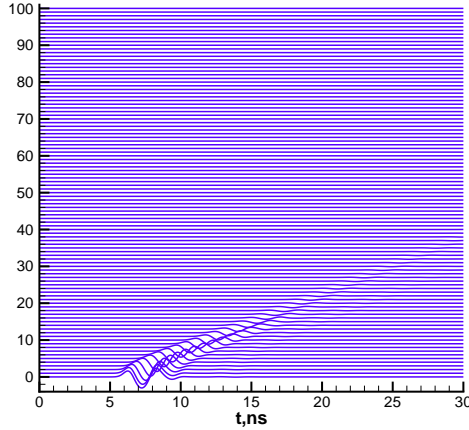


Рисунок В.18: Пример В.2. Одна граница  $r_1 = 0.1$  м. Аномальное поле.

$$H_{\varphi(2)}(z, a, t) - H_{\varphi(1)}(z, a, t)$$

**Неоднородное поле. Две границы. Отклик среды**

Время наблюдения 30 нс. Параметры сетки:  $h_z = 0.0025$  м,  $h_r = 0.001$  м,  $h_t = 0.005$  м.

Модель среды:

$$\varepsilon_{\text{отн}} = \begin{cases} \varepsilon_1 = 81, & z \in [0, 0.1] \text{ м} \\ \varepsilon_2 = 5, & z \in (0.1, 0.4] \text{ м} ; \\ \varepsilon_3 = 3, & z \in (0.4, 3] \text{ м} \end{cases}$$

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_1 = 0.5, & z \in [0, 0.1] \text{ м} \\ \sigma_2 = 0.006, & z \in (0.1, 0.4] \text{ м} . \\ \sigma_3 = 0.006, & z \in (0.4, 3] \text{ м} \end{cases}$$

Абсолютное значение минимума аномального поля 0.076724.

Неоднородное поле. Две границы,  $r_1 = 0.1$  м,  $r_2 = 0.4$  м. Отклик среды

Время наблюдения 30 нс. Параметры сетки:  $h_z = 0.0025$  м,  $h_r = 0.001$  м,  $h_t = 0.005$  м.

Модель среды:

$$\varepsilon_{\text{отн}} = \begin{cases} \varepsilon_1 = 81, & z \in [0, 0.1] \text{ м} \\ \varepsilon_2 = 5, & z \in (0.1, 0.4] \text{ м} ; \\ \varepsilon_3 = 7, & z \in (0.4, 3] \text{ м} \end{cases}$$

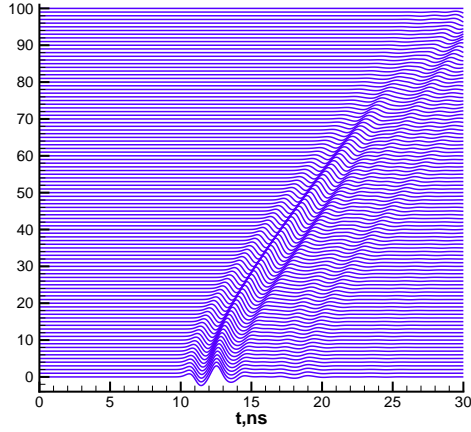


Рисунок В.19: Пример В.2. Две границы,  $r_1 = 0.1$  м,  $r_2 = 0.4$  м. Аномальное поле.

$$H_{\varphi(3)}(z, a, t) - H_{\varphi(2)}(z, a, t)$$

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_1 = 0.5, & z \in [0, 0.1] \text{ м} \\ \sigma_2 = 0.006, & z \in (0.1, 0.4] \text{ м} \\ \sigma_3 = 0.006, & z \in (0.4, 3] \text{ м} \end{cases} .$$

Абсолютное значение минимума аномального поля 0.050697.

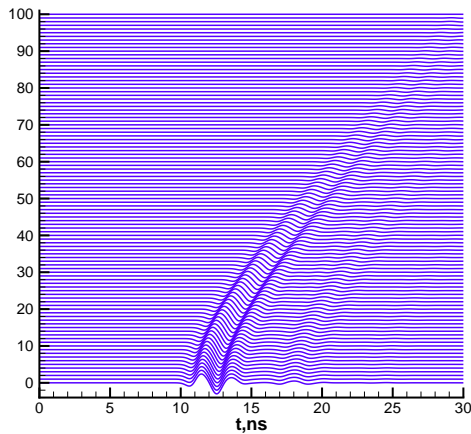


Рисунок В.20: Пример В.2. Две границы,  $r_1 = 0.1$  м,  $r_2 = 0.4$  м. Аномальное поле.

$$H_{\varphi(3)}(z, a, t) - H_{\varphi(2)}(z, a, t)$$

Неоднородное поле. Две границы,  $r_1 = 0.1$  м,  $r_2 = 0.4$  м. Отклик среды  
 Время наблюдения 30 нс. Параметры сетки:  $h_z = 0.0025$  м,  $h_r = 0.001$  м,  
 $h_t = 0.005$  м.

