На правах рукописи

Шишленин Максим Александрович

Прямые и итерационные методы регуляризации многомерных обратных задач акустики и электродинамики

Специальность 01.01.07 — вычислительная математика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Новосибирск — 2016

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Научный консультант:
доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН
Кабанихин Сергей Игоревич

Официальные оппоненты:
Васин Владимир Васильевич
доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник Отдела некорректных задач анализа и приложений Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург.
Танана Виталий Павлович
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой вычислительной математики факультета вычислительной математики и информатики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Южно-Уральский государственный университет", г. Челябинск.
Ягола Анатолий Григорьевич
доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики физического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования "Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова", г. Москва.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, г. Санкт-Петербург.

Защита состоится 28 сентября 2016 года в 15.00 часов на заседании диссертационного совета Д 003.061.01, созданного на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН по адресу: 630090, г. Новосибирск, пр. ак. Лаврентьева, 6.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН и на сайте http://www.sscc.ru.

Автореферат разослан 27 июня 2016 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д.ф.-м.н. Рогазинский Сергей Валентинович

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Диссертационная работа посвящена развитию актуального для приложений научного направления — разработке и обоснованию численных методов решения многомерных обратных и некорректных задач акустики и электродинамики.

Создание и обоснование численных методов решения обратных и некорректно поставленных задач является актуальной проблемой, во-первых, в силу практической важности обратных и некорректных задач, а во-вторых, в силу необходимости создания эффективных алгоритмов решения многомерных обратных и некорректных задач акустики и электродинамики.

При исследовании внутреннего строения Земли большую роль играют геофизические методы. Они основаны на измерении на поверхности Земли (либо в скважине) характеристик какого-либо физического поля, которое несет информации о строении Земли. Такими полями, в частности, являются акустическое и электромагнитное поле, которые в случае акустики зависят от скорости распространения волн и плотности, и в электродинамике — от проводимости, диэлектрический и магнитной проницаемости. Некорректные задачи продолжения с части границы акустических и электромагнитных полей в сторону залегания неоднородностей, а также обратные задачи определения коэффициентов уравнений акустики и электродинамики являются актуальными и практически важными.

Разработанные автором методы можно разделить на две основные группы: модифицированные градиентные методы регуляризации некорректных и обратных задач и численные методы решения многомерных аналогов уравнений И. М. Гельфанда, Б. М. Левитана и М. Г. Крейна.

Целью работы является создание, обоснование, а также программная реализация новых численных методов решения многомерных обратных и некорректно поставленных задач акустики и электродинамики.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Разработать и обосновать новые методы регуляризации задачи продолжения с части границы решений уравнений акустики и электродинамики.

2. Исследовать некорректность задачи продолжения с части границы акустических и электромагнитных полей.

3. Разработать и обосновать новые итерационные методы решения задач продолжения и коэффициентных обратных задач акустики и электродинамики, учитывающие априорную информацию об искомом решении.

4. Разработать новые алгоритмы регуляризации многомерных обратных задач акустики на основе двумерных аналогов уравнений И. М. Гельфанда, Б. М. Левитана и М. Г. Крейна.

5. Создать комплекс программ на основе разработанных алгоритмов решения задач.

Методы исследования можно разделить на два основных раздела: теоретические исследования (получение новых оценок скорости сходимости по функционалу, новых оценок условной устойчивости и оценок сильной сходимости) и разработка численных алгоритмов и комплексов программ численного решения многомерных обратных задач акустики и электродинамики.

Теоретические исследования.

В работе использованы методы математической физики (энергетические и весовые оценки, теория характеристик), функционального анализа (теория компактных и ограниченных операторов, обобщенных функций), вычислительной математики (теоретические основы численных методов решения систем дифференциальных и алгебраических уравнений, уравнений в частных производных), теории обратных и некорректных задач (теория регуляризации, оценки условной устойчивости и сходимости).

Алгоритмы и программы.

При разработке и исследования алгоритмов использованы методы вычислительной математики (методы характеристик, конечных разностей, методы конечных элементов), методы регуляризации, линеаризации и теории оптимального управления, библиотеки Intel® MKL, NVIDIA®CUDA cuBLAS и пакет FreeFEM++.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Новые методы регуляризации задач продолжения с части границы акустических и электромагнитных полей, основанные на сведении задач продолжения к обратным задачам.

2. Новые оценки скорости сходимости по функционалу и оценки скорости сильной сходимости градиентных методов решения задач продолжения с части границы акустических и электромагнитных полей.

3. Исследование некорректности задач продолжения с части границы акустических и электромагнитных полей на основе анализа сингулярных чисел оператора A обратной задачи $Aq = f$.

4. Разработка и обоснование новых итерационно-проекционных методов регуляризации коэффициентных обратных задач акустики и электродинамики, учитывающих априорную информацию об искомом решении.

5. Разработка, исследование и численная реализация новых методов регуляризации многомерных коэффициентных обратных задач акустики на основе аналогов уравнений И. М. Гельфанда, Б. М. Левитана и М. Г. Крейна и проекционных методов.

Выносимые положения соответствуют следующим пунктам паспорта специальности 01.01.07 — вычислительная математика:

1. Положения 1 и 4 соответствуют 1 пункту паспорта.

2. Положения 2, 4 и 5 соответствуют 2 пункту паспорта.

3. Положения 1 и 5 соответствуют 3 пункту паспорта.

Научная новизна:

1. Построены новые алгоритмы регуляризации, получены оценки скорости сходимости по функционалу и оценки скорости сильной сходимости градиентных методов решения задач продолжения с части границы акустических и электромагнитных полей.

2. Впервые получена полная характеристика неустойчивости двумерной задачи продолжения с части границы решения уравнения Гельмгольца в случае комплексного волнового числа.

3. Разработан итерационно-проекционный алгоритм решения коэффициентной двумерной обратной задачи для уравнения акустики. Доказана сходимость N-приближения к точному решению обратной задачи. Получена оценка скорости сходимости метода, использующая априорную информацию об искомом решении.

4. Построены, исследованы и реализованы алгоритмы регуляризации многомерных аналогов уравнений И. М. Гельфанда, Б. М. Левитана, М. Г. Крейна.

Теоретическая значимость диссертационной работы определяется необходимостью создания новых и обоснования существующих численных методов и алгоритмов решения обратных и некорректных задач акустики и электродинамики.

Практическая значимость диссертационной работы определяется возможностью применения разработанных алгоритмов и программ в подповерхностной радиолокации, акустической томографии, акустическом и электромагнитном каротаже.

Достоверность полученных результатов и выводов подтверждается, во-первых, математическим доказательством основных положений, теорем и обоснованием алгоритмов. Во-вторых, использованием средств математического моделирования и тестирования, реализованных в виде комплекса программ на основе разработанных алгоритмов решения обратных задач акустики и электродинамики. В-третьих, достоверность результатов подтверждена численными расчетами.

Апробация работы.

Результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих международных и всероссийских конференциях: “Inverse Problems: Modeling and Simulation” (г. Анталия–Фетхие, Турция, 2004, 2006, 2008, 2010, 2012, 2014 гг.), международных конференциях “Алгоритмический анализ неустойчивых задач” (г. Екатеринбург, 2004, 2008, 2011 гг.; г. Челябинск, 2014 г.), международной конференции “Тихонов и современная математика” (г. Москва, 2006 г.), международной конференции “Суверенный Казахстан: 15-ти летний путь развития космической отрасли”, (г. Алматы, Казахстан, 2006 г.), First International Congress of the International Association of Inverse Problems: Applied Inverse Problems: Theoretical and Computational Aspects (г. Ванкувер, Канада, 2007 г.), международной конференции “Обратные и некорректные задачи математической физики”, посвященной 75-летию академика М. М. Лаврентьева (г. Новосибирск, 2007 г.), 79-th Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics (г. Бремен, Германия, 2008 г.), международной конференции, посвященной 100-летию С. Л. Соболева (г. Новосибирск, 2008 г.), 1-й, 2-й, 3-й, 4-й и 5-й молодежных научных школах-конференциях “Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач” (г. Новосибирск, 2009, 2010, 2011, 2012 и 2013 гг.), всероссийской конференции “Математика в приложениях”, приуроченной к 80-летию академика С. К. Годунова (г. Новосибирск, 2009 г.), XXXV Дальневосточной Математической Школе-Семинаре имени академика Е. В. Золотова (г. Владивосток, 2010 г.), The International Workshop on Computational Inverse Problems and Applications (г. Пекин–Нанчанг, Китай, 2010, 2013 гг.), International Conference on Inverse Problems (г. Гон-Конг, Китай, 2010 г.), конференции “Гольдинские чтения”, посвященной 75-летию со дня рождения академика РАН С. В. Гольдина (г. Новосибирск, 2011 г.), всероссийской конференции по вычислительной математике КВМ–2011 (г. Новосибирск, 2011 г.), 8th International ISAAC Congress (г. Москва, 2011 г.), международной конференции “Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика”, посвященной 90-летию со дня рождения академика Н. Н. Яненко (г. Новосибирск, 2011 г.), The First Russian-French Conference on Mathematical Geophysics, Mathematical Modeling in Continuum Mechanics and Inverse Problems (г. Биарриц, Франция, 2012 г.), International Workshop “Computational Mathematics”, (г. Сингапур, 2012 г.), международной конференции “Обратные и некорректные задачи математической физики”, посвященной 80-летию со дня рождения академика М. М. Лаврентьева (г. Новосибирск, 2012 г.), международной конференции “Дифференциальные уравнения, функциональные пространства, теория приближений”, посвященная 105-летию со дня рождения С. Л. Соболева (г. Новосибирск, 2013 г.), международной научной конференции “Методы создания и идентификации математических моделей”, посвященной 85-летию со дня рождения академика А. С. Алексеева (г. Новосибирск, 2013 г.), Applied Inverse Problems Conference (г. Дижон, Корея, 2013 г.), международной конференции “Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования” (г. Москва, 2013 г.), 4th Inverse Problems, Design and Optimization (г. Альби, Франция, 2013 г.), международной конференции “Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики”, посвященной 50-летию ИВМиМГ СО РАН (г. Новосибирск, 2014 г.), международной конференции по биоинформатике регуляции и структуры геномов и системной биологии (Bioinformatics of Genome Regulation and Structure Systems Biology — BGRS) (г. Новосибирск 2014 г.), Inverse Problems — from Theory to Application (г. Бристоль, Великобритания, 2014 г.), XV международной конференции “Супервычисления и математическое моделирование” (г. Саров, 2014 г.), the 7th International Conference on Inverse Problems and Related Topics (г. Тайбей, Тайвань, 2014 г.), 8th International Congress on “Industrial and Applied Mathematics”, (г. Пекин, Китай, 2015 г.), 4th International Conference on Matrix Methods in Mathematics and Applications (г. Москва, 2015 г.), международном семинаре по обратным и некорректно поставленным задачам (г. Москва, 2015 г.), международной конференции “Квазилинейные уравнения, обратные задачи и их приложения” (г. Долгопрудный, 2015 г.).

