

На правах рукописи



Хандеева Надежда Александровна

ИССЛЕДОВАНИЕ МОНОТОННОСТИ
И ТОЧНОСТИ
СХЕМЫ CABARET

01.01.07 — Вычислительная математика

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2021

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук.

Научный руководитель:

Остапенко Владимир Викторович, доктор физико-математических наук, с.н.с.

Официальные оппоненты:

Кобельков Георгий Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова».

Актершев Сергей Петрович, доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе Сибирского отделения Российской академии наук.

Ведущая организация: Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук».

Защита состоится 7 апреля 2021 г. в 16 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 003.061.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук» по адресу: 630090, г. Новосибирск, проспект Академика Лаврентьева, 6, тел: +7(383)330-71-59.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на официальном сайте ИВМиМГ СО РАН: www.icmmg.nsc.ru.

Автореферат разослан 5 февраля 2021 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
Д 003.061.01, д.ф.-м.н.



Рогазинский Сергей Валентинович

Общая характеристика работы

Актуальность работы¹.

В настоящее время для исследования сложных процессов, допускающих математическое моделирование, широко используется вычислительный эксперимент. Одним из главных этапов вычислительного эксперимента является построение приближённого (численного) метода решения задачи, которое в случае использования конечно-разностных методов сводится к выбору и анализу разностной схемы, аппроксимирующей соответствующую систему дифференциальных уравнений. Разностные схемы широко применяются для сквозного расчёта разрывных решений гиперболических систем законов сохранения, которыми моделируются физические процессы в различных областях науки, таких как аэродинамика, атомная энергетика, гидродинамика открытых русел, плёночные течения, теория упругости и пластичности.

В классической работе², широко известной в связи со схемой распада разрыва, было введено понятие монотонности разностной схемы и показано, что среди линейных двухслойных по времени разностных схем, аппроксимирующих линейное уравнение переноса с постоянными коэффициентами, нет монотонных схем повышенного порядка аппроксимации. Дальнейшее развитие теории разностных схем сквозного счёта для гиперболических систем законов сохранения в значительной степени было направлено на преодоление этого “запрета Годунова”. В результате были разработаны различные классы разностных схем, в которых повышенный порядок аппроксимации на гладких решениях и монотонность (при аппроксимации линейной системы и скалярного закона сохранения) достигались за счет нелинейной коррекции потоков, приводящей к нелинейности этих схем даже при аппроксимации линейного уравнения переноса. Перечислим основные классы таких схем, которые будем сокращенно называть NFC (Nonlinear Flux Correction) схемами: FCT-схемы, MUSCL-схемы, TVD-схемы, ENO-схемы, WENO-схемы, CABARET-схемы. Основное достоинство этих схем заключается в том, что они с высокой точностью локализуют ударные волны при отсутствии существенных нефизических осцилляций на их фронтах.

CABARET-схемы представляют собой достаточно новый класс NFC-схем, развитию теории которого посвящена данная работа.

Цель работы — теоретическое и экспериментальное исследование схемы CABARET, построение различных модификаций этой схемы, улучшающих её свойства.

¹Работа поддержана грантами РФФИ 12-01-00145, 16-01-00333, РНФ 16-11-10033.

²Годунов С.К. Разностный метод численного расчёта разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сборник. — 1959. — Т. 47, № 3. — С. 271–306.

Основные результаты.

1. Показано, что стандартная схема CABARET 2.5 снижает порядок сходимости в окрестностях локальных экстремумов, расположенных в гладких частях рассчитываемых обобщённых решений. Предложена модификация схемы CABARET 2.5, которая сохраняет повышенную точность схемы в окрестностях локальных экстремумов точного решения при аппроксимации скалярного закона сохранения.

2. Предложена модификация стандартной схемы CABARET 2, обеспечивающая её монотонность при аппроксимации скалярного закона сохранения с выпуклым потоком как в областях, в которых скорость распространения характеристик имеет постоянный знак, так и в случае, когда скорость распространения характеристик аппроксимируемого дивергентного уравнения меняет знак.

3. Показано, что стандартная схема CABARET 2, аппроксимирующая скалярный закон сохранения, при числах Куранта $r > 0.5$ не обеспечивает полного распада неустойчивого сильного разрыва начальных данных. Для этой схемы получен разностный аналог энтропийного неравенства и предложен метод, обеспечивающий в разностном решении, получаемом по модифицированной схеме CABARET 2, полный распад неустойчивых сильных разрывов для любых чисел Куранта $r \in (0, 1]$, при которых данная схема является устойчивой.

