

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Сибирский федеральный университет»

На правах рукописи



Петракова Виктория Сергеевна

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
«СРЕДНЕГО ПОЛЯ»**

Специальность 1.2.2 —
«Математическое моделирование, численные методы и комплексы
программ»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
член-корреспондент РАН,
д.ф.-м. н., профессор
Шайдуров Владимир Викторович

Красноярск — 2021

Оглавление

	Стр.
Введение	5
Глава 1. Математические модели управления и оптимизации со стратегией «игры среднего поля»	12
1.1 Анализ модели «игры среднего поля»	12
1.2 Обзор развития теории «игры среднего поля»	17
1.3 Обзор полулагранжевых методов численного решения дифференциальных уравнений	20
1.4 Выводы к главе 1	24
Глава 2. Задачи «среднего поля» с неквадратичным контролем	26
2.1 Постановка одномерной задачи	26
2.2 Численное решение одномерной задачи оптимизации	29
2.2.1 Аппроксимация уравнения Фоккера-Планка	29
2.2.2 Оптимальное управление для дискретной задачи оптимизации с неквадратичным контролем	39
2.2.3 Вычислительный алгоритм для задачи оптимизации с неквадратичным контролем	46
2.3 Вычислительный эксперимент для ИСП с неквадратичным контролем	49
2.3.1 Постановка модельной задачи	49
2.3.2 Численное моделирование	51
2.4 Выводы по главе 2	58
Глава 3. Конечно-разностное решение задачи планирования достижения заданного состояния	60
3.1 Постановка задачи планирования	60
3.2 Численное решение задачи планирования	63

3.3	Вычислительный эксперимент для задачи планирования . . .	69
3.4	Выводы по главе 3	73
Глава 4. Двумерные модели «игр среднего поля»		74
4.1	Математическая модель	74
4.2	Построение вычислительной схемы	76
4.3	Вычислительный эксперимент для двумерной ИСП	92
4.3.1	Торговля квотами на эмиссию диоксида углерода в терминах игры «среднего поля»	92
4.3.2	Численное решение двумерной задачи	95
4.4	Выводы по главе 4	99
Глава 5. Двумерные задачи «среднего поля» со смешанной диффузией		100
5.1	Математическая модель	100
5.2	Построение вычислительной схемы для двумерной задачи со смешанной диффузией	102
5.3	Численное моделирование	110
5.4	Выводы по главе 5	119
Заключение		120
Список литературы		121
Список рисунков		136
Список таблиц		138
Приложение А. Исследование разностных схем для одномерного уравнения Фоккера-Планка		139
Приложение Б. Структура аппроксимационных матриц для двумерных ИСП		143
Б.1	Вклад правой части для двумерной ИСП	143
Б.2	Матричный оператор для ИСП со смешанной диффузией	145

Приложение В. Проверка порядка аппроксимации для схемы со смешанной диффузией	149
Приложение Г. Копия свидетельства о регистрации программы для ЭВМ	153

Введение

Модели, описывающие поведение мультиагентных систем, учитывающих макроскопический (совместный) результат взаимодействия агентов как совокупность предпринимаемых ими решений и действий, находят свое применение в различных областях науки: от моделирования взаимодействия больших социологических групп в сети Интернет [11] до оптимизации добычи и обработки исчерпаемых ресурсов (таких как нефть) среди большого числа производителей [55]. Моделирование поведения систем с бесконечным числом агентов должно отражать зависимость между распределением (в математическом смысле) всей совокупности агентов и действиями ее отдельно взятых индивидуумов. Один из подходов к моделированию, отвечающий этим критериям, получил название «Игры среднего поля» («Mean Field Games» в оригинале), возникший как раздел теории некооперативных игр, который рассматривает взаимодействие агентов (игроков) в асимптотическом пределе, когда число агентов стремится в бесконечность. В этом случае вклад отдельно взятого игрока становится незначительным, а их взаимодействие осуществляется через интегральные характеристики так называемого «среднего поля».

Структура «игры среднего поля» традиционно выражается в виде связанной пары дифференциальных уравнений в частных производных: уравнения Фоккера-Планка (Колмогорова), определяющего распределение агентов по пространству состояний; и Гамильтона-Якоби-Беллмана, которое отвечает за оптимальность стратегий, выбираемых игроками. Такой подход к моделированию позволяет преодолевать ограничения других методов прогнозирования. Например, динамическое программирование учитывает взаимодействие только с локальным окружением (иначе задача становится вычислительно невыполнимой) и может столкнуться с трудностями при объяснении некоторых явлений, происходящих в результате общей неявной оптимизации [132]. Более того, представление совокупности агентов в качестве распределения некой эмпирической (т.е. явно наблюдаемой) характеристики означает, что подход можно масштабировать до произволь-

ных размеров популяции, что позволяет имитировать явления, происходящие в реальной жизни. Таким образом, структурная простота и широкая область применимости теории вызывают интерес к поиску эффективных вычислительных методов решения как классических «игр среднего поля», так и их модификаций.

Целью данной работы является адаптация математических моделей, используемых в международном экономическом сообществе и описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных, к оптимизации затрат, доходов, достижению поставленных социальных и экономических целей, прогнозированию критических ситуаций для выбранной области моделирования; а также разработка и обоснование эффективных численных методов решения задач, описываемых такими математическими моделями.

Для достижения поставленной цели были поставлены следующие **задачи**.

1. Адаптировать математические модели «Игры среднего поля» для применения в области экологии, экономики отдельных отраслей и регионов для достижения заданных социальных и экономических целей и прогноза критических ситуаций.
2. Использовать модели для прогнозирования мезо- и макроповедения больших популяций (население, пользователи, клиенты или предприятия) в различных внешних условиях (экономических, социальных, экологических, политических).
3. Разработать и обосновать эффективные численные методы решения задач «среднего поля», описываемых системами дифференциальных уравнений в частных производных с новыми формулировками данных.

Научная новизна. Разработаны численные методы решения задач, описываемых математическими моделями «игр среднего поля», наследующие полезные свойства дифференциальных задач и приводящие к явным локальным правилам минимизации целевого функционала. Построены новые модели, основанные на традиционной постановке задач «среднего поля», но более адаптированные для экономико-социальных приложений.

Практическая значимость. Результаты, полученные в диссертационной работе, могут быть использованы для применения в области экологии, экономики отдельных отраслей, достижения социально-экономических целей и прогноза макроповедения мультиагентных систем под воздействием различных внешних условий (например, экономических, социальных, экологических или политических).

Методология и методы исследования. В настоящее время использование аппарата «игр среднего поля» в основном оправдано при прогнозировании макроповедения большого числа агентов во внешнеэкономической среде с учетом личной финансовой выгоды [126]. В то же время теория «игр среднего поля» содержит возможности прогнозирования затрат (финансовых и организационных) для достижения других определенных экономических, экологических и социальных целей путем некоторой переформулировки известных динамических моделей. В качестве метода исследования в работе используется вычислительный эксперимент, включающий в себя следующие этапы: математическая формулировка задачи, построение численного алгоритма, его программная реализация, проведение расчетов и анализ полученных результатов.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Модифицированные математические модели, основанные на теории «игр среднего поля» и применимые к оптимизационным задачам с неквадратичным контролем.
2. Новая математическая модель, основанная на теории игр «среднего поля» и применимая к оптимизационным задачам с ограничениями на финальное состояние агентов.
3. Новые вычислительные алгоритмы для одно- и двумерных оптимизационных задач, основанные на полулагранжевом приближении, наследующие полезные свойства дифференциальных задач и приводящие к явным локальным правилам минимизации целевого функционала.

Достоверность полученных результатов подтверждена проверкой и обоснованием сходимости численных методов, строгим выводе используе-

мых моделей и обеспечением законов сохранения при построении вычислительных схем.

Апробация работы. Основные результаты работы изложены в виде докладов:

1. на XIX Всероссийской конференции молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям, Кемерово, 2018 г.;
2. на открытой конференции молодых ученых ИВМ СО РАН по математическому моделированию и информационным технологиям, Красноярск ИВМ СО РАН, 2019 г.;
3. на международной конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики 2019» (АПВПМ 2019), Новосибирск, 2019 г.;
4. на XI и XII Международных конференциях по применению математических подходов в технических и естественных науках (АМиТаNS'19(20)), Албена, Болгария, 2019, 2020 гг.;
5. на международной конференции «Марчуковские научные чтения 2020» (МНЧ - 2020), Новосибирск, 2020 г.

Диссертационная работа докладывалась также на совместном семинаре Института вычислительного моделирования СО РАН и базовой кафедры вычислительных и информационных технологий Института математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета.

Разные этапы работы поддерживались следующими проектами:

1. проект РФФИ № 17-01-00270 «Построение и обоснование новых эрмитовых конечных элементов для численного решения задач математической физики»;
2. проект РФФИ № 20-01-00090 «Эйлерово-лагранжевы (полулагранжевы) методы конечных разностей и конечных элементов со специальными свойствами»;
3. проект РНФ № 20-61-46017 «Развитие динамических математических моделей прогноза критических социально-экономических си-

туаций и создание эффективных численных методов решения таких моделей».

Личный вклад автора состоит в прямом участии в исследовании применимости полулагранжева метода к решению задач прогнозирования, численной оценке сходимости полученных методов, разработке вычислительных алгоритмов и комплекса программ, проведении расчетов, обработке и анализе полученных результатов, разработке модифицированных постановок задач «среднего поля», подготовке научных статей и докладов по теме диссертационной работы. Научному руководителю Шайдунову В.В. принадлежат постановки задач и общая оригинальная идея использования полулагранжева подхода в применении к моделям «игр среднего поля», критическое сравнение результатов с известными алгоритмами.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 14 печатных изданиях, из которых 3 изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 6 – в тезисах докладов, 5 индексируются в базах данных Web of Science, 8 – в базах Scopus, из них 5 публикации индексируются одновременно в Web of Science и Scopus.

Список наиболее важных публикаций:

1. Kornienko V., Computation of Mean-Field Equilibria with Correlated Stochastic Processes / V. Shaydurov, S. Zhang, V. Kornienko // Lecture Notes in Computer Science. – 2019. – V. 11386. – P. 468-475. DOI: 10.1007/978-3-030-11539-5_54
2. Kornienko V.S., “Mean Field Games” as mathematical models for control and optimization of business activity / V.V. Shaydurov, V.S. Kornienko // J. Sib. Fed. Univ. Humanit. soc. Science. – 2019 – V. 12(4). – P. 701–715. DOI: 10.17516/1997– 1370–0418.
3. Kornienko V., Approximations of two-dimensional Mean Field Games with nonsymmetric controls / V. Shaydurov, S. Zhang, V. Kornienko // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2020. – V. 367. – Art. № 112461. DOI: 10.1016/j.cam.2019.112461.
4. Kornienko V., Mean Field Game Problem with non-quadratic control function / V. Shaydurov, V. Kornienko // AIP Conference

- Proceedings. – 2019. – V. 2164. – Art. № 110012. DOI: 10.1063/1.5130857.
5. Корниенко В.С. Конечно-разностный аналог задачи равновесия «среднего поля» / Шайдуров В.В., Корниенко В.С., Кареева Е.Д. // Вычислительные технологии – 2020. – Т. 25, № 4. – С. 31-41. DOI: 10.25743/ICT.2020.25.4.004.
 6. Kornienko V. The Euler-Lagrange Approximation of the Mean Field Game for the Planning Problem / Shaydurov V., Kornienko V., Zhang S. // Lobachevskii Journal of Mathematics – 2020. – Т. 41, № 12. – С. 2703-2714. DOI: 10.1134/S1995080220120380.
 7. Kornienko V., A finite-difference solution of Mean Field problem with a predefined control resource / V. Shaydurov, V. Kornienko // AIP Conference Proceedings. – 2020. – V. 2302. – Art. № 110004. DOI: 10.1063/5.0033646.
 8. Kornienko V., A finite-difference solution of mean field problem with the fractional derivative for subdiffusion / V. Shaydurov, S. Zhang, V. Kornienko // AIP Conference Proceedings. – 2020. – V. 2302. – Art. № 020001. DOI: 10.1063/5.0033606.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и четырех приложений. Полный объём диссертации составляет 153 страницы с 15 рисунками и 9 таблицами. Список литературы содержит 133 наименования.

Во **введении** кратко описан объект исследования, сформулирована цель диссертационной работы, а также выделены решаемые задачи. Обоснована актуальность работы, теоретическая и практическая значимость, а также достоверность полученных результатов. Перечислены основные публикации по теме диссертации и дана общая характеристика работы.

В **первой главе** приведен исторический обзор развития моделей «игр среднего поля». Сформулированы актуальные проблемы использования таких моделей. Показана применимость и преимущество применения полулагранжевых методов к решению таких задач. Представлен краткий обзор развития полулагранжевых методов численного решения дифференциальных уравнений.

Вторая глава содержит постановку одномерной дифференциальной «игры среднего поля» с неквадратичной функцией контроля. Для её решения предложен численный алгоритм, основанный на полулагранжевом приближении, и показано условие выбора оптимальной стратегии, предоставляющее наискорейший спуск к минимуму функционала стоимости. Определены границы применимости метода. Численный алгоритм апробирован на задаче экономического взаимодействия в условиях альтернативных ресурсов. Рассмотрены случаи разрывной функции управления.

В **третьей главе** сформулирована модель с ограничением на финальное распределение агентов. Для её численного решения предложен алгоритм последовательного приближения к финальному состоянию.

Четвертая глава посвящена постановке двумерной игры «среднего поля» и обобщению численного алгоритма, рассмотренного во второй главе, на двумерный случай. Показана сходимость метода и условия наискорейшего спуска к минимуму функционала стоимости. Предложенный метод применен к анализу ситуации торговли квотами на эмиссию в условиях жесткой налоговой политики.

В **пятой главе** рассмотрены двумерные модели «игр среднего поля» со смешанной диффузией, к которым не применим алгоритм, предложенный в четвертой главе. Для решения таких задач предложены другие эффективные разностные схемы.

В **заключении** дано краткое обобщение полученных результатов. Показано, что намеченные задачи решены и достигнута поставленная цель. Проведена оценка новизны результатов.

В **приложениях** рассмотрены вопросы аппроксимации предложенных разностных схем и представлена копия свидетельства о регистрации программного обеспечения.

Глава 1. Математические модели управления и оптимизации со стратегией «игры среднего поля»

1.1 Анализ модели «игры среднего поля»

Mean Field Games (MFGs) или «игры среднего поля» (ИСП) – относительно молодая область теории оптимального управления, основы которой были намечены в работах П. Каинса, М. Хуанга и Р. Малхамэ [64, 65] и, в тот же период времени независимо развиты в работах П.-Л. Лионса и Д.-М. Ласри [87 - 90]. Традиционно [62] выделяют несколько подходов к обоснованию теории ИСП. Первый подход восходит к понятию «среднего поля», используемого в физике элементарных частиц. Такие модели рассматривают взаимодействие многочисленных (но малых) компонентов через эмпирическую усредненную характеристику («среднее поле»), а влияние на систему каждого отдельно взятого компонента считается бесконечно малым. Для корректного описания такой системы взаимодействия между компонентами должны быть достаточно «слабыми» или «регулярными» для возникновения статистических явлений.

Второй подход объединяет работы Дж. Нэша о концепции равновесия [106, 107], Р. Ауманна с идеей экономики с континуумом игроков, атомизированных по своей природе [8], и Р. Лукаса о гипотезе рационального ожидания [96]. В результате поиск решения кооперативной игры N игроков приводит к понятию равновесия по Нэшу – достигнутой ситуации, когда изменение стратегии игрока не дает увеличения его выигрыша при условии неизменности стратегий других игроков. Р. Ауманн утверждает, что для экономики с бесконечно большим числом участников разумно предположить, что действия отдельных агентов незначительны в определении общего результата, что позволяет перейти к пределу при $N \rightarrow \infty$, а ги-

потеза рационального ожидания утверждает, что прогнозы экономических агентов согласуются с эмпирическими вероятностями.

Таким образом, подход ИСП позволяет преодолеть трудности, возникающие при моделировании поведения больших мультиагентных систем в рамках теории динамических игр, где предполагается, что состояние каждого отдельно взятого игрока в каждый момент времени описывается некоторой динамической системой. На динамику игрока (агента) влияет как его положение и выбранное управление, так и массовое (совокупное) положение других агентов. Каждый игрок стремится максимизировать свой доход, который зависит от выбранного им управления в условиях совокупности траекторий всех агентов, что приводит к поиску решения в терминах равновесия по Нэшу. Динамическое программирование определяет равновесие по Нэшу как решение системы дифференциальных уравнений в частных производных, где число уравнений в системе равно числу игроков [2, 13, 48]. Поэтому подход, основанный на динамическом программировании, делает анализ системы с большим числом взаимодействующих агентов вычислительно невозможным. Другой подход к поиску равновесия по Нэшу восходит к «народным теоремам» и стратегии наказания [2,18], отвечающей за выбор оптимального управления игрока посредством решения большого количества вспомогательных агностических игр на каждом временном шаге, что также требует больших вычислительных затрат.

В свою очередь, положение, принятое в теории ИСП, что все игроки однотипны и их персональное влияние на систему пренебрежимо мало, позволяет заменить микроскопическую точку зрения на макроскопическую. Основное преимущество такого приближения состоит в том, что макроскопическое описание обладает относительно небольшим числом описываемых и заданных функций и параметров, поддающихся численной обработке. Более того, обычно чем больше однотипных агентов в рассматриваемой системе, тем точнее становится приближение. В качестве «среднего поля» рассматривается эмпирическая характеристика траекторий всех игроков (плотность распределения агентов по состояниям). При этом каждый игрок оптимизирует свое поведение в соответствии с движением всей массы

игроков, которая является суммой траекторий всех агентов, входящих в систему.

Динамика агентов, как правило, описывается обыкновенными или стохастическими дифференциальными уравнениями (см. работы основоположников теории [65, 66, 89, 90]). В этом случае поиск равновесия по Нэшу сводится к решению двух дифференциальных уравнений в частных производных: уравнению Фоккера-Планка (Колмогорова), описывающего временную эволюцию функции плотности распределения агентов, и уравнению Гамильтона-Якоби-Беллмана, позволяющего определить выигрыш игрока и условия оптимальности для выбора стратегии. В некоторых работах (например, в [50, 80, 81]) были также изучены игры среднего поля с динамикой, задаваемой марковскими процессами. В этом случае ИСП сводится к системе стохастических дифференциальных уравнений.

Перейдем к более формальному описанию задачи [15, 20, 90]. Пусть $\alpha(t, x)$ — d -мерная стратегия (управление) агента, находящегося в точке x в момент времени t . Стратегия считается оптимальной, если α доставляет минимум функционалу стоимости

$$J(t, \alpha, m) = \int_0^T \int_{\Omega} (F(t, x, \alpha) m + g(t, x, m)) dx dt, \quad (1.1.1)$$

отвечающему за равновесие системы, агенты которой расположены согласно распределению $m(t, x) \forall x \in \Omega \subset \mathbf{R}^d$. Здесь Ω — (вычислительная) область распределения агентов; $T > 0$ — временной горизонт; F, g — функции, определяющие затраты на вывод системы из начального состояния до горизонта времени, непрерывные по временной переменной и подчиняющиеся условию Липшица по переменной m ; причем F определяет вклад управляющих воздействий, а g — вклад текущих платежей.

В представляемой работе рассматривается случай, когда динамика агентов задается линейным дифференциальным уравнением [20, 87, 90]. В [15] было показано, что при таком выборе динамики мультиагентной системы плотность распределения $m(t, x)$ подчиняется уравнению Колмогорова

(в физическом контексте называемом уравнением Фоккера-Планка)

$$\partial m / \partial t - \sigma^2 \Delta m + \operatorname{div}(m \alpha) = 0 \quad \text{на } [0, T] \times \Omega \quad (1.1.2)$$

с начальным и граничным условиями:

$$m(0, x) = m_0(x) \quad \text{на } \bar{\Omega}, \quad (1.1.3)$$

$$\partial m / \partial n = 0 \quad \text{на } (0, T] \times \Gamma. \quad (1.1.4)$$

Здесь константа $\sigma > 0$; $\Gamma = \bar{\Omega} \setminus \Omega$ – граница области Ω с замыканием $\bar{\Omega}$; $\Delta m = \sum_{1 \leq i \leq d} \partial^2 m / \partial x_i^2$ – оператор Лапласа, $\operatorname{div}(\alpha m) = \sum_{1 \leq k \leq d} \partial(\alpha_k m) / \partial x_k$ – дивергенция, а $\partial m / \partial n$ – производная по внешней нормали. Граничные условия (1.1.4) препятствуют выходу агентов за границы вычислительной области Ω .

Следующим шагом следует выбрать оптимальное значение управления α , при котором бы выполнялось (1.1.1). В теории оптимального управления такую роль выполняет уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана [15, 48], в которое $m(t, x)$ входит уже как параметр. Для его вывода умножим (1.1.2) на произвольную гладкую функцию $v(t, x) \in C^\infty([0, T] \times \bar{\Omega})$ и проинтегрируем получившееся выражение по частям относительно t и x :

$$\begin{aligned} - \int_0^T \int_{\Omega} (\partial v / \partial t + \sigma^2 \Delta v + \alpha \cdot \nabla v) m \, d\Omega \, dt + \\ + \int_{\Omega} (v(T, x) m(T, x) - v(0, x) m_0(x)) \, d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

Здесь $\nabla v = (\partial v / \partial x_1, \dots, \partial v / \partial x_d)^T$ – вектор градиента, записанный в строку за счет операции транспонирования $(\cdot)^T$, а точка перед ним означает скалярное произведение: $\alpha \cdot \nabla v = \sum_{1 \leq k \leq d} \alpha_k \partial v / \partial x_k$. Примем во внимание граничное условие, аналогичное (1.1.4),

$$\partial v / \partial n = 0 \quad \text{на } [0, T] \times \Gamma \quad (1.1.6)$$

и введем в рассмотрение Лагранжиан

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(m, \alpha, v) := & J(m, \alpha) + \int_0^T \int_{\Omega} (\partial v / \partial t + \sigma^2 \Delta v + \alpha \cdot \nabla v) m \, d\Omega \, dt - \\ & - \int_{\Omega} (v(T, x) m(T, x) - v(0, x) m_0(x)) \, d\Omega. \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

В итоге задача минимизации (1.1.1) совместно с уравнением (1.1.2) – (1.1.4) может быть представлена [15] как задача поиска седловой точки

$$\inf_{(m, \alpha)} \sup_v \mathfrak{S}(m, \alpha, v). \quad (1.1.8)$$

Дифференцирование (1.1.7) относительно функций m и компонент α для выяснения стационарной точки дает уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана

$$\partial v / \partial t + \sigma^2 \Delta v + \alpha \cdot \nabla v = -F - \frac{\partial g}{\partial m}(m(t, x)) \quad \text{на } [0, T] \times \Omega \quad (1.1.9)$$

с начальным и граничным условиями

$$v(T, x) = 0 \quad \text{на } \bar{\Omega}, \quad (1.1.10)$$

$$\partial v / \partial n = 0 \quad \text{на } [0, T) \times \Gamma. \quad (1.1.11)$$

Условие оптимальности стратегии задается в каждой точке (t, x) (в общем случае нелинейной) системой уравнений

$$\partial F / \partial \alpha_k = -\partial v / \partial x_k \quad \text{на } [0, T] \times \bar{\Omega}, \quad k = 1, \dots, d. \quad (1.1.12)$$

В этих терминах представляемая работа посвящена двум основным вопросам: во-первых, исследование свойств уравнений вида (1.1.2) – (1.1.4), (1.1.9) – (1.1.12), их интерпретация и поиск эффективных методов их численного решения. Во-вторых, анализ и модификация существующих моделей на основе ИСП для решения поставленных задач.

1.2 Обзор развития теории «игры среднего поля»

Теория «игр среднего поля» со времени появления упомянутых основополагающих работ продолжала развиваться и обобщаться на более сложные и широкие классы задач. Подробный литературный обзор разработок в этой области до 2013 г. представлен в монографиях [15, 20, 53]. Многие аспекты теории также изложены в курсе лекций одного из её основоположников [89], большая часть которых легла в основу обзорной монографии [52].

Строгий вывод моделей «среднего поля» рассматривался в некоторых оригинальных работах основоположников теории [64, 65], [87 - 90]; в монографии [49] также проиллюстрированы основные приемы и методы построения «игр среднего поля» на нескольких упрощенных моделях, мотивированных экономическими соображениями. В этих работах рассмотрены как детерминированные (представленные дифференциальными уравнениями), так и стохастические модели. Обзор ИСП, построенных на основе марковских процессов, изложен в [77, 79 - 81]. «Игры среднего поля» также анализировались с точки зрения использования обратных стохастических дифференциальных уравнений, например, в [24, 25, 27]. Задачи, где динамика агентов описывается линейно-квадратичными стохастическими уравнениями, рассмотрены в [65] и [9, 14, 68, 92].

Одно из преимуществ моделей ИСП заключается в том, что теория «игр среднего поля» позволяет считать агентов рациональными. В нашей терминологии это означает выбор каждым агентом своей наилучшей стратегии для достижения личной выгоды в каждый момент времени. Это допущение приводит к появлению новых моделей на основе теории ИСП, применимых к описанию реальных физических и социально-экономических ситуаций. Например, в [34] модель межбанковского взаимодействия рассмотрена в форме «игры среднего поля», в которую играют вкладчики. Анализ существования равновесий Нэша для некооперативных игр со «стратегической взаимодополняемостью» (случай, когда предельная доходность игрока увеличивается с действием соперника) восходит к оригинальным рабо-

там Вивес [130] и Милгром [102]. Такие игры в последующем были рассмотрены с точки зрения подхода ИСП в [7]. Гомес и Сауде в [53] рассматривали модели ценового воздействия как игры среднего поля. Моделирование поведения больших скоплений людей показывает, насколько универсальными могут быть модели ИСП [85]. Различные приложения и дополнительные модели можно найти в [19, 55, 57, 58, 84] и литературе в них. Например, в экономике ИСП традиционно используются как для финансового анализа [84, 88], так и для построения моделей формирования цены, где рынок выступает «средним полем» со своей эмпирической характеристикой цены, а покупатели могут влиять на рынок своей покупательной способностью [19, 57, 58]. В области инженерии с точки зрения ИСП рассматривается проблема энергоэффективности распределенного управления беспроводными сетями с большим числом передатчиков [19]. В области управления электросетями теория ИСП применялась для создания децентрализованных схем снижения пиковой нагрузки в электросетях и компенсации колебаний, возникающих в возобновляемых источниках [19, [72 - 74]]. Моделирование социальных явлений, таких как вопросы коррупции и преступности, «играми среднего поля» рассматривается в [76, 78].

ИСП также могут быть использованы как вспомогательный инструмент для решения или анализа задач в смежных областях. Например, в [9] предоставлен широкий диапазон достаточных условий существования решения квазилинейных эллиптических систем дифференциальных уравнений в частных производных путем обобщения на случай ИСП с N популяциями. В [50] установлена возможность использования игр среднего поля для решения оптимизационных задач, когда игрок может находиться в одном из конечного числа состояний. ИСП «первого порядка», т.е., для $\sigma^2 = 0$, исследовались в [20, 22, 89, 93].

Недавние работы в области ИСП посвящены существованию и поиску решения так называемого «основного уравнения» (master equation). В работах [16, 21] вместо связанной пары дифференциальных уравнений рассматривается бесконечномерное уравнение в частных производных в пространстве вероятностных мер, которое напрямую описывает равновесие по Нэшу при предельном переходе от системы N игроков. Кармона и Де-

лару [27, 28] разработали также иной, так называемый «вероятностный», подход к построению ИСП, в котором предельная система связанных дифференциальных уравнений в частных производных заменяется полностью связанной системой прямых и обратных по времени стохастических дифференциальных уравнений. В этом случае распределение агентов определяется через решение задачи оптимизации. Такой подход дает аналог принципа максимума Понтрягина. Подход, основанный на слабой формулировке стохастических управлений, был введен в [24]; а модели с общим шумом были изучены в [26, 28]. Основным недостатком вероятностного подхода является зависимость решения от выбора вероятностного пространства и высокие вычислительные затраты. Задачи, когда не все игроки в системе идентичны (многопопуляционные задачи или задачи с минорными игроками, когда некоторая часть агентов дает меньший/большой вклад в общий выигрыш), были изучены в [66, 67, 108].

Большое внимание исследователей уделяется также поиску и разработке эффективных численных методов решения задач «среднего поля» [3 - 6, 23, 59 - 61, 83]. В [44, 51, 54, 56] рассматриваются также методы решения дискретных ИСП и задач с конечным числом возможных состояний агентов с непрерывным временем. Преимущественно авторы этих работ используют конечно-разностный и конечно-элементный подходы. Представляемая работа сосредоточена на построении аппроксимации уравнений параболического типа с помощью Лагранжева метода аппроксимации операторов переноса совместно с Эйлеровым конечно-разностным подходом для эллиптической части операторов, совместное использование которых улучшает несколько важных свойств дискретных задач.

1.3 Обзор полулагранжевых методов численного решения дифференциальных уравнений

Поиск численного решения оптимизационной задачи (1.1.8) сводится к дискретизации и построению разностных аппроксимаций уравнений Колмогорова (1.1.2) – (1.1.4) и Гамильтона-Якоби-Беллмана (ГЯБ) (1.1.9) – (1.1.11). Стандартные методы конечных разностей или конечных элементов, широко распространенные для аппроксимации параболических уравнений [41, 116], в принципе, обеспечивают монотонные схемы для обеих задач. Но они вносят несколько дополнительных трудностей. Во-первых, для численного решения уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК) стандартными методами обычно не выполняется закон сохранения

$$\int_{\Omega} m(t, x) dx = \text{const} \quad \forall t \in [0, T].$$

Это приводит к «плавающему» интегралу плотности и дополнительным действиям по его нормализации. Во-вторых, стандартные методы порождают алгебраические задачи с несимметричными матрицами на каждом временном слое, что существенно усложняет численное решение ввиду использования итерационных процессов и усиливает требования к коэффициентам задачи во избежание возникающих осцилляций. В-третьих, отсутствие сопряжения операторов дискретных аппроксимаций уравнений ФПК и ГЯБ нарушает алгебраическую постановку задачи о седловой точке, что не дает возможности использования методов оптимизации на дискретном уровне. Использование отдельной полулагранжевой аппроксимации [122, 124] позволяет обойти эти три трудности. Более того, реализации таких специальных приближений для задач ИСП редуцировали процесс поиска глобального минимума к поиску локальных точечных минимумов [41, 83].

Полулагранжевы методы являются хорошо зарекомендовавшим себя подходом в численном приближении задач, частью которых является процесс переноса. Они учитывают лагранжеву природу процесса адвекции,

но в то же время позволяют работать с фиксированной вычислительной сеткой. В полулагранжевом (эйлерово-лагранжевом) подходе для аппроксимации оператора переноса используется лагранжево приближение, а для остальных операторов – конечно-разностное или конечно-элементное.

Полулагранжев подход обладает рядом преимуществ: во-первых, в отличие от Эйлера подхода к дискретизации, из-за адаптации шаблона шаг по времени не ограничен условиями Куранта, что позволяет увеличить скорость расчетов за счет увеличения шага по времени [127]. Во-вторых, выбранный подход к аппроксимации оператора переноса (с использованием Эйлера подхода к аппроксимации остальных операторов) позволяет значительно улучшить свойства получаемых дискретных задач. Например, он не требует совпадения сеток при переходе с одного временного слоя на другой. Это свойство позволяет модифицировать размеры сетки локально на любом слое по времени. Более того, для параболических уравнений полулагранжев подход дает дополнительное преимущество. Оно заключается в том, что традиционные схемы с направленными разностями приводят к алгебраическим системам уравнений с несимметричными матрицами, требующими обращения на каждом временном шаге. В то же время полулагранжев подход к аппроксимации оператора переноса при использовании конечно-разностных или конечно-элементных методов приводит к уравнениям с симметричными положительно-определёнными матрицами, что позволяет применять более эффективные итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

В семействе полулагранжевых методов существует две разные стратегии для решения стандартной задачи переноса, основанные на представлении её как уравнения в частных производных или в форме интегрального закона сохранения. Основная идея традиционного подхода заключается в разработке конечно-разностной схемы, которая рассматривает перенос как траектории частиц субстанции (например, плотности), которые проходят через фиксированные точки сетки на каждом временном шаге. Метод позволяет найти значение функции в узле сетки, отслеживая криволинейные характеристики (траектории частиц) назад по времени. Точка, из которой характеристика берет начало, приближается с помощью данных из

соседних узлов и результат интерполяции помещается в исходную точку сетки. Это наиболее распространенный подход, позволяющий дискретизировать дифференциальное уравнение. Второй подход предлагает проецировать объемы ячеек вдоль лагранжевых траекторий дальше вперед или назад во времени, а затем отображать полученное распределение плотности на некоторую целевую сетку. Этот подход часто называют переназначением («remapping» в англоязычной литературе) или интегрированием по ячейкам. Идея данного подхода восходит к [36] и продолжена в [37, 86, 97, 98].

Первые работы, посвященные методам решения задач адвекции, в которых использовалось построение характеристик, – это хорошо известные работы Куранта, Айзексона и Риса [33] по численному решению гиперболических систем первого порядка, а в метеорологической литературе – метод графической интеграции, предложенный Р. Фейротом [47]. Здесь рассмотрены самые простые схемы, использующие аппроксимации траекторий (криволинейных характеристик) прямой линией и интерполяцию низкого порядка. Формулировка метода, близкая к современной, впервые была предложена в [109]. Первое применение метода к системам примитивных уравнений представлено в [82], а первое доказательство того, что использование более крупной временной сетки не приводит к потере устойчивости, доказано Д. Сойером в [119]. В дальнейшем полулагранжевы методы нашли широкое применение к численному решению метеорологических задач. Подробный обзор развития метода в этой области до 2000 г. представлен в [17, 129]. Обзор модификаций метода и современных областей его применения вместе с обширным обзором литературы представлен в [43]. Метод аналогичен, а в некоторых случаях эквивалентен таким методам как модифицированный метод характеристик, метод Эйлера-Лагранжа и метод характеристик Галеркина, сходство и различие которых описаны в [41, 45, 46].

В начале 1980-х полулагранжев подход претерпел интенсивное развитие. В [35, 110] метод был рассмотрен в сочетании с конечно-элементным подходом. В применении к методу конечного объема полулагранжева аппроксимация была предложена Г. Моретти в [103], а понятие характери-

стических методов Галеркина было введено К. Мортонем в [104, 105]. А. Роберт [117, 118] пересмотрел численный метод Сойера и продемонстрировал потенциал полулагранжевых методов в использовании больших шагов по времени по сравнению с другими методами. Безусловная устойчивость метода для линейной и квадратичной интерполяции на декартовых сетках доказана в [10]. Анализ устойчивости [115] для кубической сплайн-интерполяции на декартовых сетках был расширен в [114] на случай чисел Куранта, превышающих единицу. Двухуровневые схемы были предложены А. Макдональдом и Д. Бэйтсом в [101], а также А. Стэнифортом и Темпертоном в [129]. Общий анализ устойчивости и сходимости для случая адвекции с переменными коэффициентами представлен в [42] в контексте конечно-элементной формулировки. Этот вопрос также обсуждался в [131] для случая использования кубической Эрмитовой интерполяции, поскольку этот метод интерполяции широко используется в атмосферных приложениях. В настоящее время современные полулагранжевые алгоритмы позволяют использовать приближения криволинейной характеристики и численного решения более высоких порядков [123].

После 2000-х годов получил активное развитие упомянутый подход переназначения (“remapping”). В [91] усовершенствован метод, предложенный Дуковичем и Кодисом [36] для кубической сетки на сфере введением двумерной полулагранжевой схемы CSLAM (консервативная полулагранжева мультиразмерная схема), основанной на отслеживании криволинейных ячеек путем перераспределения данных из одной сетки в другую на каждом шаге по времени, при этом сохраняя глобальные и локальные интегралы. Недавно Харрис и соавторы [63] предложили версию консервативной полулагранжевой мультиразмерной схемы в форме потока (FF-CSLAM) на кубической сфере. Новая схема отслеживает движение не вычислительной ячейки вместе с потоком, как в оригинальном методе, а поток массы через каждую стенку ячейки. Это позволяет вычислять области потока с помощью линейных интегралов и использовать биквадратичное приближение, в то время как сохраняется свойство консервативности, поскольку подход основан на методе конечных объемов. Подход «переназначения в форме потока» концептуально похож на схему инкрементного пе-

рераспределения, введенную в [37], хотя в последнем используется гауссова квадратура для оценки интегралов по области вместо преобразования их в криволинейные. Однако, несмотря на консервативность и отсутствие ограничений на вычислительную сетку, методы переназначения остаются более дорогими и более сложными в реализации по сравнению с традиционными полулагранжевыми методами.

В настоящее время полулагранжевы схемы широко используются в различных областях численного моделирования, например, в приложениях гидродинамики [110, 120, 123], уравнениях мелкой воды [12], для решения уравнения Фоккера-Планка [75], уравнений конвекции-диффузии [30] и др. [43].

Простота полулагранжевых схем делает их полезными для применения совместно с адаптивными сетками как, например, в [40, 69, 94, 95, 128]. В некоторых работах также рассмотрено использование полулагранжевых методов в качестве строительных блоков для других схем. Например, в [38, 70, 71] показано, что метод компенсации и исправления ошибок назад и вперед (схема VFESS) второго порядка можно сделать безусловно устойчивым с помощью полулагранжева приближения первого порядка в качестве строительного блока. Кроме того, в [121] показано, что для оригинальной схемы Мак-Кормака можно получить тот же результат.

1.4 Выводы к главе 1

Данная глава посвящена краткому изложению теоретических аспектов современной модели прогнозирования и оптимизации «игры среднего поля». Проведенный анализ литературы позволяет сделать вывод, что модели ИСП становятся всё более востребованными для решения как экономических и физических задач, так и для моделирования социальных взаимодействий. Это порождает интерес к рассмотрению моделей ИСП с точки зрения новых приложений и поиску эффективных численных алгоритмов решения таких задач. В разделе 1.3 проведен обзор литературы по

полулагранжевым методам дискретизации дифференциальных уравнений, которые за счет своих свойств являются перспективным инструментом для построения эффективных вычислительных схем в применении к «играм среднего поля».

Глава 2. Задачи «среднего поля» с неквадратичным контролем

Традиционно в теории ИСП функционал стоимости (1.1.1) принимается зависимым от квадрата функции контроля α [90]. Это допущение существенно упрощает применение численных методов, поскольку в этом случае (1.1.12) – линейное уравнение относительно α ; в противном случае вычислительные схемы обычно приводят к решению многомерных нелинейных задач. Однако в действительности функция управления динамической системой $F(t, m, \alpha)$ может иметь более сложные зависимости, поскольку на стратегию игрока могут оказывать влияние дополнительные внешние факторы, например, сезонность, изменение законодательства или политики управления, расположение игрока и т.д. Поэтому в данной главе предлагается численный метод, в котором более сложный вид функции F не приводит к драматическому усложнению численных алгоритмов решения одномерной ИСП.

2.1 Постановка одномерной задачи

Описание одномерной (по «пространству») постановки дифференциальной задачи ИСП начнем с уравнения Фоккера-Планка для функции плотности $m(t, x)$ «точечных» агентов, распределенных на отрезке $[0, 1]$ в момент времени $t \in [0, T]$. Термин «точечный» означает, что отдельный агент из бесконечного числа не влияет на ситуацию, но выбирает рациональную стратегию с учетом его собственной позиции x и текущей плотности распределения $m(t, x)$:

$$\frac{\partial m}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \frac{\partial(\alpha m)}{\partial x} = 0 \quad \text{на } (0, T) \times (0, 1) \quad (2.1.1)$$

с начальными и краевыми условиями

$$m(0,x) = m_0(x) > 0 \quad \forall x \in [0,1], \quad (2.1.2)$$

$$\frac{\partial m}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial m}{\partial x}(t,1) = 0 \quad \forall t \in (0,T). \quad (2.1.3)$$

Здесь σ^2 – константа, характеризующая стохастичность исходного процесса [15], а (2.1.2) определяет начальное (неотрицательное) распределение агентов. И, наконец, краевое условие (2.1.3), как мы увидим позже, препятствует выходу агентов за пределы области.

Суммарные траты агентов будем рассматривать в виде функционала стоимости

$$J(m,\alpha) = \int_0^T \int_0^1 (F(\alpha,t,x)m + g(t,x,m)) dx dt, \quad (2.1.4)$$

где $F(\alpha,t,x)$ при каждом t и x – стоимость реализации стратегии $\alpha(t,x)$; $g(t,x,m)$ – текущий платеж, который зависит не только от переменных t,x , но также от текущей локальной плотности агентов $m(t,x)$. Будем считать функцию $g(t,x,\bar{m})$ с числовым параметром $\bar{m} \in \mathbf{R}$ кусочно-гладкой со следующим условием:

$$g(t,x,\tilde{m}) - g(t,x,\bar{m}) \leq (\tilde{m} - \bar{m}) b(t,x,\bar{m}), \quad \text{где } b(t,x,\bar{m}) = \frac{\partial g}{\partial \bar{m}}(t,x,\bar{m}) \quad (2.1.5)$$

для всех допустимых значений аргумента \tilde{m} и \bar{m} из \mathbf{R} .

Для однозначной разрешимости условия (1.1.12) будем считать, что функция $F(\bar{\alpha},t,x)$ (с числовым параметром $\bar{\alpha} \in \mathbf{R}$) подчиняется следующим условиям:

1. $\frac{\partial F}{\partial \bar{\alpha}}(\bar{\alpha},t,x)$ кусочно-непрерывна на $(-\infty, +\infty) \times [0,T] \times [0,1]$; (2.1.6)

2. $\frac{\partial F}{\partial \bar{\alpha}}(\bar{\alpha},t,x)$ строго монотонна по $\bar{\alpha} \in (-\infty, +\infty)$ (2.1.7)
 $\forall (t,x) \in [0,T] \times [0,1]$;

3. $F(0,t,x) = \frac{\partial F}{\partial \bar{\alpha}}(0,t,x) = 0$ на $[0,T] \times [0,1]$. (2.1.8)

С учетом выполнения условий (2.1.5) – (2.1.8) сформулируем задачу оптимизации

$$\begin{cases} \inf_{\alpha} J(m, \alpha) = \inf_{\alpha} \int_0^T \int_0^1 (F(\alpha, t, x) m + g(t, x, m)) \, dx \, dt, \\ \frac{\partial m}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \frac{\partial(\alpha m)}{\partial x} = 0 \quad (0, T) \times (0, 1) \end{cases} \quad (2.1.9)$$

с начальными и краевыми условиями (2.1.2), (2.1.3). Для получения уравнения, отвечающего за оптимальность выбранных игроками стратегий, воспользуемся последовательностью действий, описанной в разделе 1.1. Здесь Лагранжиан задачи (2.1.9) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(m, \alpha, v) := J(m, \alpha) + \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial v}{\partial x} \right) m \, dx \, dt - \\ - \int_0^1 (v(T, x) m(T, x) - v(0, x) m_0(x)) \, dx. \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

В результате мы приходим к задаче поиска седловой точки

$$\inf_{(m, \alpha)} \sup_v \mathfrak{S}(m, \alpha, v). \quad (2.1.11)$$

При дифференцировании Лагранжиана по соответствующим переменным для поиска стационарной точки получается уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial v}{\partial x} = -F(\alpha, t, x) - b \quad \text{на } [0, T] \times [0, 1] \quad (2.1.12)$$

с начальными и краевыми условиями

$$v(T, x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1], \quad (2.1.13)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial v}{\partial x}(t, 1) = 0 \quad \forall t \in (0, T). \quad (2.1.14)$$

Условия оптимальности (1.1.12) принимают вид нелинейного алгебраического уравнения относительно функции α :

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{\alpha}}(\alpha, t, x) + \frac{\partial v}{\partial x}(t, x) = 0 \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, 1]. \quad (2.1.15)$$

Из строгой монотонности $\partial F(\bar{\alpha}, t, x)/\partial \bar{\alpha}$ по $\bar{\alpha}$ вытекает наличие функции θ такой, что

$$\alpha(t, x) = \theta\left(\frac{\partial v}{\partial x}(t, x)\right) \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, 1] \quad (2.1.16)$$

является однозначным решением уравнения (2.1.15). Отметим, что вследствие (2.1.8) и (2.1.14) для $\alpha(t, x)$ справедливо свойство

$$\alpha(t, 0) = \alpha(t, 1) = 0 \quad \forall t \in (0, T), \quad (2.1.17)$$

препятствующее выходу агентов за пределы отрезка интегрирования $[0, 1]$.

