

На правах рукописи



Новиков Никита Сергеевич

**Численные алгоритмы решения уравнения
И.М. Гельфанда — Б.М. Левитана — М.Г. Крейна**

Специальность 01.01.07 —
«вычислительная математика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2019

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет» (Новосибирский государственный университет, НГУ).

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор,
член-корреспондент РАН
Кабанихин Сергей Игоревич

Официальные оппоненты: **Баев Андрей Владимирович**,
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математической физики факультета вычислительной математики и кибернетики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова», г. Москва
Белишев Михаил Игоревич,
доктор физико-математических наук, профессор,
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук, г. Санкт-Петербург,
ведущий научный сотрудник

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт вычислительной математики Российской академии наук, г. Москва

Защита состоится 24 апреля 2019 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 003.061.01 на базе ФБГУН ИВМиМГ СО РАН по адресу: 630090, г. Новосибирск, проспект Академика Лаврентьева, 6, тел.: +7(383)330-71-59.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на официальном сайте ИВМиМГ СО РАН: www.icmmg.nsc.ru.

Автореферат разослан 21 февраля 2019 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 003.061.01, д.ф.-м.н.



Рогазинский Сергей Валентинович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Работа посвящена разработке и программной реализации численных методов решения коэффициентных обратных задач для гиперболических уравнений. Такие задачи относятся к некорректно поставленным задачам математической физики, теория которых основана А.Н. Тихоновым, М.М. Лаврентьевым, В.К. Ивановым.

Коэффициентные обратные задачи имеют широкое распространение в математической геофизике, где часто требуется определить свойства среды или расположенных на некоторой глубине неоднородностей по дополнительной информации, измеренной на дневной поверхности (волны, отражённые от неоднородностей среды). Распространение этих волн описывается уравнениями в частных производных, полученными из фундаментальных законов сохранения, а свойства среды и параметры объекта, например, акустические или электромагнитные, описываются коэффициентами этих уравнений. Так, в задачах акустики коэффициентами являются плотность среды и скорость распространения волн в среде, в случае задач теории упругости коэффициенты уравнений являются параметрами Ламе и плотностью среды, а в случае уравнений Максвелла они описывают проницаемость и проводимость среды. Таким образом, возникает задача определения коэффициентов гиперболических уравнений по дополнительной информации, измеренной на части границы.

Как правило, решение обратных задач является довольно трудоёмким процессом. Главные трудности при решении обратной задачи связаны с её некорректностью, отсутствию теоремы единственности, неустойчивости по отношению к ошибкам измерений. Кроме того, обратные задачи, как правило, являются нелинейными, что тоже вносит дополнительные сложности в разработку методов их решения.

Различные типы задач, трудности, связанные с некорректностью постановок, а также множественные варианты задания дополнительной информации — всё это обуславливает существование широкого класса численных методов решения обратных задач. Естественно, что наиболее изученным является случай, когда свойства изучаемой среды зависят только от одной пространственной переменной (случай горизонтально-слоистой среды). При этом обобщение существующих алгоритмов с одномерного случая на более сложные постановки, когда свойства среды зависят от двух и трёх переменных, может быть затруднительным с вычислительной точки зрения. Так, многие разработанные алгоритмы (например, методы дифракционной томографии) основаны на оптимизационном подходе — коэффициенты уравнений (параметры среды) выбираются таким образом, чтобы моделируемый отклик среды был максимально близок к

измеренному. С математической точки зрения это означает сведение задачи к оптимизации некоторого целевого функционала. Решение задачи оптимизации, как правило, производится итерационными методами, и на каждом шаге итерационного процесса необходимо решать соответствующую прямую задачу (а в случае, например, градиентных методов, ещё и сопряжённую задачу). Следовательно, эффективность подобных алгоритмов существенно зависит от того, насколько быстро удаётся решать прямую задачу. Однако с увеличением размерности задачи даже однократное решение прямой задачи требует большого объёма памяти и вычислений, и, зачастую, возможно только с использованием суперкомпьютеров.

Другим важным аспектом является необходимость использования во многих разработанных методах (в качестве примера можно привести метод линейризации, а также метод лучевой томографии) априорной информации. Такие методы подразумевают наличие некоторой «опорной» модели среды, которая является начальным приближением при восстановлении изучаемой среды. Тем самым достоверность решения обратной задачи существенно зависит от адекватности этой априорной информации.

