

УТВЕРЖДАЮ

Директор Федерального государственного
учреждения «Федеральный исследовательский
центр Институт прикладной математики имени
М.В. Келдыша Российской академии наук»



член-корр. РАН

Аптекарев А.И.

«10» марта 2021 г.

ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

Федерального государственного учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук» на диссертацию Хандеевой Надежды Александровны «Исследование монотонности и точности схемы CABARET», представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.07 - «Вычислительная математика».

Актуальность темы диссертации.

В настоящее время для исследования сложных процессов, допускающих математическое моделирование, широко используется вычислительный эксперимент. Одним из главных этапов вычислительного эксперимента является построение приближённого (численного) метода решения задачи, которое в случае использования конечно-разностных методов сводится к выбору и анализу разностной схемы, аппроксимирующей соответствующую систему дифференциальных уравнений. Разностные схемы повышенной точности широко применяются для сквозного расчёта разрывных решений гиперболических систем законов сохранения, которыми моделируются физические процессы в различных областях науки, таких как, аэродинамика, атомная энергетика, гидродинамика открытых русел, плёночные течения; теория упругости и пластичности.

Диссертация Н.А. Хандеевой посвящена исследованию монотонности схемы CABARET и разработке её новых модификаций, обеспечивающих повышенную точность при сквозном расчёте разрывных решений. Поскольку схема CABARET с более высокой точностью (по

сравнению с другими схемами, такими как, MUSCL, TVD, WENO) локализует сильные и слабые разрывы, то актуальным представляется внедрение разработанных монотонных модификаций этой схемы в численные алгоритмы, предназначенные для расчёта конкретных прикладных задач.

Научная новизна работы состоит в разработке новых модификаций схемы CABARET, улучшающих её свойства:

- 1) обеспечение повышенной точности схемы в окрестностях локальных экстремумов точного решения
- 2) обеспечение монотонности схемы
- 3) обеспечение полного распада неустойчивых сильных разрывов.

Научная и практическая значимость результатов диссертации.

Полученные результаты вносят существенный вклад в развитие теории схемы CABARET и могут быть использованы при разработке новых компьютерных кодов для численного моделирования сложных гидро- и газодинамических течений.

Достоверность результатов работы обеспечивается использованием строгого математического аппарата, обоснованием различных модификаций схемы CABARET, а также сериями численных расчётов и сравнительным анализом алгоритмов.

Основное содержание работы.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы.

Во **введении** обоснована актуальность работы, приведено краткое изложение содержания работы, сформулированы основные результаты и раскрыта их новизна.

Первая глава описывает стандартные варианты схемы CABARET для аппроксимации задачи Коши для квазилинейного гиперболического скалярного закона сохранения с выпуклой функцией потока. Показано, что стандартная двухслойная по времени схема CABARET не является монотонной и при числах Куранта больше 0.5 не обеспечивает полного распада неустойчивого сильного разрыва начальных данных.

Во **второй главе** показано, что двух-с-половиной-слойная по времени схема CABARET снижает порядок сходимости в областях локальных экстремумов рассчитываемых обобщённых решений при аппроксимации скалярного закона сохранения. В пункте 2.1.

предложена модифицированная коррекция потоков, которая сохраняет повышенную точность схемы в областях локальных экстремумов при аппроксимации линейного уравнения переноса. В пункте 2.2. эти результаты обобщаются на случай задачи Коши для скалярного закона сохранения и приводится дополнительная коррекция модифицированной схемы, убирающая заметное уменьшение локального минимума точного решения в случае, когда локальный минимум расположен на сильном разрыве. Приведены результаты тестовых расчётов, иллюстрирующих преимущества модифицированной схемы.

В **третьей главе** получена модификация двухслойной по времени схемы CABARET, обеспечивающая монотонность данной схемы при аппроксимации скалярного закона сохранения с выпуклым потоком, как в областях, в которых скорость распространения характеристик имеет постоянный знак (пункт 3.1), так и в случае, когда скорость распространения характеристик аппроксимируемого дивергентного уравнения меняет знак (пункт 3.2). Монотонность модифицированных схем доказывается аналитически. Приведены результаты тестовых расчётов, иллюстрирующих преимущества модифицированной схемы.

В **четвёртой главе** показано, что монотонность двухслойной по времени схемы CABARET при числах Куранта от 0.5 до 1 не обеспечивает полного распада неустойчивых сильных разрывов. Для стандартной и модифицированной схем CABARET, аппроксимирующих скалярный закон сохранения с выпуклым потоком, получен разностный аналог энтропийного неравенства и предложен метод, обеспечивающий в разностном решении полный распад неустойчивых сильных разрывов для любых чисел Куранта, при которых данная схема является устойчивой. Приведены результаты тестовых расчётов, иллюстрирующих, что разностное решение, полученное по модифицированной схеме CABARET даже при числе Куранта, близком к максимальному значению, допустимому условием устойчивости, не имеет схемных осцилляций, хорошо воспроизводит профили центрированных волн разрежения, возникающих из неустойчивых сильных разрывов начальных данных, и сохраняет повышенную точность при локализации сильных и слабых разрывов точного решения.