Таким образом, два связанных дифференциальных уравнения с начальными и граничными условиями (2.1.1) – (2.1.3) и (2.1.12) – (2.1.14) совместно с (2.1.15) – (2.1.16) дают необходимые условия для задачи минимизации (2.1.9).

2.2 Численное решение одномерной задачи оптимизации

2.2.1 Аппроксимация уравнения Фоккера-Планка

Для поиска численного решения задачи (2.1.2), (2.1.3), (2.1.9) сначала рассмотрим аппроксимацию уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова. Введем в рассмотрение дискретную равномерную сетку по времени и про-

странству:

$$\begin{aligned} t_k &= k\tau, \quad k = 0, \dots, M, \quad \tau = T/M; \\ x_{i+1/2} &= (i + 1/2)h, \quad i = -1, \dots, N, \quad h = 1/N \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

для $M, N \geq 2$. Введем также промежуточные точки сетки: $x_i = ih$, $i = 0, \dots, N$. Решение задачи (2.1.1) – (2.1.3) будем искать в виде кусочно-линейной функции $m^h(t, x)$ на каждом временном слое t_k , непрерывной на $[0, 1]$ и линейной на каждом отрезке $\omega_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \quad \forall i = 1, \dots, N-1$. Кроме того, будем считать, что $m^h(t_k, x)$ постоянна на интервалах $\omega_0 = [0, x_{1/2}]$ и $\omega_N = [x_{N-1/2}, 1]$ для выполнения условий (2.1.3). Таким образом, на каждом временном шаге функция $m^h(t_k, x)$ полностью определяется своими дискретными значениями $m_{k,i+1/2}^h \equiv m^h(t_k, x_{i+1/2})$:

$$m^h(t_k, x) = m_{k,i-1/2}^h (x_{i+1/2} - x)/h + m_{k,i+1/2}^h (x - x_{i-1/2})/h \quad (2.2.2)$$

$\forall x \in \omega_i$. Для выполнения краевого условия (2.1.3) положим

$$m_{k,-1/2}^h = m_{k,1/2}^h \quad \text{и} \quad m_{k,N+1/2}^h = m_{k,N-1/2}^h. \quad (2.2.3)$$

Разделим аппроксимацию уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК) (2.1.1) на две части как в [39, 125]. Сначала рассмотрим часть, отвечающую за перенос субстанции

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha m)}{\partial x} = f_1, \quad \text{где} \quad f_1 = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2}. \quad (2.2.4)$$

Для приближения оператора переноса в левой части (2.2.4) из каждого узла (t_k, x_i) на k -том слое по времени опустим криволинейную характеристику $\hat{x}_i(t)$ на предыдущий временной слой t_{k-1} . Характеристика представляет собой решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\hat{x}' = \alpha(t, \hat{x}), \quad t_k \geq t \geq t_{k-1}, \quad (2.2.5)$$

с начальным условием $\hat{x}_i(t_k) = x_i$ на слое t_k . Таким образом, каждому узлу $x_{i+1/2}$ соответствует криволинейная трапеция $Q_{i+1/2}$, ограниченная

отрезком $\{t_k\} \times \omega_{i+1/2}$ сверху, кривыми $\hat{x}_i(t)$ и $\hat{x}_{i+1}(t)$ при $t \in [t_{k-1}, t_k]$ и отрезком $\{t_{k-1}\} \times (\hat{x}_i(t_{k-1}); \hat{x}_{i+1}(t_{k-1}))$ снизу (рисунок 2.1).

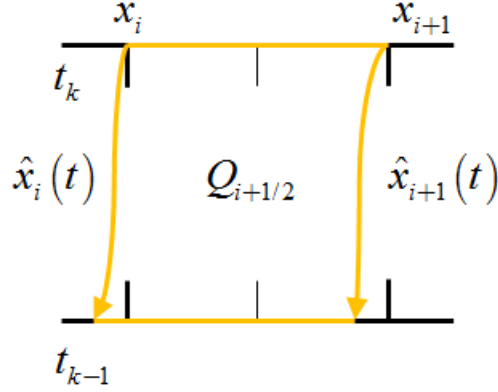


Рисунок 2.1 — Криволинейная трапеция $Q_{i+1/2}$, соответствующая узлу $(t_k, x_{i+1/2})$

Далее мы наложим следующее ограничение:

$$\tau |\alpha_{k,i}^h| < h/4 \quad \forall k = 0, \dots, M \quad \forall i = 0, \dots, N - 1. \quad (2.2.6)$$

Оно существенно упрощает наше изложение и рисунки. Для лагранжева подхода это требование не является принципиальным [127], но при его невыполнении шаблон схемы на предыдущем слое $t = t_{k-1}$ перемещается в другие места. Это привело бы к рассмотрению множества разнообразных ситуаций, принципиально не отличающихся друг от друга.

Проинтегрируем (2.2.4) по области $Q_{i+1/2}$:

$$\int_{Q_{i+1/2}} \left(\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha m)}{\partial x} \right) dt dx = \int_{Q_{i+1/2}} f_1 dt dx. \quad (2.2.7)$$

Применяя формулу Гаусса-Остроградского к левой части этого равенства [39, 125], получаем, что вычисление интеграла по области $Q_{i+1/2}$ сводится к вычислению двух одномерных интегралов по верхней и нижней границам (поскольку поток субстанции через характеристики равен нулю [133]):

$$\int_{Q_{i+1/2}} \left(\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha m)}{\partial x} \right) dt dx = \quad (2.2.8)$$

$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} m(t_k, x) dx - \int_{\hat{x}_i(t_{k-1})}^{\hat{x}_{i+1}(t_{k-1})} m(t_{k-1}, x) dx.$$

Чтобы обойти точное решение уравнения (2.2.5), используем по одному шагу явного метода Эйлера:

$$\hat{x}_i(t_{k-1}) \approx \hat{x}_i^{k-1} := x_i - \tau\alpha_{k,i} \text{ и } \hat{x}_{i+1}(t_{k-1}) \approx \hat{x}_{i+1}^{k-1} := x_{i+1} - \tau\alpha_{k,i+1}. \quad (2.2.9)$$

Для аппроксимации интеграла в правой части (2.2.7) используем разложения в ряд Тейлора функций $\hat{x}_i(t)$ и $\hat{x}_{i+1}(t)$:

$$\begin{aligned} \hat{x}_i(t) &= x_i + (t - t_k)\alpha_{k,i} + O(\tau^2), \\ \hat{x}_{i+1}(t) &= x_{i+1} + (t - t_k)\alpha_{k,i+1} + O(\tau^2). \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Рассмотрим их разность

$$\hat{x}_{i+1}(t) - \hat{x}_i(t) = h + (t - t_k)(\alpha_{k,i+1} - \alpha_{k,i}) + O(\tau^2) = h + O(\tau h + \tau^2).$$

Отсюда

$$\int_{Q_{i+1/2}} dt dx = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{\hat{x}_i(t)}^{\hat{x}_{i+1}(t)} dx dt = \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\hat{x}_{i+1}(t) - \hat{x}_i(t)) dt = \tau h + O(\tau^2 h + \tau^3).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{Q_{i+1/2}} f_1 dt dx &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{\hat{x}_i(t)}^{\hat{x}_{i+1}(t)} f_1 dx dt = \\ &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{\hat{x}_i(t)}^{\hat{x}_{i+1}(t)} (f_1(t_k, x_{i+1/2}) + O(\tau + h)) dx dt = \\ &= \tau h f_1(t_k, x_{i+1/2}) + \tau h O(\tau + h). \end{aligned}$$

Отбрасывая погрешность малого порядка, получаем простую аппроксимацию

$$\int_{Q_{1+1/2}} f_1 dt dx \approx \tau h f_1(t_{k-1}, x_{i+1/2}). \quad (2.2.11)$$

В последнем интеграле из (2.2.8) заменим пределы интегрирования:

$$\int_{\hat{x}_i(t_{k-1})}^{\hat{x}_{i+1}(t_{k-1})} m(t_{k-1}, x) dx \approx \int_{\hat{x}_i^{k-1}}^{\hat{x}_{i+1}^{k-1}} m(t_{k-1}, x) dx. \quad (2.2.12)$$

Для оценки погрешности этой замены используем более детальные разложения Тейлора, чем (2.2.10):

$$\hat{x}_i(t_{k-1}) = \hat{x}_i^{k-1} + \frac{\tau^2}{2} \hat{x}_i''(\eta_i) \text{ и } \hat{x}_{i+1}(t_{k-1}) = \hat{x}_{i+1}^{k-1} + \frac{\tau^2}{2} \hat{x}_{i+1}''(\eta_{i+1}). \quad (2.2.13)$$

Сначала рассмотрим случай, когда оба значения $\hat{x}_i''(\eta_i)$ и $\hat{x}_{i+1}''(\eta_{i+1})$ положительны. Тогда

$$\hat{x}_i(t_{k-1}) - \hat{x}_i^{k-1} = \tau^2 \hat{x}_i''(\eta_i)/2 \geq 0 \text{ и } \hat{x}_{i+1}(t_{k-1}) - \hat{x}_{i+1}^{k-1} = \tau^2 \hat{x}_{i+1}''(\eta_{i+1})/2 \geq 0.$$

Вторая производная выражается следующим образом:

$$\hat{x}_i''(t) = \frac{d\alpha}{dt}(t, \hat{x}_i(t)) = \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t, \hat{x}_i(t)) + \frac{\partial \alpha}{\partial x}(t, \hat{x}_i(t)) \alpha(t, \hat{x}_i(t)). \quad (2.2.14)$$

Так что ее ограниченность вытекает из свойств функции $\alpha(t, x)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\hat{x}_i(t_{k-1})}^{\hat{x}_{i+1}(t_{k-1})} m(t_{k-1}, x) dx - \int_{\hat{x}_i^{k-1}}^{\hat{x}_{i+1}^{k-1}} m(t_{k-1}, x) dx = \\ = \int_{\hat{x}_{i+1}^{k-1}}^{\hat{x}_{i+1}(t_{k-1})} m(t_{k-1}, x) dx - \int_{\hat{x}_i^{k-1}}^{\hat{x}_i(t_{k-1})} m(t_{k-1}, x) dx. \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

Применим квадратурную формулу центральных прямоугольников для обоих интегралов в правой части. Для первого интеграла

$$\int_{\hat{x}_{i+1}^{k-1}}^{\hat{x}_{i+1}(t_{k-1})} m(t_{k-1}, x) dx = (\hat{x}_{i+1}(t_{k-1}) - \hat{x}_{i+1}^{k-1}) m(t_{k-1}, \xi_{i+1}) + O(\tau^4),$$

где ξ_{i+1} – середина отрезка интегрирования длиной

$$|\hat{x}_{i+1}(t_{k-1}) - \hat{x}_{i+1}^{k-1}| \leq O(\tau^2).$$

Для второго интеграла аналогично

$$\int_{\hat{x}_i^{k-1}}^{\hat{x}_i(t_{k-1})} m(t_{k-1}, x) dx = (\hat{x}_i(t_{k-1}) - \hat{x}_i^{k-1}) m(t_{k-1}, \xi_i) + O(\tau^4)$$

с серединой ξ_i отрезка интегрирования длиной

$$|\hat{x}_i(t_{k-1}) - \hat{x}_i^{k-1}| \leq O(\tau^2).$$

Вычитая одно равенство из другого, получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\hat{x}_{i+1}^{k-1}}^{\hat{x}_{i+1}(t_{k-1})} m(t_{k-1}, x) dx - \int_{\hat{x}_i^{k-1}}^{\hat{x}_i(t_{k-1})} m(t_{k-1}, x) dx = \\ & = (\hat{x}_{i+1}(t_{k-1}) - \hat{x}_{i+1}^{k-1}) \times (m(t_{k-1}, \xi_{i+1}) - m(t_{k-1}, \xi_i)) + \\ & + ((\hat{x}_{i+1}(t_{k-1}) - \hat{x}_{i+1}^{k-1}) - (\hat{x}_i(t_{k-1}) - \hat{x}_i^{k-1})) m(t_{k-1}, \xi_i). \end{aligned} \tag{2.2.16}$$

Первое полученное слагаемое ввиду малой длины отрезка и гладкости $m(t_{k-1}, x)$ является величиной $O(\tau^2 h)$. Для оценки второго полученного слагаемого используем разность разложений (2.2.13) и свойство (2.2.14):

$$\begin{aligned} & (\hat{x}_{i+1}(t_{k-1}) - \hat{x}_{i+1}^{k-1}) - (\hat{x}_i(t_{k-1}) - \hat{x}_i^{k-1}) = \\ & = \frac{\tau^2}{2} (\hat{x}_{i+1}''(\eta_{i+1}) - \hat{x}_i''(\eta_i)) = O(\tau^3 + \tau^2 h). \end{aligned}$$

Откуда следует, что второе слагаемое в (2.2.16) с учетом ограниченности $m(t_{k-1}, x)$ является величиной $O(\tau^3 + \tau^2 h)$. Поэтому замена (2.2.12) вносит погрешность $O(\tau^3 + \tau^2 h)$.

Аналогично разбирается случай, когда оба значения $\hat{x}_i''(\eta_i)$ и $\hat{x}_{i+1}''(\eta_{i+1})$ отрицательны. А случай разных знаков влечет обращение в нуль выражения (2.2.14) в некоторой точке между $\hat{x}_i(\eta_i)$ и $\hat{x}_{i+1}(\eta_{i+1})$, откуда следует, что $\hat{x}_i''(\eta_i) = O(\tau + h)$ и $\hat{x}_{i+1}''(\eta_{i+1}) = O(\tau + h)$. Поэтому каждый из двух интегралов в правой части (2.2.15) является величиной $O(\tau^3 + \tau^2 h)$ ввиду оценок

$$|\hat{x}_{i+1}(t_{k-1}) - \hat{x}_{i+1}^{k-1}| \leq O(\tau^3 + \tau^2 h) \text{ и } |\hat{x}_i(t_{k-1}) - \hat{x}_i^{k-1}| \leq O(\tau^3 + \tau^2 h).$$

Так что и в этом случае замена (2.2.12) вносит погрешность $O(\tau^3 + \tau^2 h)$.

Комбинируя (2.2.7), (2.2.8), (2.2.11) и (2.2.12), заменим $m(t_k, x)$ её дискретными значениями $m^h(t_k, x)$ согласно (2.2.2) и разделим полученное выражение на τh :

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\tau} m_{k,i-1/2}^h + \frac{3}{4\tau} m_{k,i+1/2}^h + \frac{1}{8\tau} m_{k,i+3/2}^h &\approx \\ &\approx \frac{1}{\tau h} \int_{\hat{x}_i^{k-1}}^{\hat{x}_{i+1}^{k-1}} m^h(t_{k-1}, x) dx + f_1(t_k, x_{i+1/2}). \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

Теперь построим аппроксимацию для второй части уравнения (2.1.1), отвечающей за диффузию,

$$-\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} = f_2, \text{ где } f_2 = -\frac{\partial m}{\partial t} - \frac{\partial(\alpha m)}{\partial x}. \quad (2.2.18)$$

Применение конечно-разностного приближения к (2.1.11) приводит к выражению

$$\frac{\sigma^2}{2h^2} \left(-m_{k,i-1/2}^h + 2m_{k,i+1/2}^h - m_{k,i+3/2}^h \right) \approx f_2(t_k, x_{i+1/2}). \quad (2.2.19)$$

Заметим, что $f_1(t, x) + f_2(t, x) = 0$. Учитывая (2.2.3) для аппроксимации граничных условий (2.1.3) в форме Неймана, совместно с (2.2.17), (2.2.19),

получим однородную разностную схему

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{8\tau} - \frac{\sigma^2}{2h^2} \right) m_{k,i-1/2}^h + \left(\frac{3}{4\tau} + \frac{\sigma^2}{h^2} \right) m_{k,i+1/2}^h + \left(\frac{1}{8\tau} - \frac{\sigma^2}{2h^2} \right) m_{k,i+3/2}^h \\ &= \frac{1}{\tau h} \int_{\hat{x}_{i+1}^{k-1}}^{\hat{x}_{i+1}^{k-1}} m^h(t_{k-1}, x) dx \quad \forall k = 1, \dots, M \quad \forall i = 0, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

Теперь для каждого линейного участка $m^h(t_{k-1}, x)$ вычислим интеграл в правой части (2.2.20), используя квадратурную формулу трапеций. Для линейной функции это дает точное значение интеграла. Условие (2.2.6) гарантирует, что $\hat{x}_i^{k-1} \in \omega_i$ и $\hat{x}_{i+1}^{k-1} \in \omega_{i+1}$. Поэтому искомый интеграл разобьем на два интеграла по отрезкам: $[\hat{x}_i^{k-1}, x_{i+1/2}]$ и $[x_{i+1/2}, \hat{x}_{i+1}^{k-1}]$, на каждом из которых $m^h(t_{k-1}, x)$ линейна. Тогда квадратурная формула трапеций дает выражения

$$\begin{aligned} & \int_{\hat{x}_i(t_{k-1})}^{x_{i+1/2}} m^h(t_{k-1}, x) dx = \left(\frac{h}{4} + \frac{\tau}{2} \alpha_{k,i} \right) \times \\ & \quad \times \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{h} \alpha_{k,i} \right) m_{k-1,i-1/2}^h + \left(\frac{3}{2} - \frac{\tau}{h} \alpha_{k,i} \right) m_{k-1,i+1/2}^h \right), \\ & \int_{x_{i+1/2}}^{\hat{x}_{i+1}(t_{k-1})} m^h(t_{k-1}, x) dx = \left(\frac{h}{4} - \frac{\tau}{2} \alpha_{k,i+1} \right) \times \\ & \quad \times \left(\left(\frac{3}{2} + \frac{\tau}{h} \alpha_{k,i+1} \right) m_{k-1,i+1/2}^h + \left(\frac{1}{2} - \frac{\tau}{h} \alpha_{k,i+1} \right) m_{k-1,i+3/2}^h \right). \end{aligned}$$

Складывая их, мы получаем аппроксимацию правой части (2.2.20):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau h} \int_{\hat{x}_i(t_{k-1})}^{\hat{x}_{i+1}(t_{k-1})} m^h(t_{k-1}, x) dx = \overset{-1}{\gamma}_{k-1,i+1/2} m_{k-1,i-1/2}^h + \\ & + \overset{-2}{\gamma}_{k-1,i+1/2} m_{k-1,i+1/2}^h + \overset{-3}{\gamma}_{k-1,i+1/2} m_{k-1,i+3/2}^h, \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}_{k,i+1/2}^1 &= \frac{1}{8\tau} \left(1 + \frac{2\tau}{h} \alpha_{k,i} \right)^2, \\
\tilde{\gamma}_{k,i+1/2}^2 &= \frac{1}{8\tau} \left(3 - \frac{2\tau}{h} \alpha_{k,i} \right) \left(1 + \frac{2\tau}{h} \alpha_{k,i} \right) + \\
&\quad + \frac{1}{8\tau} \left(3 + \frac{2\tau}{h} \alpha_{k,i+1} \right) \left(1 - \frac{2\tau}{h} \alpha_{k,i+1} \right), \\
\tilde{\gamma}_{k,i+1/2}^3 &= \frac{1}{8\tau} \left(1 - \frac{2\tau}{h} \alpha_{k,i+1} \right)^2.
\end{aligned} \tag{2.2.22}$$

В принципе, для схемы (2.2.20) – (2.2.22) можно обосновать сходимость со вторым порядком аппроксимации по пространству и первым – по времени. Но применение этой схемы давало некоторые осложнения в алгоритмах оптимизации [125]. Поэтому для наших целей мы ее упростим без потери порядка сходимости, отбросив в формулах (2.2.22) квадратичные выражения с $\alpha_{k,i}$ и $\alpha_{k,i+1}$:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{8\tau} - \frac{\sigma^2}{2h^2} \right) m_{k,i-1/2}^h + \left(\frac{3}{4\tau} + \frac{\sigma^2}{h^2} \right) m_{k,i+1/2}^h + \\
+ \left(\frac{1}{8\tau} - \frac{\sigma^2}{2h^2} \right) m_{k,i+3/2}^h = \gamma_{k,i+1/2}^1 m_{k-1,i-1/2}^h + \\
+ \gamma_{k,i+1/2}^2 m_{k-1,i+1/2}^h + \gamma_{k,i+1/2}^3 m_{k-1,i+3/2}^h
\end{aligned} \tag{2.2.23}$$

$\forall i = 0, \dots, N-1 \forall k = 1, \dots, M$ с коэффициентами

$$\begin{aligned}
\gamma_{k,i+1/2}^1 &= \frac{1}{8\tau} \left(1 + \frac{4\tau}{h} \alpha_{k,i} \right), \\
\gamma_{k,i+1/2}^2 &= \frac{1}{8\tau} \left(3 + \frac{4\tau}{h} \alpha_{k,i} \right) + \frac{1}{8\tau} \left(3 - \frac{4\tau}{h} \alpha_{k,i+1} \right), \\
\gamma_{k,i+1/2}^3 &= \frac{1}{8\tau} \left(1 - \frac{4\tau}{h} \alpha_{k,i+1} \right)
\end{aligned} \tag{2.2.24}$$

и начальным условием, соответствующим (2.1.2),

$$m_{0,i+1/2}^h = m_0(x_{i+1/2}) \quad \forall i = 0, \dots, N-1. \tag{2.2.25}$$

Заметим, что при выполнении условий (2.2.6) и

$$h^2 \leq 4\tau\sigma^2 \quad (2.2.26)$$

коэффициенты $\gamma_{k,i+1/2}^s$ при $s = 1, 2, 3$ неотрицательны, а матрица системы (2.2.23) – (2.2.25) обладает М-свойством [111] (с диагональным преобладанием по столбцам). В приложении А показано, что схема (2.2.23) – (2.2.25) действительно аппроксимирует уравнение (2.1.1) с порядком $O(\tau + h^2)$. Условие (2.2.26) не является существенным ограничением ввиду быстрого убывания h^2 в сравнении с правой частью этого неравенства.

Замечание 1. Полагая значения $m_{k-1,i+1/2}^h$ неотрицательными на слое $t = t_{k-1}$, из положительности $\gamma_{k,i+1/2}^s$ и свойств М-матрицы [111] следует, что значения $m_{k,i+1/2}^h$ на следующем слое $t = t_k$ тоже будут неотрицательными. Поэтому с учетом неотрицательного начального распределения все остальные значения плотности также будут неотрицательными.

Замечание 2. Просуммируем (2.2.23) по $i = 0, \dots, N - 1$ и умножим на τh . В итоге получаем равенство

$$\int_0^1 m^h(t_k, x) dx = \int_0^1 m^h(t_{k-1}, x) dx. \quad (2.2.27)$$

С учетом неотрицательных значений равенство (2.2.27) представляет собой закон сохранения совокупности агентов на дискретном уровне. Оба интеграла являются дискретными аналогами $L_1(0,1)$ -нормы для неотрицательной сеточной функции:

$$\int_0^1 m^h(t_k, x) dx = \|m^h(t_k, \cdot)\|_{1,h} := \sum_{i=0}^{N-1} |m_{k,i+1/2}^h| h. \quad (2.2.28)$$

Здесь и далее точка вместо параметра или индекса означает, что он может принимать все подходящие значения. Например, $m^h(t_k, \cdot)$ означает

функцию со значениями $m^h(t_k, x)$, где $x \in [0, 1]$. А $m_{k,\cdot}^h$ означает сеточную функцию со значениями $\left\{ m_{k,i-1/2}^h \right\}_{i=1,\dots,N}$.

Таким образом, (2.2.23), (2.2.24) с начальным условием (2.2.25) и граничным условием (2.2.3) дают монотонную схему аппроксимации уравнения ФПК.

В этом разделе мы не стали оценивать погрешности аппроксимации, вносимые несколькими упрощениями, а только продемонстрировали последовательность действий, которые привели к используемой далее разностной схеме. Ее погрешность аппроксимации в приложении А будет оценена традиционным образом путем использования разложений в ряд Тейлора.

2.2.2 Оптимальное управление для дискретной задачи оптимизации с неквадратичным контролем

Следующим шагом численного решения задачи «среднего поля» является дискретизация условий оптимальности стратегий, выбираемых игроками. Поэтому вместо функционала стоимости (2.1.4) будем рассматривать его дискретный аналог

$$J^h(m^h, \alpha^h) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{N-1} \left(r_{k,i+1/2}^h m_{k,i+1/2}^h + g_{k,i+1/2}^h \right) \tau h. \quad (2.2.29)$$

Здесь $g_{k,i+1/2}^h = g(t_k, x_{i+1/2}, m_{k,i+1/2}^h)$, а $r_{k,i+1/2}^h$ – квадратурная формула для функции $F(\alpha, t, x)$, сохраняющая погрешность аппроксимации $O(\tau + h^2)$:

$$r_{k,i+1/2}^h = F(\alpha_{k+1,i}^h, t_k, x_i)/2 + F(\alpha_{k+1,i+1}^h, t_k, x_{i+1})/2. \quad (2.2.30)$$

Введем также билинейную форму

$$\langle u, v \rangle = h \sum_{i=0}^{N-1} u_{i+1/2} v_{i+1/2}. \quad (2.2.31)$$

Используя ее, перепишем (2.2.29):

$$J^h(m^h, \alpha^h) = \sum_{k=0}^{M-1} \left(\langle r_{k,\cdot}^h, m_{k,\cdot}^h \rangle + h \sum_{i=0}^{N-1} g_{k,i+1/2}^h \right) \tau. \quad (2.2.32)$$

В этих терминах систему уравнений (2.2.23) – (2.2.25) запишем в следующем виде:

$$\mathfrak{A} m_{\cdot,\cdot}^h = \mathfrak{F} m_{0,\cdot}^h, \quad (2.2.33)$$

где \mathfrak{A} и \mathfrak{F} при фиксированной $\alpha_{\cdot,\cdot}$ – линейные разностные операторы. Здесь точка вместо первого индекса у функции $m_{\cdot,\cdot}^h$ означает совокупность её сеточных значений $\{m_{k,\cdot}^h\}$ для всех $k = 1, \dots, M$; а точка вместо второго индекса определяет вектор-столбец сеточных значений $m_{k,\cdot}^h = (m_{k,1/2}^h, \dots, m_{k,N-1/2}^h)^T$ на каждом слое по времени.

Перепишем (2.2.23) – (2.2.25) согласно (2.2.33):

$$\mathfrak{A} m_{\cdot,\cdot}^h = \begin{bmatrix} \mathbb{A} & & & & \\ -\mathbb{B}_2 & \mathbb{A} & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & -\mathbb{B}_M & \mathbb{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{1,\cdot}^h \\ m_{2,\cdot}^h \\ \vdots \\ m_{M,\cdot}^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{B}_1 m_{0,\cdot}^h \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathfrak{F} m_{0,\cdot}^h. \quad (2.2.34)$$

Здесь $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)^T$ – вектор-столбец, а \mathbb{A} и \mathbb{B}_k – матрицы вида

$$\mathbb{B}_k = \begin{bmatrix} \gamma_{k,-1/2}^1 + \gamma_{k,1/2}^2 & \gamma_{k,3/2}^3 & & & \\ \gamma_{k,1/2}^1 & \gamma_{k,3/2}^2 & \gamma_{k,5/2}^3 & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & \gamma_{k,N-3/2}^1 & \gamma_{k,N-1/2}^2 + \gamma_{k,N+1/2}^3 \end{bmatrix}, \quad (2.2.35)$$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \frac{7}{8\tau} + \frac{\sigma^2}{2h^2} & \frac{1}{8\tau} - \frac{\sigma^2}{2h^2} & & & & \\ \frac{1}{8\tau} - \frac{\sigma^2}{2h^2} & \frac{7}{8\tau} + \frac{\sigma^2}{2h^2} & & & & \\ & & \frac{1}{4\tau} + \frac{\sigma^2}{h^2} & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \frac{1}{8\tau} - \frac{\sigma^2}{2h^2} & \\ & & & & \frac{1}{8\tau} - \frac{\sigma^2}{2h^2} & \frac{7}{8\tau} + \frac{\sigma^2}{2h^2} \end{bmatrix}. \quad (2.2.36)$$

Таким образом, задачу (2.1.9) для сеточных значений функций можно переписать в дискретном виде

$$\begin{cases} \inf_{\alpha} J^h(m^h, \alpha^h), \\ \mathfrak{A}m_{\cdot, \cdot}^h = \mathfrak{F}m_{0, \cdot}^h. \end{cases} \quad (2.2.37)$$

Чтобы сформулировать дискретную задачу оптимального управления, введем в рассмотрение сеточную функцию $v_{\cdot, \cdot}^h = \left\{ v_{k, i+1/2}^h \right\}_{i=0, \dots, N-1}^{k=0, \dots, M}$. Умножим k -тый компонент (2.2.34) на $\tau v_{k, \cdot}^h$ и просуммируем по k с учетом обозначения (2.2.31):

$$\begin{aligned} \tau \sum_{k=1}^M (\langle \mathbb{A}m_{k, \cdot}^h, v_{k, \cdot}^h \rangle - \langle \mathbb{B}_k m_{k-1, \cdot}^h, v_{k, \cdot}^h \rangle) &= - \langle m_{0, \cdot}^h, \mathbb{A}v_{0, \cdot}^h \rangle \tau + \\ &+ \langle m_{M, \cdot}^h, \mathbb{A}v_{M, \cdot}^h \rangle \tau + \tau \sum_{k=0}^{M-1} (\langle m_{k, \cdot}^h, \mathbb{A}v_{k, \cdot}^h \rangle - \langle m_{k, \cdot}^h, \mathbb{B}_{k+1}^* v_{k+1, \cdot}^h \rangle). \end{aligned} \quad (2.2.38)$$

Теперь перепишем Лагранжиан задачи (2.1.10) с учетом этого равенства:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}^h(m^h, \alpha^h, v^h) &:= J^h(m^h, \alpha^h) + \langle m_{0, \cdot}^h, \mathbb{A}v_{0, \cdot}^h \rangle \tau - \\ &- \langle m_{M, \cdot}^h, \mathbb{A}v_{M, \cdot}^h \rangle \tau - \sum_{k=0}^{M-1} (\langle m_{k, \cdot}^h, \mathbb{A}v_{k, \cdot}^h \rangle - \langle m_{k, \cdot}^h, \mathbb{B}_{k+1}^* v_{k+1, \cdot}^h \rangle) \tau. \end{aligned} \quad (2.2.39)$$

Здесь $\mathbb{B}_k^* = \mathbb{B}_k^T$ означает матрицу, сопряженную к \mathbb{B}_k . Тогда задача о поиске седловой точки (1.1.8) в дискретном случае принимает вид

$$\inf_{(m^h, \alpha^h)} \sup_{v^h} \mathfrak{S}^h(m^h, \alpha^h, v^h). \quad (2.2.40)$$

В такой алгебраической форме дифференцирование дискретного Лагранжиана (2.2.39) по отдельным компонентам не составляет труда. Тогда дискретный аналог уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана (2.1.11) после дифференцирования (2.2.39) имеет вид

$$\mathbb{A}v_{k,\cdot}^h = \mathbb{B}_{k+1}^* v_{k+1,\cdot}^h + z_{k,\cdot}^h \quad \forall k = M-1, M-2, \dots, 0, \quad (2.2.41)$$

где

$$z_{k,i+1/2}^h = b \left(t_k, x_{i+1/2}, m_{k,i+1/2}^h \right) + r_{k,i+1/2}^h, \quad (2.2.42)$$

$$v_{k,-1/2}^h = v_{k,1/2}^h, \quad v_{k,N+1/2}^h = v_{k,N-1/2}^h \quad (2.2.43)$$

$\forall k = M-1, \dots, 0 \quad \forall i = 0, \dots, N-1$. Дифференцирование Лагранжиана по компонентам $m_{M,\cdot}^h$ приводит к уравнению $\mathbb{A}v_{M,\cdot}^h = \mathbf{0}$. Отметим, что \mathbb{A} – матрица со строгим диагональным преобладанием, поэтому она невырождена. Поэтому

$$v_{M,\cdot}^h = \mathbf{0}. \quad (2.2.44)$$

Выражение (2.2.41) перепишем в матричном виде

$$\mathfrak{B}v_{\cdot,\cdot}^h = \begin{bmatrix} \mathbb{A} & -\mathbb{B}_1^* & & & \\ & \mathbb{A} & -\mathbb{B}_2^* & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \mathbb{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{0,\cdot}^h \\ v_{1,\cdot}^h \\ \vdots \\ v_{M-1,\cdot}^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{0,\cdot}^h \\ z_{1,\cdot}^h \\ \vdots \\ z_{M-1,\cdot}^h \end{bmatrix} \quad (2.2.45)$$

относительно векторов $v_{k,\cdot}^h = \left(v_{k,1/2}^h, \dots, v_{k,N-1/2}^h \right)^T$, $z_{k,\cdot}^h = \left(z_{k,1/2}^h, \dots, z_{k,N-1/2}^h \right)^T$. Тогда разностный аналог для уравнения (2.1.12) принимает вид

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{8\tau} - \frac{\sigma^2}{2h^2} \right) v_{k,i-1/2}^h + \left(\frac{3}{4\tau} + \frac{\sigma^2}{h^2} \right) v_{k,i+1/2}^h + \\ & + \left(\frac{1}{8\tau} - \frac{\sigma^2}{2h^2} \right) v_{k,i+3/2}^h = \gamma_{k+1,i-1/2}^3 v_{k+1,i-1/2}^h + \\ & + \gamma_{k+1,i+1/2}^2 v_{k+1,i+1/2}^h + \gamma_{k+1,i+3/2}^1 v_{k+1,i+3/2}^h + \\ & + z_{k,i+1/2}^h \quad \forall k = M-1, \dots, 0 \quad \forall i = 0, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (2.2.46)$$

с «начальным» условием (2.2.44) и краевыми условиями (2.2.43).

Для условий (2.1.14) получается следующий сеточный аналог в точке (t_k, x_i) :

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} (\alpha_{k,i}^h, t_k, x_i) + \frac{v_{k,i+1/2}^h - v_{k,i-1/2}^h}{h} = 0 \quad (2.2.47)$$

$\forall k = 1, \dots, M \forall i = 1, \dots, N - 1$. Он дает дискретный аналог для (2.1.15):

$$\alpha^h (t_k, x_i) = \theta \left(\left(v_{k,i+1/2}^h - v_{k,i-1/2}^h \right) / h \right) \quad (2.2.48)$$

$\forall k = 1, \dots, M \forall i = 1, \dots, N - 1$.

Замечание 3. При фиксированных k и α_{\cdot} задача (2.2.23) – (2.2.25) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений с M -матрицей благодаря диагональному преобладанию ее элементов по столбцам. А для задачи (2.2.24), (2.2.42) – (2.2.44), (2.2.46) при фиксированных k , m_{\cdot} и α_{\cdot} это же свойство матрицы системы линейных алгебраических уравнений достигается благодаря диагональному преобладанию элементов по строкам. Поэтому для обоснования устойчивости схемы для уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана более естественно использовать дискретный аналог $L_{\infty}(0,1)$ - нормы:

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |v^h(t_k, x)| = \|v^h(t_k, \cdot)\|_{\infty, h} := \max_{0 \leq i \leq N-1} |v_{k,i+1/2}^h|.$$

Свойства M -матриц обеспечивают устойчивость разностного решения на каждом шаге по времени. Покажем, что выполняются следующие оценки.

Теорема 1. *Рассмотрим систему уравнений (2.2.23) с некоторой погрешностью $\left\{ \varepsilon_{k,i+1/2}^h \right\}_{i=0, \dots, N-1}^{k=0, \dots, M}$ в правой части:*

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{8\tau} - \frac{\sigma^2}{2h^2} \right) m_{k,i-1/2}^h + \left(\frac{3}{4\tau} + \frac{\sigma^2}{h^2} \right) m_{k,i+1/2}^h + \\ & + \left(\frac{1}{8\tau} - \frac{\sigma^2}{2h^2} \right) m_{k,i+3/2}^h = \gamma_{k,i+1/2}^1 m_{k-1,i-1/2}^h + \gamma_{k,i+1/2}^2 m_{k,i+1/2}^h + \\ & + \gamma_{k,i+1/2}^3 m_{k-1,i+3/2}^h + \varepsilon_{k,i+1/2}^h \quad \forall i = 0, \dots, N - 1 \quad \forall k = 1, \dots, M \end{aligned} \quad (2.2.49)$$

с начальными и краевыми условиями (2.2.25) и (2.2.3). Тогда при выполнении условий (2.2.6), (2.2.26) для решения задачи (2.2.23), (2.2.25), (2.2.3) справедлива оценка

$$\max_{0 \leq k \leq M} \|m^h(t_k, \cdot)\|_{1,h} \leq \|m_0(\cdot)\|_{1,h} + T \max_{0 \leq k \leq M} \|\varepsilon^h(t_k, \cdot)\|_{1,h}. \quad (2.2.50)$$

Доказательство. Ключевым свойством коэффициентов схемы (2.2.24), (2.2.25) и (2.2.49) является равенство

$$\gamma_{k,i+3/2}^1 + \gamma_{k,i+1/2}^2 + \gamma_{k,i-1/2}^3 = 1/\tau. \quad (2.2.51)$$

Сначала рассмотрим систему (2.2.49), (2.2.25), (2.2.3) с неотрицательными правыми частями $|\varepsilon_{k,i+1/2}^h|$ и начальными значениями $|m_0(x_{i+1/2})|$. Решение такой системы $m^{h,\max}(t_k, \cdot)$ имеет неотрицательные компоненты по аналогии с замечанием 1. Умножим уравнение (2.2.49) на τ и просуммируем по $i = 0, \dots, N-1$. С учетом (2.2.51) получаем равенство

$$\|m^{h,\max}(t_k, \cdot)\|_{1,h} = \|m^{h,\max}(t_{k-1}, \cdot)\|_{1,h} + \tau \|\varepsilon^h(t_k, \cdot)\|_{1,h} \quad (2.2.52)$$

$\forall k = 1, \dots, M$. Использование математической индукции по k приводит к равенству

$$\|m^{h,\max}(t_k, \cdot)\|_{1,h} = \|m_0(\cdot)\|_{1,h} + \tau \sum_{s=1}^k \|\varepsilon^h(t_s, \cdot)\|_{1,h} \quad \forall k = 1, \dots, M. \quad (2.2.53)$$

Для решения $m^h(t_k, \cdot)$ с компонентами $\varepsilon_{k,i+1/2}^h$ и $m_0(x_{i+1/2})$ произвольных знаков справедливо неравенство

$$m^{h,\max}(t_k, x_{i+1/2}) - m^h(t_k, x_{i+1/2}) \geq 0.$$

Оно вытекает из заключения, что при подстановке сеточной функции $m^{h,\max}(t_k, x_{i+1/2}) - m^h(t_k, x_{i+1/2})$ в левую часть системы (2.2.23), (2.2.25), (2.2.3) получается неотрицательная правая часть и, следовательно, неотрицательное решение.

С другой стороны, если рассмотреть систему (2.2.23), (2.2.25), (2.2.3) с неположительными правыми частями $-\left|\varepsilon_{k,i+1/2}^h\right|$ и начальными значениями $-\left|m_0(x_{i+1/2})\right|$, то мы получим решение $-m^{h,\max}(t_k,\cdot)$. Ясно, что при подстановке разности $m^h(t_k,x_{i+1/2}) - (-m^{h,\max}(t_k,x_{i+1/2}))$ в левую часть системы (2.2.23), (2.2.25), (2.2.3) ее правые части будут содержать только неотрицательные значения. Поэтому

$$m^h(t_k,x_{i+1/2}) + m^{h,\max}(t_k,x_{i+1/2}) \geq 0.$$

В итоге получаем покомпонентное неравенство

$$\left|m^h(t_k,x_{i+1/2})\right| \leq m^{h,\max}(t_k,x_{i+1/2}).$$

Тогда из (2.2.53) вытекает оценка

$$\|m^h(t_k,\cdot)\|_{1,h} \leq \|m^{h,\max}(t_k,\cdot)\|_{1,h} = \|m_0(\cdot)\|_{1,h} + \tau \sum_{s=1}^k \|\varepsilon^h(t_k,\cdot)\|_{1,h}$$

$\forall k = 1, \dots, M$. Беря максимум от обеих частей этого неравенства, получаем (2.2.50). \square

Теорема 2. При выполнении условий (2.2.6), (2.2.26) для решения задачи (2.2.41) – (2.2.44) справедлива оценка

$$\max_{0 \leq k \leq M} \|v^h(t_k,\cdot)\|_{\infty,h} \leq T \max_{0 \leq k \leq M} \|z^h(t_k,\cdot)\|_{\infty,h}. \quad (2.2.54)$$

Доказательство. Пусть $|v^h(t_k,x_{i+1/2})|$ – максимальная по модулю компонента на слое t_k , так что $|v^h(t_k,x_{i+1/2})| = \|v^h(t_k,\cdot)\|_{\infty,h}$. Снова используем ключевое свойство коэффициентов разложения (2.2.51) для получения неравенства

$$\begin{aligned} \|v^h(t_k,\cdot)\|_{\infty,h} &= |v^h(t_k,x_{i+1/2})| \leq \\ &\leq \|v^h(t_{k+1},\cdot)\|_{\infty,h} + \tau \|z^h(t_k,\cdot)\|_{\infty,h} \quad \forall k = M-1, M-2, \dots, 0. \end{aligned} \quad (2.2.55)$$

Использование математической индукции по k приводит к оценке

$$\|v^h(t_k, \cdot)\|_{\infty, h} \leq (M - k) \tau \|z^h(t_k, \cdot)\|_{\infty, h} \quad (2.2.56)$$

$\forall k = M - 1, M - 2, \dots, 0$. Беря максимум по от обеих частей неравенства (2.2.51), получаем (2.2.54). \square

Отметим, что предложенные разностные схемы приводят к СЛАУ с трехдиагональными матрицами с диагональным преобладанием, для решения которых эффективно применяется метод прогонки.