Абсолютное значение в точке минимума =

Модель среды:

$$\varepsilon_{\text{отн}} = \begin{cases} \varepsilon_1 = 81, & z \in [0, 0.1] \text{ м} \\ \varepsilon_2 = 5, & z \in (0.1, 0.4] \text{ м} ; \\ \varepsilon_3 = 20, & z \in (0.4, 3] \text{ м} \end{cases}$$

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_1 = 0.5, & z \in [0, 0.1] \text{ м} \\ \sigma_2 = 0.006, & z \in (0.1, 0.4] \text{ м} . \\ \sigma_3 = 0.01, & z \in (0.4, 3] \text{ м} \end{cases}$$

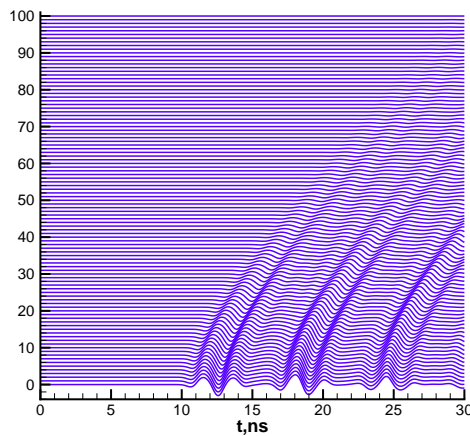


Рисунок В.21: Пример В.2. Две границы,  $r_1 = 0.1$  м,  $r_2 = 0.4$  м. Аномальное поле.

$$H_{\varphi(3)}(z, a, t) - H_{\varphi(2)}(z, a, t)$$

Неоднородное поле. Две границы,  $r_1 = 0.1$  м,  $r_2 = 0.4$  м. Отклик среды  
 Время наблюдения 30 нс. Параметры сетки:  $h_z = 0.0025$  м,  $h_r = 0.0009$  м,  
 $h_t = 0.004615$  м.

Модель среды:

$$\varepsilon_{\text{отн}} = \begin{cases} \varepsilon_1 = 81, & z \in [0, 0.1] \text{ м} \\ \varepsilon_2 = 5, & z \in (0.1, 0.4] \text{ м} ; \\ \varepsilon_3 = 20, & z \in (0.4, 3] \text{ м} \end{cases}$$

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_1 = 0.5, & z \in [0, 0.1] \text{ м} \\ \sigma_2 = 0.006, & z \in (0.1, 0.4] \text{ м} . \\ \sigma_3 = 0.006, & z \in (0.4, 3] \text{ м} \end{cases}$$

Абсолютное значение минимума аномального поля 0.193663.

Неоднородное поле. Две границы,  $r_1 = 0.1$  м,  $r_2 = 0.4$  м. Отклик среды

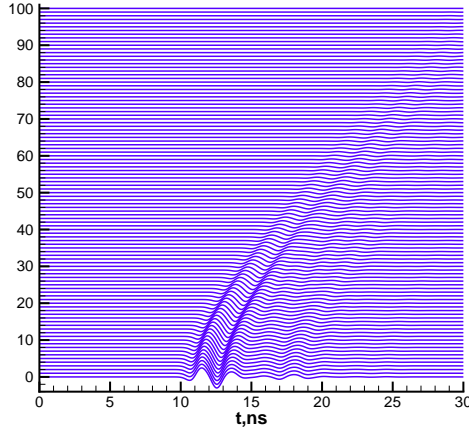


Рисунок В.22: Пример В.2. Две границы,  $r_1 = 0.1$  м,  $r_2 = 0.4$  м. Аномальное поле.

$$H_{\varphi(3)}(z, a, t) - H_{\varphi(2)}(z, a, t)$$

Время наблюдения 30 нс. Параметры сетки:  $h_z = 0.0025$  м,  $h_r = 0.0009$  м,  $h_t = 0.004615$  м.

Модель среды:

$$\varepsilon_{\text{отн}} = \begin{cases} \varepsilon_1 = 81, & z \in [0, 0.1] \text{ м} \\ \varepsilon_2 = 5, & z \in (0.1, 0.4] \text{ м} ; \\ \varepsilon_3 = 50, & z \in (0.4, 3] \text{ м} \end{cases}$$

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_1 = 0.5, & z \in [0, 0.1] \text{ м} \\ \sigma_2 = 0.006, & z \in (0.1, 0.4] \text{ м} . \\ \sigma_3 = 0.006, & z \in (0.4, 3] \text{ м} \end{cases}$$

Абсолютное значение минимума аномального поля 0.299644.

Неоднородное поле. Две границы,  $r_1 = 0.1$  м,  $r_2 = 0.4$  м. Отклик среды

Время наблюдения 30 нс. Параметры сетки:  $h_z = 0.0025$  м,  $h_r = 0.0009$  м,  $h_t = 0.004615$  м.