В **пятой главе** предложен метод расщепления по физическим процессам для двухслойной по времени схемы CABARET, аппроксимирующей неоднородный скалярный закон сохранения с выпуклой и монотонно возрастающей функцией потока. В качестве тестового примера была рассмотрена задача, возникающая при моделировании в рамках длинноволнового приближения процесса стекания вязкой пленки по вертикальной стенке с

учетом тепломассопереноса на межфазной поверхности. Результаты тестовых расчётов задачи Коши с периодическими начальными данными, моделирующими бесконечную последовательность стекающих капель жидкости, показали преимущество предложенного метода по сравнению со стандартной схемой.

В заключении приводятся выводы диссертационной работы.

Полнота опубликования и апробации результатов исследований. Основные результаты работы в полной мере представлены в изданиях, рекомендованных ВАК для публикации результатов исследований, и неоднократно докладывались на профильных научных конференциях. По тематике диссертации опубликовано 7 научных работ, из которых 5 — в журналах, индексируемых в базе данных Web of Science, 7 — в журналах, индексируемых в системе Scopus, 7 — в журналах, индексируемых в РИНЦ.

Замечания по диссертационной работе.

1) В пункте 1 основных результатов не указано, что модификация схемы CABARET предложена только для скалярного закона сохранения с выпуклым потоком.

2) Во второй главе диссертации для улучшения точности схемы CABARET в областях локальных экстремумов предлагается в этих областях заменить двустороннюю коррекцию потоков на одностороннюю, то есть в окрестностях локальных максимумов не ограничивать поток сверху, а в окрестностях локальных минимумов не ограничивать поток снизу. Необходимо исследовать можно ли в этих областях не проводить никакой коррекции.

3) В главе 4 для отбора устойчивых сильных разрывов используется энтропийное неравенство, основанное на выпуклом расширении закона сохранения с одной конкретной выпуклой функцией. Не указано, является ли это необходимым или достаточным условием того, чтобы точное решение задачи Коши, удовлетворяющее этому неравенству, содержало в себе только устойчивые сильные разрывы.

4) Необходимо пояснить, почему в главе 3 монотонность схемы CABARET проверяется по четырём точкам (формулы 3.60, 3.66), а в главе 5 по трём точкам (формулы 5.14, 5.15).

5) Представляется целесообразным применение результатов данной работы при создании новых численных алгоритмов повышенной точности для расчёта гиперболических систем законов сохранения, моделирующих конкретные прикладные задачи, в том числе, и в многомерном случае.

Сделанные замечания, однако, не влияют на общую положительную оценку работы.

Заключение по диссертации.

Диссертационная работа Н.А. Хандеевой представляет собой законченную научно-квалификационную работу, содержит новые результаты, имеющие несомненную теоретическую и прикладную значимость, могут быть использованы при разработке новых компьютерных кодов для численного моделирования сложных гидро- и газодинамических течений. Работа выполнена на высоком научном уровне. Представленные в работе исследования обладают научной новизной и достоверностью, все полученные выводы научно обоснованы. Основные положения диссертационной работы достаточно полно освещены в научных публикациях автора.

Тема, содержание и результаты диссертации Н.А. Хандеевой отвечают Паспорту специальности 01.01.07 — «Вычислительная математика» (физико-математические науки). Автореферат полностью и точно отражает содержание диссертации. Работа соответствует требованиям «Положения о присуждении ученых степеней», утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации №842 от 24.09.2013 (в редакции от 01.10.2018, с изменениями от 26.05.2020), а диссертант Н.А. Хандеева заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.07 — «Вычислительная математика».

Отзыв на диссертацию обсуждён и одобрен на семинаре ИПМ им. М.В.Келдыша РАН «Математическое моделирование» под руководством зав. отд. №15, чл.-корр. В.Ф.Тишкина, г.н.с., д.ф.-м.н. А.А.Кулешова «11» февраля 2021 г., протокол №2.

Зав. отделом №8 Федерального государственного учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук»

д.ф.-м.н. _____



Жуков Виктор Тимофеевич

Россия, 125047, Москва, Миусская пл., д.4. Телефон: +7 499 220-78-72, эл. почта: zhukov@kiam.ru, Web-сайт организации: keldysh.ru

Подпись д.ф.-м.н. Жукова В.Т. заверяю,
Учёный секретарь ИПМ им. М.В. Келдыша РАН



Маслов А.И.