2.2.3 Вычислительный алгоритм для задачи оптимизации с неквадратичным контролем

Решение этой задачи «среднего поля» сведем к следующему итерационному алгоритму. Предположим, что некоторое начальное выражение для $\alpha_{\cdot, \cdot}^h$ и начальное распределение агентов m_0^h известны. Например, для начала мы можем принять $\alpha_{\cdot, \cdot}^h = \mathbf{0}$. После этого мы можем получить итерационное приближение для $m_{\cdot, \cdot}^h$ с помощью (2.2.3), (2.2.23) – (2.2.25), а для $J^h(m^h, \alpha^h)$ – с помощью (2.2.29), (2.2.30). Полученная тройка $\alpha_{\cdot, \cdot}^h, m_{\cdot, \cdot}^h, J^h(m_{\cdot, \cdot}^h, \alpha_{\cdot, \cdot}^h)$ является начальным приближением для следующего итерационного алгоритма. Здесь и далее знаком \sim будем помечать приближенное итерационное выражение сеточной функции.

Итерационный алгоритм решения ИСП с неквадратичным контролем

1. Получить значения $\tilde{v}_{\cdot, \cdot}^h, \forall k = M - 1, M - 2, \dots, 0$ согласно (2.2.42) – (2.2.44), (2.2.46);
2. Получить $\tilde{\alpha}_{k, \cdot}^h$ согласно (2.2.47), (2.2.48) для $k = 0, \dots, M - 1$;
3. Получить $\tilde{m}_{\cdot, \cdot}^h$ согласно (2.2.3), (2.2.23) – (2.2.25);
4. Получить $J^h(\tilde{m}^h, \tilde{\alpha}^h)$ согласно (2.2.29), (2.2.30);
5. Если $|J^h(m^h, \alpha^h) - J^h(\tilde{m}^h, \tilde{\alpha}^h)| > Tol$, то $\alpha_{\cdot, \cdot}^h := \tilde{\alpha}_{\cdot, \cdot}^h; m_{\cdot, \cdot}^h := \tilde{m}_{\cdot, \cdot}^h$; перейти к шагу 1;

6. Выбрать $\tilde{\alpha}_{\cdot,\cdot}^h$ и $\tilde{m}_{\cdot,\cdot}^h$ как приближенное решение (2.2.40).

Покажем, что (2.2.47) обеспечивает оптимальное условие для минимизации функционала стоимости (2.2.32). Введем в рассмотрение две сеточных функции контроля α^h и её приближение $\tilde{\alpha}^h$. Обозначим r^h, \tilde{r}^h и решения m^h, \tilde{m}^h задачи (2.2.34) с матрицами \mathbb{B}_i и $\tilde{\mathbb{B}}_i$, соответственно. Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} J^h(\tilde{m}^h, \tilde{\alpha}^h) - J^h(m^h, \alpha^h) &= \sum_{k=0}^{M-1} \langle \tilde{r}_{k,\cdot}^h - r_{k,\cdot}^h, \tilde{m}_{k,\cdot}^h \rangle \tau + \\ &+ \sum_{k=0}^{M-1} \langle r_{k,\cdot}^h, \tilde{m}_{k,\cdot}^h - m_{k,\cdot}^h \rangle \tau + \sum_{k=0}^{M-1} (\langle \mathbb{A}v_{k+1,\cdot}^h, \tilde{m}_{k+1,\cdot}^h - m_{k+1,\cdot}^h \rangle - \\ &- \langle \mathbb{A}v_{k,\cdot}^h, \tilde{m}_{k,\cdot}^h - m_{k,\cdot}^h \rangle) \tau + \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{N-1} (\tilde{g}_{k,i+1/2}^h - g_{k,i+1/2}^h) h \tau. \end{aligned} \quad (2.2.57)$$

Вогнутость функции g относительно m в дискретном случае означает, что

$$\tilde{g}_{k,\cdot}^h - g_{k,\cdot}^h \leq (\tilde{m}_{k,\cdot}^h - m_{k,\cdot}^h) b_{k,\cdot}^h.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} J^h(\tilde{m}^h, \tilde{\alpha}^h) - J^h(m^h, \alpha^h) &\leq \sum_{k=0}^{M-1} (\langle \tilde{r}_{k,\cdot}^h - r_{k,\cdot}^h, \tilde{m}_{k,\cdot}^h \rangle \tau + \\ &+ \langle -\mathbb{A}v_{k,\cdot}^h + r_{k,\cdot}^h + b_{k,\cdot}^h, \tilde{m}_{k,\cdot}^h - m_{k,\cdot}^h \rangle \tau + \\ &+ \langle v_{k+1,\cdot}^h, \tilde{\mathbb{B}}_{k+1} \tilde{m}_{k,\cdot}^h - \mathbb{B}_{k+1} m_{k,\cdot}^h \rangle \tau) = \sum_{k=0}^{M-1} (\langle \tilde{r}_{k,\cdot}^h - r_{k,\cdot}^h, \tilde{m}_{k,\cdot}^h \rangle + \\ &+ \langle v_{k+1,\cdot}^h, (\tilde{\mathbb{B}}_{k+1} - \mathbb{B}_{k+1}) \tilde{m}_{k,\cdot}^h \rangle) \tau, \end{aligned} \quad (2.2.58)$$

где

$$\begin{aligned} \langle \tilde{r}_{k,\cdot}^h - r_{k,\cdot}^h, \tilde{m}_{k,\cdot}^h \rangle &= h \sum_{i=0}^{N-1} (\tilde{r}_{k,i+1/2}^h - r_{k,i+1/2}^h) \tilde{m}_{k,i+1/2}^h = \\ &= \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (\tilde{m}_{k,i-1/2}^h + \tilde{m}_{k,i+1/2}^h) (F(\tilde{\alpha}_{k+1,i}^h, t_k, x_i) - F(\alpha_{k+1,i}^h, t_k, x_i)); \end{aligned} \quad (2.2.59)$$

$$\begin{aligned}
& \left\langle v_{k+1,\cdot}^h \left(\tilde{\mathbb{B}}_{k+1} - \mathbb{B}_{k+1} \right) \tilde{m}_{k,\cdot}^h \right\rangle = \\
& = h \sum_{i=0}^{N-1} v_{k+1,i+1/2}^h \left(\left(\tilde{\gamma}_{k+1,i+1/2}^1 - \gamma_{k+1,i+1/2}^1 \right) \tilde{m}_{k,i-1/2}^h + \right. \\
& + \left(\tilde{\gamma}_{k+1,i+1/2}^2 - \gamma_{k+1,i+1/2}^2 \right) \tilde{m}_{k,i+1/2}^h + \\
& + \left. \left(\tilde{\gamma}_{k+1,i+1/2}^3 - \gamma_{k+1,i+1/2}^3 \right) \tilde{m}_{k,i+3/2}^h \right) = \\
& = \frac{h}{8\tau} \sum_{i=1}^{N-1} v_{k+1,i+1/2}^h \tilde{m}_{k,i+1/2}^h \left((3 + 4\tau\tilde{\alpha}_{k+1,i}/h) - (3 + 4\tau\alpha_{k+1,i}/h) \right) + \quad (2.2.60) \\
& + \frac{h}{8\tau} \sum_{i=1}^{N-1} v_{k+1,i-1/2}^h \tilde{m}_{k,i-1/2}^h \left((3 - 4\tau\tilde{\alpha}_{k+1,i}/h) - (3 - 4\tau\alpha_{k+1,i}/h) \right) + \\
& + \frac{h}{8\tau} \sum_{i=1}^{N-1} v_{k+1,i-1/2}^h \tilde{m}_{k,i+1/2}^h \left((1 - 4\tau\tilde{\alpha}_{k+1,i}/h) - (1 - 4\tau\alpha_{k+1,i}/h) \right) + \\
& + \frac{h}{8\tau} \sum_{i=1}^{N-1} v_{k+1,i+1/2}^h \tilde{m}_{k,i-1/2}^h \left((1 + 4\tau\tilde{\alpha}_{k+1,i}/h) - (1 + 4\tau\alpha_{k+1,i}/h) \right).
\end{aligned}$$

Приводя подобные слагаемые в (2.2.58) – (2.2.60), получаем следующее утверждение: для любого $\tilde{\alpha}_{k,i}^h \forall k = 0, \dots, M-1, i = 1, \dots, N-1$

$$\begin{aligned}
& J^h(\tilde{m}^h, \tilde{\alpha}^h) - J^h(m^h, \alpha^h) \leq \\
& \leq \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{i=1}^{N-1} \left(\gamma_{k,i}^h \left(F(\tilde{\alpha}_{k+1,i}^h, t_k, x_i) - F(\alpha_{k+1,i}^h, t_k, x_i) \right) + \right. \quad (2.2.61) \\
& \left. + \delta_{k,i}^h (\tilde{\alpha}_{k+1,i}^h - \alpha_{k+1,i}^h) \right)
\end{aligned}$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned}
\gamma_{k,i}^h &= \tau h \left(\tilde{m}_{k,i-1/2}^h + \tilde{m}_{k,i+1/2}^h \right) / 2, \\
\delta_{k,i}^h &= \tau \left(\tilde{m}_{k,i-1/2}^h + \tilde{m}_{k,i+1/2}^h \right) \left(v_{k+1,i+1/2}^h - v_{k+1,i-1/2}^h \right) / 2.
\end{aligned}$$

Минимизируя правую часть (2.2.61), мы получаем равенства

$$\frac{\partial F(\tilde{\alpha}_{k,i}^h, t_k, x_i)}{\partial \alpha} + \frac{\delta_{k,i}^h}{\gamma_{k,i}^h} = 0 \quad \forall k = 1, \dots, M, \quad (2.2.62)$$

которые в точности совпадают с (2.2.47). Таким образом, условия (2.2.47), (2.2.48) действительно доставляют минимум функционалу (2.2.32) на каждой итерации.

2.3 Вычислительный эксперимент для ИСП с неквадратичным контролем

2.3.1 Постановка модельной задачи

Для тестирования построенного численного алгоритма решения задачи «среднего поля» с неквадратичным контролем используем модель экономического взаимодействия, предложенную в [83]. Здесь рассматривается континуум агентов-потребителей, где каждый агент представляет собой домохозяйство, решающее вопрос об отоплении, имея выбор между затратами на установку и содержание теплоизоляции помещения или дополнительными затратами на электричество. Пусть x – положение агента (домохозяйства), которое характеризуется уровнем теплоизоляции: $x = 0$ соответствует домохозяйству с тонкими стенками без каких-либо изоляционных характеристик; а $x = 1$ означает использование всех возможных технологий теплоизоляции. Будем также считать, что все агенты склонны выбирать наиболее выгодную стратегию, но имеют разные уровни теплоизоляции на начальный момент времени. В соответствии с подходом ИСП, с одной стороны, учитывается, что действие отдельно взятого агента не повлияет на глобальную плотность их распределения, а с другой стороны, каждый агент реализует рациональные намерения относительно локальной плотности всех агентов. Тогда поиск решения задачи приводит к равновесию по Нэшу. Будем считать также, что на стратегию агентов оказывают влияние внешние эффекты (повышение или понижение цены, расположение агента, сезонность и т.д.). Коэффициент σ^2 в данном слу-

чае может быть интерпретирован как составляющая климата, например, частые изменения температуры в регионе, как проявление рекламы или уровень текущего снабжения или развития технологий [83]. Функция стоимости реализации стратегии $F(\alpha, t, x)$ имеет смысл стоимости перехода из одного состояния в другое, что, в общем случае, под влиянием внешних факторов может представлять собой разрывную функцию. Согласно [83] будем считать, что расходы на установку и содержание теплоизоляции изменяются по закону

$$w(x, m) = \frac{c_0 x}{c_1 + c_2 m}. \quad (2.3.1)$$

Здесь c_0, c_1, c_2 – некоторые положительные константы. Расходы традиционно растут с ростом x и уменьшаются с ростом плотности m , что задает явный стимул для агента выбрать уровень теплоизоляции в соответствии с распределением плотности всех игроков. Положим, что платеж за отопление вычисляется по закону

$$f(t, x) = p(t) (1 - c_3 x). \quad (2.3.2)$$

Здесь $p(t)$ – цена за электроэнергию, которая может зависеть от времени (сезона, например), а $c_3 \in [0, 1]$ – положительная константа. Множитель $(1 - c_3 x)$ означает учетную ставку для текущего положения агента.

Выразим платеж за отопление и стоимость теплоизоляции уровня x на момент времени t с плотностью агентов m в форме

$$g(t, x, m) := (f(t, x) + w(x, m)) m. \quad (2.3.3)$$

Тогда производной $\partial g(t, x, m) / \partial m$ соответствует выражение

$$b(t, x, m) := \frac{\partial g}{\partial m}(t, x, m) = f(t, x) + w(x, m) + m \frac{\partial w}{\partial m}(x, m). \quad (2.3.4)$$

Покажем, что выбранная функция $g(t, x, m)$ удовлетворяет условию (2.1.5). Введем в рассмотрение два различных значения \bar{m} и \tilde{m} и используем раз-

ложение в ряд Тейлора для $g(t, x, \tilde{m})$ относительно \bar{m}

$$g(t, x, \tilde{m}) = g(t, x, \bar{m}) + (\tilde{m} - \bar{m}) \left(f(t, x) + w(x, \bar{m}) + \bar{m} \frac{\partial w}{\partial m}(x, \bar{m}) \right) + \frac{(\tilde{m} - \bar{m})^2}{2} \left(2 \frac{\partial w}{\partial m}(x, \zeta) + \zeta \frac{\partial^2 w}{\partial m^2}(x, \zeta) \right),$$

где точка $\zeta > 0$ лежит между \bar{m} и \tilde{m} . Последнее слагаемое неположительно $\forall x \in [0, 1]$, поскольку

$$2 \frac{\partial w}{\partial m}(x, \zeta) + \zeta \frac{\partial^2 w}{\partial m^2}(x, \zeta) = \frac{-2_{012}x}{(c_1 + c_2\zeta)^3}.$$

Следовательно, выполняется условие (2.1.5).

2.3.2 Численное моделирование

В качестве $F(\alpha, t, x)$ выберем следующую кусочно-непрерывную функцию, удовлетворяющую условиям (2.1.6) – (2.1.8):

$$F(\alpha, t, x) = \begin{cases} \alpha^2, & 0 \leq t < T/2, \\ \alpha^4, & T/2 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (2.3.5)$$

Такой вид функции $F(\alpha, t, x)$ физически означает, что затраты на переход агента из одного состояния в другое зависят от сезона, в который осуществляется переход, и от текущего состояния агента. С учетом (2.1.14), (2.1.15) функцию $\alpha(t, x)$ можно записать в явном виде:

$$\alpha(t, x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x}, & 0 \leq t < T/2, \\ -\sqrt[3]{\frac{1}{4} \frac{\partial v}{\partial x}}, & T/2 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (2.3.6)$$

Для вычислительного эксперимента выберем следующие значения параметров задачи, сформулированной в разделе 2.3.1:

$$T = 1, N = M = 100, c_0 = 1, c_1 = 0.1, c_2 = 1, c_3 = 0.8, \sigma^2 = 0.14. \quad (2.3.7)$$

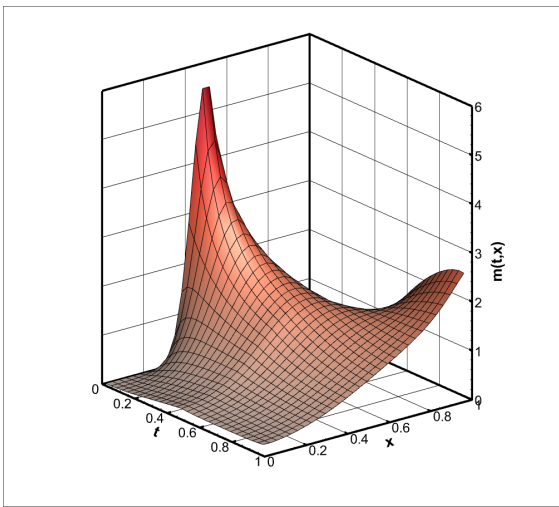
Будем считать, что в начальный момент времени масса агентов $m_0(x)$ распределена согласно формуле

$$m_0(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-x_c)^2}{2\sigma^2}\right) + a(x-x_c)^2. \quad (2.3.8)$$

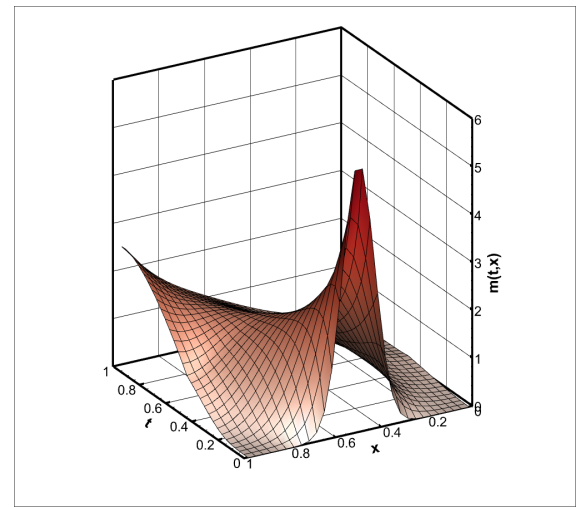
Здесь первое слагаемое представляет собой плотность нормального распределения с параметрами $x_c = 0.5$, $2\sigma_c^2 = 0.01$. Второе слагаемое обеспечивает выполнение граничных условий (2.3.1) на нулевом слое по времени с константой

$$a = \frac{1}{2\sigma_c^3\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_c^2}{2\sigma_c^2}\right). \quad (2.3.9)$$

На рисунке 2.2 показан вид функции $m(t, x)$ на этапе установления итеративного процесса при фиксированной цене на электроэнергию $p(t) \equiv 1$. В таблице 2.1 представлена история сходимости итерационного процесса. Отметим, что первый шаг итерации дает наибольший вклад в минимизацию функционала стоимости (2.1.4).



а)



б)

Рисунок 2.2 — Распределение плотности агентов $m(t, x)$ после сходимости итерационного процесса при $p(t) \equiv 1$ с разных ракурсов

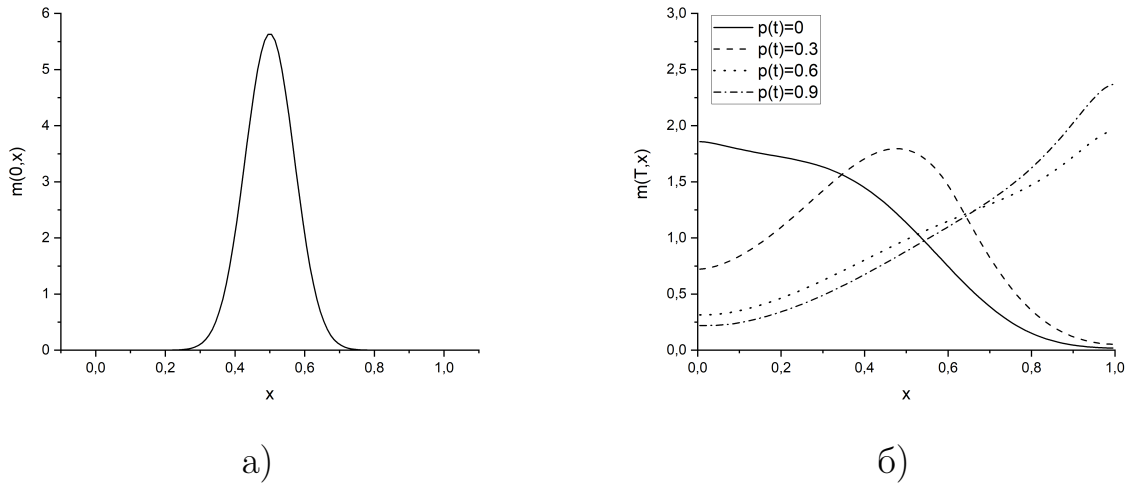


Рисунок 2.3 — Начальное распределение плотности агентов при $t = 0$ (а) и распределение агентов при $t = T$ и разной ценовой политике (б)

Таблица 2.1

История сходимости итеративного процесса для задачи с неквадратичным управлением в виде (2.3.5) при $p(t) \equiv 1$

Номер итерации s	J_s^h	$\Delta_s = J_s^h - J_{s-1}^h $	Δ_s/Δ_{s-1}
0	1.02358274		
1	0.97688210	0.0467006	
2	0.97589839	0.0009837	0.0210640
3	0.97586924	0.0000292	0.0296330

При выбранной фиксированной цене вычислительный эксперимент показывает, что пик распределения агентов в момент времени $t = T$ приходится на $x = 1$; это указывает на то, что установка и содержание теплоизоляции обходится дешевле, чем отопление электричеством. На рисунке 2.3 приведены результаты вычислительных экспериментов для разной ценовой политики в момент времени $t = T$.

Из рисунка 2.3 видно, что при более высоких ценах на электроэнергию агенты больше стремятся к теплоизоляции помещения. При этом игроки в своей массе поступают одинаково. Этот эффект можно объяснить тем, что расход на установку и содержание изоляции снижается по мере увеличения (выпуска) продаж продукции согласно (2.3.1) (эффект масштаба продажи и производства [100]). Это заставляет домашние хозяйства стремиться к выбору одинаковых технологий и соответственно уровня изоляции.

Для численной проверки порядка сходимости задачи (2.3.7) при стремлении шагов h и τ в нуль рассмотрим последовательность приближенных решений $m^{h_n}, v^{h_n}, J^{h_n}$ с набором параметров сеток

$$h_n = h/2^n \quad \tau_n = \tau/4^n, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4.$$

При $n = 0$ положим $h_0 = \tau_0 = 0.1$. Поскольку точное решение задачи оптимизации не известно, будем использовать правило Рунге для оценки погрешности [32, 99]. В соответствии со вторым порядком аппроксимации по пространству и первым по времени, предположим сходимость приближенных решений в следующем смысле:

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq k \leq M} \|m(t_k, \cdot) - m^{h_n}(t_k, \cdot)\|_{1,h} &\approx c_m (\tau_n + h_n^2), \\ \max_{0 \leq k \leq M} \|v(t_k, \cdot) - v^{h_n}(t_k, \cdot)\|_{\infty,h} &\approx c_v (\tau_n + h_n^2), \\ |J - J^{h_n}| &\approx c_J (\tau_n + h_n^2). \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Тогда разность двух последовательных приближенных решений с таким же набором параметров по правилу Рунге [99] должна давать утроенную ошибку:

$$\begin{aligned} \delta_{m,n} &= \max_{0 \leq k \leq M} \|m^{h_{n-1}}(t_k, \cdot) - m^{h_n}(t_k, \cdot)\|_{1,h} \approx 3c_m (\tau_n + h_n^2), \\ \delta_{v,n} &= \max_{0 \leq k \leq M} \|v^{h_{n-1}}(t_k, \cdot) - v^{h_n}(t_k, \cdot)\|_{\infty,h} \approx 3c_v (\tau_n + h_n^2), \\ \delta_{J,n} &= |J^{h_{n-1}} - J^{h_n}| \approx 3c_J (\tau_n + h_n^2). \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Значения $\delta_{m,n}, \delta_{v,n}, \delta_{J,n}$, а также $\tilde{c}_{m,n} = \delta_{m,n}/3 (\tau_n + h_n^2)$, $\tilde{c}_{v,n} = \delta_{v,n}/3 (\tau_n + h_n^2)$, $\tilde{c}_{J,n} = \delta_{J,n}/3 (\tau_n + h_n^2)$ представлены в таблице 2.2 и косвенно подтверждают выполнение приближенных равенств (2.3.10) и сходимость задачи с порядком $(\tau + h^2)$.

Таким образом, модели ИСП и представленный вычислительный алгоритм действительно позволяют моделировать некоторые экономические ситуации, прогнозировать динамику поведения агентов и параметры его регулирования.

Таблица 2.2

Сходимость последовательности приближенных решений для задачи с неквадратичным управлением (2.3.5) при уменьшении шагов разностной сетки

n	$\delta_{m,n}$	$\tilde{c}_{m,n}$	$\delta_{v,n}$	$\tilde{c}_{v,n}$	$\delta_{J,n}$	$\tilde{c}_{J,n}$
1	0.1411493	0.4277252	0.4368672	1.3238401	0.0095308	0.0288813
2	0.0331746	0.4021167	0.0702806	0.8518859	0.0008255	0.0100060
3	0.0081443	0.3948771	0.0116848	0.5665348	0.0000740	0.0035895
4	0.0020189	0.3921245	0.0024757	0.4801297	0.0000182	0.0035308

Интересно отметить, что согласно (2.1.15) для функции управления $F(\alpha, t, x)$ стратегия α является передаточным звеном изменения цены на её реализацию $\partial v / \partial x$. Это вызывает интерес к рассмотрению $F(\alpha, t, x)$ как функции, непосредственно зависящей от $q = \partial v / \partial x$, а не от α . Это позволяет избежать некоторых неоднозначных ситуаций. Например, рассмотрим следующую ситуацию в предыдущей задаче. Положим

$$F(\alpha, t, x) = \begin{cases} \alpha^4/4, & q < -0.2, \\ \alpha^2/2, & q \geq -0.2. \end{cases} \quad (2.3.12)$$

Принимая во внимание (2.1.15), исключим параметр q :

$$F(\alpha, t, x) = \begin{cases} \alpha^4/4, & \alpha > (0.2)^{1/3}, \\ \alpha^2/2, & \alpha \leq 0.2. \end{cases} \quad (2.3.13)$$

В этом случае $F(\alpha, t, x)$ имеет вид, представленный на рисунке 2.4(а). С методической точки зрения такой вид функции означает, что для некоторого фрагмента состояний (t, x) управление не зависит от стратегии, выбранной игроком. Но в соответствии с нашим алгоритмом он в этот фрагмент и не может попасть. Предположим, что в начальный момент времени агенты распределены также, как в предыдущем случае. На рисунке 2.5 показан вид функции $m(t, x)$ после установления итеративного процесса для фиксированной цены на электроэнергию $p(t) \equiv 1$.

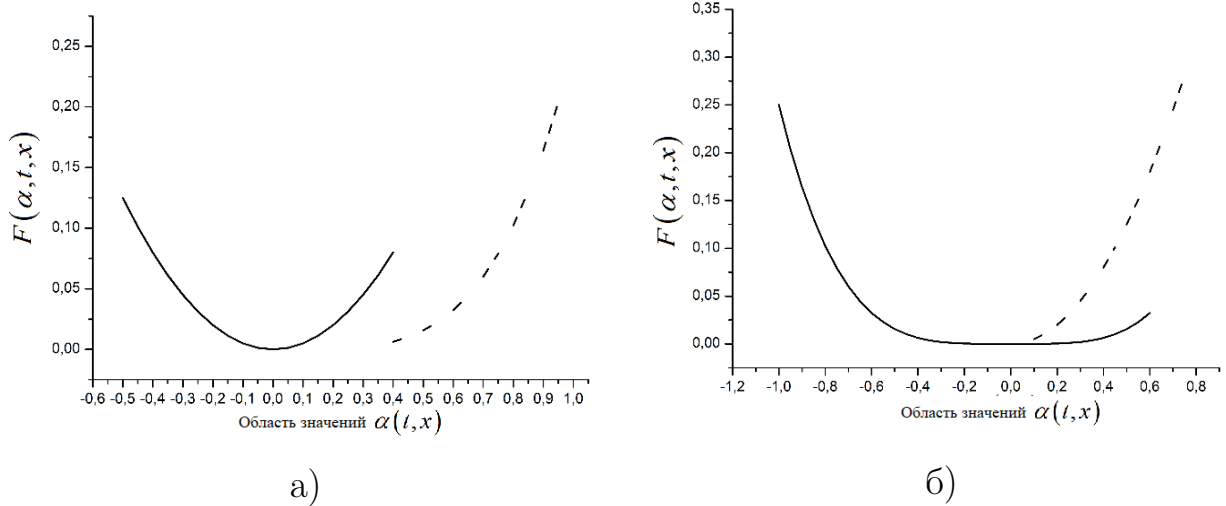


Рисунок 2.4 — Вид функции $F(\alpha, t, x)$ в зависимости от α в соответствии с (2.3.13) (а) и (2.3.15) (б)

Теперь рассмотрим другой вариант. Положим

$$F(\alpha, t, x) = \begin{cases} \alpha^2/2 & , q < -0.2, \\ \alpha^4/4 & , q \geq -0.2. \end{cases} \quad (2.3.14)$$

Исключим параметр q из (2.3.14):

$$F(\alpha, t, x) = \begin{cases} \alpha^2/2 & , \alpha > 0.2, \\ \alpha^4/4 & , \alpha \leq (0.2)^{1/3}. \end{cases} \quad (2.3.15)$$

Вид функции $F(\alpha, t, x)$ в соответствии с (2.3.15) изображен на рисунке 2.4(б). С методической точки зрения такой вид функции означает, что для некоторых состояний (t, x) игрок может иметь две разных альтернативных стратегии. В этом случае выбор оптимальной стратегии будет определяться величиной параметра q , определяющего рост затрат на реализацию выбранной стратегии. Это в действительности и происходит путем однозначного выбора q в нашем алгоритме. Распределение агентов для этого случая после сходимости итерационного процесса будет иметь вид, представленный на рисунке 2.6.

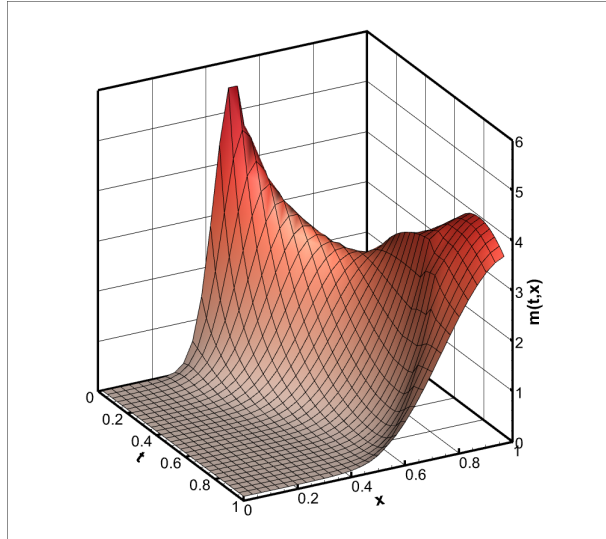


Рисунок 2.5 — Распределение плотности агентов после сходимости итерационного процесса в соответствии с (2.3.13)

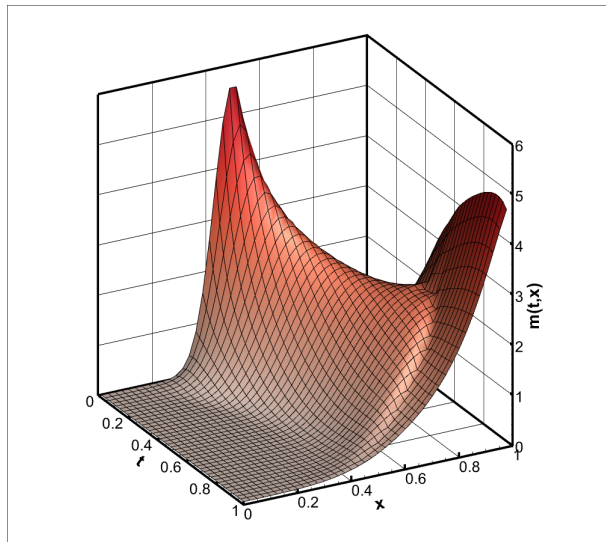


Рисунок 2.6 — Распределение плотности агентов после сходимости итерационного процесса в соответствии с (2.3.15)

Из рисунков 2.5 и 2.6 видно, что, как и в предыдущем случае, при выбранной цене за электроэнергию, вычислительный эксперимент показывает, что пик распределения агентов на горизонте времени $t = T$ приходится на $x = 1$. Однако характер поведения функции существенно различается в зависимости от выбора функции $F(\alpha, t, x)$.

Истории сходимости итерационных процессов для ИСП с неквадратичным управлением (2.3.13), (2.3.15) приведены в таблице 2.3.

Таблица 2.3

История сходимости итеративного процесса для задачи с неквадратичным управлением в соответствии с (2.3.13) и (2.3.15) при $p(t) \equiv 1$

Итерация s	$F(\alpha, t, x)$ согласно (2.3.13)		$F(\alpha, t, x)$ согласно (2.3.15)	
	J_s^h	$\Delta_s = J_s^h - J_{s-1}^h $	J_s^h	$\Delta_s = J_s^h - J_{s-1}^h $
0	1.02358274		1.02358274	
1	0.87904761	0.14453513	0.94950242	0.07408032
2	0.85714057	0.02190704	0.94649911	0.00300332
3	0.85353491	0.00360566	0.94508068	0.00141843
4	0.85226520	0.00126971	0.94345089	0.00162979
5	0.85152027	0.00074492	0.94229260	0.00115829
6			0.94185795	0.00043465

Таким образом, выбор функции $F(\alpha, t, x)$ существенно влияет на характер финального распределения агентов. А неправильный выбор функции F при моделировании экономических ситуаций может повлечь значительные расхождения расчетных результатов с наблюдаемыми.

2.4 Выводы по главе 2

Во второй главе продемонстрирована возможность применения подхода ИСП к оптимизационным задачам с неквадратичным контролем и поиску их численного решения в одномерном (по пространству) случае. Для численного решения таких задач предложено дискретное приближение системы уравнений ИСП, которое наследует основные свойства дифференциальной задачи. Показано, что аппроксимации прямого по времени уравнения Колмогорова и обратного по времени уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана, как и в непрерывном случае, имеют сопряженные операторы, которые являются монотонными в сопряженных векторных пространствах. А дискретная аппроксимация (2.2.47) условий оптимальности

(2.1.15) обеспечивает наискорейший спуск к минимуму дискретного функционала стоимости (2.2.29).

Вычислительный алгоритм применен к экономической игре бесконечного числа агентов при условии выбора альтернативных ресурсов.

Преимущества вычислительного алгоритма, представленного в разделе 2.2.3, можно продемонстрировать путем сравнения с алгоритмом из работы [83] для решения задачи из раздела 2.3.1 в случае функции $F(\alpha, t, x)$ с квадратичной зависимостью от α . В указанной работе предложен алгоритм, основанный на приближении уравнений с помощью явных конечно-разностных схем. В данной диссертационной работе использование полулагранжева подхода к аппроксимации задачи дает неявную схему, но в то же время позволяет избежать существенного ограничения на размер ячейки (условие (2.2.26) вместо $\tau \leq h^2/\sigma^2$, используемого в [83]). Более того, представленные в главе 2 вычислительные схемы для уравнений Фоккера-Планка и Гамильтона-Якоби-Беллмана имеют второй порядок сходимости по пространственному шагу в отличие от схем первого порядка из [83]. Наконец, предложенный в работе подход дает прямое и простое правило монотонной минимизации функционала стоимости, которое ускоряет сходимость алгоритма и позволяет применять алгоритм к задачам с неквадратичным управлением, а построенные разностные схемы приводят к СЛАУ с трехдиагональными матрицами с диагональным преобладанием, для решения которых эффективно применяется метод прогонки.

Глава 3. Конечно-разностное решение задачи планирования достижения заданного состояния

3.1 Постановка задачи планирования

С момента своего появления теория ИСП оказалась довольно гибкой для применения к моделированию множества реальных ситуаций (см., например, [57]). Одна из интересных проблем предложена П.-Л. Лионсом и относится к так называемой задаче планирования («planning problem» в англоязычной литературе), в которой необходимо оптимальным образом довести плотность распределения игроков от начальной конфигурации $m(0, x) = m_0(x)$ до финального, заранее заданного распределения $m(T, x) = m_{\text{tag}}(x)$ на горизонте времени. Первоначально эта задача была сформулирована для уравнений первого порядка, когда в уравнениях (1.1.2) и (1.1.9) $\sigma = 0$. Отсутствие краевых условий (1.1.4) и (1.1.11) компенсируется обращением в нуль функции $\alpha(t, x)$ на концах отрезка. Ввиду первого порядка уравнений такая постановка получила название задачи планирования первого порядка [49]. В отсутствие диффузии такая постановка описывает оптимальную транспортную проблему: с одной стороны, необходимо перевести распределение игроков в заданную целевую функцию, а с другой стороны, игроки оптимизируют свои расходы на интервале $(0, T)$.

В рамках теории ИСП проблема планирования первого порядка представлена П.-Л. Лионсом на курсах в Колледже Франции (College de France) [93]. В частности, когда функции плотности m_0, m_{tag} достаточно гладкие, доказано существование решения. Позднее существование и единственность слабых решений были показаны также в двумерном случае [112, 113]. В этих работах подход, используемый для решения задачи планирования, заключался в том, чтобы оштрафовать финальный платеж $v(T, x)$ так, чтобы принудительно выполнить требуемое ограничение на финальное

распределение агентов. Этот подход также использовался для численного моделирования в [6].

В этом разделе излагается метод численного решения задачи планирования второго порядка, называемой так ввиду второго порядка используемых уравнений (1.1.2) и (1.1.9) при ненулевом коэффициенте σ .

Функционал (1.1.1) дополним функцией $G_T(x, m(T, x))$, используемой для принуждения к заданному состоянию, которую будем рассматривать зависимой только от финального распределения агентов. Таким образом, будем минимизировать функционал стоимости

$$J(m, \alpha) = \int_0^T \int_0^1 (F(\alpha, t, x) m + g(t, x, m)) dx dt + \int_0^1 G_T(x, m(T, x)) dx \quad (3.1.1)$$

снова с ограничением в виде уравнения Фоккера-Планка (2.1.1) – (2.1.3):

$$\frac{\partial m}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \frac{\partial(\alpha m)}{\partial x} = 0 \quad \text{на } (0, T) \times (0, 1) \quad (3.1.2)$$

с начальными и краевыми условиями

$$m(0, x) = m_0(x) > 0 \quad \forall x \in [0, 1], \quad (3.1.3)$$

$$\frac{\partial m}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial m}{\partial x}(t, 1) = 0 \quad \forall t \in (0, T). \quad (3.1.4)$$

Функции $F(\alpha, t, x)$ и $g(t, x, m)$ имеют тот же смысл, что и в разделе 2.1, причем для функции $F(\alpha, t, x)$ также будем требовать выполнения условий (2.1.6) – (2.1.8), а для функции $g(t, x, m)$ – условия (2.1.5). Для функции $G_T(x, \bar{m})$ с числовым параметром $\bar{m} \in \mathbf{R}$ потребуем, чтобы

$$\begin{aligned} G_T(x, \tilde{m}) - G_T(x, \bar{m}) &\leq (\tilde{m} - \bar{m}) \eta(x, \bar{m}) \\ \forall x \in [0, 1] \forall \tilde{m}, \bar{m} \in [0, \infty), \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

где $\eta(x, \bar{m})$ берется в виде $(\partial G_T / \partial \bar{m})(x, \bar{m})$.

Отметим, что для сохранения плотности агентов $m(t, x) \forall t$ полагаем

$$\int_0^1 m_0(x) dx = \int_0^1 m_{\text{tag}}(x) dx. \quad (3.1.6)$$

Проведем формальный вывод уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана без подробного обоснования, поскольку он нам нужен только для «красной нити» при проведении аналогичных, но объемных алгебраических выкладок и преобразований.

Итак, Лагранжиан задачи минимизации функционала (3.1.1) с ограничениями (3.1.2) – (3.1.4) записывается по аналогии с выводом (2.1.10), но с учетом другого вида функционала (3.1.1):

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(m, \alpha, v) := & J(m, \alpha) + \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial v}{\partial x} \right) m dx dt - \\ & - \int_0^1 (v(T, x)m(T, x) - v(0, x)m_0(x)) dx. \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

В итоге приходим к задаче о седловой точке

$$\inf_{(m, \alpha)} \sup_v \mathfrak{S}(m, \alpha, v). \quad (3.1.8)$$

Дифференцирование выражения (3.1.7) для нахождения стационарной точки дает уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial v}{\partial x} = & - F(\alpha, t, x) - \frac{\partial g(t, x, m)}{\partial m} - \\ & - \delta(T - t) \frac{\partial G_T}{\partial m}(x, m(T, x)) \quad \text{на } [0, T] \times [0, 1], \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

где $\delta(T - t)$ – δ -функция, а начальное и краевые условия задаются как (2.1.12), (2.1.13):

$$v(T, x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1], \quad (3.1.10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial v}{\partial x}(t, 1) = 0 \quad \forall t \in (0, T). \quad (3.1.11)$$

При дифференцировании (3.1.7) с учетом (3.1.2) для управления α получаем условия оптимальности в форме (2.1.15), (2.1.16):

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{\alpha}}(\alpha, t, x) + \frac{\partial v}{\partial x}(t, x) = 0 \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, 1] \quad (3.1.12)$$

и

$$\alpha(t, x) = \theta \left(\frac{\partial v}{\partial x}(t, x) \right) \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, 1]. \quad (3.1.13)$$

Таким образом, постановка задачи планирования формулируется следующим образом: минимизировать функционал стоимости (3.1.1), с условием на распределение агентов в виде уравнения Фоккера-Планка (3.1.2) – (3.1.4) и условием на выбор оптимальной стратегии в виде уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана (3.1.9) – (3.1.11) и (3.1.12) – (3.1.13).

