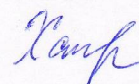


ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ГИДРОДИНАМИКИ им. М.А. ЛАВРЕНТЬЕВА
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи



Хандеева Надежда Александровна

**ИССЛЕДОВАНИЕ МОНОТОННОСТИ
И ТОЧНОСТИ
СХЕМЫ САВАРЕТ**

Специальность 01.01.07 — вычислительная математика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. Остапенко Владимир Викторович

Новосибирск — 2020

Оглавление

Введение	4
1 Стандартные схемы CABARET	13
1.1 2.5-слойный вариант схемы CABARET	13
1.2 2-слойный вариант схемы CABARET	17
2 Повышение точности на локальных экстремумах	22
2.1 Линейное уравнение переноса	22
2.2 Скалярный закон сохранения	31
3 Обеспечение монотонности	40
3.1 Случай знакопостоянного характеристического поля	40
3.1.1 Модифицированная схема CABARET	41
3.1.2 Графическая иллюстрация	50
3.2 Случай знакопеременного характеристического	
поля	52
3.2.1 Модифицированная схема CABARET	53
3.2.2 Графическая иллюстрация	69
4 Обеспечение полного распада неустойчивых сильных разрывов	73
4.1 Распад неустойчивого сильного разрыва	73
4.2 Разностный аналог энтропийного неравенства	77

4.3	Модификация монотонной схемы CABARET	85
5	Неоднородный скалярный закон сохранения	91
5.1	Стандартная схема CABARET	91
5.2	Модифицированная схема CABARET	94
5.3	Численное моделирование плёночных течений	98
	Заключение	105
	Литература	107

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность работы¹.

В настоящее время для исследования сложных процессов, допускающих математическое моделирование, широко используется вычислительный эксперимент [1–12]. Одним из главных этапов вычислительного эксперимента является построение приближённого (численного) метода решения задачи, которое в случае использования конечно-разностных методов сводится к выбору и анализу разностной схемы, аппроксимирующей соответствующую систему дифференциальных уравнений. Разностные схемы широко применяются для сквозного расчёта разрывных решений гиперболических систем законов сохранения, которыми моделируются физические процессы в различных областях науки, таких как: аэродинамика, атомная энергетика, гидродинамика открытых русел, плёночные течения; теория упругости и пластичности.

В классической работе [13], широко известной в связи со схемой распада разрыва, было введено понятие монотонности разностной схемы и показано, что среди линейных двухслойных по времени разностных схем, аппроксимирующих линейное уравнение переноса с постоянными коэффициентами, нет монотонных схем повышенного порядка аппроксимации.

¹Работа поддержана грантами РФФИ 12-01-00145, 16-01-00333, РНФ 16-11-10033.

Дальнейшее развитие теории разностных схем сквозного счёта для гиперболических систем законов сохранения в значительной степени было направлено на преодоление этого “запрета Годунова”. В результате были разработаны различные классы разностных схем, в которых повышенный порядок аппроксимации на гладких решениях и монотонность (при аппроксимации линейной системы и скалярного закона сохранения) достигались за счет нелинейной коррекции потоков, приводящей к нелинейности этих схем даже при аппроксимации линейного уравнения переноса. Перечислим основные классы таких схем, которые будем сокращённо называть NFC (Nonlinear Flux Correction) схемами: FCT-схемы [14], MUSCL-схемы [15], TVD-схемы [16], ENO-схемы [17], WENO-схемы [18], CABARET-схемы [19]. Основное достоинство этих схем заключается в том, что они с высокой точностью локализуют ударные волны при отсутствии существенных нефизических осцилляций на их фронтах.

Одними из первых нелинейную коррекцию численных потоков при разностной аппроксимации гиперболических уравнений применили авторы работы [20]. В дальнейшем эта методика монотонизации разностных схем сквозного счёта получила свое развитие в [14] и [21]. Модифицированная схема распада разрыва типа Годунова, относящаяся к классу NFC-схем, была предложена в [15]. В этой схеме при решении задачи Римана на границе смежных ячеек разностной сетки использовались кусочно-линейные функции, что позволило получить второй порядок аппроксимации на гладких решениях. В [22] была разработана центрально-разностная схема второго порядка, при построении которой используется MUSCL-реконструкция численных потоков. Эта схема лежит в основе класса монотонных центрально-разностных схем повышенной точности [23, 24], при реализации которых не применяется решение задачи Римана.

В [16] было введено TVD-свойство разностной схемы, предполагающее, что при расчёте задачи Коши для скалярного закона сохранения полная вариация разност-

ного решения не возрастает при переходе с одного временного слоя на другой, что соответствует аналогичному свойству точного решения. TVD-свойство эквивалентно свойству монотонности схемы по Годунову [13] при аппроксимации линейных уравнений и усиливает это свойство при аппроксимации квазилинейного скалярного закона сохранения [25]. TVD-схема Хартена построена путем модификации схемы Лакса-Вендроффа [26] и, в отличие от последней [27], удовлетворяет разностному аналогу энтропийного неравенства, что обеспечивает отбор устойчивых ударных волн при аппроксимации гиперболических систем законов сохранения с выпуклым расширением [28].

При расчёте гладких решений TVD-схема [16] имеет второй порядок точности везде за исключением локальных экстремумов этих решений, где она имеет первый порядок сходимости. Кроме того, численный поток в TVD-схеме в результате минимаксной процедуры его коррекции имеет малую гладкость: он является лишь Липшиц-непрерывным. Эти недостатки классической TVD-схемы Хартена в значительной степени преодолены в её ENO [17] и WENO [18, 29] модификациях, в которых TVD-свойство выполняется приближённо, что позволяет сохранить повышенную точность на локальных экстремумах рассчитываемых гладких решений. Метод построения ENO-схем, связанный с выбором наиболее «гладкого» сеточного шаблона среди нескольких кандидатов для аппроксимации численных потоков, в WENO-схемах заменяется подходом, при котором используется выпуклая комбинация этих шаблонов, где каждому из них присваивается свой вес, определяющий его вклад в окончательное приближение численного потока. В результате, в отличие от других классов NFC-схем, в которых для монотонизации разностного решения используются различные типы минимаксной коррекции потоков, в WENO-схемах [29] такая коррекция достигается за счёт введения специальных весовых параметров, что обеспечивает повышенную гладкость функций численных потоков.

CABARET-схемы [19] представляют собой ещё один, достаточно новый класс NFC-схем, развитию теории которого посвящена данная работа. В основе CABARET-схем лежит линейная трёхслойная по времени и двухточечная по пространству схема Upwind Leapfrog [30], предназначенная для численного решения линейных гиперболических уравнений. Эта схема имеет второй порядок аппроксимации на гладких решениях, является явной и условно устойчивой при числах Куранта $r \in (0, 1]$. Её детальный анализ был проведен в работах [31, 32], в которых с учётом кососимметричности своего пространственного шаблона она была названа схемой КАБАРЕ. Основные достоинства этой схемы связаны с тем, что она задана на компактном пространственном шаблоне, является обратимой по времени и точной при двух различных числах Куранта $r = 0.5, 1$, что наделяет её уникальными диссипативными и дисперсионными свойствами [32].

Для численного решения уравнений одномерной газовой динамики [12] был разработан балансно-характеристический вариант схемы CABARET [33], который с учётом коррекции потоковых переменных (основанной на разностном аналоге принципа максимума) показал высокую точность при расчёте классического теста Blast Wave [34]. В схеме, предложенной в [33], используются переменные двух типов: консервативные, заданные в центрах пространственно-временных ячеек разностной сетки, и потоковые, заданные в узлах этой сетки. В результате эта схема является двух с половиной слойной по времени, в силу чего далее для нее используется обозначение CABARET 2.5.

Было показано [35], что разработанная в [33] схема не является монотонной по Годунову [13] при всех числах Куранта $r \in (0, 1]$, при которых она является устойчивой, то есть при аппроксимации линейного уравнения переноса всегда можно указать такие сеточные монотонные начальные данные, которые данная схема переводит на следующие временные слои с потерей свойства монотонности. В то же время, при специальной аппроксимации начальных данных рассчиты-

ваемой задачи схема CABARET 2.5 сохраняет свойство их монотонности [35] и сильной монотонности [36] при числах Куранта $r \in (0, 0.5]$ и теряет это свойство при числах Куранта $r \in (0.5, 1)$. В связи с этим была предложена двойная коррекция потоков [35], которая в случае специальной аппроксимации начальных данных обеспечивает сохранение их монотонности схемой CABARET 2.5 при всех числах Куранта $r \in (0, 1]$, при которых она является устойчивой.

В настоящее время для численного моделирования пространственно многомерных газодинамических [37] и гидравлических [38] течений в основном применяется двухслойная по времени форма записи схемы КАБАРЕ [39], для которой в [19] была обоснована аббревиатура CABARET. В настоящей работе для данной схемы используется сокращённое обозначение CABARET 2. Монотонность схемы CABARET 2 при аппроксимации линейного уравнения переноса в одномерном случае изучалась в [40] и [41], а в двумерном — в [42]. В [40] и [41] показано, что стандартная схема CABARET 2 [39] не является монотонной по Годунову [13], и предложена модификация этой схемы, обеспечивающая её монотонность, в том числе, в случае знакопеременного характеристического поля аппроксимируемого гиперболического уравнения [41]. В [42] показано, что данная модификация схемы CABARET 2 имеет существенные преимущества по сравнению со стандартной схемой при расчёте разрывных решений двумерного линейного уравнения переноса.

Данная диссертация посвящена развитию теории разностной схемы CABARET.

Цель работы — теоретическое и экспериментальное исследование схемы CABARET, построение различных модификаций этой схемы, улучшающих её свойства.

Основные результаты.

1. Показано, что стандартная схема CABARET 2.5 снижает порядок сходимости в окрестностях локальных экстремумов, расположенных в гладких

частях рассчитываемых обобщённых решений. Предложена модификация схемы CABARET 2.5, которая сохраняет повышенную точность схемы в окрестностях локальных экстремумов точного решения.

2. Предложена модификация стандартной схемы CABARET 2, обеспечивающая её монотонность при аппроксимации скалярного закона сохранения с выпуклым потоком как в областях, в которых скорость распространения характеристик имеет постоянный знак, так и в случае, когда скорость распространения характеристик аппроксимируемого дивергентного уравнения меняет знак.

3. Показано, что стандартная схема CABARET 2, аппроксимирующая скалярный закон сохранения, при числах Куранта $r > 0.5$ не обеспечивает полного распада неустойчивого сильного разрыва начальных данных. Для этой схемы получен разностный аналог энтропийного неравенства и предложен метод, обеспечивающий в разностном решении, получаемом по модифицированной схеме CABARET 2, полный распад неустойчивых сильных разрывов для любых чисел Куранта $r \in (0, 1]$, при которых данная схема является устойчивой.

4. Для схемы CABARET 2, аппроксимирующей неоднородный скалярный закон сохранения с выпуклой и монотонно возрастающей функцией потока, предложен метод расщепления по физическим процессам, обеспечивающий монотонность этой схемы на первом шаге расщепления, когда решается однородное уравнение. Показаны существенные преимущества модифицированной схемы по сравнению со стандартной схемой CABARET 2 при расчёте разрывных решений с ударными волнами.

5. При помощи модифицированной схемы CABARET 2 проведено численное моделирование процесса распространения волн на поверхности стекающей плёнки конденсата.

Научная новизна. Впервые предложены модификации схемы CABARET, обеспечивающие: повышенную точность на локальных экстремумах рассчитыва-

емых решений; монотонность по Годунову при расчёте скалярного закона сохранения с выпуклым потоком; выполнение разностного аналога энтропийного неравенства, что гарантирует отбор устойчивых ударных волн.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные результаты вносят существенный вклад в развитие теории схемы CABARET и могут быть использованы для создания новых перспективных модификаций этой схемы, предназначенных для численного моделирования сложных гидро- и газодинамических течений.

Методология и методы исследования. В работе используются методы теории дифференциальных уравнений, функционального анализа, теории разностных схем сквозного счёта.

На защиту выносятся ряд модификаций схемы CABARET, улучшающих её свойства, и применение этой схемы для численного моделирования плёночных течений.

Личный вклад автора. Задачи поставлены научным руководителем. Подходы к построению модификаций схемы CABARET (включая теоремы о её монотонности) и методы их реализации найдены совместно. Численные расчёты проведены соискателем лично. Конфликт интересов с соавторами отсутствует.

Степень достоверности результатов обеспечивается математическим доказательством основных теорем, обоснованием алгоритмов, а также сериями численных расчётов и сравнительным анализом алгоритмов.

Апробация работы. Результаты работы обсуждались на следующих семинарах: семинар ИГиЛ СО РАН; объединённый семинар ИВМиМГ СО РАН и кафедры вычислительной математики ММФ НГУ; объединённый семинар ИВТ СО РАН, кафедры математического моделирования ММФ НГУ и кафедры вычислительных технологий НГТУ; семинар дифференциальных уравнений ММФ НГУ; семинар ИТПМ СО РАН, и докладывались на следующих всероссийских и между-

народных конференциях: “Вычислительный эксперимент в аэроакустике” (Светлогорск, 2014, 2016); “Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики” (Новосибирск, 2015); “Нелинейные волны: теория и новые приложения” (Новосибирск, 2016); “Вычислительная и прикладная математика” (Новосибирск, 2017).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 15 работ, из них 8 — тезисы и труды конференций, 7 работ — в изданиях, входящих в список ВАК, в том числе 5 — в журналах, индексируемых системой цитирования Web of Science, 7 — Scopus, 7 — RSCI (ядро РИНЦ).

Структура и объём диссертации. Работа состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Объём диссертации — 117 страниц. Список литературы содержит 75 источников.

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность работы, приведено краткое изложение содержания работы, сформулированы основные результаты и раскрыта их новизна.

В **первой главе** для аппроксимации задачи Коши для квазилинейного гиперболического скалярного закона сохранения с выпуклой функцией потока описаны 2.5-слойный и 2-слойный варианты схемы CABARET, которые в дальнейшем называются схемами CABARET 2.5 и CABARET 2 соответственно. Описаны свойства данных схем. Показано, что схема CABARET 2 не является монотонной и при числах Куранта больше 0.5 не обеспечивает полного распада неустойчивого сильного разрыва начальных данных.

Во **второй главе** показано, что, подобно монотонным схемам повышенной точности типа TVD, схема CABARET 2.5 снижает порядок сходимости в обла-

стях локальных экстремумов рассчитываемых обобщённых решений. Предложена модифицированная коррекция потоков, которая сохраняет повышенную точность схемы в областях локальных экстремумов.

В третьей главе получена модификация схемы CABARET, обеспечивающая монотонность данной схемы при аппроксимации скалярного закона сохранения с выпуклым потоком, как в областях, в которых скорость распространения характеристик имеет постоянный знак, так и в случае, когда скорость распространения характеристик аппроксимируемого дивергентного уравнения меняет знак.

В четвёртой главе для схемы CABARET 2 получен разностный аналог энтропийного неравенства и предложен метод, обеспечивающий в разностном решении полный распад неустойчивых сильных разрывов для любых чисел Куранта, при которых данная схема является устойчивой.

В пятой главе предложен метод расщепления по физическим процессам для схемы CABARET 2, аппроксимирующей неоднородный скалярный закон сохранения с выпуклой и монотонно возрастающей функцией потока. При помощи модифицированной схемы CABARET 2 проведено численное моделирование процесса распространения волн на поверхности стекающей плёнки конденсата.

В заключении сформулированы основные результаты работы и обозначены перспективы дальнейших исследований.

Глава 1

Стандартные схемы CABARET

Для аппроксимации задачи Коши для квазилинейного гиперболического скалярного закона сохранения с выпуклой функцией потока описаны стандартные схемы CABARET 2.5 и CABARET 2. Описаны свойства данных схем. Показано, что схема CABARET 2 не является монотонной и при числах Куранта больше 0.5 не обеспечивает полного распада неустойчивого сильного разрыва начальных данных.

1.1 2.5-слойный вариант схемы CABARET

Для скалярного закона сохранения с выпуклым потоком

$$v_t + f(v)_x = 0, \quad f''(v) \geq 0 \quad (1.1)$$

рассмотрим задачу Коши с начальными данными

$$v(x, 0) = v_0(x). \quad (1.2)$$

Будем считать, что начальные данные (1.2) удовлетворяют условию

$$a(v_0(x)) = f'(v_0(x)) > 0 \quad \forall x,$$

из которого следует, что характеристики рассматриваемого решения распространяются в положительном направлении оси x .

Аппроксимируем задачу (1.1), (1.2) разностной схемой [33], заданной на прямоугольной равномерной по пространству разностной сетке

$$\{x_j, t_n\} : x_j = jh, \quad t_{n+1} = t_n + \tau_n, \quad t_0 = 0, \quad (1.3)$$

в которой h — постоянный шаг сетки по пространству, а τ_n — шаг сетки по времени, определяемый из условия устойчивости

$$\tau_n = \frac{rh}{\max_j (a_{j+1/2}^n)}, \quad (1.4)$$

где $r \in (0, 1)$ — число Куранта, $a_{j+1/2}^n = a(U_{j+1/2}^n)$. В этой схеме используются потоковые $u_j^n = v(x_j, t_n)$ и консервативные $U_{j+1/2}^{n+1/2} = v(x_{j+1/2}, t_{n+1/2})$ переменные, заданные соответственно в целых x_j, t_n и полуцелых $x_{j+1/2} = x_j + h/2$, $t_{n+1/2} = t_n + \tau_n/2$ узлах разностной сетки.

Пусть $u_j^0 = v_0(x_j)$ — сеточная аппроксимация начальной функции $v_0(x)$. Для реализации разностной схемы необходимо предварительно по разностным уравнениям

$$\frac{U_{j+1/2}^{1/2} - U_{j+1/2}^0}{\tau_0/2} + \frac{f_{j+1}^0 - f_j^0}{h} = 0, \quad (1.5)$$

где $f_j^0 = f(u_j^0)$, $U_{j+1/2}^0 = (u_j^0 + u_{j+1}^0)/2$, вычислить значения консервативных переменных на начальном временном полушаге. После этого схема при всех $n \geq 0$ реализуется в два этапа.

На первом этапе (временном полушаге) с учётом того, что $a(v) > 0$, по известным величинам u_j^n , $U_{j+1/2}^{n+1/2}$ находятся предварительные значения потоков на

$(n + 1)$ -ом временном слое

$$\bar{u}_j^{n+1} = 2U_{j-1/2}^{n+1/2} - u_{j-1}^n, \quad (1.6)$$

которые, исходя из принципа максимума, корректируются по формулам

$$u_j^{n+1} = F(\bar{u}_j^{n+1}, m_j^n, M_j^n), \quad (1.7)$$

$$F(u, m, M) = \begin{cases} u, & m \leq u \leq M, \\ m, & u < m, \\ M, & u > M, \end{cases} \quad (1.8)$$

$$m_j^n = \min(u_j^n, U_{j-1/2}^{n+1/2}), \quad M_j^n = \max(u_j^n, U_{j-1/2}^{n+1/2}). \quad (1.9)$$

На втором этапе (временном полушаге) по дивергентной схеме

$$\frac{U_{j+1/2}^{n+3/2} - U_{j+1/2}^{n+1/2}}{\tau_{n+1/2}} + \frac{f_{j+1}^{n+1} - f_j^{n+1}}{h} = 0, \quad (1.10)$$

где

$$f_j^n = f(u_j^n), \quad \tau_{n+1/2} = \frac{(\tau_n + \tau_{n+1})}{2},$$

определяются значения консервативных переменных на временном слое $n + 3/2$.

В случае, когда характеристики задачи (1.1) распространяются в отрицательном направлении оси x , формула (1.6) заменяется на

$$\bar{u}_j^{n+1} = 2U_{j+1/2}^{n+1/2} - u_{j+1}^n,$$

а формула (1.9) — на формулу

$$m_j^n = \min(u_j^n, U_{j+1/2}^{n+1/2}), \quad M_j^n = \max(u_j^n, U_{j+1/2}^{n+1/2}).$$

В работах [35, 36] было показано, что в случае специальной аппроксимации начальных данных эта схема является монотонной [35] и сильно монотонной [36] при числах Куранта $r \in (0, 0.5]$ и немонотонной при числах Куранта $r \in (0.5, 1)$. В связи с этим в [35] была предложена двойная коррекция потоков, которая в случае специальной аппроксимации начальных данных обеспечивает монотонность данной схемы при всех числах Куранта $r \in (0, 1]$, при которых она является устойчивой.

В случае аппроксимации линейного уравнения переноса с постоянным положительным коэффициентом, т. е. при условии $a(u) = \text{const} > 0$, исключив из разностной схемы (1.5)–(1.10) без коррекции потоковых переменных (1.7)–(1.9) консервативные переменные, приходим к трёхслойной по времени и двухточечной по пространству схеме

$$\frac{1}{2} \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\tau_n} + \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\tau_n} \right) + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0,$$

совпадающей при $\tau_n = \text{const}$ с разностной схемой Upwind Leapfrog. Данная схема была предложена Айзерлисом для численного решения гиперболических уравнений в работе [30], имеет второй порядок аппроксимации на гладких решениях, является явной и условно устойчивой при числах Куранта $r \in (0, 1]$. Детальный анализ этой схемы был проведён в работах [31, 32], в которых с учётом кососимметричности своего пространственного шаблона она была названа схемой CABARET. Основные достоинства этой схемы связаны с тем, что она является обратимой по времени и точной при двух различных числах Куранта $r = 0.5, 1$, что наделяет её уникальными диссипативными и дисперсионными свойствами [32].

В дальнейшем разностную схему (1.5)–(1.10) будем называть схемой CABARET 2.5. В Главе 2 показано, что, подобно монотонным схемам повышенной точности типа TVD, схема CABARET 2.5 снижает порядок сходимости в

областях локальных экстремумов рассчитываемых обобщённых решений. Предложена модифицированная коррекция потоков, которая сохраняет повышенную точность схемы в областях локальных экстремумов.

1.2 2-слойный вариант схемы CABARET

Пусть $u_j^n, U_{j+1/2}^n$ — известное численное решение задачи (1.1) на n -ом временном слое t_n , при $n = 0$ — сеточная аппроксимация начальной функции $v_0(x)$. Численное решение $u_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+1}$ на $(n+1)$ -ом временном слое t_{n+1} находится в три этапа. На первом этапе по разностным уравнениям

$$\frac{U_{j+1/2}^{n+1/2} - U_{j+1/2}^n}{\tau_n/2} + \frac{f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n)}{h} = 0 \quad (1.11)$$

вычисляются значения консервативных переменных $U_{j+1/2}^{n+1/2} = v(x_{j+1/2}, t_{n+1/2})$ на полуцелом временном слое $t_{n+1/2} = t_n + \tau_n/2$. На втором этапе путем экстраполяции

$$\bar{u}_j^{n+1} = 2U_{j-1/2}^{n+1/2} - u_{j-1}^n \quad (1.12)$$

находятся предварительные значения потоковых переменных $\bar{u}_j^{n+1}$, которые корректируются по формуле

$$u_j^{n+1} = F\left(\bar{u}_j^{n+1}, m_j^n, M_j^n\right), \quad (1.13)$$

где

$$F(u, m, M) = \begin{cases} u, & m \leq u \leq M, \\ m, & u < m, \\ M, & u > M, \end{cases} \quad (1.14)$$

$$m_j^n = \min(u_{j-1}^n, U_{j-1/2}^n, u_j^n), \quad M_j^n = \max(u_{j-1}^n, U_{j-1/2}^n, u_j^n). \quad (1.15)$$

На третьем, заключительном этапе по разностным уравнениям

$$\frac{U_{j+1/2}^{n+1} - U_{j+1/2}^{n+1/2}}{\tau_n/2} + \frac{f(u_{j+1}^{n+1}) - f(u_j^{n+1})}{h} = 0 \quad (1.16)$$

вычисляются значения консервативных переменных $U_{j+1/2}^{n+1}$ на $(n+1)$ -ом временном слое t_{n+1} .

Полусумма уравнений (1.11) и (1.16) даёт симметричное разностное уравнение

$$\frac{U_{j+1/2}^{n+1} - U_{j+1/2}^n}{\tau_n} + \frac{f_{j+1}^{n+1/2} - f_j^{n+1/2}}{h} = 0, \quad (1.17)$$

где $f_j^{n+1/2} = (f(u_j^n) + f(u_j^{n+1}))/2$, которое на заключительном этапе можно использовать вместо уравнения (1.16).

В случае, когда характеристики задачи (1.1) распространяются в отрицательном направлении оси x , формула (1.12) заменяется на

$$\bar{u}_j^{n+1} = 2U_{j+1/2}^{n+1/2} - u_{j+1}^n,$$

а формула (1.15) — на формулу

$$m_j^n = \min(u_{j+1}^n, U_{j+1/2}^n, u_j^n), \quad M_j^n = \max(u_{j+1}^n, U_{j+1/2}^n, u_j^n).$$

В дальнейшем разностную схему (1.11)–(1.12) будем называть разностной схемой CABARET 2.

Поскольку точные решения задачи Коши (1.1) обладают свойством сохранения монотонности начальных данных $v_0(x)$, то, следуя С.К. Годунову [13], введём понятие монотонности двухслойной по времени схемы CABARET.

Определение 1. Разностная схема CABARET 2 называется монотонной,

если она каждую монотонную по j сеточную функцию $u_j^n, U_{j+1/2}^n$ переводит за один временной шаг в монотонную по j сеточную функцию $u_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+1}$ того же знака монотонности, т. е. если выполнены условия

$$u_j^n \geq U_{j+1/2}^n \geq u_{j+1}^n \quad \forall j \quad \Rightarrow \quad u_j^{n+1} \geq U_{j+1/2}^{n+1} \geq u_{j+1}^{n+1} \quad \forall j; \quad (1.18)$$

$$u_j^n \leq U_{j+1/2}^n \leq u_{j+1}^n \quad \forall j \quad \Rightarrow \quad u_j^{n+1} \leq U_{j+1/2}^{n+1} \leq u_{j+1}^{n+1} \quad \forall j.$$

Покажем, что в силу данного определения схема CABARET 2 монотонной не является. Рассмотрим монотонно убывающее по j на n -ом временном слое разностное решение $u_j^n, U_{j+1/2}^n$, которое на сеточном интервале $[x_{k-2}, x_{k+1}]$ имеет вид

$$u_{k-2}^n = U_{k-3/2}^n = u_{k-1}^n = U_{k-1/2}^n = u_k^n = U_{k+1/2}^n = \alpha > u_{k+1}^n = \beta. \quad (1.19)$$

Для такого решения из формул (1.11)–(1.12) находим

$$u_{k-1}^{n+1} = U_{k-1/2}^{n+1} = u_k^{n+1} = \alpha < U_{k+1/2}^{n+1} = \alpha + \rho_n(f(\alpha) - f(\beta)), \quad (1.20)$$

где $\rho_n = \tau_n/(2h)$. Из неравенства (1.20) следует, что в схеме CABARET 2 для монотонно убывающего разностного решения, удовлетворяющего (1.19), при любом значении $\rho_n > 0$ нарушено условие монотонности (1.18).

Проиллюстрируем данный результат графически. Рассмотрим разностное решение по схеме CABARET 2 задачи Коши (1.1), в которой поток $f(v) = v^2/2$, а функция начальных данных является кусочно-постоянной и имеет вид

$$v_0(x) = \begin{cases} 0.5, & x < 1, \\ 2, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0.5, & x > 2. \end{cases} \quad (1.21)$$

На начальном этапе точное решение этой задачи, показанное сплошной линией на Рисунках 1.1 и 1.2, представляет собой ударную волну, распространяющуюся со скоростью $D = 1.25$, и центрированную волну разрежения с центром в точке $x_c = 1$ на оси x . На Рисунках 1.1 и 1.2 на два последовательных момента времени кружками приведены значения консервативных переменных $U_{j+1/2}^n$, получаемые при расчёте по схеме CABARET 2 задачи Коши (1.1), (1.21) с сеточными начальными данными в виде

$$U_{j+1/2}^0 = v_0(x_{j+1/2}), \quad u_j^0 = (U_{j-1/2}^0 + U_{j+1/2}^0)/2.$$

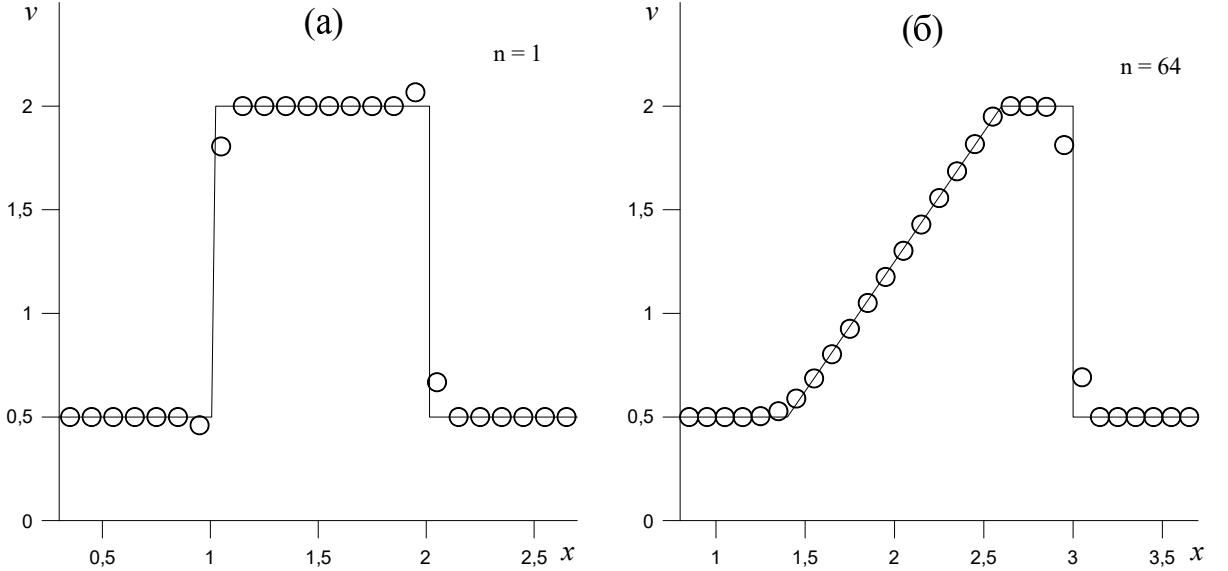


Рисунок 1.1 — Сравнение точного и численного решений задачи Коши (1.1), (1.21), в которой поток $f(v) = v^2/2$, на моменты времени $t_n = 0.0125$, где $n = 1$ (а), и $t_n = 0.8$, где $n = 64$ (б), при числе Куранта $r = 0.25$; сплошной линией показано точное решение, кружками — разностное решение, полученное по схеме CABARET 2.

Расчёты проводились на разностной сетке (1.3), (1.4) с пространственным шагом $h = 0.1$ при числах Куранта $r = 0.25$ (Рисунок 1.1) и $r = 0.75$ (Рисунок 1.2). Из Рисунков 1.1 и 1.2 видно, что разностное решение, получаемое по стандартной схеме, имеет паразитические осцилляции, амплитуда которых возрастает с увели-

чением числа Куранта. При $r = 0.25$ эти осцилляции с течением времени быстро затухают, а при $r = 0.75$ сохраняются при всех $t > 0$. Кроме того, при $r = 0.75$ схема CABARET 2 (Рисунок 1.2(б)) не обеспечивает полного распада неустойчивого сильного разрыва начальных данных (1.21), расположенного в точке $x = 1$.

Вариант схемы CABARET 2 для случая, когда скорости распространения характеристик меняют знак, предложен в работе [39]. Однако этот вариант не гарантирует отсутствия осцилляций на фронтах ударных волн.