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на 4 всероссийских конференциях, 37 международных конференциях, а также на научных семинарах:

- в Новосибирске:
  - Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН:

* семинар секции “Вычислительная математика и численное моделирование физики атмосферы и гидросферы” Ученого совета института под руководством члена-корреспондента РАН Г. А. Михайлова (2015 г.),
* объединенный семинар Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН и кафедры вычислительной математики ММФ НГУ “Численный анализ” под руководством профессора В. П. Ильина (2014 г.),
* объединенный семинар лаборатории математического моделирования процессов в атмосфере и гидросфере и лаборатории математического моделирования гидротермодинамических процессов в природной среде под руководством профессора В. В. Пененко и профессора В. И. Кузина (2014 г.).

– Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН:
  * семинар отдела условно-корректных задач под руководством члена-корреспондента РАН В. Г. Романова (2012, 2013, 2014 гг.),
  * семинар “Геометрия, топология и их приложения” под руководством академика РАН И. А. Тайманова (2013 г.),
  * общеинститутский математический семинар (2013 г.),
  * семинар лаборатории дифференциальных уравнений и смежных вопросов анализа под руководством профессора В. С. Белоносова и профессора М. В. Фокина (2014 г.).

- в Москве:
  – Институт вычислительной математики РАН:
    * семинар ”Актуальные проблемы вычислительной математики и математического моделирования” под руководством академика РАН В. П. Дымникова и члена-корреспондента РАН Е. Е. Тыртышникова (2013 г.).
  – Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова:
    * семинар научно-исследовательского вычислительного центра “Обратные задачи математической физики” под руководством профессора А. Б. Бакушинского, профессора А. В. Тихонравова и профессора А. Г. Яголы (2013 г.).
  – Московский авиационный институт:
    * семинар под руководством члена-корреспондента РАН О. М. Алифанова и профессора А. В. Ненарокомова (2013 г.).

– Московский физико-технический институт:

  * семинар кафедры информатики под руководством члена-корреспондента РАН И. Б. Петрова (2013 г.).

Личный вклад.

Основные научные теоретические и практические результаты диссертационной работы получены автором самостоятельно.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 34 печатных изданиях (из них 7 [30, 31, 36–39, 41] в журналах, рекомендованных ВАК; 7 [29, 32–35, 42, 55] в журналах зарегистрированных в системе Web of Science; 12 [32, 49, 52, 53, 55–64] в журналах зарегистрированных в системе Scopus), три монографии “Алгоритмы и численные методы решения обратных и некорректных задач” (авторы С. И. Кабанихин, К. Т. Искаков, М. А. Бектемесов, М. А. Шишленин) [45], “Методы решения некорректных задач линейной алгебры” (авторы С. И. Кабанихин, М. А. Бектемесов, М. А. Шишленин) [46], “Direct Methods of Solving Inverse Hyperbolic Problems” (авторы S. I. Kabanikhin, A.Ḋ. Satybaev, M. A. Shishlenin) [48] и глава “Numerical Methods for Solving Inverse Hyperbolic Problems” (авторы S. I. Kabanikhin, M. A. Shishlenin) в книге *Computational Methods for Applied Inverse Problems* [47], и в 52 тезисах докладов.

В опубликованных работах отражено основное содержание, результаты и выводы диссертационного исследования. Конфликт интересов с соавторами отсутствует. Личный вклад автора заключается в обсуждении постановок задач и выбора методов их решения, в разработке и обосновании численных алгоритмов, составлении и отладки компьютерных программ, проведении вычислительных экспериментов.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложений. Полный объем диссертации **226** страниц текста. Список литературы содержит **299** наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в данной диссертационной работе, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы и приводится краткое изложение результатов диссертации. Формулируются основные положения, выносимые на защиту.

Основные теоретические результаты исследования обратных и некорректно поставленных задач получены А. Н. Тихоновым, В. К. Ивановым, М. М. Лаврентьевым, В. Г. Романовым, В. В. Васиным, В. П. Тананой, А. Г. Яголой, А. Л. Бухгеймом, М. В. Клибановым, С. И. Кабанихиным и многими другими авторами. Метод простой итерации (в зарубежной литературе — метод итераций Ландвебера) для решения операторных уравнений развивали H. W. Engl, M. Hanke, A. Neubauer, O. Scherzer, В. В. Васин, а его применение к регуляризации обратных задач O. Scherzer, С. И. Кабанихин, R. Ramlau, R. Kowar, M. Schieck. Существенный вклад в развитие теории и численных методов решения коэффициентных обратных задач внесли Л.Д. Фаддеев, М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, О.М. Алифанов. При разработке алгоритмов решения многомерных аналогов уравнений И. М. Гельфанда, Б. М. Левитана и М. Г. Крейна в диссертационной работе использованы результаты работ С. И. Кабанихина, М. И. Белишева, А. С. Благовещенского, Р. Г. Новикова.

В **первой главе** разработаны и исследованы методы регуляризации линейных обратных и некорректно поставленных задач акустики и электродинамики.

Раздел **1.1** содержит введение и обзор публикаций по задачам продолжения.

Задачи продолжения относятся к линейным некорректным задачам математической физики, основы теории которых были заложены в работах А. Н. Тихонова, М. М. Лавреньтева, В. К. Иванова, а также их учеников и последователей.

Во многих обратных задачах (например, грави- и магниторазведке) искомые неоднородности расположены на некоторой глубине под слоем среды, параметры которой известны (в геофизике это, как правило, однородные или горизонтально-слоистые среды). В этом случае важным инструментом для практиков являются задачи продолжения геофизических полей с земной поверхности в сторону залегания неоднородностей.

Задачи продолжения решения с времениподобной поверхности для гиперболических уравнений исследовались Р. Курантом, М. М. Лаврентьевым, В. Г. Романовым, С. П. Шишатским [1].

В разделе **1.2** изложены и обоснованы методы продолжения физических полей с части границы.

В подразделе **1.2.1** исследована задача продолжения с части границы решения уравнения акустики. Физическая постановка задачи заключается в следующем: предположим, до момента времени $t = 0$ среда находилась в покое, далее на части границы $z = 0$ действует источник вида $u_z|_{z=0} = g(y,t)$ и измеряется дополнительная информация $u|_{z=0} = f(y,t)$. Задача состоит в продолжении функции $u(z,y,t)$ с части границы $z = 0$ в область с известными параметрами среды.

Математическая постановка задачи: рассмотрим задачу продолжения в области $\Omega \times (0,T)$, $\Omega = \{(z,y) : z \in (0,h), y \in (0,L_y)\}$:

$$\begin{gathered} c^{-2}(z,y)u_{tt} = u_{zz} + u_{yy} - \nabla \ln \rho(z,y) \nabla u, \qquad (z,y,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = 0, \\ u_z(0,y,t) = g(y,t), \\ u(0,y,t) = f(y,t). \end{gathered}$$

Здесь $c(z,y) \geq c_0 > 0$ — скорость распространения волн, $\rho(z,y) \geq \rho_0 > 0$ — плотность среды, $u(z,y,t)$ — акустическое давление.

Основной результат подраздела **1.2.1** заключается в получении формулы для вычисления градиента функционала через решение прямой и сопряженной задачи и построении алгоритма простой итерации решения задачи продолжения.

Основная идея решения задачи продолжения заключается в сведении к соответствующей обратной задаче и минимизации целевого функционала.

Сформулируем сначала прямую задачу: определить функцию $u(z,y,t)$ из уравнения

$$c^{-2}(z,y)u_{tt} = u_{zz} + u_{yy} - \nabla \ln \rho(z,y) \nabla u, \qquad (z,y) \in \Omega, \quad t \in (0,T), \tag{1}$$

по заданным начальным

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \qquad z \in (0,h), \quad y \in (0,L_y) \tag{2}$$

и граничным условиям

$$u_z|_{z=0} = g(y,t), \quad u|_{z=h} = q(y,t), \qquad y \in (0,L_y), \quad t \in (0,T), \tag{3}$$

$$u|_{y=0} = q_1(z,t), \quad u|_{y=L_y} = q_2(z,t), \qquad z \in (0,h), \quad t \in (0,T). \tag{4}$$

Обратная задача: определить функции $q(y,t)$, $q_1(z,t)$ и $q_2(z,t)$ из соотношений (1)—(4) и дополнительной информации

$$u|_{z=0} = f(y,t), \qquad y \in (0,L_y), \quad t \in (0,T).$$

В подразделе **1.2.2** исследована задача продолжения с части границы решения уравнения электродинамики:

$$\varepsilon(z,y)u_{tt} + \sigma(z,y)u_t = \frac{1}{\mu}\big(u_{zz} + u_{yy}\big), \qquad (z,y) \in \Omega, \quad t \in (0,T), \tag{5}$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \qquad z \in (0,h), \quad y \in (0,L_y), \tag{6}$$

$$u_z|_{z=0} = g(y,t), \quad u|_{z=0} = f(y,t), \qquad y \in (0,L_y), \quad t \in (0,T). \tag{7}$$

Здесь $\varepsilon(z,y)$ — диэлектрическая проницаемость среды, μ — магнитная проницаемость среды, $\sigma(z,y)$ — проводимость, $u(z,y,t)$ — горизонтальная компонента вектора электрической напряженности электромагнитного поля.