Учитывая вышесказанное, актуальной задачей является разработка прямых методов (т.е., основанных на непосредственном обращении нелинейного оператора обратной задачи), не требующих многократного решения прямой задачи. В данной работе рассматриваются прямые методы решения обратных задач, построенные на основе сочетания проекционного метода и метода И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана, М.Г. Крейна. Данный подход заключается в сведении нелинейной обратной задачи к однопараметрическому семейству линейных интегральных уравнений Фредгольма. Также этот метод не предполагает наличие априорной информации о решении. Разработка численных алгоритмов решения обратных задач для гиперболических уравнений, обладающих данными свойствами, представляет большой интерес, так как на основе таких алгоритмов возможно создание комплексов обработки сейсмических наблюдений, позволяющих за приемлемое время получить первое приближение исследуемых параметров среды при отсутствии априорной информации. Полученные таким образом значения параметров в дальнейшем можно уточнить с помощью других подходов (например, основанных на оптимизационных методах).

Целью данной работы является создание новых и обоснование уже существующих численных алгоритмов решения коэффициентных многомерных обратных задач акустики, а также обратных задач определения потенциала волнового уравнения на основе подхода И.М. Гельфанда — Б.М. Левитана — М.Г. Крейна.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи:

1. Разработать алгоритмы регуляризации многомерных обратных задач акустики с помощью многомерных аналогов уравнений И.М. Гельфанда — Б.М. Левитана и М.Г. Крейна.
2. Разработать и исследовать эффективность новых методов численного решения семейств интегральных уравнений И.М. Гельфанда — Б.М. Левитана и М.Г. Крейна.
3. Создать программные комплексы для численного решения исследуемых задач на основе разработанных алгоритмов.

Методы исследований. В диссертации используются методы вычислительной математики и математического моделирования. В частности, для построения численных алгоритмов использовались методы Монте-Карло решения интегральных уравнений и систем, а также стохастические и детерминистские вычислительные методы линейной алгебры. Разработка программного обеспечения производилась на языке C++.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Новый алгоритм решения одномерной обратной задачи акустики и обратной задачи для уравнения колебаний методом Монте-Карло.
2. Стохастический проекционный метод численного решения двумерного аналога уравнения И.М. Гельфанда — Б.М. Левитана.
3. Новый метод решения двумерной обратной задачи акустики на основе комбинации проекционного метода, метода Гельфанда-Левитана-Крейна и метода быстрого обращения блочно-тёплицевой матрицы.
4. Новый метод численного решения одномерной динамической задачи сейсмики на основе комбинации методов Гельфанда — Левитана и Крейна во временной области.

Выносимые положения соответствуют следующим пунктам паспорта специальности 01.01.07 - вычислительная математика:

1. Положения 1, 2 и 3 соответствуют пункту 1 паспорта.
2. Положение 2 соответствует пункту 2 паспорта.
3. Положения 1 и 3 соответствуют пункту 3 паспорта.

4. Положения 3 и 4 соответствует пункту 4 паспорта.

Научная новизна:

1. Разработан новый алгоритм решения одномерной обратной задачи сейсмики на основе метода Монте-Карло и уравнений И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана и М.Г. Крейна.
2. Разработан и обоснован новый метод решения двумерного аналога уравнения И.М. Гельфанда — Б.М. Левитана на основе стохастического проекционного метода.
3. Построен и исследован алгоритм решения двумерной обратной задачи определения плотности среды, основанный на комбинации проекционного метода, многомерного аналога метода И.М. Гельфанда — Б.М. Левитана — М.Г. Крейна и метода Левинсона обращения блочно-тёплицевой матрицы. Показано, что в данном случае решение обратной задачи сводится к решению только одного интегрального уравнения из семейства.
4. Реализованы комплексы программ на основе разработанных алгоритмов.

Научная и практическая значимость диссертационной работы определяется необходимостью модернизации существующих и разработке новых прямых численных методов и алгоритмов решения обратных задач для гиперболических уравнений. Разработанные алгоритмы могут быть использованы при обработке данных сейсмических наблюдений в задачах акустического каротажа.