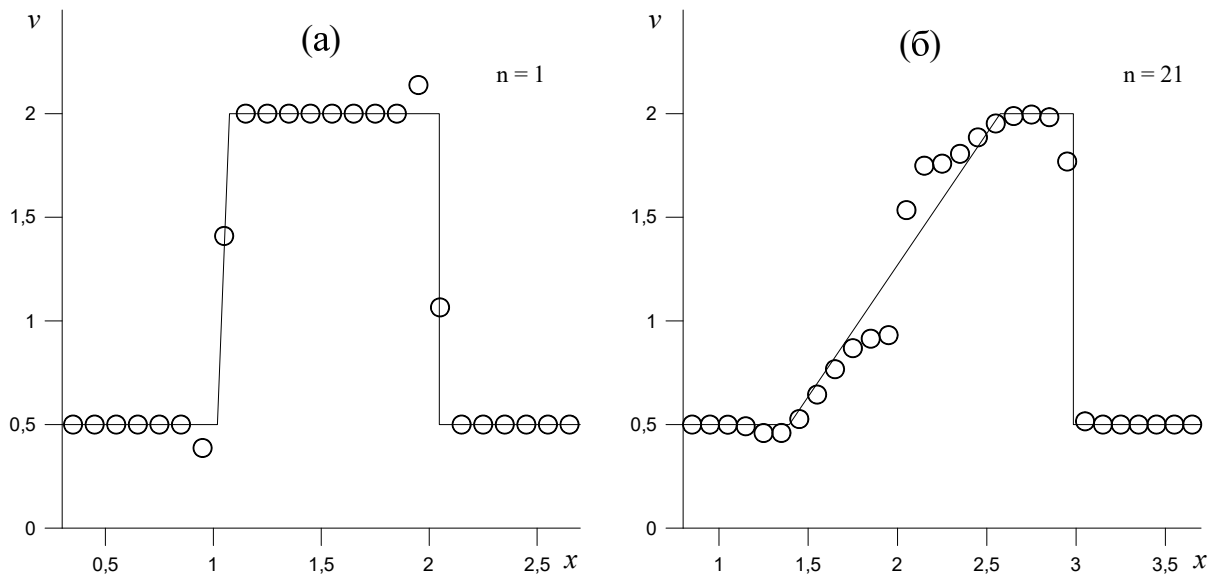


Рисунок 1.2 — Сравнение точного и численного решений задачи Коши (1.1), (1.21), в которой поток $f(v) = v^2/2$, на моменты времени $t_n = 0.0375$, где $n = 1$ (а), и $t_n = 0.7875$, где $n = 21$ (б), при числе Куранта $r = 0.75$; сплошной линией показано точное решение, кружками — разностное решение, полученное по схеме CABARET 2.

Глава 2

Повышение точности на локальных экстремумах

Показано, что стандартная коррекция потоковых переменных приводит к снижению точности схемы CABARET 2.5 в областях локальных экстремумов рассчитываемых решений. Предложена модифицированная коррекция потоков, которая сохраняет повышенную точность схемы в областях локальных экстремумов. Приведены результаты тестовых расчётов, иллюстрирующих преимущества модифицированной схемы.

2.1 Линейное уравнение переноса

Рассмотрим задачу Коши для линейного уравнения переноса

$$v_t + av_x = 0, \quad a = \text{const} > 0, \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad (2.1)$$

которую аппроксимируем разностной схемой CABARET 2.5 с однократной коррекцией потоковых переменных на равномерной по пространству и по времени прямоугольной разностной сетке

$$\{x_j, t_n\} : x_j = jh, \quad t_n = n\tau, \quad h, \tau = \text{const}. \quad (2.2)$$

Поскольку точное решение $v(x, t) = v_0(x - at)$ задачи (2.1) сохраняет все осо-

бенности начальной функции $v_0(x)$, в частности, её монотонность, С. К. Годунов предложил [13] явную двухслойную по времени разностную схему, аппроксимирующую эту задачу, называть монотонной, если она сохраняет монотонность сеточных начальных данных при переходе от одного временного слоя к другому. Для схемы CABARET 2.5, заданной на разнесённой по пространству и по времени разностной сетке (2.2), это понятие монотонности было модифицировано следующим образом [35].

Определение 2. *Разностная схема CABARET 2.5 называется монотонной:*

- а) на начальном временном полушаге (1.5), если она каждую монотонную по j начальную функцию $\{u_j^0, U_{j+1/2}^0\}$ переводит в монотонную по j сеточную функцию $\{u_j^0, U_{j+1/2}^{1/2}\}$;*
- б) на основном временном шаге (1.6)–(1.10), если она каждую монотонную по j сеточную функцию $\{u_j^n, U_{j+1/2}^{n+1/2}\}$, где $n \geq 0$, переводит в монотонные по j сеточные функции $\{u_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+1/2}\}$ и $\{u_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+3/2}\}$.*

В работе [35] показано, что необходимым и достаточным условием монотонности устойчивой (1.4) схемы CABARET 2.5 на начальном временном полушаге (1.5) является выполнение для монотонных начальных данных $\{u_j^0, U_{j+1/2}^0\}$ соотношения

$$U_{j+1/2}^0 = \frac{u_j^0 + u_{j+1}^0}{2} \quad \forall j, \quad (2.3)$$

а критерием её монотонности на основном временном шаге (1.6)–(1.10) является выполнение для числа Куранта r неравенства

$$r = a\tau/h \leq 0.5 \quad \Leftrightarrow \quad \tau \leq h/(2a). \quad (2.4)$$

В работе [36] доказано, что условия (2.3) и (2.4) необходимы и достаточны для сильной монотонности схемы CABARET 2.5, предполагающей, что в случае на-

чальных данных $\{u_j^0, U_{j+1/2}^0\}$, имеющих конечное число обобщённых локальных экстремумов, схема не увеличивает число этих экстремумов при следующих переходах разностного решения

$$\{u_j^0, U_{j+1/2}^0\} \Rightarrow \{u_j^0, U_{j+1/2}^{1/2}\},$$

$$\{u_j^n, U_{j+1/2}^{n+1/2}\} \Rightarrow \{u_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+1/2}\} \Rightarrow \{u_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+3/2}\} \quad \forall n \geq 0.$$

Таким образом, в случае схемы CABARET 2.5 понятия монотонности и сильной монотонности являются эквивалентными.

Известно, что монотонные разностные схемы формально повышенной точности [45] (в которых повышенный порядок аппроксимации на гладких решениях достигается за счёт применения различных минимаксных процедур коррекции потоков) в общем случае снижают порядок сходимости до первого в областях локальных экстремумов рассчитываемых решений. Этот недостаток схем типа TVD был отмечен в работе [43], где была предложена ENO-модификация TVD-схемы Хартена [16], обеспечившая второй порядок сходимости в областях локальных экстремумов. Однако эта модификация привела к увеличению пятиточечного пространственного шаблона исходной TVD схемы до семиточечного, что с прикладной точки зрения является крайне нежелательным. Поэтому при дальнейшем развитии ENO-схем были разработаны WENO-схемы [29, 46], в которых сохранение повышенной точности на локальных экстремумах достигается на достаточно компактных пространственных шаблонах разностной сетки.

Аналогичный недостаток, связанный со снижением точности в областях локальных экстремумов, имеет схема CABARET 2.5 (1.5)–(1.10). Для иллюстрации этого на Рисунках 2.1–2.4 на момент времени $T = 0.5$ приведены результаты расчёта по схеме CABARET 2.5 задачи Коши (2.1) со следующими разрывными на-

чальными данными

$$v_0(x) = \begin{cases} \sin(\alpha x) + \beta, & x < 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

где $\alpha = 5\pi/2$, $\beta = 1.1$. Расчёты проводились на равномерной сетке (2.2) с параметром $a = 1$ и числом Куранта $r = 0.25$. На Рисунках 2.1, 2.2, 2.4 приведены расчёты, для которых $h = 0.02$, а на Рисунке 2.3 — результаты расчётов в области, отмеченной прямоугольниками на Рисунках 2.1 и 2.2, на более мелкой сетке, для которой $h = 0.0005$. Сплошной линией на Рисунках 2.1–2.3 показано точное решение. Кружками показаны разностные решения, получаемые по схеме CABARET 2.5, квадратиками — решения, получаемые по схеме CABARET 2.5 без коррекции потоковых переменных ($u_j^{n+1} = \bar{u}_j^{n+1} \quad \forall j$), и точками — решения, получаемые по схеме CABARET 2.5 с новой коррекцией потоковых переменных, которая будет описана ниже. На Рисунке 2.4 в логарифмической шкале приведены погрешности

$$\Delta u_j^n = |u_j^n - v(x_j, t_n)|$$

этих решений.

Из Рисунков 2.1 и 2.2 видно, что разностное решение, получаемое по монотонной схеме CABARET 2.5 с коррекцией потоков (кружки на Рисунке 2.2), в отличие от схемы CABARET 2.5 без коррекции потоков (квадратики на Рисунке 2.1), не имеет осцилляций в окрестности сильного разрыва. В то же время, как следует из Рисунка 2.3, монотонная схема с коррекцией потоков заметно снижает точность в окрестностях локальных экстремумов, расположенных в области гладкости точного решения, по сравнению с немонотонной схемой без коррекции.

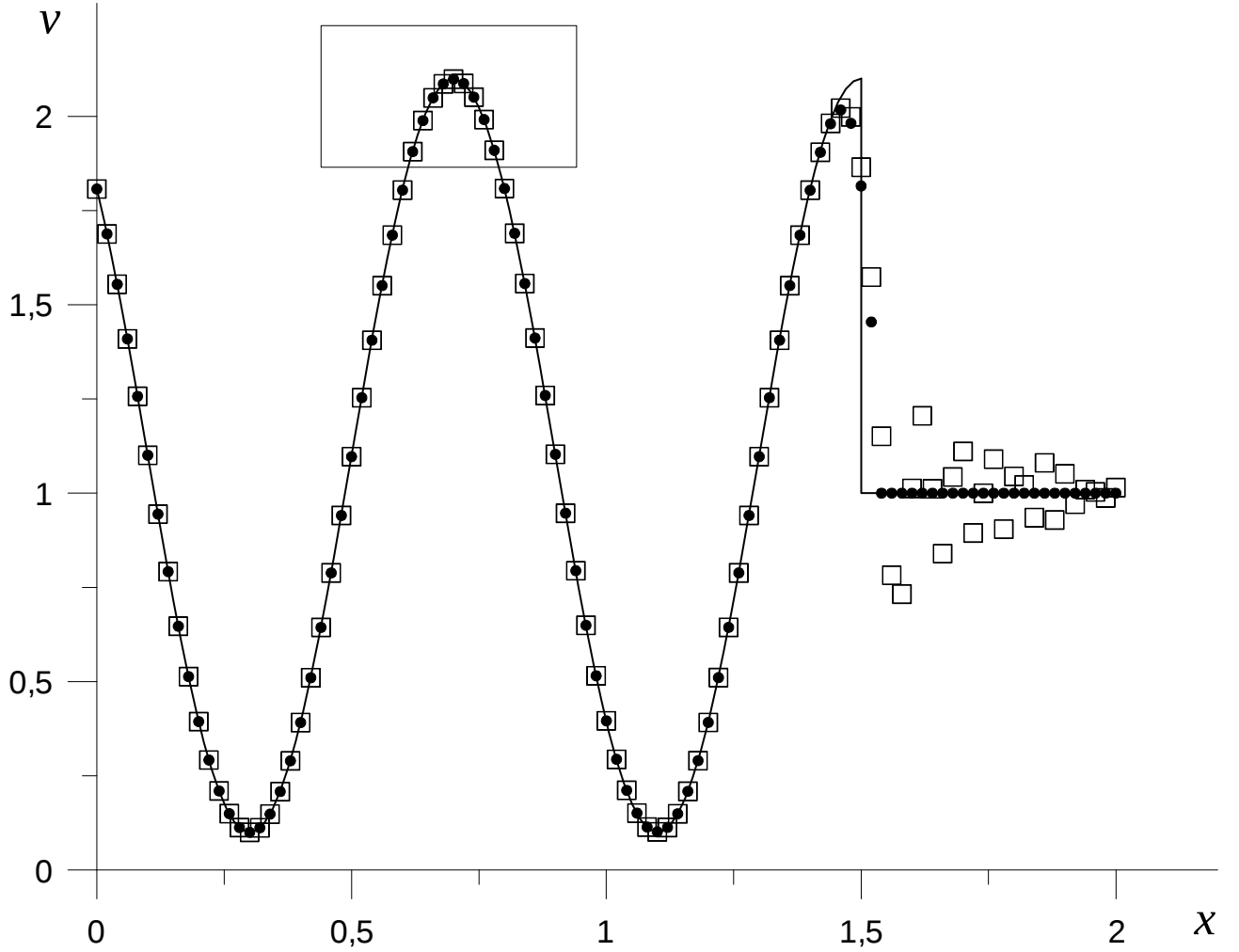


Рисунок 2.1 — Сравнение точного и численных решений задачи Коши (2.1), (2.5) в момент времени $T = 0.5$. Сплошная линия — точное решение; квадратики — расчёт по схеме CABARET 2.5 без коррекции потоковых переменных ($u_j^{n+1} = \bar{u}_j^{n+1} \quad \forall j$); точки — расчёт по схеме CABARET 2.5 с новой коррекцией потоков (2.9).

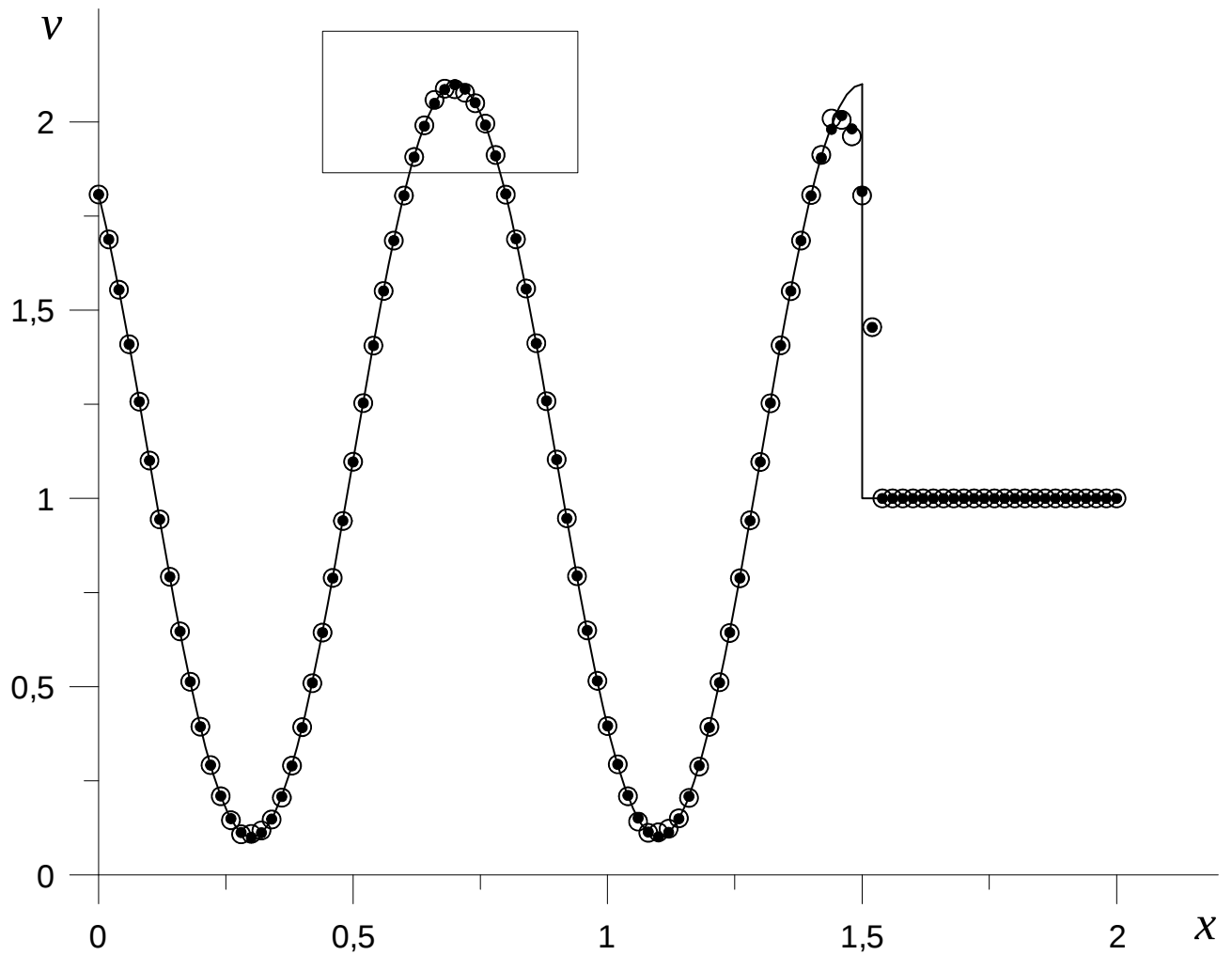


Рисунок 2.2 — Сравнение точного и численных решений задачи Коши (2.1), (2.5) в момент времени $T = 0.5$. Сплошная линия — точное решение; кружки — расчёт по стандартной схеме CABARET 2.5; точки — расчёт по схеме CABARET 2.5 с новой коррекцией потоков (2.9).

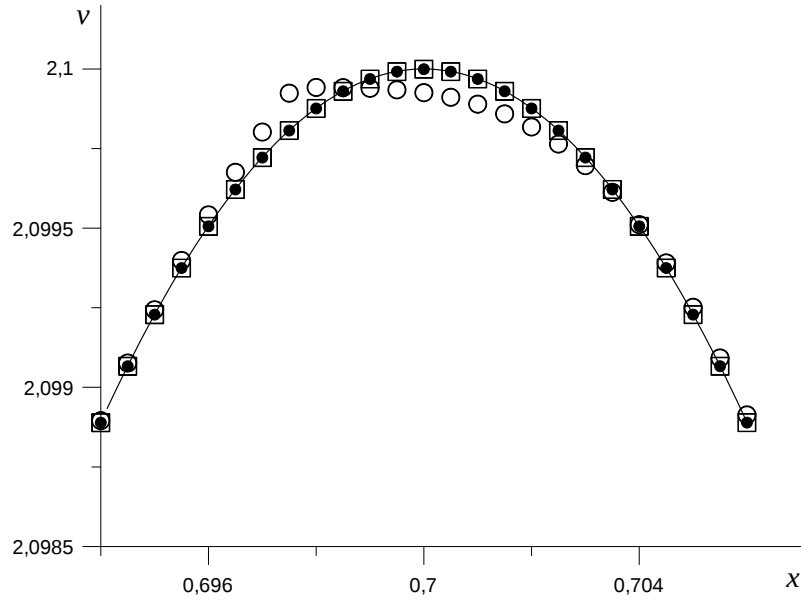


Рисунок 2.3 — Сравнение точного и численных решений задачи Коши (2.1), (2.5) в окрестности локального экстремума в момент времени $T = 0.5$. Сплошная линия — точное решение; квадратики — расчёт по схеме CABARET 2.5 без коррекции потоковых переменных; кружки — расчёт по стандартной схеме CABARET 2.5; точки — расчёт по схеме CABARET 2.5 с новой коррекцией потоков (2.9).

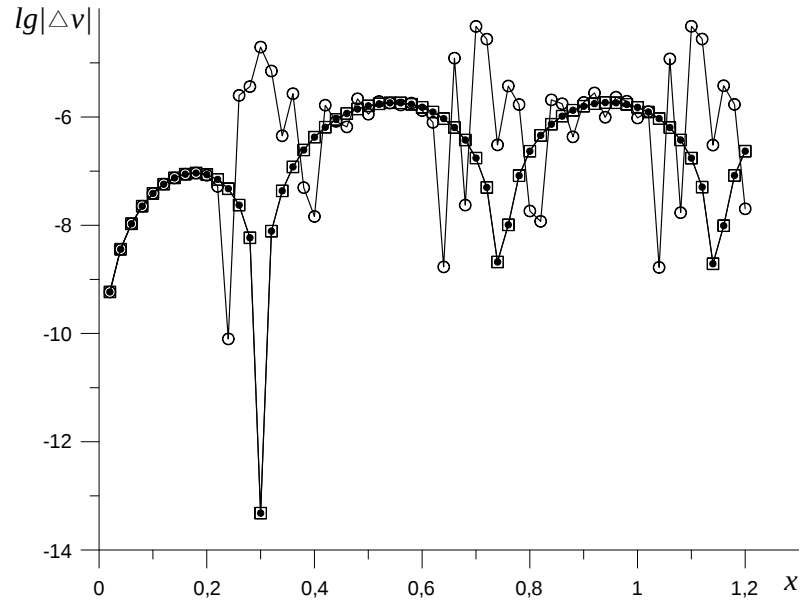


Рисунок 2.4 — Погрешности решений в момент времени $T = 0.5$. Квадратики соответствуют расчёту по схеме CABARET 2.5 без коррекции потоковых переменных; кружки — расчёту по стандартной схеме CABARET 2.5; точки — расчёту по схеме CABARET 2.5 с новой коррекцией потоков (2.9).

В работе [44] для повышения точности схемы CABARET 2.5 на локальных экстремумах была предложена модификация коррекции потоков (1.6), в которой ограничивающие величины m_j^n и M_j^n определяются по формулам

$$m_j^n = \min(u_{j-1}^n, U_{j-1/2}^n, u_j^n) - \varepsilon, \quad M_j^n = \max(u_{j-1}^n, U_{j-1/2}^n, u_j^n) + \varepsilon, \quad (2.6)$$

где $U_{j-1/2}^n = (U_{j-1/2}^{n-1/2} + U_{j-1/2}^{n+1/2})/2$ при $n \geq 1$, а $\varepsilon > 0$ — малый релаксационный параметр. Тестовые расчёты показывают, что при соответствующем выборе параметра ε коррекция (1.7), (1.8), (2.6) позволяет существенно повысить точность схемы на локальных экстремумах, расположенных в областях гладкости рассчитываемого точного решения.

Однако данная коррекция потоков обладает следующими недостатками. Как показано в работе [40], коррекция (1.7), (1.8), (2.6) даже при $\varepsilon = 0$ не обеспечивает монотонности схемы CABARET 2.5, т. е. не гарантирует сохранения монотонности начальной сеточной функции $\{u_j^0, U_{j+1/2}^0\}$ при расчёте по этой схеме задачи Коши для линейного уравнения переноса с монотонными начальными данными. Кроме того, оптимальное значение релаксационного параметра ε существенно зависит от параметров рассчитываемого точного решения, а также от размеров шагов разностной сетки, на которой такой расчёт проводится.

Поэтому предложим новую модификацию коррекции потоков (1.7)–(1.9), которая обеспечивает монотонность схемы CABARET 2.5 при числах Куранта $r \in (0, 0.5]$ и одновременно сохраняет её повышенную точность на локальных экстремумах в областях гладкости точных решений, независимо от параметров этих решений и от размеров шагов разностной сетки, на которой проводится численный расчёт.

Для модификации коррекции потоков (1.7)–(1.9), сохраняющей повышенную точность схемы CABARET 2.5 в окрестностях локальных экстремумов, необходи-

мо на интервалах $[j-1, j+1/2]$, на которых сеточная функция $\{u_j^n, U_{j+1/2}^{n+1/2}\}$ имеет обобщённые локальные экстремумы [36], двухстороннее ограничение (1.8), (1.9) заменить на соответствующие односторонние ограничения, не подавляющие эти экстремумы. Это означает, что на интервалах $[j-1, j+1/2]$, на которых сеточная функция $\{u_j^n, U_{j+1/2}^{n+1/2}\}$ имеет обобщённый локальный минимум, то есть удовлетворяет условиям

$$u_{j-1}^n > U_{j-1/2}^{n+1/2}, \quad u_j^n < U_{j+1/2}^{n+1/2}, \quad (2.7)$$

предварительное значение потока (1.6) не следует ограничивать снизу, а на интервалах $[j-1, j+1/2]$, на которых эта сеточная функция имеет обобщённый локальный максимум, то есть удовлетворяет условиям

$$u_{j-1}^n < U_{j-1/2}^{n+1/2}, \quad u_j^n > U_{j+1/2}^{n+1/2}, \quad (2.8)$$

предварительное значение потока (1.6) не следует ограничивать сверху.

В результате приходим к следующей новой коррекции потоков (1.6):

$$u_j^{n+1} = F(\bar{u}_j^{n+1}, \tilde{m}_j^n, \tilde{M}_j^n), \quad (2.9)$$

где функция F задается формулой (1.8); $\tilde{m}_j^n = -\infty$, если выполнены неравенства (2.7), и $\tilde{m}_j^n = m_j^n = \min(u_j^n, U_{j-1/2}^{n+1/2})$, если хотя бы одно из этих двух неравенств не выполнено; $\tilde{M}_j^n = +\infty$, если выполнены неравенства (2.8), и $\tilde{M}_j^n = M_j^n = \max(u_j^n, U_{j+1/2}^{n+1/2})$, если хотя бы одно из этих двух неравенств не выполнено.

Из Рисунков 2.1–2.4, на которых точками показаны результаты расчётов по схеме SABARET 2.5 с новой коррекцией потоков (2.9), следует, что модифицированная схема, подобно исходной схеме, является монотонной на сильных разрывах и одновременно, подобно схеме SABARET 2.5, в которой коррекция потоков отсутствует, сохраняет повышенную точность в областях локальных экстремумов.

2.2 Скалярный закон сохранения

Результаты пункта 2.1 естественным образом обобщаются на случай задачи Коши для скалярного закона сохранения

$$v_t + f(v)_x = 0, \quad v(x, 0) = v_0(x) \quad (2.10)$$

с выпуклым потоком $f(v)$. Будем считать, что начальные данные задачи Коши (2.10) удовлетворяют условию

$$a(v_0(x)) = f'(v_0(x)) > 0 \quad \forall x,$$

из которого следует, что характеристики рассматриваемого решения распространяются в положительном направлении оси x .

Аппроксимируем задачу (2.10) разностной схемой CABARET 2.5, заданной на прямоугольной равномерной по пространству разностной сетке

$$x_j, t_n : \quad t_{n+1} = t_n + \tau_n, \quad t_0 = 0, \quad x_j = jh, \quad h = \text{const}.$$

Для иллюстрации недостатка, связанного со снижением точности в областях локальных экстремумов, приведём результаты расчёта задачи Коши (2.10) для нелинейного уравнения переноса, в котором $f(v) = v^2/2$, то есть для уравнения

$$v_t + (v^2/2)_x = 0. \quad (2.11)$$

Периодическая функция начальных данных задается формулой

$$v(x, 0) = v_0(x) = \sin(\pi x) + \cos(\pi x) + 4(\cos(\pi x))^2 + 2. \quad (2.12)$$

График функции (2.12) на отрезке $[0, 2]$ длины периода показан на Рисунке 2.5. Из этого графика следует, что начальная функция $v_0(x)$ имеет на отрезке $[0, 2]$ четыре локальных экстремума (два максимума и два минимума), между которыми расположены интервалы монотонного убывания и возрастания этой функции. Поскольку характеристики, выходящие из интервалов монотонного убывания начальной функции, сходятся, то с течением времени это приводит к градиентным катастрофам, в результате которых на отрезке $[0, 2]$ образуются две ударные волны. На Рисунке 2.6 эти ударные волны показаны в момент времени $T = 0.08$, когда локальные экстремумы находятся в областях гладкости точного решения, а на Рисунке 2.8 — в момент времени $T = 0.13$, когда локальные экстремумы расположены на фронтах ударных волн.

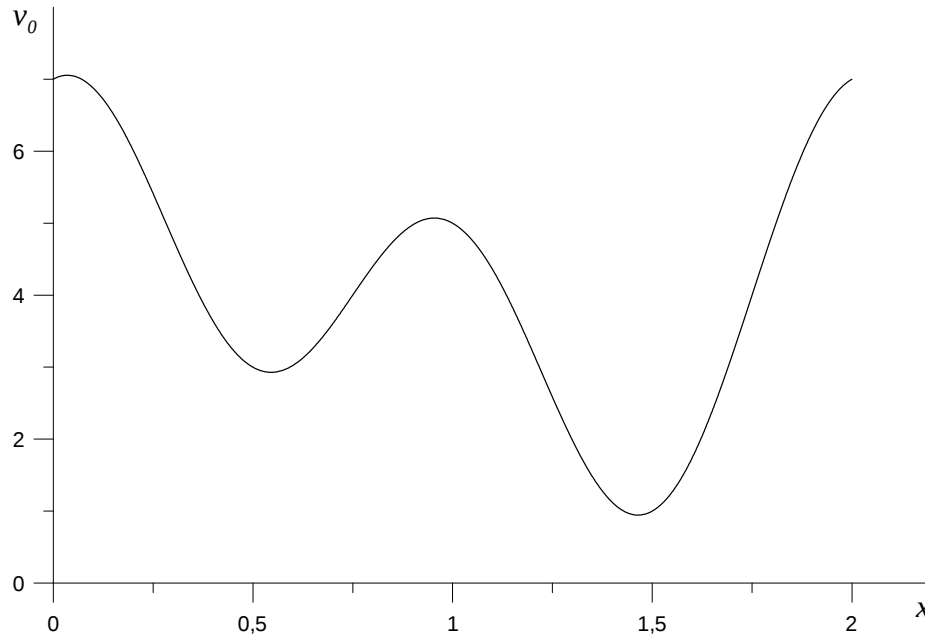


Рисунок 2.5 — Функция начальных данных на отрезке $[0, 2]$ длины периода.

Точное и численное решения задачи (2.11), (2.12) на момент времени $T = 0.08$ показаны на Рисунке 2.6, 2.7, а на момент времени $T = 0.13$ — на Рисунке 2.8.

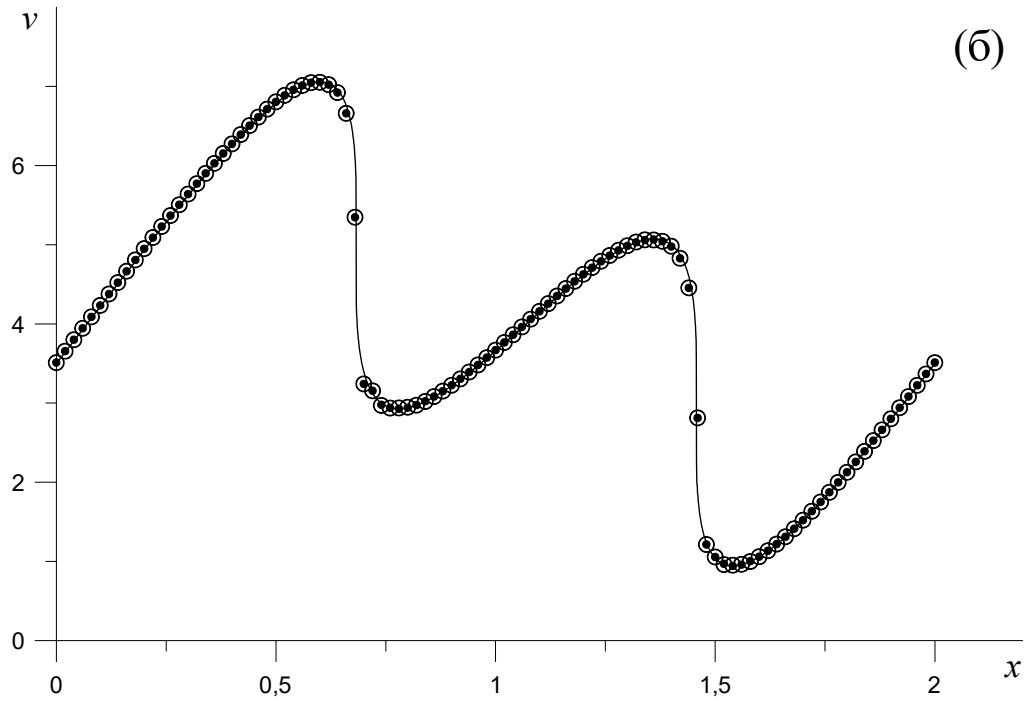
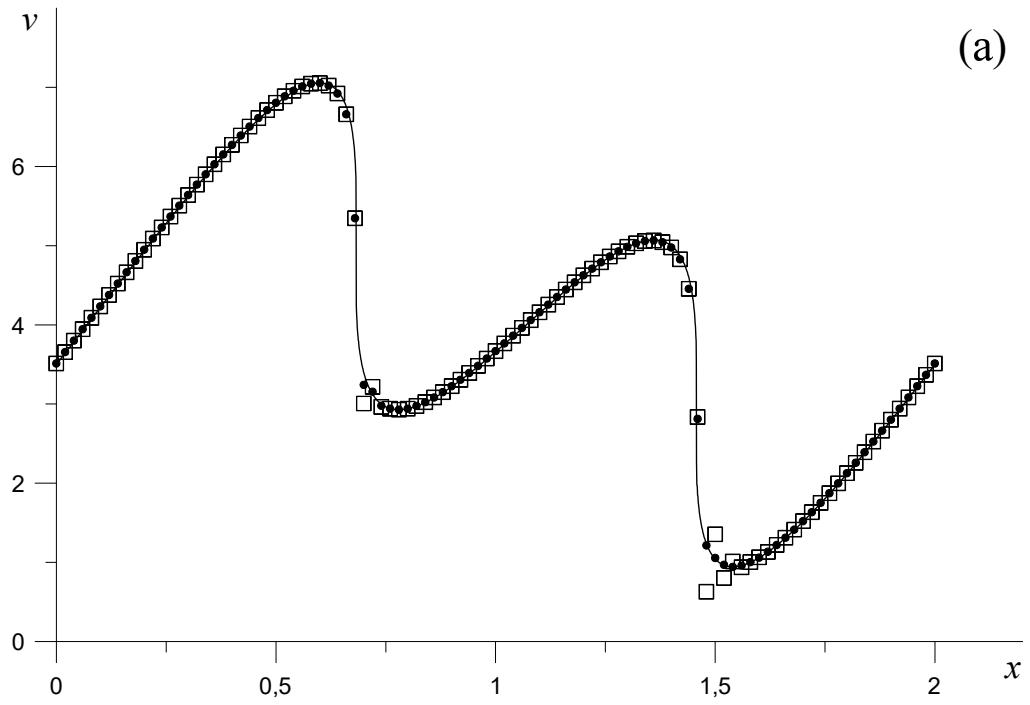


Рисунок 2.6 — Сравнение точного и численных решений в момент времени $T = 0.08$. Сплошная линия — точное решение; квадратики — расчёт по немонотонной схеме CABARET 2.5 без коррекции потоков; кружки — расчёт по стандартной схеме CABARET 2.5; точки — расчёт по схеме CABARET 2.5 с новой коррекцией потоков (2.9).