3.2 Численное решение задачи планирования

Для численного решения задачи планирования рассмотрим равномерную сетку с параметрами (2.2.1). Для численной аппроксимации уравнения Фоккера-Планка используем разностную схему (2.2.3), (2.2.23) – (2.2.25):

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{8\tau} - \frac{\sigma^2}{2h^2} \right) m_{k,i-1/2}^h + \left(\frac{3}{4\tau} + \frac{\sigma^2}{h^2} \right) m_{k,i+1/2}^h + \\ + \left(\frac{1}{8\tau} - \frac{\sigma^2}{2h^2} \right) m_{k,i+3/2}^h = \gamma_{k,i+1/2}^1 m_{k-1,i-1/2}^h + \\ + \gamma_{k,i+1/2}^2 m_{k-1,i+1/2}^h + \gamma_{k,i+1/2}^3 m_{k-1,i+3/2}^h \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

$\forall i = 0, \dots, N-1 \quad \forall k = 1, \dots, M$ с коэффициентами

$$\begin{aligned} \gamma_{k,i+1/2}^1 &= \frac{1}{8\tau} \left(1 + \frac{4\tau}{h} \alpha_{k,i} \right), \\ \gamma_{k,i+1/2}^2 &= \frac{1}{8\tau} \left(3 + \frac{4\tau}{h} \alpha_{k,i} \right) + \frac{1}{8\tau} \left(3 - \frac{4\tau}{h} \alpha_{k,i+1} \right), \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

$$\gamma_{k,i+1/2}^3 = \frac{1}{8\tau} \left(1 - \frac{4\tau}{h} \alpha_{k,i+1} \right),$$

начальным условием

$$m_{0,i+1/2}^h = m_0(x_{i+1/2}) \quad \forall i = 0, \dots, N-1 \quad (3.2.3)$$

и краевыми условиями

$$\begin{aligned} m_{k,-1/2}^h &= m_{k,1/2}^h, \\ m_{k,N+1/2}^h &= m_{k,N-1/2}^h \quad \forall k = 0, \dots, M. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

В более коротком виде запишем её как систему уравнений

$$\mathfrak{A}m_{\cdot,\cdot}^h = \mathfrak{F}m_{0,\cdot}^h. \quad (3.2.5)$$

Далее вместо (3.1.1) рассмотрим его дискретный аналог

$$\begin{aligned} J^h(m^h, \alpha^h) &= \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{N-1} \left(r_{k,i+1/2}^h m_{k,i+1/2}^h + g_{k,i+1/2}^h \right) \tau h + \\ &+ \sum_{i=0}^{N-1} (G_T)_{i+1/2}^h h, \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

где, как и прежде,

$$\begin{aligned} r_{k,i+1/2}^h &= F(\alpha_{k+1,i}^h, t_k, x_i)/2 + F(\alpha_{k+1,i+1}^h, t_k, x_i)/2, \\ g_{k,i+1/2}^h &= g(t_k, x_{i+1/2}, m_{k,i+1/2}^h), \end{aligned}$$

а $(G_T)_{i+1/2}^h = G_T(x_{i+1/2}, m_{M,i+1/2}^h)$. Используя обозначение (2.3.1), перепишем (3.2.1) в виде

$$\begin{aligned} J^h(m^h, \alpha^h) &= \tau \sum_{k=0}^{M-1} \langle r_{k,\cdot}^h, m_{k,\cdot}^h \rangle + \\ &+ \tau h \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{N-1} g_{k,i+1/2}^h + h \sum_{i=0}^{N-1} (G_T)_{i+1/2}^h. \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Таким образом, в дискретной форме задача минимизации представима в виде (2.2.37) с учетом (3.2.5):

$$\begin{cases} \inf_{\alpha} J^h(m^h, \alpha^h), \\ \mathfrak{A}m_{\cdot, \cdot}^h = \mathfrak{F}m_{0, \cdot}^h. \end{cases} \quad (3.2.8)$$

В дискретном виде Лагранжиан задачи имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}^h(m^h, \alpha^h, v^h) := & \tau \sum_{k=0}^{M-1} \langle r_{k, \cdot}^h, m_{k, \cdot}^h \rangle + \tau h \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{N-1} g_{k, i+1/2}^h + \\ & + h \sum_{i=0}^{N-1} (G_T)_{i+1/2}^h + \langle m_{0, \cdot}^h, \mathbb{A}v_{0, \cdot}^h \rangle \tau - \langle m_{M, \cdot}^h, \mathbb{A}v_{M, \cdot}^h \rangle \tau - \\ & - \sum_{k=0}^{M-1} (\langle m_{k, \cdot}^h, \mathbb{A}v_{k, \cdot}^h \rangle - \langle m_{k, \cdot}^h, \mathbb{B}_{k+1}^* v_{k+1, \cdot}^h \rangle) \tau. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

При его использовании получаем задачу о седловой точке

$$\inf_{(m^h, \alpha^h)} \sup_{v^h} \mathfrak{S}^h(m^h, \alpha^h, v^h). \quad (3.2.10)$$

При нахождении стационарной точки в результате дифференцирования по сеточным значениям $m_{k, \cdot}^h$, получаем сеточные уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана

$$\mathbb{A}v_{k, \cdot}^h = B_{k+1}^* v_{k+1, \cdot}^h + z_{k, \cdot}^h, \quad (3.2.11)$$

$$\mathbb{A}v_{M, i+1/2}^h = \eta \left(x_{i+1/2}, m_{M, i+1/2}^h \right), \quad (3.2.12)$$

$$\text{где } z_{k, i+1/2}^h = r_{k, i+1/2}^h + b(t_k, x_{i+1/2}, m_{k, i+1/2}^h), \quad (3.2.13)$$

$$v_{k, -1/2}^h = v_{k, 1/2}^h, \quad v_{k, N-1/2}^h = v_{k, N+1/2}^h \quad (3.2.14)$$

$$\forall k = 0, \dots, M-1 \quad \forall i = 0, \dots, N-1.$$

Здесь матрицы A и B_k^* совпадают с матрицами системы (2.2.45). Система линейных алгебраических уравнений (3.2.4) – (3.2.7) отличается от полученной в предыдущей главе системы (2.2.41) – (2.2.44) только ненулевым начальным условием (3.2.12) и может быть представлена в следующем ви-

де:

$$\mathfrak{B}v_{\cdot,\cdot}^h = \begin{bmatrix} \mathbb{A} & -\mathbb{B}_1^* & & & \\ & \mathbb{A} & -\mathbb{B}_2^* & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & \mathbb{A} & \\ & & & & \mathbb{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{0,\cdot}^h \\ v_{1,\cdot}^h \\ \vdots \\ v_{M,\cdot}^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{0,\cdot}^h \\ z_{1,\cdot}^h \\ \vdots \\ \eta_{M,\cdot}^h \end{bmatrix} \quad (3.2.15)$$

относительно векторов $v_{k,\cdot}^h = (v_{k,1/2}^h, \dots, v_{k,N-1/2}^h)^T$, $z_{k,\cdot}^h = (z_{k,1/2}^h, \dots, z_{k,N-1/2}^h)^T$. Дискретизация условий оптимальности снова приводит к уравнениям (2.2.47) и (2.2.48):

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}(\alpha_{k,i}^h, t_k, x_i) + \frac{v_{k,i+1/2}^h - v_{k,i-1/2}^h}{h} = 0 \quad (3.2.16)$$

и

$$\alpha^h(t_k, x_i) = \theta \left((v_{k,i+1/2}^h - v_{k,i-1/2}^h) / h \right) \quad (3.2.17)$$

$\forall k = 1, \dots, M \forall i = 1, \dots, N - 1$. Отметим также, что для поставленной дискретной задачи остаются актуальными условия (2.2.6), (2.2.26), замечания 1-3 и порядок сходимости разностных схем $O(\tau + h^2)$.

Итерационный алгоритм численного решения задачи планирования

Итерационный алгоритм решения задачи (3.2.10) с функционалом стоимости (3.2.1), в целом, совпадает с изложенным в разделе 2.2.3, с той разницей, что вычисление значений происходит согласно (3.2.11) - (3.2.14).

Покажем, что (3.2.16) обеспечивает оптимальное условие для минимизации функционала стоимости (3.2.1). Введем в рассмотрение две сеточных функции: $\alpha_{\cdot,\cdot}^h$ и смещенную от нее $\tilde{\alpha}_{\cdot,\cdot}^h$. По ним построим $r_{\cdot,\cdot}^h$, $\tilde{r}_{\cdot,\cdot}^h$, $g_{\cdot,\cdot}^h$, $\tilde{g}_{\cdot,\cdot}^h$, $(G_T)^h$, $(\tilde{G}_T)^h$ и найдем решения $m_{\cdot,\cdot}^h$, $\tilde{m}_{\cdot,\cdot}^h$ задач (3.2.5) соответственно с матрицами \mathbb{B}_i и $\tilde{\mathbb{B}}_i$. Рассмотрим разность

$$J^h(\tilde{m}^h, \tilde{\alpha}^h) - J^h(m^h, \alpha^h) = \sum_{k=0}^{M-1} \langle \tilde{r}_{k,\cdot}^h - r_{k,\cdot}^h, \tilde{m}_{k,\cdot}^h \rangle \tau + \quad (3.2.18)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=0}^{M-1} (\langle Av_{k+1,\cdot}^h, \tilde{m}_{k+1,\cdot}^h - m_{k+1,\cdot}^h \rangle - \langle Av_{k,\cdot}^h, \tilde{m}_{k,\cdot}^h - m_{k,\cdot}^h \rangle) \tau \\
& + \sum_{k=0}^{M-1} \langle r_{k,\cdot}^h, \tilde{m}_{k,\cdot}^h - m_{k,\cdot}^h \rangle \tau - \langle Av_{M,\cdot}^h, \tilde{m}_{M,\cdot}^h - m_{M,\cdot}^h \rangle \tau + \\
& + \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{N-1} (\tilde{g}_{k,i+1/2}^h - g_{k,i+1/2}^h) h \tau + \\
& + \sum_{i=0}^{N-1} \left((\tilde{G}_T)_{i+1/2}^h - (G_T)_{i+1/2}^h \right) h.
\end{aligned}$$

Условия (2.1.5) и (3.1.5) в дискретном случае переходят в неравенства

$$\tilde{g}_{k,i+1/2}^h - g_{k,i+1/2}^h \leq (\tilde{m}_{k,i+1/2}^h - m_{k,i+1/2}^h) b_{k,i+1/2}^h, \quad (3.2.19)$$

$$\left(\tilde{G}_T \right)_{i+1/2}^h - \left(G_T \right)_{i+1/2}^h \leq (\tilde{m}_{M,i+1/2}^h - m_{M,i+1/2}^h) \eta_{i+1/2}^h. \quad (3.2.20)$$

Используя их совместно с (3.2.15), (3.2.18) и (3.2.19), (3.2.20), получаем неравенство

$$\begin{aligned}
J^h(\tilde{m}^h, \tilde{\alpha}^h) - J^h(m^h, \alpha^h) & \leq \sum_{k=0}^{M-1} (\langle \tilde{r}_{k,\cdot}^h - r_{k,\cdot}^h, \tilde{m}_{k,\cdot}^h \rangle \tau + \\
& + \langle -\mathbb{A}_k v_{k,\cdot}^h + r_{k,\cdot}^h + b_{k,\cdot}^h, \tilde{m}_{k,\cdot}^h - m_{k,\cdot}^h \rangle \tau + \\
& + \langle v_{k+1,\cdot}^h, \tilde{\mathbb{B}}_{k+1} \tilde{m}_{k,\cdot}^h - \mathbb{B}_{k+1} m_{k,\cdot}^h \rangle \tau) - \langle Av_{M,\cdot}^h, \tilde{m}_{M,\cdot}^h - m_{M,\cdot}^h \rangle \tau + \\
& + h \sum_{i=0}^{N-1} (\tilde{m}_{M,i+1/2}^h - m_{M,i+1/2}^h) \eta_{i+1/2}^h = \sum_{k=0}^{M-1} (\langle \tilde{r}_{k,\cdot}^h - r_{k,\cdot}^h, \tilde{m}_{k,\cdot}^h \rangle + \\
& + \langle v_{k+1,\cdot}^h, (\tilde{\mathbb{B}}_{k+1} - \mathbb{B}_{k+1}) \tilde{m}_{k,\cdot}^h \rangle) \tau + \\
& + (1 - \tau) h \sum_{i=0}^{N-1} (\tilde{m}_{M,i+1/2}^h - m_{M,i+1/2}^h) \eta_{i+1/2}^h, \quad (3.2.21)
\end{aligned}$$

где слагаемые $\langle \tilde{r}_{k,\cdot}^h - r_{k,\cdot}^h, \tilde{m}_{k,\cdot}^h \rangle$ и $\langle v_{k+1,\cdot}^h, (\mathbb{B}_{k+1} - \tilde{\mathbb{B}}_{k+1}) \tilde{m}_{k,\cdot}^h \rangle$ преобразуются согласно (2.2.59) и (2.2.60). Поэтому

$$\begin{aligned}
J^h(\tilde{m}^h, \tilde{\alpha}^h) - J^h(m^h, \alpha^h) &\leq \\
&\leq \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{i=1}^{N-1} (\gamma_{k,i}^h (F(\tilde{\alpha}_{k+1,i}^h, t_k, x_i) - F(\alpha_{k+1,i}^h, t_k, x_i)) + \\
&+ \delta_{k,i}^h (\tilde{\alpha}_{k+1,i}^h - \alpha_{k+1,i}^h)) + \\
&+ (1 - \tau) h \sum_{i=0}^{N-1} (\tilde{m}_{M,i+1/2}^h - m_{M,i+1/2}^h) \eta_{i+1/2}^h
\end{aligned} \tag{3.2.22}$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned}
\gamma_{k,i}^h &= \tau h (\tilde{m}_{k,i-1/2}^h + \tilde{m}_{k,i+1/2}^h) / 2, \\
\delta_{k,i}^h &= \tau (\tilde{m}_{k,i-1/2}^h + \tilde{m}_{k,i+1/2}^h) (v_{k+1,i+1/2}^h - v_{k+1,i-1/2}^h) / 2.
\end{aligned}$$

Минимизируя каждое слагаемое в правой части (3.2.22), получаем равенства

$$\frac{\partial F(\tilde{\alpha}_{k,i}^h, t_k, x_i)}{\partial \alpha} + \frac{\delta_{k,i}^h}{\gamma_{k,i}^h} = 0 \quad \forall k = 1, \dots, M,$$

которые совпадают с (3.2.16).

Отметим также, что утверждение теоремы 1 справедливо для дискретной задачи планирования в выбранной форме. Однако, поскольку начальные условия для дискретного уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана ненулевые, то утверждение теоремы 2 в случае задачи ИСП с ограничениями на финальное распределение следует переписать в следующем виде.

Теорема 3. При выполнении условий (2.2.6), (2.2.26) для решения задачи (3.2.11) – (3.2.14) справедлива оценка

$$\max_{0 \leq k \leq M} \|v^h(t_k, \cdot)\|_{\infty, h} \leq \|\eta(\cdot)\|_{\infty, h} + T \max_{0 \leq k \leq M-1} \|z^h(t_k, \cdot)\|_{\infty, h}. \tag{3.2.23}$$

Доказательство. Доказательство теоремы 3, в целом, повторяет доказательство теоремы 2, поскольку оценка (2.2.51) и неравенство (2.2.55) остаются справедливыми и в этом случае. Учитывая условия (3.2.12), ис-

пользование математической индукции по k приводит к оценке

$$\begin{aligned} \|v^h(t_k, \cdot)\|_{\infty, h} &\leq \|v^h(t_M, \cdot)\|_{\infty, h} + (M - k) \tau \|z^h(t_k, \cdot)\|_{\infty, h} = \\ &= \|\mathbb{A}^{-1}\|_{\infty} \|\eta^h(\cdot)\|_{\infty, h} + (M - k) \tau \|z^h(t_k, \cdot)\|_{\infty, h}. \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

Известно, что для M -матрицы со строгим диагональным преобладанием справедливо следующее утверждение (теорема 2 из [1]):

$$\|\mathbb{A}^{-1}\|_{\infty} = 1/R,$$

где $R = \min_{1 \leq i \leq N} \left(|a_{ii}| - \sum_{j=1, j \neq i}^N |a_{ij}| \right) = \max_{1 \leq i \leq N} \left(|a_{ii}| - \sum_{j=1, j \neq i}^N |a_{ij}| \right) = 1/\tau$ – величина диагонального преобладания, одинаковая для каждой строки матрицы \mathbb{A} . Тогда (3.2.24) переписется как

$$\|v^h(t_k, \cdot)\|_{\infty, h} \leq \tau \|\eta^h(\cdot)\|_{\infty, h} + (M - k) \tau \|z^h(t_k, \cdot)\|_{\infty, h}.$$

Беря максимум по k от обеих частей неравенства, получаем (3.2.23). \square

3.3 Вычислительный эксперимент для задачи планирования

Для численной реализации задачи планирования воспользуемся постановкой модельной задачи из раздела 2.3.1. Для вычислительного эксперимента выберем функцию $F(t, x, \alpha)$ в следующем виде:

$$F(\alpha, t, x) = \begin{cases} \alpha^2/2, & \text{если } \alpha \leq 0, \\ \exp(\alpha) - \alpha - 1 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (3.3.1)$$

В качестве штрафа за отклонение от целевого распределения выберем функцию

$$G_T(x, m(T, x)) = \begin{cases} (m(T, x) - m_{\text{tag}}(x))^2, & m \leq m_{\text{tag}}(x), \\ (m(T, x) - m_{\text{tag}}(x))^4 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (3.3.2)$$

Начальное распределение агентов $m_0(x)$ возьмем в следующем виде:

$$m_0(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - x_c)^2}{2\sigma^2}\right) + a(x - x_c)^2. \quad (3.3.3)$$

Здесь первое слагаемое представляет собой плотность нормального распределения с параметрами $x_c = 0.5$, $\sigma_c = 0.3$. Второе слагаемое обеспечивает выполнение граничных условий на нулевом слое по времени: $\partial m_0 / \partial x(x) = 0$ при $x = 0, 1$ с константой

$$a = \frac{1}{2\sigma_c^3\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_c^2}{2\sigma_c^2}\right), \text{ а } \omega_0 = \int_0^1 m_0(x) dx. \quad (3.3.4)$$

Для обеспечения условия (3.1.4) выберем целевое финальное состояние агентов в виде

$$m_{\text{tag}}(x) = \omega_0(0.75 + 0.5x). \quad (3.3.5)$$

Для вычислительного эксперимента возьмем следующие значения параметров задачи, сформулированной в разделе 2.3.1:

$$T = 1, c_0 = 1, c_1 = 0.1, c_2 = 1, c_3 = 0.8, p(t) = 0.2, \sigma^2 = 0.14. \quad (3.3.6)$$

Для подтверждения порядка сходимости выберем три пары значений параметров сетки:

$$h = 4 \times 10^{-2}, \tau = 16 \times 10^{-4}; \quad h = 2 \times 10^{-2}, \tau = 4 \times 10^{-4}; \quad h = 10^{-2}, \tau = 10^{-4}.$$

Начальное распределение агентов $m_0(x)$, целевое распределение $m_{\text{tag}}(x)$ совместно с несколькими распределениями $\tilde{m}(T, x)$, полученных на про-

межуточных итерациях алгоритма, представлены на рисунке 3.1. Таблица

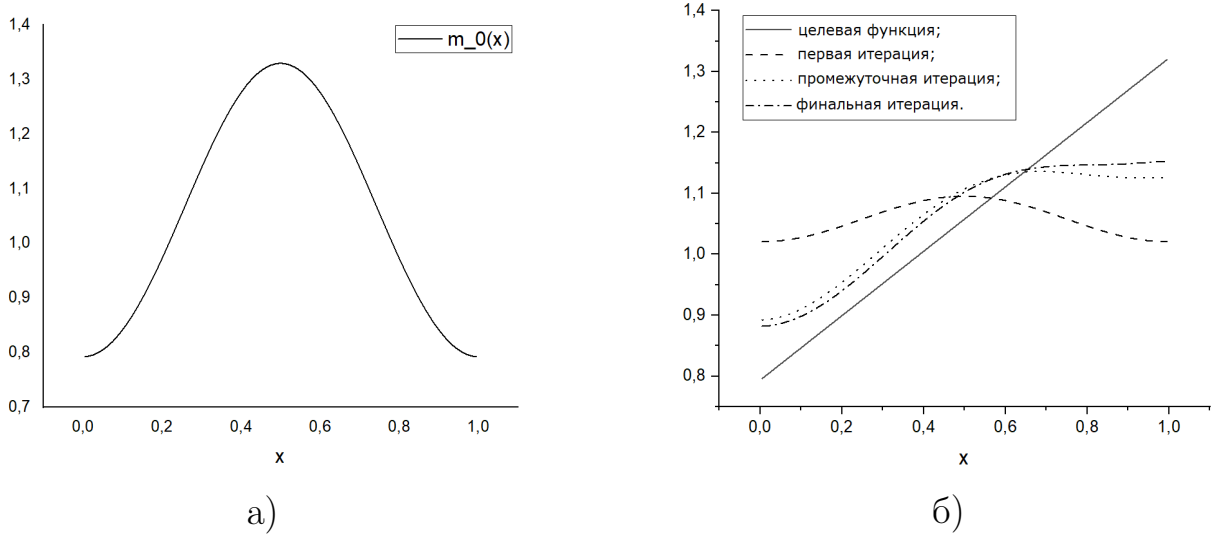


Рисунок 3.1 — Начальное распределение агентов $m_0(x)$ (а); $\tilde{m}(T,x)$ для различных итераций и $m_{\text{tag}}(x)$ (б).

3.1 демонстрирует историю сходимости процесса для некоторых параметров сетки, а данные в таблице 3.2 численно подтверждают второй порядок сходимости по пространственной переменной и первый порядок по времени.

Таблица 3.1

История сходимости итерационного процесса для задачи планирования

Ит. s	$h = 4 \times 10^{-2}, \tau = 16 \times 10^{-4}$			$h = 2 \times 10^{-2}, \tau = 4 \times 10^{-4}$	
	J_s^h	$\Delta_s = J_s^h - J_{s-1}^h $	$\Delta_s^h / \Delta_{s-1}^h$	J_s^h	$\Delta_s = J_s^h - J_{s-1}^h $
0	0.59655679			0.59657501	
1	0.58732244	0.00923434		0.58749034	0.00908472
2	0.58626028	0.00106217	0.11502334	0.58636878	0.00112156
3	0.58606781	0.00019246	0.18119874	0.58615852	0.00021026
4	0.58602682	0.00004100	0.21302384	0.58611261	0.00004591
5	0.58601741	0.00000941	0.22939692	0.58610181	0.00001075

Таким образом, вид функции $G_T(x, m(T, x))$ позволяет определять своего рода «штраф» за отклонение распределения на горизонте времени от заданного целевого распределения. При этом, поскольку на функцию налагается только условие (3.1.5), построенный алгоритм позволяет рассматривать $G_T(x, m(T, x))$ в качестве кусочно-гладкой функции, например,

Таблица 3.2

Сходимость приближенных решений для задачи планирования

	$\varepsilon^h = \ m^h - m^{h/2}\ _{1,h}$	$\varepsilon^h = \ v^h - v^{h/2}\ _{\infty,h}$	$\varepsilon^h = J^h - J^{h/2}$	$\varepsilon^h = \ \alpha^h - \alpha^{h/2}\ _{\infty,h}$
ε^h	0.00245301	0.00035772	0.00008428	0.00367941
$\varepsilon^{h/2}$	0.00061324	0.00009431	0.00002107	0.00091983
$\varepsilon^{h/4}$	0.00015331	0.00002358	0.00000527	0.00022996
$\varepsilon^h / \varepsilon^{h/2}$	4.0001	4.0000	4.0002	4.0001
$\varepsilon^{h/2} / \varepsilon^{h/4}$	4.0000	4.0000	4.0001	4.0000

(3.3.2). Покажем также, что выбор функции $G_T(x, m(T, x))$ в виде более сильного штрафа

$$G_T(x, m(T, x)) = (m(T, x) - m_{\text{tag}}(x))^2 / \varepsilon \quad (3.3.7)$$

позволяет получить более близкое к желаемому распределение на горизонте времени (рисунок 3.2) при тех же значениях (3.3.1), (3.3.3) – (3.3.6), но с бóльшими затратами.

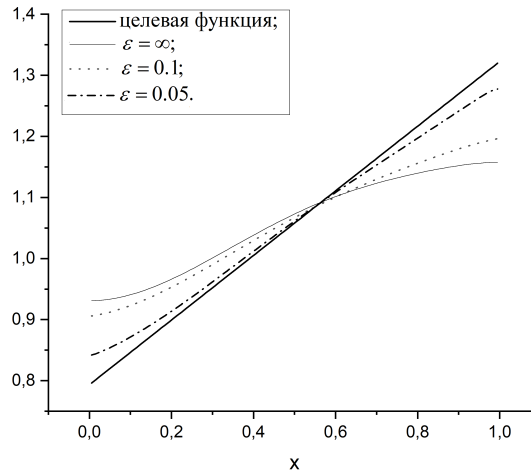


Рисунок 3.2 — Сравнение различных $\tilde{m}(T, x)$ в зависимости от величины штрафа

Использование функции $G_T(x, m(T, x))$ в виде (3.3.7) фактически приводит к условию (3.2.4) для дискретной задачи в виде

$$Av_{M, i+1/2}^h = \frac{2(m(T, x_{i+1/2}) - m_{\text{tag}}(x_{i+1/2}))}{\varepsilon} \quad \forall i = 0, \dots, N-1. \quad (3.3.8)$$

Отметим, что в работах [6, 112, 113] для достижения заданного состояния рассматривалось условие в виде штрафа $v(T, x) = (m(T, x) - m_{\text{tag}}(x))/\varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Вместе с тем условие (3.1.8) получается естественным образом при дифференцировании дискретного Лагранжиана задачи.

3.4 Выводы по главе 3

Разработка новых моделей и методов решения ИСП в форме транспортных задач первого и второго порядка [49] может оказать большое влияние на дальнейшее развитие прогнозирования и минимизации предполагаемых затрат. В данной главе представлен возможный подход к численному решению таких задач второго порядка. Использование специальных монотонных разностных схем позволяет эффективно получить решение дискретной задачи, наследующей некоторые полезные свойства непрерывной задачи.

Здесь предложен другой подход к математической постановке задачи, отличный от представленного в работах [6, 112, 113]. Например, в этих работах в качестве начального приближения для функции $v(t, x)$ используется штраф в виде $v(T, x) = (m(T, x) - m_{\text{tag}}(x))/\varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. А в представленном методе для достижения заданной цели рассматривается добавочный член в функционале стоимости, а грубые приближения к заданному финальному распределению не используются. Дифференцирование Лагранжиана задачи с седловой точкой дает равенства, указывающие направления скорейшего спуска, в которых должна выполняться минимизация, что дает более эффективные условия для сходимости итераций при минимизации функционала стоимости.

Глава 4. Двумерные модели «игр среднего поля»

Данная глава посвящена рассмотрению двумерных моделей ИСП. По форме постановка задачи остается неизменной: рассматривается задача оптимизации взаимодействия бесконечного числа агентов, которое описывается связанной парой параболических дифференциальных уравнений, на этот раз двумерных по пространству.

4.1 Математическая модель

Положим $\Omega = (0, H_1) \times (0, H_2)$ с границей Γ и замыканием $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Обозначим $n(x, y) = (n_1(x, y), n_2(x, y))$ – внешняя нормаль в точке (x, y) на границе Γ . Рассмотрим двумерное уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова с начальным и краевым условиями:

$$\frac{\partial m}{\partial t} - \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} - \frac{\sigma_2^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} + \frac{\partial(\alpha m)}{\partial x} - \frac{\partial(\beta m)}{\partial y} = 0 \quad \text{на } (0, T) \times \Omega, \quad (4.1.1)$$

$$m(0, x, y) = m_0(x, y) \quad \text{на } \bar{\Omega}, \quad (4.1.2)$$

$$\frac{\partial m}{\partial n} = 0 \quad \text{на } [0, T] \times \Gamma, \quad (4.1.3)$$

где $\partial m / \partial n$ означает производную по внешней нормали на границе Γ . Здесь σ_1, σ_2 – фиксированные константы [15]. Здесь будем рассматривать функции $\alpha(t, x, y)$, $\beta(t, x, y)$ как функции управления системой взаимодействующих агентов, отражающие усилия, направленные на увеличение значения плотности агентов m или на её уменьшение, соответственно. По аналогии с одномерным случаем, (4.1.2) задает начальную плотность агентов, а граничное условие Неймана (4.1.3) гарантирует, что агенты остаются в пределах вычислительной области.

Для простоты будем рассматривать случай, когда функционал стоимости квадратично зависит от функций управления

$$J(m, \alpha, \beta) = \int_0^T \left(\exp(-rt) \times \right. \\ \left. \times \int_{\Omega} (d_1 \alpha^2 m / 2 + d_2 \beta^2 m / 2 + g(t, x, y, m)) d\Omega \right) dt. \quad (4.1.4)$$

Здесь d_1, d_2 – положительные константы; $r \geq 0$ – безрисковая процентная ставка, а функция $g(t, x, y, \bar{m})$ подчиняется следующему условию относительно \bar{m} :

$$g(t, x, y, \tilde{m}) - g(t, x, y, \bar{m}) \leq (\tilde{m} - \bar{m}) f(t, x, y, \bar{m}), \quad (4.1.5)$$

где $f(t, x, y, \bar{m}) = \partial g / \partial m$.

Как и в одномерном случае, построим Лагранжиан задачи (4.1.1) – (4.1.4):

$$\mathfrak{S}(m, \alpha, \beta, v) := J(m, \alpha, \beta) + \\ + \int_0^T \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\sigma_2^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial v}{\partial x} - \beta \frac{\partial v}{\partial y} \right) m d\Omega dt - \\ - \int_{\Omega} (v(T, x, y) m(T, x, y) - v(0, x, y) m_0(x, y)) d\Omega. \quad (4.1.6)$$

В соответствии с применяемым подходом получаем задачу о седловой точке

$$\inf_{(m, \alpha, \beta)} \sup_v \mathfrak{S}(m, \alpha, \beta, v).$$

Поиск стационарной точки дает уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\sigma_2^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial v}{\partial x} - \beta \frac{\partial v}{\partial y} = \\ = - \exp(-rt) (f + d_1 \alpha^2 / 2 + d_2 \beta^2 / 2) \quad \text{на } [0, T] \times \Omega \quad (4.1.7)$$

с «начальным»

$$v(T, x, y) = 0 \quad \text{на } \bar{\Omega} \quad (4.1.8)$$

и граничным условиями, аналогичными (4.1.3),

$$\frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{на } [0, T] \times \Gamma. \quad (4.1.9)$$

Согласно (1.1.12) для функционала (4.1.4) функции управления динамической системой выражаются аналитически:

$$\alpha = -\frac{\exp(rt)}{d_1} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \beta = \frac{\exp(rt)}{d_2} \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{на } [0, T] \times \bar{\Omega}. \quad (4.1.10)$$

Таким образом, двумерная задача оптимизации сводится к минимизации функционала (4.1.4) совместно с (4.1.1) – (4.1.3) и условиями оптимальности (4.1.7) – (4.1.10).

4.2 Построение вычислительной схемы

Введем дискретную равномерную сетку по времени и пространству:

$$\begin{aligned} t_k &= k\tau, \quad k = 0, \dots, M, \quad \tau = T/M; \\ x_{i+1/2} &= (i + 1/2)h_1, \quad i = -1, \dots, N_1, \quad h_1 = H_1/N_1; \\ y_{j+1/2} &= (j + 1/2)h_2, \quad j = -1, \dots, N_2, \quad h_2 = H_2/N_2; \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

для $M, N_1, N_2 \geq 2$. Обозначим

$$\begin{aligned} z_{i+1/2, j+1/2} &= (x_{i+1/2}, y_{j+1/2}), \\ \bar{\Omega}_h &= \{z_{i+1/2, j+1/2}; i = -1, \dots, N_1, j = -1, \dots, N_2\}, \\ \Omega_h &= \{z_{i+1/2, j+1/2}; i = 0, \dots, N_1 - 1, j = 0, \dots, N_2 - 1\}. \end{aligned}$$

Введем также в рассмотрение промежуточные точки сетки

$$x_i = ih_1, \quad i = 0, \dots, N_1; \quad y_j = jh_2, \quad j = 0, \dots, N_2.$$

Будем искать решение задачи (4.1.1) – (4.1.3) в виде кусочно-билинейной функции $m^h(t, x, y)$ на каждом t_k , непрерывной на $\bar{\Omega}$ и билинейной на каждом прямоугольнике $\omega_{i,j} = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}] \quad \forall i = 0, \dots, N_1, j = 0, \dots, N_2$. Также будем считать, что

$$m^h(t_k, x, y) \text{ постоянна на всех } \omega_{i,j}, \text{ содержащих } \Gamma, \quad (4.2.2)$$

для обеспечения (4.1.3). Как и в одномерном случае, функция $m^h(t_k, x, y)$ на каждом слое по времени представима в виде линейной комбинации своих дискретных значений $m_{k,i+1/2,j+1/2}^h := m^h(t_k, x_{i+1/2}, y_{j+1/2}) \quad \forall (x, y) \in \omega_{i,j}$:

$$\begin{aligned} m^h(t_k, x, y) = & m_{k,i-1/2,j-1/2}^h (x_{i+1/2} - x)(y_{j+1/2} - y)/h_1 h_2 + \\ & + m_{k,i+1/2,j-1/2}^h (x - x_{i-1/2})(y_{j+1/2} - y)/h_1 h_2 + \\ & + m_{k,i-1/2,j+1/2}^h (x_{i+1/2} - x)(y - y_{j-1/2})/h_1 h_2 + \\ & + m_{k,i+1/2,j+1/2}^h (x - x_{i-1/2})(y - y_{j-1/2})/h_1 h_2. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Разобьем аппроксимацию уравнения (4.1.1) на две части. Сначала рассмотрим оператор, действующий вдоль оси Ox :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial m}{\partial t} - \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \frac{\partial(\alpha m)}{\partial x}. \quad (4.2.4)$$

Для аппроксимации (4.2.4) на временном слое t_k для каждого узла $z_{i+1/2,j+1/2} \in \Omega_h$, зафиксируем $y_{j+1/2}$. Тогда, применяя Эйлерово-Лагранжев подход, изложенный в главе 2, получаем аппроксимацию оператора (4.2.4) на плоскости $y = y_{j+1/2}$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{16\tau} - \frac{\sigma_1^2}{2h_1^2} \right) m_{k,i-1/2,\cdot}^h + \\ & + \left(\frac{3}{8\tau} + \frac{\sigma_1^2}{h_1^2} \right) m_{k,i+1/2,\cdot}^h + \left(\frac{1}{16\tau} - \frac{\sigma_1^2}{2h_1^2} \right) m_{k,i+3/2,\cdot}^h - \\ & - \gamma_{k,i+1/2,\cdot}^1 m_{k-1,i-1/2,\cdot}^h - \gamma_{k,i+1/2,\cdot}^2 m_{k-1,i+1/2,\cdot}^h - \\ & - \gamma_{k,i+1/2,\cdot}^3 m_{k-1,i+3/2,\cdot}^h, \quad \forall i = 0, \dots, N_1 - 1, \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

где

$$\begin{aligned}
\gamma_{k,i+1/2,\cdot}^1 &= \frac{1}{16\tau} \left(1 + \frac{8\tau}{h_1} \alpha_{k,i,\cdot} \right), \\
\gamma_{k,i+1/2,\cdot}^2 &= \frac{1}{16\tau} \left(3 + \frac{8\tau}{h_1} \alpha_{k,i,\cdot} \right) + \frac{1}{16\tau} \left(3 - \frac{8\tau}{h_1} \alpha_{k,i+1,\cdot} \right), \\
\gamma_{k,i+1/2,\cdot}^3 &= \frac{1}{16\tau} \left(1 - \frac{8\tau}{h_1} \alpha_{k,i+1,\cdot} \right).
\end{aligned} \tag{4.2.6}$$

Здесь точка вместо индекса означает, что (4.2.5), (4.2.6) справедливы для любого приемлемого индекса в обеих частях равенства, т.е. для любого значения $j = 0, \dots, N_2 - 1$. По аналогии рассмотрим оператор, действующий вдоль оси Oy :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial m}{\partial t} - \frac{\sigma_2^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} - \frac{\partial(\beta m)}{\partial y}. \tag{4.2.7}$$

Для каждого узла $z_{i+1/2,j+1/2} \in \Omega_h$, зафиксируем $x_{i+1/2}$ и используем аппроксимацию для оператора (4.2.7) по аналогии с (4.2.5) – (4.2.6) при $x = x_{i+1/2}$:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{16\tau} - \frac{\sigma_2^2}{2h_2^2} \right) m_{k,\cdot,j-1/2}^h + \\
&+ \left(\frac{3}{8\tau} + \frac{\sigma_2^2}{h_2^2} \right) m_{k,\cdot,j+1/2}^h + \left(\frac{1}{16\tau} - \frac{\sigma_2^2}{2h_2^2} \right) m_{k,\cdot,j+3/2}^h - \\
&- \gamma_{k,\cdot,j+1/2}^4 m_{k-1,\cdot,j-1/2}^h - \gamma_{k,\cdot,j+1/2}^5 m_{k-1,\cdot,j+1/2}^h - \\
&- \gamma_{k,\cdot,j+1/2}^6 m_{k-1,\cdot,j+3/2}^h \quad \forall j = 0, \dots, N_2 - 1,
\end{aligned} \tag{4.2.8}$$

где

$$\begin{aligned}
\gamma_{k,\cdot,j-1/2}^4 &= \frac{1}{16\tau} \left(1 - \frac{8\tau}{h_2} \beta_{k,\cdot,j} \right), \\
\gamma_{k,\cdot,j+1/2}^5 &= \frac{1}{16\tau} \left(3 - \frac{8\tau}{h_2} \beta_{k,\cdot,j} \right) + \frac{1}{16\tau} \left(3 + \frac{8\tau}{h_2} \beta_{k,\cdot,j+1} \right), \\
\gamma_{k,\cdot,j+1/2}^6 &= \frac{1}{16\tau} \left(1 + \frac{8\tau}{h_2} \beta_{k,\cdot,j+1} \right).
\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

Совместно с (4.2.2) комбинации (4.2.5) и (4.2.8) дают монотонную вычислительную схему для уравнения (4.1.1)

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{16\tau} - \frac{\sigma_1^2}{2h_1^2} \right) m_{k,i-1/2,j+1/2}^h + \left(\frac{3}{8\tau} + \frac{\sigma_1^2}{h_1^2} \right) m_{k,i+1/2,j+1/2}^h + \\
& + \left(\frac{1}{16\tau} - \frac{\sigma_1^2}{2h_1^2} \right) m_{k,i+3/2,j+1/2}^h + \left(\frac{1}{16\tau} - \frac{\sigma_2^2}{2h_2^2} \right) m_{k,i+1/2,j-1/2}^h + \\
& + \left(\frac{3}{8\tau} + \frac{\sigma_2^2}{h_2^2} \right) m_{k,i+1/2,j+1/2}^h + \left(\frac{1}{16\tau} - \frac{\sigma_2^2}{2h_2^2} \right) m_{k,i+1/2,j+3/2}^h = \\
& = \gamma_{k,i+1/2,j+1/2}^1 m_{k-1,i-1/2,j+1/2}^h + \gamma_{k,i+1/2,j+1/2}^2 m_{k-1,i+1/2,j+1/2}^h + \\
& + \gamma_{k,i+1/2,j+1/2}^3 m_{k-1,i+3/2,j+1/2}^h + \gamma_{k,i+1/2,j+1/2}^4 m_{k-1,i+1/2,j-1/2}^h + \\
& + \gamma_{k,i+1/2,j+1/2}^5 m_{k-1,i+1/2,j+1/2}^h + \gamma_{k,i+1/2,j+1/2}^6 m_{k-1,i+1/2,j+3/2}^h \\
& \forall i = 0, \dots, N_1 - 1, j = 0, \dots, N_2 - 1
\end{aligned} \tag{4.2.10}$$

с начальными условиями

$$m_{0,i+1/2,j+1/2}^h = m_0(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}) \tag{4.2.11}$$

$\forall i = 0, \dots, N_1 - 1, j = 0, \dots, N_2 - 1$. Для каждого значения $z_{i+1/2,j+1/2} \in \bar{\Omega}^h \setminus \Omega^h$ вне вычислительной области положим

$$m_{k,i+1/2,j+1/2}^h = m_{k,i'+1/2,j'+1/2}^h, \tag{4.2.12}$$

где $m_{k,i'+1/2,j'+1/2}^h$ – значение сеточной функции в ближайшем соседнем узле внутри области $z_{i'+1/2,j'+1/2} \in \Omega^h$ для обеспечения условия (4.1.3).

Перепишем (4.2.10) в матричном виде:

$$\mathfrak{A}m_{\cdot,\cdot,\cdot}^h = \begin{bmatrix} \mathbb{A} & & & & \\ -\mathbb{B}_2 & \mathbb{A} & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & -\mathbb{B}_M & \mathbb{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{1,\cdot,\cdot}^h \\ m_{2,\cdot,\cdot}^h \\ \vdots \\ m_{M,\cdot,\cdot}^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{B}_1 m_{0,\cdot,\cdot}^h \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathfrak{F}m_{0,\cdot,\cdot}^h \quad (4.2.13)$$

Здесь $m_{k,\cdot,\cdot}^h$ представляет собой вектор-столбец сеточных значений функции $m^h(t, x, y)$ при $t = t_k$, т.е. $m_{k,\cdot,\cdot}^h = \left[m_{k,1/2,1/2}^h, \dots, m_{k,1/2,N_2-1/2}^h, m_{k,3/2,1/2}^h, \dots, m_{k,N_1-1/2,N_2-1/2}^h \right]^T$ а \mathfrak{A} – матричный оператор с блочными матрицами

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} A_0 & -A_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -A_2 & A_1 & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \ddots & -A_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -A_2 & A_0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1^2}{2h_1^2} - \frac{1}{16\tau} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_1^2}{2h_1^2} - \frac{1}{16\tau} \end{bmatrix},$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} \frac{7}{8\tau} + \frac{\sigma_1^2}{2h_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{2h_2^2} & \frac{1}{16\tau} - \frac{\sigma_2^2}{2h_2^2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{16\tau} - \frac{\sigma_2^2}{2h_2^2} & \frac{13}{16\tau} + \frac{\sigma_1^2}{2h_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{h_2^2} & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \frac{1}{16\tau} - \frac{\sigma_2^2}{2h_2^2} \\ 0 & 0 & \ddots & \frac{1}{16\tau} - \frac{\sigma_2^2}{2h_2^2} \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{13}{16\tau} + \frac{\sigma_1^2}{h_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{2h_2^2} & \frac{1}{16\tau} - \frac{\sigma_2^2}{2h_2^2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{16\tau} - \frac{\sigma_2^2}{2h_2^2} & \frac{3}{4\tau} + \frac{\sigma_1^2}{h_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{h_2^2} & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \frac{1}{16\tau} - \frac{\sigma_2^2}{2h_2^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{16\tau} - \frac{\sigma_1^2}{2h_1^2} & \frac{13}{16\tau} + \frac{\sigma_1^2}{h_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{2h_2^2} \end{bmatrix}.$$

Здесь матрица \mathbb{A} содержит $N_1 \times N_1$ блоков, каждый из которых представляет собой матрицу размером $N_2 \times N_2$, а "0" представляет собой блок соответствующего размера, заполненный нулями. Матрицы \mathbb{B}_k составлены по тому же принципу, и представляют собой вклад правой части (4.2.10) на t_k -том слое по времени. Структура матриц \mathbb{B}_k представлена в приложении Б.1.

Замечание 4. Положим:

$$\begin{aligned} \tau \left| \alpha_{k,i,j+1/2}^h \right| &\leq h_1/8, \quad \tau \left| \beta_{k,i+1/2,j}^h \right| \leq h_2/8 \\ \forall k = 1, \dots, M, \quad i = 0, \dots, N_1 - 1, \quad j = 0, \dots, N_2 - 1. \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

Тогда все коэффициенты (4.2.6) и (4.2.9) неотрицательны. Будем также выбирать шаг таким, чтобы внедиагональные элементы матрицы \mathbb{A} в (4.2.13) были не положительны. Это достигается следующими условиями на параметры сетки:

$$h_1^2 \leq 8\tau\sigma_1^2, \quad h_2^2 \leq 8\tau\sigma_2^2. \quad (4.2.15)$$

С учетом квадратичного вхождения шагов по пространству эти неравенства не столь ограничительны.

Замечание 5. При выполнении условий (4.2.14), (4.2.15) утверждения из замечаний 1 и 2.2.1 переносятся на двумерный случай. Действительно, из-за свойства М-матриц, все значения $m_{k,i+1/2,j+1/2}^h$ при $t = t_k$ неотрицательны для неотрицательных значений $m_{k-1,i+1/2,j+1/2}^h$ при $t = t_{k-1}$. Это влечет выполнение закона сохранения в дискретной $L_1(\Omega)$ -норме для схемы (4.2.10).