Степень достоверности полученных результатов обеспечивается математическим доказательством основных положений и теорем, обоснованием алгоритмов, а также сериями численных расчётов и сравнительным анализом алгоритмов.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих международных и российских конференциях : всероссийской школе-конференции с международным участием «Математика, информатика, их приложения и роль в образовании» (г. Москва, 2009 г.), на 48-й, 49-й и 50-й международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»(г. Новосибирск, 2010, 2011, 2012 гг.), всероссийской конференции по вычислительной математике KBM-2011 (г. Новосибирск, 2011 г.), международной конференции 8th International ISAAC Congress (г. Москва, 2011г.), международных конференциях «Inverse problems: Modeling and Simulation» (г. Анталия, Фетхие - Турция, 2012, 2014 гг.), международной конференции «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования» (г. Москва, 2013), международной конференции

«Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики», посвященной 50-летию ИВМиМГ СО РАН (г. Новосибирск, 2014 г.), международной конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики» (г. Новосибирск, 2015 г.), международном семинаре по обратным и некорректно поставленным задачам (г. Москва, 2015 г.), 4th International Conference on Matrix Methods in Mathematics and Applications (г. Москва, 2015 г.), XVII Всероссийской конференции молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям (г. Новосибирск, 2016 г.), зимней международной молодежной научной школе-конференции «Теория и приложения обратных и некорректных задач» (г. Алматы, Казахстан, 2016 г.), международной конференции «Математика и информационные технологии в нефтегазовом комплексе», (г. Сургут, 2016 г.), международной конференции «Современные проблемы математической физики и вычислительной математики» (г. Москва, 2016 г.), российско-британском семинаре «Uncertainty Quantification in Inverse Modeling» (г. Новосибирск, 2016 г.), международной конференции «Вычислительная и прикладная математика 2017» (г. Новосибирск, 2017 г.), международной конференции «13th International Conference on Theoretical and Computational Acoustics» (г. Вена, Австрия, 2017), а также на 4-й, 5-й, 6-й, 7-й, 8-й и 9-й молодежных научных школах-конференциях «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» (г. Новосибирск, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017 гг.). Результаты диссертации докладывались и обсуждались на 4 всероссийских конференциях, 23 международных конференциях, а также на научных семинарах:

- Объединенный семинар ИВМиМГ СО РАН и кафедры вычислительной математики ММФ НГУ под руководством профессора В.П. Ильина (Новосибирск, 2016),
- Научно-исследовательский семинар кафедры математической физики ВМК МГУ под руководством профессора А.М. Денисова (Москва, 2017),
- Семинар Scientific Computing group Сколковского института науки и технологий (Москва, 2017),
- Семинар по дифракции и распространению волн под руководством профессора В.М. Бабича (ПОМИ РАН, Санкт-Петербург, 2017),
- Семинар ИВМиМГ СО РАН «Методы Монте-Карло в вычислительной математике и математической физике» под руководством член-корреспондента РАН Г.А. Михайлова (Новосибирск, 2017).

Диссертационная работа была выполнена при поддержке грантов РФФИ № 15-01-09230, 16-01-00755, 16-29-15120, 18-31-00409.

Личный вклад. Основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. В работах, опубликованных в соавторстве, личный вклад автора заключается в обсуждении постановок задач и выбора методов их решения, в разработке и обосновании численных алгоритмов, составлении и отладке компьютерных программ, проведении вычислительных экспериментов. Конфликт интересов с соавторами отсутствует.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 24 печатных изданиях, из которых 2 статьи изданы в журналах, зарегистрированных в системе Web of Science; 1 статья в журнале, зарегистрированном в системе Scopus; 7 публикаций в журналах, индексируемых аналитической базой данных РИНЦ; 14 работ опубликовано в тезисах международных и всероссийских конференций.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения. Полный объем диссертации составляет 119 страниц с 41 рисунками и 17 таблицами. Список литературы содержит 139 наименований.

Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель работы и ставятся задачи, которые необходимо решить для её достижения, обосновывается научная новизна и практическая значимость представляемой работы, приводится её краткое содержание.

Основные теоретические результаты исследования обратных и некорректных задач получены А.Н. Тихоновым, М.М. Лаврентьевым, В.К. Ивановым. Обратные задачи для уравнений и систем гиперболического типа исследовались в работах М. М. Лаврентьева и В. Г. Романова, А. С. Алексеева, А. С. Благовещенского и многих других авторов. Идеи метода И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана и М.Г. Крейна получили развитие в работах В.А. Марченко, В.Е. Захарова, А.Б. Шабата, А.П. Веселова, Р.Г. Новикова, А.В. Баева, Б.С. Парийского, А.С. Алексеева, В.И. Добринского, В.С. Белоносова и многих других. Другие методы, не использующие априорную информацию, разрабатывались А.С. Благовещенским, М.И. Белишевым и Л.Н. Пестовым (метод граничного управления), М.В. Клибановым (глобально сходящийся метод), А.С. Алексеева, В.И. Добринского, С.И. Кабанихина, А.Д. Сатыбаев (метод обращения разностной схемы). Разработка методов решения уравнений И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана, М.Г. Крейна и их многомерных аналогов проводилась с использованием результатов работ А.С. Благовещенского, С.И. Кабанихина, М.А. Шишленина.