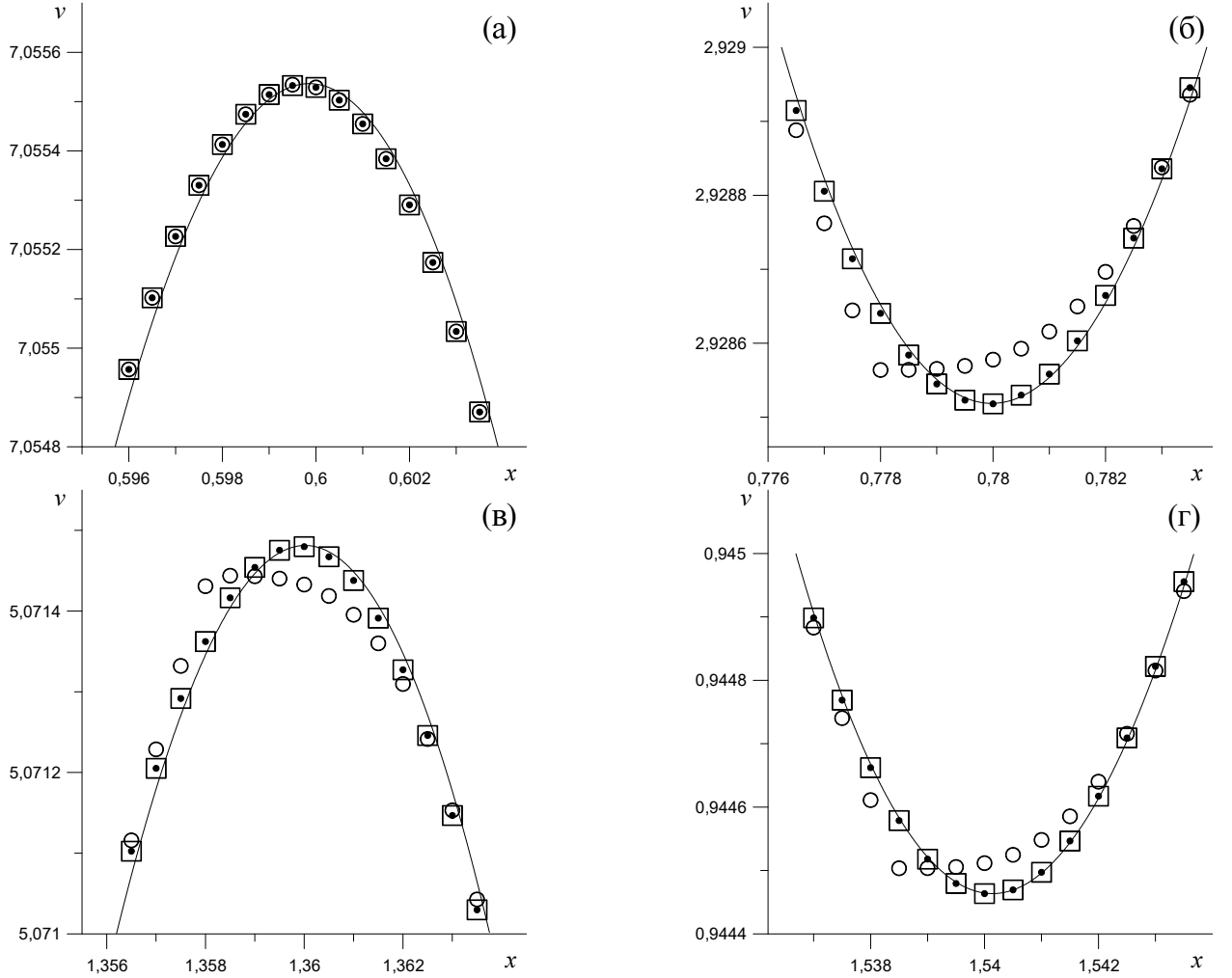


Рисунок 2.7 — Сравнение точного и численных решений в момент времени $T = 0.08$; первый максимум — (а), первый минимум — (б), второй максимум — (в), второй минимум — (г). Сплошная линия — точное решение; квадратики — расчёт по немонотонной схеме CABARET 2.5 без коррекции потоков; кружки — расчёт по стандартной схеме CABARET 2.5; точки — расчёт по схеме CABARET 2.5 с новой коррекцией потоков (2.9).

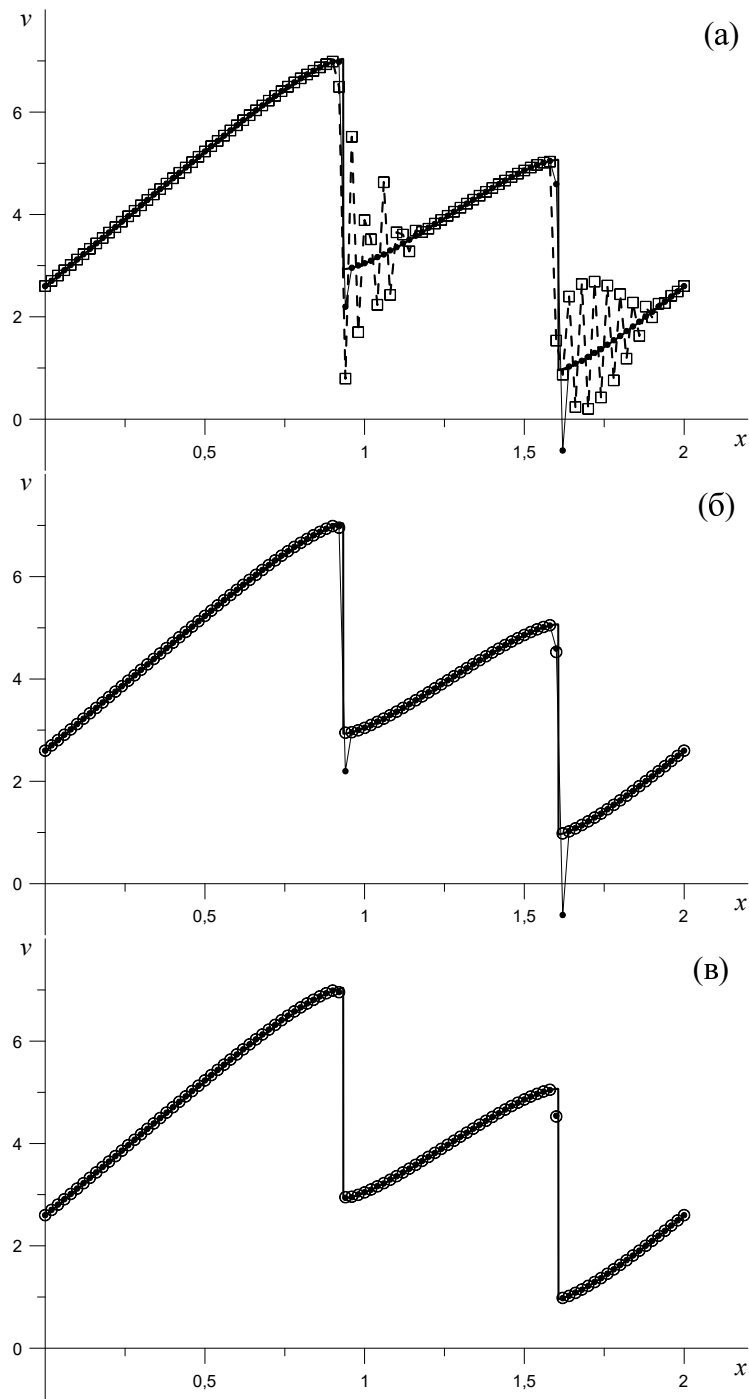


Рисунок 2.8 — Сравнение точного и численных решений в момент времени $T = 0.13$. Сплошная линия — точное решение; квадратики — расчёт по немонотонной схеме CABARET 2.5 без коррекции потоков; кружки — расчёт по стандартной схеме CABARET 2.5; точки — расчёт по схеме CABARET 2.5 с новой коррекцией потоков (2.9), которая применяется без учета ограничения (2.13) на (а), (б) и с учётом ограничения (2.13) — на (в).

На этих рисунках сплошными линиями приведено точное решение, квадратами — результаты расчёта по немонотонной схеме CABARET 2.5 без коррекции потоковых переменных ($u_j^{n+1} = \bar{u}_j^{n+1} \quad \forall j$), кружками — по схеме CABARET 2.5 со стандартной коррекцией потоковых переменных, точками — по схеме CABARET с новой коррекцией потоковых переменных, предложенной в пункте 2.1.

Численные расчёты проводились с числом Куранта $r = 0.5$. На Рисунках 2.6, 2.8 приведены результаты расчётов на сетке с пространственным шагом $h = 0.02$, а на Рисунке 2.7 — на более мелкой сетке с пространственным шагом $h = 0.0005$. Результаты расчётов, проведенных на мелкой сетке, показаны в достаточно малых окрестностях локальных экстремумов, которые в момент времени $T = 0.08$ не содержат ударные волны точного решения.

Из Рисунков 2.6 и 2.8 следует, что разностное решение, полученное по монотонной схеме CABARET 2.5 со стандартной коррекцией потоков (кружки на Рисунках 2.6(б) и 2.8(б)), в отличие от решения, полученного по немонотонной схеме CABARET 2.5 без коррекции потоков (квадратики на Рисунках 2.6(а) и 2.8(а)), не имеет осцилляций в окрестностях ударных волн. В то же время, как следует из Рисунков 2.8(б), 2.8(в) и 2.8(г), монотонная схема заметно снижает точность в окрестностях локальных экстремумов, расположенных в области гладкости точного решения, по сравнению с немонотонной схемой.

Исключение составляет первый максимум точного решения на Рисунке 2.6, который является абсолютным. В окрестности этого максимума результаты расчётов по монотонной и немонотонной схемам CABARET 2.5 практически совпадают. Связано это с тем, что расчёты проводятся с числом Куранта $r = 0.5$, в силу чего в окрестности этого абсолютного максимума схема CABARET 2.5 близка к точной и поэтому применение формулы (1.8) не приводит к коррекции потоков. Из того, что число Куранта $r = 0.5$, также следует [35], что в немонотонной схеме CABARET 2.5 осцилляции распространяются перед фронтами ударных волн.

Из Рисунков 2.6 и 2.7, на которых точками показаны результаты расчётов по схеме CABARET 2.5 с новой коррекцией потоков (2.9), следует, что модифицированная схема, подобно исходной схеме, является монотонной на сильных разрывах и одновременно, подобно схеме CABARET 2.5, в которой коррекция потоков отсутствует, сохраняет повышенную точность на локальных экстремумах, расположенных в областях гладкости точного решения. Однако в случае, когда локальные экстремумы выходят на фронт ударной волны (Рисунок 2.8), модифицированная схема CABARET 2.5, не допуская возникновения схемных осцилляций, присущих схеме CABARET 2.5 без коррекции потоков (квадратики на Рисунке 2.8(а)), заметно уменьшает значения локальных минимумов точного решения (точки на Рисунках 2.8(а) и 2.8(б)), которые достаточно хорошо воспроизводятся схемой CABARET 2.5 со стандартной коррекцией потоков (кружки на Рисунках 2.8(б) и 2.8(в)). Причина этого заключается в том, что на численном фронте “размазанного” сильного разрыва отсутствует локальная сходимость разностного решения к точному, в силу чего экстраполяционная формула (1.6) теряет свою точность при вычислении по ней потока в точке локального минимума, расположенного на сильном разрыве.

Для устранения данного недостатка предложенной модификации, её применение необходимо ограничить областями, в которых модули градиентов численных решений ограничены. Поскольку в рассматриваемом случае $a(v) = f'(v) > 0$, в качестве такого ограничения выберем неравенство

$$|a(u_j^n) - a(u_{j-1}^n)| < \delta a(U_{j-1/2}^{n+1/2}), \quad (2.13)$$

где δ — некоторый малый безразмерный положительный параметр. В случае нелинейного уравнения переноса, для которого $a(u) = u > 0$, ограничение (2.13) при-

нимает вид

$$|u_j^n - u_{j-1}^n| < \delta U_{j-1/2}^{n+1/2}.$$

В результате величины $\tilde{m}_j^n$ и $\tilde{M}_j^n$, входящие в формулу (2.9), вычисляются по следующему правилу: $\tilde{m}_j^n = -\infty$, если одновременно выполнены неравенства (2.7), (2.13), и $\tilde{m}_j^n = m_j^n$, если хотя бы одно из этих трёх неравенств не выполнено; $\tilde{M}_j^n = +\infty$, если одновременно выполнены неравенства (2.8), (2.13), и $\tilde{M}_j^n = M_j^n$, если хотя бы одно из этих трёх неравенств не выполнено. В приводимых ниже расчётах значение параметра $\delta = 0.01$.

На Рисунке 2.8(в) точками показан расчёт по схеме CABARET 2.5 с новой коррекцией потоков (2.9), в которой учтены ограничения (2.13). Для иллюстрации эффективности этих ограничений на Рисунке 2.9 приведены результаты расчётов задачи (2.11), (2.12) с пространственными шагами $h_1 = 0.08$ и $h_2 = 0.04$. Кружками на Рисунке 2.9 показаны расчёты по модифицированной схеме CABARET 2.5 без учета ограничений (2.13), а точками — с учётом этих ограничений. Как следует из этих рисунков, ограничения (2.13) устраняют отмеченный выше недостаток исходной модификации (2.9), связанный с увеличением модулей локальных экстремумов, расположенных в окрестностях ударных волн, и одновременно сохраняют повышенную точность разностного решения на локальных экстремумах, расположенных в областях гладкости точного решения. В результате модифицированная схема CABARET 2.5 с учётом ограничения (2.13) при числах Куранта $r \in (0, 0.5]$ сохраняет свойство монотонности исходной схемы, обеспечивает локализацию нестационарных ударных волн и гарантирует повышенную точность разностного решения на локальных экстремумах в областях гладкости точного решения.

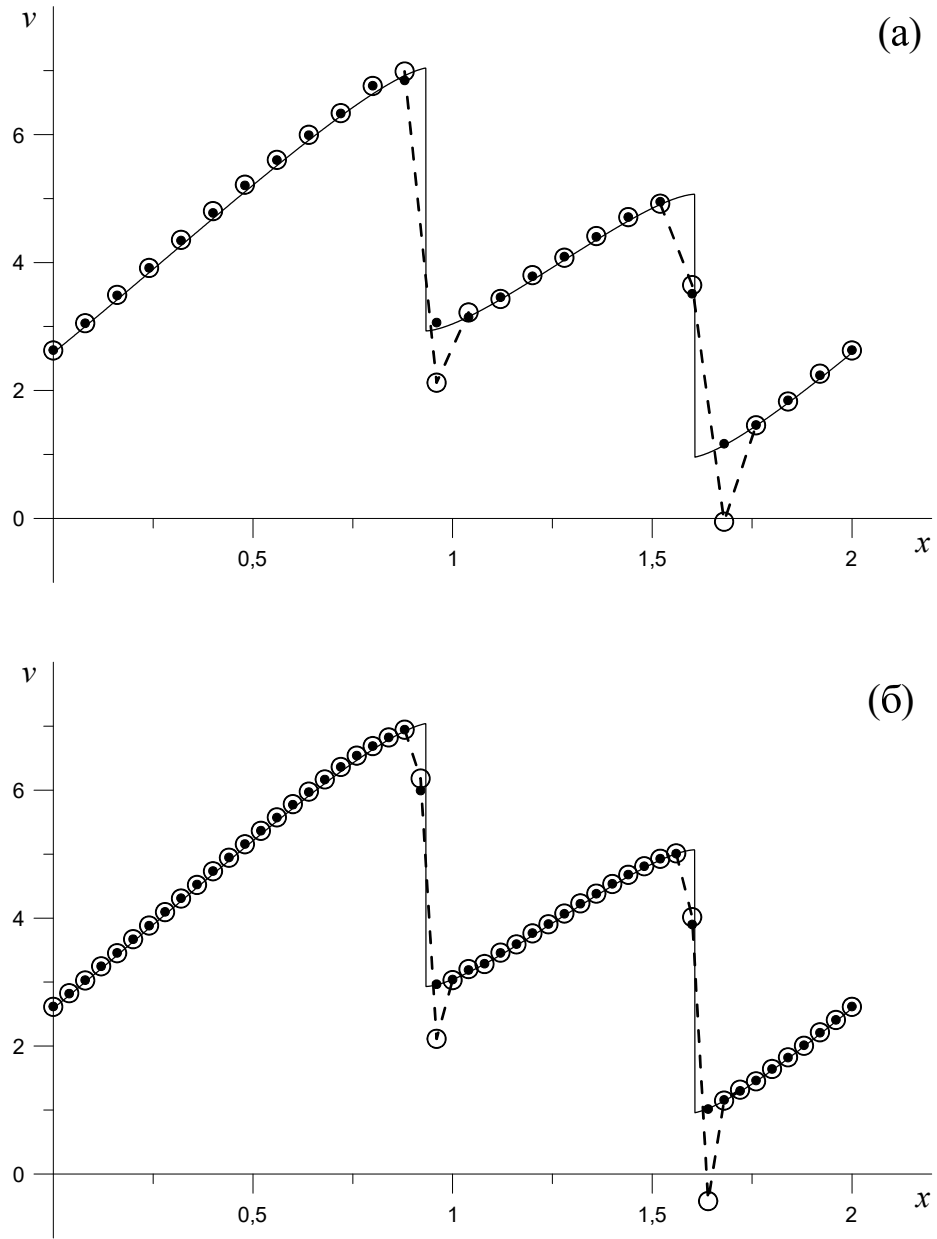


Рисунок 2.9 — Сравнение точного и численных решений в момент времени $T = 0.13$ на сетках с пространственными шагами $h = 0.08$ — (а) и $h = 0.04$ — (б). Сплошная линия — точное решение; кружки — расчёт по схеме CABARET 2.5 с новой коррекцией потоков (2.9); точки — расчёт по схеме CABARET 2.5 с коррекцией потоков (2.9), которая применяется с учётом ограничения (2.13).

Глава 3

Обеспечение монотонности

Предложена модификация стандартной схемы CABARET 2, обеспечивающая её монотонность при аппроксимации скалярного закона сохранения с выпуклым потоком как в областях, в которых скорость распространения характеристик имеет постоянный знак, так и в случае, когда скорость распространения характеристик аппроксимируемого дивергентного уравнения меняет знак.

3.1 Случай знакопостоянного характеристического поля

Как было показано в Главе 1, стандартная схема CABARET 2 не является монотонной по Годунову. Предложим модификацию схемы CABARET 2, обеспечивающую монотонность данной схемы. В основе данной модификации лежит предложенный в [35] подход, связанный с сохранением монотонности разностного решения относительно последовательности чередующихся значений потоковых и консервативных переменных, взятых на двух различных временных слоях, отстоящих друг от друга на половину временного шага. Если в [35] значения потоковых переменных, входящих в эти последовательности, брались на целых, а консервативных переменных — на полуцелых временных слоях, то в данной главе, по аналогии с [40], при построении таких последовательностей значения потоковых переменных будем брать на полуцелых, а консервативных переменных — на целых

временных слоях.

Основное отличие модифицированной схемы CABARET 2 от стандартной заключается в том, что в ней значения консервативных переменных $U_{j+1/2}^{n+1}$ определяются не из уравнения (1.16) или эквивалентного ему с учётом (1.11) уравнения (1.17), а из разностного уравнения

$$\frac{U_{j+1/2}^{n+1} - U_{j+1/2}^n}{\tau_n} + \frac{f(u_{j+1}^{n+1/2}) - f(u_j^{n+1/2})}{h} = 0, \quad (3.1)$$

где

$$u_j^{n+1/2} = \frac{u_j^n + u_j^{n+1}}{2}.$$

В линейном случае, когда поток $f(v) = av$, $a = \text{const}$, разностные уравнения (1.17) и (3.1) становятся эквивалентными.

3.1.1 Модифицированная схема CABARET

Рассмотрим задачу Коши для гиперболического скалярного закона сохранения

$$v_t + f(v)_x = 0, \quad v(x, 0) = v_0(x) \quad (3.2)$$

со строго монотонно возрастающей и строго выпуклой функцией потока $f(v)$:

$$a(v) = f'(v) > 0, \quad a'(v) = f''(v) > 0. \quad (3.3)$$

Аппроксимируем эту задачу модифицированной схемой CABARET 2, заданной на прямоугольной разностной сетке

$$\{x_j, t_n\} : x_j = jh, \quad t_{n+1} = t_n + \tau_n, \quad t_0 = 0, \quad (3.4)$$

в которой h — постоянный шаг сетки по пространству, а τ_n — шаг сетки по времени, определяемый из условия устойчивости

$$\tau_n = rh / \max_j |a_{j+1/2}^n|, \quad (3.5)$$

где $r \in (0, 1)$ — число Куранта, $a_{j+1/2}^n = a(U_{j+1/2}^n)$. В этой схеме используются потоковые $u_j^n = v(x_j, t_n)$ и консервативные $U_{j+1/2}^n = v(x_{j+1/2}, t_n)$ переменные, заданные соответственно в целых x_j и полуцелых $x_{j+1/2} = x_j + h/2$ пространственных узлах разностной сетки.

Пусть $u_j^n, U_{j+1/2}^n$ — известное численное решение задачи (3.2) на n -ом временном слое t_n , при $n = 0$ — сеточная аппроксимация начальной функции $v_0(x)$. Численное решение $u_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+1}$ на $(n+1)$ -ом временном слое t_{n+1} будем находить по модифицированной схеме CABARET 2 в четыре этапа. На первом этапе по разностным уравнениям

$$\frac{U_{j+1/2}^{n+1/2} - U_{j+1/2}^n}{\tau_n/2} + \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{h} = 0, \quad (3.6)$$

где $f_j^n = f(u_j^n)$, вычисляются значения консервативных переменных $U_{j+1/2}^{n+1/2} = U(x_{j+1/2}, t_{n+1/2})$ на полуцелом временном слое $t_{n+1/2} = t_n + \tau_n/2$. На втором этапе находятся значения потоков $f_j^{n+1/2} = f(u_j^{n+1/2})$ на полуцелом временном слое $t_{n+1/2}$. На третьем этапе по разностным уравнениям

$$\frac{U_{j+1/2}^{n+1} - U_{j+1/2}^n}{\tau_n} + \frac{f_{j+1}^{n+1/2} - f_j^{n+1/2}}{h} = 0 \quad (3.7)$$

вычисляются значения консервативных переменных $U_{j+1/2}^{n+1}$ на $(n+1)$ -ом временном слое t_{n+1} . На четвёртом этапе находятся значения потоковых переменных u_j^{n+1} на $(n+1)$ -ом временном слое t_{n+1} . Детальное описание численного алгоритма на

втором и четвёртом этапах приводится ниже.

На втором этапе, с учётом того, что $a(v) = f'(v) > 0$, сначала вычисляются предварительные значения потоков

$$\bar{f}_j^{n+1/2} = f(\bar{u}_j^{n+1/2}), \quad \bar{u}_j^{n+1/2} = (u_j^n + \bar{u}_j^{n+1})/2, \quad (3.8)$$

$$\bar{u}_j^{n+1} = 2U_{j-1/2}^{n+1/2} - u_{j-1}^n \quad (3.9)$$

на полуцелом временном слое $t_{n+1/2}$. При помощи стандартного двухстороннего ограничителя

$$F(u, m, M) = \begin{cases} u, & m \leq u \leq M, \\ m, & u \leq m, \\ M, & u \geq M, \end{cases} \quad (3.10)$$

потоки $\bar{f}_j^{n+1/2}$ с учётом принципа максимума [34] корректируются по формуле

$$\tilde{f}_j^{n+1/2} = F(\bar{f}_j^{n+1/2}, m_j^n, M_j^n), \quad (3.11)$$

в которой

$$m_j^n = \min(f_{j-1/2}^n, f_j^n), \quad M_j^n = \max(f_{j-1/2}^n, f_j^n), \quad f_{j-1/2}^n = f(U_{j-1/2}^n). \quad (3.12)$$

В работе [40] показано, что коррекции потоков (3.11) недостаточно для сохранения монотонности разностного решения на $(n+1)$ -ом временном слое. Поэтому, если на n -ом временном слое при $j = k$ выполнены неравенства

$$U_{k-3/2}^n \leq u_{k-1}^n \leq U_{k-1/2}^n \leq u_k^n \quad \Leftrightarrow \quad f_{k-3/2}^n \leq f_{k-1}^n \leq f_{k-1/2}^n \leq f_k^n, \quad (3.13)$$

то при помощи функции

$$F_1(u, M) = \begin{cases} u, & u \leq M, \\ M, & u \geq M, \end{cases} \quad (3.14)$$

ограничивающей сверху, проводится дополнительная коррекция потока $\tilde{f}_k^{n+1/2}$ по формуле

$$f_k^{n+1/2} = F_1\left(\tilde{f}_k^{n+1/2}, \varphi_{k-1}^n\right), \quad (3.15)$$

где

$$\varphi_{k-1}^n = f_{k-1}^n + \frac{U_{k-1/2}^n - u_{k-1}^n}{z_n}, \quad z_n = \frac{\tau_n}{h}. \quad (3.16)$$

Если на n -ом временном слое при $j = k$ выполнены неравенства

$$U_{k-3/2}^n \geq u_{k-1}^n \geq U_{k-1/2}^n \geq u_k^n \quad \Leftrightarrow \quad f_{k-3/2}^n \geq f_{k-1}^n \geq f_{k-1/2}^n \geq f_k^n, \quad (3.17)$$

то при помощи функции

$$F_2(u, m) = \begin{cases} u, & u \geq m, \\ m, & u \leq m, \end{cases} \quad (3.18)$$

ограничивающей снизу, дополнительная коррекция потока $\tilde{f}_k^{n+1/2}$ проводится по формуле

$$f_k^{n+1/2} = F_2\left(\tilde{f}_k^{n+1/2}, \varphi_{k-1}^n\right). \quad (3.19)$$

Если ни одно из двух условий (3.13) или (3.17) не выполнено, то коррекция потока $\tilde{f}_k^{n+1/2}$ не проводится, то есть полагается, что $f_k^{n+1/2} = \tilde{f}_k^{n+1/2}$.

Теорема 1. *Разностная схема CABARET 2 (3.6), (3.7), в которой потоки вычисляются и корректируются по формулам (3.9)–(3.19), при численном переходе с n -го на $(n + 1)$ -й временной слой сохраняет монотонность разностного*

решения $\{u_j^n, U_{j+1/2}^n\}$ относительно последовательности консервативных переменных $\{U_{j+1/2}^{n+1}\}$.

Доказательство.

Предполагая, что разностное решение $\{u_j^n, U_{j+1/2}^n\}$ на n -ом временном слое является монотонно возрастающим, потребуем, чтобы монотонно возрастающей по j была последовательность $\{u_j^{n+1/2}, U_{j+1/2}^n\}$ значений этого решения:

$$u_{j-1}^{n+1/2} \leq U_{j-1/2}^n \leq u_j^{n+1/2} \leq U_{j+1/2}^n \leq u_{j+1}^{n+1/2} \quad \forall j. \quad (3.20)$$

Неравенства (3.20) будут выполнены, если к значениям $u_j^{n+1/2}$ применить принцип максимума, в силу которого с учётом $a(v) = f'(v) > 0$ имеем

$$U_{j-1/2}^n \leq u_j^{n+1/2} \leq u_j^n \quad \forall j. \quad (3.21)$$

Поскольку функция $f(v)$ монотонно возрастает, то неравенства (3.20) и (3.21) эквивалентны следующим неравенствам

$$f_{j-1}^{n+1/2} \leq f_{j-1/2}^n \leq f_j^{n+1/2} \leq f_{j+1}^{n+1/2} \quad \forall j, \quad (3.22)$$

$$f_{j-1/2}^n \leq f_j^{n+1/2} \leq f_j^n \quad \forall j.$$

Предполагая, что выполнены неравенства (3.22), выясним, при каких условиях из монотонного возрастания последовательности значений $\{f_{j-1/2}^n, f_j^{n+1/2}\}$ потоков разностного решения следует монотонное возрастание

$$u_{j-1}^{n+1/2} \leq U_{j-1/2}^{n+1} \leq u_j^{n+1/2} \leq U_{j+1/2}^{n+1} \leq u_{j+1}^{n+1/2} \quad \forall j \quad (3.23)$$

последовательности значений $\{U_{j-1/2}^{n+1}, u_j^{n+1/2}\}$ этого решения, где величины $U_{j-1/2}^{n+1}$

вычисляются по формуле

$$U_{j-1/2}^{n+1} = U_{j-1/2}^n - z_n \left(f_j^{n+1/2} - f_{j-1}^{n+1/2} \right), \quad (3.24)$$

получаемой из разностного уравнения (3.7).