4. Для схемы CABARET 2, аппроксимирующей неоднородный скалярный закон сохранения с выпуклой и монотонно возрастающей функцией потока, предложен метод расщепления по физическим процессам, обеспечивающий монотонность этой схемы на первом шаге расщепления, когда решается однородное уравнение. Показаны существенные преимущества модифицированной схемы по сравнению со стандартной схемой CABARET 2 при расчёте разрывных решений с ударными волнами.

5. При помощи модифицированной схемы CABARET 2 проведено численное моделирование процесса распространения волн на поверхности стекающей плёнки конденсата.

Научная новизна. Впервые предложены модификации схемы CABARET, обеспечивающие: повышенную точность на локальных экстремумах рассчитываемых решений; монотонность по Годунову при расчёте скалярного закона сохранения с выпуклым потоком; выполнение разностного аналога энтропийного неравенства, что гарантирует отбор устойчивых ударных волн.

Теоретическая значимость и практическая ценность. Полученные результаты вносят существенный вклад в развитие теории схемы CABARET и могут быть использованы для создания новых перспективных модифика-

ций этой схемы, предназначенных для численного моделирования сложных гидро- и газодинамических течений.

Методология и методы исследования. В работе используются методы теории дифференциальных уравнений, функционального анализа, теории разностных схем сквозного счёта.

На защиту выносятся ряд модификаций схемы CABARET, улучшающих её свойства, и применение этой схемы для численного моделирования плёночных течений.

Личный вклад автора. Задачи поставлены научным руководителем. Подходы к построению модификаций схемы CABARET (включая теоремы о её монотонности) и методы их реализации найдены совместно. Численные расчёты проведены соискателем лично. Конфликт интересов с соавторами отсутствует.

Степень достоверности результатов обеспечивается математическим доказательством основных теорем, обоснованием алгоритмов, а также сериями численных расчётов и сравнительным анализом алгоритмов.

Апробация работы. Результаты работы обсуждались на следующих семинарах: семинар ИГиЛ СО РАН; объединённый семинар ИВМиМГ СО РАН и кафедры вычислительной математики ММФ НГУ; объединённый семинар ИВТ СО РАН, кафедры математического моделирования ММФ НГУ и кафедры вычислительных технологий НГТУ; семинар дифференциальных уравнений ММФ НГУ; семинар ИТПМ СО РАН, и докладывались на следующих всероссийских и международных конференциях: “Вычислительный эксперимент в аэроакустике” (Светлогорск, 2014, 2016); “Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики” (Новосибирск, 2015); “Нелинейные волны: теория и новые приложения” (Новосибирск, 2016); “Вычислительная и прикладная математика” (Новосибирск, 2017).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 15 работ, из них 8 — тезисы и труды конференций, 7 работ — в изданиях, входящих в список ВАК, в том числе 5 — в журналах, индексируемых системой цитирования Web of Science, 7 — Scopus, 7 — RSCI (ядро РИНЦ).

Структура и объём диссертации. Работа состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Объём диссертации — 117 страниц. Список литературы содержит 75 источников.

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность работы, приведено краткое изложение содержания работы, сформулированы основные результаты и раскрыта их новизна.

В **первой главе** приводится описание стандартных схем CABARET 2.5 (2.5-слойной по времени)³ и CABARET 2 (2-слойной по времени)⁴, аппроксимирующих задачу Коши для скалярного закона сохранения

$$v_t + f(v)_x = 0, \quad v(x, 0) = v_0(x) \quad (1)$$

с выпуклой функцией потоков $f(v)$. Поскольку точные решения задачи Коши (1) обладают свойством сохранения монотонности начальных данных $v_0(x)$, то, следуя С.К. Годунову, вводится понятие монотонности схемы CABARET, означающее, что схема каждые монотонные начальные данные переносит с одного временного слоя на другой с сохранением свойства монотонности.