Первая глава посвящена постановкам рассматриваемых задач и формулировке уравнений И.М. Гельфанда — Б.М. Левитана — М.Г. Крейна.

В подразделе 1.1 рассмотрена одномерная обратная задача сейсмики, заключающаяся в определении параметров Ламе λ, μ, ρ горизонтально-слоистой среды, являющихся коэффициентами системы динамических уравнений теории упругости:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad div} \mathbf{U} + \mu \Delta \mathbf{U} + \text{grad} \lambda \text{div} \mathbf{U} + \sum_{i=1}^3 \text{grad} \mu \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} + \text{grad} U_{x_i} \right) \mathbf{e}_i.$$

Здесь $\mathbf{e}_i$ - орт соответствующей координатной оси x_i , $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$, $\mathbf{U} = (U_x, U_y, U_z)^T$ - вектор смещения точек среды. Задача состоит в определении параметров λ, μ, ρ , определяющих упругие свойства среды, по результатам одного или нескольких экспериментов, в результате которых измеряется смещение точек среды $\mathbf{U}$ на поверхности $z = 0$. Для решения этой задачи предложен алгоритм, основанный на использовании метода Гельфанда - Левитана во временной области. Для решения обратной задачи необходимо рассмотреть два эксперимента, один из которых может связан с распространением SH-волн при воздействии на среду поверхностного момента вращения интенсивности $\delta(t)$, а другой - с распространением продольных волн при воздействии на среду источника вида нормальной сосредоточенной силы. В результате задача сводится к решению нескольких вспомогательных обратных задач для уравнений акустики и уравнения колебаний. Обратная задача для уравнения колебаний заключается в определении коэффициента $q(x)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - q(x)u, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Данная обратная задача сводится к однопараметрическому семейству интегральных уравнений в области $t < |x|$:

$$\tilde{w}(x, t) + \int_{-x}^x f(t - \tau) \tilde{w}(x, \tau) d\tau = -\frac{1}{2} [f'(t - x) + f'(t + x)], \quad x > 0.$$

Данное соотношение называется уравнением Гельфанда-Левитана. Функция $f(t)$, являющаяся данными обратной задачи и задающая ядро интегрального уравнения, является известной, а решение обратной задачи связано с решением $w(x, t)$ уравнения Гельфанда-Левитана следующим образом:

$$q(x) = 4 \frac{d}{dx} \tilde{w}(x, x - 0), \quad x > 0.$$

Одномерная обратная задача акустики заключается в определении коэффициента $\sigma(x)$ уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} - \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} u_x, x > 0, t > 0.$$

Указанная задача сводится к следующему семейству интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода (уравнение Крейна):

$$-2f(+0)V(x,t) - \int_{-x}^x V(x,s)f'(t-s)ds = 1, t \in (-x,x).$$

Функция $f(t)$, являющаяся данными обратной задачи и задающая ядро интегрального уравнения, является известной, а акустическая жёсткость среды $\sigma(x)$ восстанавливается по решению уравнения Крейна с помощью следующего соотношения:

$$\sigma(x) = \frac{V(0,0)}{2V^2(x,x)}.$$

В подразделе 1.2 приводится постановка двумерной обратной задачи для уравнения колебаний. Рассматривается следующая последовательность прямых задач ($k \in \mathbb{Z}$):

$$\begin{aligned} u_{tt}^{(k)}(x,y,t) &= \Delta_{x,y} u^{(k)} - q(x,y)u^{(k)}, \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, t > 0, k \in \mathbb{Z}; \\ u^{(k)}|_{t=0} &= 0, \quad u_t^{(k)}|_{t=0} = \delta(x)e^{iky}, \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Обратная задача заключается в определении чётной по переменной y функции $q(x,y)$, используя следующую информацию о решении прямых задач:

$$u^{(k)}|_{x=0} = f_k(y,t), \quad u_x^{(k)}|_{x=0} = 0, \quad y \in \mathbb{R}, t > 0, k \in \mathbb{Z}.$$