Поскольку второе из неравенств (3.23) с учётом формулы (3.24) можно переписать в виде

$$U_{j-1/2}^n - u_j^{n+1/2} \leq z_n \left(f_j^{n+1/2} - f_{j-1}^{n+1/2} \right), \quad (3.25)$$

то его выполнение следует из условий (3.21) и (3.22), в силу которых левая часть неравенства (3.25) неположительна, а его правая часть — неотрицательна. Первое из неравенств (3.23) можно представить в виде

$$f_j^{n+1/2} \leq f_{j-1}^{n+1/2} + \frac{U_{j-1/2}^n - u_{j-1}^{n+1/2}}{z_n}.$$

Покажем, что это неравенство будет выполнено при условии

$$f_j^{n+1/2} \leq \varphi_{j-1}^n = f_{j-1}^n + \frac{U_{j-1/2}^n - u_{j-1}^n}{z_n}.$$

Для этого достаточно доказать выполнение неравенства

$$f_{j-1}^n + \frac{U_{j-1/2}^n - u_{j-1}^n}{r_n} \leq f_{j-1}^{n+1/2} + \frac{U_{j-1/2}^n - u_{j-1}^{n+1/2}}{z_n},$$

которое можно переписать в виде

$$z_n \left(f_{j-1}^n - f_{j-1}^{n+1/2} \right) \leq u_{j-1}^n - u_{j-1}^{n+1/2}. \quad (3.26)$$

При условии $u_{j-1}^n = u_{j-1}^{n+1/2} \Rightarrow f_{j-1}^n = f_{j-1}^{n+1/2}$ нестрогое неравенство (3.26) переходит в равенство. Если $u_{j-1}^n > u_{j-1}^{n+1/2} \Rightarrow f_{j-1}^n > f_{j-1}^{n+1/2}$, неравенство (3.26)

можно записать следующим образом

$$\frac{z_n \left(f_{j-1}^n - f_{j-1}^{n+1/2} \right)}{u_{j-1}^n - u_{j-1}^{n+1/2}} = \frac{z_n \left(f \left(u_{j-1}^n \right) - f \left(u_{j-1}^{n+1/2} \right) \right)}{u_{j-1}^n - u_{j-1}^{n+1/2}} \leq 1. \quad (3.27)$$

Поскольку с учётом монотонности (3.21), (3.22) и выпуклости функции $f(v)$ имеет место неравенство (см. Рисунок 3.1)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f_{j-1}^n - f_{j-1}^{n+1/2}}{u_{j-1}^n - u_{j-1}^{n+1/2}} < \operatorname{tg} \gamma = a_{j-1/2}^n = f' \left(u_{j-1/2}^n \right), \quad (3.28)$$

то неравенство (3.27) следует из неравенства

$$z_n \max_j |a_{j+1/2}^n| = \frac{\tau_n}{h} \max_j |a_{j+1/2}^n| = r < 1, \quad (3.29)$$

получаемого из условия устойчивости (3.5) схемы CABARET 2.

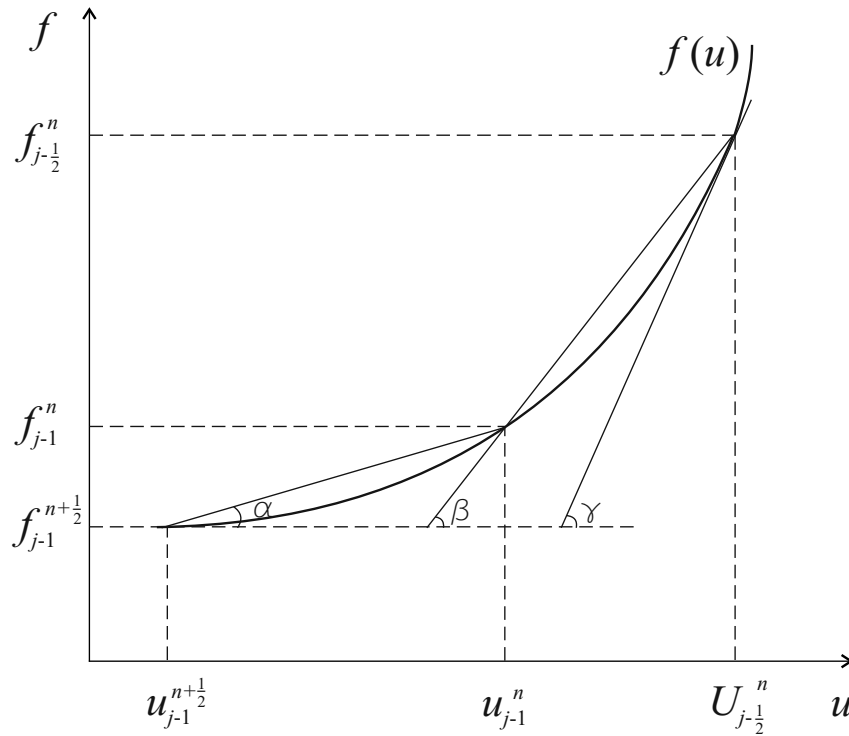


Рисунок 3.1 — Графическая иллюстрация неравенств (3.28) и (3.33).

Таким образом, для выполнения неравенств (3.23) достаточно, чтобы потоки $f_j^{n+1/2}$ удовлетворяли ограничениям

$$f_{j-1/2}^n \leq f_j^{n+1/2} \leq \min(f_j^n, \varphi_{j-1/2}^n) \quad \forall j. \quad (3.30)$$

Для корректности этих ограничений необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$f_{j-1/2}^n \leq \varphi_{j-1/2}^n = f_{j-1}^n + \frac{U_{j-1/2}^n - u_{j-1}^n}{z_n},$$

которое можно переписать в виде

$$z_n(f_{j-1/2}^n - f_{j-1}^n) \leq U_{j-1/2}^n - u_{j-1}^n. \quad (3.31)$$

При условии $U_{j-1/2}^n = u_{j-1}^n \Rightarrow f_{j-1/2}^n = f_{j-1}^n$ нестрогое неравенство (3.31) переходит в равенство, а при $U_{j-1/2}^n > u_{j-1}^n \Rightarrow f_{j-1/2}^n > f_{j-1}^n$ неравенство (3.31) можно записать следующим образом

$$\frac{z_n(f_{j-1/2}^n - f_{j-1}^n)}{U_{j-1/2}^n - u_{j-1}^n} = \frac{z_n(f(U_{j-1/2}^n) - f(u_{j-1}^n))}{U_{j-1/2}^n - u_{j-1}^n} \leq 1. \quad (3.32)$$

Неравенство (3.32) с учётом условий монотонности и условия устойчивости (3.29) следует из выпуклости функции $f(v)$, в силу которой, как видно из Рисунка 3.1,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{f_{j-1/2}^n - f_{j-1}^n}{U_{j-1/2}^n - u_{j-1}^n} < \operatorname{tg} \gamma = a_{j-1/2}^n = f'(u_{j-1/2}^n). \quad (3.33)$$

Если разностное решение $\{u_j^n, U_{j+1/2}^n\}$ на n -ом временном слое является монотонно убывающим, то аналогичным образом показывается, что для сохранения

монотонного убывания

$$u_{j-1}^{n+1/2} \geq U_{j-1/2}^{n+1} \geq u_j^{n+1/2} \geq U_{j+1/2}^{n+1} \geq u_{j+1}^{n+1/2} \quad \forall j \quad (3.34)$$

последовательности значений $\{u_j^{n+1/2}, U_{j+1/2}^{n+1}\}$ этого решения достаточно, чтобы потоки $f_j^{n+1/2}$ удовлетворяли ограничениям

$$f_{j-1/2}^n \geq f_j^{n+1/2} \geq \max(f_j^n, \varphi_{j-1/2}^n) \quad \forall j. \quad (3.35)$$

Из неравенств (3.23) и (3.34), которые выполнены при условиях (3.30) и (3.35) соответственно, следует монотонность разностного решения относительно последовательности консервативных переменных $\{U_{j+1/2}^{n+1}\}$. **Теорема доказана.**

В начале четвёртого этапа по формулам

$$\tilde{u}_j^{n+1} = 2u_j^{n+1/2} - u_j^n, \quad u_j^{n+1/2} = f^{-1}(f_j^{n+1/2}), \quad (3.36)$$

где f^{-1} — функция, обратная к f , находятся вторые предварительные значения потоковых переменных на полуцелом временном слое $t_{n+1/2}$. Как показано в работе [40], сохранение в схеме CABARET 2 монотонности относительно последовательности консервативных переменных $\{U_{j+1/2}^{n+1}\}$ в общем случае не гарантирует монотонности разностного решения относительно последовательности $\{\tilde{u}_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+1}\}$ чередующихся значений потоковых $\tilde{u}_j^{n+1}$ и консервативных $U_{j+1/2}^{n+1}$ переменных. Поэтому в заключение необходимо провести дополнительную коррекцию потоковых переменных

$$u_j^{n+1} = F(\tilde{u}_j^{n+1}, m_j^{n+1}, M_j^{n+1}), \quad (3.37)$$

$$m_j^{n+1} = \min(U_{j-1/2}^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+1}), \quad M_j^{n+1} = \max(U_{j-1/2}^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+1}), \quad (3.38)$$

обеспечивающую сохранение монотонности всего разностного решения $\{u_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+1}\}$

на $(n + 1)$ -ом временном слое.

3.1.2 Графическая иллюстрация

В качестве примера рассмотрим разностное решение по стандартной и модифицированной схемам CABARET 2 задачи Коши (3.2), в которой поток $f(v) = v^2/2$, а функция начальных данных является кусочно-постоянной и имеет вид

$$v_0(x) = \begin{cases} 0.5, & x < 1, \\ 2, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0.5, & x > 2. \end{cases} \quad (3.39)$$

Точное решение данной задачи описано в Главе 1. На Рисунках 3.2 и 3.3 на два последовательных момента времени приведены значения консервативных переменных $U_{j+1/2}^n$, получаемые при расчёте по схемам CABARET 2 задачи Коши (3.2), (3.39) с сеточными начальными данными в виде

$$U_{j+1/2}^0 = v_0(x_{j+1/2}), \quad u_j^0 = (U_{j-1/2}^0 + U_{j+1/2}^0)/2.$$

Кружками показаны результаты расчётов по стандартной схеме CABARET 2, а точками — по модифицированной схеме, удовлетворяющей условиям Теоремы 1. Расчёты проводились на разностной сетке (3.4), (3.5) с пространственным шагом $h = 0.1$ при числах Куранта $r = 0.25$ (Рисунок 3.2) и $r = 0.75$ (Рисунок 3.3). Из Рисунков 3.2 и 3.3 видно, что разностное решение, получаемое по стандартной схеме, имеет паразитические осцилляции, амплитуда которых возрастает с увеличением числа Куранта. При $r = 0.25$ эти осцилляции с течением времени быстро затухают, а при $r = 0.75$ сохраняются при всех $t > 0$. Кроме того, при $r = 0.75$ стандартная схема CABARET 2 (кружки на Рисунке 3.3(б)) не обеспечи-

вает полного распада неустойчивого сильного разрыва начальных данных (3.39), расположенного в точке $x = 1$.

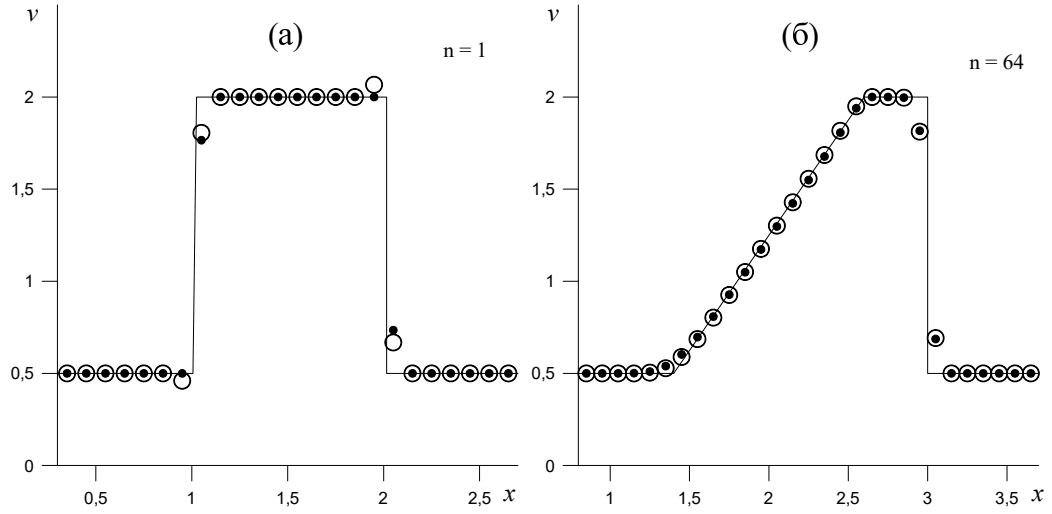


Рисунок 3.2 — Сравнение точного и численных решений задачи Коши (3.2), (3.39), в которой поток $f(v) = v^2/2$, на моменты времени $t_n = 0.0125$, где $n = 1$ (а), и $t_n = 0.8$, где $n = 64$ (б), при $r = 0.25$. Сплошная линия — точное решение; кружки — расчёт по стандартной схеме CABARET 2; точки — расчёт по модифицированной схеме.

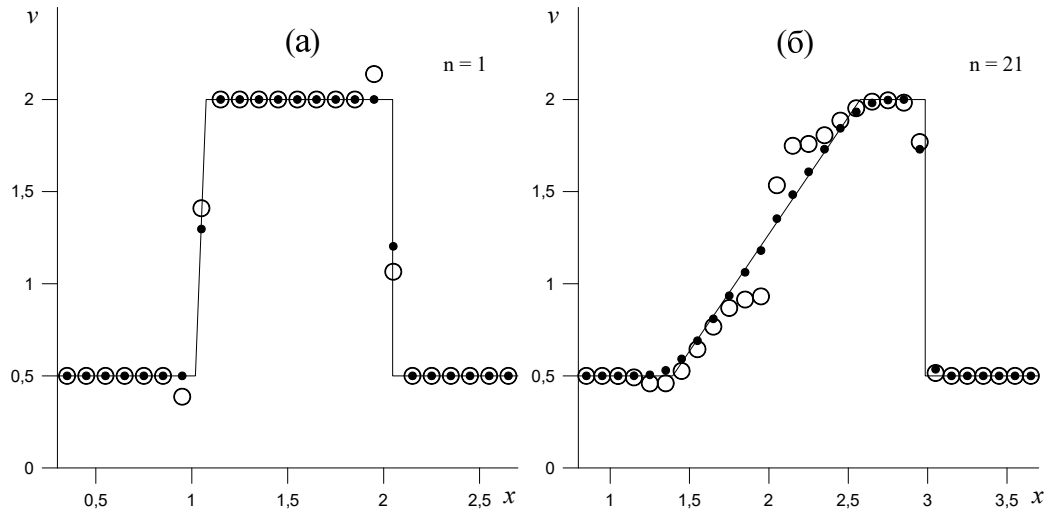


Рисунок 3.3 — Сравнение точного и численных решений задачи Коши (3.2), (3.39), в которой поток $f(v) = v^2/2$, на моменты времени $t_n = 0.0375$, где $n = 1$ (а), и $t_n = 0.7875$, где $n = 21$ (б), при $r = 0.75$. Сплошная линия — точное решение; кружки — расчёт по стандартной схеме CABARET 2; точки — расчёт по модифицированной схеме.

В то же время из рисунков видно, что разностное решение, получаемое по модифицированной схеме, является монотонным, хорошо воспроизводит профиль центрированной волны разрежения, возникающей из неустойчивого сильного разрыва начальных данных, и сохраняет повышенную точность при локализации сильного и слабого разрывов точного решения.

3.2 Случай знакопеременного характеристического поля

Модификация схемы CABARET 2, обеспечивающая её монотонность в случае, когда характеристики аппроксимируемого закона сохранения распространяются с отрицательной скоростью, получается аналогичным образом. Отдельного рассмотрения требует случай, когда эти характеристики могут менять знак.

Рассмотрим задачу Коши для квазилинейного гиперболического скалярного закона сохранения со строго выпуклой функцией потока

$$v_t + f(v)_x = 0, \quad f''(v) > 0, \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad (3.40)$$

где функция $a(v) = f'(v)$, задающая скорость распространения характеристик уравнения (3.40), является знакопеременной. Предположим, что функция $f(v)$ достигает своего минимума при значении w , в силу чего $f'(w) = 0$. По аналогии с газовой динамикой линию $x = x_1$ называют звуковой характеристикой решения $v(x, t)$ задачи Коши (3.40), если выполнено условие $v(x_1, t) = w$, с учётом которого скорость распространения этой характеристики равна нулю. Звуковой полосой решения $v(x, t)$ будем называть отрезок $[x_1, x_2]$, на котором выполнено условие

$$v(x, t) = w, \quad a(v(x, t)) = 0 \quad \forall x \in [x_1, x_2]. \quad (3.41)$$

При $x_1 = -\infty$ или $x_2 = +\infty$ мы получим звуковую полосу, неограниченную слева или справа.

На звуковых линиях и на границах звуковых полос скорость распространения характеристик системы (3.40) может менять знак. Эта скорость также будет менять знак на устойчивых ударных волнах, на фронтах которых выполнены условия Гюгонио

$$D(v_1 - v_0) = (f(v_1) - f(v_0)), \quad v_1 > w > v_0, \quad (3.42)$$

где $D = x'(t)$ — скорость фронта ударной волны $x = x(t)$, $v_1 = v(x(t) - 0, t)$, $v_0 = v(x(t) + 0, t)$. Поскольку при изменении знака скорости характеристик стандартная процедура построения схемы CABARET 2 нарушается, а предложенные ранее модификации этой схемы [39] в этой ситуации оказались недостаточно эффективными, разработка новой модификации схемы CABARET 2, сохраняющей повышенную точность и монотонность в случае знакопеременного характеристического поля, остаётся актуальной задачей.

3.2.1 Модифицированная схема CABARET

Аппроксимируем задачу (3.40) двухслойной по времени модифицированной схемой CABARET 2, заданной на прямоугольной разностной сетке

$$\{x_j, t_n\} : x_j = jh, \quad t_{n+1} = t_n + \tau_n, \quad t_0 = 0, \quad (3.43)$$

в которой h — постоянный шаг сетки по пространству, а τ_n — шаг сетки по времени, определяемый из условия устойчивости

$$\tau_n = rh / \max_j |a_{j+1/2}^n|, \quad (3.44)$$

где $r \in (0, 1)$ — число Куранта, $a_{j+1/2}^n = a(U_{j+1/2}^n)$. В этой схеме используются потоковые $u_j^n = v(x_j, t_n)$ и консервативные $U_{j+1/2}^n = v(x_{j+1/2}, t_n)$ переменные, заданные соответственно в целых x_j и полуцелых $x_{j+1/2} = x_j + h/2$ пространственных узлах разностной сетки.

Пусть $\{u_j^n, U_{j+1/2}^n\}$ — известное численное решение задачи (3.40) на n -ом временном слое t_n , при $n = 0$ — сеточная аппроксимация начальной функции $v_0(x)$. Следуя пункту 3.1.1, численное решение $\{u_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+1}\}$ на $(n + 1)$ -ом временном слое t_{n+1} будем находить по модифицированной схеме CABARET 2 в четыре этапа. На первом этапе по разностным уравнениям

$$\frac{U_{j+1/2}^{n+1/2} - U_{j+1/2}^n}{\tau_n/2} + \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{h} = 0, \quad f_j^n = f(u_j^n), \quad (3.45)$$

вычисляются значения консервативных переменных $U_{j+1/2}^{n+1/2} = v(x_{j+1/2}, t_{n+1/2})$ на полуцелом временном слое $t_{n+1/2} = t_n + \tau_n/2$. На втором этапе находятся значения потоков $f_j^{n+1/2} = f(u_j^{n+1/2})$ на полуцелом временном слое $t_{n+1/2}$. На третьем этапе по разностным уравнениям

$$\frac{U_{j+1/2}^{n+1} - U_{j+1/2}^n}{\tau_n} + \frac{f_{j+1}^{n+1/2} - f_j^{n+1/2}}{h} = 0 \quad (3.46)$$

вычисляются значения консервативных переменных $U_{j+1/2}^{n+1}$ на $(n+1)$ -ом временном слое t_{n+1} . На четвёртом этапе находятся значения потоковых переменных u_j^{n+1} на $(n + 1)$ -ом временном слое t_{n+1} . Детальное описание численного алгоритма на втором и четвёртом этапах приводится ниже.

На втором этапе сначала вычисляются предварительные значения потоков

$$\bar{f}_j^{n+1/2} = f(\bar{u}_j^{n+1/2}), \quad \bar{u}_j^{n+1/2} = (u_j^n + \bar{u}_j^{n+1})/2, \quad (3.47)$$

где величина $\bar{u}_j^{n+1}$ определяется в зависимости от знаков скоростей характеристик

$$a_{j-1/2}^n = a(U_{j-1/2}^n), \quad a_{j+1/2}^n = a(U_{j+1/2}^n), \quad a(v) = f'(v),$$

в ячейках, примыкающих к узлу j . При этом задаётся достаточно малое положительное число ε и вводится вспомогательная сеточная функция $b_{j+1/2}^n$ такая, что $b_{j+1/2}^n = a_{j+1/2}^n$ при $|a_{j+1/2}^n| \geq \varepsilon$ и $|b_{j+1/2}^n| = \varepsilon$ при $|a_{j+1/2}^n| < \varepsilon$. Такое отделение скоростей характеристик от нуля не снижает точность схемы и позволяет существенно упростить алгоритм вычисления и коррекции численных потоков. Знак вспомогательной функции $b_{j+1/2}^n$ определяется следующим образом: если $|a_{j+1/2}^n| \geq \varepsilon$ и $|a_{j+(2k+1)/2}^n| < \varepsilon$ при всех $k = 1, 2, \dots, m$, где $m \in \mathbb{N}$ или $m = +\infty$, то тогда

$$b_{j+(2k+1)/2}^n = \begin{cases} \varepsilon, & a_{j+1/2}^n \geq \varepsilon, \\ -\varepsilon, & a_{j+1/2}^n \leq -\varepsilon, \end{cases} \quad \forall k = 1, 2, \dots, m; \quad (3.48)$$

если $|a_{j-1/2}^n| \geq \varepsilon$ и $|a_{j-(2k+1)/2}^n| < \varepsilon$ при всех $k \geq 1$, то тогда

$$b_{j-(2k+1)/2}^n = \begin{cases} \varepsilon, & a_{j-1/2}^n \geq \varepsilon, \\ -\varepsilon, & a_{j-1/2}^n \leq -\varepsilon, \end{cases} \quad \forall k \geq 1. \quad (3.49)$$

Такое задание вспомогательной функции $b_{j+1/2}^n$ минимизирует количество смен знака у этой функции.

После определения функции $b_{j+1/2}^n$, значение $\bar{u}_j^{n+1}$ вычисляется по формуле

$$\bar{u}_j^{n+1} = 2U_{j-1/2}^{n+1/2} - u_{j-1}^n \quad (3.50)$$

при условии

$$b_{j-1/2}^n > 0, \quad b_{j+1/2}^n > 0, \quad (3.51)$$

по формуле

$$\bar{u}_j^{n+1} = 2U_{j+1/2}^{n+1/2} - u_{j+1}^n \quad (3.52)$$

при условии

$$b_{j-1/2}^n < 0, \quad b_{j+1/2}^n < 0, \quad (3.53)$$

по формуле

$$\bar{u}_j^{n+1} = u_j^n \quad \Rightarrow \quad \bar{u}_j^{n+1/2} = u_j^n \quad \Rightarrow \quad \bar{f}_j^{n+1/2} = f_j^n \quad (3.54)$$

при условии

$$b_{j-1/2}^n < 0, \quad b_{j+1/2}^n > 0 \quad (3.55)$$

и по формулам

$$\bar{u}_j^{n+1} = \frac{a_{j-1/2}^n (\bar{u}_l)_j^{n+1} + |a_{j+1/2}^n| (\bar{u}_r)_j^{n+1}}{a_{j-1/2}^n + |a_{j+1/2}^n|},$$

$$(\bar{u}_l)_j^{n+1} = 2U_{j-1/2}^{n+1/2} - u_{j-1}^n, \quad (\bar{u}_r)_j^{n+1} = 2U_{j+1/2}^{n+1/2} - u_{j+1}^n$$

при условии

$$b_{j-1/2}^n > 0, \quad b_{j+1/2}^n < 0. \quad (3.56)$$

Далее, при помощи стандартной функции ограничения

$$F(u, m, M) = \begin{cases} u, & m \leq u \leq M, \\ m, & u < m, \\ M, & u > M, \end{cases}$$

вычисляем потоки $f_j^{n+1/2}$ путём коррекции их предварительных значений (3.47).

I. При условиях (3.51) и при условии (3.53) потоки (3.47) корректируются по формуле

$$\tilde{f}_j^{n+1/2} = F\left(\bar{f}_j^{n+1/2}, m_j^n, M_j^n\right), \quad (3.57)$$

в которой

$$m_j^n = \min(f_{j-1/2}^n, f_j^n), \quad M_j^n = \max(f_{j-1/2}^n, f_j^n), \quad f_{j-1/2}^n = f(U_{j-1/2}^n) \quad (3.58)$$

при условии (3.51) и

$$m_j^n = \min(f_{j+1/2}^n, f_j^n), \quad M_j^n = \max(f_{j+1/2}^n, f_j^n), \quad f_{j+1/2}^n = f(U_{j+1/2}^n) \quad (3.59)$$

при условии (3.51).

Далее, если на n -ом временном слое при $j = k$ выполнены неравенства

$$U_{k-3/2}^n \leq u_{k-1}^n \leq U_{k-1/2}^n \leq u_k^n \quad \Leftrightarrow \quad f_{k-3/2}^n \leq f_{k-1}^n \leq f_{k-1/2}^n \leq f_k^n, \quad (3.60)$$

то при помощи функции

$$F_1(u, M) = \begin{cases} u, & u \leq M, \\ M, & u \geq M, \end{cases} \quad (3.61)$$

ограничивающей сверху, проводится дополнительная коррекция потока $\tilde{f}_k^{n+1/2}$ по формуле

$$f_k^{n+1/2} = F_1(\tilde{f}_k^{n+1/2}, \varphi_{k-1}^n) \quad (3.62)$$

при условии (3.51) и по формуле

$$f_k^{n+1/2} = F_1(\tilde{f}_k^{n+1/2}, \psi_{k-1}^n) \quad (3.63)$$

при условии (3.53), где

$$\varphi_{k-1}^n = f_{k-1}^n + \frac{U_{k-1/2}^n - u_{k-1}^n}{z_n}, \quad (3.64)$$

$$\psi_{k+1}^n = f_{k+1}^n + \frac{u_{k+1}^n - U_{k+1/2}^n}{z_n}. \quad (3.65)$$

Если на n -ом временном слое при $j = k$ выполнены неравенства

$$U_{k-3/2}^n \geq u_{k-1}^n \geq U_{k-1/2}^n \geq u_k^n \quad \Leftrightarrow \quad f_{k-3/2}^n \geq f_{k-1}^n \geq f_{k-1/2}^n \geq f_k^n, \quad (3.66)$$

то при помощи функции

$$F_2(u, m) = \begin{cases} u, & u \geq m, \\ m, & u \leq m, \end{cases} \quad (3.67)$$

ограничивающей снизу, дополнительная коррекция потока $\tilde{f}_k^{n+1/2}$ проводится по формуле

$$f_k^{n+1/2} = F_2\left(\tilde{f}_k^{n+1/2}, \varphi_{k-1}^n\right) \quad (3.68)$$

при условии (3.51) и по формуле

$$f_k^{n+1/2} = F_2\left(\tilde{f}_k^{n+1/2}, \psi_{k+1}^n\right) \quad (3.69)$$

при условии (3.53).

Если ни одно из двух условий (3.60) или (3.66) не выполнено, то коррекция потока $\tilde{f}_k^{n+1/2}$ не проводится, то есть полагается, что $f_k^{n+1/2} = \tilde{f}_k^{n+1/2}$.

II. При условии (3.56) поток $f_j^{n+1/2}$ вычисляется по формуле

$$f_j^{n+1/2} = F\left(\tilde{f}_j^{n+1/2}, m_j^n, M_j^n\right), \quad (3.70)$$

в которой

$$m_j^n = \max\left(\varphi_{j-1/2}^n, \psi_{j+1/2}^n\right), \quad M_j^n = \max\left(m_j^n, g_j^n\right), \quad (3.71)$$

где

$$g_j^n = \frac{f_{j-1}^n + f_{j+1}^n}{2} + \frac{U_{j-1/2}^n - U_{j+1/2}^n}{2z_n}. \quad (3.72)$$

III. При условии (3.55) полагаем

$$f_j^{n+1/2} = \bar{f}_j^{n+1/2}. \quad (3.73)$$

Для доказательства монотонности модифицированной схемы CABARET 2, нам понадобится следующее вспомогательное определение.

Определение 3. *Разностная двухслойная по времени схема CABARET сохраняет монотонность относительно последовательности консервативных переменных, если для её разностных решений $\{u_j^n, U_{j+1/2}^n\}$ выполнены условия*

$$u_j^n \leq U_{j+1/2}^n \leq u_{j+1}^n \quad \forall j \quad \Rightarrow \quad U_{j-1/2}^{n+1} \leq U_{j+1/2}^{n+1} \quad \forall j,$$

$$u_j^n \geq U_{j+1/2}^n \geq u_{j+1}^n \quad \forall j \quad \Rightarrow \quad U_{j-1/2}^{n+1} \geq U_{j+1/2}^{n+1} \quad \forall j.$$

Результаты о монотонности модифицированной схемы CABARET 2 относительно последовательности консервативных переменных сформулируем в виде четырёх теорем.

Теорема 1. *Разностная схема CABARET 2 (3.45), (3.46), в которой потоки вычисляются по формулам (3.47), (3.50) и корректируются по формулам (3.57)–(3.69), сохраняет монотонность относительно последовательности консервативных переменных при аппроксимации задачи Коши (3.40) в случае, когда характеристики этой задачи распространяются в положительном направлении оси x .*

Доказательство этой теоремы предложено в пункте 3.2.1.

Следующая теорема является аналогом Теоремы 1 для случая, когда характеристики задачи (3.40) распространяются в отрицательном направлении оси x .

Теорема 2. *Разностная схема CABARET 2 (3.45), (3.46), в которой потоки вычисляются по формулам (3.47), (3.52) и корректируются по формулам (3.57)–(3.69), сохраняет монотонность относительно последовательности консервативных переменных при аппроксимации задачи Коши (3.40) в случае, когда характеристики этой задачи распространяются в отрицательном направлении оси x .*

Доказательство. Предположим, что на решении $v(x, t)$ задачи Коши (3.40) функция $a(v) = f'(v)$ является отрицательной, то есть $a(v) < 0$ и, следовательно, характеристики рассматриваемой задачи распространяются в отрицательном направлении оси x . Предполагая, что разностное решение $\{u_j^n, U_{j+1/2}^n\}$ на n -ом временном слое является монотонно возрастающим, и требуя, чтобы монотонно возрастающей по j была последовательность $\{u_j^{n+1/2}, U_{j+1/2}^n\}$ значений этого решения, получим, что неравенства (3.20) будут выполнены, если к значениям $u_j^{n+1/2}$ применить принцип максимума, в силу которого при условии $a(v) < 0$ имеем

$$u_j^n \leq u_j^{n+1/2} \leq U_{j+1/2}^n \quad \forall j. \quad (3.74)$$

Поскольку функция $f(v)$ при $a = f'(v) < 0$ монотонно убывает, то неравенства (3.20) и (3.74) эквивалентны следующим неравенствам

$$f_{j-1}^{n+1/2} \geq f_{j-1/2}^n \geq f_j^{n+1/2} \geq f_{j+1/2}^n \geq f_{j+1}^{n+1/2} \quad \forall j, \quad (3.75)$$

$$f_j^n \geq f_j^{n+1/2} \geq f_{j+1/2}^n \quad \forall j.$$

Предполагая, что выполнены неравенства (3.75), выясним, при каких условиях из монотонного убывания последовательности значений $\{f_j^{n+1/2}, f_{j+1/2}^n\}$ потоков раз-

ностного решения следует монотонное возрастание (3.23) последовательности значений $\{u_j^{n+1/2}, U_{j+1/2}^{n+1}\}$ этого решения, где величины $U_{j+1/2}^{n+1}$ вычисляются по формуле

$$U_{j+1/2}^{n+1} = U_{j+1/2}^n - z_n \left(f_{j+1}^{n+1/2} - f_j^{n+1/2} \right), \quad (3.76)$$

получаемой из разностного уравнения (3.46).