Задача продолжения решения уравнения электродинамики (5), (7), как и в подразделе **1.2.1**, формулируется в виде обратной задачи. Для ее решения применяется градиентный метод минимизации целевого функционала. Получена формула для вычисления градиента функционала через решение прямой и сопряженной задачи.

В подразделе **1.2.3** исследована задача продолжения решения эллиптического уравнения в области цилиндрического типа:

$$u_{zz} + L(y)u = 0, \qquad (z, y) \in \Omega, \tag{8}$$

$$u(0, y) = f(y), \qquad y \in \mathcal{D} \in \mathbb{R}^2, \tag{9}$$

$$u_z(0, y) = 0, \qquad y \in \mathcal{D}, \tag{10}$$

$$u(z, y) = 0, \qquad z \in (0, h), \quad y \in \partial\mathcal{D} \tag{11}$$

с условиями согласования

$$f(y) = 0, \qquad y \in \partial\mathcal{D}. \tag{12}$$

Здесь $\Omega = (0, h) \times \mathcal{D}$, $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^2$ связная ограниченная область цилиндрического типа с липшицевой границей $\partial\mathcal{D}$,

$$L(y)u = \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij}(y) \frac{\partial u}{\partial y_j} \right) - c(y)u,$$

$$M_1 \sum_{j=1}^{2} \nu_j^2 \leq \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(y)\nu_i\nu_j,$$

$$\forall \nu_i \in \mathbb{R}, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, 2,$$

$$0 \leq c(y) \leq M_2, \qquad a_{ij} \in C^1(\overline{\mathcal{D}}), \qquad c \in C(\overline{\mathcal{D}}).$$

Задачи продолжения возникают в таких приложениях как грави и магниторазведка. Значительный вклад в развитие теории и численных методов сделал В. К. Иванов [2].

Основной результат подраздела **1.2.3** заключается в получении новых оценок скорости сходимости по функционалу, скорости сильной сходимости градиентных методов решения задач продолжения стационарных полей. Получена формула для вычисления градиента функционала. Получено правило остановки градиентного метода, основанное на оценках условной устойчивости, в зависимости от уровня ошибки в данных.

Некорректная задача продолжения (8)–(12) сформулирована как обратная задача к следующей прямой задаче

$$u_{zz} + L(y)u = 0, \qquad (z, y) \in \Omega, \tag{13}$$

$$u_z(0, y) = 0, \qquad y \in \mathcal{D}, \tag{14}$$

$$u(h, y) = q(y), \qquad y \in \mathcal{D}, \tag{15}$$

$$u(z, y) = 0, \qquad x \in (0, h), \quad y \in \partial\mathcal{D} \tag{16}$$

с условиями согласования

$$q(y) = 0, \qquad y \in \partial\mathcal{D}. \tag{17}$$

В прямой задаче (13)–(17) требуется найти $u(z, y)$ в области Ω по функции $q(y)$ заданной на части границы $z = h$ области Ω.

Обратная задача заключается в определении $q(y)$ из условий (13)–(17) и заданной дополнительной информации

$$u(0, y) = f(y), \qquad y \in \partial\mathcal{D}. \tag{18}$$

Обратная задача (13)—(18) сформулирована в виде операторного уравнения [3]:

$$Aq = f, \qquad A : L_2(\mathcal{D}) \to L_2(\mathcal{D}). \tag{19}$$

Для приближенного решения операторного уравнения (19) применен градиентный метод

$$q_{n+1} = q_n - \alpha J'(q_n).$$

минимизации целевого функционала

$$J(q) =< Aq - f, Aq - f >_{L_2(\mathcal{D})} .$$

Здесь α — параметр спуска, $J'(q)$ — градиент функционала. Параметр спуска α может быть выбран различными способами (в методе простой итерации $\alpha \in (0, \|A\|^{-2})$, в методе наискорейшего спуска $\alpha_n = \arg\min_{\alpha>0} J(q_n - \alpha J'(q_n))$ и т.д.)

Для вычисления градиента функционала $J'(q_n)$ введена сопряженная задача

$$\psi_{zz} + L(y)\psi = 0, \qquad (z, y) \in \Omega,$$
$$\psi_z(0, y) = 2(u(0, y) - f(y)), \qquad y \in \mathcal{D},$$
$$\psi(h, y) = 0, \qquad y \in \mathcal{D},$$
$$\psi|_{\partial\mathcal{D}} = 0, \qquad z \in (0, h).$$

Тогда градиент функционала $J'q$ вычисляется по формуле

$$\big(J'q\big)(y) = \psi_z(h, y).$$

Теорема 1. *(регуляризирующее свойство метода простой итерации) Пусть для $f \in L_2(\mathcal{D})$ существует решение $q_T \in L_2(\mathcal{D})$ задачи $Aq = f$ и найдена оценка условной устойчивости $\beta(n)$ на некотором множестве M. Тогда при выполнении условий*

$$\|q_0 - q_T\|_{L_2(\mathcal{D})} \leq C,$$
$$\|f - f_\delta\|_{L_2(\mathcal{D})} \leq \delta,$$

последовательность $\{u_{\delta,n}\}$ решений прямых задач для соответствующей итерации $\{q_{\delta,n}\}$ сходится к точному решению $u_T \in L_2(\Omega)$ задачи (13)–(17) *и имеет место оценка:*

$$\|u_T - u_{\delta,n}\|_{L_2(\Omega)} \leq C\sqrt{\frac{n\gamma - 1}{n\gamma\ln(n\gamma)}} + \delta\beta(n)\sqrt{\frac{h(\|A\|^2 - 1)}{2\ln\|A\|}}. \qquad (20)$$

Данная теорема позволяет оценить разность между точным решением задачи продолжения $u_T(z, y)$ и решением $u_{\delta,n}(z, y)$, построенным по приближенным данным $f_\delta(y)$ ($\|f - f_\delta\|_{L_2(\mathcal{D})} \leq \delta$) следующим образом. Выберем $q_0 \in L_2(\mathcal{D})$ — начальное приближение итерационного процесса

$$q_{n+1} = q_n - \alpha J'(q_n).$$

Покажем, как строится $u_{\delta,n}(z, y)$ по известному $q_{\delta,n}(y)$. Сначала решаем прямую задачу:

$$\begin{gathered}
u_{\delta,n_{zz}} + L(y)u_{\delta,n} = 0, \qquad (z, y) \in \Omega,\\
u_{\delta,n_z}(0, y) = 0, \qquad y \in \mathcal{D},\\
u_{\delta,n}(h, y) = q(y), \qquad y \in \mathcal{D},\\
u_{\delta,n}(z, y) = 0, \qquad z \in (0, h), \quad y \in \partial\mathcal{D},\\
q_{\delta,n}(y) = 0, \qquad y \in \partial\mathcal{D}.
\end{gathered}$$

На следующем шаге считается сопряженная задача

$$\begin{aligned}
&\psi_{\delta,n_{zz}} + L(y)\psi_{\delta,n} = 0, \qquad (z, y) \in \Omega,\\
&\psi_{\delta,n_z}(0, y) = 2(u_{\delta,n}(0, y) - f_\delta(y)), \qquad y \in \mathcal{D},\\
&\psi_{\delta,n}(h, y) = 0, \qquad y \in \mathcal{D},\\
&\psi_{\delta,n}|_{\partial\mathcal{D}} = 0, \qquad z \in (0, h).
\end{aligned}$$

Формально вычисляется градиент функционала по формуле $J'(q_{\delta,n})(y) = \psi_{\delta,n_z}(h, y)$. Далее строится приближенное решение на следующей итерации

$$q_{\delta,n+1} = q_{\delta,n} - \alpha J'(q_{\delta,n}).$$

Замечание 1. *На основе правой части оценки* (20) *можно выбрать номер итерации, например, исходя из следующих рассуждений. В силу того, что первое слагаемое монотонно стремится к бесконечности, а второе слагаемое — монотонно стремится к нулю, при* $n \to \infty$, *критерий остановки для соответствующего номера итераций* n_* *можно выбрать по следующему правилу. Дифференцируя правую часть* (20) *по переменной* n, *найдем корень полученного* n_r *уравнения и выберем номер остановки* $n_s = [n_r] + 1$.

Второй способ выбора номера итерации заключается в решении уравнения [4]:

$$C\sqrt{\frac{n\gamma - 1}{n\gamma \ln(n\gamma)}} = \delta\beta(n)\sqrt{\frac{h(\|A\|^2 - 1)}{2\ln\|A\|}}.$$

В подразделе **1.2.4** исследована задача продолжения с данными на части границы решения уравнения Гельмгольца в случае комплексного волнового числа

$$\Delta u + k^2 u = 0, \qquad x \in (0, h), \quad y \in (0, \pi), \tag{21}$$

$$u(0, y) = f(y), \qquad y \in (0, \pi), \tag{22}$$

$$u_x(0, y) = 0, \qquad y \in (0, \pi), \tag{23}$$

$$u(x, 0) = u(x, \pi) = 0, \qquad x \in (0, h). \tag{24}$$

Здесь $k^2 = \varepsilon\omega^2 - \mathrm{i}\sigma\omega$; ω, ε и σ положительные постоянные.

Задача продолжения (21)–(24) сформулирована в виде обратной задачи: определить граничное условие

$$u(h, y) = q(y), \qquad y \in (0, \pi), \tag{25}$$

из соотношений (21), (23), (24) и по дополнительной информации (22).