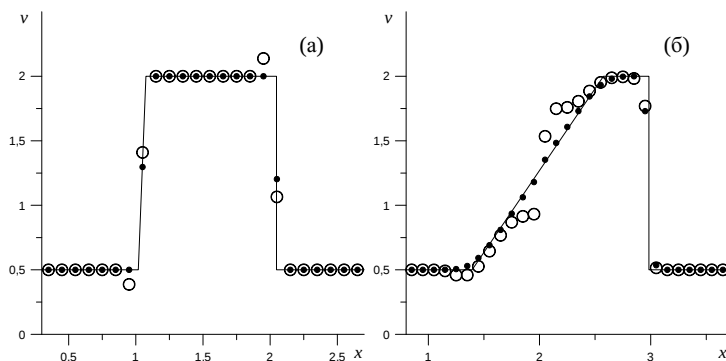


Рис. 1: Сравнение точного и численных решений задачи Коши (1)–(3) на временных слоях $n = 1$ (а) и $n = 21$ (б) при числе Куранта $r = 0.75$. Сплошная линия — точное решение; кружки — расчёт по схеме CABARET 2; точки — расчёт по схеме CABARET-M 2.

В **пункте 1.2** на примере численного решения задачи Коши (1) с функ-

³Головизнин В.М., Самарский А.А. Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Матем. моделирование. — 1998. Т. 10, № 1. — С. 86–100.

⁴Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткин И.А. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. М.: Издательство Московского университета, 2013. — 467 с.

цией потока

$$f(v) = v^2/2 \quad (2)$$

и с кусочно-постоянными начальными данными

$$v_0(x) = \begin{cases} 0.5, & x < 1, \\ 2, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0.5, & x > 2, \end{cases} \quad (3)$$

показано, что схема CABARET 2 не является монотонной (рис. 1а) и при числах Куранта $r > 0.5$ не обеспечивает полного распада неустойчивого сильного разрыва начальных данных (рис. 1б).

Во **второй главе** показано, что, подобно монотонным схемам повышенной точности типа TVD, схема CABARET 2.5 снижает порядок сходимости в областях локальных экстремумов рассчитываемых обобщённых решений.

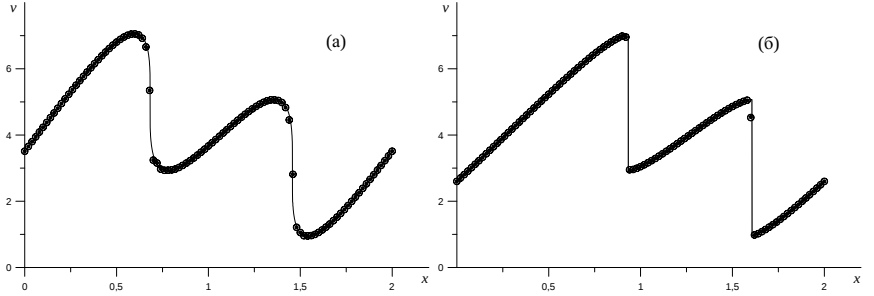


Рис. 2: Сравнение точного и численных решений задачи Коши (1), (2), (4), на моменты времени $T = 0.08$ (а) и $T = 0.13$ (б).

В **пунктах 2.1 и 2.2** для схемы CABARET 2.5, аппроксимирующей задачу Коши для скалярного закона сохранения (1), предложена модифицированная коррекция потоков, сохраняющая повышенную точность схемы в окрестностях локальных экстремумов, расположенных в областях гладкости точного решения (в пункте 2.1 рассмотрен случай, когда функция $f(v)$ является линейной). Для полученной таким образом модифицированной схемы будем использовать сокращённое обозначение CABARET-M 2.5. На рис. 2 и 3 приведены результаты расчётов по схемам CABARET 2.5 и CABARET-M 2.5 задачи Коши (1), (2) с периодической функцией начальных данных