Поскольку третье из неравенств (3.23) с учётом формулы (3.76) можно переписать в виде

$$U_{j+1/2}^n - u_j^{n+1/2} \geq z_n \left(f_{j+1}^{n+1/2} - f_j^{n+1/2} \right), \quad (3.77)$$

то его выполнение следует из условий (3.20) и (3.75), в силу которых левая часть неравенства (3.77) неотрицательна, а его правая часть — неположительна. Четвёртое из неравенств (3.23) можно представить в виде

$$f_j^{n+1/2} \leq f_{j+1}^{n+1/2} + \frac{u_{j+1}^{n+1/2} - U_{j+1/2}^n}{z_n}.$$

Покажем, что это неравенство будет выполнено при условии

$$f_j^{n+1/2} \leq \psi_{j+1/2}^n = f_{j+1}^n + \frac{u_{j+1}^n - U_{j+1/2}^n}{z_n}.$$

Для этого достаточно доказать выполнение неравенства

$$f_{j+1}^n + \frac{u_{j+1}^n - U_{j+1/2}^n}{r_n} \leq f_{j+1}^{n+1/2} + \frac{u_{j+1}^{n+1/2} - U_{j+1/2}^n}{z_n},$$

которое можно переписать в виде

$$z_n \left(f_{j+1}^n - f_{j+1}^{n+1/2} \right) \leq u_{j+1}^{n+1/2} - u_{j+1}^n. \quad (3.78)$$

При условии $u_{j+1}^n = u_{j+1}^{n+1/2} \Rightarrow f_{j+1}^n = f_{j+1}^{n+1/2}$ нестрогое неравенство (3.78)

переходит в равенство. Если $u_{j+1}^n < u_{j+1}^{n+1/2} \Rightarrow f_{j+1}^n > f_{j+1}^{n+1/2}$, неравенство (3.78) можно записать в виде

$$\frac{z_n(f_{j+1}^n - f_{j+1}^{n+1/2})}{u_{j+1}^{n+1/2} - u_{j+1}^n} = \frac{z_n(f(u_{j+1}^n) - f(u_{j+1}^{n+1/2}))}{u_{j+1}^{n+1/2} - u_{j+1}^n} \leq 1. \quad (3.79)$$

Неравенство (3.79) с учётом условий монотонности (3.20), (3.75) и условия устойчивости (3.29) следует из выпуклости функции $f(v)$, в силу которой, как видно из Рисунка 3.4,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f_{j+1}^n - f_{j+1}^{n+1/2}}{u_{j+1}^{n+1/2} - u_{j+1}^n} < \operatorname{tg} \gamma = |a_{j+1/2}^n| = |f'(U_{j+1/2}^n)|. \quad (3.80)$$

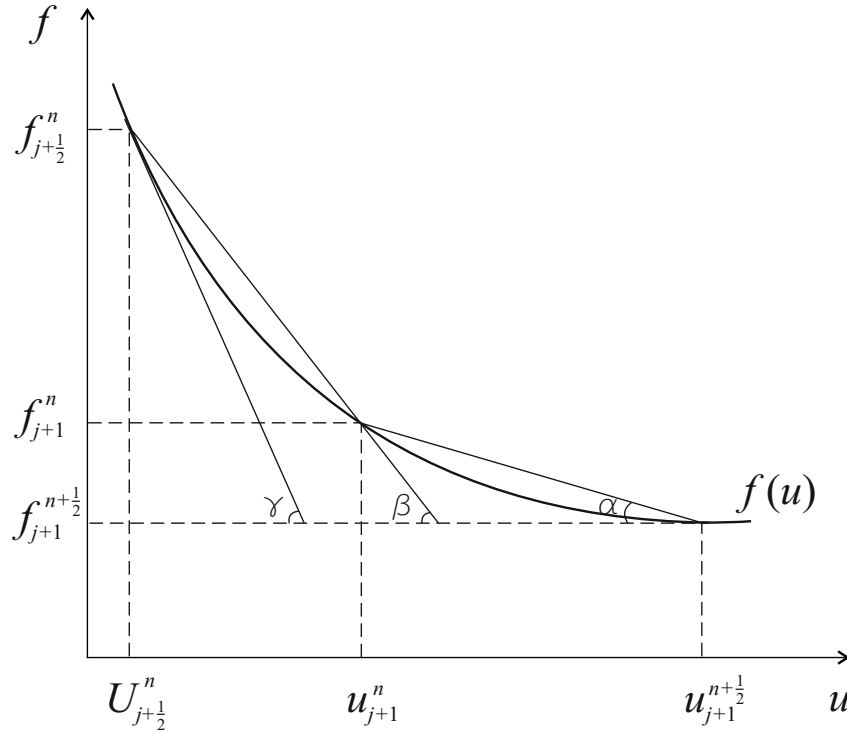


Рисунок 3.4 — Графическая иллюстрация неравенств (3.80) и (3.84).

Таким образом, для выполнения неравенств (3.23) достаточно, чтобы потоки

$f_j^{n+1/2}$ удовлетворяли ограничениям

$$f_{j+1/2}^n \leq f_j^{n+1/2} \leq \min(f_j^n, \psi_{j+1/2}^n) \quad \forall j. \quad (3.81)$$

Для корректности этих ограничений необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$f_{j+1/2}^n \leq \psi_{j+1/2}^n = f_{j+1}^n + \frac{u_{j+1}^n - U_{j+1/2}^n}{z_n},$$

которое можно переписать в виде

$$z_n(f_{j+1/2}^n - f_{j+1}^n) \leq u_{j+1}^n - U_{j+1/2}^n. \quad (3.82)$$

При условии $U_{j+1/2}^n = u_{j+1}^n \Rightarrow f_{j+1/2}^n = f_{j+1}^n$ нестрогое неравенство (3.82) переходит в равенство, а при $u_{j+1}^n > U_{j+1/2}^n \Rightarrow f_{j+1}^n < f_{j+1/2}^n$ неравенство (3.82) можно записать в виде

$$\frac{z_n(f_{j+1/2}^n - f_{j+1}^n)}{u_{j+1}^n - U_{j+1/2}^n} = \frac{z_n(f(U_{j+1/2}^n) - f(u_{j+1}^n))}{u_{j+1}^n - U_{j+1/2}^n} \leq 1. \quad (3.83)$$

Неравенство (3.83) с учётом условий монотонности (3.20), (3.75) и условия устойчивости (3.29) следует из выпуклости функции $f(v)$, в силу которой, как видно из Рисунка 3.4,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{f_{j+1/2}^n - f_{j+1}^n}{u_{j+1}^n - U_{j+1/2}^n} < \operatorname{tg} \gamma = \left| a_{j+1/2}^n \right| = \left| f'(U_{j+1/2}^n) \right|. \quad (3.84)$$

Предположим, что разностное решение $\{u_j^n, U_{j+1/2}^n\}$ на n -ом временном слое является монотонно убывающим. Тогда аналогичным образом показывается, что для сохранения монотонного убывания (3.34) последовательности значений $\{u_j^{n+1/2}, U_{j+1/2}^{n+1}\}$ этого решения достаточно, чтобы потоки $f_j^{n+1/2}$ удовлетворяли

ограничениям

$$f_{j+1/2}^n \geq f_j^{n+1/2} \geq \max(f_j^n, \psi_{j+1/2}^n) \quad \forall j. \quad (3.85)$$

Из неравенств (3.23) и (3.34), которые выполнены при условиях (3.81), (3.85), соответственно, следует монотонность разностного решения относительно последовательности консервативных переменных $U_{j+1/2}^{n+1}$. **Теорема доказана.**

Из Теорем 1 и 2 следует, что в случае знакопостоянного характеристического поля коррекция потоков (3.57)–(3.69) сохраняет монотонность схемы CABARET 2 (3.45)–(3.53) относительно последовательности консервативных переменных.

Перейдём к изучению монотонности модифицированной схемы CABARET 2 при аппроксимации монотонных по x решений $v(x, t)$ задачи Коши (3.40), содержащих звуковую линию, звуковую полосу (3.41) или ударную волну (3.42), на фронте которой скорости характеристик меняют знак. Рассмотрим сначала монотонно возрастающие по x решения $v(x, t)$, которые при $t > 0$ являются непрерывными, поскольку не содержат устойчивых ударных волн.

Теорема 3. *Разностная схема CABARET 2 (3.45), (3.46), в которой потоки вычисляются по формулам (3.47)–(3.55) и корректируются по формулам (3.57)–(3.69), (3.73), сохраняет монотонность относительно последовательности консервативных переменных при аппроксимации задачи Коши (3.40) с произвольными монотонно возрастающими начальными данными.*

Доказательство. Если монотонно возрастающее по j на n -ом временном слое разностное решение $\{u_j^n, U_{j+1/2}^n\}$ удовлетворяет условию

$$U_{j+1/2}^n \geq w \quad \forall j \quad \Rightarrow \quad a_{j+1/2}^n \geq 0 \quad \forall j, \quad (3.86)$$

то данная теорема доказывается так же, как и Теорема 1; если такое решение

удовлетворяет условию

$$U_{j+1/2}^n \leq w \quad \forall j \quad \Rightarrow \quad a_{j+1/2}^n \leq 0 \quad \forall j, \quad (3.87)$$

то доказательство данной теоремы аналогично доказательству Теоремы 2.

Предположим, что монотонно возрастающее по j на n -ом временном слое разностное решение $\{u_j^n, U_{j+1/2}^n\}$ при некоторых значениях $j_1 < j_2$ удовлетворяет неравенствам

$$U_{j_1+1/2}^n < w, \quad U_{j_2+1/2}^n > w, \quad \Rightarrow \quad a_{j_1+1/2}^n < 0, \quad a_{j_2+1/2}^n > 0.$$

Тогда с учётом формул (3.48) и (3.49) вспомогательная сеточная функция $b_{j+1/2}^n$ на n -ом временном слое при достаточно малом ε принимает значения

$$b_{j+1/2}^n = -\varepsilon \quad \forall j \leq k-1, \quad b_{j+1/2}^n = \varepsilon \quad \forall j \geq k,$$

где $j_1 < k < j_2$. В результате на n -ом временном слое коррекция потоков проводится по формулам (3.57), (3.58), (3.60)–(3.62) при $j \geq k+1$, по формулам (3.57), (3.59)–(3.61), (3.63) при $j \leq k-1$ и по формулам (3.54), (3.73) при $j = k$, что с учётом Теорем 1 и 2 обеспечивает выполнение неравенств (3.23).

Теорема доказана.

Рассмотрим монотонно убывающие по x решения $v(x, t)$ задачи Коши (3.40), содержащие звуковую полосу (3.41) или ударную волну (3.42), на фронте которой скорости характеристик меняют знак. Если при аппроксимации такого решения разностное решение $\{u_j^n, U_{j+1/2}^n\}$ на n -ом временном слое монотонно убывает по j , то сохранение для этого разностного решения монотонности относительно последовательности консервативных переменных на $(n+1)$ -ом временном слое при условии (3.86) следует из Теоремы 1, а при условии (3.87) — из Теоремы 2.

Предположим, что монотонно убывающее по j на n -ом временном слое разностное решение $\{u_j^n, U_{j+1/2}^n\}$ при некоторых значениях $j_1 < j_2$ удовлетворяет неравенствам

$$U_{j_1+1/2}^n > w, \quad U_{j_2+1/2}^n < w \quad \Rightarrow \quad a_{j_1+1/2}^n > 0, \quad a_{j_2+1/2}^n < 0. \quad (3.88)$$

С учётом формул (3.48) и (3.49) получаем, что сеточная функция $b_{j+1/2}^n$ на n -ом временном слое при достаточно малом ε принимает значения

$$b_{j+1/2}^n = \varepsilon \quad \forall j \leq k-1, \quad b_{j+1/2}^n = -\varepsilon \quad \forall j \geq k, \quad (3.89)$$

где $j_1 < k < j_2$. В результате на n -ом временном слое коррекция потоков проводится по формулам (3.57), (3.58), (3.66)–(3.68) при $j \leq k-1$, по формулам (3.57), (3.59), (3.66), (3.67), (3.69) при $j \geq k+1$ и по формулам (3.70), (3.71) при $j = k$. Поскольку из Теорем 1 и 2 следует, что применение формул (3.57)–(3.69) обеспечивает выполнение неравенств

$$u_{j-1}^{n+1/2} \geq U_{j-1/2}^{n+1} \geq u_j^{n+1/2} \quad \forall j \neq k, k+1,$$

то для сохранения монотонности разностного решения относительно последовательности консервативных переменных на $(n+1)$ -ом временном слое необходимо, чтобы коррекция потоков (3.70), (3.71) приводила к неравенствам

$$u_{k-1}^{n+1/2} \geq U_{k-1/2}^{n+1} \geq U_{k+1/2}^{n+1} \geq u_{k+1}^{n+1/2}. \quad (3.90)$$

Теорема 4. *Для выполнения неравенств (3.90) достаточно, чтобы поток $f_k^{n+1/2}$ удовлетворял условиям*

$$g_k^n \geq f_k^{n+1/2} \geq \max\left(\varphi_{k-1/2}^n, \psi_{k+1/2}^n\right),$$

где функции g_k^n , $\varphi_{k-1/2}^n$ и $\psi_{k+1/2}^n$ определяются по формулам (3.64), (3.65), (3.72).

Доказательство. Поскольку $b_{k-1/2}^n > 0$, то с учётом Теоремы 1 первое неравенство (3.90) следует из неравенства $f_k^{n+1/2} \geq \varphi_{k-1/2}^n$. Поскольку $b_{k+1/2}^n < 0$, то с учётом Теоремы 2 третье неравенство (3.90) следует из неравенства $f_k^{n+1/2} \geq \psi_{k+1/2}^n$. Применяя формулы (3.24) и (3.76), второе неравенство (3.90) можно записать в виде

$$f_k^{n+1/2} \leq \frac{f_{k-1}^{n+1/2} + f_{k+1}^{n+1/2}}{2} + \frac{U_{k-1/2}^n - U_{k+1/2}^n}{2z_n}. \quad (3.91)$$

Поскольку $f_{k-1}^{n+1/2} \geq f_{k-1}^n$ в силу коррекции (3.57), (3.58), (3.66)–(3.68) и $f_{k+1}^{n+1/2} \geq f_{k+1}^n$ в силу коррекции (3.57), (3.59), (3.66), (3.67), (3.69), с учётом выпуклости вниз потока $f(v)$ неравенство (3.91) следует из неравенства

$$f_k^{n+1/2} \leq g_k^n = \frac{f_{k-1}^n + f_{k+1}^n}{2} + \frac{U_{k-1/2}^n - U_{k+1/2}^n}{2z_n}.$$

Теорема доказана.

Можно привести специальные примеры монотонно убывающих по j на n -ом временном слое разностных решений $\{u_j^n, U_{j+1/2}^n\}$, для которых при условиях (3.88), (3.89) выполнено неравенство $g_k^n < \max(\varphi_{k-1/2}^n, \psi_{k+1/2}^n)$, означающее отсутствие потоков $f_k^{n+1/2}$, удовлетворяющих условию Теоремы 4. Это учтено в формулах коррекции потоков (3.70), (3.71), которые дают лишь необходимые условия выполнения неравенств (3.90). Несмотря на это, тестовые расчёты показали, что применение коррекции (3.70), (3.71) при условии (3.56) обеспечивает достаточную монотонизацию разностного решения относительно последовательности консервативных переменных при расчёте разрывных решений с ударными волнами.

Поскольку функция потока $f(v)$ аппроксимируемого закона сохранения (3.40)

допускает представление в виде

$$f(v) = \begin{cases} f_-(v), & v \leq w, \\ f_+(v), & v \geq w, \end{cases}$$

где $f'_-(v) < 0$ при $v < w$ и $f'_+(v) > 0$ при $v > w$, то на четвёртом этапе вторые предварительные значения потоковых переменных $\bar{u}_j^{n+1}$ при условии (3.51) вычисляются по формуле

$$\bar{u}_j^{n+1} = 2f_+^{-1}(f_j^{n+1/2}) - u_j^n,$$

при условии (3.53) — по формуле

$$\bar{u}_j^{n+1} = 2f_-^{-1}(f_j^{n+1/2}) - u_j^n$$

и при условиях (3.55) или (3.56) — по формуле $\bar{u}_j^{n+1} = \bar{u}_j^{n+1}$, где $f_+^{-1}(v)$ — функция, обратная к $f_+(v)$, а $f_-^{-1}(v)$ — функция, обратная к $f_-(v)$.

Как показано в работе [40], сохранение в схеме CABARET 2 монотонности относительно консервативных переменных в общем случае не гарантирует монотонности разностного решения относительно последовательности чередующихся значений потоковых и консервативных переменных. Поэтому необходимо провести дополнительную коррекцию предварительных значений потоковых переменных $\bar{u}_j^{n+1}$, обеспечивающую сохранение монотонности всего разностного решения $\{u_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+1}\}$ на $(n+1)$ -ом временном слое. При условиях (3.51), (3.53) и (3.56) эта коррекция проводится по стандартным формулам

$$u_j^{n+1} = F(\bar{u}_j^{n+1}, m_j^{n+1}, M_j^{n+1}), \quad (3.92)$$

$$m_j^{n+1} = \min(U_{j-1/2}^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+1}), \quad M_j^{n+1} = \max(U_{j-1/2}^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+1}),$$

а при условии (3.55) — по формуле линейной интерполяции

$$u_j^{n+1} = \frac{U_{j-1/2}^{n+1} + U_{j+1/2}^{n+1}}{2}. \quad (3.93)$$

Применение при условии (3.55) более сильной по сравнению с (3.92) сглаживающей формулы (3.93) необходимо для обеспечения полного распада неустойчивого сильного разрыва начальных данных, содержащего звуковую точку w . Коррекция потоковых переменных (3.92), (3.93), которая проводится после применения основной дивергентной формулы (3.46), не приводит к нарушению консервативности схемы CABARET 2 [47], поскольку эту коррекцию следует рассматривать как первый шаг на пути вычисления потоков на $(n + 2)$ -ом временном слое.

3.2.2 Графическая иллюстрация

В качестве примера рассмотрим разностное решение по модифицированной схеме CABARET 2 задачи Коши (3.40), в которой поток

$$f(v) = v^2/2. \quad (3.94)$$

На Рисунке 3.5 приведены результаты расчёта этой задачи с разрывными начальными данными

$$v_0(x) = \begin{cases} -1, & x < 3, \\ 3, & 3 \leq x \leq 6, \\ -2, & x > 6, \end{cases} \quad (3.95)$$

на Рисунке 3.6 — с разрывными начальными данными

$$v_0(x) = \begin{cases} -2, & x < 2, \\ 3, & 2 \leq x \leq 4, \\ 0, & 4 < x < 6, \\ -1, & 6 \leq x \leq 8, \\ 2, & x > 8, \end{cases} \quad (3.96)$$

содержащими звуковую полосу на отрезке $[4, 6]$, а на Рисунке 3.7 — с гладкими периодическими начальными данными

$$v_0(x) = \sin(2\pi x). \quad (3.97)$$

Начальные данные этих задач показаны пунктирными линиями, точные решения показаны сплошными линиями, а кружками приведены значения консервативных переменных $U_{j+1/2}^n$, получаемые при численном решении этих задач по модифицированной схеме CABARET 2 с сеточными начальными данными

$$U_{j+1/2}^0 = v_0(x_{j+1/2}), \quad u_j^0 = \frac{U_{j-1/2}^0 + U_{j+1/2}^0}{2}.$$

Расчёты проводились на прямоугольной разностной сетке (3.43) с пространственным шагом $h = 0.1$ на Рисунках 3.5, 3.6 и с шагом $h = 0.02$ на Рисунке 3.7, при числе Куранта $r = 0.5$. На Рисунке 3.5(а) показаны результаты расчёта по модифицированной схеме CABARET 2, в которой коррекция потоковых переменных проводится по формулам (3.92) во всех узлах разностной сетки, в том числе при условии (3.55). В этом случае не происходит полного распада неустойчивого сильного разрыва начальных данных (3.95), расположенного в точке $x = 3$.

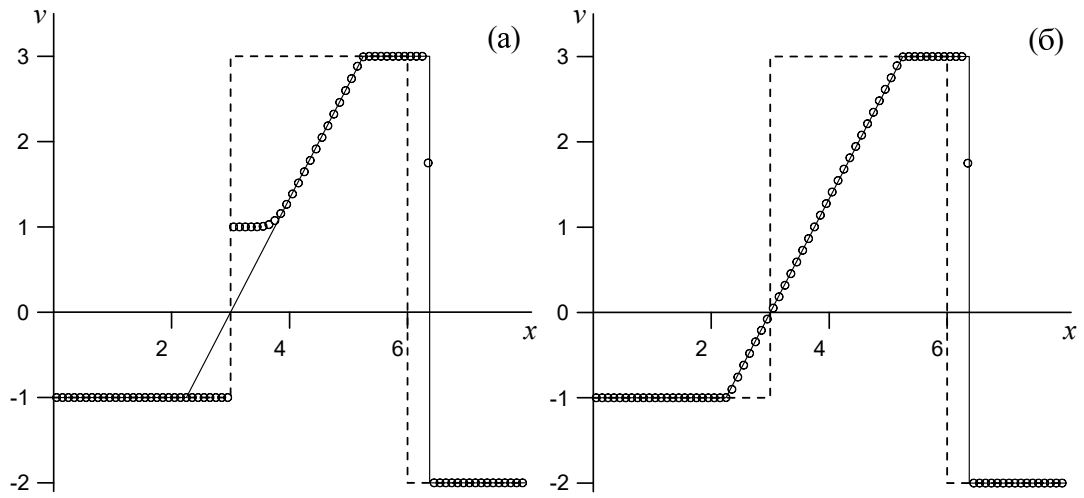


Рисунок 3.5 — Сравнение точного и численного решений задачи Коши (3.40), (3.94), (3.95) на момент времени $t = 0.75$ при расчёте по модифицированной схеме CABARET 2, в которой коррекция потоковых переменных проводится по формулам (3.92) во всех узлах разностной сетки (а) и по модифицированной схеме CABARET 2, в которой коррекция потоковых переменных проводится по формулам (3.92) при условиях (3.51), (3.53), (3.56) и по формуле (3.93) при условии (3.55) (б). Сплошная линия — точное решение; пунктирная линия — начальные данные; кружки — численное решение.

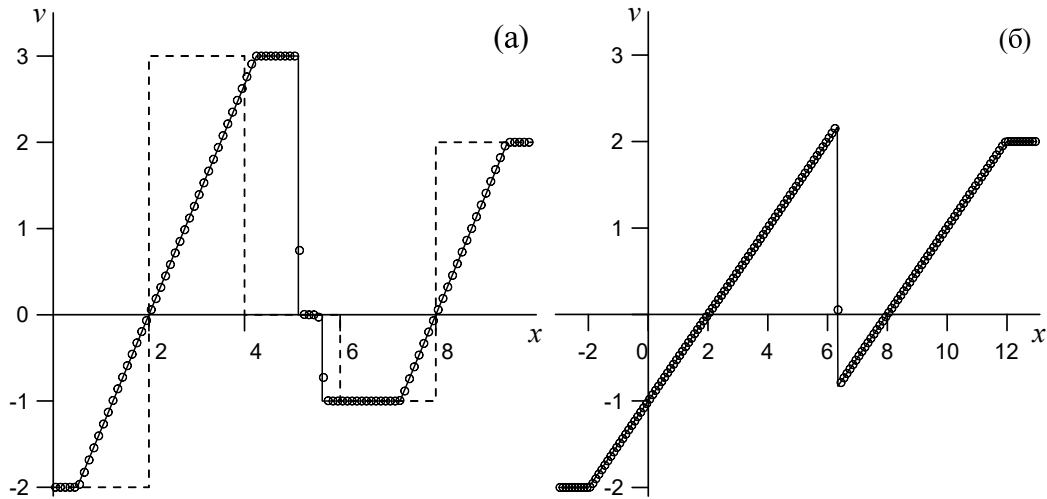


Рисунок 3.6 — Сравнение точного и численного решений задачи Коши (3.40), (3.94), (3.96) на моменты времени $t = 0.75$ (а) и $t = 2$ (б) при расчёте по модифицированной схеме CABARET 2, в которой коррекция потоковых переменных проводится по формулам (3.92) при условиях (3.51), (3.53), (3.56) и по формуле (3.93) при условии (3.55).

На остальных рисунках приведены результаты расчёта по модифицированной схеме CABARET 2, в которой коррекция потоковых переменных проводится по формулам (3.92) при условиях (3.51), (3.53), (3.56) и по формуле (3.93) при условии (3.55). Из этих расчётов следует, что модифицированная схема CABARET 2 является монотонной как в областях, в которых скорость распространения характеристик имеет постоянный знак, так и в окрестностях звуковых линий, звуковых полос и ударных волн, на которых скорость распространения характеристик аппроксимируемого дивергентного уравнения меняет знак. Также данная схема хорошо воспроизводит профиль центрированной волны разрежения, возникающей из неустойчивого сильного разрыва начальных данных, и сохраняет повышенную точность при локализации сильных и слабых разрывов точного решения.

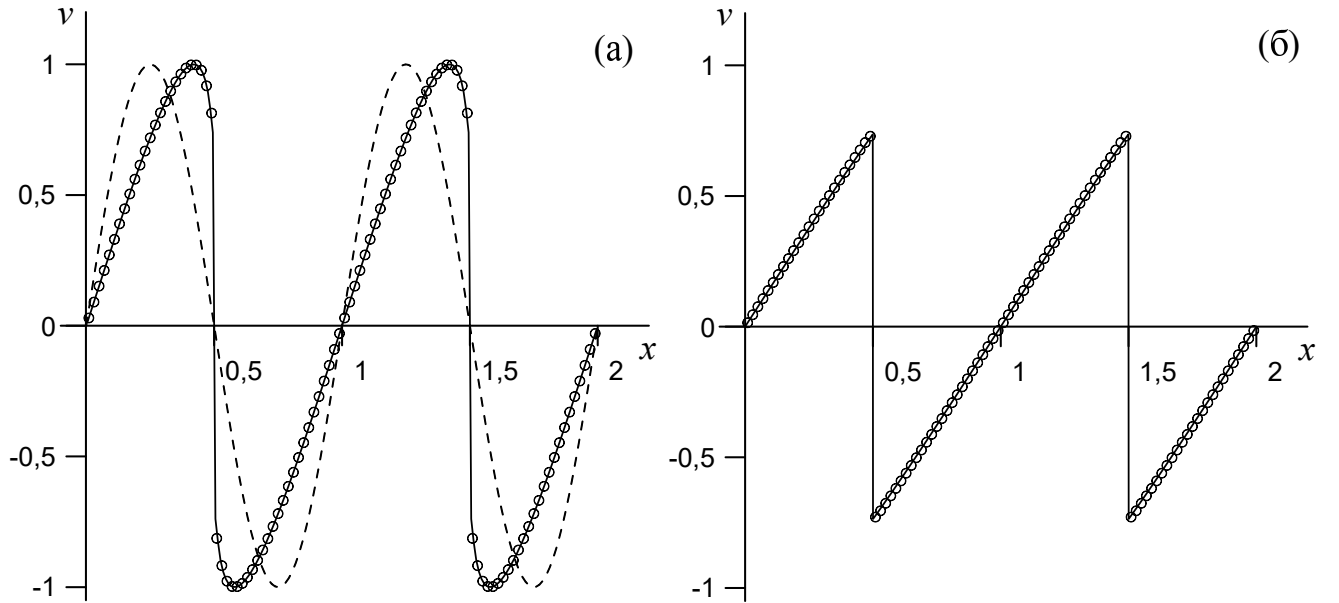


Рисунок 3.7 — Сравнение точного и численного решений задачи Коши (3.40), (3.94), (3.97) на моменты времени $t = 0.175$ (а) и $t = 0.5$ (б) при расчёте по модифицированной схеме CABARET 2, в которой коррекция потоковых переменных проводится по формулам (3.92) при условиях (3.51), (3.53), (3.56) и по формуле (3.93) при условии (3.55).

Глава 4

Обеспечение полного распада неустойчивых сильных разрывов

Показано, что монотонность схемы CABARET 2 при числах Куранта $r \in (0.5, 1]$ не обеспечивает полного распада неустойчивых сильных разрывов. Для стандартной и модифицированной схем CABARET 2 получен разностный аналог энтропийного неравенства и предложен метод, обеспечивающий в разностном решении полный распад неустойчивых сильных разрывов для любых чисел Куранта, при которых схема CABARET 2 является устойчивой. Приведены тестовые расчёты, иллюстрирующие данные свойства.

4.1 Распад неустойчивого сильного разрыва

Рассмотрим задачу Коши для гиперболического скалярного закона сохранения

$$v_t + f(v)_x = 0, \quad v(x, 0) = v_0(x) \quad (4.1)$$

с квадратичной функцией потока

$$f(v) = v^2/2 \quad (4.2)$$

и с кусочно-постоянной начальной функцией

$$v_0(x) = \begin{cases} w_1, & x < x_0, \\ w_2, & x \geq x_0, \end{cases} \quad w_1 < w_2, \quad (4.3)$$

имеющей в точке x_0 неустойчивый сильный разрыв. При $t > 0$ этот разрыв распадается и преобразуется в центрированную волну разрежения. В результате решение данной задачи имеет вид

$$v(x, t) = \begin{cases} w_1, & x \leq x_0 + w_1 t, \\ (x - x_0)/t, & x_0 + w_1 t \leq x \leq x_0 + w_2 t, \\ w_2, & x \geq x_0 + w_2 t. \end{cases} \quad (4.4)$$

На Рисунках 4.1–4.5 приведены результаты численного решения задачи Коши (4.1), (4.2), (4.3), где

$$x_0 = 1, \quad w_1 = 0.5, \quad w_2 = 2, \quad (4.5)$$

на прямоугольной разностной сетке (3.4), (3.5) с пространственным шагом $h = 0.1$ при четырёх различных числах Куранта $r = 0.25, 0.5, 0.75, 0.95$. Точками показаны результаты расчётов по монотонной схеме CABARET 2, предложенной в Главе 3, а кружками — по стандартной (немонотонной) схеме CABARET 2. Квадратиками на Рисунках 4.2–4.6 приведены результаты численных расчётов по модифицированной монотонной схеме CABARET, описанной ниже.