Обратная задача (21)–(25) исследована в операторной форме [5, 6]:

$$A_k q = f, \qquad A_k \ : \ L_2(0, \pi) \to L_2(0, \pi).$$

В диссертации получены формулы для вычисления сингулярных чисел оператора A_k:

$$\sigma_m(A_k) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cosh(2\alpha_m h) + \cos(2\beta_m h)}}.$$

Здесь

$$\alpha_m = \sqrt{\frac{\sqrt{(m^2 - \varepsilon\omega^2)^2 + \sigma^2\omega^2} + m^2 - \varepsilon\omega^2}{2}},$$

$$\beta_m = \sqrt{\frac{\sqrt{(m^2 - \varepsilon\omega^2)^2 + \sigma^2\omega^2} - m^2 + \varepsilon\omega^2}{2}}.$$

Полученная формула сингулярных чисел оператора задачи продолжения позволяет охарактеризовать некорректность задачи и построить приближенное решение основанное на первых m сингулярных числах в зависимости от глубины восстановления h, параметров среды ε и σ, частоты ω и уровня ошибок в данных f.

Например, в случае уравнения акустики ($\varepsilon \neq 0$ и $\sigma = 0$) формула для сингулярных чисел [6] имеет вид

$$\sigma_m(A_k) = \begin{cases} \frac{1}{|\cos(\sqrt{k_m}h)|}, & m^2 \leq \varepsilon\omega^2, \\ \frac{1}{\cosh(\sqrt{k_m}h)}, & \varepsilon\omega^2 < m^2. \end{cases} \tag{26}$$

Полученный вид сингулярных чисел позволяет анализировать метод усеченного сингулярного разложения и согласовывать номер усечения с ошибкой входных данных [7].

Выражение (26) позволяет заключить, что сингулярные числа зависят от волнового числа $k_m^2 = \varepsilon\omega^2 - m^2$. Если $m^2 \leq \varepsilon\omega^2$, то сингулярные числа оператора A_k ограничены снизу единицей и, таким образом, можно найти обратный оператор для A_{k_m}, в то время как при $m^2 > \varepsilon\omega^2$ сингулярные числа убывают экспоненциально.

В подразделе **1.2.5** численно показано, что размер области наблюдения является параметром регуляризации для задачи Коши для двумерного уравнения Лапласа, а именно, привлечение дополнительной информации с большей области наблюдения $(-b, b) \subset (-b_1, b_1) \subset (-b_2, b_2) \subset \ldots$ повышает устойчивость задачи в области $\Omega(a, b) = \{(z, y) : z \in (0, a),\, y \in (-b, b)\}$. Расчеты показали, что численное решение задачи продолжения в сторону залегания неоднородностей, позволяют локализовать эти неоднородности. Данный подход близок с методом расширяющихся компактов, идея и обоснование которого принадлежит В. К. Иванову и И. Н. Домбровской [8, 9]. В работах К. Ю. Дорофеева, Н. Н. Николаевой и А. Г. Яголы, В Н. Титаренко и А. Г. Яголы [10, 11] разработаны численные методы решения линейных некорректных задач при условии истокопредставимости, в том числе и построения апостериорной оценки погрешности. В работе [12] метод применен для решения нелинейных задач.

В разделе **1.3** рассмотрен метод линеаризации для решения обратной задачи электродинамики. Метод линеаризации в обратных динамических задачах для гиперболических уравнений применялся многими авторами, начиная с работы М. М. Лаврентьева и В. Г. Романова [13]. Одной из основных особенностей исследованных ранее линеаризованных обратных задач являлось то обстоятельство, что дополнительную информацию требовалось задавать на всей гиперплоскости $z = 0$. Отметим, что С. И. Кабанихин исследовал метод линеаризации для двумерной обратной задачи для волнового уравнения [14].

Исследован метод линеаризации для следующей начально-краевой задачи (прямой задачи) электродинамики

$$\varepsilon(z,y)u_{tt}+\sigma(z)u_t=\Delta u, \qquad z\in\mathbb{R}_+, \quad y\in\mathbb{R}, \quad t\in\mathbb{R}_+, \tag{27}$$

$$u|_{t<0}\equiv 0, \tag{28}$$

$$u_z|_{z=0}=r_0\delta(t), \qquad r_0=\mathrm{const}\neq 0. \tag{29}$$

Здесь $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака.

Обратная задача: определить $\varepsilon(z,y)$ по дополнительной информации

$$u|_{z=0}=f(y,t), \quad y\in\mathbb{R}, \quad t\in\mathbb{R}_+. \tag{30}$$

Основным результатом раздела **1.3** является построение регуляризирующего алгоритма решения линеаризованной обратной задачи.

Кратко опишем метод линеаризации. Пусть диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(z,y)$ имеет следующую структуру:

$$\varepsilon(z,y)=\varepsilon_1(z)+\varepsilon_2(z,y)$$

и сделаны следующие предположения на функции $\varepsilon_1(z)$, $\varepsilon_2(z,y)$:

1) $\varepsilon_1\in C^2(\mathbb{R}_+), \quad \varepsilon_1'(+0)=0;$

2) существуют положительные постоянные M_1, M_2 и M_3 такие, что при всех $z\in\mathbb{R}_+$ имеет место

$$0<M_1\leq\varepsilon_1(z)\leq M_2, \qquad \|\varepsilon_1\|_{C^2(\mathbb{R}_+)}\leq M_3;$$

3) функция $\varepsilon_2(z,y)$ отлична от нуля при $(z,y)\in(0,h)\times(0,L)$,

4) $\varepsilon_2(z,y)\in C^2((0,h)\times(0,L))$,

$$\alpha=\|\varepsilon_2\|_{C^2((0,h)\times(0,L))} \quad \alpha\ll M_1. \tag{31}$$

Обратная задача: определить $\varepsilon(z,y)$ из соотношений (27)—(30) и заданной $\sigma(z)$.

Используя предположение (31) о малости ε_2, проведена линеаризация обратной задачи (27)—(30). Решение $u(z,y,t)$ представлено в виде

$$u(z,y,t)=u_1(z,t)+u_2(z,y,t).$$

Здесь $u_1(z,t)$ является решением следующей задачи:

$$\varepsilon_1(z)u_{1tt}+\sigma(z)u_{1t}=u_{1zz}, \qquad z\in\mathbb{R}_+,\ t\in\mathbb{R}_+, \tag{32}$$

$$u_1|_{t<0}\equiv 0, \qquad u_{1z}|_{z=0}=r_0\delta(t). \tag{33}$$

Здесь $\widehat{y}$ — фиксированное значение переменной.

Пренебрегая членом $\varepsilon_2 \Delta u_2$, получена задача определения $u_2(z,y,t)$ в области $\Omega \times (0,T)$, $\Omega = \{(z,y) : z \in (0,h), y \in (0,L_y)\}$:

$$\varepsilon_1 u_{2tt} + \sigma(z) u_{2t} = \Delta u_2 + \varepsilon_2(z,y) u_{1zz}, \qquad (z,y) \in \Omega, \quad t \in (0,T), \tag{34}$$

$$u_2|_{t<0} \equiv 0, \qquad u_{2z}|_{z=0} = 0, \tag{35}$$

$$u(z,0,t) = u(z,L_y,t) = 0, \qquad z \in (0,h), \quad t \in (0,T). \tag{36}$$

Здесь $T = 2h(M_1 - \alpha)^{-1}$, $L_y = L + T(M_2 + \alpha)$.

Дополнительная информация для определения $u_1(z,t)$ и функции $\varepsilon_1(z)$ из соотношений (32), (33):

$$u_1(0,t) = f(\widehat{y},t), \qquad t \in (0,T). \tag{37}$$

Дополнительная информация для задачи (34)—(36) об определении $u_2(z,y,t)$ и $\varepsilon_2(z,y)$ примет следующий вид:

$$u_2(0,y,t) = f(y,t) - u_1(0,t), \qquad y \in (0,L_y), \quad t \in (0,T). \tag{38}$$

Таким образом, решение обратной задачи (27)—(30) об определении $\varepsilon(z,y)$ и функции $u(z,y,t)$ состоит из следующих этапов:

1. Решение обратной задачи (32), (33), (37) и нахождение $\varepsilon_1(z)$ и функции $u_1(z,t)$.

2. Решение обратной задачи (34)—(36), (38) и нахождение $\varepsilon_2(z,y)$.

В разделе **1.4** приведены результаты численных расчетов двумерной задачи продолжения. Проведен сравнительный анализ численных методов регуляризации задачи продолжения решения с части границы двумерного уравнения Гельмгольца.

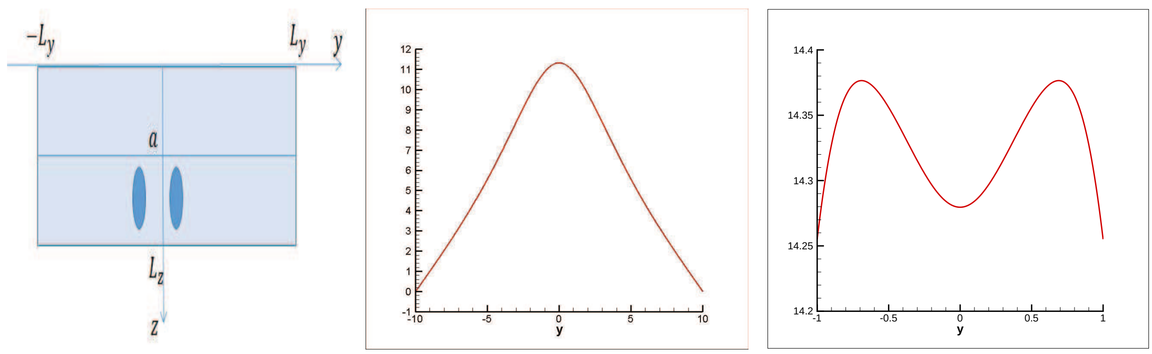

Рис. 1: Задача Коши для уравнения Лапласа. Модельный пример. Слева — область с неоднородностями. В центре — данные $u(0,y)$, наблюдаемые на поверхности $z=0$. Справа — численное решение задачи продолжения $u(a,y)$ на глубине $z=a$.