$$v_0(x) = \sin(\pi x) + \cos(\pi x) + 4(\cos(\pi x))^2 + 2. \quad (4)$$

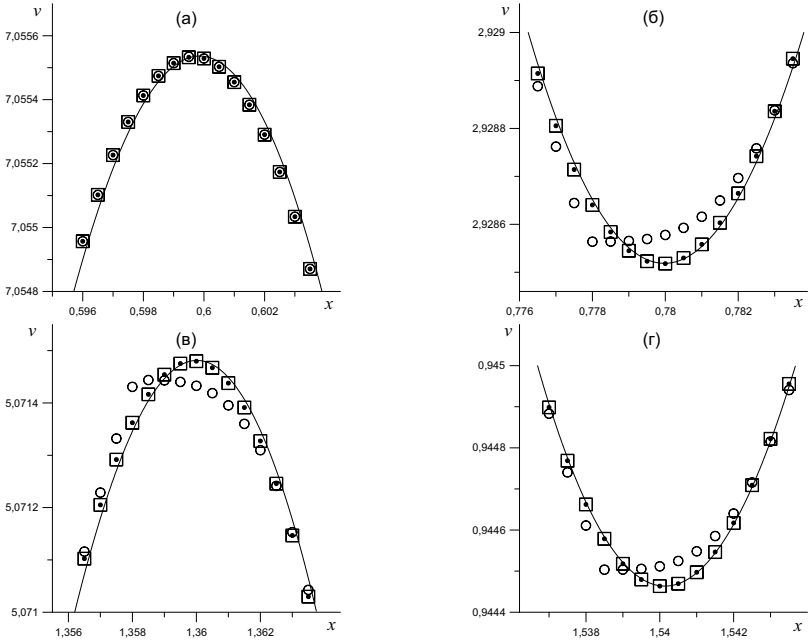


Рис. 3: Сравнение точного и численных решений задачи Коши (1), (2), (4) в момент времени $T = 0.08$; первый максимум — (а), первый минимум — (б), второй максимум — (в), второй минимум — (г).

Расчёты проводились с числом Куранта $r = 0.25$, где h и τ — постоянные пространственный и временной шаги сетки. На рис. 2 приведены расчёты при $h = 0.02$, а на рис. 3 — при $h = 0.0005$. Результаты расчётов на более мелкой сетке (рис. 3) показаны в окрестностях локальных экстремумов точного решения в момент времени $T = 0.08$, когда точное решение является гладким. На рис. 2 и 3 сплошной линией показано точное решение; кружками — расчёт по схеме CABARET 2.5; точками — расчёт по схеме CABARET-M 2.5. На рис. 3 квадратиками показан расчёт по схеме CABARET 2.5 без коррекции потоков.

Из этих рисунков следует, что схема CABARET 2.5, локализуя с высокой точностью фронты ударных волн (рис. 2б), искажает гладкую часть точного решения (рис. 2б) в окрестностях его локальных экстремумов (рис. 3б, в, г). В то же время, схема CABARET-M 2.5 одновременно монотонно локализует ударные волны и сохраняет повышенную точность в окрестностях локальных экстремумов.

В третьей главе изучается схема CABARET 2, аппроксимирующая скалярный закон сохранения (1) со строго выпуклой функцией потока $f(v)$. Получены достаточные условия монотонности этой схемы, в том числе, в случае, когда скорость распространения характеристик аппроксимируемого дифференциального уравнения меняет знак. Монотонную модификацию схемы CABARET 2 будем сокращённо обозначать CABARET-M 2.

На рис. 1 точками показаны результаты расчёта задачи Коши (1)–(3) по схеме CABARET-M 2. Из рис. 1 видно, что эта схема лишена недостатков, характерных для стандартной схемы CABARET 2: в модифицированной схеме на первых временных шагах отсутствуют нефизические осцилляции (рис. 1а) и эта схема с достаточной точностью воспроизводит центрированную волну разрежения (рис. 1б), возникающую при распаде неустойчивого сильного разрыва функции начальных данных.

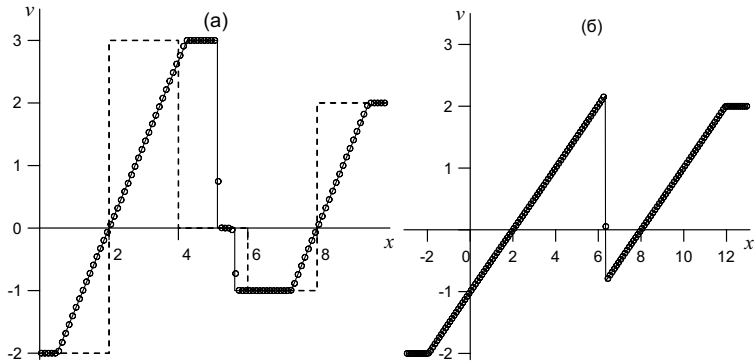


Рис. 4: Сравнение точного и численного решений задачи Коши (1), (2) на моменты времени $t = 0.75$ (а) и $t = 2$ (б) при расчёте по схеме CABARET-M 2 с числом Куранта $r = 0.5$. Начальные данные показаны пунктирной линией на рис. (а).