На Рисунках 4.1 и 4.4 на три последовательных момента времени $t = \tau_0$, $t = 2$ и $t = 4$ приведено сравнение точного и численного решений задачи (4.1), (4.2), (4.3), (4.5). Точное решение показано сплошными линиями, а точками, кружками и квадратиками изображены значения консервативных переменных $U_{j+1/2}^n$, получаемые при численном решении этой задачи по схемам CABARET 2, в которых

сеточные начальные данные задаются по формулам

$$U_{j+1/2}^0 = v_0(x_{j+1/2}), \quad u_j^0 = \frac{U_{j-1/2}^0 + U_{j+1/2}^0}{2}. \quad (4.6)$$

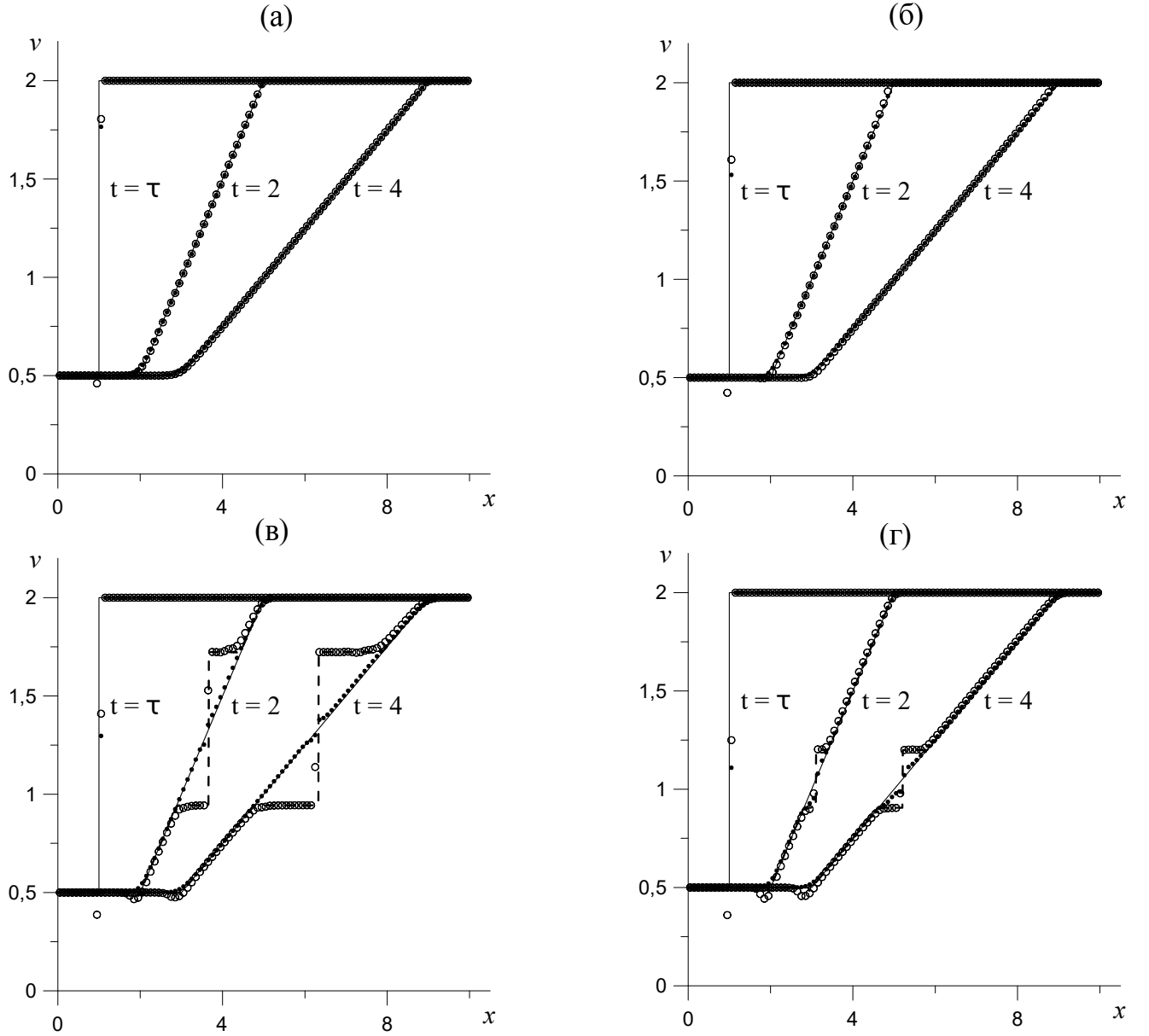


Рисунок 4.1 — Сравнение точного и численного решений задачи (4.1)–(4.3), (4.5) на три последовательных момента времени $t = \tau$, $t = 2$ и $t = 4$ при числе Куранта $r = 0.25$ (а), $r = 0.5$ (б), $r = 0.75$ (в) и $r = 0.95$ (г). Сплошная линия — точное решение, пунктирная линия (в, г) — предел при $h \rightarrow 0$ разностного решения, получаемого по стандартной схеме CABARET 2, точки — результаты расчётов по монотонной схеме CABARET 2, кружки — по стандартной схеме.

Из Рисунков 4.1(а) и 4.1(б) следует, что при числах Куранта $r \in (0, 0.5]$ как монотонная, так и стандартная схемы CABARET 2 с достаточно высокой точностью передают профиль центрированной волны (4.4). При этом в стандартной схеме на первых временных шагах за фронтом неустойчивого разрыва (4.3) возникает нефизическая осцилляция, которая с течением времени быстро сглаживается. Для того чтобы в разностном решении, получаемом по стандартной схеме при $r \leq 0.5$, добиться отсутствия нефизических осцилляций, необходимо [35, 40] использовать специальную аппроксимацию начальной функции, например,

$$u_j^0 = v_0(x_j), \quad U_{j+1/2}^0 = \frac{u_j^0 + u_{j+1}^0}{2}.$$

Из Рисунков 4.1(в) и 4.1(г) видно, что при числах Куранта $r \in (0.5, 1)$ как монотонная, так и стандартная схемы CABARET 2 искажают профиль точного решения (4.4), не обеспечивая полного распада неустойчивого сильного разрыва (4.3). При этом численные расчёты, проведённые на последовательности сгущающихся сеток, показали, что разностное решение, получаемое по монотонной схеме, при $h \rightarrow 0$ сходится к точному решению (4.4), в то время как разностное решение, получаемое по стандартной схеме, при $h \rightarrow 0$ сходится к другому решению, содержащему неустойчивый сильный разрыв (на Рисунках 4.1(в) и 4.1(г) это решение показано пунктирными линиями). Теоретическое объяснение данных результатов даётся в следующем пункте.

4.2 Разностный аналог энтропийного неравенства

Для скалярного закона сохранения с выпуклым потоком $f(v)$ ударной волной называется [48] такой сильный разрыв

$$v(x, t) = \begin{cases} v_1(t), & x = s(t) - 0, \\ v_2(t), & x = s(t) + 0, \end{cases} \quad v_1(t) \neq v_2(t), \quad (4.7)$$

точного решения $v(x, t)$ задачи Коши (4.1), для которого выполняется характеристическое условие устойчивости

$$a(v_1(t)) > s'(t) > a(v_2(t)) \quad \Leftrightarrow \quad v_1(t) > v_2(t), \quad (4.8)$$

означающее, что на линию фронта $x = s(t)$ ударной волны с обеих сторон приходят характеристики уравнения (4.1). Характеристическое условие устойчивости (4.8) эквивалентно “вязкому” условию [48, 49], в силу которого сильный разрыв представляет собой ударную волну, если содержащее его разрывное решение $v(x, t)$ можно получить в результате предельного перехода по вязкости

$$v(x, t) = \lim_{\mu \rightarrow 0} v(x, t, \mu) \quad (4.9)$$

из гладкого решения $v(x, t, \mu)$ задачи Коши для параболического уравнения

$$v_t + f(v)_x = \mu v_{xx}, \quad \mu > 0. \quad (4.10)$$

Дифференциальным следствием уравнения (4.1) является дивергентное дифференциальное уравнение

$$V(v)_t + F(v)_x = 0, \quad (4.11)$$

$$V(v) = v^2/2, \quad F(v) = \int a(v)v dv,$$

получаемое в результате умножения уравнения (4.1) на функцию $v(x, t)$. Поскольку функция $V(v)$ является выпуклой, то уравнение (4.11) представляет собой выпуклое расширение [49] базисного закона сохранения (4.1), которое в форме интегрального (энтропийного) неравенства

$$\oint_{\partial S} V(v) dx - F(v) dt \leq 0 \quad (4.12)$$

можно использовать для отбора устойчивых сильных разрывов [48, 49]. Если область S , по границе ∂S которой происходит интегрирование в формуле (4.12), содержит ударную волну, то неравенство (4.12) становится строгим, поскольку на фронте ударной волны (4.7) выполнено неравенство

$$s'(V(v_1) - V(v_2)) - (F(v_1) - F(v_2)) < 0. \quad (4.13)$$

Для скалярного закона сохранения (4.1) с выпуклым потоком (3.3) энтропийное условие устойчивости (4.13) эквивалентно характеристическому (4.8) и “вязкому” (4.9) условиям устойчивости сильных разрывов (4.7).

Если явная разностная схема, удовлетворяющая условию устойчивости (3.5), с первым порядком аппроксимирует задачу Коши (4.1) и имеет положительную схемную вязкость [12], то есть её первое дифференциальное приближение [11] имеет вид (4.10), где $\mu = O(h)$, то предельные при $h \rightarrow 0$ решения этой схемы могут содержать только устойчивые сильные разрывы (4.7), представляющие собой ударные волны (4.8). Однако, если разностная схема имеет повышенный порядок аппроксимации, то в ней отсутствует схемная вязкость второго порядка дивергентности, и предельные решения такой схемы могут содержать неустойчивые сильные разрывы. В качестве простейшего примера можно привести схему

Лакса-Вендроффа [26], которая, как показано в [27], допускает точные решения, представляющие собой кусочно постоянные решения аппроксимируемого закона сохранения (4.1), содержащие неустойчивые сильные разрывы. Поэтому во многих работах, например, [16, 43, 50–52], при построении разностных схем повышенной точности для обеспечения распада неустойчивых сильных разрывов используются различные варианты разностного аналога энтропийного неравенства.

Применим разностный аналог энтропийного неравенства (4.12) для обоснования результатов численных расчётов, приведённых в предыдущем разделе. Умножая разностное уравнение (3.7) на сеточную функцию

$$\widehat{U}_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left(U_{j+1/2}^n + U_{j+1/2}^{n+1} \right), \quad (4.14)$$

получим, что для монотонной схемы CABARET 2 разностное уравнение, аппроксимирующее дополнительный закон сохранения (4.11), имеет вид

$$\frac{V_{j+1/2}^{n+1} - V_{j+1/2}^n}{\tau_n} + \frac{\widehat{U}_{j+1/2}^{n+1/2} \left(f_{j+1}^{n+1/2} - f_j^{n+1/2} \right)}{h} = 0, \quad (4.15)$$

где $V_{j+1/2}^n = V(U_{j+1/2}^n)$.

Перепишем разностное уравнение (4.15) следующим образом:

$$\frac{V_{j+1/2}^{n+1} - V_{j+1/2}^n}{\tau_n} + \frac{F_{j+1}^{n+1/2} - F_j^{n+1/2}}{h} = \frac{\psi_{j+1/2}^{n+1/2}}{h}, \quad (4.16)$$

где $F_j^{n+1/2} = F(u_j^{n+1/2})$, а разностный оператор $\psi_{j+1/2}^{n+1/2}$ вычисляется по формуле

$$\psi_{j+1/2}^{n+1/2} = \int_{u_j^{n+1/2}}^{u_{j+1}^{n+1/2}} a(u) u du - \widehat{U}_{j+1/2}^{n+1/2} \left(f_{j+1}^{n+1/2} - f_j^{n+1/2} \right). \quad (4.17)$$

В левой части уравнения (4.16) стоит симметричный дивергентный разностный

оператор, который со вторым порядком аппроксимирует дивергентный дифференциальный оператор в левой части уравнения (4.11), а в правой части уравнения (4.16) находится недивергентный разностный оператор (4.17), имеющий второй порядок малости на гладких функциях, то есть дифференциальное представление [11] этого оператора $\psi_h^\tau[u] = O(h^2 + \tau^2)$. Поскольку оператор (4.17) является недивергентным, то на разрывных решениях именно он отвечает за выполнение разностного аналога энтропийного неравенства (4.12).

Для получения разностного уравнения, аппроксимирующего дополнительный закон сохранения (4.11) в случае стандартной схемы CABARET 2, необходимо сеточную функцию (4.14) умножить на полусумму уравнений (1.11) и (1.16), то есть на разностное уравнение

$$\frac{U_{j+1/2}^{n+1} - U_{j+1/2}^n}{\tau_n} + \frac{\hat{f}_{j+1}^{n+1/2} - \hat{f}_j^{n+1/2}}{h} = 0,$$

где $\hat{f}_j^{n+1/2} = (f_j^n + f_j^{n+1})/2$. В результате получим разностное уравнение

$$\frac{V_{j+1/2}^{n+1} - V_{j+1/2}^n}{\tau_n} + \frac{\hat{U}_{j+1/2}^{n+1/2} (\hat{f}_{j+1}^{n+1/2} - \hat{f}_j^{n+1/2})}{h} = 0,$$

при стандартной форме записи которого в виде (4.16) недивергентный разностный оператор $\psi_{j+1/2}^{n+1/2}$ вычисляется по формуле

$$\psi_{j+1/2}^{n+1/2} = \int_{\hat{u}_j^{n+1/2}}^{\hat{u}_{j+1}^{n+1/2}} a(v) v dv - \hat{U}_{j+1/2}^{n+1/2} (\hat{f}_{j+1}^{n+1/2} - \hat{f}_j^{n+1/2}),$$

где $\hat{u}_j^{n+1/2} = (u_j^n + u_j^{n+1})/2$.

Предположим, что задача Коши (4.1), (4.2), (4.3) численно решается в сеточной области, содержащей $M + 1$ пространственный узел $x_j = jh$ при $j = 0, 1, \dots, M$.

Поскольку максимальное значение точного решения (4.4) этой задачи $w_2 = 2$, то шаг по времени в схемах CABARET 2 с учётом условия устойчивости (3.5) возьмём постоянным

$$\tau_n = \tau = rh / \max_x v(x, t) = rh / w_2 = r/20.$$

Суммируя разностное уравнение (4.16), умноженное на h и $\tau_n = \tau$, по пространственным узлам, получаем

$$h \sum_{j=0}^{M-1} \left(V_{j+1/2}^{n+1} - V_{j+1/2}^n \right) + \tau \left(F_M^{n+1/2} - F_0^{n+1/2} \right) = \tau w_{n+1/2}, \quad (4.18)$$

где

$$w_{n+1/2} = \sum_{j=0}^{M-1} \psi_{j+1/2}^{n+1/2}. \quad (4.19)$$

Суммируя уравнение (4.18) по временным слоям от $n = 0$ до $n = N - 1$, получаем

$$h \sum_{j=0}^{M-1} \left(V_{j+1/2}^N - V_{j+1/2}^0 \right) + \tau \sum_{n=0}^{N-1} \left(F_M^{n+1/2} - F_0^{n+1/2} \right) = \tau W_N, \quad (4.20)$$

где

$$W_N = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} \psi_{j+1/2}^{n+1/2}. \quad (4.21)$$

Из уравнения (4.20) следует, что условие $W_N \leq 0$ представляет собой разностный аналог энтропийного неравенства (4.12) в прямоугольной области

$$S = \{ (x, t) : 0 \leq x \leq Mh, 0 \leq t \leq N\tau \}.$$

На Рисунках 4.2 и 4.3 приведены графики сеточных функций W_N (Рисунок 4.2) и $w_{n+1/2}$ (Рисунок 4.3), задающих значения полного (4.21) и локального по вре-

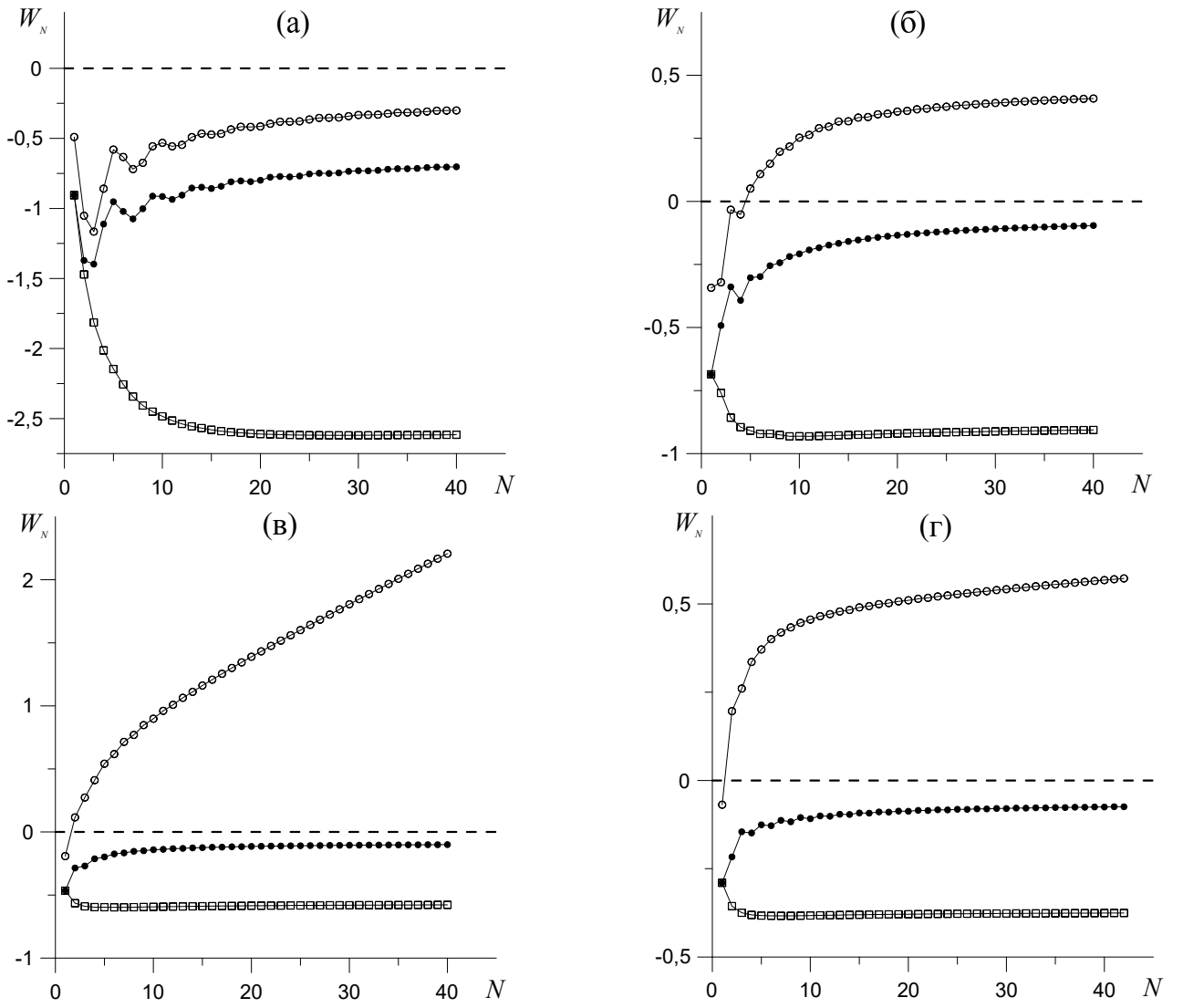


Рисунок 4.2 — Графики сеточной функции (4.21), задающей значения полного дисбаланса разностного энтропийного закона сохранения для задачи (4.1)–(4.3), (4.5) при $r = 0.25$ (а), $r = 0.5$ (б), $r = 0.75$ (в) и $r = 0.95$ (г). Точки соответствуют монотонной схеме CABARET 2, кружки — стандартной схеме, квадратики — модифицированной монотонной схеме.

мени (4.19) дисбалансов разностного энтропийного закона сохранения. Из Рисунка 4.2 следует, что в случае монотонной схемы условие $W_N < 0$, эквивалентное разностному аналогу энтропийного неравенства (4.12), выполнено на всех временных слоях $N \geq 1$ для всех рассматриваемых чисел Куранта. Однако локальное по времени энтропийное условие $w_{n+1/2} < 0$ для числа Куранта $r = 0.25$ (Рисунок 4.3(а)), будучи выполненным на первых трёх временных слоях при $n = 0, 1, 2$,

нарушено на следующих двух временных слоях при $n = 3, 4$. Для больших чисел Куранта это условие, будучи выполнено на начальном временном слое при $n = 0$, нарушено на следующих временных слоях при $n = 1, 2$ для $r = 0.5, 0.95$ (Рисунки 4.3(б), 4.3(г)) и при $n = \overline{1, 8}$ для $r = 0.75$ (Рисунок 4.3(в)).

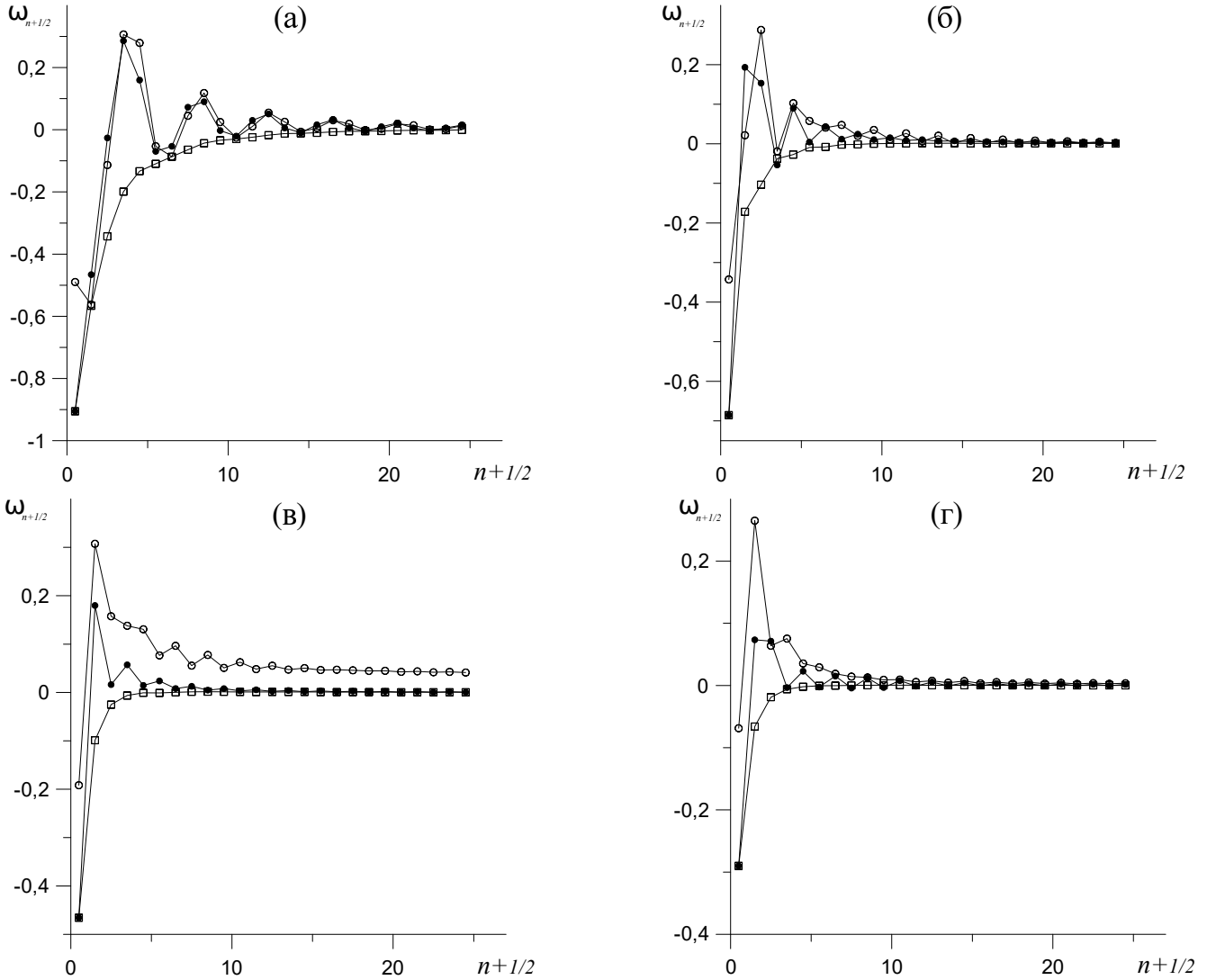


Рисунок 4.3 — Графики сеточной функции (4.19), задающей значения локального по времени дисбаланса разностного энтропийного закона сохранения для задачи (4.1)–(4.3), (4.5) при $r = 0.25$ (а), $r = 0.5$ (б), $r = 0.75$ (в) и $r = 0.95$ (г). Точки соответствуют монотонной схеме CABARET 2, кружки — стандартной схеме, квадратики — модифицированной монотонной схеме.

В результате монотонная схема, с достаточно высокой точностью передавая профиль центрированной волны (4.4) при числах Куранта $r = 0.25, 0.5$ (Рисунки 4.2(а), 4.2(б)), не обеспечивает полного распада неустойчивого сильного разрыва (4.3) на фиксированной разностной сетке (3.4), (3.5) при числах Куранта $r = 0.75, 0.95$ (Рисунки 4.2(в), 4.2(г)). В то же время численные расчёты, проведённые на последовательности сгущающихся сеток, показали, что разностное решение, получаемое по монотонной схеме для чисел Куранта $r \in (0.5, 1)$, при $h \rightarrow 0$ сходится к точному решению (4.4), несмотря на локальное искажение этого решения при конечных значениях h .

Из Рисунка 4.2 следует, что стандартная схема CABARET 2 удовлетворяет разностному аналогу энтропийного неравенства $W_N \leq 0$ для всех $N \geq 1$ при числе Куранта $r = 0.25$ (Рисунок 4.2(а)). При $r = 0.5$ (Рисунок 4.2(б)) эта схема удовлетворяет неравенству $W_N \leq 0$ только на первых четырёх временных слоях $N = \overline{1, 4}$; при $N \geq 5$ для неё выполняется противоположное неравенство $W_N > 0$. При числах Куранта $r = 0.75$ и $r = 0.95$ (Рисунки 4.2(г) и 4.2(д)) стандартная схема удовлетворяет неравенству $W_N \leq 0$ только на первом временном слое $N = 1$, на остальных временных слоях для неё это неравенство не выполнено. Из Рисунка 4.3 следует, что в стандартной схеме локальное по времени энтропийное условие $w_{n+1/2} < 0$ для числа Куранта $r = 0.25$ (Рисунок 4.3(а)), будучи выполненным на первых трёх временных слоях при $n = 0, 1, 2$, нарушено на следующих двух временных слоях при $n = 3, 4$. Для больших чисел Куранта это условие, будучи выполнено на начальном временном слое при $n = 0$, нарушено на следующих временных слоях при $n = 1, 2$ для $r = 0.5$ (Рисунок 4.3(б)) и при $n \geq 1$ для $r = 0.75, 0.95$ (Рисунки 4.3(в), 4.3(г)).

В результате стандартная схема при числах Куранта $r = 0.25, 0.5$ (Рисунки 4.1(а), 4.1(б)) обеспечивает полный распад неустойчивого сильного разрыва (4.3) и с достаточно высокой точностью передает профиль центрированной волны

(4.4). В то же время при числах Куранта $r = 0.75, 0.95$ (Рисунки 4.2(г), 4.2(д)) в разностных решениях, получаемых по этой схеме, сохраняются неустойчивые сильные разрывы (Рисунки 4.1(г), 4.1(д)), на фронтах которых происходит производство энтропии, приводящее при больших значениях N к линейному росту соответствующей функции W_N на Рисунках 4.2(г) и 4.2(д). Численные расчёты, проведенные на последовательности сгущающихся сеток, показали, что (в отличие от монотонной схемы) разностное решение, получаемое по стандартной схеме для чисел Куранта $r \in (0.5, 1)$, при $h \rightarrow 0$ сходится к разрывному решению, отличному от точного непрерывного решения (4.4).

4.3 Модификация монотонной схемы CABARET

Модификация монотонной схемы CABARET 2, обеспечивающая в разностном решении полный распад неустойчивых сильных разрывов для любых чисел Куранта $r \in (0, 1)$, при которых схема CABARET 2 является устойчивой, происходит на четвёртом этапе и связана с изменением заключительной коррекции потоковых переменных $\tilde{u}_j^{n+1}$. Основная идея такой модификации заключается в большей монотонизации разностного решения на неустойчивых сильных разрывах и возникающих при их распаде волнах разрежения, в окрестностях которых характеристики аппроксимируемой задачи расходятся, при сохранении исходной монотонизации (3.37), (3.38) на ударных волнах и волнах сжатия, в окрестностях которых характеристики аппроксимируемой задачи сходятся. В результате предлагается следующая заключительная коррекция потоковых переменных

$$u_j^{n+1} = \begin{cases} F(\tilde{u}_j^{n+1}, m_j^{n+1}, M_j^{n+1}), & a_{j-1/2}^n \geq a_{j+1/2}^n, \\ \frac{1}{2}(U_{j-1/2}^{n+1} + U_{j+1/2}^{n+1}), & a_{j-1/2}^n < a_{j+1/2}^n, \end{cases} \quad (4.22)$$

в которой сеточные функции m_j^{n+1} и M_j^{n+1} задаются по формулам (3.38). В частном случае такая комбинированная коррекция потоковых переменных была использована в Главе 3 для обеспечения полного распада в разностном решении неустойчивого сильного разрыва начальных данных, на котором скорость распространения характеристик аппроксимируемого закона сохранения меняет знак.

Из Рисунка 4.2 следует, что так же, как для исходной монотонной схемы, для модифицированной схемы CABARET 2 условие $W_N < 0$, эквивалентное разностному аналогу энтропийного неравенства (4.12), выполнено на всех временных слоях $N \geq 1$ для всех рассматриваемых чисел Куранта. Однако, как следует из Рисунка 4.3, в отличие от исходной монотонной схемы, для модифицированной схемы локальное по времени энтропийное условие $w_{n+1/2} < 0$ выполнено при всех числах Куранта и на всех начальных временных слоях, на которых локальный энтропийный дисбаланс $w_{n+1/2}$, в силу неравенства $|w_{n+1/2}| > 0(h^2)$, оказывает влияние на распад неустойчивого сильного разрыва (4.3). В результате, как следует из Рисунка 4.4, модифицированная схема CABARET для всех чисел Куранта $r \in (0, 1)$ обеспечивает полный распад неустойчивого сильного разрыва (4.3) и с достаточно высокой точностью передаёт профиль центрированной волны (4.4).

Из сравнения Рисунков 4.1 и 4.4 следует, что разностные решения, получаемые по модифицированной схеме CABARET 2, несколько сильнее, чем аналогичные решения, получаемые по стандартной и исходной монотонной схемам, размазывают слабые разрывы на границах центрированной волны разрежения (4.4). Однако этот недостаток модифицированной схемы связан с её преимуществом (Рисунок 4.5), в силу которого её разностные производные $(u_{j+1}^n - u_j^n)/h$ (в отличие от таких же разностных производных, получаемых при расчётах по стандартной и монотонной схемам) сохраняют монотонность в окрестностях сильных разрывов пространственной производной

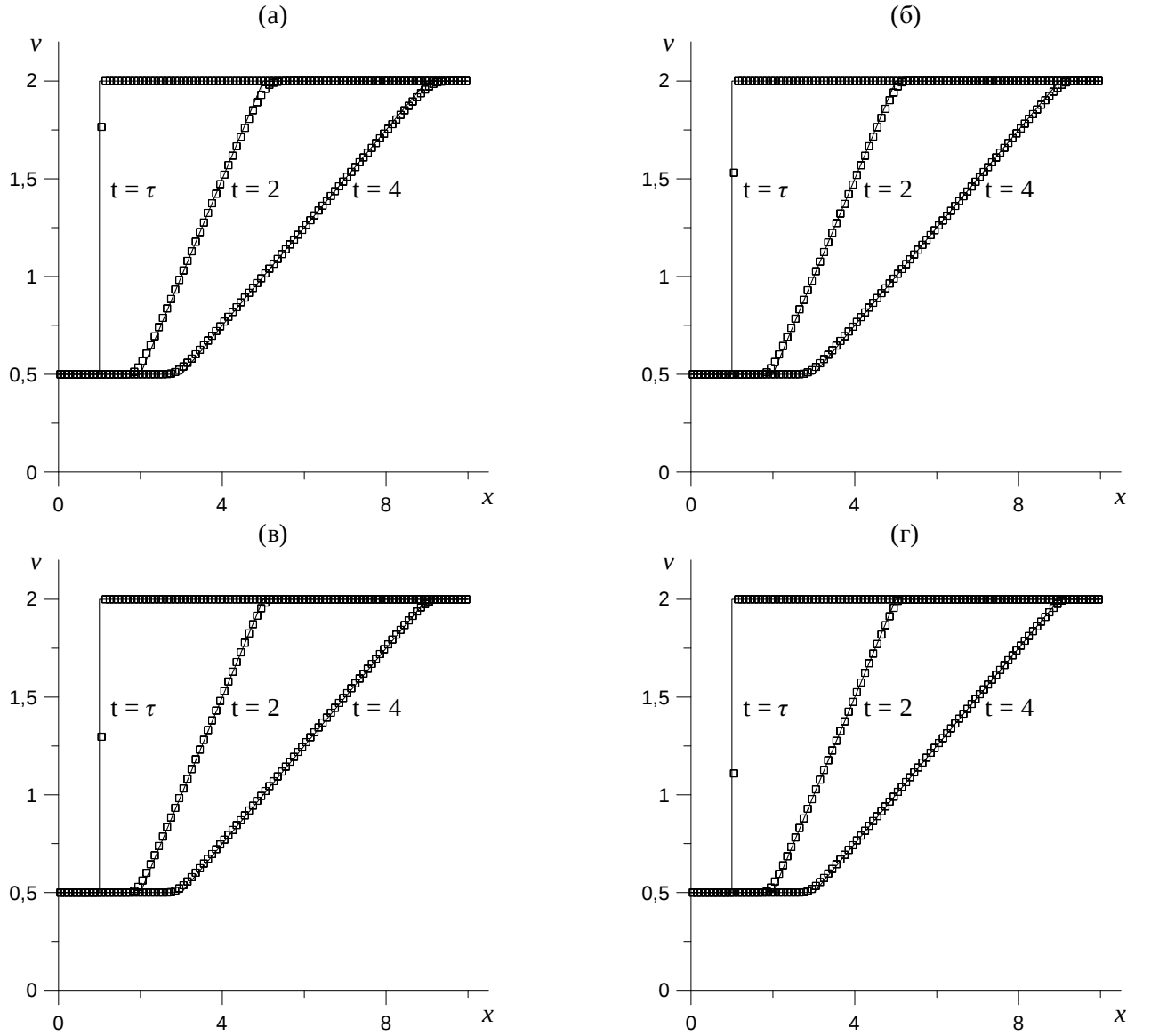


Рисунок 4.4 — Сравнение точного и численного решений задачи (4.1)–(4.3), (4.5) на три последовательных момента времени $t = \tau$, $t = 2$ и $t = 4$ при числах Куранта $r = 0.25$ (а), $r = 0.5$ (б), $r = 0.75$ (в) и $r = 0.95$ (г). Сплошная линия — точное решение, квадратики — результаты расчётов по модифицированной монотонной схеме CABARET 2.

$$v_x(x, t) = \begin{cases} 0, & x \leq x_0 + w_1 t, \\ 1/t, & x_0 + w_1 t \leq x \leq x_0 + w_2 t, \\ 0, & x \geq x_0 + w_2 t, \end{cases} \quad (4.23)$$

точного решения (4.4), в результате чего модифицированная схема более симмет-

рично размывает слабые разрывы на границах центрированной волны разрежения, входящей в это решение.