В самом деле, умножим (4.2.10) на $\tau h_1 h_2$ и просуммируем полученное выражение по $i = 0, \dots, N_1 - 1$ и $j = 0, \dots, N_2 - 1$:

$$\|m^h(t_k, \cdot, \cdot)\|_{1,h} = \int_{\Omega} m^h(t_k, x, y) = \int_{\Omega} m^h(t_{k-1}, x, y) = \|m^h(t_{k-1}, \cdot, \cdot)\|_{1,h}.$$

Проведем дискретизацию функционала (4.1.4), полагая

$$\begin{aligned}
J^h(m^h, \alpha^h, \beta^h) &= \\
&= \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} \exp(-rt_k) \left(d_1 r_{k,i+1/2,j+1/2}^h m_{k,i+1/2,j+1/2}^h / 2 + \right. \\
&\quad \left. + d_2 s_{k,i+1/2,j+1/2}^h m_{k,i+1/2,j+1/2}^h / 2 + g_{k,i+1/2,j+1/2}^h \right) h_1 h_2 \tau,
\end{aligned} \tag{4.2.16}$$

где

$$\begin{aligned}
r_{k,i+1/2,\cdot}^h &= (\alpha_{k+1,i,\cdot}^h)^2 / 2 + (\alpha_{k+1,i+1,\cdot}^h)^2 / 2, \\
s_{k,\cdot,j+1/2}^h &= (\beta_{k+1,\cdot,j}^h)^2 / 2 + (\beta_{k+1,\cdot,j+1}^h)^2 / 2, \\
g_{k,i+1/2,j+1/2}^h &= g(t_k, x_{i+1/2}, y_{j+1/2}, m_{k,i+1/2,j+1/2}^h).
\end{aligned} \tag{4.2.17}$$

Заметим, что (4.2.17) сохраняет второй порядок аппроксимации по пространственным переменным в точке $(t_k, x_{i+1/2}, y_{j+1/2})$.

Введем в рассмотрение билинейную форму в $\mathbf{R}^{N_1 \times N_2}$

$$\langle u_{\cdot,\cdot}, v_{\cdot,\cdot} \rangle = \sum_{i=0}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} u_{i+1/2,j+1/2} v_{i+1/2,j+1/2} h_1 h_2 \tag{4.2.18}$$

и перепишем (4.2.16) согласно (4.2.18):

$$\begin{aligned}
J^h(m^h, \alpha^h, \beta^h) &= \sum_{k=0}^{M-1} \exp(-rt_k) \left(d_1 \langle r_{k,\cdot,\cdot}^h, m_{k,\cdot,\cdot}^h \rangle / 2 + \right. \\
&\quad \left. + d_2 \langle s_{k,\cdot,\cdot}^h, m_{k,\cdot,\cdot}^h \rangle / 2 + h_1 h_2 \sum_{i=0}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} g_{k,i+1/2,j+1/2}^h \right) \tau.
\end{aligned} \tag{4.2.19}$$

Тогда задача минимизации в дискретном виде может быть записана как

$$\begin{cases} \inf_{\alpha^h, \beta^h} J^h(m^h, \alpha^h, \beta^h), \\ \mathfrak{A} m_{\cdot,\cdot}^h = \mathfrak{F} m_{0,\cdot,\cdot}^h, \end{cases} \tag{4.2.20}$$

где начальные и граничные условия учтены в системе алгебраических уравнений (4.2.13).

Как и в одномерном случае, рассмотрим сеточную функцию $v_{\cdot,\cdot}^h = \left\{ v_{k,i+1/2,j+1/2}^h; k=0,\dots,M, i=-1,\dots,N_1, j=-1,\dots,N_2 \right\}$ со свойствами приграничных значений, аналогичными (4.2.2). Умножим k -тый компонент (4.2.13) на $\tau v_{k,\cdot,\cdot}^h$, используя (4.2.18), и просуммируем по k :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^M \left(\langle \mathbb{A} m_{k,\cdot,\cdot}^h, v_{k,\cdot,\cdot}^h \rangle - \langle \mathbb{B}_k m_{k-1,\cdot,\cdot}^h, v_{k,\cdot,\cdot}^h \rangle \right) \tau = \\ & = \langle m_{M,\cdot,\cdot}^h, \mathbb{A} v_{M,\cdot,\cdot}^h \rangle \tau - \langle m_{0,\cdot,\cdot}^h, \mathbb{A} v_{0,\cdot,\cdot}^h \rangle \tau + \\ & + \sum_{k=0}^{M-1} \left(\langle m_{k,\cdot,\cdot}^h, \mathbb{A} v_{k,\cdot,\cdot}^h \rangle - \langle m_{k,\cdot,\cdot}^h, \mathbb{B}_{k+1}^* v_{k+1,\cdot,\cdot}^h \rangle \right) \tau. \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

Рассмотрим Лагранжиан задачи (4.2.20) в форме

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}^h(m^h, \alpha^h, \beta^h, v^h) & := J^h(m^h, \alpha^h, \beta^h) - \\ & - \langle m_{M,\cdot,\cdot}^h, \mathbb{A} v_{M,\cdot,\cdot}^h \rangle \tau + \langle m_{0,\cdot,\cdot}^h, \mathbb{A} v_{0,\cdot,\cdot}^h \rangle \tau - \\ & - \sum_{k=0}^{M-1} \left(\langle m_{k,\cdot,\cdot}^h, \mathbb{A} v_{k,\cdot,\cdot}^h \rangle - \langle m_{k,\cdot,\cdot}^h, \mathbb{B}_{k+1}^* v_{k+1,\cdot,\cdot}^h \rangle \right) \tau. \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

Тогда поиск седловой точки для (4.2.22) можно записать в виде

$$\inf_{(m^h, \alpha^h, \beta^h)} \sup_{v^h} \mathfrak{S}^h(m^h, \alpha^h, \beta^h, v^h). \quad (4.2.23)$$

Условия, характеризующие стационарную точку в дополнение к (4.2.13) дают равенства

$$\mathbb{A} v_{k,\cdot,\cdot}^h = \mathbb{B}_{k+1}^* v_{k+1,\cdot,\cdot}^h + b_{k,\cdot,\cdot}^h, \quad \forall k = M-1, M-2, \dots, 0; \quad (4.2.24)$$

$$v_{M,\cdot,\cdot}^h = \mathbf{0}, \quad (4.2.25)$$

где

$$\begin{aligned} b_{k,i+1/2,j+1/2}^h & = \exp(-rt_k) \times \\ & \times \left(f_{k,i+1/2,j+1/2}^h + d_1 r_{k,i+1/2,j+1/2}^h / 2 + d_2 s_{k,i+1/2,j+1/2}^h / 2 \right) \end{aligned} \quad (4.2.26)$$

с функцией $f_{k,i+1/2,j+1/2}^h = f(t_k, x_{i+1/2}, y_{i+1/2}, m_{k,i+1/2,j+1/2}^h) \quad \forall k = 0, \dots, M-1, \quad i = 0, \dots, N_1-1, \quad j = 0, \dots, N_2-1$. Снова для каждого $z_{i+1/2,j+1/2} \in \bar{\Omega}^h \setminus \Omega^h$ положим

$$v_{k,i+1/2,j+1/2}^h = v_{k,i'+1/2,j'+1/2}^h \quad (4.2.27)$$

по аналогии с условиями (4.2.2) для удовлетворения граничных условий Неймана (4.1.9).

Дискретные условия оптимальности выбранного управления имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha_{k,i,\cdot}^h &= -\exp(rt_k) \left(v_{k,i+1/2,\cdot}^h - v_{k,i-1/2,\cdot}^h \right) / d_1 h_1, \\ \beta_{k,\cdot,j}^h &= \exp(rt_k) \left(v_{k,\cdot,j+1/2}^h - v_{k,\cdot,j-1/2}^h \right) / d_2 h_2 \\ \forall k &= 1, \dots, M, \quad \forall i = 1, \dots, N_1-1, \quad \forall j = 1, \dots, N_2-1. \end{aligned} \quad (4.2.28)$$

Напомним, что точка вместо индекса означает, что он может принимать любое приемлемое значение одновременно в обеих частях равенства. Уравнения (4.2.25) – (4.2.27) можно переписать в виде

$$\mathfrak{B} v_{\cdot,\cdot,\cdot}^h = \begin{bmatrix} \mathbb{A} & -\mathbb{B}_0^* & & & \\ & \mathbb{A} & -\mathbb{B}_1^* & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & \mathbb{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{0,\cdot,\cdot}^h \\ v_{1,\cdot,\cdot}^h \\ \vdots \\ v_{M-1,\cdot,\cdot}^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{0,\cdot,\cdot}^h \\ b_{1,\cdot,\cdot}^h \\ \vdots \\ b_{M-1,\cdot,\cdot}^h \end{bmatrix}. \quad (4.2.29)$$

Совместно с (4.2.27) система (4.2.29) представляет собой следующую разностную схему для уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана (4.1.7) – (4.1.9):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{16\tau} - \frac{\sigma_1^2}{2h_1^2} \right) v_{k,i-1/2,j+1/2}^h + \left(\frac{3}{8\tau} + \frac{\sigma_1^2}{h_1^2} \right) v_{k,i+1/2,j+1/2}^h + \\ & + \left(\frac{1}{16\tau} - \frac{\sigma_1^2}{2h_1^2} \right) v_{k,i+3/2,j+1/2}^h + \left(\frac{1}{16\tau} - \frac{\sigma_2^2}{2h_2^2} \right) v_{k,i+1/2,j-1/2}^h + \\ & + \left(\frac{3}{8\tau} + \frac{\sigma_2^2}{h_2^2} \right) v_{k,i+1/2,j+1/2}^h + \left(\frac{1}{16\tau} - \frac{\sigma_2^2}{2h_2^2} \right) v_{k,i+1/2,j+3/2}^h = \end{aligned} \quad (4.2.30)$$

$$\begin{aligned}
&= \gamma_{k+1,i-1/2,j+1/2}^3 v_{k+1,i-1/2,j+1/2}^h + \gamma_{k+1,i+1/2,j+1/2}^2 v_{k+1,i+1/2,j+1/2}^h + \\
&+ \gamma_{k+1,i+3/2,j+1/2}^1 v_{k+1,i+3/2,j+1/2}^h + \gamma_{k+1,i+1/2,j-1/2}^6 v_{k+1,i+1/2,j-1/2}^h + \\
&+ \gamma_{k+1,i+1/2,j+1/2}^5 v_{k+1,i+1/2,j+1/2}^h + \gamma_{k+1,i+1/2,j+3/2}^4 v_{k+1,i+1/2,j+3/2}^h + \\
&+ b_{k,i+1/2,j+1/2}^h \quad \forall i = 0, \dots, N_1 - 1, j = 0, \dots, N_2 - 1
\end{aligned}$$

с начальными данными (4.2.25). Отметим, что для схемы (4.2.25), (4.2.27), (4.2.30) расчет выполняется в обратном направлении по времени.

Замечание 6. Как и в одномерном случае с сопряженным оператором \mathfrak{B} схема (4.2.25), (4.2.27), (4.2.30) имеет аппроксимацию порядка $O(\tau + h_1^2 + h_2^2)$ в дискретной L_∞ – норме

$$\begin{aligned}
\max_{(x,y) \in \Omega} |v^h(t_k, x, y)| &= \|v^h(t_k, \cdot, \cdot)\|_{\infty, h} := \\
&:= \max_{1 \leq i \leq N_1, 1 \leq j \leq N_1} \left| v_{k,i-1/2,j-1/2}^h \right|.
\end{aligned} \tag{4.2.31}$$

Покажем по аналогии с одномерным случаем, что свойства М-матрицы гарантируют сходимость численного решения (4.2.10) – (4.2.12) и (4.2.25), (4.2.27), (4.2.30) в соответствующих дискретных нормах.

Теорема 4. *Рассмотрим уравнения (4.2.10) с погрешностью аппроксимации $\varepsilon_{k,i+1/2,j+1/2}^h$ в правой части и с теми же начальными и граничными условиями (4.2.11), (4.2.12). Тогда для решения такой задачи в условиях (4.2.14), (4.2.15) имеет место оценка*

$$\max_{0 \leq k \leq M} \|m^h(t_k, \cdot, \cdot)\|_{1,h} \leq \|m_0(\cdot, \cdot)\|_{1,h} + T \max_{1 \leq k \leq M} \|\varepsilon^h(t_k, \cdot, \cdot)\|_{1,h}. \tag{4.2.32}$$

Доказательство. Как и в одномерном случае ключевым свойством коэффициентов схемы (4.2.10) – (4.2.12) является равенство

$$\begin{aligned}
&\gamma_{k,i+3/2,j+1/2}^1 + \gamma_{k,i+1/2,j+1/2}^2 + \gamma_{k,i-1/2,j+1/2}^3 + \\
&+ \gamma_{k,i+1/2,j+3/2}^4 + \gamma_{k,i+1/2,j+1/2}^5 + \gamma_{k,i+1/2,j-1/2}^6 = 1/\tau.
\end{aligned} \tag{4.2.33}$$

Сначала рассмотрим случай, когда все компоненты $\varepsilon_{k,i+1/2,j+1/2}^h$ и $m_0(x_{i+1/2}, y_{j+1/2})$ неотрицательны. Тогда все компоненты $m_{\cdot,\cdot}^h$ также неотрицательны в соответствии с замечанием 5. Умножим уравнение (4.2.10) на τ и просуммируем по $i = 0, \dots, N_1 - 1$ и $j = 0, \dots, N_2 - 1$. С учетом (4.2.33) получаем равенство

$$\|m^h(t_k, \cdot, \cdot)\|_{1,h} = \|m^h(t_{k-1}, \cdot, \cdot)\|_{1,h} + \tau \|\varepsilon^h(t_k, \cdot, \cdot)\|_{1,h} \quad \forall k = 1, \dots, M.$$

Использование математической индукции по k приводит к неравенству

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq k \leq M} \|m^h(t_k, \cdot, \cdot)\|_{1,h} &= \|m_0(\cdot, \cdot)\|_{1,h} + \tau \sum_{s=1}^k \|\varepsilon^h(t_s, \cdot, \cdot)\|_{1,h} \leq \\ &\leq \|m_0(\cdot, \cdot)\|_{1,h} + k\tau \max_{1 \leq s \leq k} \|\varepsilon^h(t_s, \cdot, \cdot)\|_{1,h} \quad \forall k = 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (4.2.34)$$

Такое же неравенство справедливо и для неположительных компонент $\varepsilon_{k,i+1/2,j+1/2}^h$ и $m_0(x_{i+1/2}, y_{j+1/2})$. Как и в одномерном случае, неравенство (4.2.34) будет справедливо и для компонент $\varepsilon_{k,i+1/2,j+1/2}^h$, $m_0(x_{i+1/2}, y_{j+1/2})$ с любыми знаками. Беря максимум от обеих частей неравенства (4.2.34), получаем (4.2.32). \square

Теорема 5. Для решения задачи (4.2.25), (4.2.27), (4.2.30) в условиях (4.2.14), (4.2.15) справедлива оценка

$$\max_{0 \leq k \leq M} \|v^h(t_k, \cdot, \cdot)\|_{\infty,h} \leq T \max_{0 \leq k \leq M-1} \|b^h(t_k, \cdot, \cdot)\|_{\infty,h} \quad (4.2.35)$$

Доказательство. Пусть $|v^h(t_k, x_{i+1/2}, y_{j+1/2})|$ – максимальная по модулю компонента на слое t_k , так что $|v^h(t_k, x_{i+1/2}, y_{j+1/2})| = \|v^h(t_k, \cdot, \cdot)\|_{\infty,h}$. Снова используем ключевое свойство коэффициентов разложения (4.2.33) для получения неравенства

$$\begin{aligned} \|v^h(t_k, \cdot, \cdot)\|_{\infty,h} &= |v^h(t_k, x_{i+1/2}, y_{j+1/2})| \leq \\ &\leq \|v^h(t_{k+1}, \cdot, \cdot)\|_{\infty,h} + \tau \|b^h(t_k, \cdot, \cdot)\|_{\infty,h} \quad \forall k = M-1, M-2, \dots, 0. \end{aligned} \quad (4.2.36)$$

Использование математической индукции по k приводит к оценке

$$\|v^h(t_k, \cdot, \cdot)\|_{\infty, h} \leq (M - k) \tau \|b^h(t_k, \cdot, \cdot)\|_{\infty, h}. \quad (4.2.37)$$

Беря максимум по k от обеих частей неравенства (4.2.37), получаем (4.2.35). \square

С учетом этих оценок и порядка аппроксимации $O(\tau + h_1^2 + h_2^2)$ на основании теоремы эквивалентности [32] вытекает сходимость приближенных решений обеих задач соответственно в сеточных нормах $\max_{0 \leq k \leq M} \|m^h(t_k, \cdot, \cdot)\|_{1, h}$ и $\max_{0 \leq k \leq M} \|v^h(t_k, \cdot, \cdot)\|_{\infty, h}$ с тем же порядком.

Вычислительный алгоритм решения двумерной ИСП

Предположим, что некоторые начальные приближения $\alpha_{\cdot, \cdot, \cdot}^h, \beta_{\cdot, \cdot, \cdot}^h$ и $m_{\cdot, \cdot, \cdot}^h$ известны. Например, можно положить $\alpha_{\cdot, \cdot, \cdot}^h = \mathbf{0}, \beta_{\cdot, \cdot, \cdot}^h = \mathbf{0}$. Первые приближения $m_{\cdot, \cdot, \cdot}^h$ и $J^h(m_{\cdot, \cdot, \cdot}^h, \alpha_{\cdot, \cdot, \cdot}^h)$ можно вычислить согласно (4.2.10) – (4.2.12) и (4.2.16), (4.2.17), соответственно. Оптимальные значения управлений $\alpha_{\cdot, \cdot, \cdot}^h, \beta_{\cdot, \cdot, \cdot}^h$ далее уточняются путем выполнения следующих шагов.

1. Согласно (4.2.25) – (4.2.27), (4.2.30) получаем значения функции $v_{\cdot, \cdot, \cdot}^h$.
2. Получаем новое приближение для $\tilde{\alpha}_{k, \cdot, \cdot}^h, \tilde{\beta}_{k, \cdot, \cdot}^h, k = 0, \dots, M - 1$ согласно (4.2.28).
3. Получаем новое приближение для $\tilde{m}_{\cdot, \cdot, \cdot}^h$ как решение (4.2.10) – (4.2.10).
4. Вычисляем новое приближение $J^h(\tilde{m}^h, \tilde{\alpha}^h, \tilde{\beta}^h)$ согласно (4.2.16), (4.2.17).
5. Если требуемая точность не достигнута, т.е. $\left| J^h(m^h, \alpha^h, \beta^h) - J^h(\tilde{m}^h, \tilde{\alpha}^h, \tilde{\beta}^h) \right| > Tol$, то $\alpha_{\cdot, \cdot, \cdot}^h := \tilde{\alpha}_{\cdot, \cdot, \cdot}^h; m_{\cdot, \cdot, \cdot}^h := \tilde{m}_{\cdot, \cdot, \cdot}^h$; и повторяем итерацию, начиная с шага 1 с новыми значениями функций.
6. Выбираем $\tilde{\alpha}_{\cdot, \cdot, \cdot}^h, \tilde{\beta}_{\cdot, \cdot, \cdot}^h$ и $\tilde{m}_{\cdot, \cdot, \cdot}^h$ как приближенное решение (4.2.20).

Покажем теперь, что (4.2.28) обеспечивает наискорейший спуск к минимуму для дискретного функционала стоимости (4.2.19). Рассмотрим функции α^h, β^h и их приближения $\tilde{\alpha}^h, \tilde{\beta}^h$. Выберем $r^h, \tilde{r}^h, s^h, \tilde{s}^h$ из (4.2.17) и

решения m^h, \tilde{m}^h ((4.2.13)) с матрицами $\mathbb{B}_i, \tilde{\mathbb{B}}_i$, соответственно. Рассмотрим разность:

$$\begin{aligned}
& J^h(\tilde{m}^h, \tilde{\alpha}^h, \tilde{\beta}^h) - J^h(m^h, \alpha^h, \beta^h) = \\
& = \sum_{k=0}^{M-1} \exp(-rt_k) \langle \tilde{r}_{k,\cdot,\cdot}^h - r_{k,\cdot,\cdot}^h, \tilde{m}_{k,\cdot,\cdot}^h \rangle d_1 \tau / 2 + \\
& + \sum_{k=0}^{M-1} \exp(-rt_k) \langle r_{k,\cdot,\cdot}^h, \tilde{m}_{k,\cdot,\cdot}^h - m_{k,\cdot,\cdot}^h \rangle d_1 \tau / 2 + \\
& + \sum_{k=0}^{M-1} \exp(-rt_k) \langle \tilde{s}_{k,\cdot,\cdot}^h - s_{k,\cdot,\cdot}^h, \tilde{m}_{k,\cdot,\cdot}^h \rangle d_2 \tau / 2 + \\
& + \sum_{k=0}^{M-1} \exp(-rt_k) \langle s_{k,\cdot,\cdot}^h, \tilde{m}_{k,\cdot,\cdot}^h - m_{k,\cdot,\cdot}^h \rangle d_2 \tau / 2 - \\
& + \sum_{k=0}^{M-1} \left(\langle \mathbb{A}v_{k+1,\cdot,\cdot}^h, \tilde{m}_{k+1,\cdot,\cdot}^h - m_{k+1,\cdot,\cdot}^h \rangle - \langle \mathbb{A}v_{k,\cdot,\cdot}^h, \tilde{m}_{k,\cdot,\cdot}^h - m_{k,\cdot,\cdot}^h \rangle \right) \tau + \\
& + \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} \exp(-rt_k) \left(\tilde{g}_{k,i+1/2,j+1/2}^h - g_{k,i+1/2,j+1/2}^h \right) h_1 h_2 \tau.
\end{aligned} \tag{4.2.38}$$

Условие (4.1.5) для функции g относительно m в дискретном смысле означает, что

$$\tilde{g}_{k,\cdot,\cdot}^h - g_{k,\cdot,\cdot}^h \leq (\tilde{m}_{k,\cdot,\cdot}^h - m_{k,\cdot,\cdot}^h) f_{k,\cdot,\cdot}^h. \tag{4.2.39}$$

Следовательно

$$\begin{aligned}
& J^h(\tilde{m}^h, \tilde{\alpha}^h, \tilde{\beta}^h) - J^h(m^h, \alpha^h, \beta^h) \leq \\
& \leq \sum_{k=0}^{M-1} \left(d_1 \exp(-rt_k) \langle \tilde{r}_{k,\cdot,\cdot}^h - r_{k,\cdot,\cdot}^h, \tilde{m}_{k,\cdot,\cdot}^h \rangle \tau / 2 + \right. \\
& + d_2 \exp(-rt_k) \langle \tilde{s}_{k,\cdot,\cdot}^h - s_{k,\cdot,\cdot}^h, \tilde{m}_{k,\cdot,\cdot}^h \rangle \tau / 2 + \\
& + \langle -\mathbb{A}v_{k,\cdot,\cdot}^h + \exp(-rt_k) \times \\
& \times (d_1 r_{k,\cdot,\cdot}^h / 2 + d_2 s_{k,\cdot,\cdot}^h / 2 + f_{k,\cdot,\cdot}^h), \tilde{m}_{k,\cdot,\cdot}^h - m_{k,\cdot,\cdot}^h \rangle \tau + \\
& \left. + \langle v_{k+1,\cdot,\cdot}^h, \tilde{\mathbb{B}}_k \tilde{m}_{k,\cdot,\cdot}^h - \mathbb{B}_k m_{k,\cdot,\cdot}^h \rangle \tau \right) =
\end{aligned} \tag{4.2.40}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{M-1} \left(d_1 \exp(-rt_k) \langle \tilde{r}_{k,\cdot,\cdot}^h - r_{k,\cdot,\cdot}^h, \tilde{m}_{k,\cdot,\cdot}^h \rangle \tau/2 + \right. \\
&\quad + d_2 \exp(-rt_k) \langle \tilde{s}_{k,\cdot,\cdot}^h - s_{k,\cdot,\cdot}^h, \tilde{m}_{k,\cdot,\cdot}^h \rangle \tau/2 + \\
&\quad \left. + \left\langle v_{k+1,\cdot,\cdot}^h, \left(\tilde{\mathbb{B}}_{k+1} - \mathbb{B}_{k+1} \right) \tilde{m}_{k,\cdot,\cdot}^h \right\rangle \tau \right).
\end{aligned}$$

Рассмотрим каждое слагаемое в правой части (4.2.40) по отдельности относительно $\tilde{\alpha}_{k,i,j+1/2}^h$ и $\tilde{\beta}_{k,i+1/2,j}^h$:

$$\begin{aligned}
&\langle \tilde{r}_{k,\cdot,\cdot}^h - r_{k,\cdot,\cdot}^h, \tilde{m}_{k,\cdot,\cdot}^h \rangle = h_1 h_2 d_1 \exp(-rt_k) \times \\
&\quad \times \sum_{i=0}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} \left(\tilde{r}_{k,i+1/2,j+1/2}^h - r_{k,i+1/2,j+1/2}^h \right) \tilde{m}_{k,i+1/2,j+1/2}^h = \\
&= \frac{d_1 h_1 h_2}{2} \exp(-rt_k) \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} \left(\tilde{m}_{k,i-1/2,j+1/2}^h + \tilde{m}_{k,i+1/2,j+1/2}^h \right) \times \\
&\quad \times \left(\left(\tilde{\alpha}_{k+1,i,j+1/2}^h \right)^2 - \left(\alpha_{k+1,i,j+1/2}^h \right)^2 \right); \tag{4.2.41}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\langle \tilde{s}_{k,\cdot,\cdot}^h - s_{k,\cdot,\cdot}^h, \tilde{m}_{k,\cdot,\cdot}^h \rangle = h_1 h_2 d_2 \exp(-rt_k) \times \\
&\quad \times \sum_{i=0}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} \left(\tilde{s}_{k,i+1/2,j+1/2}^h - s_{k,i+1/2,j+1/2}^h \right) \tilde{m}_{k,i+1/2,j+1/2}^h = \\
&= \frac{h_1 h_2 d_2}{2} \exp(-rt_k) \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} \left(\tilde{m}_{k,i+1/2,j-1/2}^h + \tilde{m}_{k,i+1/2,j+1/2}^h \right) \times \\
&\quad \times \left(\left(\tilde{\beta}_{k+1,i+1/2,j}^h \right)^2 - \left(\beta_{k+1,i+1/2,j}^h \right)^2 \right); \tag{4.2.42}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left\langle v_{k+1,\cdot,\cdot}^h, \left(\tilde{\mathbb{B}}_{k+1} - \mathbb{B}_{k+1} \right) \tilde{m}_{k,\cdot,\cdot}^h \right\rangle = h_1 h_2 \sum_{i=0}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} v_{k+1,i+1/2,j+1/2}^h \times \\
&\quad \times \left(\left(\tilde{\gamma}_{k+1,i+1/2,j+1/2}^1 - \gamma_{k+1,i+1/2,j+1/2}^1 \right) \tilde{m}_{k,i-1/2,j+1/2}^h + \right. \\
&\quad + \left(\tilde{\gamma}_{k+1,i+1/2,j+1/2}^2 - \gamma_{k+1,i+1/2,j+1/2}^2 \right) \tilde{m}_{k,i+1/2,j+1/2}^h + \\
&\quad + \left(\tilde{\gamma}_{k+1,i+1/2,j+1/2}^3 - \gamma_{k+1,i+1/2,j+1/2}^3 \right) \tilde{m}_{k,i+3/2,j+1/2}^h + \\
&\quad \left. + \left(\tilde{\gamma}_{k+1,i+1/2,j+1/2}^4 - \gamma_{k+1,i+1/2,j+1/2}^4 \right) \tilde{m}_{k,i+1/2,j-1/2}^h + \right. \\
&\tag{4.2.43}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\tilde{\gamma}_{k+1,i+1/2,j+1/2}^5 - \gamma_{k+1,i+1/2,j+1/2}^5 \right) \tilde{m}_{k,i+1/2,j+1/2}^h + \\
& + \left(\tilde{\gamma}_{k+1,i+1/2,j+1/2}^6 - \gamma_{k+1,i+1/2,j+1/2}^6 \right) \tilde{m}_{k,i+1/2,j+3/2}^h = \\
& = \frac{h_1 h_2}{8\tau} \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} \left(v_{k+1,i\pm 1/2,j+1/2}^h \tilde{m}_{k,i+1/2,j+1/2}^h \times \right. \\
& \times \left((1 \pm 4\tau \tilde{\alpha}_{k+1,i,j+1/2} / h_1) - (1 \pm 4\tau \alpha_{k+1,i,j+1/2} / h_1) \right) + \\
& + v_{k+1,i\pm 1/2,j+1/2}^h \tilde{m}_{k,i-1/2,j+1/2}^h \times \\
& \times \left((1 \pm 4\tau \tilde{\alpha}_{k+1,i,j+1/2} / h_1) - (1 \pm 4\tau \alpha_{k+1,i,j+1/2} / h_1) \right) \left. \right) + \\
& + \frac{h_1 h_2}{8\tau} \sum_{i=0}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} \left(v_{k+1,i+1/2,j\pm 1/2}^h \tilde{m}_{k,i+1/2,j+1/2}^h \times \right. \\
& \times \left((1 \mp 4\tau \tilde{\beta}_{k+1,i+1/2,j} / h_2) - (1 \mp 4\tau \beta_{k+1,i+1/2,j} / h_2) \right) + \\
& + v_{k+1,i+1/2,j\pm 1/2}^h \tilde{m}_{k,i+1/2,j-1/2}^h \times \\
& \times \left((1 \mp 4\tau \tilde{\beta}_{k+1,i+1/2,j} / h_2) - (1 \mp 4\tau \beta_{k+1,i+1/2,j} / h_2) \right) \left. \right).
\end{aligned}$$

Знаки \pm и \mp означают, что слагаемые входят в сумму с обоими знаками $+$ и $-$. После приведения подобных слагаемых в (4.2.41) – (4.2.43) разность (4.2.40) принимает вид суммы квадратичных полиномов относительно $\tilde{\alpha}_{k,i,j}^h$ и $\tilde{\beta}_{k,i,j}^h$:

$$\begin{aligned}
& J^h(\tilde{m}^h, \tilde{\alpha}^h, \tilde{\beta}^h) - J^h(m^h, \alpha^h, \beta^h) \leq \\
& \leq \sum_{k=0}^{M-1} \left(\sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} \left(p_{k,i,j+1/2}^1 \left((\tilde{\alpha}_{k+1,i,j+1/2}^h)^2 - (\alpha_{k+1,i,j+1/2}^h)^2 \right) \right) + \right. \\
& + q_{k,i,j+1/2}^1 \left(\tilde{\alpha}_{k+1,i,j+1/2}^h - \alpha_{k+1,i,j+1/2}^h \right) \left. \right) + \\
& + \sum_{i=0}^{N_e-1} \sum_{j=1}^{N_x-1} \left(p_{k,i+1/2,j}^2 \left((\tilde{\beta}_{k+1,i+1/2,j}^h)^2 - (\beta_{k+1,i+1/2,j}^h)^2 \right) \right) + \\
& + q_{k,i+1/2,j}^2 \left(\tilde{\beta}_{k+1,i+1/2,j}^h - \beta_{k+1,i+1/2,j}^h \right)
\end{aligned} \tag{4.2.44}$$

с коэффициентами

$$p_{k,i,j+1/2}^1 = \frac{\tau h_1 h_2 d_1}{4} \exp(-rt_k) \left(\tilde{m}_{k,i-1/2,j+1/2}^h + \tilde{m}_{k,i+1/2,j+1/2}^h \right), \tag{4.2.45}$$

$$\begin{aligned}
p_{k,i+1/2,j}^2 &= \frac{\tau h_1 h_2 d_2}{4} \exp(-rt_k) \left(\tilde{m}_{k,i+1/2,j-1/2}^h + \tilde{m}_{k,i+1/2,j+1/2}^h \right), \\
q_{k,i,j+1/2}^1 &= \frac{\tau h_2}{2} \left(\tilde{m}_{k,i-1/2,j+1/2}^h + \tilde{m}_{k,i+1/2,j+1/2}^h \right) \times \\
&\quad \times \left(v_{k+1,i+1/2,j+1/2}^h - v_{k+1,i-1/2,j+1/2}^h \right), \\
q_{k,i+1/2,j}^2 &= -\frac{\tau h_1}{2} \left(\tilde{m}_{k,i+1/2,j-1/2}^h + \tilde{m}_{k,i+1/2,j+1/2}^h \right) \times \\
&\quad \times \left(v_{k+1,i+1/2,j+1/2}^h - v_{k+1,i+1/2,j-1/2}^h \right).
\end{aligned}$$

Во-первых, отметим, что минимизация суммы в правой части (4.2.44) сводится к минимизации каждого отдельного слагаемого. Во-вторых, коэффициенты $p_{k,i,j+1/2}^1$ и $p_{k,i+1/2,j}^2$ перед квадратичными слагаемыми строго больше нуля. Таким образом, минимум каждого полинома достигается в точках

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha}_{k+1,i,\cdot}^h &= -q_{k,i,\cdot}^1 / 2p_{k,i,\cdot}^1 = \\
&= -\exp(rt_k) \left(v_{k+1,i+1/2,\cdot}^h - v_{k+1,i-1/2,\cdot}^h \right) / d_1 h_1, \\
\bar{\beta}_{k+1,\cdot,j}^h &= -q_{k,\cdot,j}^2 / 2p_{k,\cdot,j}^2 = \\
&= \exp(rt_k) \left(v_{k+1,\cdot,j+1/2}^h - v_{k+1,\cdot,j-1/2}^h \right) / d_2 h_2 \\
\forall i &= 1, \dots, N_1 - 1, \forall j = 1, \dots, N_2 - 1,
\end{aligned} \tag{4.2.46}$$

которые совпадают с выражением (4.2.28). Несмотря на то, что совпадение кажется естественным следствием приближения дифференциальной задачи, для других разностных схем (например, из [29, 83]) для выполнения условий оптимальности необходимы дополнительные итерации или коррекции.

4.3 Вычислительный эксперимент для двумерной ИСП

4.3.1 Торговля квотами на эмиссию диоксида углерода в терминах игры «среднего поля»

Для иллюстрации вычислительного алгоритма воспользуемся моделью, описывающей торговлю квотами на эмиссию для производителей, сформулированной в [29] для уравнения в терминах ИСП. Здесь рассматривается континуум агентов, взаимодействующих на макроэкономическом уровне. В рамках этой модели агенты являются производителями, у которых выбросы CO_2 регулируются правительством. Торговля квотами на выбросы (известная также как «emission trading» или «cap-and-trade») является рыночным подходом к контролю загрязнения атмосферы путем предоставления экономических стимулов для сокращения выбросов загрязняющих веществ [31]. Правительство выделяет или продает ограниченное количество квот на выброс определенного количества диоксида углерода за рассматриваемый период времени. Производители, которые хотят увеличить свои выбросы, могут покупать квоты у других агентов, желающих их продать.

Результатом производства, в которое вовлечены агенты, является уровень эмиссии $e(t)$, изменяющийся со временем. Также будем рассматривать величину разрешенного выброса $h(t)$. Положим, что агенты участвуют в переговорах, чтобы достичь максимально допустимого уровня выбросов. Будем считать, что производители в момент времени t распределены в области $\bar{\Omega} = [e_{\min}, e_{\max}] \times [h_{\min}, h_{\max}]$ согласно функции плотности $m(t, e, h)$. Начальную плотность распределения агентов на момент времени $t = 0$ обозначим как $m_0(e, h)$.

Будем считать, что выручка агента от производства определяется следующей функцией [29]

$$Y(t, e, h) = \frac{e_{\max}e - e^2/2}{c_1 + c_2m(t, e, h)}, \quad e \in [e_{\min}, e_{\max}],$$

где c_1 и c_2 – положительные константы. Более того, выручка от производства несколько уменьшается с ростом плотности агентов $m(t, e, h)$. Это означает, что агент, сталкиваясь с более жесткой конкуренцией, получает меньшую выручку.

Положим, что управление мультиагентной системой осуществляется посредством сокращения выбросов $l(t, e, h)$ и проведением переговоров $\mu(t, e, h)$. Стоимость сокращения выбросов и проведения переговоров об уровне допустимой эмиссии имеет вид

$$C_e(t, e, h) = d_1l^2(t, e, h) \text{ и } C_h(t) = d_2\mu^2(t, e, h),$$

соответственно. Здесь d_1 и d_2 – положительные константы, а квадратичная форма функции гарантирует увеличение предельных издержек.

Стоимость налога на выбросы углерода определяется формулой

$$C_a(t, e, h) = p_a(t) \min\{e(t), h(t)\},$$

где $p_a(t)$ означает налоговую ставку в момент времени t . Если количество выброса $e(t)$ меньше допустимого уровня $h(t)$, агент должен оплатить налог на осуществленный им выброс $e(t)$. Если количество эмиссии $e(t)$ превышает допустимое $h(t)$, то агент должен оплатить налог на количество, предоставленное им квотой. Налог за превышение допустимого уровня эмиссии регулируется государством и превосходит базовый налог $p_a(t)$:

$$C_b(t, e, h) = p_b(t) (e(t) - h(t))^+, \quad p_b(t) > p_a(t).$$

Верхний индекс ” + ” означает положительную часть, то есть $f^+(t) = \max\{0, f(t)\}$. Таким образом, чистая выручка агента на момент времени

t составляет

$$R(t,e,h) = Y(t,e,h) - (C_e(t,e,h) + C_h(t,e,h) + C_a(t,e,h) + C_b(t,e,h)). \quad (4.3.1)$$

Описанный процесс показывает связь между управлением $l(t,e,h)$, и $\mu(t,e,h)$ и распределением $m(t,e,h)$. Фактически они связаны уравнением Колмогорова [29]

$$\frac{\partial m}{\partial t} - \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial e^2} - \frac{\sigma_2^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial h^2} - \frac{\partial(lm)}{\partial e} + \frac{\partial(\mu m)}{\partial h} = 0 \quad \text{на } (0, T) \times \Omega \quad (4.3.2)$$

с начальным условием

$$m(0,e,h) = m_0(e,h) \quad \text{на } \bar{\Omega} \quad (4.3.3)$$

и краевым условием Неймана

$$\frac{\partial m}{\partial n} = 0 \quad \text{на } [0, T] \times \Gamma \quad (4.3.4)$$

на границе Γ области $\Omega = (e_{\min}, e_{\max}) \times (h_{\min}, h_{\max})$.

Тогда оптимальное управление континуумом агентов может быть выражено через функционал

$$\sup_{l(t), \mu(t)} \left\{ \int_0^T \exp(-rt) \int_{\Omega} R(t, e(t), h(t)) m \, d\Omega \, dt \right\}. \quad (4.3.5)$$

Чтобы переформулировать задачу в виде (4.1.1) – (4.1.4), мы производим линейное замещение $(e - e_{\min}, h - h_{\min})$ переменными (x, y) и берем минус, чтобы поменять супремум в (4.3.5) на инфинум в (4.1.4). Тогда $l(t)$ совпадает с $-\alpha(t)$; $\mu(t)$ совпадает с $-\beta(t)$.

Для проверки условия (4.1.5) используем разложение в ряд Тейлора

$$g(\tilde{m}) = g(m) + (\tilde{m} - m) \frac{\partial g(m)}{\partial m} + \frac{(\tilde{m} - m)^2}{2} \frac{\partial^2 g(\xi)}{\partial m^2}$$

по отношению к переменной $m \in \mathbf{R}$, где точка ξ лежит между значениями m и \tilde{m} . Если $\partial^2 g(\xi) / \partial m^2 \leq 0$,

$$g(\tilde{m}) - g(m) \leq (\tilde{m} - m) \frac{\partial g(m)}{\partial m}.$$

Поскольку $g(m) = m \frac{e_{\max}e - e^2/2}{c_1 + c_2m} + m (p_a(t) \min\{e, h\} + p_b(t) (e - h)^+)$, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g(\xi)}{\partial m^2} &= \left(\frac{e_{\max}e - e^2/2}{c_1 + c_2m} \left[1 - \frac{c_2m}{c_1 + c_2m} \right] \right)' = \\ &= 1 (e_{\max}e - e^2/2) \left(\frac{1}{(c_1 + c_2m)^2} \right)' = -\frac{2c_1c_2 (e_{\max}e - e^2/2)}{(c_1 + c_2m)^3} < 0, \end{aligned}$$

поскольку c_1 , c_2 и m неотрицательны.

4.3.2 Численное решение двумерной задачи

Применим алгоритм, описанный в разделе 4.2 для задачи (4.3.2) – (4.3.5).

Для численного решения задачи используем следующие значения переменных:

$$\begin{aligned} T = 2, \quad e_{\min} = 1, \quad e_{\max} = 3, \quad h_{\min} = 1, \quad h_{\max} = 5, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 0.1, \\ d_1 = 0.5, \quad d_2 = 1, \quad p_a(t) = 0.5, \quad p_b(t) = 2.0, \quad r = 0.04 \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 0.3. \end{aligned}$$

Начальное состояние агентов будем задавать распределением Гаусса

$$m_0(e, h) = \exp \left\{ -\frac{(e - \check{\mu}_e)^2}{2\check{\sigma}_e^2} - \frac{(h - \check{\mu}_h)^2}{2\check{\sigma}_h^2} \right\} / 2\pi\check{\sigma}_e\check{\sigma}_h$$

с параметрами $\check{\mu}_e = 2$, $\check{\mu}_h = 3$, $\check{\sigma}_e = \check{\sigma}_h = 0.2$ (рисунок 4.1). В этом случае большинство агентов изначально выбирают средний уровень эмиссии, а число агентов, уровень выбросов которых минимален, стремится к нулю. Для построения сетки мы используем $N_1 = N_2 = 32$, $M = 256$, что дает нам следующие параметры сетки

$$\tau = T/M, \quad h_1 = (e_{\max} - e_{\min})/N_1, \quad h_2 = (h_{\max} - h_{\min})/N_2.$$

В отсутствие контроля диффузия равномерно размазывает состояние (ри-

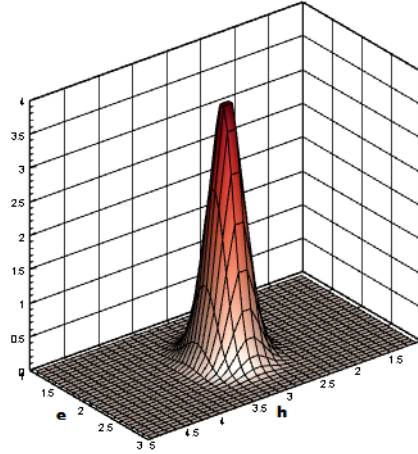


Рисунок 4.1 — Начальное распределение агентов $m(0, e, h) = m_0(e, h)$ на $\bar{\Omega}$.

сунок 4.2). Первая итерация алгоритма дает наибольший вклад в коррекцию и смещает пик агентов в сторону бóльшего уровня выбросов, поскольку уровень разрешенной эмиссии позволяет сделать это (рисунок 4.3). Однако окончательное решение не так радикально по сравнению с исходным состоянием (рисунок 4.4).

В таблице 4.1 приведена история сходимости итерационного процесса.

Результаты вычислительного эксперимента показали, что из-за высокой конкуренции агенты имеют тенденцию не оставаться в общей массе, а выбирать отличный от других уровень эмиссии, поскольку распределение агентов становится более равномерным по всей вычислительной области. Однако воздействие налоговой политики и проведение переговоров приводит к тому, что большинство агентов стремится не превышать уровень допустимой эмиссии. Более того, даже текущий уровень базового налога при высоком уровне разрешенной эмиссии не приводит к большому числу выбросов, что означает выбранную налоговую политику удовлетворительной.