На рис. 4 приведены результаты расчётов по схеме CABARET-M 2 задачи Коши (1), (2) с разрывными начальными данными, показанными на рис. 4а пунктирной линией. Характерной особенностью данной задачи является то, что на неустойчивых сильных разрывах функции начальных данных, расположенных в точках $x = 2$ и $x = 8$, характеристики аппроксимируемого уравнения меняют знак. Это создаёт определённые трудности для реализации алгоритма схемы CABARET 2 в окрестностях этих точек. Из рис. 4 следует, что схема CABARET-M 2 хорошо воспроизводит профили центрированных волн разрежения, возникающих при распаде этих неустойчивых сильных разрывов, и сохраняет повышенную точность при локали-

зации ударных волн и слабых разрывов точного решения.

В **четвёртой главе** для схем CABARET 2 и CABARET-M 2 получен разностный аналог энтропийного неравенства и предложен метод, обеспечивающий в разностном решении, получаемом по схеме CABARET-M 2, полный распад неустойчивых сильных разрывов для любых чисел Куранта $r \in (0, 1)$, при которых данная схема является устойчивой. Для иллюстрации этого результата рассмотрим задачу Коши (1), (2) с кусочно-постоянной начальной функцией

$$v_0(x) = \begin{cases} 0.5, & x < 1, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases} \quad (5)$$

имеющей в точке $x = 1$ неустойчивый сильный разрыв. При $t > 0$ этот разрыв распадается и преобразуется в центрированную волну разрежения

$$v(x, t) = \begin{cases} 0.5, & x \leq 1 + 0.5t, \\ (x - 1)/t, & 1 + 0.5t \leq x \leq 1 + t, \\ 1, & x \geq 1 + t. \end{cases} \quad (6)$$

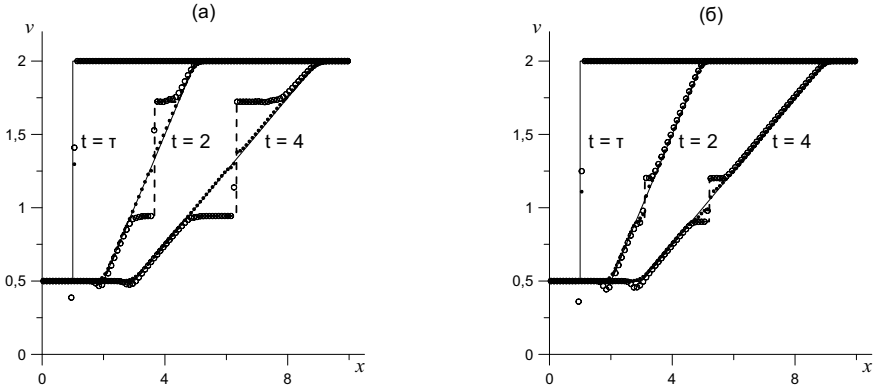


Рис. 5: Сравнение точного и численного решений задачи (1), (2), (5) на три последовательных момента времени $t = \tau$, $t = 2$ и $t = 4$ при числах Куранта $r = 0.75$ (а) и $r = 0.95$ (б). Сплошная линия — точное решение; кружки — расчёт по схеме CABARET 2; точки — расчёт по схеме CABARET-M 2; пунктирная линия — предельное разностное решение, получаемое по схеме CABARET 2.

Тестовые расчёты показали, что при числах Куранта $r \in (0, 0.5]$ как схема CABARET 2, так и схема CABARET-M 2 с достаточно высокой точностью передают профиль центрированной волны разрежения (6). При этом в

схеме CABARET 2 на первых временных шагах за фронтом неустойчивого разрыва (5) возникает нефизическая осцилляция, которая с течением времени быстро сглаживается. В то же время, при числах Куранта $r \in (0.5, 1)$ данная схема не обеспечивает полного распада неустойчивого сильного разрыва начальных данных. Численные расчёты, проведенные на последовательности сжимающихся сеток, показали, что при таких значениях r разностное решение, получаемое по схеме CABARET 2, при $h \rightarrow 0$ сходится к неустойчивому разрывному решению, показанному на рис. 5 пунктирной линией.