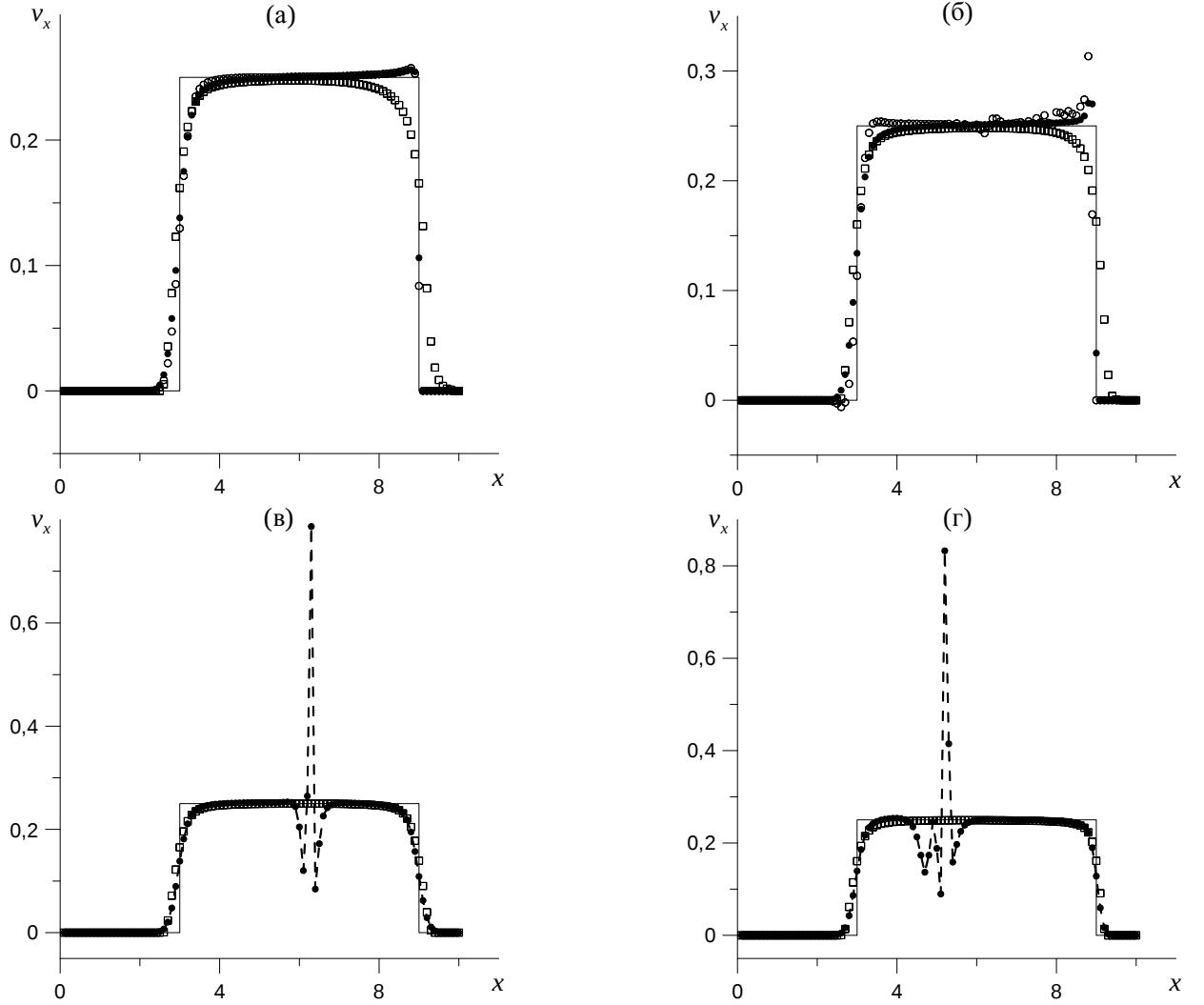


Рисунок 4.5 — Сравнение точной и численной пространственных производных (4.23) решения задачи (4.1)–(4.3), (4.5) в момент времени $t = 4$ при числах Куранта $r = 0.25$ (а), $r = 0.5$ (б), $r = 0.75$ (в) и $r = 0.95$ (г). Сплошная линия соответствует точному решению, точки — монотонной схеме CABARET 2, кружки — стандартной схеме, квадратики — модифицированной монотонной схеме.

Применим модифицированную схему CABARET 2 для численного решения задачи Коши (4.1) для начальных данных

$$v_0(x) = \begin{cases} 2, & x < 1, \\ 6, & 1 \leq x < 3.5, \\ 1, & 3.5 \leq x < 6, \\ 3, & x \geq 6, \end{cases} \quad (4.24)$$

содержащих один устойчивый и два неустойчивых сильных разрыва. На Рисунке 4.6 на три последовательных момента времени $t = 0.5$, $t = 1.1$, $t = 5.5$ приведены результаты численного решения задачи Коши (4.1), (4.2), (4.24), полученные по модифицированной схеме CABARET 2 на прямоугольной разностной сетке (3.4), (3.5) с пространственным шагом $h = 0.1$ и числом Куранта $r = 0.95$. Пунктирной линией (Рисунок 4.6(a)) показана начальная функция, сплошными линиями приведено точное решение, а квадратиками изображены значения консервативных переменных $U_{j+1/2}^n$, получаемые при численном решении, в котором сеточные начальные данные задаются по формулам (4.6). Из Рисунка 4.6 видно, что разностное решение, получаемое по модифицированной схеме CABARET 2 (при числе Куранта, близком к максимальному значению $r = 1$, допустимому условию устойчивости), не имеет схемных осцилляций, хорошо воспроизводит профили центрированных волн разрежения, возникающих из неустойчивых сильных разрывов начальных данных, и сохраняет повышенную точность при локализации сильных и слабых разрывов точного решения.

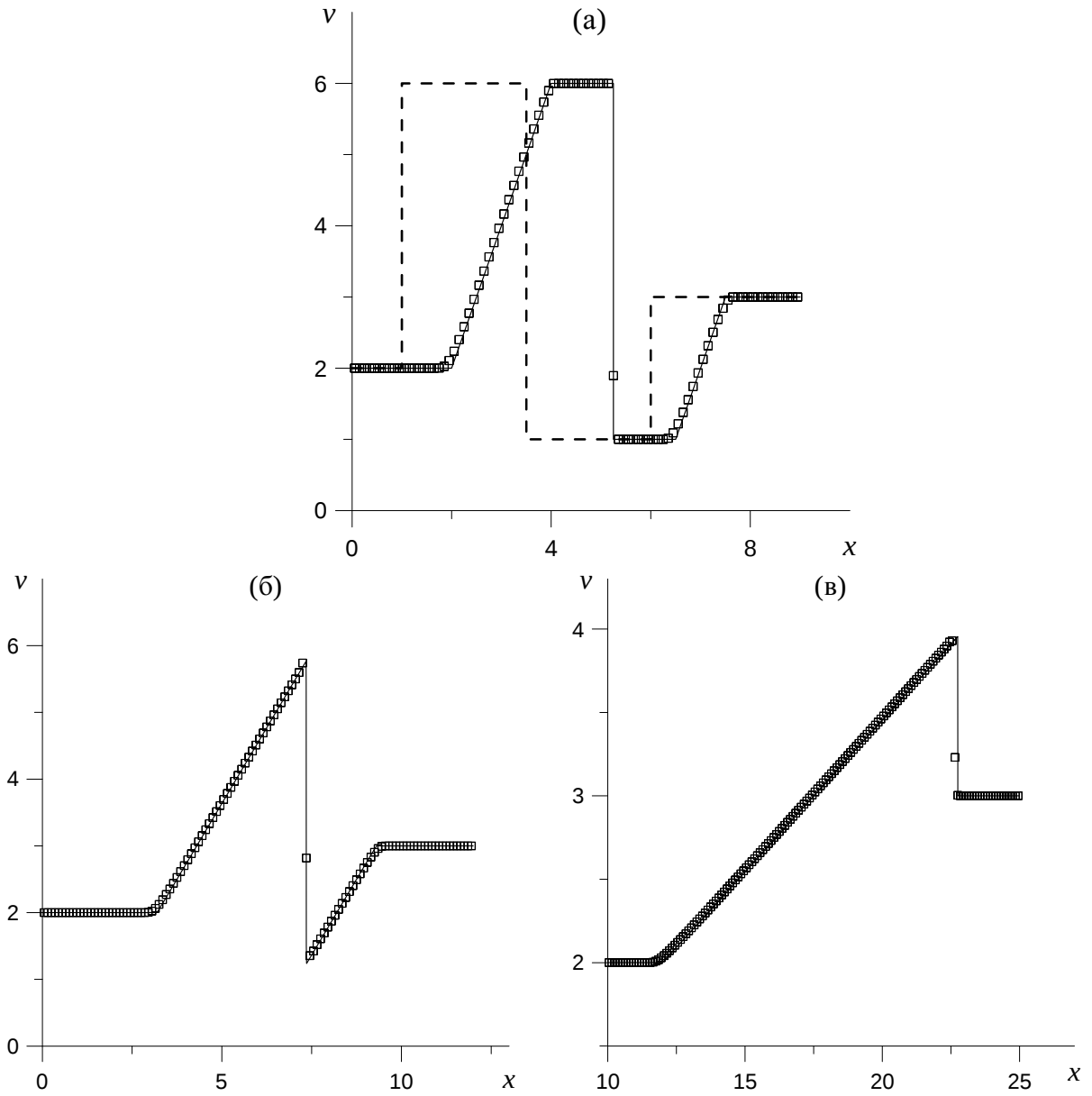


Рисунок 4.6 — Сравнение точного и численных решений задачи (4.1), (4.2), (4.24) на три последовательных момента времени $t = 0.5$ (а), $t = 1.1$ (б) и $t = 5.5$ (в) при числе Куранта $r = 0.95$. Пунктирная линия (а) — начальные данные, сплошная линия — точное решение, квадратики — результаты расчётов по модифицированной монотонной схеме CABARET 2.

Глава 5

Неоднородный скалярный закон сохранения

Предложен метод расщепления по физическим процессам для схемы CABARET 2, аппроксимирующей задачу Коши для неоднородного скалярного закона сохранения с выпуклой и монотонно возрастающей функцией потока. Показано, что на первом шаге этого метода, когда аппроксимируется однородный закон сохранения, схема является монотонной, что обеспечивает отсутствие в её численных решениях нефизических осцилляций на фронтах ударных волн. Приведены тестовые расчёты, иллюстрирующие преимущества данной модификации схемы CABARET 2.

5.1 Стандартная схема CABARET

Рассмотрим задачу Коши для неоднородного гиперболического скалярного закона сохранения

$$v_t + f(v)_x = g(v), \quad v(x, 0) = v_0(x) \quad (5.1)$$

со строго монотонно возрастающей, строго выпуклой функцией потока $f(v)$:

$$a(v) = f'(v) > 0, \quad a'(v) = f''(v) > 0,$$

и непрерывной правой частью $g(v)$. Аппроксимируем эту задачу двухслойной по времени схемой CABARET 2, заданной на прямоугольной разностной сетке

$$\{x_j, t_n\} : x_j = jh, \quad t_{n+1} = t_n + \tau_n, \quad t_0 = 0, \quad (5.2)$$

в которой h — постоянный шаг сетки по пространству, а τ_n — шаг сетки по времени, определяемый из условия устойчивости

$$\tau_n = rh / \max_j |a_{j+1/2}^n|, \quad (5.3)$$

где $r \in (0, 1)$ — число Куранта, $a_{j+1/2}^n = a(U_{j+1/2}^n)$. В этой схеме используются потоковые $u_j^n = v(x_j, t_n)$ и консервативные $U_{j+1/2}^n = v(x_{j+1/2}, t_n)$ переменные, заданные соответственно в целых x_j и полуцелых $x_{j+1/2} = x_j + h/2$ пространственных узлах разностной сетки.

Пусть $u_j^n, U_{j+1/2}^n$ — известное численное решение задачи (5.1) на n -ом временном слое t_n , при $n = 0$ — сеточная аппроксимация начальной функции $v_0(x)$. Численное решение $u_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+1}$ на $(n+1)$ -ом временном слое t_{n+1} находится по стандартной схеме CABARET 2 [39] в три этапа. На первом этапе по разностным уравнениям

$$\frac{U_{j+1/2}^{n+1/2} - U_{j+1/2}^n}{\tau_n/2} + \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{h} = g_{j+1/2}^n, \quad (5.4)$$

где $f_j^n = f(u_j^n)$, $g_{j+1/2}^n = g(U_{j+1/2}^n)$, вычисляются значения консервативных переменных $U_{j+1/2}^{n+1/2} = U(x_{j+1/2}, t_{n+1/2})$ на полуцелом временном слое $t_{n+1/2} = t_n + \tau_n/2$.

На втором этапе путем экстраполяции

$$\bar{u}_{j+1}^{n+1} = 2U_{j+1/2}^{n+1/2} - u_j^n \quad (5.5)$$

находятся предварительные значения потоковых переменных $\bar{u}_{j+1}^{n+1}$, которые кор-

ректируются по формуле

$$u_{j+1}^{n+1} = F\left(\bar{u}_{j+1}^{n+1}, m_j^n, M_j^n\right), \quad (5.6)$$

в которой

$$F(u, m, M) = \begin{cases} u, & m \leq u \leq M, \\ m, & u < m, \\ M, & u > M, \end{cases} \quad (5.7)$$

$$m_j^n = \min\left(u_j^n, U_{j+1/2}^n, u_{j+1}^n\right) + \tau_n g_{j+1/2}^{n+1/2}, \quad (5.8)$$

$$M_j^n = \max\left(u_j^n, U_{j+1/2}^n, u_{j+1}^n\right) + \tau_n g_{j+1/2}^{n+1/2}, \quad (5.9)$$

где $g_{j+1/2}^{n+1/2} = g(U_{j+1/2}^{n+1/2})$.

На третьем, заключительном этапе, по разностным уравнениям

$$\frac{U_{j+1/2}^{n+1} - U_{j+1/2}^n}{\tau_n/2} + \frac{f_{j+1}^{n+1} - f_j^{n+1}}{h} = g_{j+1/2}^{n+1} = g(U_{j+1/2}^{n+1}) \quad (5.10)$$

вычисляются значения консервативных переменных $U_{j+1/2}^{n+1}$ на $(n+1)$ -ом временном слое t_{n+1} . Суммируя уравнения (5.4) и (5.10), получаем симметричное разностное уравнение

$$\frac{U_{j+1/2}^{n+1} - U_{j+1/2}^n}{\tau_n} + \frac{f_{j+1}^n + f_{j+1}^{n+1} - (f_j^n + f_j^{n+1})}{2h} = \frac{g_{j+1/2}^n + g_{j+1/2}^{n+1}}{2},$$

аппроксимирующее со вторым порядком дивергентное дифференциальное уравнение (5.1).

Как показано в Главе 1, основной недостаток стандартной схемы CABARET 2 (5.4)–(5.10) заключается в том, что она является немонотонной при аппроксима-

ции однородного закона сохранения

$$v_t + f(v)_x = 0, \quad (5.11)$$

точные решения которого обладают свойством сохранения монотонности начальных данных. В то же время точные решения неоднородного закона сохранения (5.1) в общем случае такого свойства монотонности не имеют и поэтому представляется не совсем оправданным при коррекции потоковых переменных (5.7)–(5.9) учитывать влияние сеточной функции $g_{j+1/2}^{n+1/2}$, аппроксимирующей правую часть неоднородного уравнения (5.1).

В следующем пункте предложена модифицированная схема CABARET, в которой отсутствуют указанные недостатки.

5.2 Модифицированная схема CABARET

Для построения модифицированной схемы CABARET 2, аппроксимирующей задачу Коши (5.1), применим метод расщепления по физическим процессам [53], идею которого проиллюстрируем на примере абстрактной дифференциально-разностной схемы

$$\frac{w^{n+1} - w^n}{\tau_n} + f_x^{n+1/2} = g^{n+1/2}, \quad w^n = w(x, t_n),$$

аппроксимирующей неоднородное уравнение (5.1), где $f^{n+1/2} = \widehat{f}(w^n)$ и $g^{n+1/2} = \widehat{g}(w^n, w^{n+1})$ — некоторые сеточные аппроксимации функций $f(v)$ и $g(v)$ в точке $(x, t_{n+1/2})$. На первом шаге этого метода решается однородное дифференциально-разностное уравнение

$$\frac{\widehat{w}^{n+1} - w^n}{\tau_n} + f_x^{n+1/2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{w}^{n+1} = w^n - \tau_n f_x^{n+1/2}, \quad (5.12)$$

аппроксимирующее однородное дифференциальное уравнение (5.11). В результате находятся предварительные значения $\widehat{w}^{n+1}$, которые используются на втором шаге

$$\frac{w^{n+1} - \widehat{w}^{n+1}}{\tau_n} = g^{n+1/2} \quad \Leftrightarrow \quad w^{n+1} = \widehat{w}^{n+1} + \tau_n g^{n+1/2} \quad (5.13)$$

для нахождения величин w^{n+1} .

На первом шаге (5.12) метода расщепления применяется монотонная модификация схемы CABARET, предложенная в Главе 4, обеспечивающая сохранение монотонности разностного решения при аппроксимации однородного уравнения (5.11). На втором шаге (5.13) этого метода используется неявная разностная схема второго порядка, которая не препятствует формированию новых локальных экстремумов в разностном решении, если такие экстремумы возникают в точном решении неоднородного уравнения (5.1). Подробное описание данной модификации схемы CABARET 2 приводится ниже.

Первый шаг расщепления, на котором схема CABARET 2 аппроксимирует однородное дивергентное дифференциальное уравнение (5.12), состоит из четырёх этапов. На первом этапе по разностным уравнениям

$$\frac{U_{j+1/2}^{n+1/2} - U_{j+1/2}^n}{\tau_n/2} + \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{h} = 0$$

определяются консервативные переменные $U_{j+1/2}^{n+1/2}$. На втором этапе по формуле (5.5) находятся величины $\bar{u}_{j+1}^{n+1}$, используемые для определения предварительных значений потоков

$$\bar{f}_{j+1}^{n+1/2} = f(\bar{u}_{j+1}^{n+1/2}), \quad \bar{u}_{j+1}^{n+1/2} = (u_{j+1}^n + \bar{u}_{j+1}^{n+1})/2,$$

которые корректируются по формуле

$$\tilde{f}_{j+1}^{n+1/2} = F\left(\tilde{f}_{j+1}^{n+1/2}, m_j^n, M_j^n\right),$$

где

$$m_j^n = \min\left(f_{j+1/2}^n, f_{j+1}^n\right), \quad M_j^n = \max\left(f_{j+1/2}^n, f_{j+1}^n\right), \quad f_{j+1/2}^n = f(U_{j+1/2}^n).$$

Если на n -ом временном слое при $j = k$ выполнены неравенства

$$U_{k-3/2}^n \leq U_{k-1/2}^n \leq U_{k+1/2}^n \quad \Leftrightarrow \quad f_{k-3/2}^n \leq f_{k-1/2}^n \leq f_{k+1/2}^n, \quad (5.14)$$

то при помощи функции

$$F_1(u, M) = \begin{cases} u, & u \leq M, \\ M, & u \geq M, \end{cases}$$

ограничивающей сверху, проводится дополнительная коррекция потока $\tilde{f}_k^{n+1/2}$ по формуле

$$f_k^{n+1/2} = F_1\left(\tilde{f}_k^{n+1/2}, \varphi_{k-1}^n\right),$$

где

$$\varphi_{k-1}^n = f_{k-1}^n + \frac{U_{k-1/2}^n - u_{k-1}^n}{z_n}, \quad z_n = \frac{\tau_n}{h}.$$

Если на n -ом временном слое при $j = k$ выполнены неравенства

$$U_{k-3/2}^n \geq U_{k-1/2}^n \geq U_{k+1/2}^n \quad \Leftrightarrow \quad f_{k-3/2}^n \geq f_{k-1/2}^n \geq f_{k+1/2}^n, \quad (5.15)$$

то при помощи функции

$$F_2(u, m) = \begin{cases} u, & u \geq m, \\ m, & u \leq m, \end{cases}$$

ограничивающей снизу, дополнительная коррекция потока $\tilde{f}_k^{n+1/2}$ проводится по формуле

$$f_k^{n+1/2} = F_2\left(\tilde{f}_k^{n+1/2}, \varphi_{k-1}^n\right).$$

Если ни одно из двух условий (5.14) или (5.15) не выполнено, то коррекция потока $\tilde{f}_k^{n+1/2}$ не проводится, то есть полагается, что $f_k^{n+1/2} = \tilde{f}_k^{n+1/2}$.

На третьем этапе из разностных уравнений

$$\frac{\hat{U}_{j+1/2}^{n+1} - U_{j+1/2}^n}{\tau_n} + \frac{f_{j+1}^{n+1/2} - f_j^{n+1/2}}{h} = 0$$

находятся предварительные значения $\hat{U}_{j+1/2}^{n+1}$ консервативных переменных. На четвертом этапе по формулам

$$\tilde{u}_j^{n+1} = 2u_j^{n+1/2} - u_j^n, \quad u_j^{n+1/2} = f^{-1}(f_j^{n+1/2}),$$

где f^{-1} — функция, обратная к f , находятся вторые предварительные значения $\tilde{u}_j^{n+1}$ потоковых переменных, которые корректируются по формуле

$$\hat{u}_j^{n+1} = \begin{cases} F\left(\tilde{u}_j^{n+1}, m_j^{n+1}, M_j^{n+1}\right), & a_{j-1/2}^{n+1} \geq a_{j+1/2}^{n+1}, \\ \frac{1}{2}\left(\hat{U}_{j-1/2}^{n+1} + \hat{U}_{j+1/2}^{n+1}\right), & a_{j-1/2}^{n+1} < a_{j+1/2}^{n+1}, \end{cases} \quad (5.16)$$

где

$$m_j^{n+1} = \min\left(\hat{U}_{j-1/2}^{n+1}, \hat{U}_{j+1/2}^{n+1}\right), \quad M_j^{n+1} = \max\left(\hat{U}_{j-1/2}^{n+1}, \hat{U}_{j+1/2}^{n+1}\right). \quad (5.17)$$

На этом завершается первый шаг метода расщепления, в результате которого определяются предварительные значения $\widehat{u}_j^{n+1}$ и $\widehat{U}_{j+1/2}^{n+1}$ разностного решения на $(n+1)$ -ом временном слое. На втором шаге (5.13) метода расщепления по неявным формулам

$$u_j^{n+1} = \widehat{u}_j^{n+1} + \tau_n g\left(\frac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2}\right), \quad U_{j+1/2}^{n+1} = \widehat{U}_{j+1/2}^{n+1} + \tau_n g\left(\frac{U_{j+1/2}^{n+1} + U_{j+1/2}^n}{2}\right),$$

вычисляются окончательные значения разностного решения u_j^{n+1} и $U_{j+1/2}^{n+1}$ на $(n+1)$ -ом временном слое.

Из Главы 3 следует, что на первом шаге метода расщепления модифицированная схема CABARET 2 является монотонной, то есть удовлетворяет условиям

$$U_{j-1/2}^n \leq u_j^n \leq U_{j+1/2}^n \quad \forall j \quad \Rightarrow \quad \widehat{U}_{j-1/2}^{n+1} \leq \widehat{u}_j^{n+1} \leq \widehat{U}_{j+1/2}^{n+1} \quad \forall j,$$

$$U_{j-1/2}^n \geq u_j^n \geq U_{j+1/2}^n \quad \forall j \quad \Rightarrow \quad \widehat{U}_{j-1/2}^{n+1} \geq \widehat{u}_j^{n+1} \geq \widehat{U}_{j+1/2}^{n+1} \quad \forall j,$$

что обеспечивает отсутствие в её разностных решениях численных осцилляций на линиях сильных разрывов точного решения.

5.3 Численное моделирование плёночных течений

В качестве конкретного примера рассмотрим задачу Коши (5.1), в которой

$$f(v) = v^3/3, \quad g(v) = \beta/v, \quad v > 0, \quad \beta = \text{const.} \quad (5.18)$$

Такая задача возникает при моделировании в рамках длинноволнового приближения процесса стекания вязкой плёнки по вертикальной стенке с учётом тепломассопереноса на межфазной поверхности [54–56]. При $\beta > 0$ на свободной поверхности

стекающей плёнки жидкость конденсируется, а при $\beta < 0$ — испаряется. Точные решения данной задачи, содержащие центрированные волны, были получены в работе [57]. Приводимые далее численные расчёты двух различных задач Коши (5.1), (5.18) выполнены по стандартной и модифицированной схемам CABARET 2, заданным на прямоугольной разностной сетке (5.2)–(5.3) с пространственным шагом $h = 0.1$ и с числом Куранта $r = 0.5$. Сеточные начальные данные задавались по формулам

$$u_j^0 = v_0(x_j), \quad U_{j+1/2}^0 = \frac{u_j^0 + u_{j+1}^0}{2} \quad (5.19)$$

или по формулам

$$U_{j+1/2}^0 = v_0(x_{j+1/2}), \quad u_j^0 = \frac{U_{j-1/2}^0 + U_{j+1/2}^0}{2}. \quad (5.20)$$

На Рисунках 5.1 и 5.2 на три последовательных момента времени $t = \tau_0$, $t = 2.5$ и $t = 4.5$ приведены результаты расчёта по стандартной (кружки) и модифицированной (точки) схемам CABARET 2 задачи Коши (5.1), (5.18) с кусочно-постоянной начальной функцией

$$v(x) = \begin{cases} 1, & x < 1, \\ 3, & 1 \leq x < 3, \\ 1, & 3 \leq x, \end{cases} \quad (5.21)$$

имеющей в точке $x = 1$ неустойчивый сильный разрыв, переходящий при $t > 0$ в центрированную волну разрежения, а в точке $x = 3$ — устойчивый сильный разрыв, переходящий при $t > 0$ в ударную волну. Рисунки 5.1(а) и 5.2(а) соответствуют случаю конденсации ($\beta = 1$), а Рисунки 5.1(б), 5.2(б) — случаю испарения ($\beta = -1$). Разностная сетка (5.2)–(5.3) задавалась на отрезке $[0, X]$ оси x , где $X = 10$, что соответствует $M = X/h = 100$ пространственным ячейкам сетки.

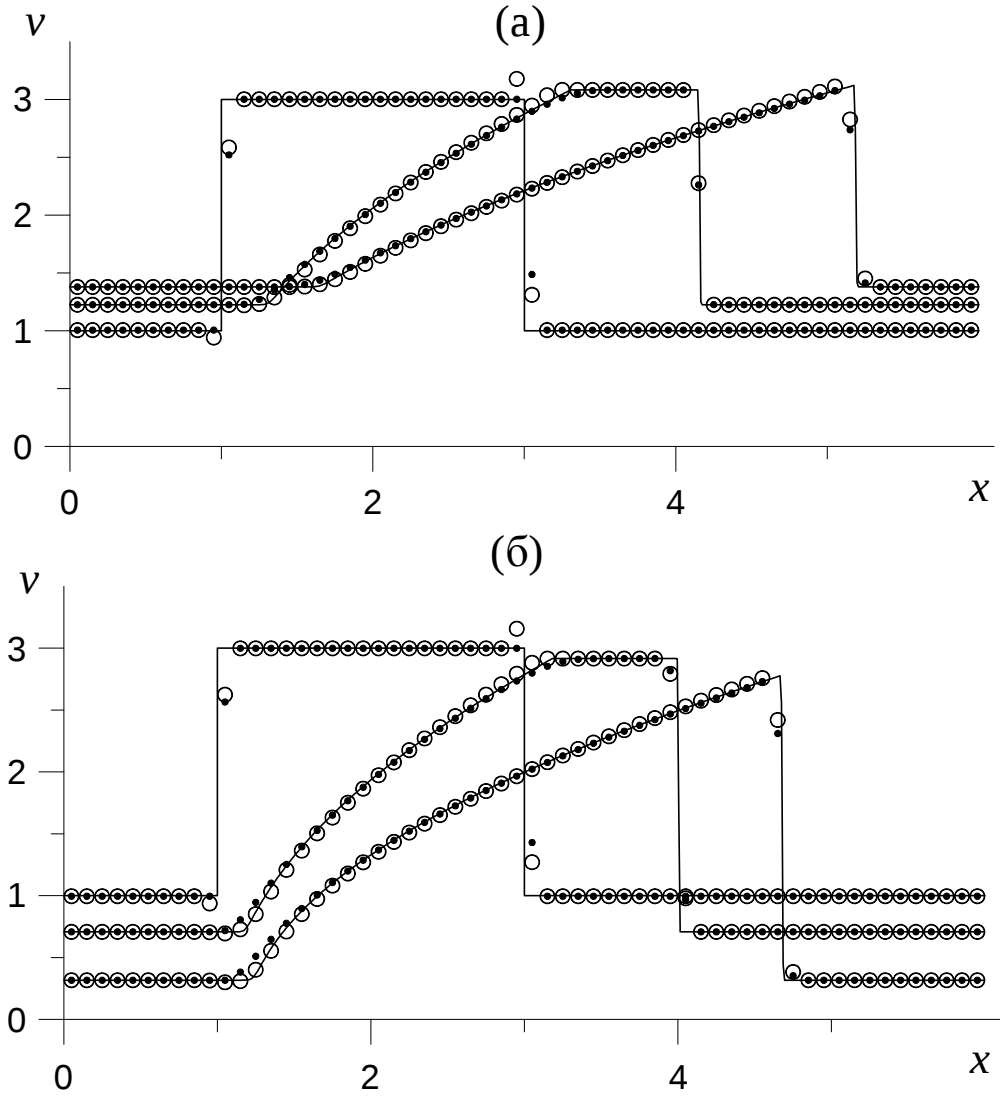


Рисунок 5.1 — Сравнение точного и численного решений задачи Коши (5.1), (5.18), (5.21) с начальными данными (5.20) при параметрах $\beta = 1$ (а) и $\beta = -1$ (б) на моменты времени $t = \tau_0$, $t = 2.5$ и $t = 4.5$. Сплошная линия — точное решение; кружки — расчёт по стандартной схеме CABARET 2; точки — по модифицированной схеме.

