Отзыв официального оппонента

на диссертацию Виктории Сергеевны Петраковой на тему «Численные методы решения задач «среднего поля»», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Математические модели, основанные на концепции игр среднего поля, являются относительно новым направлением исследований в прикладной математике. Происхождение этого направления восходит к работам

J.-M. Lasry, P.-L.Lions Jeux a champ moyen. I Le cas stationnarie. // C.R. Math. Acad. Sci. Paris, 2006, v. 343, N9, p. 619-625;

J.-M. Lasry, P.-L.Lions Jeux a champ moyen. II Horizon fini et controle optimal // C.R. Math. Acad. Sci. Paris, 2006, v. 343, N10, p.679-684;

M.Y.Huang, P.E.Caines, R.P.Malhame Large population stochastic dynamic games: closed loop Kean-Vlasov systems and the Nash certainty equivalence principle // Commun. Inf. Systems, 2006, v.6, p.221-252.

Концепция игр среднего поля оказалась востребованной при моделировании группового поведения в мультиагентных системах, встречающихся в задачах экономики, финансов, экологии, управлении транспортными потоками. Такие системы на микро уровне моделируются динамической игрой, в которой динамика состояния и целевая функция агентов описываются однотипно, а в результате взаимодействия устанавливается равновесие. В системах с большим количеством агентов концепция равновесия по Нэшу нуждается в модификации ввиду ограничений на сложность информации, используемой агентом при принятии решений. Концепция игры среднего поля является такой модификацией, согласно которой предполагается, что каждый агент, выбирая свою стратегию, не использует детальную информацию о состоянии других агентов, а учитывает макро описание системы в целом. С математической точки зрения такие модели представляют систему из связанных между собой уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана, которое описывает выбор стратегии поведения агентов, и уравнения Колмогорова-Фоккера-Планка, которое описывает динамику состояния системы. Условия на функцию распределения агентов по состояниям в фазовом пространстве из уравнения Колмогорова-Фоккера-Планка задаются в начальный момент временного интервала, а на функцию цены из уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана задаются в конечный момент временного интервала. Такая постановка задачи порождает новые проблемы, связанные с корректностью по Адамару и численными методами решения. Магистральный эффект, характерный для задач экономической динамики, затрудняет использование метода, основанного на решение задачи Коши для системы уравнений с частными производными и подборе начального условия для функции цены, чтобы удовлетворить условию на функцию цены в конечный момент времени. Поэтому возникает проблема согласования разностных схем для численного решения уравнения Колмогорова-Фоккера-Планка в прямом времени, а уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана в обратном времени. Таким образом, разработка численных методов решения задач группового поведения на основе концепции (приближения) игры среднего поля является **актуальной темой**, имеющей **практическое значение** для приложений в различных областях математического моделирования. В работе

A.Lachapelle, J.Salomon, G.Turinici Computation of mean field equilibria in economics // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 2010, vol. 20, N 4, p. 567-588