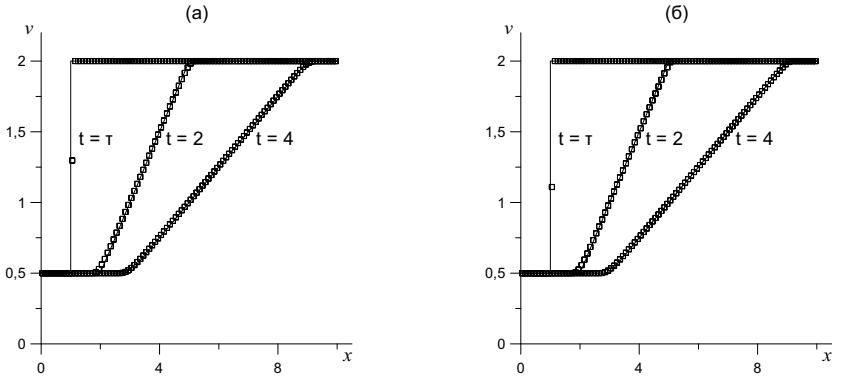


Рис. 6: Сравнение точного и численного решений задачи (1), (2), (5) на три последовательных момента времени $t = \tau$, $t = 2$ и $t = 4$ при числах Куранта $r = 0.75$ (а) и $r = 0.95$ (б). Сплошная линия — точное решение, квадратики — расчёт по новой модификации схемы CABARET 2.

Тестовые расчёты также показали (рис. 5), что при числах Куранта $r \in (0.5, 1)$ схема CABARET-M 2 также несколько искажает профиль центрированной волны разрежения (6) в окрестности точки $x = 1$, в которой располагался начальный разрыв (5). Однако, в отличие от стандартной схемы, разностное решение, получаемое по модифицированной схеме при $h \rightarrow 0$, сходится к точному решению (6). Предложен метод, усиливающий монотонные свойства схемы CABARET-M 2 при больших значениях числа Куранта, что позволило в решениях, получаемых по новой модифицированной схеме (рис. 6), добиться полного распада неустойчивого разрыва (5), в том числе, на достаточно грубых сетках, и, как следствие, получить более высокую точность воспроизведения профиля центрированной волны разрежения (6).

В пятой главе предложен метод расщепления по физическим процессам

для схемы CABARET-M 2, аппроксимирующей задачу Коши для неоднородного скалярного закона сохранения

$$v_t + f(v)_x = g(v), \quad v(x, 0) = v_0(x) \quad (7)$$

с выпуклой и монотонно возрастающей функцией потока $f(v)$. Идея этого метода проиллюстрирована на примере абстрактной дифференциально-разностной схемы

$$\frac{w^{n+1} - w^n}{\tau_n} + f_x^{n+1/2} = g^{n+1/2}, \quad w^n = w(x, t_n), \quad (8)$$

аппроксимирующей неоднородное уравнение (7), где $f^{n+1/2} = \hat{f}(w^n)$ и $g^{n+1/2} = \hat{g}(w^n, w^{n+1})$ — некоторые сеточные аппроксимации функций $f(v)$ и $g(v)$ в точке $(x, t_{n+1/2})$. На первом шаге этого метода решается однородное дифференциально-разностное уравнение

$$\frac{\hat{w}^{n+1} - w^n}{\tau_n} + f_x^{n+1/2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{w}^{n+1} = w^n - \tau_n f_x^{n+1/2}, \quad (9)$$

аппроксимирующее однородное дифференциальное уравнение (1). В результате находятся предварительные значения $\hat{w}^{n+1}$, которые используются на втором шаге метода

$$\frac{w^{n+1} - \hat{w}^{n+1}}{\tau_n} = g^{n+1/2} \quad \Leftrightarrow \quad w^{n+1} = \hat{w}^{n+1} + \tau_n g^{n+1/2} \quad (10)$$

для нахождения величин w^{n+1} .

На первом шаге (9) разностного метода расщепления применяется схема CABARET-M 2, обеспечивающая сохранение монотонности разностного решения при аппроксимации однородного уравнения (1). На втором шаге (10) этого метода используется неявная разностная схема второго порядка, которая не препятствует формированию новых локальных экстремумов в разностном решении, если такие экстремумы возникают в точном решении неоднородного уравнения (7). Для данной модификации будем использовать обозначение CABARET-MR 2.