В **главе 2** на основе проекционного метода исследована задача восстановления двумерного коэффициента в уравнении акустики. Обратная задача сведена к нелинейной системе интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра. Доказана сходимость проекционного метода.

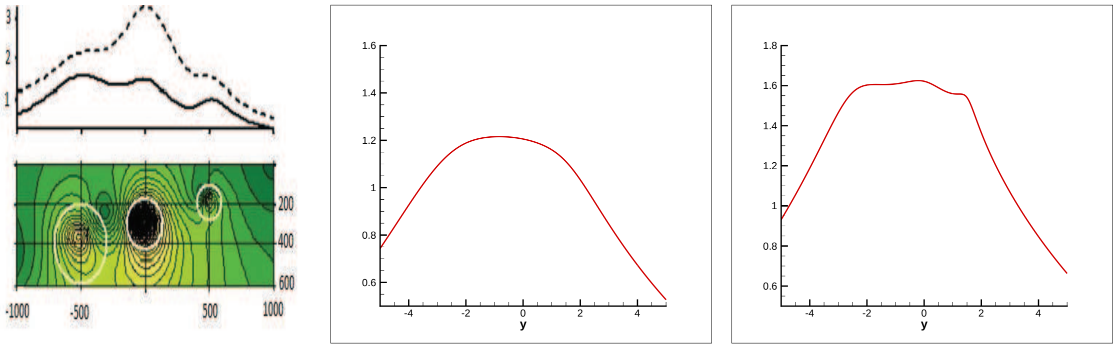

Рис. 2: Задача Коши для уравнения Лапласа. Слева — модель среды. В центре — данные $u(0,y)$, наблюдаемые на поверхности $z=0$. Справа — численное решение задачи продолжения $u(1,y)$ на глубине 1.

Многомерная обратная задача сводена к бесконечной системе одномерных обратных задач с помощью проекционного метода. Построен численный алгоритм решения N-приближение системы одномерных обратных задач. Основной проблемой на этом пути является обоснование существования решения конечной системы одномерных обратных задач и получение оценки скорости сходимости решения конечной системы одномерных обратных задач к точному решению исходной многомерной обратной задачи при стремлении к бесконечности параметра N — длины отрезка ряда Фурье в разложении по базисным функциям. Впервые проекционный метод для решения коэффициентной обратной задачи для волнового уравнения применил С. И. Кабанихин [14]. Позднее S. I. Kabanikhin, O. Scherzer, M. A. Shishlenin [15] обобщили данный подход на функции из пространства L_2.

В разделе **2.2** разработан метод решения двумерной задачи акустики на основе проекционного и градиентного метода.

В подразделе **2.2.1** сформулирована обратная задача восстановления функций $\overline{u}(x,y)$, $\tilde{u}(x,y,t)$, заданных на Ω, $(0,T)\times(-\pi,\pi)$, соответственно, в волновом уравнении

$$\tilde{u}_{tt} = \Delta\tilde{u}(x,y,t) + \overline{u}(x,y)\tilde{u}(x,y,t) \tag{39}$$

с заданными начальными и граничными условиями

$$\tilde{u}(x,y,0) = \varphi(x,y), \qquad x\in(-T,T), \quad y\in(-\pi,\pi), \tag{40}$$

$$\tilde{u}_t(x,y,0) = 0, \qquad x\in(-T,T), \quad y\in(-\pi,\pi), \tag{41}$$

$$\tilde{u}(x,-\pi,t) = \tilde{u}(x,\pi,t), \qquad x\in(t-T,T-t), \quad t\in(0,T), \tag{42}$$

$$\tilde{u}(0,y,t) = \tilde{f}(y,t), \quad y\in(-\pi,\pi), \quad t\in(0,T). \tag{43}$$

Здесь

$$\Delta(x,t) = \Big\{(\xi,\tau) : 0 < \xi < x,\ t - x + \xi < \tau < t + x - \xi\Big\},$$
$$\Delta(T) = \Delta(T,0)\,,$$
$$\Omega = \Big\{(x,y,t) : (x,t) \in \Delta(T),\ y \in (-\pi,\pi)\Big\}\,.$$

В подразделе **2.2.2** обратная задача сводится к системе интегро-дифференциальных уравнений в предположении, что функции $\tilde{f}$ и φ являются достаточно гладкими и, обозначив $u := \tilde{u}_{tt}$, $f := \tilde{f}_{tt}$, $\psi := \Delta\varphi$, получим, что

$$u_{tt} = \Delta u + \overline{u}u, \tag{44}$$
$$u(x,y,0) = \psi(x,y) + \overline{u}(x,y)\varphi(x,y), \tag{45}$$
$$u_t(x,y,0) = 0, \tag{46}$$
$$u(x,-\pi,t) = u(x,\pi,t), \tag{47}$$
$$u(0,y,t) = f(y,t). \tag{48}$$

Продолжив функцию f четным образом по переменной t, тогда из формулы Даламбера, получим, что

$$u(x,y,t) = h(x,y,t) + B_{x,t}[Ru], \qquad (x,y,t) \in \Omega. \tag{49}$$

Здесь

$$h(x,y,t) = \frac{1}{2}[f(y,t+x) + f(y,t-x)],$$
$$Ru(x,y,t) = u_{yy} + \overline{u}(x,y)u(x,y,t),$$
$$B_{x,t}[u] = \frac{1}{2}\int\limits_0^x \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} u(\xi,y,\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi.$$

Используя (45) и (49), при $t = 0$ получим

$$\psi(x,y) + \overline{u}(x,y)\varphi(x,y) = \overline{h}(x,y) + B_{x,0}[Ru], \tag{50}$$

где $\overline{h}(x,y) = h(x,y,0)$.

Тем самым обратная задача определения функций $\overline{u}$ и $\tilde{u}$ из соотношений (39)–(43) сведена к системе интегро-дифференциальных уравнений (49), (50). Задача состоит в определении функций $\overline{u}(x,y)$ и $u(x,y,t)$ по заданным $h(x,y,t)$, $\overline{h}(x,y)$, $\psi(x,y)$ и $\varphi(x,y)$.

Пусть $\psi(x,y) = 0$, $\varphi(x,y) = -1$ и рассмотрим разложение в ряд Фурье по переменной y функций u и $\overline{u}$ в области $(x,t) \in \Delta(T)$:

$$u(x,y,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k(x,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}\,,$$
$$\overline{u}(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{u}_k(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}\,.$$

От уравнений (49), (50) перейдем к бесконечной системе уравнений на коэффициенты Фурье функций:

$$u_n(x,t) = h_n(x,t) - B_{x,t}\left[n^2 u_n - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{u}_k u_{n-k}\right], \tag{51}$$

$$\overline{u}_n(x) = \bar{h}_n(x) - B_{x,0}\left[n^2 u_n - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{u}_k u_{n-k}\right], \tag{52}$$

где $(x,t) \in \Delta(T)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Будем исследовать конечную подсистему (51), (52):

$$v_n(x,t) = h_n(x,t) - B_{x,t}\left[n^2 v_n - \sum_{|k|\le N} \overline{v}_k v_{n-k}\right], \quad (x,t)\in\Delta(T), \tag{53}$$

$$\overline{v}_n(x) = \bar{h}_n(x) - B_{x,0}\left[n^2 v_n - \sum_{|k|\le N} \overline{v}_k v_{n-k}\right], \quad x\in(0,T), \tag{54}$$

где $|n| \le N$. Конечная система (53), (54) состоит из $2\times(2N+1)$ уравнений с $2\times(2N+1)$ неизвестными.

В подразделе **2.2.3** обратная задача исследована с помощью проекционного метода. Построена специального вида конечная система уравнений, решение которой покомпонентно сходится к решению обратной задачи на коэффициенты Фурье, полученной из системы интегро-дифференциальных уравнений.

N–приближение системы (53), (54) сформулировано в виде нелинейного операторного уравнения

$$\mathcal{A}(V) := V + \mathcal{L}(V) = H\ . \tag{55}$$

Введем класс функций $\mathcal{F}(\rho,T)$. Пусть для $\tilde{M} > 0$ и $\rho > 0$

$$\mathcal{F}(\rho,T) := \Big\{u : u(\cdot,y,t) = \sum_k u_k(\cdot,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}, \quad \|u_k\|_{L^2(T)} \le \tilde{M}\mathrm{e}^{-\rho|k|}\Big\}.$$

Основным результатом подраздела **2.2.3** является следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $N > 0$ и для некоторых $\rho > 0$ и $T > 0$ коэффициенты Фурье функций $(u,\overline{u}) \in \mathcal{F}(\rho,T)$ удовлетворяют* (53), (52). *Тогда существует постоянная $\mu' > 0$, такая что для $T' \in (0,T)$ удовлетворяет $\mu'T' < \rho$ существует единственное решение $\vec{V} \in L^2(T')$ системы* (53), (54), *в которой T заменено на T'. Более того, существует постоянная $M_1 := M_1(T',\rho)$, такая что*

$$\begin{aligned}\max_{|n|\le N}\|u_n - v_n\|_{L^2(\Delta(T'))} &\le T'(M_1+1)\mathrm{e}^{N(\mu'T'-\rho)},\\ \max_{|n|\le N}\|\bar{u}_n - \bar{v}_n\|_{L^2(0,T')} &\le \sqrt{T'}(M_1+1)\mathrm{e}^{N(\mu'T'-\rho)},\end{aligned}$$

В подразделе **2.2.4** исследована сходимость метода простой итерации для решения конечной системы интегральных уравнений (55).

Для итерационных методов параметром регуляризации является номер итерации. Одной из проблем является выбор правила остановки итерационного процесса, согласующего число итераций с погрешностью входных данных.

Общая схема метода

$$V^{(k+1)} = V^{(k)} - \alpha\big[\mathcal{A}'(V^{(k)})\big]^*\big(\mathcal{A}(V^{(k)}) - H\big), \quad k = 0, 1, \dots, \tag{56}$$

где α – некоторый положительный параметр.