предложен подход к численному анализу модели группового поведения на основе концепции игры среднего поля. Подход основан на построении задачи минимизации функционала от функции распределения агентов по состояниям в фазовом пространстве. Ограничения в этой вариационной задаче задаются уравнением Колмогорова-Фоккера-Планка и начальными условиями на функцию распределения. Функционал подбирается таким образом, чтобы сопряженные переменные (множители Лагранжа) в этой вариационной задаче удовлетворяли уравнению Гамильтона-Якоби-Беллмана в исходной постановке игры среднего поля, а условия трансверсальности совпадали с условиями на функции цены в конечный момент времени. В диссертации В.С.Петраковой этот подход получил развитие с помощью полулагранжевых методов построения разностных схем и обобщен для применения в задачах с не квадратичной зависимостью функционала от управления, задач планирования достижения конечного состояния, игр среднего поля с двумерным фазовым пространством состояний агентов, включая задачи с кросс диффузией. В этом заключается **научная новизна** диссертации.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы и четырех приложений. Во введение дается общая характеристика работы. В первой главе приводится постановка задачи о групповом поведении на основе концепции игры среднего поля, дается обзор результатов е исследования и использования в математическом моделировании. Кроме того, в первой главе содержится обзор работ, посвященных полулагранжевым методам численного решения дифференциальных уравнений. Во второй главе рассматривается задача о групповом поведении в приближении среднего поля с выпуклой по управлению функцией затрат. Для этой задачи построена неявная разностная схема, основанная на комбинации эйлерово-лагранжева приближения оператора переноса, входящего в уравнение Колмогорова-Фоккера-Планка, и конечно-разностного приближения оператора диффузии. Неявная разностная схема для уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана построена как динамическая система в обратном времени для сопряженных переменных в разностной аппроксимации вариационной задачи и поэтому согласована с разностной схемой для уравнения Колмогорова-Фоккера-Планка. Обоснована устойчивость разностных схем. Разработан итерационный алгоритм для решения разностного аналога вариационной задачи и обоснована монотонность изменения функционала на итерациях этого алгоритма. Алгоритм апробирован на примере конкретной задачи о выборе домашними хозяйствами стратегии (режима) отопления помещений. В третьей главе рассматривается задача планирования достижения заданного состояния. Этой задаче поставлена в соответствие вариационная задача с дополнительным слагаемым в функционале, зависящим от распределения в терминальный момент времени агентов по состояниям. Разработанная в главе 2 вычислительная схема адаптирована для задачи планирования достижения заданного состояния. Обоснована устойчивость разностных схем. Проанализирован критерий оптимальности (остановки алгоритма) в задаче минимизации. Обоснована стратегия управления, соответствующая методу наискорейшего спуска для задачи минимизации функционала. Вычислительная схема апробирована на модельном примере. В главе 4 рассматривается задача, которой агенты распределены по двумерному пространству состояний. Системе уравнений Колмогорова-Фоккера-Планка и Гамильтона-Якоби-Беллмана поставлена в соответствие вариационная задача, для которой сопряженные переменные удовлетворяют уравнению Гамильтона-Якоби-Беллмана. Для вариационной задачи разработана вычислительная схема, обоснована устойчивость разностных схем, исследовано изменение функционала при итерациях алгоритма. Вычислительная схема апробирована на решении задачи о торговле квотами на эмиссию диоксида углерода. В главе 5 разностные схемы и алгоритм решения вариационной задачи разработаны для задачи, в которой агенты распределены по двумерному пространству состояний, а диффузионные процессы включают кросс диффузию. Для этой модели также обоснована устойчивость разностных схем и исследовано изменение функционала при итерациях алгоритма. В численных экспериментах проанализировано влияние кросс диффузии.

Таким образом, научные положения и выводы, приводимые в диссертации **обоснованы**. Их **достоверность** также подтверждена численным анализом, доказательством соответствующих оценок.

По содержанию и оформлению диссертации можно сделать следующие замечания.

1. В диссертации В.С.Петраковой связь между решением исходной системы уравнений Колмогорова-Фоккера-Планка и Гамильтона-Якоби-Беллмана с вариационной задачей устанавливается в предположении гладкости множителей Лагранжа. Условия, при которых это предположение справедливо, не исследованы.
2. Вариационная задача не является выпуклой и может иметь несколько локальных экстремумов, каждому из которых соответствует решение исходной системы уравнений Колмогорова-Фоккера-Планка и Гамильтона-Якоби-Беллмана. Вопрос о корректности по Адамару исходной задачи в диссертации не исследован. Остается открытым вопрос о том, какому решению в случае неоднозначности отдать предпочтение в моделях группового поведения.

3. В диссертации используются не обоснованные предположения. Например, на стр. 33 в формуле (2.2.14) предполагается гладкость управления, т.е. функции $\alpha(t,x)$.

Сделанные замечания не влияют на общую положительную оценку работы. Основные результаты диссертационного исследования **опубликованы** в 8 работах, индексированных в международных базах цитирования Web of Science/Scopus, из которых 3 опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК для публикации результатов диссертаций. Результаты диссертации апробировались на международных и всероссийских научных конференциях, по материалам выступлений на которых опубликованы 6 тезисов докладов. В.С. Петраковой получено свидетельство о регистрации программы для ЭВМ «Программа для оптимизации управления мультиагентной системой». Автореферат адекватно отражает содержание диссертации.

Считаю, диссертация В.С.Петраковой «Численные методы решения задач «среднего поля»» является научным исследованием, удовлетворяющим всем требованиям, предъявляемым ВАК РФ к диссертациям на ученую степень кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ, а её автор **заслуживает присуждения искомой степени**.

Александр Алексеевич Шананин А. Шананин 24.12.2021
член-корреспондент РАН, профессор,
доктор физико-математических наук по специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» (соответствие специальности новой Номенклатуре – 1.2.2 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»),
заведующий кафедрой «Анализ систем и решений»,
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет),
141701, Московская область, г. Долгопрудный,
Институтский пер., 9,
e-mail: alexshan@yandex.ru,
телефон +79651255917

ЗАВЕРЯЮ
Ученый секретарь
Ученого совета МФТИ
Е.Г. Евсеев