В качестве конкретного примера рассмотрим задачу Коши (7), в которой

$$f(v) = v^3/3, \quad g(v) = \beta/v, \quad v > 0, \quad \beta = const. \quad (11)$$

Такая задача возникает при моделировании в рамках длинноволнового приближения процесса стекания вязкой плёнки по вертикальной стенке с учё-

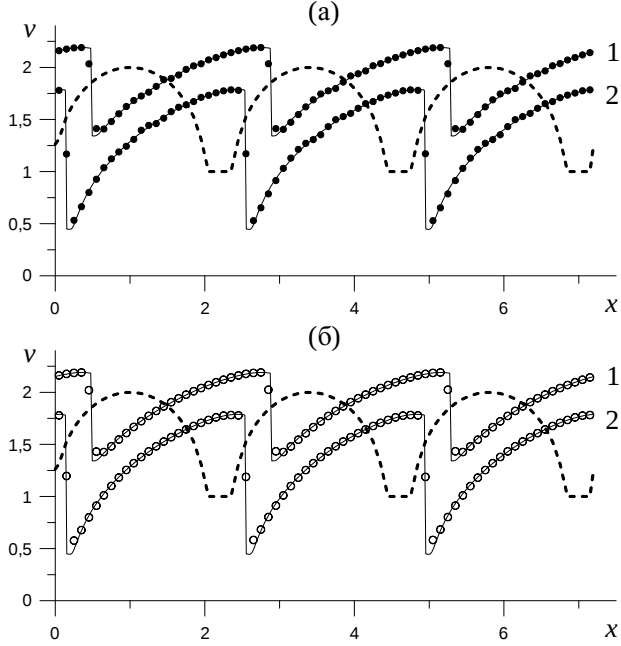


Рис. 7: Расчёт по схемам CABARET 2 (а) и CABARET-MR 2 (б) задачи Коши (7), (11), (12) на момент времени $t = 0.4$ с пространственным шагом $h = 0.1$, числом Куранта $r = 0.5$ и параметром $\beta = 1$ (случай 1) и $\beta = -1$ (случай 2). Сплошная линия — точное решение; пунктирная линия — начальные данные; точки — расчёт по стандартной схеме; кружки — по модифицированной схеме.

том тепломассопереноса на межфазной поверхности⁵. При $\beta > 0$ на свободной поверхности стекающей плёнки жидкость конденсируется, а при $\beta < 0$ — испаряется.

На рис. 7 на момент времени $t = 0.4$ приведены результаты расчёта по схемам CABARET 2 и CABARET-MR 2 задачи Коши (7), (11) с периодическими начальными данными

$$v_0(x) = \begin{cases} \sqrt{x(2-x)} + 1, & 0 \leq x \leq 2, \\ 1, & 2 \leq x \leq X, \end{cases} \quad v_0(x) = v_0(x + X) \quad \forall x, \quad (12)$$

⁵Nakoryakov V.E., Ostapenko V.V., Bartashevich M.V. Rolling waves on the surface of a thin layer of viscous liquid at phase transition // Intern. J. Heat and Mass Transfer. — 2015. — V. 89. — P. 846–855.

где $X = 2.4$, моделирующими бесконечную последовательность стекающих капель жидкости. Из рис. 7 видно, что схема CABARET 2, в отличие от схемы CABARET-MR 2, не сохраняет выпуклость профиля волны повышения, расположенной между сильными разрывами точного решения.

В **заключении** сформулированы основные результаты работы и обозначены перспективы дальнейших исследований.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в журналах

- [1] **Зюзина Н.А.**, Остапенко В.В. Модификация схемы Кабаре, обеспечивающая ее сильную монотонность и повышенную точность на локальных экстремумах // Доклады АН. — 2014. — Т. 457. — № 3. — С. 268–273.
Zyuzina N.A., Ostapenko V.V. Modification of the CABARET scheme ensuring its strong monotonicity and high accuracy on local extrema // Doklady Mathematics. — 2014. — V. 90. — No. 1. — P. 453–457.
- [2] **Зюзина Н.А.**, Остапенко В.В. Модификация схемы Кабаре, обеспечивающая ее повышенную точность на локальных экстремумах // Матем. моделирование. — 2015. — Т. 27. — № 10. — С. 21–31.
Zyuzina N.A., Ostapenko V.V. CABARET scheme's modification ensuring its high accuracy on local extrema // Math. Model. Comput. Simul. — 2016. — V. 8. — No. 3. — P. 231–237.
- [3] **Зюзина Н.А.**, Остапенко В.В. О монотонности схемы Кабаре, аппроксимирующей скалярный закон сохранения с выпуклым потоком // Доклады АН. — 2016. — Т. 466. — № 5. — С. 513–517.
Zyuzina N.A., Ostapenko V.V. On the monotonicity of the CABARET scheme approximating a scalar conservation law with a convex flux // Doklady Mathematics. — 2016. — V. 93. — No. 1. — P. 69–73.
- [4] **Зюзина Н.А.**, Остапенко В.В. Монотонная аппроксимация схемой Кабаре скалярного закона сохранения в случае знакопеременного характеристического поля // Доклады АН. — 2016. — Т. 470. — № 4. — С. 375–379.
Zyuzina N.A., Ostapenko V.V. Monotone approximation of a scalar conservation law based on the CABARET scheme in the case of a sign-changing characteristic field // Doklady Mathematics. — 2016. — V. 94. — No. 2. — P. 538–542.
- [5] **Зюзина Н.А.**, Остапенко В.В. О распаде неустойчивых сильных разрывов при аппроксимации схемой Кабаре скалярного закона сохране-