Для подтверждения порядка сходимости выбранной задачи оптимизации, рассмотрим последовательность приближенных решений $m_{\cdot, \cdot, \cdot}^{h_n}$, $v_{\cdot, \cdot, \cdot}^{h_n}$, J^{h_n} с набором убывающих шагов

$$h_{1,n} = h_1/2^n, \quad h_{2,n} = h_2/2^n, \quad \tau_n = \tau/4^n, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4.$$

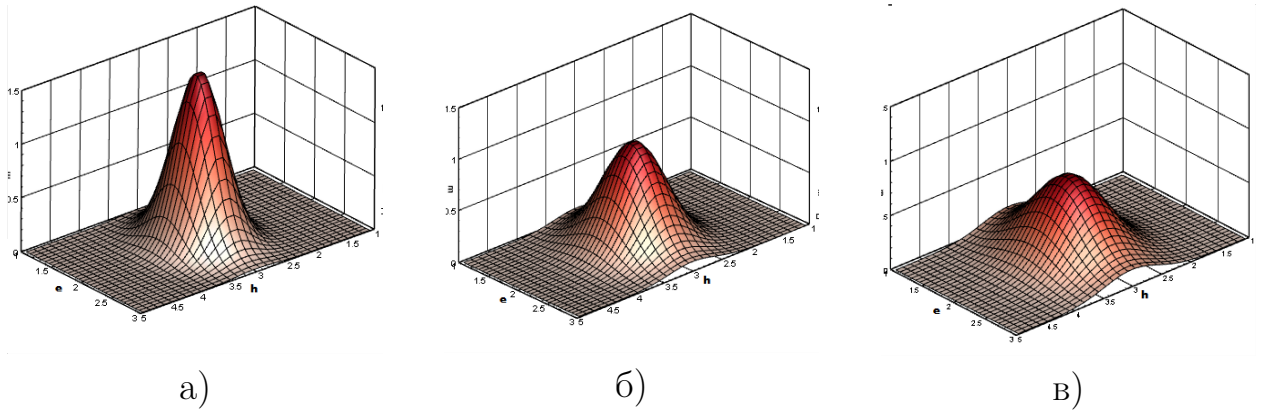


Рисунок 4.2 — Поведение функции $m(t, e, h)$ для $t = 2/3$ (а), $4/3$ (б), 2 (в) с нулевым управлением

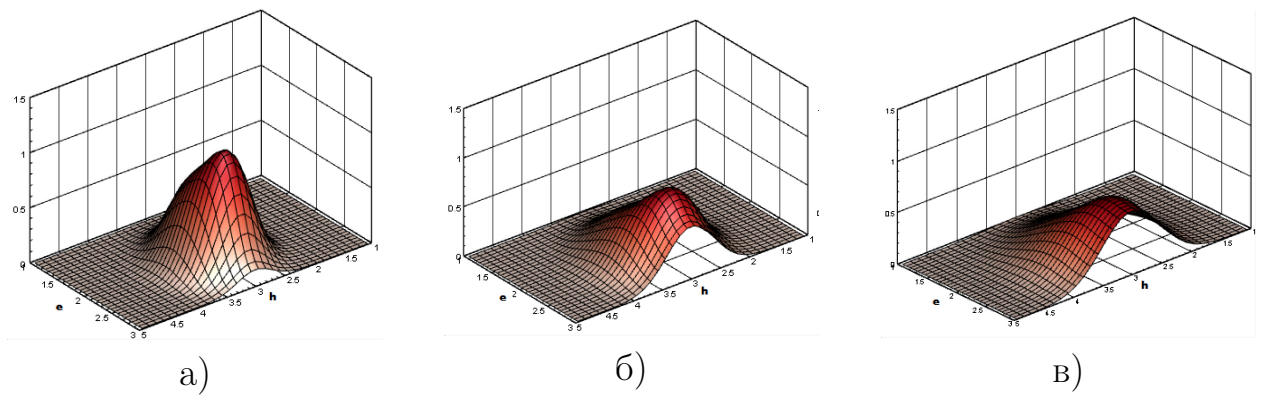


Рисунок 4.3 — Поведение функции $m(t, e, h)$ для $t = 2/3$ (а), $4/3$ (б), 2 (в) после первой итерации

Поскольку точное решение задачи оптимизации заранее неизвестно, мы будем использовать критерий Рунге [99]. Предположим сходимость приближенных решений в следующем смысле:

$$\begin{aligned}
 \max_{0 \leq k \leq M} \|m(t_k, \cdot, \cdot) - m^{h_n}(t_k, \cdot, \cdot)\|_{1,h} &\approx c_m(h_{1,n}^2 + h_{2,n}^2 + \tau_n), \\
 \max_{0 \leq k \leq M} \|v(t_k, \cdot, \cdot) - v^{h_n}(t_k, \cdot, \cdot)\|_{\infty,h} &\approx c_v(h_{1,n}^2 + h_{2,n}^2 + \tau_n), \\
 |J - J^{h_n}| &\approx c_J(h_{1,n}^2 + h_{2,n}^2 + \tau_n).
 \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

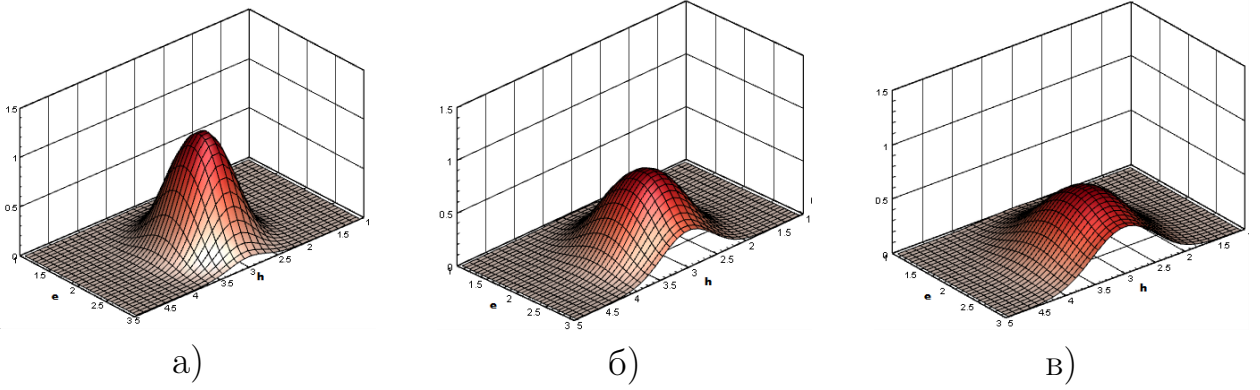


Рисунок 4.4 — Поведение функции $m(t, e, h)$ для $t = 2/3$ (а), $4/3$ (б), 2 (в) после окончания алгоритма

Таблица 4.1

История сходимости итерационного процесса для двумерной задачи

Номер итерации s	J_s^h	$\Delta_s = J_s^h - J_{s-1}^h $	Δ_s/Δ_{s-1}
0	3.16285514		
1	3.14648430	0.01637084	
2	3.14469340	0.00179090	0.10939544
3	3.14379720	0.00089620	0.50042007
4	3.14346954	0.00032767	0.36562040
5	3.14317390	0.00029563	0.90222633
6	3.14307045	0.00010346	0.34995029

Тогда разность двух последовательных приближенных решений при заданном соотношении шагов должна давать утроенную ошибку:

$$\delta_{m,n} = \max_{0 \leq k \leq M} \|m^{h_{n-1}}(t_k, \cdot, \cdot) - m^{h_n}(t_k, \cdot, \cdot)\|_{1,h} \simeq 3c_m(h_{1,n}^2 + h_{2,n}^2 + \tau_n),$$

$$\delta_{v,n} = \max_{0 \leq k \leq M} \|v^{h_{n-1}}(t_k, \cdot, \cdot) - v^{h_n}(t_k, \cdot, \cdot)\|_{\infty,h} \simeq 3c_v(h_{1,n}^2 + h_{2,n}^2 + \tau_n),$$

$$\delta_{J,n} = |J^{h_{n-1}} - J^{h_n}| \simeq 3c_J(h_{1,n}^2 + h_{2,n}^2 + \tau_n).$$

Эти значения, а также значения $\tilde{c}_{m,n} = \delta_{m,n}/3(h_{1,n}^2 + h_{2,n}^2 + \tau_n)$, $\tilde{c}_{v,n} = \delta_{v,n}/3(h_{1,n}^2 + h_{2,n}^2 + \tau_n)$, $\tilde{c}_{J,n} = \delta_{J,n}/3(h_{1,n}^2 + h_{2,n}^2 + \tau_n)$ приведены в таблице 4.2 и косвенно подтверждают приближенное равенство (4.3.6), подтверждающее порядок сходимости $O(\tau + h_1^2 + h_2^2)$.

Таблица 4.2

Сходимость последовательности приближенных решений для
двумерной задачи при уменьшении шагов разностной сетки

n	$\delta_{m,n}$	$\tilde{c}_{m,n}$	$\delta_{v,n}$	$\tilde{c}_{v,n}$	$\delta_{J,n}$	$\tilde{c}_{J,n}$
1	0.128415	0.0428	0.033781	0.01126	3.032858	1.0109
2	0.032043	0.0427	0.008423	0.01123	0.714525	0.9527
3	0.007837	0.0417	0.002072	0.01105	0.176857	0.9432
4	0.001925	0.0410	0.000495	0.01056	0.044102	0.9408

4.4 Выводы по главе 4

В главе 4 было показано, что необходимые свойства полулагранжевой аппроксимации для задач «среднего поля», справедливые в одномерном случае, можно перенести на двумерные задачи. Аппроксимации прямого по времени уравнения Колмогорова и обратного Гамильтона-Якоби-Беллмана имеют сопряженные операторы, которые монотонны в соответствующих сопряженных векторных пространствах. А дискретное приближение (4.2.28) дифференциальной связи (4.1.10) для минимизации функционала стоимости дает условие наискорейшего спуска дискретного функционала стоимости (4.2.16). Разложение в ряд Тейлора демонстрирует порядок аппроксимации $O(\tau + h_1^2 + h_2^2)$ для схемы (4.2.10) – (4.2.12). Благодаря свойству M-матрицы схема устойчива и обеспечивает сходимость в дискретной L_1 -норме. Тот же вывод справедлив для разностных схем (4.2.25), (4.2.27), (4.2.30) в дискретной L_∞ -норме.

Вычислительный алгоритм применён для моделирования экономической ситуации, регулирующей поведение рациональных производителей, стремящихся повысить свою прибыль в условиях конкуренции и налогов на выбросы диоксида углерода.

Глава 5. Двумерные задачи «среднего поля» со смешанной диффузией

Данная глава посвящена поиску численного решения двумерных задач «среднего поля» в случае, когда диффузионные процессы, происходящие вдоль пространственных переменных, связаны между собой. Здесь приводится описание основных изменений относительно задач, описанных в главе 4.

5.1 Математическая модель

Будем считать, что для построения модели используется та же вычислительная область $\Omega = (0, H_1) \times (0, H_2)$, что и в главе 4. В случае смешанной диффузии уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial t} - \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} - \frac{\sigma_2^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} - \\ - \gamma \sigma_1 \sigma_2 \frac{\partial^2 m}{\partial x \partial y} + \frac{\partial(\alpha m)}{\partial x} + \frac{\partial(\beta m)}{\partial y} = 0 \quad \text{на } (0, T) \times \Omega, \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

$$m(0, x, y) = m_0(x, y) \quad \text{на } \bar{\Omega}, \quad (5.1.2)$$

$$\frac{\partial m}{\partial n} = 0 \quad \text{на } [0, T] \times \Gamma, \quad (5.1.3)$$

где $\partial m / \partial n$ означает производную по внешней нормали на границе Γ . Параметры $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ имеют тот же смысл, что и предыдущем случае, а $\gamma \in (-1, 1)$ – коэффициент корреляции процессов, определяющих динамику поведения агентов.

В текущей модели минимизируется функционал стоимости, аналогичный используемому в главе 4:

$$J(m, \alpha, \beta) = \int_0^T \left(\exp(-rt) \times \int_{\Omega} (d_1 \alpha^2 m / 2 + d_2 \beta^2 m / 2 + g(t, x, y, m)) \, d\Omega \right) dt. \quad (5.1.4)$$

Таким образом, задача оптимизации записывается в форме

$$\left\{ \begin{array}{l} J(m, \alpha, \beta) = \int_0^T \left(\exp(-rt) \times \int_{\Omega} (d_1 \alpha^2 m / 2 + d_2 \beta^2 m / 2 + g(t, x, y, m)) \, d\Omega \right) dt, \\ \frac{\partial m}{\partial t} - \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} - \frac{\sigma_2^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} - \gamma \sigma_1 \sigma_2 \frac{\partial^2 m}{\partial x \partial y} + \frac{\partial(\alpha m)}{\partial x} + \frac{\partial(\beta m)}{\partial y} = 0 \quad \text{на } (0, T) \times \Omega \end{array} \right. \quad (5.1.5)$$

с начальным (5.1.2) и граничным (5.1.3) условиями.

Сформулируем Лагранжиан задачи (5.1.5). Выберем функцию $v \in C^\infty([0, T] \times \bar{\Omega})$ в качестве множителя Лагранжа, умножим на нее (5.1.1) и проинтегрируем по t, x :

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(m, \alpha, \beta, v) := & J(m, \alpha, \beta) - \\ & - \int_{\Omega} (v(T, x, y)m(T, x, y) - v(0, x, y)m_0(x, y)) \, d\Omega + \int_0^T \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \right. \\ & \left. + \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\sigma_2^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \gamma \sigma_1 \sigma_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \alpha \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \frac{\partial v}{\partial y} \right) m \, d\Omega \, dt. \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

Согласно алгоритму, предложенному в разделе 4.1, поиск стационарной точки задачи

$$\inf_{(m, \alpha, \beta)} \sup_v \mathfrak{F}(m, \alpha, \beta, v)$$

приводит к уравнению Гамильтона-Якоби-Беллмана

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\sigma_2^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \gamma \sigma_1 \sigma_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \alpha \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \frac{\partial v}{\partial y} = \\ = -\exp(-rt) (f + d_1 \alpha^2 / 2 + d_2 \beta^2 / 2) \quad \text{на } [0, T] \times \Omega \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

с начальным и граничным условиями

$$v(T, x, y) = 0 \quad \text{на } \bar{\Omega}, \quad (5.1.8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{на } [0, T] \times \Gamma, \quad (5.1.9)$$

а также условиями оптимальности выбираемых стратегий

$$\alpha = -\frac{\exp(rt)}{d_1} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \beta = -\frac{\exp(rt)}{d_2} \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{на } [0, T] \times \bar{\Omega}. \quad (5.1.10)$$

Таким образом, (5.1.7)–(5.1.10) характеризуют динамическую систему в дополнение к (5.1.5).

5.2 Построение вычислительной схемы для двумерной задачи со смешанной диффузией

Для нахождения численного решения задачи (5.1.1) – (5.1.3) с функциями α и β , удовлетворяющими свойству $\alpha = \beta = 0$ на $[0, T] \times \Gamma$ в силу (5.1.9) и (5.1.10) используем дискретную сетку по времени и пространству, введенную в главе 4. Решение будем искать в виде сеточной функции $m^h(t, x, y)$ на каждом временном слое t_k на $\bar{\Omega}_h$, подчиняющуюся условиям (4.2.3). Разделим аппроксимацию уравнения (5.1.1) на две части.

Аппроксимацию оператора, отвечающего за процессы переноса также будем проводить в несколько шагов. Во-первых, рассмотрим оператор,

действующий вдоль оси Ox :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha m)}{\partial x} \quad (5.2.1)$$

На каждом слое t_k для каждого узла $z_{i+1/2, j+1/2} \in \Omega_h$, зафиксируем $y_{j+1/2}$ и используем следующую конечно-разностную аппроксимацию (5.2.1) при $y = y_{j+1/2}$ по аналогии с [122]:

$$\begin{aligned} & m_{k, i+1/2, j+1/2}^h / \tau - \gamma_{k, i-1/2, j+1/2}^x m_{k-1, i-1/2, j+1/2}^h - \\ & - \gamma_{k, i+1/2, j+1/2}^x m_{k-1, i+1/2, j+1/2}^h - \gamma_{k, i+3/2, j+1/2}^x m_{k-1, i+3/2, j+1/2}^h, \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_{k, i-1/2, j+1/2}^x &= (x_i - x_{k, i, j+1/2}^-) / 2\tau h_1, \\ \gamma_{k, i+1/2, j+1/2}^x &= (x_{k, i+1, j+1/2}^- - x_{k, i, j+1/2}^+) / 2\tau h_1, \\ \gamma_{k, i+3/2, j+1/2}^x &= (x_{k, i+1, j+1/2}^+ - x_{i+1}) / 2\tau h_1, \\ x_{k, i, j+1/2}^\pm &= x_i \pm \max \left\{ 0, 2\tau \alpha_{k, i, j+1/2}^h \right\}, \\ x_{k, i+1, j+1/2}^\pm &= x_{i+1} \pm \max \left\{ 0, 2\tau \alpha_{k, i+1, j+1/2}^h \right\}. \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

Теперь рассмотрим оператор переноса, действующий вдоль оси Oy :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial(\beta m)}{\partial y}. \quad (5.2.4)$$

На каждом слое t_k для каждого узла $z_{i+1/2, j+1/2} \in \Omega_h$, зафиксируем $x_{i+1/2}$ и используем следующую конечно-разностную аппроксимацию по аналогии с (5.2.2), (5.2.3):

$$\begin{aligned} & m_{k, i+1/2, j+1/2}^h / \tau - \gamma_{k, i+1/2, j-1/2}^y m_{k-1, i+1/2, j-1/2}^h - \\ & - \gamma_{k, i+1/2, j+1/2}^y m_{k-1, i+1/2, j+1/2}^h - \gamma_{k, i+1/2, j+3/2}^y m_{k-1, i+1/2, j+3/2}^h, \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_{k, i+1/2, j-1/2}^y &= (y_j - y_{k, i+1/2, j}^-) / 2\tau h_2, \\ \gamma_{k, i+1/2, j+1/2}^y &= (y_{k, i+1/2, j+1}^- - y_{k, i+1/2, j}^+) / 2\tau h_2, \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{k,i+1/2,j+3/2}^y &= \left(y_{k,i+1/2,j+1}^+ - y_{j+1} \right) / 2\tau h_2, \\ y_{k,i+1/2,j}^\pm &= y_j \pm \max \left\{ 0, 2\tau \beta_{k,i+1/2,j}^h \right\}, \\ y_{k-1,i+1/2,j+1}^\pm &= y_{j+1} \pm \max \left\{ 0, 2\tau \beta_{k,i+1/2,j+1}^h \right\}.\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим приближение оператора в (5.1.1), отвечающего за процессы диффузии.

$$-\frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} - \frac{\sigma_2^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} - \gamma \sigma_1 \sigma_2 \frac{\partial^2 m}{\partial x \partial y}. \quad (5.2.7)$$

Для аппроксимации (5.2.7) выберем конечно-разностный шаблон, зависящий от знака γ . Введем в рассмотрение выражения – сеточные шаблоны

$$A_{i+1/2,j+1/2} = \begin{bmatrix} a_{i-1/2,j+3/2} & a_{i+1/2,j+3/2} & a_{i+3/2,j+3/2} \\ a_{i-1/2,j+1/2} & a_{i+1/2,j+1/2} & a_{i+3/2,j+1/2} \\ a_{i-1/2,j-1/2} & a_{i+1/2,j-1/2} & a_{i+3/2,j-1/2} \end{bmatrix}, \quad (5.2.8)$$

$$M_{k,i+1/2,j+1/2} = \begin{bmatrix} m_{k,i-1/2,j+3/2} & m_{k,i+1/2,j+3/2} & m_{k,i+3/2,j+3/2} \\ m_{k,i-1/2,j+1/2} & m_{k,i+1/2,j+1/2} & m_{k,i+3/2,j+1/2} \\ m_{k,i-1/2,j-1/2} & m_{k,i+1/2,j-1/2} & m_{k,i+3/2,j-1/2} \end{bmatrix}. \quad (5.2.9)$$

Для них определим операцию суммирования $A_{i+1/2,j+1/2} * M_{k,i+1/2,j+1/2}$, означающую покомпонентное умножение соответственно разложенных элементов с последующим суммированием:

$$\begin{aligned}A_{i+1/2,j+1/2} * M_{k,i+1/2,j+1/2} &= a_{i-1/2,j+3/2} m_{k,i-1/2,j+3/2} + \\ &+ a_{i+1/2,j+3/2} m_{k,i+1/2,j+3/2} + a_{i+3/2,j+3/2} m_{k,i+3/2,j+3/2} + \\ &+ a_{i-1/2,j+1/2} m_{k,i-1/2,j+1/2} + a_{i+1/2,j+1/2} m_{k,i+1/2,j+1/2} + \\ &+ a_{i+3/2,j+1/2} m_{k,i+3/2,j+1/2} + a_{i-1/2,j-1/2} m_{k,i-1/2,j-1/2} + \\ &+ a_{i+1/2,j-1/2} m_{k,i+1/2,j-1/2} + a_{i+3/2,j-1/2} m_{k,i+3/2,j-1/2}\end{aligned}$$

типа скалярного произведения двух векторов, записанных в виде таблицы 3×3 .

Если $\gamma \geq 0$, то положим

$$\begin{aligned}
a_{i-1/2,j+3/2} &= a_{i+3/2,j-1/2} = 0; \\
a_{i+1/2,j+3/2} &= a_{i+1/2,j-1/2} = -\sigma_1^2/2h_1^2 + \gamma\sigma_1\sigma_2/2h_1h_2; \\
a_{i-1/2,j+1/2} &= a_{i+3/2,j+1/2} = -\sigma_2^2/2h_2^2 + \gamma\sigma_1\sigma_2/2h_1h_2; \\
a_{i+3/2,j+3/2} &= a_{i-1/2,j-1/2} = -\gamma\sigma_1\sigma_2/2h_1h_2; \\
a_{i+1/2,j+1/2} &= 1/\tau + \sigma_1^2/h_1^2 + \sigma_2^2/h_2^2 - \gamma\sigma_1\sigma_2/h_1h_2.
\end{aligned} \tag{5.2.10}$$

В этом случае внедиагональные элементы матрицы (5.2.8) не положительны при выполнении условий

$$|\gamma| \sigma_2/\sigma_1 \leq h_2/h_1 \leq \sigma_2/|\gamma| \sigma_1. \tag{5.2.11}$$

Заметим, что при соотношении $h_2 \leq h_1 \sigma_2/\sigma_1$ неравенства (5.2.11) выполняются автоматически.

В случае $\gamma < 0$ положим:

$$\begin{aligned}
a_{i+3/2,j+3/2} &= a_{i-1/2,j-1/2} = 0; \\
a_{i+1/2,j+3/2} &= a_{i+1/2,j-1/2} = -\sigma_1^2/2h_1^2 - \gamma\sigma_1\sigma_2/2h_1h_2; \\
a_{i-1/2,j+1/2} &= a_{i+3/2,j+1/2} = -\sigma_2^2/2h_2^2 - \gamma\sigma_1\sigma_2/2h_1h_2; \\
a_{i-1/2,j+3/2} &= a_{i+3/2,j-1/2} = \gamma\sigma_1\sigma_2/2h_1h_2; \\
a_{i+1/2,j+1/2} &= 1/\tau + \sigma_1^2/h_1^2 + \sigma_2^2/h_2^2 + \gamma\sigma_1\sigma_2/h_1h_2.
\end{aligned} \tag{5.2.12}$$

Неравенства (5.2.11) также гарантируют неположительность внедиагональных элементов матрицы (5.2.8) в случае $\gamma < 0$. Комбинируя аппроксимацию оператора диффузии (5.2.8)–(5.2.12) и конечно-разностную аппроксимацию оператора переноса (5.2.2), (5.2.3), (5.2.5), (5.2.6), мы получим конечно-разностную аппроксимацию для уравнения (5.1.1)–(5.1.3)

$$\begin{aligned}
A_{i+1/2,j+1/2} * M_{k,i+1/2,j+1/2}^h &= \gamma_{k,i+1/2,j+1/2}^1 m_{k-1,i-1/2,j+1/2}^h + \\
&+ \gamma_{k,i+1/2,j+1/2}^2 m_{k-1,i+1/2,j+1/2}^h + \gamma_{k,i+1/2,j+1/2}^3 m_{k-1,i+3/2,j+1/2}^h + \\
&+ \gamma_{k,i+1/2,j+1/2}^4 m_{k-1,i+1/2,j-1/2}^h + \gamma_{k,i+1/2,j+1/2}^5 m_{k-1,i+1/2,j+3/2}^h
\end{aligned} \tag{5.2.13}$$

со следующими коэффициентами

$$\begin{aligned}
\gamma_{k,i+1/2,j+1/2}^1 &= \max \{0, \alpha_{k,i,j+1/2}/h_1\}, \\
\gamma_{k,i+1/2,j+1/2}^3 &= \max \{0, -\alpha_{k,i+1,j+1/2}/h_1\}, \\
\gamma_{k,i+1/2,j+1/2}^4 &= \max \{0, \beta_{k,i+1/2,j}/h_2\}, \\
\gamma_{k,i+1/2,j+1/2}^5 &= \max \{0, -\beta_{k,i+1/2,j+1}/h_2\}, \\
\gamma_{k,i+1/2,j+1/2}^2 &= 1/\tau - \gamma_{k,i+3/2,j+1/2}^1 - \\
&\quad - \gamma_{k,i-1/2,j+1/2}^3 - \gamma_{k,i+1/2,j+3/2}^4 - \gamma_{k,i+1/2,j-1/2}^5, \\
\forall i &= 0, \dots, N_1 - 1, j = 0, \dots, N_2 - 1
\end{aligned} \tag{5.2.14}$$

и начальными условиями

$$m_{k,i+1/2,j+1/2}^h = m_0(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}) \tag{5.2.15}$$

$\forall i = 0, \dots, N_1 - 1, j = 0, \dots, N_2 - 1$. Для обеспечения граничных условий (5.1.3) в форме Неймана для каждого узла $z_{i+1/2,j+1/2} \in \bar{\Omega}^h \setminus \Omega^h$, выходящего за границы вычислительной области Ω , положим

$$m_{k,i+1/2,j+1/2}^h = m_{k,i'+1/2,j'+1/2}^h \tag{5.2.16}$$

для ближайшего узла $z_{i'+1/2,j'+1/2} \in \Omega^h$. Тогда система (5.2.13) совместно с (5.2.14), (5.2.15) может быть переписана в виде системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathfrak{A}m_{\cdot,\cdot,\cdot}^h = \mathfrak{F}m_{0,\cdot,\cdot}^h, \tag{5.2.17}$$

где матричный оператор \mathfrak{A} удовлетворяет свойствам М-матрицы. Вид матричного оператора \mathfrak{A} представлен в приложении Б.1.

Замечание 7. Если условия (5.2.11) выполняются и

$$\tau \left| \alpha_{k,i,j+1/2}^h \right| \leq h_1/4, \quad \tau \left| \beta_{k,i+1/2,j}^h \right| \leq h_2/4 \tag{5.2.18}$$

$\forall k = 0, \dots, M, i = 1, \dots, N_1 - 1, j = 1, \dots, N_2 - 1$, то все коэффициенты в правой части (5.2.14) неотрицательны. Положим значения $m_{k-1,i+1/2,j+1/2}^h$ на слое $t = t_{k-1}$ также неотрицательными. В этом случае, благодаря свой-

ствам М-матрицы значения $m_{k,i+1/2,j+1/2}^h$ на слое $t = t_k$ также неотрицательны. В приложении В приведено разложение в ряд Тейлора для схемы (5.2.13), показывающее, что схема аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение с первым порядком $O(\tau + h_1 + h_2)$.

Отметим, что приближая оператор переноса

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha m)}{\partial x} + \frac{\partial(\beta m)}{\partial y}$$

с помощью Элерово-Лагранжева подхода, описанного в главе 4, можно получить схему с порядком $O(\tau + h_1^2 + h_2^2)$. В этом случае вместо (5.2.10), (5.2.12) в (5.2.13) используются коэффициенты

$$\begin{aligned} a_{i-1/2,j+3/2} &= a_{i+3/2,j-1/2} = 0; \\ a_{i+1/2,j+3/2} &= a_{i+1/2,j-1/2} = 1/16\tau - \sigma_1^2/2h_1^2 + |\gamma|\sigma_1\sigma_2/2h_1h_2; \\ a_{i-1/2,j+1/2} &= a_{i+3/2,j+1/2} = 1/16\tau - \sigma_2^2/2h_2^2 + |\gamma|\sigma_1\sigma_2/2h_1h_2; \\ a_{i+3/2,j+3/2} &= a_{i-1/2,j-1/2} = -|\gamma|\sigma_1\sigma_2/2h_1h_2; \\ a_{i+1/2,j+1/2} &= 3/8\tau + \sigma_1^2/h_1^2 + \sigma_2^2/h_2^2 - |\gamma|\sigma_1\sigma_2/h_1h_2, \end{aligned} \quad (5.2.19)$$

а вместо (5.2.14) рассматриваются коэффициенты, аналогичные (4.2.6) и (4.2.9)

$$\begin{aligned} \gamma_{k,i+1/2,j+1/2}^1 &= \frac{1}{16\tau} \left(1 + \frac{8\tau}{h_1} \alpha_{k,i,j+1/2} \right), \\ \gamma_{k,i+1/2,j+1/2}^2 &= \\ &= \frac{1}{16\tau} \left(3 + \frac{8\tau}{h_1} \alpha_{k,i,j+1/2} \right) + \frac{1}{16\tau} \left(3 - \frac{8\tau}{h_1} \alpha_{k,i+1,j+1/2} \right) + \\ &+ \frac{1}{16\tau} \left(3 + \frac{8\tau}{h_2} \beta_{k,i+1/2,j} \right) + \frac{1}{16\tau} \left(3 - \frac{8\tau}{h_2} \beta_{k,i+1/2,j+1} \right), \\ \gamma_{k,i+1/2,j+1/2}^3 &= \frac{1}{16\tau} \left(1 - \frac{8\tau}{h_1} \alpha_{k,i+1,j+1/2} \right), \\ \gamma_{k,i+1/2,j-1/2}^4 &= \frac{1}{16\tau} \left(1 + \frac{8\tau}{h_2} \beta_{k,i+1/2,j} \right), \\ \gamma_{k,i+1/2,j+1/2}^5 &= \frac{1}{16\tau} \left(1 - \frac{8\tau}{h_2} \beta_{k,i+1/2,j+1} \right). \end{aligned} \quad (5.2.20)$$

В этом случае, чтобы для схемы (5.2.14), (5.2.19), (5.2.20) выполнялись свойства М-матрицы должны выполняться следующие ограничения на шаг сетки:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{8\sigma_1\sigma_2} \frac{h_1}{\tau} &< \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \frac{1}{h_1} - \frac{|\gamma|}{h_2}, \quad \frac{1}{8\sigma_2\sigma_1} \frac{h_2}{\tau} < \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \frac{1}{h_2} - \frac{|\gamma|}{h_1}, \\
3/8\tau + \sigma_1^2/h_1^2 + \sigma_2^2/h_2^2 - |\gamma| \sigma_1\sigma_2/h_1h_2 &> 0 \\
\tau \left| \alpha_{k,i,j+1/2}^h \right| &\leq h_1/8, \quad \tau \left| \beta_{k,i+1/2,j}^h \right| \leq h_2/8 \\
\forall k = 0, \dots, M, \quad i = 1, \dots, N_1 - 1, \quad j = 1, \dots, N_2 - 1,
\end{aligned} \tag{5.2.21}$$

Поскольку (5.2.21) являются более строгими ограничениями по сравнению с (5.2.11), (5.2.18), то для вычислительного алгоритма будем использовать схему (5.2.10), (5.2.12), (5.2.13).

В качестве дискретной аппроксимации для (5.1.4) будем рассматривать дискретный функционал (4.2.16)

$$\begin{aligned}
J^h(m^h, \alpha^h, \beta^h) &= \\
&= \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} \exp(-rt_k) \left(d_1 r_{k,i+1/2,j+1/2}^h m_{k,i+1/2,j+1/2}^h / 2 + \right. \\
&\quad \left. + d_2 s_{k,i+1/2,j+1/2}^h m_{k,i+1/2,j+1/2}^h / 2 + g_{k,i+1/2,j+1/2}^h \right) h_1 h_2 \tau
\end{aligned} \tag{5.2.22}$$

с коэффициентами в виде (4.2.17). Для получения уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана мы повторим рассуждения из главы 4 и получим систему алгебраических уравнений относительно $V_{k-1,i+1/2,j+1/2}$, аналогичную (4.2.29):

$$\begin{aligned}
A_{i+1/2,j+1/2} * V_{k-1,i+1/2,j+1/2}^h &= \gamma_{k,i+3/2,j+1/2}^1 v_{k,i+3/2,j+1/2}^h + \\
&+ \gamma_{k,i+1/2,j+1/2}^2 v_{k,i+1/2,j+1/2}^h + \gamma_{k,i-1/2,j+1/2}^3 v_{k,i-1/2,j+1/2}^h + \\
&+ \gamma_{k,i+1/2,j+3/2}^4 v_{k,i+1/2,j+3/2}^h + \gamma_{k,i+1/2,j-1/2}^5 v_{k,i+1/2,j-1/2}^h + \\
&+ b_{k,i+1/2,j+1/2}^h \quad \forall k = 1, \dots, M, \quad i = 0, \dots, N_1 - 1, \quad j = 0, \dots, N_2 - 1,
\end{aligned} \tag{5.2.23}$$

с начальными данными

$$v_{M,\cdot,\cdot}^h = \mathbf{0} \tag{5.2.24}$$

и правой частью

$$b_{k,i+1/2,j+1/2}^h = -\exp(-rt_k) \times \left(f_{k,i+1/2,j+1/2}^h + d_1 r_{k,i+1/2,j+1/2}^h / 2 + d_2 s_{k,i+1/2,j+1/2}^h / 2 \right) \quad (5.2.25)$$

с $f_{k,i+1/2,j+1/2}^h = f(t_k, x_{i+1/2}, y_{i+1/2}, m_{k,i+1/2,j+1/2}^h) \quad \forall k = 0, \dots, M-1, \quad i = 0, \dots, N_1-1, \quad j = 0, \dots, N_2-1$. Здесь $V_{k-1,i+1/2,j+1/2}$ по аналогии с (5.2.9) имеет вид

$$V_{k-1,i+1/2,j+1/2}^h = \begin{bmatrix} v_{k-1,i-1/2,j+3/2}^h & v_{k-1,i+1/2,j+3/2}^h & v_{k-1,i+3/2,j+3/2}^h \\ v_{k-1,i-1/2,j+1/2}^h & v_{k-1,i+1/2,j+1/2}^h & v_{k-1,i+3/2,j+1/2}^h \\ v_{k-1,i-1/2,j-1/2}^h & v_{k-1,i+1/2,j-1/2}^h & v_{k-1,i+3/2,j-1/2}^h \end{bmatrix}.$$

Снова для любого узла $z_{i+1/2,j+1/2} \in \bar{\Omega}^h \setminus \Omega^h$, лежащего вне области Ω , положим

$$v_{k,i+1/2,j+1/2}^h = v_{k,i'+1/2,j'+1/2}^h \quad (5.2.26)$$

аналогично (5.2.17).

Условия оптимальности, получаемые из (5.2.22) совпадают с (4.2.28):

$$\begin{aligned} \alpha_{k,i,\cdot}^h &= -\exp(rt_k) \left(v_{k,i+1/2,\cdot}^h - v_{k,i-1/2,\cdot}^h \right) / d_1 h_1, \\ \beta_{k,\cdot,j}^h &= -\exp(rt_k) \left(v_{k,\cdot,j+1/2}^h - v_{k,\cdot,j-1/2}^h \right) / d_2 h_2 \\ \forall k &= 1, \dots, M, \quad \forall i = 1, \dots, N_1-1, \quad \forall j = 1, \dots, N_2-1. \end{aligned} \quad (5.2.27)$$

Таким образом, мы имеем дискретную задачу минимизации

$$\begin{cases} \inf_{\alpha^h, \beta^h} J^h(m^h, \alpha^h, \beta^h), \\ \mathfrak{A}m_{\cdot,\cdot,\cdot}^h = \mathfrak{F}m_{0,\cdot,\cdot}^h, \end{cases} \quad (5.2.28)$$

где оптимальность выбранных параметров гарантируется системой уравнений (5.2.23)–(5.2.26) и условиями (5.2.27):

Покажем устойчивость вычислительных схем (5.2.13)–(5.2.17) и (5.2.23)–(5.2.26).

Теорема 6. *Рассмотрим уравнения (5.2.13) с ошибкой аппроксимации $\varepsilon_{k,i+1/2,j+1/2}^h$ в правой части и начальными и граничными условиями (5.2.15), (5.2.16). Тогда для решения этой задачи имеет место оценка*

$$\max_{0 \leq k \leq M} \|m^h(t_k, \cdot, \cdot)\|_{1,h} \leq \|m_0(\cdot, \cdot)\|_{1,h} + T \max_{1 \leq k \leq M} \|\varepsilon^h(t_k, \cdot, \cdot)\|_{1,h}. \quad (5.2.29)$$

Доказательство. Как и в одномерном случае ключевым свойством коэффициентов схемы (5.2.13)–(5.2.17) является равенство

$$\begin{aligned} \gamma_{k-1,i+3/2,j+1/2}^1 + \gamma_{k-1,i+1/2,j+1/2}^2 + \gamma_{k-1,i-1/2,j+1/2}^3 + \\ + \gamma_{k-1,i+1/2,j+3/2}^4 + \gamma_{k-1,i+1/2,j-1/2}^5 = 1/\tau. \end{aligned} \quad (5.2.30)$$

Далее доказательство повторяет доказательство теоремы 4. \square

Теорема 7. *Для решения задачи (5.2.23)–(5.2.26) в условиях (5.2.18) справедлива оценка*

$$\max_{0 \leq k \leq M} \|v^h(t_k, \cdot, \cdot)\|_{\infty,h} \leq T \max_{0 \leq k \leq M-1} \|b^h(t_k, \cdot, \cdot)\|_{\infty,h}. \quad (5.2.31)$$

Доказательство. Для доказательства теоремы 7 повторяются размышления, аналогичные используемым для доказательства теоремы 5, где вместо условия (4.2.33) используется условие (5.2.30). \square

5.3 Численное моделирование

Для нахождения численного решения задачи (5.2.28) остается актуальным алгоритм, описанный в главе 4, с той лишь разницей что на каждом шаге итерации значения функции $m_{\cdot,\cdot,\cdot}^h$ вычисляются согласно (5.2.13)–(5.2.17), а функции $v_{\cdot,\cdot,\cdot}^h$ согласно (5.2.23)–(5.2.26). Покажем, что условия (5.2.27) обеспечивают наискорейший спуск для задачи (5.2.28). Как и прежде, рассмотрим функции α^h, β^h и их приближения $\tilde{\alpha}^h, \tilde{\beta}^h$. Выберем $r^h, \tilde{r}^h, s^h, \tilde{s}^h$ из (5.2.22) и решения m^h, \tilde{m}^h (5.2.13) с матрицами $\mathbb{B}_i, \tilde{\mathbb{B}}_i$, соот-

ответственно. Далее рассуждения повторяют шаги, описанные в разделе 4.2. Из (4.2.38)–(4.2.42) следует, что

$$\begin{aligned}
J^h(\tilde{m}^h, \tilde{\alpha}^h, \tilde{\beta}^h) - J^h(m^h, \alpha^h, \beta^h) &\leq \\
&\leq \sum_{k=0}^{M-1} \left(d_1 \exp(-rt_k) \langle \tilde{r}_{k,\cdot,\cdot}^h - r_{k,\cdot,\cdot}^h, \tilde{m}_{k,\cdot,\cdot}^h \rangle \tau/2 + \right. \\
&\quad + d_2 \exp(-rt_k) \langle \tilde{s}_{k,\cdot,\cdot}^h - s_{k,\cdot,\cdot}^h, \tilde{m}_{k,\cdot,\cdot}^h \rangle \tau/2 + \\
&\quad \left. + \left\langle v_{k+1,\cdot,\cdot}^h, \left(\tilde{\mathbb{B}}_{k+1} - \mathbb{B}_{k+1} \right) \tilde{m}_{k,\cdot,\cdot}^h \right\rangle \tau \right), \tag{5.3.1}
\end{aligned}$$

где $\langle \tilde{r}_{k,\cdot,\cdot}^h - r_{k,\cdot,\cdot}^h, \tilde{m}_{k,\cdot,\cdot}^h \rangle$ и $\langle \tilde{s}_{k,\cdot,\cdot}^h - s_{k,\cdot,\cdot}^h, \tilde{m}_{k,\cdot,\cdot}^h \rangle$ раскладываются согласно (4.2.41), (4.2.42) соответственно. Рассмотрим последнее слагаемое в (5.3.1):

$$\begin{aligned}
\left\langle v_{k+1,\cdot,\cdot}^h, \left(\tilde{\mathbb{B}}_{k+1} - \mathbb{B}_{k+1} \right) \tilde{m}_{k,\cdot,\cdot}^h \right\rangle &= h_1 h_2 \sum_{i=0}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} v_{k+1,i+1/2,j+1/2}^h \times \\
&\times \left(\left(\tilde{\gamma}_{k+1,i+1/2,j+1/2}^1 - \gamma_{k+1,i+1/2,j+1/2}^1 \right) \tilde{m}_{k,i-1/2,j+1/2}^h + \right. \\
&\quad + \left(\tilde{\gamma}_{k+1,i+1/2,j+1/2}^2 - \gamma_{k+1,i+1/2,j+1/2}^2 \right) \tilde{m}_{k,i+1/2,j+1/2}^h + \\
&\quad + \left(\tilde{\gamma}_{k+1,i+1/2,j+1/2}^3 - \gamma_{k+1,i+1/2,j+1/2}^3 \right) \tilde{m}_{k,i+3/2,j+1/2}^h + \\
&\quad + \left(\tilde{\gamma}_{k+1,i+1/2,j+1/2}^4 - \gamma_{k+1,i+1/2,j+1/2}^4 \right) \tilde{m}_{k,i+1/2,j-1/2}^h + \\
&\quad \left. + \left(\tilde{\gamma}_{k+1,i+1/2,j+1/2}^5 - \gamma_{k+1,i+1/2,j+3/2}^5 \right) \tilde{m}_{k,i+1/2,j+3/2}^h \right). \tag{5.3.2}
\end{aligned}$$

Отметим, что

$$\begin{aligned}
\max\{0, \pm\alpha_{k,i,j+1/2}\} &= (\pm\alpha_{k,i,j+1/2} + |\alpha_{k,i,j+1/2}|) / 2h_1; \\
\max\{0, \pm\beta_{k,i+1/2,j}\} &= (\pm\beta_{k,i+1/2,j} + |\beta_{k,i+1/2,j}|) / 2h_2; \\
\forall i = 0, \dots, N_1 - 1, j = 0, \dots, N_2 - 1.
\end{aligned} \tag{5.3.3}$$