На Рисунке 5.1 показаны расчёты, в которых сеточные начальные данные завались по формуле (5.20). Из этого рисунка видно, что в отличие от модифицированной схемы CABARET, которая на первом шаге метода расщепления является монотонной, разностное решение, получаемое по стандартной схеме, которая является немонотонной, имеет на первых временных шагах паразитические осцилляции, достаточно быстро затухающие с течением времени. Однако, если такие

расчёты провести при сеточных начальных данных (5.19), то указанные осцилляции в ней будут отсутствовать (Рисунок 5.2). При этом численные значения, получаемые по стандартной и модифицированной схемам, получаются достаточно близкими друг к другу.

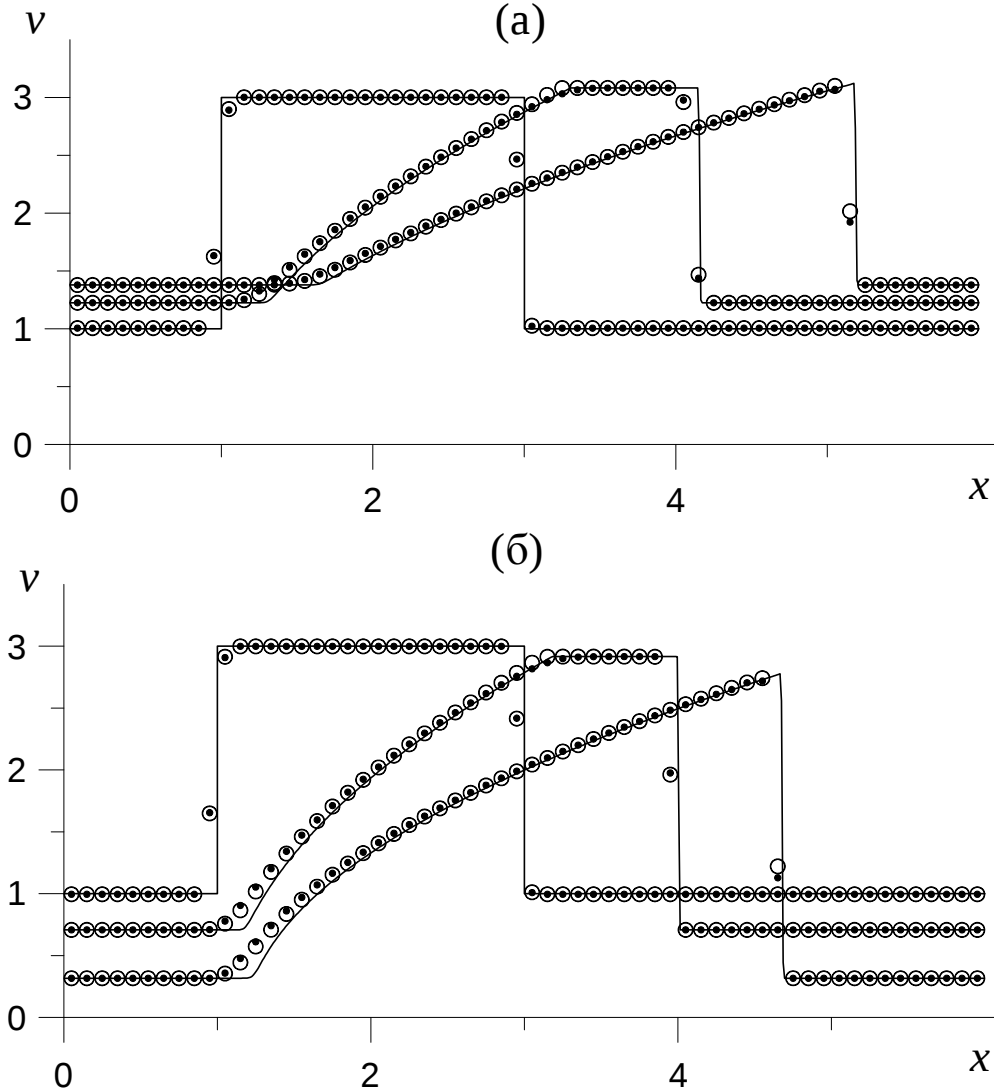


Рисунок 5.2 — Сравнение точного и численного решений задачи Коши (5.1), (5.18), (5.21) с сеточными начальными данными (5.19) при параметрах $\beta = 1$ (а) и $\beta = -1$ (б) на моменты времени $t = \tau_0$, $t = 2.5$ и $t = 4.5$. Сплошная линия — точное решение; кружки — расчёт по стандартной схеме CABARET 2; точки — по модифицированной схеме.

На Рисунке 5.3 на момент времени $t = 0.4$ приведены результаты расчёта по стандартной (Рисунок 5.3(а)) и модифицированной (Рисунок 5.3(б)) схемам

CABARET 2 задачи Коши (5.1), (5.18) с периодическими начальными данными

$$v_0(x) = \begin{cases} \sqrt{x(2-x)} + 1, & 0 \leq x \leq 2, \\ 1, & 2 \leq x \leq X, \end{cases} \quad v_0(x) = v_0(x+X) \quad \forall x, \quad (5.22)$$

где $X = 2.4$, моделирующими бесконечную последовательность стекающих капель жидкости. Разностная сетка (5.2)–(5.3) задавалась на отрезке $[0, X]$ оси x , где $X = 7.2$, что соответствует $M = X/h = 72$ пространственным ячейкам сетки. На Рисунке 5.3 штриховой линией изображена функция начальных данных (5.22), а сплошной линией — точное решение, которое моделируется численным расчётом по модифицированной схеме CABARET 2 на мелкой сетке с пространственным шагом $h = 0.01$.

Расчёты, приведённые на (5.3), проводились при сеточных начальных данных (5.19). Несмотря на это, из Рисунка 5.3 видно, что стандартная схема, в отличие от модифицированной, допускает небольшие отклонения от точного решения в области волны повышения уровня жидкости, приводящие к тому, что в разностном решении не сохраняется выпуклость вверх профиля волны повышения. При этом данная ситуация не меняется при измельчении сетки (в том числе при расчётах с числами Куранта $r < 0.5$), а при использовании сеточных начальных данных, задаваемых по формуле (5.20), такое искажение профиля волны повышения становится более заметным. Объяснение этого эффекта следует из Рисунка 5.4, на котором показаны точные (сплошная линия) и численные значения пространственной производной $v_x(x, t)$ при $\beta = 1$ (Рисунок 5.4(а)) и $\beta = -1$ (Рисунок 5.4(б)). Численные значения, изображённые кружками для стандартной схемы и точками для модифицированной схемы, определялись по формуле $(\Delta U)_j^n = (U_{j+1/2}^n - U_{j-1/2}^n)$. Для наглядности на Рисунке 5.4 приведены значения $\bar{v}_x = F(v_x, w, W)$ производной v_x , ограниченной сверху и снизу, и значения $\Delta \bar{U} = F_2(\Delta U, w)$ численных

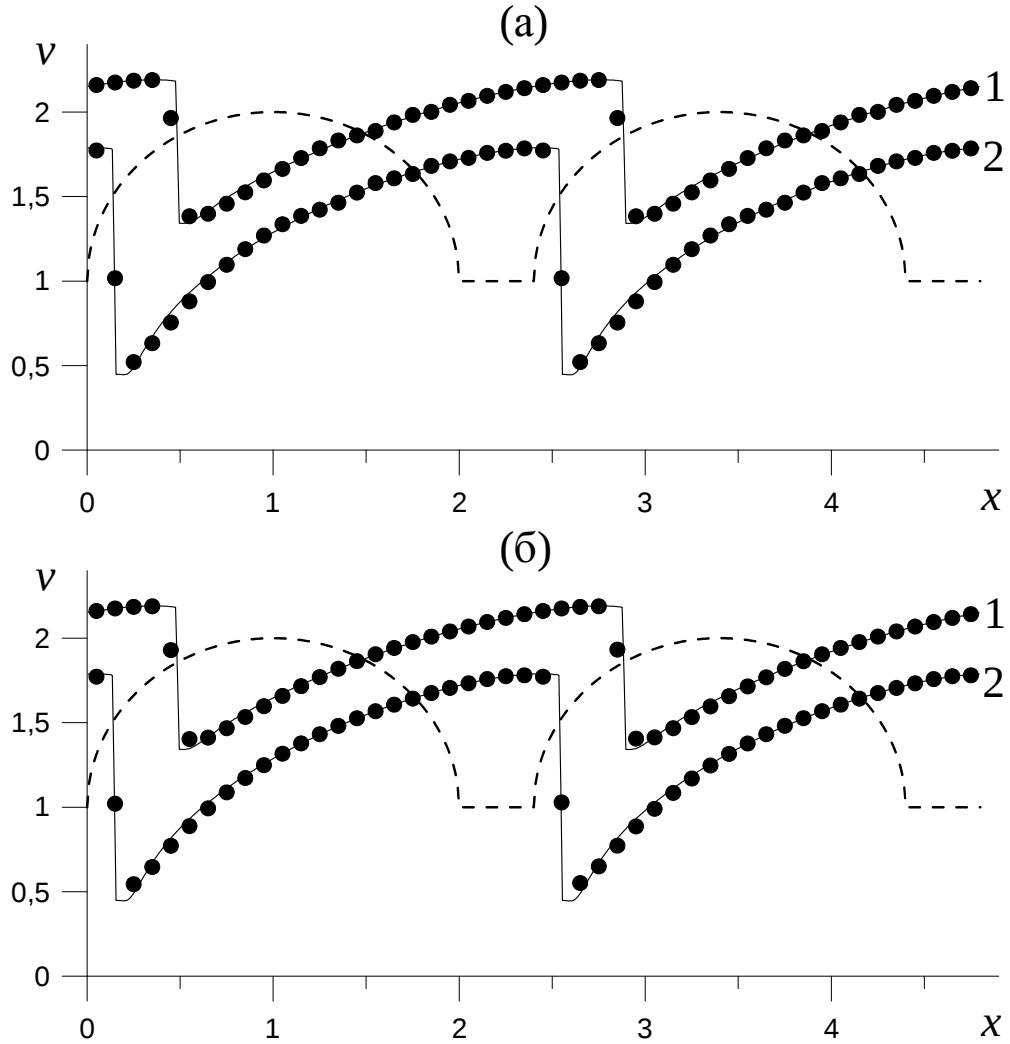


Рисунок 5.3 — Расчёт по стандартной (а) и модифицированной (б) схемам SABARET 2 задачи Коши (5.1), (5.18), (5.22) на момент времени $t = 0.4$ с пространственным шагом $h = 0.1$ и параметром $\beta = 1$ (случай 1) и $\beta = -1$ (случай 2). Сплошная линия — точное решение; пунктирная линия — начальные данные; точки — численный расчёт.

производных ΔU , ограниченных снизу, где $W = 1.5$ и $w = -0.2$. Как видно на Рисунке 5.4, разностные производные, получаемые по стандартной схеме, имеют осцилляции на волне повышения уровня, которые отсутствуют в модифицированной схеме.

Численные расчёты показали, что если в стандартную схему SABARET 2 на последнем этапе добавить коррекцию потоков (5.16), (5.17), то при расчёте задачи Коши (5.1), (5.18), (5.22) с сеточными начальными данными (5.19) осцилляции раз-

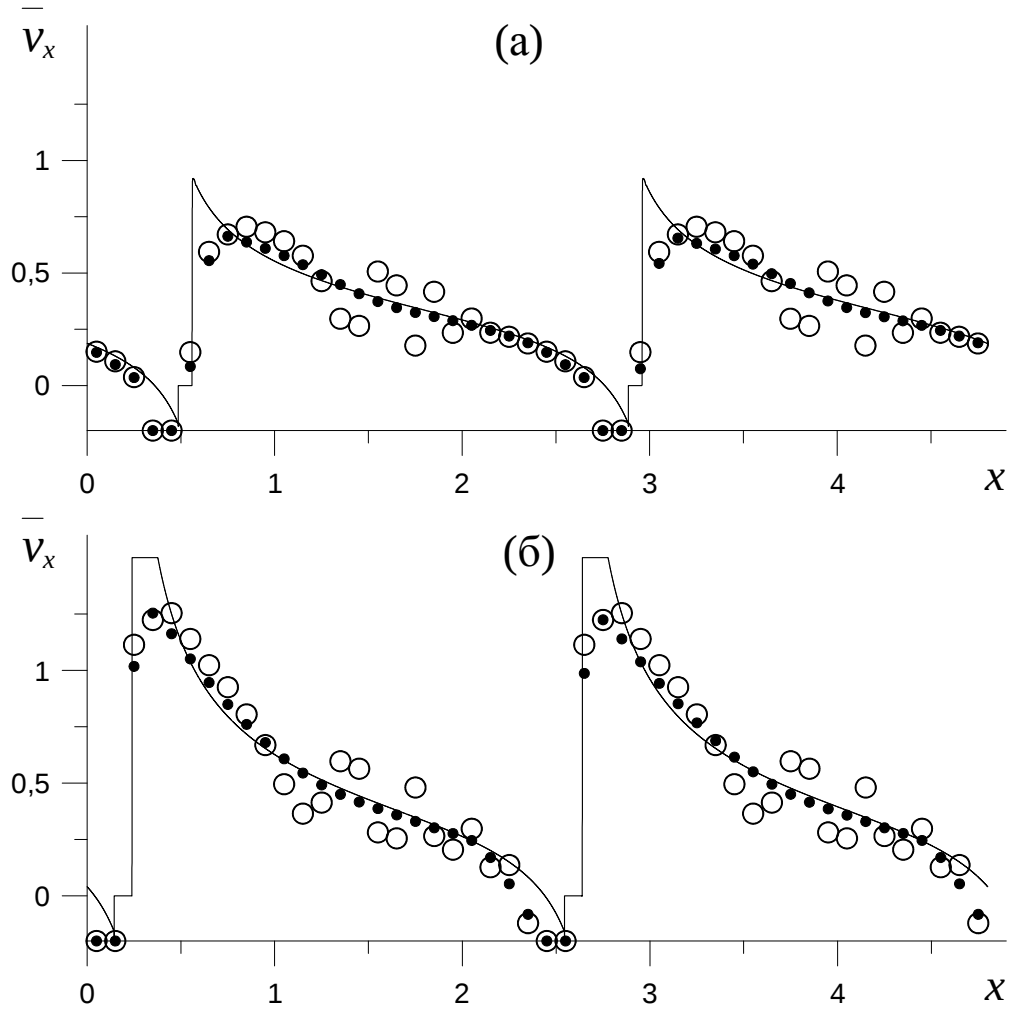


Рисунок 5.4 — Сравнение точной и численной пространственной производных решения задачи Коши (5.1), (5.18), (5.22) при параметрах $\beta = 1$ (а) и $\beta = -1$ (б) в момент времени $t = 0.4$. Сплошная линия — пространственная производная точного решения, кружки — расчёт по стандартной схеме CABARET 2, точки — по модифицированной схеме CABARET 2.

ностных производных в её численном решении полностью исчезают и это решение становится очень близким к разностному решению, получаемому по модифицированной схеме CABARET 2. Положительный эффект введения двойной коррекции для увеличения точности расчётов стандартной схемы CABARET 2 отмечался в работе [58], где был предложен другой, более сложный способ повторной коррекции переменных, отличный от предложенного в данной главе.

Заключение

Основные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

1. Показано, что стандартная схема CABARET 2.5 снижает порядок сходимости в окрестностях локальных экстремумов, расположенных в гладких частях рассчитываемых обобщённых решений. Предложена модификация схемы CABARET 2.5, которая обеспечивает её сильную монотонность при числах Куранта $r \in (0, 0.5]$ и одновременно сохраняет повышенную точность схемы в окрестностях локальных экстремумов точного решения.
2. Предложена модификация стандартной схемы CABARET 2, обеспечивающая её монотонность при аппроксимации скалярного закона сохранения с выпуклым потоком как в областях, в которых скорость распространения характеристик имеет постоянный знак, так и в случае, когда скорость распространения характеристик аппроксимируемого дивергентного уравнения меняет знак.
3. Показано, что стандартная схема CABARET 2, аппроксимирующая скалярный закон сохранения при числах Куранта $r > 0.5$, не обеспечивает полного распада неустойчивого сильного разрыва начальных данных. Для этой схемы получен разностный аналог энтропийного неравенства и предложен метод, обеспечивающий в разностном решении, получаемом по модифицированной схеме CABARET 2, полный распад неустойчивых сильных разрывов для любых чисел Куранта $r \in (0, 1]$, при которых данная схема является устойчивой.
4. Для схемы CABARET 2, аппроксимирующей неоднородный скалярный за-

кон сохранения с выпуклой и монотонно возрастающей функцией потока, предложен метод расщепления по физическим процессам, обеспечивающий монотонность этой схемы на первом шаге расщепления, когда решается однородное уравнение. Показаны существенные преимущества модифицированной схемы по сравнению со стандартной схемой CABARET 2 при расчёте разрывных решений с ударными волнами.

5. При помощи модифицированной схемы CABARET 2 проведено численное моделирование процесса распространения волн на поверхности стекающей плёнки конденсата.

Модификации схемы CABARET 2, полученные в данной работе, обобщены на случай аппроксимации гиперболической системы законов сохранения [41] и использованы при построении комбинированных разностных схем сквозного счёта [59, 60], которые с повышенной точностью локализуют фронты ударных волн и одновременно сохраняют повышенную точность во всех областях гладкости рассчитываемых обобщённых решений.

Литература

- [1] Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М.: Мир, 1990. — 2т.
- [2] Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1973. — 631 с.
- [3] Воеводин А.Ф., Шугрин С.М. Методы решения одномерных эволюционных систем. Новосибирск: Наука, 1993. — 368 с.
- [4] Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. Введение в теорию. М.: Наука, 1977. — 440 с.
- [5] Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я, Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. — 400 с.
- [6] Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов Ф. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М: Физматлит, 2001. — 608 с.
- [7] Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989. — 608 с.
- [8] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. — 616 с.
- [9] Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1980. — 352 с.

- [10] Шокин Ю.И. Метод дифференциального приближения. Новосибирск: Наука, 1979. — 224 с.
- [11] Шокин Ю.И., Яненко Н.Н. Метод дифференциального приближения. Новосибирск: Наука, 1985. — 365 с.
- [12] Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. — 687 с.
- [13] Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сборник. — 1959. — Т. 47. — № 3. — С. 271–306.
- [14] Boris J.P., Book D. L. Flux-corrected transport. I. SHASTA, a fluid transport algorithm that works // J. Comput. Phys. — 1973. — V. 11. — P. 38–69.
- [15] Van Leer B. Toward the ultimate conservative difference scheme. V. A second order sequel to Godunov's method // J. Comput. Phys. — 1979. — V. 32. — No. 1. — P. 101–136.
- [16] Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comp. Phys. — 1983. — V. 49. — P. 357–393.
- [17] Harten A., Engquist B., Osher S., Chakravarthy S. Uniformly high order essentially non-oscillatory schemes, III // J. Comput. Phys. — 1987. — V. 71. — P. 231–303.
- [18] Liu X.-D., Osher S., Chan T. Weighted essentially nonoscillatory schemes // J. Comput. Phys. — 1994. — V. 115. — P. 217–237.
- [19] Karabasov S.A., Goloviznin V.M. Compact accurately boundary-adjusting high-resolution technique for fluid dynamics // J. Comput. Phys. — 2009. — V. 228. — P. 7426–7451.

- [20] Гольдин В.Я., Калиткин Н.Н., Шитова Т.В. Нелинейные разностные схемы для гиперболических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1965. — Т. 5. — № 5. — С. 938–944.
- [21] Колган В.П. Применение операторов сглаживания в разностных схемах высокого порядка точности // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1978. — Т. 18. — № 5. — С. 1340–1345.
- [22] Nessyanu H., Tadmor E. Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws / J. Comput. Phys. — 1990. — V. 87. — No. 2. — P. 408–463.
- [23] Liu X., Tadmor E. Third order nonoscillatory central scheme for hyperbolic conservation laws // Numer. Math. — 1998. — V. 79. — No. 3. — P. 397–425.
- [24] Kurganov A., Tadmor E. New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-diffusion equations // J. Comput. Phys. — 2000. — V. 160. — No. 1. — P. 241–282.
- [25] Harten A. On a class high resolution total variation stable finite difference schemes // SIAM J. Numer. Analis. — 1984. — V. 21. — No. 1. — P. 1–23.
- [26] Lax P., Wendroff B. Systems of conservation laws // Comm. Pure and Appl. Math. — 1960. — V. 13. — P. 217–237.
- [27] Harten A., Hyman J.M., Lax P.D. On finite-difference approximations and entropy conditions for shocks // Comm. Pure and Appl. Math. — 1976. — V. 29. — P. 297–322.
- [28] Friedrichs K.O., Lax P.D. Systems of conservation equation with convex extension // Proc. Nat. Acad. Sci: USA. — 1971. — V. 68. — No. 8. — P. 1686–1688.

- [29] Jiang G., Shu C. Efficient implementation of weighted ENO schemes // J. Comp. Phys. — 1996. — V. 126. — P. 202–228.
- [30] Iserles A. Generalized leapfrog methods // IMA Journal of Numerical Analysis. — 1986. — V. 6. — No. 3. — P. 381–392.
- [31] Головизнин В.М., Самарский А.А. Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Матем. моделирование. — 1998. — Т. 10. — № 1. — С. 86–100.
- [32] Головизнин В.М., Самарский А.А. Некоторые свойства разностной схемы “Кабаре” // Матем. моделирование. — 1998. — Т. 10. — № 1. — С. 101–116.
- [33] Головизнин В.М. Балансно-характеристический метод численного решения уравнений газовой динамики // Докл. АН. — 2005. — Т. 403. — № 4. — С. 459–464.
- [34] Woodward P., Colella P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // J. Comp. Phys. — 1984. V. 54. — No. 1. — P. 115–173.
- [35] Остапенко В.В. О монотонности балансно-характеристической схемы // Матем. моделирование. — 2009. — Т. 21. — № 7. — С. 29–42.
- [36] Остапенко В.В. О сильной монотонности схемы кабаре // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 2012. — Т. 52. — № 3. — С. 447–460.
- [37] Karabasov S.A., Goloviznin V.M. New efficient high-resolution method for nonlinear problems in aeroacoustics // AIAA J. — 2007. — V. 45. — No. 12. — P. 2861–2871.
- [38] Karabasov S.A., Berloff P.S., Goloviznin V.M. Cabaret in the ocean gyres // Ocean Modelling. — 2009. — V. 30. — No. 2. — P. 155–168.

- [39] Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткин И.А. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. М.: Издательство Московского университета, 2013. — 467 с.
- [40] Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О монотонности двухслойной по времени схемы КАБАРЕ // Матем. моделирование. — 2012. — Т. 24. — № 9. — С. 97–112.
- [41] Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О монотонности схемы Кабаре, аппроксимирующей гиперболическое уравнение со знакопеременными характеристическим полем // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 2016. — Т. 56. — № 5. — С. 796–815.
- [42] Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О монотонности схемы Кабаре в многомерном случае // Доклады АН. — 2015. — Т. 462. — № 4. — С. 385–390.
- [43] Harten A., Osher S. Uniformly high-order accurate nonoscillatory schemes // SIAM J. Numer. Anal. — 1983. — V. 49. — P. 279–309.
- [44] Карабасов С.А. О возможностях методов второго порядка аппроксимации на примере модельных задач газо- и гидродинамики // Матем. моделирование. — 2010. — Т. 22. — № 7. — С. 93–120.
- [45] Остапенко В.В. О построении разностных схем повышенной точности для сквозного расчета нестационарных ударных волн // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 2000. — Т. 40. — № 12. — С. 1857–1874.
- [46] Borges R., Carmona M., Costa B., Don W.S. An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws // J. Comp. Phys. — 2008. — V. 227. — P. 3191–3211.

- [47] Остапенко В.В. Об эквивалентных определениях понятия консервативности для конечно-разностных схем // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1989. — Т. 29. — № 8. — С. 1114–1128.
- [48] Lax P.D. Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves. Philadelphia: Soc. Ind. Appl. Math., 1973. — 48 p.
- [49] Остапенко В.В. Гиперболические системы законов сохранения и их приложение к теории мелкой воды. Новосибирск: НГУ, 2014. — 233 с.
- [50] Пинчуков В.П., Шу Ч.В. Численные методы высоких порядков для задач аэрогидродинамики. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. — 232 с.
- [51] Остапенко В.В. Симметричные компактные схемы с искусственными вязкостями повышенного порядка дивергентности // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 2002. — Т. 42. — № 7. — С. 1018–1037.
- [52] Fisher T.C., Carpenter M.H. High-order entropy stable finite difference schemes for nonlinear conservation laws: finite domains. Hampton, Virginia: Langley Research Center, 2013. — 57 p.
- [53] Марчук Г.И. Методы расщепления. М.: Наука, 1988. — 264 с.
- [54] Nakoryakov V.E., Ostapenko V.V., Bartashevich M.V. Heat and mass transfer in the liquid film on a vertical wall in roll-wave regime // Intern. J. Heat and Mass Transfer. — 2012. V. 55. — P. 6514–6518.
- [55] Накоряков В.Е., Остапенко В.В., Барташевич М.В. Исследование катящихся волн на поверхности стекающей пленки конденсата // Доклады АН. — 2014. — Т. 454. — № 5. — С. 540–544.

- [56] Nakoryakov V.E., Ostapenko V.V., Bartashevich M.V. Rolling waves on the surface of a thin layer of viscous liquid at phase transition // Intern. J. Heat and Mass Transfer. — 2015. — V. 89. — P. 846–855.
- [57] Зюзина Н.А., Остапенко В.В. Точные решения с центрированными волнами в модели пленочных течений, учитывающей тепломассоперенос на межфазной поверхности // Сиб. журн. чист. и прикл. матем. — 2018. — Т. 18. — № 1. — С. 64–72.
- [58] Головизнин В.М., Карабасов С.А., Кобринский И.М. Балансно-характеристические схемы с разделенными консервативными и потоковыми переменными // Матем. моделирование. — 2003. — Т. 15, № 9. — С. 29–48.
- [59] Зюзина Н.А., Ковыркина О.А., Остапенко В.В. Монотонная разностная схема, сохраняющая повышенную точность в областях влияния ударных волн // Доклады АН. — 2018. — Т. 482. — С. 639–643.
- [60] Ostapenko V.V., Khandeeva N.A. The accuracy of finite-difference schemes calculating the interaction of shock waves // Doklady Mathematics. — 2019. — V. 485. — No. 6. — P. 197–201.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в журналах

- [61] **Зюзина Н.А.**, Остапенко В.В. Модификация схемы Кабаре, обеспечивающая ее сильную монотонность и повышенную точность на локальных экстремумах // Доклады АН. — 2014. — Т. 457. — № 3. — С. 268–273.
- Zyuzina N.A.**, Ostapenko V.V. Modification of the CABARET scheme ensuring its strong monotonicity and high accuracy on local extrema // Doklady Mathematics. — 2014. — V. 90. — No. 1. — P. 453–457.
- [62] **Зюзина Н.А.**, Остапенко В.В. Модификация схемы Кабаре, обеспечивающая ее повышенную точность на локальных экстремумах // Матем. моделирование. — 2015. — Т. 27. — № 10. — С. 21–31.
- Zyuzina N.A.**, Ostapenko V.V. CABARET scheme's modification ensuring its high accuracy on local extrema // Math. Model. Comput. Simul. — 2016. — V. 8. — No. 3. — P. 231–237.
- [63] **Зюзина Н.А.**, Остапенко В.В. О монотонности схемы Кабаре, аппроксимирующей скалярный закон сохранения с выпуклым потоком // Доклады АН. — 2016. — Т. 466. — № 5. — С. 513–517.
- Zyuzina N.A.**, Ostapenko V.V. On the monotonicity of the CABARET scheme approximating a scalar conservation law with a convex flux // Doklady Mathematics. — 2016. — V. 93. — No. 1. — P. 69–73.
- [64] **Зюзина Н.А.**, Остапенко В.В. Монотонная аппроксимация схемой Кабаре скалярного закона сохранения в случае знакопеременного характеристического поля // Доклады АН. — 2016. — Т. 470. — № 4. — С. 375–379.
- Zyuzina N.A.**, Ostapenko V.V. Monotone approximation of a scalar conservation

law based on the CABARET scheme in the case of a sign-changing characteristic field // Doklady Mathematics. — 2016. — V. 94. — No. 2. — P. 538–542.

- [65] **Зюзина Н.А.**, Остапенко В.В. О распаде неустойчивых сильных разрывов при аппроксимации схемой Кабаре скалярного закона сохранения с выпуклым потоком // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2018. — Т. 58. — № 6. — С. 988–1012.

Zyuzina N.A., Ostapenko V.V. Decay of unstable strong discontinuities in the case of a convex-flux scalar conservation law approximated by the CABARET scheme // Comp. Math. And Math. Phys. — 2018. — V. 58. — No. 6. — P. 950–966.

- [66] **Зюзина Н.А.**, Остапенко В.В., Полунина Е.И. Метод расщепления при аппроксимации схемой CABARET неоднородного скалярного закона сохранения // Сиб. журн. вычисл. математики. — 2018. — Т. 21. — № 2. — С. 185–200.

Zyuzina N.A., Ostapenko V.V., Polunina E.I. A splitting method for a CABARET scheme approximating a nonuniform scalar conservation law // Numerical Analysis and Applications. — 2018. — V. 11. — No. 2. — P. 146–157.

- [67] **Зюзина Н.А.**, Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О монотонности схемы Кабаре, аппроксимирующей скалярный закон сохранения со знакопеременным характеристическим полем и выпуклой функцией потоков // Матем. моделирование. — 2018. Т. 30. — № 5. — С. 76–98.

Zyuzina N.A., Kovyorkina O.A., Ostapenko V.V. On the monotonicity of the CABARET scheme approximating a scalar conservation law with an alternating characteristic field and convex flux function // Math. Model. Comput. Simul. — 2019. — V. 30. — No. 5. — P. 76–98.

Тезисы и труды конференций

- [68] **Зюзина Н.А.** Модификация схемы КАБАРЕ, обеспечивающая сильную монотонность и повышенную точность на локальных экстремумах // Тезисы 52-й МНСК (Новосибирск, 11-18 апреля, 2014) — 2014. — С. 41.
- [69] **Зюзина Н.А.**, Остапенко В.В. Модификация схемы КАБАРЕ, обеспечивающая ее сильную монотонность и повышенную точность на локальных экстремумах // Сборник тезисов V всероссийской конференции “Вычислительный эксперимент в аэроакустике” (Светлогорск, 22–27 сентября, 2014) — 2014. — С. 115.
- [70] Остапенко В.В., Ковыркина О.А., **Зюзина Н.А.** О применении схемы КАБАРЕ для расчета решений гиперболических уравнений в случае знакопеременных характеристических полей // Сборник “Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики. Труды международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Г.И. Марчука”. — 2015. — С. 529–534.
- [71] **Зюзина Н.А.** Модификация схемы КАБАРЕ, обеспечивающая ее повышенную точность на локальных экстремумах в случае нелинейного уравнения переноса // Тезисы 53-й МНСК (Новосибирск, 11-17 апреля, 2015) — 2015. — С. 163.
- [72] Остапенко В.В., Ковыркина О.А., **Зюзина Н.А.** О применении схемы КАБАРЕ для расчета решений гиперболических уравнений в случае знакопеременных характеристических полей // Тезисы межд. конференции “Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики” (Новосибирск, 19–23 октября, 2015) — 2015. — С. 13.

- [73] Остапенко В.В., Ковыркина О.А., **Зюзина Н.А.** О монотонных модификациях схемы КАБАРЕ // Тезисы докладов всероссийской конференции, посвященной 70-летию со дня рождения чл.-корр. РАН Владимира Михайловича Тешукова “Нелинейные волны: теория и новые приложения” (Новосибирск, 29 февраля–2 марта, 2016) — 2016. — С. 79–80.
- [74] **Зюзина Н.А.**, Остапенко В.В. Разностный аналог энтропийного неравенства для схемы Кабаре // Сборник “Марчуковские научные чтения 2017. Труды международной научной конференции”. — 2017. — С. 329–335.
- [75] **Зюзина Н.А.**, Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О монотонности схемы КАБАРЕ при расчете гиперболических уравнений со звуковыми линиями // Сборник тезисов VI всероссийской конференции “Вычислительный эксперимент в аэроакустике” (Светлогорск, 19–24 сентября, 2016) — 2016. — С. 161–164.