Для решения данной задачи был использован двумерный аналог метода Гельфанда-Левитана. Обратная задача, как показано С.И. Кабанихиным, сводится в результате к решению следующего семейства интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} &\tilde{w}^{(k)}(x,y,t) + \int_{-x}^x \sum_m \tilde{w}^{(m)}(x,s) f_m^{(k)'}(t-s)ds = \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial f^{(k)}}{\partial t}(y,t-x) + \frac{\partial f^{(k)}}{\partial t}(y,t+x) \right], \quad x > 0, t \in (-x,x), y \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Данное семейство уравнений является двумерным аналогом уравнения Гельфанда-Левитана. Решение обратной задачи восстанавливается по формуле:

$$q(x,y) = 4 \frac{d}{dx} \tilde{w}^{(0)}(x,y,x-0).$$

В подразделе 1.2.2 рассматривается использование проекционного метода к решению полученных уравнений. Суть метода заключается в проецировании всех входящих в формулировку задачи функций на конечномерное подпространство, определяемое базисом Фурье. Данный подход может быть рассмотрен как регуляризация исходной задачи, вызванная тем фактом, что данные обратной задачи заданы на времениподобной поверхности.

Подраздел 1.3 посвящен исследованию двумерной обратной задачи для уравнения акустики. Задача заключается в определении плотности среды - 2π - периодической по переменной y функции $\rho(x, y)$. Исследуется следующая последовательность прямых задач ($k \in \mathbb{Z}$):

$$\begin{aligned} u_{tt}^{(k)} &= \Delta u^{(k)} + \nabla \ln \rho(x, y) \nabla u^{(k)}, \\ x > 0, \quad y &\in (-\pi, \pi), \quad t > 0, k \in \mathbb{Z}; \\ u^{(k)}|_{t=0} &\equiv 0, \\ u_x^{(k)}|_{x=0} &= \delta(t) e^{iky}. \end{aligned}$$

Обратная задача заключается в определении плотности среды $\rho(x, y)$ по следующей дополнительной информации:

$$u^{(k)}(+0, y, t) = f^{(k)}(y, t), \quad y \in (-\pi, \pi), k \in \mathbb{Z}.$$

Подобные постановки задач возникают, например, в геофизике в случае площадных систем наблюдений. Решение данной задачи рассматривалось в работах С.И. Кабанихина и М.А. Шишленина. Сформулированная обратная задача сводится к решению двумерного аналога уравнения М.Г. Крейна:

$$\Phi^{(k)}(x, t) - \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{-x}^x f_m^{(k)'}(t-s) \Phi^{(m)}(x, s) ds = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{iky}}{\rho(0, y)} dy, \quad t \in (-x, x), k \in \mathbb{Z}.$$

Решение обратной задачи вычисляется следующим образом:

$$\rho(x, y) = \frac{\pi^2}{\rho(0, y)} \left[\sum_{m \in \mathbb{Z}} \Phi^{(m)}(x, x-0) e^{-imy} \right]^{-2}.$$

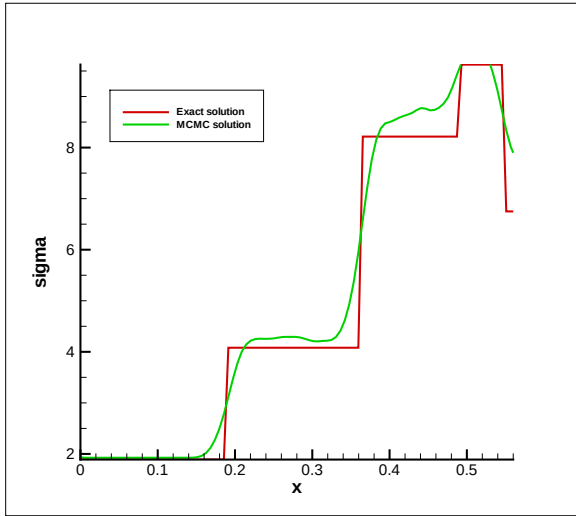
В подразделе 1.3.2 рассматривается N - приближение обратной задачи. По аналогии с результатами раздела 1.3.2, использование техники N - приближения позволяет приблизить решение двумерного аналога уравнения М.Г. Крейна решением некоторой конечной системы линейных интегральных уравнений.

Вторая глава посвящена описанию численных методов решения интегральных уравнений и систем, используемых в работе.