Для численного решения уравнения (55) исследованы свойства операторов $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $(\mathcal{A}')^*$, где $\mathcal{A}'$ — производная Фреше оператора $\mathcal{A}$, $(\mathcal{A}')^*$ — оператор, сопряженный к производной Фреше.

Доказано, что оператор $\mathcal{A} : L^2(T) \to L^2(T)$ дифференцируем по Фреше и $\mathcal{A}' : L^2(T) \to L^2(T)$. Найдены явные выражения для $\mathcal{A}'$ и $(\mathcal{A}')^*$.

Из работы M. Hanke, A. Neubauer, O. Scherzer [16] известно, что метод простой итерации (56) локально сходится, если в некоторой окрестности

$$\mathbf{B}_\delta(V^{(0)}) = \Big\{V \in L^2(T) : \|V - V^{(0)}\|_{L^2(T)} \leq \delta\Big\}$$

точного решения $V^\dagger$ уравнения (55) выполняется условие:

$$\|\mathcal{A}(X) - \mathcal{A}(Y) - \mathcal{A}'(Y)(X - Y)\|_{L^2(T)} \leq \eta\|\mathcal{A}(X) - \mathcal{A}(Y)\|_{L^2(T)}\ , \tag{57}$$

где X, $Y \in \mathbf{B}_\delta(V^{(0)})$, $\eta \in (0, 1/2)$.

Показано, что оператор $\mathcal{A}$ удовлетворяет условию (57), и доказана теорема о сходимости метода простой итерации.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия предыдущей теоремы. Тогда метод простой итерации локально сходятся к точному решению $V^\dagger$ и выполняется*

$$\Big\|V^{(k+1)} - V^\dagger\Big\|_{L^2(T')} \leq \beta^{k+1}\delta \mathrm{e}^{\frac{\mu N T'}{2}}\ ,$$

где δ такое, что $V^\dagger \in \mathbf{B}_\delta(V^{(0)})$.

Нелинейные интегральные операторы вида (55), исследованы в работах В. В. Васина 1995, 1998 гг. [17, 18], В. В. Васина, И. И. Еремина, 2005 г. [19]. В частности, показано, что

$$\|\mathcal{A}'(V)\mathbb{S}\|_{L^2(T)} \leq C_1\,\|S\|_{L^2(T)}\,, \tag{58}$$

$$\|\mathcal{A}(V_1) - \mathcal{A}(V_2) - \mathcal{A}'(V_2)(V_1 - V_2)\|_{L^2(T)} \leq \eta\,\|\mathcal{A}(V_1) - \mathcal{A}(V_2)\|_{L^2(T)}\,. \tag{59}$$

Здесь $\eta \in (0, 1/2)$ – некоторая постоянная.

Из оценок (58), (59) вытекает оценка скорости сходимости метода простой итерации

$$\left\| V^{(n)} - V \right\|_{L^2(T)} \leq M\beta^n,$$
$$V^{(n+1)} = T(V^{(n)}),$$
$$T(V^{(n)}) = V^{(n)} - \alpha\Big[\mathcal{A}'(V^{(n)})\Big]^*\Big(\mathcal{A}(V^{(n)}) - H\Big).$$

Здесь $\beta \in (0, 1)$ и $M > 0$ некоторые постоянные, не зависящие от n.

Отметим, что из оценки (59) следует оценка [19]:

$$\|\mathcal{A}(V_1) - \mathcal{A}(V_2)\|^2 \leq \kappa < \mathcal{A}(V_1) - \mathcal{A}(V_2), \mathcal{A}'(V_1)(V_1 - V_2) >, \tag{60}$$

при $\kappa = 2/(1 - \eta^2)$.

В подразделе **2.2.5** рассмотрена модификация метода простой итерации. Предположим, что решение системы интегральных уравнений существует, является достаточно гладким и удовлетворяет оценке $\|V\|_{L^2(T)} \leq r$. Рассмотрим модифицированный метод простой итерации

$$V^{(n+1)} = \mathcal{P}T(V^{(n)}). \tag{61}$$

Здесь $\mathcal{P}$ в общем случае фейеровское (псевдосжимающее отображение) [19].

Условие (60) достаточно для сильной фейеровости оператора шага

$$T(V) = V - \alpha[\mathcal{A}'(V)^*](\mathcal{A}(V) - H),$$

при $\alpha \in (0, 2/\kappa C_1^2)$, C_1 – положительная постоянная из оценки (58).

В качестве $\mathcal{P}$ рассмотрена метрическая проекция. Из работы В. В. Васина и А. Л. Агеева, 1993 года [20] известно, что метрическая проекция $\mathcal{P}$ также обладает свойством (60). Поэтому заключаем, что модифицированный метод простой итерации (61) сходится по функционалу

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{A}(V^n) - H\| = 0.$$

Используя результаты работ В. В. Васина, И. И. Еремина, 2005 г., В. В. Васина, Г. Г. Скорика, 2010 г. [19, 21], можно обосновать и сильную сходимость метода простой итерации.

Следует отметить работы [22,23] В. П. Тананы по построению и исследованию оптимальных методов решения некорректных задач. Были введены формулы оценки точности методов решения задач, учитывающие различную априорную информацию о решении, в частности, методов приближенного, устойчивого решения операторного уравнения первого рода и вычисления значений неограниченного оператора в случае неточно заданных как исходных данных, так и оператора.

В **главе 3** рассматриваются многомерные аналоги уравнений И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана, М.Г. Крейна. Развитие многомерных аналогов уравнений Гельфанда–Левитана–Крейна началось с работы М. И. Белишева, который в 1987 году разработал метод граничного управления [24, 25].

В 1988 году С. И. Кабанихин предложил многомерный аналог уравнений Гельфанда–Левитана и Крейна [26, 27]. В 1992 году М. И. Белишев и А. С. Благовещенский предложили многомерный аналог уравнения Гельфанда–Левитана на основе метода граничного управления [28]. В 2004 году С.И. Кабанихин и М.А. Шишленин показали [44], что дискретный аналог уравнения, получаемый в методе граничного управления, сопадает с дискретным аналогом уравнения М. Г. Крейна в случае одномерной коэффициентной обратной задачи акустики. В 2004 году С.И. Кабанихин, М.А. Сатыбаев, М.А. Шишленин опубликовали монографию о численных методах решения двумерных аналогов уравнения Гельфанда–Левитана и Крейна для коэффициентных обратных задач для волнового уравнения и уравнения акустики [48].

Одно из преимуществ подхода Гельфанда–Левитана–Крейна для решения коэффициентных обратных задач для гиперболических уравнений заключается в отсутствии многократного решения прямых задач.

Основной результат **главы 3** заключается в разработке и обосновании численных методов решения двумерных аналогов уравнений И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана и М.Г. Крейна на основе проекционного метода. Для двумерных аналогов уравнений И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана и М.Г. Крейна построены методы регуляризации, связывающие число восстанавливаемых гармоник Фурье и уровень ошибки в данных.

В подразделе **3.1** проведен краткий исторический обзор по методу И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана, М.Г. Крейна и В.А. Марченко в спектральных обратных задачах, обратных задачах рассеяния и динамических коэффициентных обратных задачах. На примере одномерных задач приведены уравнения И.М. Гельфанда и Б.М. Левитана для спектральной обратной задачи и динамической коэффициентной задачи для волнового уравнения и уравнение М.Г. Крейна для одномерной коэффициентной обратной задачи акустики.

В подразделе **3.2** рассмотрена следующая последовательность прямых задач $k = (k_1, k_2)$, k_1, $k_2 \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$:

$$u_{tt}^{(k)} = \Delta u^{(k)} - q(z, y)u^{(k)}, \quad z \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^2,\ t > 0, \tag{62}$$

$$u^{(k)}|_{t=0} = 0, \quad u_t^{(k)}|_{t=0} = \delta(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k,y)}. \tag{63}$$

Здесь мультииндекс $(k, y) = k_1 y_1 + k_2 y_2$.

Обратная задача заключается в определении четной по переменной z функции $q(z,y)$ по дополнительной информации:

$$u^{(k)}|_{x=0} = f^{(k)}(y,t), \qquad y \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0, \quad k \in \mathbb{Z}^2. \tag{64}$$

Постановка обратных задач вида (62)—(64) возникает, например, в геофизике в случае площадной системы измерений (рис. 3):

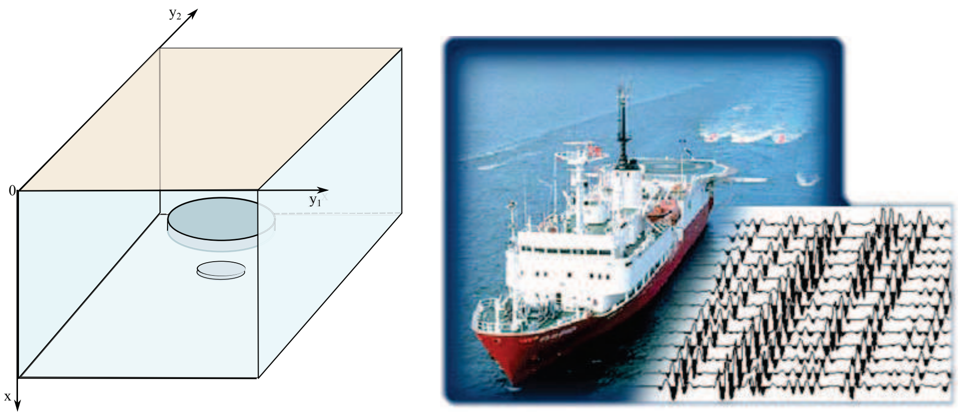

Рис. 3: Площадная система измерений

Обратная задача (62)—(64) сведена к двумерному семейству $k \in \mathbb{Z}$ интегральных уравнений в области $|t| < z$, $y \in \mathbb{R}$:

$$\tilde{w}^{(k)}(z,y,t) + \int\limits_{-z}^{z} \sum_{m\in\mathbb{Z}^2} f_k^{(m)\prime}(t-s)\tilde{w}^{(m)}(z,y,s)\mathrm{d}s =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial f^{(k)}}{\partial t}(y,t-z) + \frac{\partial f^{(k)}}{\partial t}(y,t+z)\right]. \tag{65}$$

Семейство интегральных уравнений (65) является многомерным аналогом уравнения Гельфанда–Левитана.