Модель среды:

$$\varepsilon_{\text{отн}} = \begin{cases} \varepsilon_1 = 81, & z \in [0, 0.1] \text{ м} \\ \varepsilon_2 = 5, & z \in (0.1, 0.4] \text{ м} ; \\ \varepsilon_3 = 81, & z \in (0.4, 3] \text{ м} \end{cases}$$

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_1 = 0.5, & z \in [0, 0.1] \text{ м} \\ \sigma_2 = 0.006, & z \in (0.1, 0.4] \text{ м} . \\ \sigma_3 = 0.006, & z \in (0.4, 3] \text{ м} \end{cases}$$

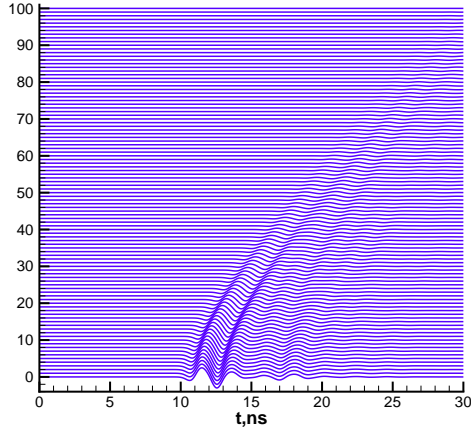


Рисунок В.23: Пример В.2. Две границы,  $r_1 = 0.1$  м,  $r_2 = 0.4$  м. Аномальное поле.

$$H_{\varphi(3)}(z, a, t) - H_{\varphi(2)}(z, a, t)$$

Абсолютное значение минимума аномального поля 0.346191.

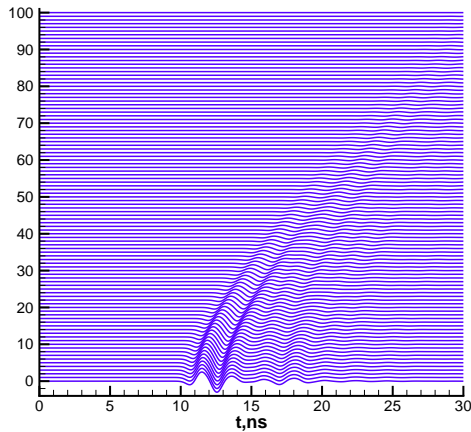


Рисунок В.24: Пример В.2. Две границы,  $r_1 = 0.1$  м,  $r_2 = 0.4$  м. Аномальное поле.

$$H_{\varphi(3)}(z, a, t) - H_{\varphi(2)}(z, a, t)$$

Неоднородное поле. Две границы,  $r_1 = 0.1$  м,  $r_2 = 0.4$  м. Отклик среды  
 Время наблюдения 30 нс. Параметры сетки:  $h_z = 0.0025$  м,  $h_r = 0.0009$  м,  
 $h_t = 0.004615$  м.

Модель среды:

$$\varepsilon_{\text{отн}} = \begin{cases} \varepsilon_1 = 81, & z \in [0, 0.1] \text{ м} \\ \varepsilon_2 = 5, & z \in (0.1, 0.4] \text{ м} ; \\ \varepsilon_3 = 81, & z \in (0.4, 3] \text{ м} \end{cases}$$

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_1 = 0.5, & z \in [0, 0.1] \text{ м} \\ \sigma_2 = 0.006, & z \in (0.1, 0.4] \text{ м} \\ \sigma_3 = 0.01, & z \in (0.4, 3] \text{ м} \end{cases} .$$

Абсолютное значение минимума аномального поля 0.365715.

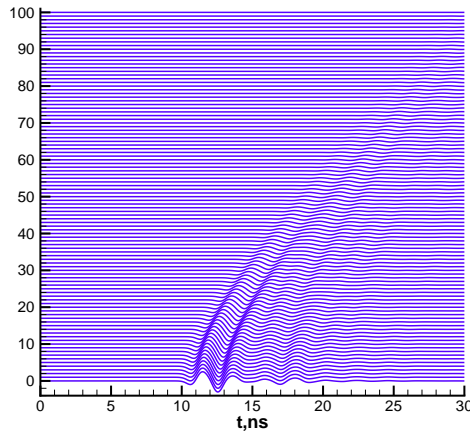


Рисунок В.25: Пример В.2. Две границы,  $r_1 = 0.1$  м,  $r_2 = 0.4$  м. Аномальное поле.

$$H_{\varphi(3)}(z, a, t) - H_{\varphi(2)}(z, a, t)$$

### Заключение

Численные расчеты показали, что абсолютное значение максимума аномального поля зависит не только от  $\varepsilon$  при фиксированном  $\sigma$ , но и от  $\sigma$  при фиксированном  $\varepsilon$ .

### Время расчета

Программа запускалась на рабочей станции с 4-х ядерным процессором Intel Quad Q8200 (2.33 GHz) и 4Gb оперативной памяти.

Время расчета для рисунков В.7–В.8 составляет 2428 сек (примерно 40 минут).

Время расчета для рисунков В.9–В.10 составляет 4149 сек (примерно 70 минут).

Время расчета для рисунков В.13–В.14 составляет 2799 сек (примерно 47 минут).

Время расчета неоднородного поля с одной границей (рис. В.15) составляет 7471 сек (примерно 125 минут).

Время расчета неоднородного поля с двумя границами (рис. В.21) составляет 5466 сек (примерно 92 минуты).

Время расчета неоднородного поля с двумя границами (рис. В.22) составляет 6563 сек (примерно 110 минут).