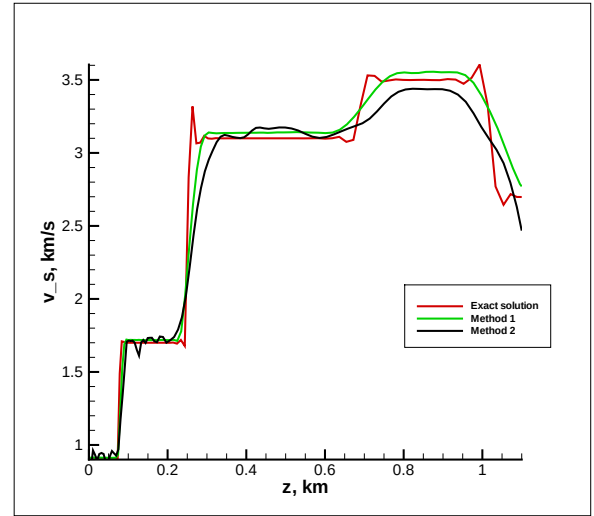
Подраздел 2.1 посвящен описанию метода Монте-Карло решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода:

$$\varphi(x) = \int_X k(x', x) \varphi(x') dx' + f(x). \quad (1)$$

Классические результаты в этой области были получены в работах Г.И. Марчука, Н.С. Бахвалова, Г.А. Михайлова, С.М. Ермакова, И.М. Соболя. При разработке численных алгоритмов также были использованы результаты, полученные Г.А. Михайловым и И.Н. Медведевым.



Восстановление акустической жёсткости



Восстановление скорости

Рис. 1: Решение одномерной обратной задачи сейсмоки с помощью методов Монте-Карло - определение акустической жёсткости и скорости поперечных волн. Красным - точное решение, зелёным - решение методом подобных траекторий. Число траекторий $N = 5000$, число разбиений по глубине $N_x = 100$.

Методы Монте-Карло основаны на представлении решения интегрального уравнения (1) рядом Неймана

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} K^n f,$$

где K - оператор, соответствующий интегралу в правой части (1). При этом сумма ряда Неймана может быть вычислена как математическое ожидание некоторой случайной величины, построенной на основе цепи Маркова, чьи параметры определяются ядром и правой частью рассматриваемого уравнения. В работе рассматриваются две модификации метода. Метод типа прямого моделирования основан на выборе переходной плотности пропорционально модулю ядра уравнения, что позволяет гарантировать конечность дисперсии оценки при условии сходимости ряда Неймана. Метод подобных траекторий основан на использовании одной цепи Маркова для вычисления оценки решения уравнений И.М. Гельфанда — Б.М. Левитана и М.Г. Крейна для всех значений параметра.

В подразделе 2.2 рассматривается алгоритм решения уравнения Гельфанда-Левитана с помощью сведения к системе линейных алгебраических уравнений и использовании стохастического проекционного метода. Стохастиче-

ческий проекционный метод решения СЛАУ $Az = b$ основан на итерационном процессе, каждый шаг которого состоит в проецировании решения на гиперплоскость, соответствующей случайно выбранной строке системы:

$$z_{k+1} = z_k + \frac{b_i - (a_i \cdot z_k)}{\|a_i\|_2^2} a_i^T.$$

В работе рассмотрены различные варианты метода, в частности, блочная моди-

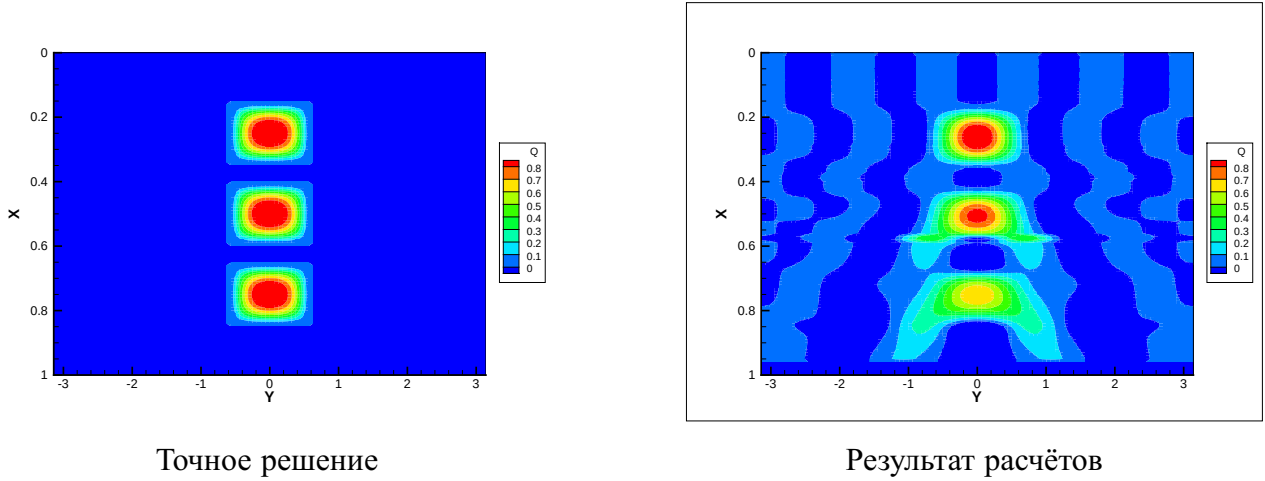


Рис. 2: Восстановление потенциала $q(x,y)$ стохастическим проекционным методом. Число источников и приёмников $N_F = 11$, число разбиений по глубине $N_x = 100$, число итераций проекционного метода 2500.

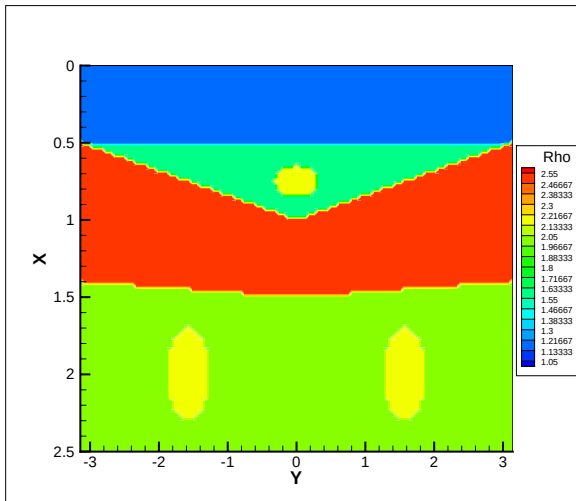
фикация, соответствующая проекции на пересечение нескольких случайно выбранных гиперплоскостей. Важной особенностью используемого подхода является то, что его применимость не ограничена сходимостью ряда Неймана.

Подраздел 2.3 посвящён алгоритмам решения систем линейных алгебраических уравнений с тёплицевыми и блочно-тёплицевыми матрицами. Матрицы таких систем имеют вид

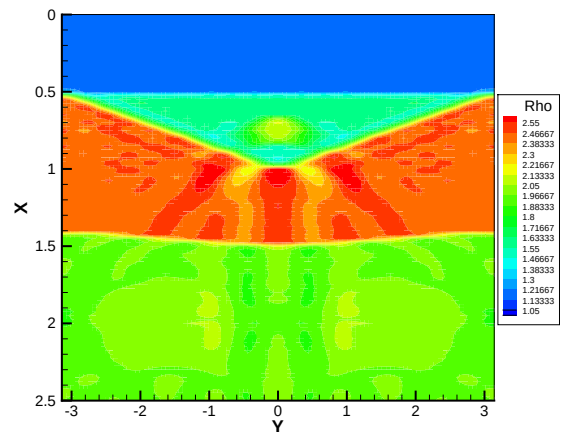
$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots & a_{-n+1} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \dots & a_{-n+2} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & a_{-n+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_0 \end{bmatrix},$$

где a_i - блоки некоторой размерности. Известно, что эффективность алгоритмов решения тех или иных систем во многом зависит от степени использования структуры задачи при разработке методов решения. Так, стандартные методы решения систем линейных уравнений с плотными матрицами требуют в общем случае $O(N^3)$ операций (здесь под N понимается размерность системы). Для систем с тёплицевыми матрицами разработаны как т.н. «быстрые» алгоритмы,

требующие $O(N^2)$ операций, так и «супербыстрые» методы ($O(N \log^p N)$). В данной работе используется блочный вариант алгоритма, предложенного В.В. Воеводиным и Е.Е. Тыртышниковым. Метод основан на том, что обратная к блочно-тёплицевой матрица определяется своим первым и последним блочным столбцом. Эту зависимость можно использовать и для нахождения решения соответствующей СЛАУ. При этом для решения системы $Az = b$ можно рассмотреть рекуррентную процедуру, основанную на вычислении первого и последнего столбца усеченной матрицы ($A_k x_k = e_1, A_k y_k = e_{k+1}$, где A_k - ведущая подматрица блочного размера $k + 1$), и решении усечённой системы $A_k z_k = b_k$. Данный метод относится к классу «быстрых» методов, а его рекуррентная схема хорошо сочетается со структурой уравнения М.Г. Крейна, позволяя свести задачу нахождения решения всех уравнений однопараметрического семейства к решению только одной системы линейных уравнений.