Решение обратной задачи (62)—(64) может быть получено по формуле [47, 48, 55]:

$$q(z,y) = 4\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\tilde{w}^{(0)}(z,y,z-0).$$

В подразделе **3.3** рассмотрена обратная задача определения 2π–периодической по переменной $y \in \mathbb{R}^2$ плотности среды $\rho(z,y)$. Сначала исследована последовательность прямых задач $k \in \mathbb{Z}^2$:

$$u_{tt}^{(k)} = \Delta u^{(k)} - \nabla \ln \rho(z,y)\, \nabla u^{(k)}, \quad z > 0,\ y \in (-\pi,\pi)^2,\ t > 0, \tag{66}$$

$$u^{(k)}\big|_{t<0} \equiv 0; \tag{67}$$

$$\frac{\partial u^{(k)}}{\partial z}(+0,y,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k,y)}\,\delta(t). \tag{68}$$

Обратная задача заключается в нахождении функции $\rho(z,y)$ из соотношений (66)–(68) по дополнительной информации

$$u^{(k)}(0,y,t) = f^{(k)}(y,t), \quad y \in (-\pi,\pi)^2,\ t > 0. \tag{69}$$

Обратная задача (66)–(69) сведена к двумерному аналогу уравнения М. Г. Крейна [27]:

$$2\Phi^{(k)}(z,t) - \sum_{m\in\mathbb{Z}^2} \int_{-z}^{z} f_m^{(k)\prime}(t-s)\,\Phi^{(m)}(z,s)\mathrm{d}s = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k,y)}}{\rho(0,y)}\mathrm{d}y. \tag{70}$$

Здесь $|t| < z$, $k \in \mathbb{Z}^2$.

Решение обратной задачи (66)–(69) находится по формуле [27]:

$$\rho(z,y) = \frac{\pi^2}{\rho(0,y)} \Big[\sum_{m\in\mathbb{Z}^2} \Phi^{(m)}(z,z-0)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(m,y)} \Big]^{-2}. \tag{71}$$

Для фиксированного z_0 находим решение уравнения (70) функция $\Phi^{(k)}(z,t)$. Приближенное решение обратной задачи определяется по формуле (71). Заметим, что решение обратной задачи в точке z_0 находится без вычисления решения на интервале $(0,z_0)$.

В подразделе **3.4** приведены результаты численных расчетов N–приближений двумерных аналогов уравнений Б. М. Гельфанда, И. М. Левитана и М. Г. Крейна.

В **<u>заключении</u>** приведены основные результаты работы:

1. Разработаны новые методы регуляризации задач продолжения с части границы акустических и электромагнитных полей.

2. Получены новые оценки скорости сходимости по функционалу и оценки скорости сильной сходимости градиентных методов решения задач продолжения акустических и электромагнитных полей.

3. Исследована степень некорректности задач продолжения с части границы акустических и электромагнитных полей на основе анализа сингулярных чисел оператора.

4. Разработан и обоснован итерационно-проекционный метод регуляризации коэффициентных обратных задачи акустики, учитывающих априорную информацию об искомом решении.

5. Разработаны новые методы регуляризации двумерных коэффициентных обратных задач акустики на основе аналогов уравнений И. М. Гельфанда, Б. М. Левитана и М. Г. Крейна и проекционных методов.

6. Разработанные алгоритмы решения задач продолжения апробированы на задачах продолжения с части границы электромагнитных полей.

Приложение состоит из двух частей. В приложении **А** приведено краткое описание георадара “Лоза”, приведены краткие технические характеристики георадара и проведено сравнение численных экспериментов с данными георадара. В приложении **В** исследована чувствительность данных обратных задачи к изменениям электромагнитных параметров среды в задачах околоскважинного зондирования.

Благодарности

В заключение автор выражает глубокую признательность своему научному консультанту д.ф.-м.н., профессору, член-корреспонденту РАН С. И. Кабанихину за многолетнюю поддержку и научное сотрудничество.

Автор выражает благодарность д.ф.-м.н., профессору, член-корреспонденту РАН В. Г. Романову за ценные советы и замечания.

Автор благодарен сотрудникам отдела некорректных задач Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, лаборатории математических задач геофизики Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН за постоянную поддержку, творческую и благожелательную атмосферу, в которой была выполнена работа.

Список цитируемой литературы

1. М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. Теория операторов и некорректные задачи. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1980. С. 285.

2. В.К. Иванов. Интегральные уравнения первого рода и приближенное решение обратной задачи потенциала // Доклады АН СССР. 1962. Т. 142, № 5. С. 998–1000.

3. С.И. Кабанихин, М.А. Бектемесов, А.Т. Аяпбергенова. Итерационные методы решения обратных и некорректных задач. Алматы: Наука, 2004.

4. М.М. Лаврентьев. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1962. С. 96.

5. В.А. Козлов, В.Г. Мазья, А.В. Фомин. Об одном итерационном методе решения задачи Коши для эллиптических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1991. Т. 31, № 1. С. 64–73.

6. Isakov V., Kindermann S. Subspaces of stability in the Cauchy-Problem for the Helmholtz equation // Meth. Appl Anal. 2011. Vol. 18, no. 1. P. 1–30.

7. Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах / Годунов С.К., Антонов А.Г., Кирилюк О.П. [и др.]. Новосибирск: Наука, 1992. С. 360.

8. И.Н. Домбровская. О решении некорректных линейных уравнений в гильбертовом пространстве // Мат.записки Уральского университета. 1964. Т. 4, № 4. С. 36–40.

9. И.Н. Домбровская, В.К. Иванов. Некорректные линейные уравнения и исключительные случаи уравнений типа свёртки // Изв. вузов. Матем. 1964. Т. 4. С. 69–74.
10. Dorofeev K. Y., Nikolaeva N. N., Yagola A. G. New approaches to error estimation to ill-posed problems with applications to inverse problems of heat conductivity // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. 2002. Vol. 10, no. 2. P. 155–170.
11. Titarenko V. N., Yagola A. G. Linear ill-posed problems on sets of convex functions on two-dimensional sets // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. 2007. Vol. 14, no. 7. P. 735–750.
12. Dorofeev K. Y., Yagola A. G. The method of extending compacts and a posteriori error estimates for nonlinear ill-posed problems // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. 2004. Vol. 12, no. 6. P. 627–636.
13. М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов. О трех линеаризованных обратных задачах для гиперболических уравнений // Докл. АН СССР. 1966. Т. 171, № 6. С. 1279–1281.
14. С.И. Кабанихин. Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений. Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1988.
15. Kabanikhin S. I., Scherzer O., Shishlenin M. A. Iteration methods for solving a two dimensional inverse problem for a hyperbolic equation // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 2003. Vol. 11, no. 1. P. 87–109.
16. Hanke M., Neubauer A., Scherzer O. A convergence analysis of the Landweber iteration for nonlinear ill-posed problems // Numer. Math. 1995. Vol. 72. P. 21–37.
17. В.В. Васин. Методы итеративной регуляризации для некорректных задач // Изв. вузов. Матем. 1995. Т. 11. С. 69–84.
18. Vasin V. V. On the convergence of gradient-type methods for nonlinear equations // Doklady Mathematics. 1998. Vol. 57, no. 2. P. 173–175.
19. В.В. Васин, И.И. Еремин. Операторы и итерационные процессы Фейеровского типа. Теория и приложения. Москва-Ижевск: ИКИ, НИЦ РХД, 2005.
20. В.В. Васин, А.Л. Агеев. Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: УИФ “Наука”, 1993. С. 264.
21. Vasin V. V., Skorik G. G. Iterative processes of gradient type with applications to gravimetry and magnetometry inverse problems // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 2010. Vol. 18, no. 8. P. 855–876.
22. В.П. Танана. О новом подходе к оценке погрешности методов решения некорректно поставленных задач // Сибирский журнал индустриальной математики. 2002. Т. 5, № 4. С. 150–163.
23. В.П. Танана. Об оптимальности по порядку метода проекционной регуляризации при решении обратных задач // Сибирский журнал индустриальной математики. 2004. Т. 7, № 2. С. 117–132.
24. М.И. Белишев. Уравнения типа Гельфанда–Левитана в многомерной обратной задаче для волнового уравнения // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1987. Т. 165. С. 15–20.
25. М.И. Белишев. Об одном подходе к многомерным обратным задачам для волнового уравнения // ДАН СССР. 1987. Т. 297, № 3. С. 524–527.
26. С.И. Кабанихин. Линейная регуляризация многомерных обратных задач для гиперболических уравнений. Препринт №27 института математики СО АН СССР, Новосибирск. 1988.
27. С.И. Кабанихин. О линейной регуляризации многомерных обратных задач для гиперболических уравнений // Доклады РАН. 1989. Т. 309, № 4. С. 791–795.
28. М.И. Белишев, А.С. Благовещенский. Многомерные аналоги уравнений типа Гельфанда–Левитана–Крейна в обратной задаче для волнового уравнения // Условно-корректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск: Наука, 1992. С. 50–63.

Публикации автора в журналах списка ВАК и Web of Science

29. S.I. Kabanikhin, N.S. Novikov, I.V. Oseledets, M.A. Shishlenin. Fast Toeplitz linear system inversion for solving two-dimensional acoustic inverse problem // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2015. Vol. 23, no. 6. P. 687–700.

30. S.I. Kabanikhin, M. Bektemesov, M.A. Shishlenin. The size of the domain of measurements is the regularization parameter in continuation problem // Вычислительные технологии. 2015. Vol. 20, no. 3(86). P. 130–136.