Учитывая (5.3.3), разложение (5.3.2) по аналогии с (4.2.43) можно продолжить в виде

$$\begin{aligned}
& \left\langle v_{k+1, \cdot, \cdot}^h, \left(\tilde{\mathbb{B}}_{k+1} - \mathbb{B}_{k+1} \right) \tilde{m}_{k, \cdot, \cdot}^h \right\rangle = \\
& = \frac{h_2}{2} \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} \left(v_{k+1, i \pm 1/2, j+1/2}^h \tilde{m}_{k, i+1/2, j+1/2}^h \times \right. \\
& \times \left(\pm \tilde{\alpha}_{k+1, i, j+1/2} \mp |\tilde{\alpha}_{k+1, i, j+1/2}| \mp \alpha_{k+1, i, j+1/2} \pm |\alpha_{k+1, i, j+1/2}| \right) + \\
& + v_{k+1, i \pm 1/2, j+1/2}^h \tilde{m}_{k, i-1/2, j+1/2}^h \times \\
& \times \left. \left(\pm \tilde{\alpha}_{k+1, i, j+1/2} \pm |\tilde{\alpha}_{k+1, i, j+1/2}| \mp \alpha_{k+1, i, j+1/2} \mp |\alpha_{k+1, i, j+1/2}| \right) \right) + \\
& + \frac{h_1}{2} \sum_{i=0}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} \left(v_{k+1, i+1/2, j \pm 1/2}^h \tilde{m}_{k, i+1/2, j+1/2}^h \times \right. \\
& \times \left(\pm \tilde{\beta}_{k+1, i+1/2, j} \mp |\tilde{\beta}_{k+1, i+1/2, j}| \mp \beta_{k+1, i+1/2, j} \pm |\beta_{k+1, i+1/2, j}| \right) + \\
& + v_{k+1, i+1/2, j \pm 1/2}^h \tilde{m}_{k, i+1/2, j-1/2}^h \times \\
& \times \left. \left(\pm \tilde{\beta}_{k+1, i+1/2, j} \mp |\tilde{\beta}_{k+1, i+1/2, j}| \mp \beta_{k+1, i+1/2, j} \pm |\beta_{k+1, i+1/2, j}| \right) \right) = \quad (5.3.4) \\
& = \frac{h_2}{2} \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} \left(\left(\tilde{m}_{k, i+1/2, j+1/2}^h + \tilde{m}_{k, i-1/2, j+1/2}^h \right) \times \right. \\
& \times \left(v_{k+1, i+1/2, j+1/2}^h - v_{k+1, i-1/2, j+1/2}^h \right) \left(\tilde{\alpha}_{k+1, i, j+1/2} - \alpha_{k+1, i, j+1/2} \right) + \\
& + \left(\tilde{m}_{k, i-1/2, j+1/2}^h - \tilde{m}_{k, i+1/2, j+1/2}^h \right) \times \\
& \times \left(v_{k+1, i+1/2, j+1/2}^h - v_{k+1, i-1/2, j+1/2}^h \right) \left(|\tilde{\alpha}_{k+1, i, j+1/2}| - |\alpha_{k+1, i, j+1/2}| \right) \Big) + \\
& + \frac{h_1}{2} \sum_{i=0}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} \left(\left(\tilde{m}_{k, i+1/2, j-1/2}^h + \tilde{m}_{k, i+1/2, j+1/2}^h \right) \times \right. \\
& \times \left(v_{k+1, i+1/2, j+1/2}^h - v_{k+1, i+1/2, j-1/2}^h \right) \left(\tilde{\beta}_{k+1, i+1/2, j} - \beta_{k+1, i+1/2, j} \right) + \\
& + \left(\tilde{m}_{k, i+1/2, j-1/2}^h - \tilde{m}_{k, i+1/2, j+1/2}^h \right) \times \\
& \times \left. \left(v_{k+1, i+1/2, j+1/2}^h - v_{k+1, i+1/2, j-1/2}^h \right) \left(|\tilde{\beta}_{k+1, i+1/2, j}| - |\beta_{k+1, i+1/2, j}| \right) \right).
\end{aligned}$$

Знак \pm перед слагаемым отвечает за то, что оно входит в сумму с обоими знаками $+$ и $-$. Дальнейший поиск оптимальных значений $\tilde{\alpha}_{k+1, i, j+1/2}$ и $\tilde{\beta}_{k+1, i+1/2, j}$ в (5.3.1) с учетом (5.3.4) и (4.2.41), (4.2.42) приводит для каж-

ного параметра к алгоритму с переключениями на четыре позиции в зависимости от сочетания знаков у $\alpha_{k+1,i,j+1/2}$ с $\tilde{\alpha}_{k+1,i,j+1/2}$ и соответственно у $\beta_{k+1,i+1/2,j}$ с $\tilde{\beta}_{k+1,i+1/2,j}$. Попытаемся упростить алгоритм, используя неравенства

$$\begin{aligned} \left| |\tilde{\alpha}_{k+1,i,j+1/2}| - |\alpha_{k+1,i,j+1/2}| \right| &\leq \left| \tilde{\alpha}_{k+1,i,j+1/2} - \alpha_{k+1,i,j+1/2} \right|, \\ \left| |\tilde{\beta}_{k+1,i+1/2,j}| - |\beta_{k+1,i+1/2,j}| \right| &\leq \left| \tilde{\beta}_{k+1,i+1/2,j} - \beta_{k+1,i+1/2,j} \right|. \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

Тогда (5.3.4) переходит в оценку сверху

$$\begin{aligned} &\left\langle v_{k+1,\cdot,\cdot}^h, \left(\tilde{\mathbb{B}}_{k+1} - \mathbb{B}_{k+1} \right) \tilde{m}_{k,\cdot,\cdot}^h \right\rangle \leq \\ &\leq \frac{h_2}{2} \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} \left(\left(\tilde{m}_{k,i+1/2,j+1/2}^h + \tilde{m}_{k,i-1/2,j+1/2}^h \right) \times \right. \\ &\times \left(v_{k+1,i+1/2,j+1/2}^h - v_{k+1,i-1/2,j+1/2}^h \right) \left(\tilde{\alpha}_{k+1,i,j+1/2} - \alpha_{k+1,i,j+1/2} \right) + \\ &+ \left| \left(\tilde{m}_{k,i+1/2,j+1/2}^h - \tilde{m}_{k,i-1/2,j+1/2}^h \right) \times \right. \\ &+ \left. \left(v_{k+1,i+1/2,j+1/2}^h - v_{k+1,i-1/2,j+1/2}^h \right) \left(\tilde{\alpha}_{k+1,i,j+1/2} - \alpha_{k+1,i,j+1/2} \right) \right| \Big) + \quad (5.3.6) \\ &+ \frac{h_1}{2} \sum_{i=0}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} \left(\left(\tilde{m}_{k,i+1/2,j+1/2}^h + \tilde{m}_{k,i+1/2,j-1/2}^h \right) \times \right. \\ &\times \left(v_{k+1,i+1/2,j+1/2}^h - v_{k+1,i+1/2,j-1/2}^h \right) \left(\tilde{\beta}_{k+1,i+1/2,j} - \beta_{k+1,i+1/2,j} \right) + \\ &+ \left| \left(\tilde{m}_{k,i+1/2,j+1/2}^h - \tilde{m}_{k,i+1/2,j-1/2}^h \right) \times \right. \\ &\times \left. \left(v_{k+1,i+1/2,j+1/2}^h - v_{k+1,i+1/2,j-1/2}^h \right) \left(\tilde{\beta}_{k+1,i+1/2,j} - \beta_{k+1,i+1/2,j} \right) \right| \Big). \end{aligned}$$

Поиск оптимальных значений $\tilde{\alpha}_{k+1,i,j+1/2}$ и $\tilde{\beta}_{k+1,i+1/2,j}$ в (5.3.1) с учетом этой оценки и (4.2.41), (4.2.42) снова приводит для каждого параметра к алгоритму с переключениями теперь на две позиции в зависимости от знака у выражения внутри модуля.

Обратим внимание на величину выражений внутри модулей. В нашей задаче со сравнительно гладкими данными, в частности, с гладкой функцией $m(t,x,y)$ они на порядок меньше величины предыдущих слагаемых,

ПОСКОЛЬКУ

$$\begin{aligned} & \tilde{m}_{k,i+1/2,j+1/2}^h - \tilde{m}_{k,i-1/2,j+1/2}^h \approx \\ & \approx h_1 \frac{m(t_k, x_{i+1/2}, y_{j+1/2}) - m(t_k, x_{i-1/2}, y_{j+1/2})}{h_1} \approx h_1 \frac{\partial m}{\partial x}(t_k, x_i, y_{j+1/2}) = O(h_1) \end{aligned}$$

в сравнении с

$$\tilde{m}_{k,i+1/2,j+1/2}^h + \tilde{m}_{k,i-1/2,j+1/2}^h \approx 2m(t_k, x_i, y_{j+1/2}) > 0.$$

Два других множителя у этих слагаемых одинаковы. Обозначим их как

$$\begin{aligned} C_{1,k+1,i,j+1/2} &= \left| \left(\tilde{m}_{k,i+1/2,j+1/2}^h - \tilde{m}_{k,i-1/2,j+1/2}^h \right) \times \right. \\ & \times \left. \left(v_{k+1,i+1/2,j+1/2}^h - v_{k+1,i-1/2,j+1/2}^h \right) \left(\tilde{\alpha}_{k+1,i,j+1/2} - \alpha_{k+1,i,j+1/2} \right) \right|, \\ C_{2,k+1,i+1/2,j} &= \left| \left(\tilde{m}_{k,i+1/2,j+1/2}^h - \tilde{m}_{k,i+1/2,j-1/2}^h \right) \times \right. \\ & \times \left. \left(v_{k+1,i+1/2,j+1/2}^h - v_{k+1,i+1/2,j-1/2}^h \right) \left(\tilde{\beta}_{k+1,i+1/2,j} - \beta_{k+1,i+1/2,j} \right) \right|. \end{aligned}$$

Учитывая их малость, сосредоточимся на минимизации остальных слагаемых, принимающих вид суммы квадратичных полиномов относительно $\tilde{\alpha}_{k+1,i,j+1/2}$ и $\tilde{\beta}_{k+1,i+1/2,j}$:

$$\begin{aligned} & J^h(\tilde{m}^h, \tilde{\alpha}^h, \tilde{\beta}^h) - J^h(m^h, \alpha^h, \beta^h) \leq \\ & \leq \sum_{k=0}^{M-1} \left(\sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} \left(p_{k,i,j+1/2}^1 \left(\left(\tilde{\alpha}_{k+1,i,j+1/2}^h \right)^2 - \left(\alpha_{k+1,i,j+1/2}^h \right)^2 \right) + \right. \right. \\ & + q_{k,i,j+1/2}^1 \left(\tilde{\alpha}_{k+1,i,j+1/2}^h - \alpha_{k+1,i,j+1/2}^h \right) + C_{1,k+1,i,j+1/2} \left. \right) + \\ & + \sum_{i=0}^{N_e-1} \sum_{j=1}^{N_x-1} \left(p_{k,i+1/2,j}^2 \left(\left(\tilde{\beta}_{k+1,i+1/2,j}^h \right)^2 - \left(\beta_{k+1,i+1/2,j}^h \right)^2 \right) + \right. \\ & \left. + q_{k,i+1/2,j}^2 \left(\tilde{\beta}_{k+1,i+1/2,j}^h - \beta_{k+1,i+1/2,j}^h \right) + C_{2,k+1,i,j+1/2} \right) \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned}
p_{k,i,j+1/2}^1 &= \frac{\tau h_1 h_2 d_1}{4} \exp(-rt_k) \left(\tilde{m}_{k,i-1/2,j+1/2}^h + \tilde{m}_{k,i+1/2,j+1/2}^h \right), \\
p_{k,i+1/2,j}^2 &= \frac{\tau h_1 h_2 d_2}{4} \exp(-rt_k) \left(\tilde{m}_{k,i+1/2,j-1/2}^h + \tilde{m}_{k,i+1/2,j+1/2}^h \right), \\
q_{k,i,j+1/2}^1 &= \frac{\tau h_2}{2} \left(\tilde{m}_{k,i-1/2,j+1/2}^h + \tilde{m}_{k,i+1/2,j+1/2}^h \right) \times \\
&\quad \times \left(v_{k+1,i+1/2,j+1/2}^h - v_{k+1,i-1/2,j+1/2}^h \right), \\
q_{k,i+1/2,j}^2 &= \frac{\tau h_1}{2} \left(\tilde{m}_{k,i+1/2,j-1/2}^h + \tilde{m}_{k,i+1/2,j+1/2}^h \right) \times \\
&\quad \times \left(v_{k+1,i+1/2,j+1/2}^h - v_{k+1,i+1/2,j-1/2}^h \right).
\end{aligned} \tag{5.3.8}$$

Во-первых, как и в предыдущем случае минимизация суммы в правой части (5.3.7) сводится к минимизации каждого отдельного слагаемого. Во-вторых, коэффициенты перед квадратичными слагаемыми $p_{k,i,j+1/2}^1$ и $p_{k,i+1/2,j}^2$ строго больше нуля. Таким образом, минимум каждого полинома достигается в точках

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha}_{k+1,i,\cdot}^h &= -q_{k,i,\cdot}^1 / 2p_{k,i,\cdot}^1 = \\
&= -\exp(rt_k) \left(v_{k+1,i+1/2,\cdot}^h - v_{k+1,i-1/2,\cdot}^h \right) / d_1 h_1, \\
\bar{\beta}_{k+1,\cdot,j}^h &= -q_{k,\cdot,j}^2 / 2p_{k,\cdot,j}^2 = \\
&= -\exp(rt_k) \left(v_{k+1,\cdot,j+1/2}^h - v_{k+1,\cdot,j-1/2}^h \right) / d_2 h_2 \\
\forall i &= 1, \dots, N_1 - 1, \forall j = 1, \dots, N_2 - 1,
\end{aligned} \tag{5.3.9}$$

что совпадает с (5.2.27).

Отметим, что при сходимости алгоритма по мере убывания разностей $|\tilde{\alpha}_{k+1,i,j+1/2} - \alpha_{k+1,i,j+1/2}|$ и $|\tilde{\beta}_{k+1,i+1/2,j} - \beta_{k+1,i+1/2,j}|$ величины $C_{1,k+1,i,j+1/2}$ и $C_{2,k+1,i+1/2,j}$ остаются на порядок меньше предшествующих слагаемых, поскольку содержат эти же убывающие множители.

Для вычислительного эксперимента выберем постановку задачи из разделов 4.3.1 и 4.3.2 с $\gamma = 1/3$ в дополнение к параметрам, обозначенным в разделе 4.3.2. Таким образом, в случае, описанном в главе 4, агентам было невыгодно вступать в переговоры, поскольку уровень выбросов от этого не

зависел, и вследствие этого агенты распределялись равномерно согласно условиям, продиктованными конкуренцией. Здесь рассматривается случай, когда процесс переговоров коррелирует с процессом эмиссии. Начальное распределение агентов выбрано таким же, как и в предыдущем случае, и продемонстрировано на рисунке 4.1. В качестве параметров разбиения выберем $N_1 = N_2 = 64$, $M = 256$.

В отсутствие контроля, как и в предыдущем случае, плотность агентов распределяется равномерно по всем направлениям (рисунок 5.1). Первая итерация алгоритма дает радикальное изменение; при этом наблюдается устойчивый пик в распределении, т.е. агенты стремятся к переговорам (рисунок 5.2). На рисунке 5.3 изображено финальное распределение агентов после сходимости итерационного процесса.

Результаты вычислительного эксперимента показывают, что при выбранном уровне базового налога агенты стремятся к проведению переговоров и торговле квотами на выбросы, т.е. в отличие от случая, описанного в главе 4, распределение на горизонте времени более неравномерно. История сходимости итерационного процесса представлена в таблице 5.1.

Таблица 5.1

История сходимости итерационного процесса для задачи со смешанным контролем

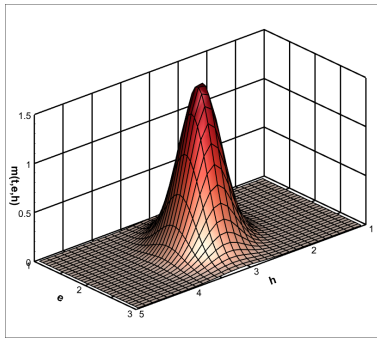
Номер итерации s	J_s^h	$\Delta_s = J_s^h - J_{s-1}^h $	Δ_s/Δ_{s-1}
0	3.15535689		
1	3.14468031	0.01067658	
2	3.14211559	0.00256472	0.24021944
3	3.14120623	0.00090936	0.35456604
4	3.14075355	0.00045268	0.49779518
5	3.14048246	0.00027110	0.59887479
6	3.14043460	0.00004786	0.17652970

Для численного подтверждения порядка сходимости выбранной задачи оптимизации, как и прежде, рассмотрим последовательность приближенных решений $m_{\cdot,\cdot,\cdot}^{h_n}$, $v_{\cdot,\cdot,\cdot}^{h_n}$, J^{h_n} с набором убывающих шагов

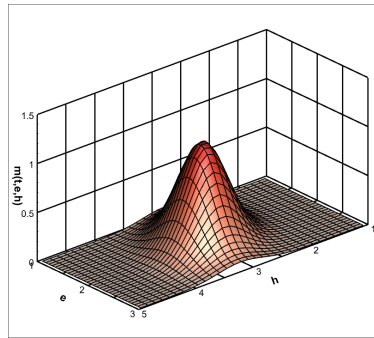
$$h_{1,n} = h_1/2^n, h_{2,n} = h_2/2^n, \tau_n = \tau/2^n, n = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Как и прежде, предположим сходимость приближенных решений в следующем смысле:

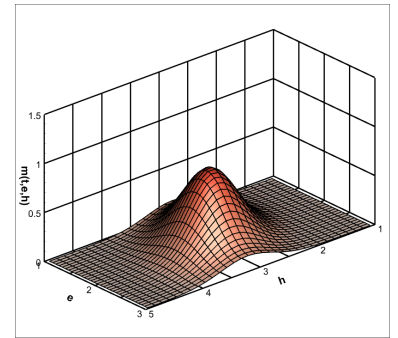
$$\begin{aligned} \max_{0 \leq k \leq M} \|m(t_k, \cdot, \cdot) - m^{h_n}(t_k, \cdot, \cdot)\|_{1,h} &\simeq c_m(h_{1,n} + h_{2,n} + \tau_n), \\ \max_{0 \leq k \leq M} \|v(t_k, \cdot, \cdot) - v^{h_n}(t_k, \cdot, \cdot)\|_{\infty,h} &\simeq c_v(h_{1,n} + h_{2,n} + \tau_n), \\ |J - J^{h_n}| &\simeq c_J(h_{1,n} + h_{2,n} + \tau_n). \end{aligned} \quad (5.3.10)$$



а)

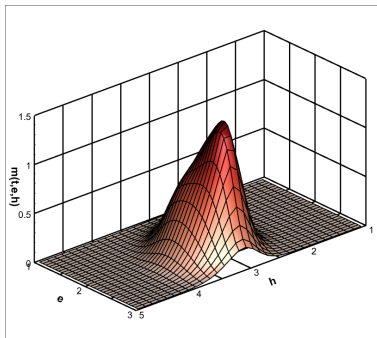


б)

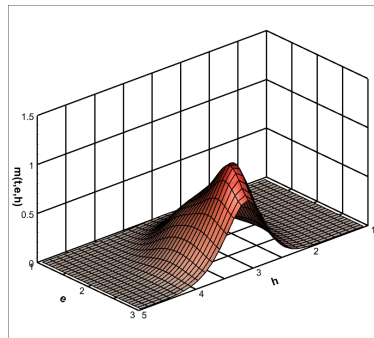


в)

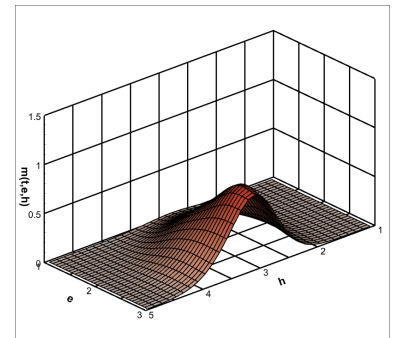
Рисунок 5.1 — Поведение функции $m(t, e, h)$ для $t = 2/3$ (а), $4/3$ (б), 2 (в) для задачи со смешанной диффузией с нулевым управлением



а)



б)



в)

Рисунок 5.2 — Поведение функции $m(t, e, h)$ для $t = 2/3$ (а), $4/3$ (б), 2 (в) для задачи со смешанной диффузией после первой итерации

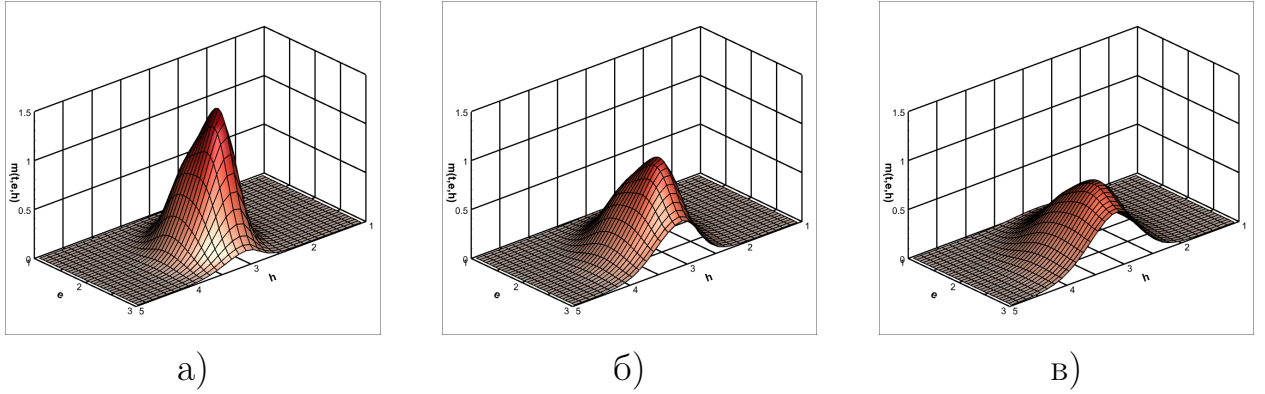


Рисунок 5.3 — Поведение функции $m(t, e, h)$ для $t = 2/3$ (а), $4/3$ (б), 2 (в) для задачи со смешанной диффузией после окончания алгоритма

Тогда разность двух последовательных приближенных решений по правилу Рунге должна давать ошибку:

$$\delta_{m,n} = \max_{0 \leq k \leq M} \|m^{h_{n-1}}(t_k, \cdot, \cdot) - m^{h_n}(t_k, \cdot, \cdot)\|_{1,h} \simeq c_m(h_{1,n} + h_{2,n} + \tau_n),$$

$$\delta_{v,n} = \max_{0 \leq k \leq M} \|v^{h_{n-1}}(t_k, \cdot, \cdot) - v^{h_n}(t_k, \cdot, \cdot)\|_{\infty,h} \simeq c_v(h_{1,n} + h_{2,n} + \tau_n),$$

$$\delta_{J,n} = |J^{h_{n-1}} - J^{h_n}| \simeq c_J(h_{1,n} + h_{2,n} + \tau_n).$$

Таблица 5.2

Скорость сходимости приближенных решений смешанной двумерной задачи

n	$\delta_{m,n}$	$\tilde{c}_{m,n}$	$\delta_{v,n}$	$\tilde{c}_{v,n}$	$\delta_{J,n}$	$\tilde{c}_{J,n}$
1	0.1886553	0.1257702	0.0017238	0.0114922	1.5533569	1.0355713
2	0.0780870	0.1041160	0.0066099	0.0088132	0.6030394	0.8040525
3	0.0290826	0.0775537	0.0024901	0.0066426	0.2784185	0.7424493
4	0.0137284	0.0732181	0.0010210	0.0054452	0.1339290	0.7142882

Хотя предложенные вычислительные схемы (5.2.13)–(5.2.17) и (5.2.23)–(5.2.26) дают только первый порядок сходимости по времени и пространству, их можно улучшить, используя некоторые специальные инструменты, например, экстраполяцию Ричардсона [99].

5.4 Выводы по главе 5

В пятой главе представлена численная схема решения двумерной задачи «среднего поля» для случая, когда процессы, моделирующие динамику системы, зависят друг от друга. Выбранные аппроксимации прямого по времени уравнения Колмогорова и обратного Гамильтона-Якоби-Беллмана также имеют сопряженные операторы, которые монотонны в соответствующих сопряженных векторных пространствах. Разложение в ряд Тейлора для таких схем демонстрирует первый порядок сходимости по времени и пространству $O(\tau + h_1 + h_2)$. Благодаря свойствам M-матриц, схемы для обоих уравнений устойчивы и обеспечивают сходимость в соответствующих нормированных пространствах.

Алгоритм был применен для моделирования экономической ситуации, регулирующей поведение рациональных производителей, участвующих в переговорах о реализации квот на выбросы в атмосферу загрязнителей.

Заключение

В рамках работы создан программный комплекс, реализующий вычислительные схемы, предложенные в главах 2 – 5 для различных одномерных и двумерных моделей игр «среднего поля». Вместе с тем,

1. рассмотрены новые постановки, основанные на теории игр «среднего поля» и применимые к оптимизационным задачам с неквадратичным контролем и задачам с ограничениями на финальное состояние;
2. построенные модели адаптированы для применения в области экологии, экономики отдельных отраслей и регионов, для достижения заданных социальных и экономических целей и прогноза критических ситуаций;
3. предложены оригинальные численные схемы решения задач, описываемых как традиционными моделями игр «среднего поля», так и их некоторыми модификациями.

Также для предложенных вычислительных схем приведены оценки устойчивости; в приложениях продемонстрирован порядок аппроксимации. Приведены численные оценки сходимости на конкретных постановках задач. Показано, что использование полулагранжевой аппроксимации позволяет улучшать некоторые свойства дискретных задач параболического типа, что позволило строить алгоритмы с высокой скоростью сходимости.

Таким образом, разработан эффективный инструмент математического моделирования, который может быть использован для прогнозирования мезо- и макро-поведения больших популяций в различных внешних условиях (экономических, социальных, экологических, политических). В дальнейшем предложенные идеи по построению вычислительных схем планируется применить для разработки алгоритмов решения задач «среднего поля» с ограничениями типа неравенств на финальное состояние (распределение) агентов и постановок с дробными направленными производными.

Список литературы

1. Волков, Ю.С. Оценки норм матриц, обратных к матрицам монотонного вида и вполне неотрицательным матрицам / Ю.С. Волков, В.Л. Мирошниченко // Сибирский математический журнал. – 2009. – Т. 50, No. 6. – С. 1248-1254.
2. Петросян, Л.А. Теория игр / Л.А. Петросян, Н.А. Зенкевич, Е.В. Шевкопляс. – СПб: БЧВ-Петербург, 2012. – 432 с.
3. Achdou, Y. Finite difference methods for mean field games / Y. Achdou // Chapter in Hamilton-Jacobi Equations: Approximations, Numerical Analysis and Applications. Lecture Notes in Mathematics. – Berlin: Springer, 2013. – 47 p.
4. Achdou, Y. Iterative strategies for solving linearized discrete mean field games systems / Y. Achdou, V. Perez // Netw. Heterog. Media. – 2012. – Vol. 7, No. 2. – P. 197-217.
5. Achdou, Y. Mean field games: numerical methods / Y. Achdou, I. Capuzzo-Dolcetta // SIAM J. Numer. Anal. – 2010. – Vol. 48, No. 3. – P. 1136-1162.
6. Achdou, Y. Mean field games: numerical methods for the planning problem / Y. Achdou, F. Camilli, I. Capuzzo-Dolcetta // SIAM J. Control Optim. – 2012. – Vol. 50, No. 1. – P. 77-109.
7. Adlakha, S. Mean field equilibrium in dynamic games with strategic complementarities / S. Adlakha, R. Johari // Operations Research. – 2013. – Vol. 61. – P. 971-989.
8. Aumann, R. Markets with a continuum of traders / R. Aumann // Econometrica. – 1994. – Vol. 62. – P. 1-17.
9. Bardi, M. Nonlinear elliptic systems and mean field games / M. Bardi, E. Feleqi // Nonlinear Differ. Equ. Appl. – 2016. – Vol. 23. – P. 3-44.

10. Bates, J.R. Multiply-upstream, semi-Lagrangian advective schemes: analysis and application to a multilevel primitive equation model / J.R. Bates, A. McDonald // Monthly Weather Review. – 1982. – Vol. 110. – P. 1832-1842.
11. Bauso, D. Opinion dynamics and stubbornness via multipopulation mean-field games / D. Bauso, D.R. Pesenti, M. Tolotti // Journal of Optimization Theory and Applications. – 2016. – Vol. 170, No. 1. – P. 266-293.
12. Behrens, J. A parallel adaptive finite-element semi-lagrangian advection scheme for the shallow water equations / J. Behrens // Modeling and Computation in Environmental Sciences. – 1997. – Vol. 59. – P. 49-60.
13. Bellman, R. Dynamic Programming / R. Bellman. – New Jersey: Princeton University Press, 1957. – 342 p.
14. Bensoussan, A. Linear-quadratic mean field games / A. Bensoussan, K. Sung, S. Yam, S. Yung // Journal of Optimization Theory and Applications. – 2016. – Vol. 169. – P. 496-529.
15. Bensoussan, A. Mean Field Games and Mean Field Type Control Theory / A. Bensoussan, J. Frehse, P. Yam. – New York: Springer-Verlag, 2013. – 128 p.
16. Bensoussan, A. The master equation in mean field theory / A.A. Bensoussan, J. Frehse, S. Yam // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. – 2015. – Vol. 103, No. 6. – P. 1441-1474.
17. Bonaventura, L. An Introduction to Semi-Lagrangian Methods for Geophysical Scale Flows / L. Bonaventura // Ercoftac Leonhar Euler lectures, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich, Swiss. – 2004. – 46 p.
18. Buckdahn, R. Some Recent Aspects of Differential Game Theory / R. Buckdahn, P. Cardaliaguet, M. Quincampoix // Dyn. Games Appl. – 2011. – Vol. 1. – P. 74-114.

19. Caines, P.E. Mean Field Games / P.E. Caines, M. Huang, R.P. Malhamé // Chapter in Handbook of Dynamic Game Theory. – Berlin: Springer, 2018, – P. 345-372.
20. Cardaliaguet, P. Notes on Mean Field Games from lectures at College de France / P. Cardaliaguet. – Dauphine: University of Paris, 2012. – 59 p. URL: <https://www.ceremade.dauphine.fr/cardalia/MFG20130420.pdf>.
21. Cardaliaguet, P. The master equation and the convergence problem in mean field games / P. Cardaliaguet, F. Delarue, J.-M. Lasry, P.-L. Lions. – New Jersey: Princeton University Press, 2019. – 211 p.
22. Cardaliaguet, P. Weak solutions for first order mean field games with local coupling / P. Cardaliaguet // Analysis and Geometry in Control Theory and its Applications. – 2013. – Vol. 11. – P. 111-158.
23. Carlini, E. Fully-discrete Semi-Lagrangian scheme for a first order mean field game problem / E.A. Carlini, F.J. Silva. // SIAM J. Numer. Anal. – 2014. – Vol. 52, No. 1. – P. 45-67.
24. Carmona, R. A probabilistic weak formulation of mean field games and applications / R. Carmona, D. Lacker // Ann. Appl. Probab. – 2015. – Vol. 25, No. 3. – P. 1189-1231.
25. Carmona, R. Mean field forward-backward stochastic differential equations / R. Carmona, F. Delarue // Electron. Commun. Probab. – 2013. – Vol. 18, No. 68. – P. 1-15.
26. Carmona, R. Mean field games with common noise / R. Carmona, F. Delarue, D. Lacker // In Ann. Probab. – 2016. – Vol. 44, No. 6. – P. 3740-30803.
27. Carmona, R. Probabilistic analysis of mean-field games / R. Carmona, F. Delarue // SIAM J. Control Optim. – 2013. – Vol. 51. – P. 2705-2734.
28. Carmona, R. Probabilistic Theory of Mean Field Games with Applications I. Mean Field FBSDEs, Control and Games / R. Carmona, F. Delarue. – Berlin: Springer, 2018. – 721 p.

29. Chang, S. Modeling and computation of mean field equilibria in producers game with emission permits trading / S. Chang, X. Wang // Commun. Nonlinear Sci. Number Simulat. – 2016. – Vol. 37. – P. 238-248.
30. Chen, H. Error estimates for triangular and tetrahedral finite elements in combination with a trajectory approximation of the first derivatives for advection-diffusion equations / H. Chen, Q. Lin, V.V. Shaidurov, J. Zhou // Numerical Analysis and Applications. – 2011. – Vol. 4, No. 4. – P. 345-362.
31. Climate Change 101: Understanding and Responding to Global Climate Change. Cap and Trade: Key Terms Glossary, 2014. URL: <https://docplayer.net/20582252-Climate-change-101-cap-and-trade.html>
32. Conte, S.D. Elementary numerical analysis. An algorithmic approach / S.D. Conte, C. Boor. – New York: McGraw-Hill, 1980. – 432 p.
33. Courant, R. On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences / R. Courant, E. Isaacson, M. Rees // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1952. – Vol. 5. – P. 243-255.
34. Diamond, D.W. Bank runs, deposit insurance, and liquidity. The Journal of Political Economy / D.W. Diamond, P.H. Dybvig // The Journal of Political Economy. – 1983. – Vol. 91. – P. 401-419.
35. Douglas, Jr. Numerical methods for convection dominated diffusion problems based on combining the method of characteristics with finite element or finite difference procedures / Jr. Douglas, T.F. Russell // SIAM Journal of Numerical Analysis. – 1982. – Vol. 19. – P. 871-885.
36. Dukowicz, J.K. Accurate conservative remapping (rezoning) for arbitrary Lagrangian-Eulerian computations / J.K. Dukowicz, J.W. Kodis // SIAM J. Sci. Stat. Comput. – 1987. – Vol. 8. – P. 305-321.

37. Dukowicz, J.K. Incremental Remapping as a Transport / Advection Algorithm. J.K. Dukowicz, J.R. Baumgardner // Journal of Computational Physics. – 2000. – Vol. 160. – P. 318-335.
38. Dupont, T. Back and forth error compensation and correction methods for semi-Lagrangian schemes with application to level set interface computations / T. Dupont, Y. Liu // J. Math. Comp. – 2007. – Vol. 76, No. 258. – P. 647-668.
39. Efremov, A. Semi-Lagrangian method for advection problem with adaptive grid / A. Efremov, E. Karepova, V. Shaydurov, A. Vyatkin // AIP Conference Proceedings. – 2016. – Vol. 1773. – P. 100003. 4
40. Enright, D. A fast and accurate semi-Lagrangian particle level set method / D. Enright, F. Losasso, R. Fedkiw // Computers and Structures. – 2005. – Vol. 83. – P. 479-490.
41. Ewing, R.E. A summary of numerical methods for time-dependent advection-dominated partial differential equations / R.E. Ewing, H.J. Wang // Comput. Applied Mathematics. – 2001. – Vol. 128. – P. 423-445.
42. Falcone, M. Convergence analysis for a class of semi-lagrangian advection schemes / M. Falcone, R. Ferretti // SIAM Journal of Numerical Analysis. – 1998. – Vol. 35. – P. 909-940.
43. Falcone, M. Semi-Lagrangian Approximation Schemes for Linear and Hamilton-Jacobi Equations / M. Falcone, R. Ferretti. – Philadelphia: SIAM, 2014. – 319 p.
44. Ferreira, R. On the convergence of finite state mean-field games through Γ -convergence / R. Ferreira, D. Gomes // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2014. – Vol. 418, No. 1. – P. 211-230.
45. Ferretti, R. On the relationship between semi-Lagrangian and Lagrange-Galerkin schemes / R. Ferretti // Numer. Math. – 2013. – Vol. 124. – P. 31-56.

46. Ferretti, R. Equivalence of semi-Lagrangian and Lagrange–Galerkin schemes under constant advection speed / R. Ferretti // *J. Comput. Math.* – 2010. – Vol. 28. – P. 461-473.
47. Fjørtoft, R. A numerical method of integrating the barotropic vorticity equation / R. Fjørtoft // *Tellus.* – 1952. – Vol. 4. – P. 179-194.
48. Friedman, A. *Differential games* / A. Friedman. – NY: Wiley, 1971. – 368 p.
49. Gomes, A., Nurbekyan, L., Pimentel, E.A. *Economic Models and Mean-field Games Theory*, 2015, URL: https://impa.br/wp-content/uploads/2017/04/30CBM_04.pdf.
50. Gomes, D. Continuous time finite state mean-field games / D. Gomes, J. Mohr, R.R. Souza // *Appl. Math. and Opt.* – 2013. – Vol. 68, No. 1. – P. 99-143.
51. Gomes, D. Discrete time, finite state space mean field games / D. Gomes, J. Mohr, and R.R. Souza // *Journal de Mathematiques Pures et Appliques.* – 2010. – Vol. 93, No. 2. – P. 308-328.
52. Gomes, D. *Regularity theory for mean-field game systems* / D. Gomes, E. Pimentel, V. Voskanyan. – Berlin: Springer, 2016. – 118 p.
53. Gomes, D.A. Mean field games models - a brief survey / D.A. Gomes, J. Saude // *Dynamic Games and Applications.* – 2014. – Vol. 4. – P. 110-154.
54. Guéant, O. From infinity to one: The reduction of some mean field games to a global control problem. – 2013. URL: <http://arxiv.org/abs/1110.3441v2>
55. Guéant, O. A reference case for mean field games models / O. Guéant // *J. Math. Pures Appl.* – 2009. – Vol. 92, No. 3. – P. 276-294.

56. Guéant, O. An existence and uniqueness result for mean field games with congestion effect on graphs / O. Guéant. // Applied Mathematics and Optimization. – 2015. – Vol. 72. – P. 291-303.
57. Guéant, O. Mean Field Games and Applications to Economics. Ph. D. Thesis / O. Guéant // Université Paris Dauphine, Paris, 2009.
58. Guéant, O. Mean field games and oil production / O. Guéant, J.-M. Lasry, P.-L. Lions // Technical report. – Paris: College de France, 2010.
59. Guéant, O. Mean field games equations with quadratic Hamiltonian: a specific approach / O. Guéant // Math. Models Methods Appl. Sci. – 2012. – Vol. 22, No. 9. – P. № 1250022.
60. Guéant, O. Mean field games with a quadratic Hamiltonian: a constructive scheme / O. Guéant // Advances in Dynamic Games. Ann. Internat. Soc. Dynam. Games. – 2012. – Vol. 12. – P. 229-241.
61. Guéant, O. New numerical methods for mean field games with quadratic costs / O. Guéant // Netw. Heterog. Media. – 2012. – Vol. 7, No. 2. – P. 315-336.
62. Guéant, O., Mean Field Games and Applications / O. Guéant, J.-M. Lasry, P.-L. Lions / Chapter in Paris-Princeton lectures in mathematical finance. Lecture Notes in Mathematics. – Berlin: Springer, 2010. – P. 205-267.
63. Harris, L. M. A flux-form version of the conservative semi-Lagrangian multi-tracer transport scheme (CSLAM) on the cubed sphere grid / L.M. Harris, P.H. Lauritzen, R. Mittal // J. Comput. Phys. – 2011. – Vol. 230, No. 4. – P. 1215-1237.
64. Huang, M. Large population stochastic dynamic games: closed-loop McKean-Vlasov systems and the Nash certainty equivalence principle / M. Huang, R.P. Malhamé, P.E. Caines // Commun. Inf. Syst. – 2006. – Vol. 6, No. 3. – P. 221-251.
65. Huang, M. Large-population cost-coupled LQG problems with nonuniform agents: individual-mass behavior and decentralized ε -Nash equilibria /

- M. Huang, R.P. Malhamé, P.E. Caines // IEEE Trans. Automat. Control. – 2007. – Vol. 52, No. 9. – P. 1560-1571.
66. Huang, M. Large-population LQG games involving a major player: the Nash certainty equivalence principle / M. Huang // SIAM J. Control Optim. – 2009. – Vol. 48, No. 5. – P. 3318-3353.
67. Huang, M. Mean Field Stochastic Games with Discrete States and Mixed Players / M. Huang // Chapter in Game Theory for Networks. GameNets 2012. Lecture Notes of the Institute for Computer Sciences, Social Informatics and Telecommunications Engineering, Vol. 105. – Berlin: Springer, 2012. – P. 138-152.
68. Huang, M. The NCE (mean field) principle with locality dependent cost interactions / M. Huang, P. Caines, R.P. Malhamé // IEEE Trans. Automat. Control. – 2010. – Vol. 55, No. 12. – P. 2799-2805.
69. Irving, G. Efficient simulation of large bodies of water by coupling two- and three- dimensional techniques / G. Irving, E. Guendelman, F. Losasso, R. Fedkiw // ACM Trans. Graph. – 2006. – Vol. 25, No. 3. – P. 805-811.
70. Kim, B.-M. Advections with significantly reduced dissipation and diffusion / B.-M. Kim, Y. Liu, I. Llamas, J. Rossignac // IEEE Trans. on Vis. and Comput. Graph. – 2007. – Vol. 13, No. 1. – P. 135-144.
71. Kim, B.-M. Using BFEC for fluid simulation / B.-M. Kim, Y. Liu, I. Llamas, J. Rossignac // Conference: Proceedings of the Eurographics Workshop on Natural Phenomena. – 2005. – P. 51-56.
72. Kizilkale, A.C. A class of collective target tracking problems in energy systems: Cooperative versus non-cooperative mean field control solutions / A.C. Kizilkale, R.P. Malhame // 53rd IEEE Conference on Decision and Control. – 2014. – P. 3493-3498.
73. Kizilkale, A.C. Collective target tracking mean field control for electric space heaters / A.C. Kizilkale, R.P. Malhame // 22nd Mediterranean Conference on Control and Automation. – 2014. – P. 829-834.

74. Kizilkale, A.C. Collective target tracking mean field control for markovian jumpdriven models of electric water heating loads / A.C. Kizilkale, R.P. Malhame // IFAC World Congress 19. – 2014. – P. 1867-1872.
75. Klar, A. A semi-Lagrangian method for a Fokker-Planck equation describing fiber dynamics / A. Klar, P. Reuterswärd, M. Seand // Journal of Scientific Computing. – 2009. Vol. 38, No. 3. – P. 349-367.
76. Kolokoltsov, V.N, Yang, W. Inspection games in a mean field setting, 2015, URL: <http://arxiv.org/abs/1507.08339>
77. Kolokoltsov, V.N. Existence of solutions to path-dependent kinetic equations and related forward-backward systems / V.N. Kolokoltsov, W. Yang // Open Journal of Optimization. – 2013. – Vol. 2. – P. 39-44.
78. Kolokoltsov, V.N. Mean field game model of corruption / V.N. Kolokoltsov, O. Malafeyev // Dynamic Games and Applications. – 2017. – Vol. 7. – P. 34-47.
79. Kolokoltsov, V.N. Nonlinear Markov processes and kinetic equations. Volume 182 of Cambridge Tracts in Mathematics / V.N. Kololotsov. – New York: Cambridge University Press, 2010. – 373 p.
80. Kolokoltsov, V.N., Li, J.J., Yang, J.J. Mean field games and nonlinear Markov processes, 2011, URL: <https://arxiv.org/abs/1112.3744>
81. Kolokoltsov, V.N., Yang W. Sensitivity analysis for HJB equations with an application to a coupled backward-forward system, 2013, URL: <https://arxiv.org/abs/1303.6234>
82. Krishnamurthi, T.N. Numerical integration of primitive equation by a quasi- Lagrangian advective scheme / T.N. Krishnamurthi // Journal of Applied Meteorology. – 1962. – Vol. 1. – P. 508-521.
83. Lachapelle, A. Computation of mean field equilibria in economics / A. Lachapelle, J. Salomon, G. Turinici // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. – 2010. Vol. 20. – P. 567-588.