Точное решение обратной задачи



Результат расчётов

Рис. 3: Восстановление плотности $\rho(x,y)$ на основе алгоритма быстрого обращения тёплицевой матрицы. Число источников и приёмников $N_F = 19$, число разбиений по глубине $N_x = 200$.

Третья глава посвящена построению и анализу алгоритмов численного решения обратных задач на основе предложенных методов. В ней приведены схемы решения прямых задач для получения модельных данных, изучены особенности построения численных алгоритмов решения обратных задач на основе методов Монте-Карло, стохастического проекционного метода, алгоритма обращения блочно-тёплицевых матриц. Также в этой главе приведены результаты численных экспериментов и проведён сравнительный анализ эффективности численных алгоритмов решения поставленных задач.

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Разработан метод решения одномерной обратной задачи акустики и одномерной обратной задачи для уравнения колебаний на основе сочетания динамического варианта метода И.М. Гельфанда — Б.М. Левитана и метода Монте-Карло.
2. Разработан алгоритм численного решения одномерной динамической задачи сейсмологии на основе подхода И.М. Гельфанда — Б.М. Левитана — М.Г. Крейна во временной области в сочетании с методом Монте - Карло.
3. Разработан алгоритм численного решения двумерного аналога уравнения И.М. Гельфанда — Б.М. Левитана с помощью стохастического проекционного метода.
4. Разработан алгоритм численного решения двумерной обратной задачи для уравнения акустики на основе комбинации проекционного метода, метода И.М. Гельфанда — Б.М. Левитана — М.Г. Крейна и алгоритма быстрого обращения теплоцевой матрицы.
5. Разработанные алгоритмы реализованы в виде программных комплексов.

Публикации автора по теме диссертации

1. Numerical solution of the multidimensional Gelfand-Levitan equation / S.I. Kabanikhin, N.S. Novikov, K.K. Sabelfeld, M.A. Shishlenin // *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*. — 2015. — Vol. 23, no. 5. — Pp. 439–450.
2. Numerical solution of an inverse problem of coefficient recovering for a wave equation by a stochastic projection methods / S.I. Kabanikhin, K.K. Sabelfeld, N.S. Novikov, M.A. Shishlenin // *Monte Carlo Methods and Applications*. — 2015. — Vol. 21, no. 3. — Pp. 189–203.
3. Fast Toeplitz linear system inversion for solving two-dimensional acoustic inverse problem / S.I. Kabanikhin, N.S. Novikov, I.V. Oseledets, M.A. Shishlenin // *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*. — 2015. — Vol. 23, no. 6. — Pp. 687–700.
4. С.И. Кабаныхин, М.А. Шишленин, Н.С. Новиков. Алгоритмы определения упругих параметров по площадным системам наблюдений (прямая линейная обработка данных сейсмических наблюдений) // *Вестник кибернетики*. — 2016. — Т. 22, № 2. — С. 83–91.

5. *Шишленин М.А., Новиков Н.С.* Сравнительный анализ двух методов решения уравнения Гельфанда-Левитана-Крейна // Сибирские электронные математические известия. Труды второй международной молодежной научной школы-конференции «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач». Т. 8. — Новосибирск: 2011. — С. С379–С393.
6. *Новиков Н.С.* Сравнительный анализ численных методов решения двумерного аналога уравнения Гельфанда-Левитана // Сибирские электронные математические известия. Труды пятой международной молодежной научной школы-конференции «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач». Т. 11. — Новосибирск: 2014. — С. С132–С144.
7. *И.М. Куликов Н.С. Новиков М.А. Шишленин.* Математическое моделирование распространения ультразвуковых волн в двумерной среде: прямая и обратная задача // Сибирские электронные математические известия, Т. 12. — Новосибирск: 2015. — С. С219–С228.
8. *С.И. Кabanikhin Н.С. Новиков, Шишленин М.А.* Об одной модификации уравнения Гельфанда-Левитана // Труды международной конференции «Вычислительная и прикладная математика — 2017». — ИВМиМГ СО РАН.
9. *Новиков Н.С.* Прямой метод решения обратной динамической задачи сейсмологии // Труды международной конференции «Вычислительная и прикладная математика — 2017». — ИВМиМГ СО РАН.
10. *G.B. Bakanov S.I. Kabanikhin N.S. Novikov, Shishlenin M.A.* On the solvability of the discrete analogue of Gelfand-Levitan equation // Труды международной конференции «Вычислительная и прикладная математика — 2017». — ИВМиМГ СО РАН.