31. S.I. Kabanikhin, M.A. Shishlenin. Multidimensional analogues of Gelfand–Levitan, Marchenko and Krein equations. Theory, numerics and applications // Вычислительные технологии. 2015. Vol. 20, no. 3(86). P. 63–69.

32. S.I. Kabanikhin, K.K. Sabelfeld, N.S. Novikov, and M.A. Shishlenin. Numerical solution of the multidimensional Gelfand–Levitan equation //Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 2015. Vol. 23, No. 5. P. 439–450 (Web of Science Impact Factor = 0.88).

33. S.I. Kabanikhin, M.A. Shishlenin, D.B. Nurseitov, A.T. Nurseitova, S.E. Kasenov. Comparative Analysis of Methods for Regularizing an Initial Boundary Value Problem for the Helmholtz Equation // Journal of Applied Mathematics. 2014. Vol. 2014. 7 pages. URL: http://dx.doi.org/10.1155/2014/786326 (Web of Science Impact Factor = 0.72).

34. S.I. Kabanikhin, Y.S. Gasimov, D.B. Nurseitov, M.A. Shishlenin, B.B. Sholpanbaev, S. Kasenov. Regularization of the continuation problem for elliptic equations // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2013. Vol. 21, No. 6. P. 871–884 (Web of Science Impact Factor = 0.88).

35. S.I. Kabanikhin, D.B. Nurseitov, M.A. Shishlenin, B.B. Sholpanbaev. Inverse problems for the ground penetrating radar // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2013. Vol. 21, No. 6. P. 885–892 (Web of Science Impact Factor = 0.88).

36. С.И. Кабанихин, О.И. Криворотько, М.А. Шишленин. О численном решении обратной задачи термоакустики // Сибирский журнал вычислительной математики. 2013. Т. 16, № 1. С. 39–44.

37. А.Э. Рязанцев, С.И. Кабанихин, М.А. Шишленин. Математическое обоснование использования систем телеметрии погружных насосов для непрерывного мониторинга работы добывающих скважин // Вестник ЦКР Роснедра. 2013. Т. 5. С. 32–36.

38. С.И. Кабанихин, М.А. Шишленин. Об использовании априорной информации в коэффициентных обратных задачах для гиперболических уравнений // Труды ИММ УрО РАН. 2012. Т. 18, № 1. С. 147–164.

39. С.И. Кабанихин, А.Н. Черемисин, М.А. Шишленин. Обратная задача определения обводненности и дебита в вертикальной фонтанной скважине // Сибирский журнал индустриальной математики. 2011. Т. 14, № 3(47). С. 31–36.

40. S.I. Kabanikhin, M.A. Shishlenin. Numerical algorithm for two-dimensional inverse acoustic problem based on Gelfand-Levitan-Krein equation // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2011. Vol. 18, No. 9. P. 979–996 (Web of Science Impact Factor = 0.88).

41. М.И. Эпов, С.И. Кабанихин, В.Л. Миронов, К.В. Музалевский, М.А. Шишленин. Сравнительный анализ двух методов расчета электромагнитных полей в околоскважинном пространстве нефтегазовых коллекторов // Сибирский журнал индустриальной математики. 2011. Т. 14, № 2. С. 132–138.

42. C. Clason, M.A. Shishlenin. Recent advances in analytical and numerical methods in inverse problems for PDEs // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2011. Vol. 18, No. 9. P. 955–958 (Web of Science Impact Factor = 0.88).

43. S.I. Kabanikhin, M.A. Shishlenin. Quasi-solution in inverse coefficient problems // Journal Inverse and Ill-Posed Problems. 2008. Vol. 16, No. 7. P. 705–713 (Web of Science Impact Factor = 0.88).

44. S.I. Kabanikhin, M.A. Shishlenin. Boundary control and Gel'fand-Levitan-Krein methods in inverse acoustic problem // Journal of Inverse Ill-Posed Problem. 2004. Vol. 12, No. 2. P. 125–144 (Web of Science Impact Factor = 0.88).

Другие публикации автора по теме диссертации. Монографии и главы в книгах

45. С.И. Кабанихин, К.Т. Искаков, М.А. Бектемесов, М.А. Шишленин. Алгоритмы и численные методы решения обратных и некорректных задач. Астана, Казахстан: КазНПУ, 2012.

46. С.И. Кабанихин, М.А. Бектемесов, М.А. Шишленин. Методы решения некорректных задач линейной алгебры. Алматы, Казахстан: КазНПУ, 2012.

47. S.I. Kabanikhin, M.A. Shishlenin. Numerical Methods for Solving Inverse Hyperbolic Problems // Computational Methods for Applied Inverse Problems

(Ed. by Y. Wang, A. Yagola, and C. Yang). Berlin–Boston–Beijing: De Gruyter and Higher Education Press, 2012. P. 369–393.

48. S.I. Kabanikhin, A.D. Satybaev, M.A. Shishlenin. Direct Methods of Solving Multidimensional Inverse Hyperbolic Problems. VSP, The Netherlands, 2004.

Другие публикации автора по теме диссертации

49. S.I. Kabanikhin, K.K. Sabelfeld, N.S. Novikov, and M.A. Shishlenin. Numerical solution of an inverse problem of coefficient recovering for a wave equation by a stochastic projection methods // Monte Carlo Methods and Applications. 2015. Vol. 21, No. 3. P. 189–203 (DOI: 10.1515/mcma-2015-0103) (Scopus SJR = 0.21).

50. S.I. Kabanikhin, M.A. Shislenin. Two-dimensional analogs of the equations of Gelfand, Levitan, Krein, and Marchenko // Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications. 2015. Vol. 3, Issue 2. P. 69–98.

51. S.I. Kabanikhin, M.A. Shislenin. Regularization of the decision prolongation problem for parabolic and elliptic equations from border part // Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications. 2014. Vol. 2, Issue 2. P. 81–91.

52. А. С. Белоносов, М. А. Шишленин. Задача продолжения для параболического уравнения с данными на части границы // Сибирские Электронные Математические Известия. 2014. Т. 11. С. С.22–С.34 (Scopus SJR = 0.3).

53. М.А. Шишленин. Матричный метод в задачах определения источников колебаний // Сибирские Электронные Математические Известия. 2014. Т. 11. С. С.161–С.171 (Scopus SJR = 0.3).

54. S.I. Kabanikhin, M.A. Shishlenin. Stability analysis of a continuation problem for the Helmholtz equation // Bulletin of Novosibirsk Computer Center, Mathematical Models in Geophysics. 2013. Vol. 16. P. 59–68.

55. С.И. Кабанихин, М.А. Шишленин. Алгоритмы решения обратных задач гидроакустики // Сибирские Электронные Математические Известия. Итоговый научный отчет по интеграционному проекту СО РАН и ДВО РАН “Обратные и экстремальные задачи электромагнитного и акустического зондирования Мирового океана” под редакцией В.Г. Романова. 2011. Т. 8. С. С.85–С.94 (Scopus SJR = 0.3).

56. Г. Даирбаева, М.А. Шишленин. Граничная обратная задача для уравнений Стокса // Сибирские Электронные Математические Известия. 2011. Т. 8. С. С.210–С.223 (Scopus SJR = 0.3).

57. С.И. Кабанихин, М.А. Шишленин, О.И. Криворотько. Оптимизационный метод решения обратной задачи термоакустики // Сибирские Электронные Математические Известия. 2011. Т. 8. С. С.263–С.292 (Scopus SJR = 0.3).

58. М.А. Шишленин, Н.С. Новиков. Сравнительный анализ двух численных методов решения уравнения Гельфанда-Левитана-Крейна // Сибирские Электронные Математические Известия. 2011. Т. 8. С. С.379–С.393 (Scopus SJR = 0.3).

59. М.И. Эпов, И.Н. Ельцов, С.И. Кабанихин, М.А. Шишленин. Совмещенная постановка двух обратных задач геоэлектрики // Сибирские Электронные Математические Известия. 2011. Т. 8. С. С.394–С.399 (Scopus SJR = 0.3).

60. М.И. Эпов, И.Н. Ельцов, С.И. Кабанихин, М.А. Шишленин. Об определении граничных условий в околоскважинном пространстве на недоступной части границы // Сибирские Электронные Математические Известия. 2011. Т. 8. С. С.400–С.410 (Scopus SJR = 0.3).

61. М.А. Шишленин. Прямой метод решения обратной задачи акустики // Сибирские Электронные Математические Известия. 2010. Т. 7. С. С.123–С.129 (Scopus SJR = 0.3).

62. С.И. Кабанихин, М.А. Шишленин. Акустическое зондирование методами линеаризации и обращением волнового поля // Сибирские Электронные Математические Известия. 2010. Т. 7. С. С.199–С.206 (Scopus SJR = 0.3).

63. В.Г. Романов, С.И. Кабанихин, М.А. Шишленин. Исследование математической модели электромагнитного зонда в осесимметричной скважине // Сибирские Электронные Математические Известия. 2010. Т. 7. С. С.307–С.321 (Scopus SJR = 0.3).

64. С.И. Кабанихин, А.Н. Черемисин, М.А. Шишленин. Задача определения обводненности и дебита в вертикальной скважине // Сибирские Электронные Математические Известия. 2010. Т. 7. С. С.362–С.379 (Scopus SJR = 0.3).

65. С.И. Кабанихин, М.А. Шишленин. Прямые и итерационные методы решения обратных и некорректных задач // Сибирские Электронные Математические Известия. 2008. Т. 5. С. 595–608 (Scopus SJR = 0.3).

66. L. Beilina, M.A. Shishlenin. Computational Comparison of Adaptive Hybrid FEM/FDM Method and Gel’Fand-Levitan-Krein Method for an Inverse Scattering Problem // Preprints of Math.Department of Basel University. 2006. 25 pp. URL: http://www.math.unibas.ch/preprints/preprints06/.