84. Lachapelle, A. Efficiency of the price formation process in presence of high frequency participants: a mean field game analysis / A. Lachapelle, J.-M. Lasry, C.-A. Lehalle, P.-L. Lions // *Mathematics and Financial Economics*. – 2016. – Vol. 10. – P. 223-262.
85. Lachapelle, A. Lachapelle, A. On a mean field game approach modeling congestion and a version in pedestrian crowds / A. Lachapelle, M.T. Wolfram // *Transportation Research Part B: Methodological*. – 2011. – Vol. 45. – P. 1572-1589.
86. Laprise, J.P., Plante R. A class of semi-Lagrangian integrated-mass (SLIM) numerical transport algorithms / J.P. Laprise, R. Plante // *Monthly Weather Review*. – 1995. – Vol. 123. – P. 553-565.
87. Lasry, J.-M. Jeux ‘a champ moyen I. [Игры среднего поля I] / J.-M. Lasry, P.-L. Lions // *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*. – 2006. – Vol. 343, No. 9. – P. 619-625.
88. Lasry, J.-M. Jeux ‘a champ moyen II. Horizon fini et controle optimal. [Игры среднего поля II. Конечный горизонт и оптимальное управление] / J.-M. Lasry, P.-L. Lions // *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*. – 2006. – Vol. 343, No. 10. – P. 679-684.
89. Lasry, J.-M. Mean field games / J.-M. Lasry, P.-L. Lions // *Cahiers de la Chaire Finance et Developpement Durable*. [Курс лекций]. – 2007.
90. Lasry, J.-M. Mean field games / J.-M. Lasry, P.-L. Lions // *Jpn. J. Math.* – 2007. – Vol. 2, No. 1. – P. 229-260.
91. Lauritzen, P. H. A conservative semi -Lagrangian multi-tracer transport scheme (CSLAM) on the cubed sphere grid / P.H. Lauritzen, R.D. Nair, P.A. Ullrich // *J. Comput. Phys.* – 2010. – Vol. 229, No. 5. – P. 1401-1424.
92. Li, T. Asymptotically optimal decentralized control for large population stochastic multiagent systems / T. Li, J. Zhang // *IEEE Trans. Automat. Control*. – 2008. – Vol. 53, No. 7. – P. 1643-1660.

93. Lions, P.-L. College de france course on mean-field games. [Курс лекций]. – 2007. – 2011.
94. Losasso, F. Simulating water and smoke with an octree data structure / F. Losasso, F. Gibou, R. Fedkiw // ACM Trans. Graph. – 2004. – Vol. 23. – P. 457-462.
95. Losasso, F. Spatially adaptive techniques for level set methods and incompressible flow / F. Losasso, R. Fedkiw, S. Osher // Computers and Fluids. – 2006. – Vol. 35. – P. 995-1010.
96. Lucas, Jr. Econometric Policy Evaluation: A Critique / Jr. Lucas // Chapter in “The Phillips Curve and Labor Markets”. – Amsterdam: North-Holland. – 1976. – P. 19-46.
97. Machenhauer, B. Design of semi-implicit cell-integrated semi-Lagrangian model / B. Machenhauer, M. Olk // Max Planck Institute for Meteorology Tech. Rep. – 1998. – Vol. 265. – P. 76-85.
98. Machenhauer, B. The implementation of the semi-implicit scheme in cell-integrated semi-Lagrangian models / B. Machenhauer, M. Olk // Atmosphere – Ocean. – 1997. – Vol. 35, No. 1. – P. 103-126.
99. Marchuk, G.I. Difference Methods and Their Extrapolations / G.I Marchuk, V.V. Shaidurov. – New York: Springer, 1983. – 334 p.
100. McConnell, C. Economic. Principles, Problems, and Policies / C. McConnell, S. Brue, S. Flynn // New York: McGraw-Hill, 1969. – 815 p.
101. McDonald, A. Improving the estimate of the departure point in a two time level semi-Lagrangian and semi-implicit model / A. McDonald, J.R. Bates // Monthly Weather Review. – 1987. – Vol. 115. – P. 737-739.
102. Milgrom, P. Rationalizability, learning, and equilibrium in games with strategic complementarities / P. Milgrom, J. Roberts // Econometrica. – 1990. – Vol. 58. – P. 1255-1277.

103. Moretti, G. A new and improved computational technique for 2D unsteady compressible flows / G. Moretti // AIAA Journal. – 1984. – Vol. 22. – P. 758-765.
104. Morton, K.W. A comparison of flux-limited difference schemes and characteristic Galerkin methods for shock modelling / K.W. Morton, P. Sweby // Journal of Computational Physics. – 1987. – Vol. 73. – P. 203-230.
105. Morton, K.W. Characteristic Galerkin methods for hyperbolic problems / K.W. Morton // Proceedings of the 5th GAMM Conference on Numerical Methods in Fluid Mechanics. – 1983. – P. 243-250.
106. Nash, J. Equilibrium points in n-person games / J. Nash // Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA. – 1950. – Vol. 36. – P. 48-49.
107. Nash, J. Non-cooperative games / J. Nash // Annals of Mathematics. – 1951. – Vol. 54. – P. 286-295.
108. Nguyen, S.L. Linear-quadratic-gaussian mixed games with continuum-parametrized minor players / S.L. Nguyen, M. Huang // SIAM J. Control Optim. – 2012. – Vol. 50, No. 5. – P. 2907-2937. 50, №5. – P. 2907–2937.
109. Økland, H. On a numerical method of integrating the barotropic vorticity equation / H. Økland // Geofysike Publikasjoner, Geophysica Norvegica [Геофизические публикации, геофизика Норвегии]. – 1961. – Vol. 22. – P. 1-10.
110. Pironneau, O. On the transport-diffusion algorithm and its applications to the Navier-Stokes equations / O. Pironneau // Numerische Mathematik [Вычислительная математика]. – 1982. – Vol. 38. – P. 309-332.
111. Plemmons, R.J. M-matrix characterizations. I—nonsingular M-matrices / R.J. Plemmons // Linear Algebra and its Applications. – 1977. – Vol. 18, No. 2. – P. 175-188.

112. Poretta, A. On the planning problem for a class of mean field games / A. Porretta // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. – 2013. – Vol. 351. – P. 457-462.
113. Porretta, A. On the planning problem for the mean field games system / A. Porretta // Dyn. Games Appl. – 2014. – Vol. 4, No. 2. – P. 231-256.
114. Pudykiewicz, J. Some properties and comparative performance of the semi-Lagrangian method of Robert in the solution of the advection diffusion equation / J. Pudykiewicz, A. Staniforth // Atmosphere-Ocean. – 1984. – Vol. 22. – P. 283-304.
115. Purnell, D.K. Purnell, D.K. Solution of the advective equation by upstream interpolation with a cubic spline / D.K. Purnell // Monthly Weather Review. – 1976. – Vol. 104. – P. 42-48.
116. Quarteroni, A. Numerical Approximation of Partial Differential Equations / A. Quarteroni, A. Valli // Berlin: Springer Verlag, 2008. – 543 p.
117. Robert, A. A semi-Lagrangian and semi-implicit numerical integration scheme for the primitive meteorological equations / A. Robert // Journal of the Meteorological Society of Japan. – 1982. – Vol. 60. – P. 319-325.
118. Robert, A. A stable numerical integration scheme for the primitive meteorological equations / A. Robert // Atmosphere-Ocean. – 1981. – Vol. 19. – P. 35-46.
119. Sawyer, J.S. A semi-lagrangian method of solving the vorticity advection equation / J.S. Sawyer // Tellus. – 1963. – Vol. 15. – P. 336-342.
120. Scroggs, J.S. A conservative semi-Lagrangian method for multidimensional fluid dynamics applications / J.S. Scroggs, F.H. Semazzi // Numerical Methods for Partial Differential Equations. – 1995. – Vol. 11, No. 5. – P. 445-452.
121. Selle, A. An unconditionally stable MacCormack method / A. Selle, R. Fedkiw, B. Kim, Y. Liu, J. Rossignac // J. of Sci. Comp. – 2008. – Vol. 35, No. 2. – P. 350-371.

122. Shaidurov, V. Semi-Lagrangian difference approximations with different stability requirements / V. Shaidurov, A. Vyatkin, E. Kuchunova // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2018. – Vol. 33, No. 2. – P. 123-135.
123. Shaidurov, V.V. Numerical simulation of supersonic flows in a channel / V.V. Shaidurov, G.I. Shchepanovskaya, V. Yakubovich // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. – 2012. – Vol. 27, No. 6. – P. 585-601.
124. Shaydurov, V. Computation of Mean-Field Equilibria with Correlated Stochastic Processes / V. Shaydurov, S. Zhang, V. Kornienko // Lecture Notes in Computer Science. – 2019. – Vol. 11386. – P. 468-475.
125. Shaydurov, V. Conservative difference schemes for the Computation of Mean-Field Equilibria / V. Shaydurov, S. Zhang, E. Karepova // AIP Conference Proceedings. – 2017. – Vol. 1892. – P. 20-35.
126. Shaydurov, V.V. “Mean Field Games” as mathematical models for control and optimization of business activity / V.V. Shaydurov, V.S. Kornienko // J. Sib. Fed. Univ. Humanit. soc. sci. – 2019. – Vol. 12, No. 4. – P. 701-715.
127. Staniforth, A. Semi-lagrangian integration schemes for atmospheric models-a review / A. Staniforth, J. Côté // Monthly Weather Review. – 1991. – Vol. 119. – P. 2206-2223.
128. Strain, J. Tree methods for moving interfaces / J. Strain // J. Comput. Phys. – 1999. – Vol. 151. – P. 616-648.
129. Temperton, C. An efficient two-time-level semi-lagrangian semi-implicit integration scheme / C. Temperton, A. Staniforth // Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society. – 1987. – Vol. 113. – P. 1025-1039.
130. Vives, X. Nash equilibrium with strategic complementarities / X. Vives // Journal of Mathematical Economics. – 1990. – Vol. 19. – P. 305-321.

131. Williamson, D.L. Two dimensional semi-Lagrangian transport with shape preserving interpolation / D.L. Williamson, P. Rasch // Monthly Weather Review. – 1989. – Vol. 117. – P. 102-129.
132. Yang, J. Learning Deep Mean Field Games for Modeling Large Population Behavior / J. Yang, X. Ye, R. Trivedi, H. Xu, H. Zha // ICLR 2018 Mathematics, Computer Science. – 2018. – 15 p.
133. Zhang, Q. On donating regions: Lagrangian flux through a fixed curve / Q. Zhang // SIAM Rev. – 2013. – Vol. 55. – P. 443-461.

Список рисунков

2.1	Криволинейная трапеция $Q_{i+1/2}$, соответствующая узлу $(t_k, x_{i+1/2})$	31
2.2	Распределение плотности агентов $m(t, x)$ после сходимости итерационного процесса при $p(t) \equiv 1$ с разных ракурсов . . .	52
2.3	Начальное распределение плотности агентов при $t = 0$ (а) и распределение агентов при $t = T$ и разной ценовой политике (б)	53
2.4	Вид функции $F(\alpha, t, x)$ в зависимости от α в соответствии с (2.3.13) (а) и (2.3.15) (б)	56
2.5	Распределение плотности агентов после сходимости итерационного процесса в соответствии с (2.3.13)	57
2.6	Распределение плотности агентов после сходимости итерационного процесса в соответствии с (2.3.15)	57
3.1	Начальное распределение агентов $m_0(x)$ (а); $\tilde{m}(T, x)$ для различных итераций и $m_{\text{tag}}(x)$ (б).	71
3.2	Сравнение различных $\tilde{m}(T, x)$ в зависимости от величины штрафа	72
4.1	Начальное распределение агентов $m(0, e, h) = m_0(e, h)$ на $\bar{\Omega}$. . .	96
4.2	Поведение функции $m(t, e, h)$ для $t = 2/3$ (а), $4/3$ (б), 2 (в) с нулевым управлением	97
4.3	Поведение функции $m(t, e, h)$ для $t = 2/3$ (а), $4/3$ (б), 2 (в) после первой итерации	97
4.4	Поведение функции $m(t, e, h)$ для $t = 2/3$ (а), $4/3$ (б), 2 (в) после окончания алгоритма	98
5.1	Поведение функции $m(t, e, h)$ для $t = 2/3$ (а), $4/3$ (б), 2 (в) для задачи со смешанной диффузией с нулевым управлением . . .	117
5.2	Поведение функции $m(t, e, h)$ для $t = 2/3$ (а), $4/3$ (б), 2 (в) для задачи со смешанной диффузией после первой итерации . . .	117

- 5.3 Поведение функции $m(t, e, h)$ для $t = 2/3$ (а), $4/3$ (б), 2 (в) для задачи со смешанной диффузией после окончания алгоритма 118

Список таблиц

2.1	История сходимости итеративного процесса для задачи с неквадратичным управлением в виде (2.3.5) при $p(t) \equiv 1$.	53
2.2	Сходимость последовательности приближенных решений для задачи с неквадратичным управлением (2.3.5) при уменьшении шагов разностной сетки	55
2.3	История сходимости итеративного процесса для задачи с неквадратичным управлением в соответствии с (2.3.13) и (2.3.15) при $p(t) \equiv 1$	58
3.1	История сходимости итерационного процесса для задачи планирования	71
3.2	Сходимость приближенных решений для задачи планирования	72
4.1	История сходимости итерационного процесса для двумерной задачи	98
4.2	Сходимость последовательности приближенных решений для двумерной задачи при уменьшении шагов разностной сетки	99
5.1	История сходимости итерационного процесса для задачи со смешанным контролем	116
5.2	Скорость сходимости приближенных решений смешанной двумерной задачи	118

Приложение А

Исследование разностных схем для одномерного уравнения Фоккера-Планка

Во второй главе показано, что, комбинируя (2.2.20)–(2.2.22), мы получаем следующую вычислительную схему для уравнения ФПК (2.1.1)–(2.1.3)

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{8\tau} - \frac{\sigma^2}{2h^2}\right)m_{k,i-1/2}^h + \left(\frac{3}{4\tau} + \frac{\sigma^2}{h^2}\right)m_{k,i+1/2}^h + \\ + \left(\frac{1}{8\tau} - \frac{\sigma^2}{2h^2}\right)m_{k,i+3/2}^h = \gamma_{k,i+1/2}^1 m_{k-1,i-1/2}^h + \\ + \gamma_{k,i+1/2}^2 m_{k-1,i+1/2}^h + \gamma_{k,i+1/2}^3 m_{k-1,i+3/2}^h \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

$\forall i = 0, \dots, N-1 \quad \forall k = 1, \dots, M$ с краевыми условиями (2.2.3) и коэффициентами

$$\begin{aligned} \gamma_{k,i+1/2}^1 &= \frac{1}{8\tau} \left(1 + \frac{2\tau}{h} \alpha_{k,i}\right)^2, \\ \gamma_{k,i+1/2}^2 &= \frac{1}{8\tau} \left(3 - \frac{2\tau}{h} \alpha_{k,i}\right) \left(1 + \frac{2\tau}{h} \alpha_{k,i}\right) + \\ &\quad + \frac{1}{8\tau} \left(3 + \frac{2\tau}{h} \alpha_{k,i+1}\right) \left(1 - \frac{2\tau}{h} \alpha_{k,i+1}\right), \\ \gamma_{k,i+1/2}^3 &= \frac{1}{8\tau} \left(1 - \frac{2\tau}{h} \alpha_{k,i+1}\right)^2. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Эта схема обладает аппроксимацией первого порядка по времени и второго по пространству: $O(\tau + h^2)$ [125].

Но наличие квадратичных выражений $\alpha_{k,i}^2$ и $\alpha_{k,i+1}^2$ в правой части (A.2) вызывает существенные осложнения при оптимизации параметров сходимости алгоритмов и значительно сужает их применимость [125]. Покажем, что сумму таких квадратичных слагаемых в (A.1) можно опустить без потери порядка аппроксимации $O(\tau + h^2)$. Для этого разложим их в ряд Тейлора в точке $(t_{k-1}, x_{i+1/2})$, предполагая ограниченность производ-

ных $\partial m/\partial x$ и $\partial \alpha/\partial x$:

$$\begin{aligned}
& \frac{\tau}{2h^2} \alpha_{k,i}^2 \left(m_{k-1,i-1/2} - m_{k-1,i+1/2} \right) + \frac{\tau}{2h^2} \alpha_{k,i+1}^2 \left(m_{k-1,i+3/2} - m_{k-1,i+1/2} \right) = \\
& = -\frac{\tau}{2h} \alpha_{k-1,i}^2 \frac{\partial m_{k-1,i+1/2}}{\partial x} + \frac{\tau}{2h} \alpha_{k-1,i+1}^2 \frac{\partial m_{k-1,i+1/2}}{\partial x} + O(\tau) = \\
& = \frac{\tau}{2} \frac{\partial m_{k-1,i+1/2}}{\partial x} \frac{\alpha_{k-1,i+1}^2 - \alpha_{k-1,i}^2}{h} + O(\tau) = \\
& = \frac{\tau}{2} \frac{\partial m_{k-1,i+1/2}}{\partial x} \frac{\partial \alpha^2(t_{k-1}, \xi_{k-1,i+1/2}^h)}{\partial x} + O(\tau) = O(\tau),
\end{aligned}$$

где некоторая точка $\xi_{k-1,i+1/2}^h$ принадлежит отрезку $[x_{i-1/2}, x_{i+3/2}]$.

В итоге разностная схема (А.1) с коэффициентами

$$\begin{aligned}
\gamma_{k,i+1/2}^1 &= \frac{1}{8\tau} \left(1 + \frac{4\tau}{h} \alpha_{k,i} \right), \\
\gamma_{k,i+1/2}^2 &= \frac{1}{8\tau} \left(3 + \frac{4\tau}{h} \alpha_{k,i} \right) + \frac{1}{8\tau} \left(3 - \frac{4\tau}{h} \alpha_{k,i+1} \right), \\
\gamma_{k,i+1/2}^3 &= \frac{1}{8\tau} \left(1 - \frac{4\tau}{h} \alpha_{k,i+1} \right)
\end{aligned} \tag{A.3}$$

также обладает порядком аппроксимации $O(\tau + h^2)$ и именно она использовалась в построенных алгоритмах.

Отметим, что для положительности коэффициентов (А.3), обеспечивающих монотонность приближенного решения необходимо потребовать выполнения неравенства

$$\tau |\alpha_{k,i}| \leq h/4 \quad \forall k = 1, \dots, M \quad \forall i = 0, \dots, N. \tag{A.4}$$

С учетом аппроксимации $O(\tau + h^2)$ это неравенство не является слишком ограничительным. Но для обеспечения свойства М-матрицы для левой части уравнений (А.1) мы потребовали выполнения неравенства (2.2.26)

$$h^2 \leq 4\tau\sigma^2. \tag{A.5}$$

Для асимптотики $O(\tau + h^2)$ оно не выглядит обременительным. Но при решении задач с малым σ (характеризующим амплитуду случайных коле-

баний) получается принудительный выбор малых h , для которых разностная схема и так имеет второй порядок аппроксимации.

Подправим разностную схему (А.1)–(А.3), чтобы избежать этого ограничения. Для этого из левой части (А.1) вычтем выражение

$$\frac{1}{8\tau}m_{k,i-1/2}^h - \frac{1}{4\tau}m_{k,i+1/2}^h + \frac{1}{8\tau}m_{k,i+3/2}^h. \quad (\text{А.6})$$

Оно вносит следующую погрешность аппроксимации, определяемую разложением в ряд Тейлора в точке $(t_k, x_{i+1/2})$:

$$\frac{1}{8\tau}m_{k,i-1/2} - \frac{1}{4\tau}m_{k,i+1/2} + \frac{1}{8\tau}m_{k,i+3/2} = \frac{h^2}{8\tau} \frac{\partial^2 m(t_k, \eta_{k,i+1/2}^h)}{\partial x^2} = O(h^2/\tau),$$

где некоторая точка $\eta_{k,i+1/2}^h$ лежит на отрезке $[x_{i-1/2}, x_{i+3/2}]$. Добавка (А.6) приводит знаки внедиагональных элементов обрабатываемой матрицы к нужному (неположительному) виду уже без учета неравенства (А.5).

Раз уж мы перешли к разностной схеме с условным порядком сходимости $O(\tau + h^2/\tau)$, то для смягчения неравенства (А.4) используем похожую поправку на нижнем слое по времени:

$$\frac{1}{8\tau}m_{k-1,i-1/2}^h - \frac{1}{4\tau}m_{k-1,i+1/2}^h + \frac{1}{8\tau}m_{k-1,i+3/2}^h.$$

Она вносит следующую погрешность аппроксимации:

$$\frac{h^2}{8\tau} \frac{m_{k-1,i-1/2} - 2m_{k-1,i+1/2} + m_{k-1,i+3/2}}{h^2} = \frac{h^2}{8\tau} \frac{\partial^2 m(t_{k-1}, \zeta_{k,i+1/2}^h)}{\partial x^2} = O(h^2/\tau)$$

с некоторой точкой $\zeta_{k-1,i+1/2}^h$ из отрезка $[x_{i-1/2}, x_{i+3/2}]$. Эта поправка вдвое улучшает неравенство (А.4), поскольку для положительности коэффициентов правой части получаемой разностной схемы достаточно выполнения оценки

$$\tau |\alpha_{k,i}| \leq h/2 \quad \forall k = 1, \dots, M \quad \forall i = 0, \dots, N. \quad (\text{А.7})$$

В итоге мы получаем разностную схему

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\sigma^2}{2h^2}m_{k,i-1/2}^h + \left(\frac{1}{\tau} + \frac{\sigma^2}{h^2}\right)m_{k,i+1/2}^h - \frac{\sigma^2}{2h^2}m_{k,i+3/2}^h = \\
 & = \gamma_{k,i+1/2}^1 m_{k-1,i-1/2}^h + \gamma_{k,i+1/2}^2 m_{k-1,i+1/2}^h + \gamma_{k,i+1/2}^3 m_{k-1,i+3/2}^h
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

с краевыми условиями (2.2.3) и коэффициентами

$$\begin{aligned}
 \gamma_{k,i+1/2}^1 &= \frac{1}{4\tau} \left(1 + \frac{2\tau}{h}\alpha_{k,i}\right), \\
 \gamma_{k,i+1/2}^2 &= \frac{1}{4\tau} \left(1 + \frac{2\tau}{h}\alpha_{k,i}\right) + \frac{1}{4\tau} \left(1 - \frac{2\tau}{h}\alpha_{k,i+1}\right), \\
 \gamma_{k,i+1/2}^3 &= \frac{1}{4\tau} \left(1 - \frac{2\tau}{h}\alpha_{k,i+1}\right).
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

Как уже пояснялось, она имеет необычный порядок аппроксимации $O(\tau+h^2/\tau)$, но снимает условие (A.5) и ослабляет условие (A.4) для применения в задачах с малым σ^2 .

Приложение Б

Структура аппроксимационных матриц для двумерных ИСП

Б.1 Вклад правой части для двумерной ИСП

В (4.2.13) матрицы \mathbb{B}_k имеют блочно-трехдиагональную структуру вида

$$\mathbb{B}_k = \begin{bmatrix} B_k^0 & D_k^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ C_k^1 & B_k^1 & D_k^1 & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C_k^2 & B_k^2 & D_k^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & C_k^{N_1-1} & B_k^{N_1-1} \end{bmatrix},$$

где

$$B_k^0 = \begin{bmatrix} \sum_{i=1,2,4,5} \gamma_{k,1/2,1/2}^i & \gamma_{k,1/2,1/2}^6 & 0 & 0 \\ \gamma_{k,1/2,3/2}^4 & \sum_{i=1,2,5} \gamma_{k,1/2,3/2}^i & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \gamma_{k,1/2,N_2-3/2}^6 \\ 0 & 0 & \gamma_{k,1/2,N_2-1/2}^4 & \sum_{i=1,2,5,6} \gamma_{k,1/2,N_2-1/2}^i \end{bmatrix},$$

$$B_k^i = \begin{bmatrix} \sum_{i=2,4,5} \gamma_{k,i+1/2,1/2}^i & \gamma_{k,i+1/2,1/2}^6 & 0 & 0 \\ \gamma_{k,i+1/2,3/2}^4 & \gamma_{k,i+1/2,3/2}^2 + \gamma_{k,i+1/2,3/2}^5 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \gamma_{k,i+1/2,N_2-3/2}^6 \\ 0 & 0 & \gamma_{k,i+1/2,N_2-1/2}^4 & \sum_{i=2,5,6} \gamma_{k,i+1/2,N_2-1/2}^i \end{bmatrix} \quad \forall i = 1, \dots, N_1 - 2,$$

144

$$B_k^{N_1-1} = \begin{bmatrix} \sum_{i=2,3,4,5} \gamma_{k,N_1-1/2,1/2}^i & \gamma_{k,N_1-1/2,1/2}^6 & 0 & 0 \\ \gamma_{k,N_1-1/2,3/2}^4 & \sum_{i=2,3,5} \gamma_{k,N_1-1/2,3/2}^i & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \gamma_{k,N_1-1/2,N_2-3/2}^6 \\ 0 & 0 & \gamma_{k,N_1-1/2,N_2-1/2}^4 & \sum_{i=2,3,5,6} \gamma_{k,N_1-1/2,N_2-1/2}^i \end{bmatrix},$$

$$D_k^i = \begin{bmatrix} \gamma_{k,i+1/2,1/2}^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{k,i+1/2,3/2}^3 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_{k,i+1/2,N_2-1/2}^3 \end{bmatrix} \quad \forall i = 0, N_1 - 2;$$

$$C_k^i = \begin{bmatrix} \gamma_{k,i+1/2,1/2}^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{k,i+1/2,3/2}^1 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_{k,i+1/2,N_2-1/2}^1 \end{bmatrix} \quad \forall i = 1, N_1 - 1.$$

Б.2 Матричный оператор для ИСП со смешанной диффузией

Перепишем (5.2.17) в матричном виде:

$$\mathfrak{A}m_{\cdot,\cdot}^h = \begin{bmatrix} \mathbb{A} & & & & \\ -\mathbb{B}_2 & \mathbb{A} & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -\mathbb{B}_M & \mathbb{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{1,\cdot}^h \\ m_{2,\cdot}^h \\ \vdots \\ m_{M,\cdot}^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{B}_1 m_{0,\cdot}^h \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathfrak{F}m_{0,\cdot}^h \quad (\text{Б.1})$$

Здесь $m_{k,\cdot}^h$ представляет собой вектор-столбец сеточных значений функции $m^h(t,x,y)$ при $t = t_k$, т.е. $m_{k,\cdot}^h = \left[m_{k,1/2,1/2}^h, \dots, m_{k,1/2,N_2-1/2}^h, m_{k,3/2,1/2}^h, \dots, m_{k,N_1-1/2,N_2-1/2}^h \right]^T$ а \mathfrak{A} – матричный оператор с блочными матрицами

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} A_0 & -A_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -A_3 & A_1 & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \ddots & -A_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -A_3 & A_0 \end{bmatrix},$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau} + \frac{\sigma_1^2}{2h_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{2h_2^2} - \frac{|\gamma|\sigma_1\sigma_2}{2h_1h_2} & \frac{|\gamma|\sigma_1\sigma_2}{2h_1h_2} - \frac{\sigma_1^2}{2h_1^2} & 0 & 0 \\ \frac{|\gamma|\sigma_1\sigma_2}{2h_1h_2} - \frac{\sigma_1^2}{2h_1^2} & \frac{1}{\tau} + \frac{\sigma_1^2}{h_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{2h_2^2} - \frac{|\gamma|\sigma_1\sigma_2}{h_1h_2} & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \frac{|\gamma|\sigma_1\sigma_2}{2h_1h_2} - \frac{\sigma_1^2}{2h_1^2} \\ 0 & 0 & \frac{|\gamma|\sigma_1\sigma_2}{2h_1h_2} - \frac{\sigma_1^2}{2h_1^2} & \frac{1}{\tau} + \frac{\sigma_1^2}{2h_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{2h_2^2} - \frac{|\gamma|\sigma_1\sigma_2}{2h_1h_2} \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau} + \frac{\sigma_1^2}{2h_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{h_2^2} - \frac{|\gamma|\sigma_1\sigma_2}{2h_1h_2} & \frac{|\gamma|\sigma_1\sigma_2}{2h_1h_2} - \frac{\sigma_1^2}{2h_1^2} & 0 & 0 \\ \frac{|\gamma|\sigma_1\sigma_2}{2h_1h_2} - \frac{\sigma_1^2}{2h_1^2} & \frac{1}{\tau} + \frac{\sigma_1^2}{h_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{h_2^2} - \frac{|\gamma|\sigma_1\sigma_2}{h_1h_2} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \frac{|\gamma|\sigma_1\sigma_2}{2h_1h_2} - \frac{\sigma_1^2}{2h_1^2} \\ 0 & 0 & \frac{|\gamma|\sigma_1\sigma_2}{2h_1h_2} - \frac{\sigma_1^2}{2h_1^2} & \frac{1}{\tau} + \frac{\sigma_1^2}{2h_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{h_2^2} - \frac{|\gamma|\sigma_1\sigma_2}{2h_1h_2} \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_2^2}{2h_2^2} - \frac{|\gamma|\sigma_1\sigma_2}{2h_1h_2} & \frac{|\gamma|\sigma_1\sigma_2}{2h_1h_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_2^2}{2h_2^2} - \frac{|\gamma|\sigma_1\sigma_2}{2h_1h_2} & \frac{|\gamma|\sigma_1\sigma_2}{2h_1h_2} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_2^2}{2h_2^2} - \frac{|\gamma|\sigma_1\sigma_2}{2h_1h_2} \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_2^2}{2h_2^2} - \frac{|\gamma|\sigma_1\sigma_2}{2h_1h_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{|\gamma|\sigma_1\sigma_2}{2h_1h_2} & \frac{\sigma_2^2}{2h_2^2} - \frac{|\gamma|\sigma_1\sigma_2}{2h_1h_2} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{|\gamma|\sigma_1\sigma_2}{2h_1h_2} & \frac{\sigma_2^2}{2h_2^2} - \frac{|\gamma|\sigma_1\sigma_2}{2h_1h_2} \end{bmatrix},$$

Здесь матрица \mathbb{A} содержит $N_1 \times N_1$ блоков, каждый из которых представляет собой матрицу размером $N_2 \times N_2$, а " $\mathbf{0}$ " представляет собой блок соответствующего размера, заполненный нулями. Матрицы \mathbb{B}_k составлены по тому же принципу, и представляют собой вклад правой части (5.2.13) на t_k -том слое по времени.

Приложение В

Проверка порядка аппроксимации для схемы со смешанной диффузией

Покажем, что схема (5.2.13), (5.2.14) имеет первый порядок аппроксимации по времени и пространству. Разложим сначала левую часть (5.2.13) и перегруппируем слагаемые:

$$\begin{aligned}
A_{i+1/2,j+1/2} * M_{k,i+1/2,j+1/2}^h &= \frac{1}{\tau} m_{k,i+1/2,j+1/2}^h - \\
&- \frac{\sigma_1^2}{2h_1^2} \left(m_{k,i-1/2,j+1/2}^h - 2m_{k,i+1/2,j+1/2}^h + m_{k,i+3/2,j+1/2}^h \right) = \\
&= \frac{1}{\tau} m_{k,i+1/2,j+1/2}^h - \frac{\sigma_1^2}{2h_1^2} \left(m_{k,i-1/2,j+1/2}^h - 2m_{k,i+1/2,j+1/2}^h + m_{k,i+3/2,j+1/2}^h \right) - \\
&- \frac{\sigma_2^2}{2h_2^2} \left(m_{k,i+1/2,j-1/2}^h - 2m_{k,i+1/2,j+1/2}^h + m_{k,i+1/2,j+3/2}^h \right) + \\
&+ \frac{\gamma\sigma_1\sigma_2}{2h_1h_2} \left(m_{k,i-1/2,j+1/2}^h + m_{k,i+3/2,j+1/2}^h - 2m_{k,i+1/2,j+1/2}^h + m_{k,i+1/2,j-1/2}^h + \right. \\
&\left. + m_{k,i+1/2,j+3/2}^h - m_{k,i-1/2,j-1/2}^h - m_{k,i+3/2,j+3/2}^h \right).
\end{aligned}$$

Разложением в ряд Тейлора в точке $(t_{k-1}, x_{i+1/2}, y_{i+1/2})$ получим, что

$$\begin{aligned}
A_{i+1/2,j+1/2} * M_{k,i+1/2,j+1/2}^h &= \frac{1}{\tau} m_{k,i+1/2,j+1/2}^h - \\
&- \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\partial^2 m_{k,i+1/2,j+1/2}^h}{\partial x^2} - \frac{\sigma_2^2}{2} \frac{\partial^2 m_{k,i+1/2,j+1/2}^h}{\partial y^2} + O(h_1^2 + h_2^2) + \\
&+ \frac{\gamma\sigma_1\sigma_2}{2h_1h_2} \left(2m_{k,i+1/2,j+1/2}^h + h_1^2 \frac{\partial^2 m_{k,i+1/2,j+1/2}^h}{\partial x^2} + O(h_1^4) + 2m_{k,i+1/2,j+1/2}^h + \right. \\
&+ h_2^2 \frac{\partial^2 m_{k,i+1/2,j+1/2}^h}{\partial y^2} + O(h_2^4) - \left(2m_{k,i+1/2,j+1/2}^h + h_1^2 \frac{\partial^2 m_{k,i+1/2,j+1/2}^h}{\partial x^2} + \right. \\
&\left. \left. + h_2^2 \frac{\partial^2 m_{k,i+1/2,j+1/2}^h}{\partial y^2} + 2h_1h_2 \frac{\partial^2 m_{k,i+1/2,j+1/2}^h}{\partial x\partial y} + O(h_1^4 + h_2^4) \right) \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\tau} m_{k,i+1/2,j+1/2} - \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\partial^2 m_{k,i+1/2,j+1/2}}{\partial x^2} - \frac{\sigma_2^2}{2} \frac{\partial^2 m_{k,i+1/2,j+1/2}}{\partial y^2} \\
& - \frac{\gamma \sigma_1 \sigma_2}{2} \frac{\partial^2 m_{k,i+1/2,j+1/2}}{\partial x \partial y} + O(h_1^2 + h_2^2) = \\
& = \frac{1}{\tau} m_{k-1,i+1/2,j+1/2} + \frac{\partial m_{k-1,i+1/2,j+1/2}}{\partial t} - \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\partial^2 m_{k-1,i+1/2,j+1/2}}{\partial x^2} - \\
& - \frac{\sigma_2^2}{2} \frac{\partial^2 m_{k-1,i+1/2,j+1/2}}{\partial y^2} - \frac{\gamma \sigma_1 \sigma_2}{2} \frac{\partial^2 m_{k-1,i+1/2,j+1/2}}{\partial x \partial y} + O(\tau + h_1^2 + h_2^2).
\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим правую часть (5.2.13). Для простоты рассмотрим сначала выражения, задающие аппроксимацию только в направлении x . В направлении y рассуждения будут аналогичными. Рассмотрим 4 случая:

1. Пусть $\alpha_{k,i,j+1/2} \geq 0$ и $\alpha_{k,i+1,j+1/2} \geq 0$.

Тогда, согласно (5.2.13)–(5.2.14) правая часть (5.2.13) примет вид:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h_1} \left(\alpha_{k,i,j+1/2} m_{k-1,i-1/2,j+1/2} - \alpha_{k,i+1,j+1/2} m_{k-1,i+1/2,j+1/2} \right) = \\
& = \frac{1}{h_1} \left(\alpha_{k,i+1/2,j+1/2} \left(-h_1 \frac{\partial m_{k-1,i+1/2,j+1/2}}{\partial x} + h_1^2 \frac{\partial^2 m_{k-1,i+1/2,j+1/2}}{\partial x^2} + O(h_1^3) \right) + \right. \\
& + \frac{1}{h_1} \left(\alpha_{k,i+1/2,j+1/2} \left(-h_1 \frac{\partial m_{k-1,i+1/2,j+1/2}}{\partial x} + h_1^2 \frac{\partial^2 m_{k-1,i+1/2,j+1/2}}{\partial x^2} + O(h_1^3) \right) + \right. \\
& + m_{k-1,i+1/2,j+1/2} \left(\alpha_{k,i,j+1/2} - \alpha_{k,i+1,j+1/2} \right) \left. \right) = -\alpha_{k,i+1/2,j+1/2} \frac{\partial m_{k-1,i+1/2,j+1/2}}{\partial x} - \\
& - m_{k-1,i+1/2,j+1/2} \frac{\partial \alpha_{k-1,i+1/2,j+1/2}}{\partial x} + O(\tau + h_1).
\end{aligned}$$

2. При $\alpha_{k,i,j+1/2} < 0$ и $\alpha_{k,i+1,j+1/2} \geq 0$ правая часть (5.2.13) имеет вид

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h_1} \left(\alpha_{k,i,j+1/2} - \alpha_{k,i+1,j+1/2} \right) m_{k-1,i+1/2,j+1/2} = \\
& = -\frac{\partial \alpha_{k-1,i+1/2,j+1/2}}{\partial x} m_{k-1,i+1/2,j+1/2} + O(\tau + h_1^2).
\end{aligned} \tag{B.1}$$

Условия $\alpha_{k,i,j+1/2} < 0$ и $\alpha_{k,i+1,j+1/2} \geq 0$ фактически означают, что функция $\alpha(t_k, x, y_{i+1/2})$ меняет знак на $(x_i, x_{i+1}]$. Значит, существует точка $x = \varepsilon \in (x_i, x_{i+1}]$, такая, что $\alpha(t_k, \varepsilon, y_{i+1/2}) = 0$. Разложим $\alpha(t_k, \varepsilon, y_{i+1/2})$ в

ряд Тейлора в точке $(t_k, x_{i+1/2}, y_{i+1/2})$

$$\begin{aligned} \alpha(t_k, \varepsilon, y_{i+1/2}) &= \alpha_{k,i+1/2,j+1/2} + (\varepsilon - x_{i+1/2}) \frac{\partial \alpha_{k,i+1/2,j+1/2}}{\partial x} + \\ O\left((\varepsilon - x_{i+1/2})^2\right) &\approx \alpha_{k-1,i+1/2,j+1/2} + \frac{h_1}{2} \frac{\partial \alpha_{k-1,i+1/2,j+1/2}}{\partial x} + O(\tau + h_1^2). \end{aligned}$$

Откуда следует, что $\alpha_{k-1,i+1/2,j+1/2} \simeq 0$ с точностью $O(h_1)$.

Прибавим к правой части (В.1) $-\alpha_{k-1,i+1/2,j+1/2} \frac{\partial m_{k-1,i+1/2,j+1/2}}{\partial x}$. Правая часть (В.1) примет вид:

$$-\frac{\partial \alpha_{k-1,i+1/2,j+1/2}}{\partial x} m_{k-1,i+1/2,j+1/2} - \frac{\partial m_{k-1,i+1/2,j+1/2}}{\partial x} \alpha_{k-1,i+1/2,j+1/2} + O(\tau + h_1).$$

3. При $\alpha_{k,i,j+1/2} \geq 0$ и $\alpha_{k,i+1,j+1/2} < 0$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h_1} \left(\alpha_{k,i,j+1/2} m_{k-1,i-1/2,j+1/2} - \alpha_{k,i+1,j+1/2} m_{k-1,i+3/2,j+1/2} \right) = \\ &= \frac{1}{h_1} \left(\left(\alpha_{k,i+1/2,j+1/2} - \frac{h_1}{2} \frac{\partial \alpha_{k,i+1/2,j+1/2}}{\partial x} + O(h_1^2) \right) \times \right. \\ &+ \left(m_{k-1,i+1/2,j+1/2} - \frac{h_1}{2} \frac{\partial m_{k-1,i+1/2,j+1/2}}{\partial x} + O(h_1^2) \right) - \\ &- \left(\alpha_{k,i+1/2,j+1/2} + \frac{h_1}{2} \frac{\partial \alpha_{k,i+1/2,j+1/2}}{\partial x} + O(h_1^2) \right) \times \\ &+ \left(m_{k-1,i+1/2,j+1/2} + \frac{h_1}{2} \frac{\partial m_{k-1,i+1/2,j+1/2}}{\partial x} + O(h_1^2) \right) \Big) = \\ &= -2\alpha_{k-1,i+1/2,j+1/2} \frac{\partial m_{k-1,i+1/2,j+1/2}}{\partial x} - \\ &- m_{k-1,i+1/2,j+1/2} \frac{\partial \alpha_{k-1,i+1/2,j+1/2}}{\partial x} + O(\tau + h_1^2). \end{aligned} \tag{В.2}$$

Поскольку функция меняет знак на $(x_i, x_{i+1}]$ и $\alpha_{k-1,i+1/2,j+1/2} \simeq 0$ при малом h_1 , мы можем пренебречь $\alpha_{k-1,i+1/2,j+1/2} \frac{\partial m_{k-1,i+1/2,j+1/2}}{\partial x}$. Тогда (В.2) можно переписать как

$$-\alpha_{k-1,i+1/2,j+1/2} \frac{\partial m_{k-1,i+1/2,j+1/2}}{\partial x} - m_{k-1,i+1/2,j+1/2} \frac{\partial \alpha_{k-1,i+1/2,j+1/2}}{\partial x} + O(\tau + h_1).$$

4. И, наконец, при $\alpha_{k,i,j+1/2}^h < 0$ и $\alpha_{k,i+1,j+1/2}^h < 0$ получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_1} \left(\alpha_{k,i,j+1/2} m_{k-1,i+1/2,j+1/2}^h - \alpha_{k,i+1,j+1/2} m_{k-1,i+3/2,j+1/2}^h \right) = \\ & = \frac{1}{h_1} \left(-\alpha_{k-1,i+1/2,j+1/2}^h \frac{\partial m_{k-1,i+1/2,j+1/2}}{\partial x} - \right. \\ & \left. - m_{k-1,i+1/2,j+1/2} \frac{\partial \alpha_{k-1,i+1/2,j+1/2}}{\partial x} + O(\tau + h_1) \right). \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Для функций $\beta_{..}$ рассуждения повторяются. Комбинируя левую и правую часть (5.2.13), мы получаем, что (5.2.13), (5.2.14) аппроксимирует (5.1.1) с порядком $O(\tau + h_1 + h_2)$.

Приложение Г

Копия свидетельства о регистрации
программы для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО
о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2020611291

«Программа для оптимизации управления мультиагентной системой»

Правообладатель: **Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский федеральный университет» (СФУ) (RU)**

Автор: **Корниенко Виктория Сергеевна (RU)**

Заявка № **2020610341**
Дата поступления **20 января 2020 г.**
Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ **29 января 2020 г.**

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности



Г.П. Ивлиев Г.П. Ивлиев