ния с выпуклым потоком // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2018. — Т. 58. — № 6. — С. 988–1012.

Zyuzina N.A., Ostapenko V.V. Decay of unstable strong discontinuities in the case of a convex-flux scalar conservation law approximated by the CABARET scheme // Comp. Math. And Math. Phys. — 2018. — V. 58. — No. 6. — P. 950–966.

- [6] **Зюзина Н.А.**, Остапенко В.В., Полунина Е.И. Метод расщепления при аппроксимации схемой CABARET неоднородного скалярного закона сохранения // Сиб. журн. вычисл. математики. — 2018. — Т. 21. — № 2. — С. 185–200.

Zyuzina N.A., Ostapenko V.V., Polunina E.I. A splitting method for a CABARET scheme approximating a nonuniform scalar conservation law // Numerical Analysis and Applications. — 2018. — V. 11. — No. 2. — P. 146–157.

- [7] **Зюзина Н.А.**, Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О монотонности схемы Кабаре, аппроксимирующей скалярный закон сохранения со знакопеременным характеристическим полем и выпуклой функцией потоков // Матем. моделирование. — 2018. Т. 30. — № 5. — С. 76–98.

Zyuzina N.A., Kovyorkina O.A., Ostapenko V.V. On the monotonicity of the CABARET scheme approximating a scalar conservation law with an alternating characteristic field and convex flux function // Math. Model. Comput. Simul. — 2019. — V. 30. — No. 5. — P. 76–98.

Тезисы и труды конференций

- [8] **Зюзина Н.А.** Модификация схемы КАБАРЕ, обеспечивающая сильную монотонность и повышенную точность на локальных экстремумах // Тезисы 52-й МНСК (Новосибирск, 11-18 апреля, 2014) — 2014. — С. 41.

- [9] **Зюзина Н.А.**, Остапенко В.В. Модификация схемы КАБАРЕ, обеспечивающая ее сильную монотонность и повышенную точность на локальных экстремумах // Сборник тезисов V всероссийской конференции “Вычислительный эксперимент в аэроакустике” (Светлогорск, 22–27 сентября, 2014) — 2014. — С. 115.

- [10] Остапенко В.В., Ковыркина О.А., **Зюзина Н.А.** О применении схемы КАБАРЕ для расчета решений гиперболических уравнений в случае знакопеременных характеристических полей // Сборник “Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики. Труды международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Г.И. Марчука”. — 2015. — С. 529–534.

- [11] **Зюзина Н.А.** Модификация схемы КАБАРЕ, обеспечивающая ее повышенную точность на локальных экстремумах в случае нелинейного уравнения переноса // Тезисы 53-й МНСК (Новосибирск, 11-17 апреля, 2015) — 2015. — С.163.
- [12] Остапенко В.В., Ковыркина О.А., **Зюзина Н.А.** О применении схемы КАБАРЕ для расчета решений гиперболических уравнений в случае знакопеременных характеристических полей // Тезисы межд. конференции “Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики” (Новосибирск, 19–23 октября, 2015) — 2015. — С. 13.
- [13] Остапенко В.В., Ковыркина О.А., **Зюзина Н.А.** О монотонных модификациях схемы КАБАРЕ // Тезисы докладов всероссийской конференции, посвященной 70-летию со дня рождения чл.-корр. РАН Владимира Михайловича Тешукова “Нелинейные волны: теория и новые приложения” (Новосибирск, 29 февраля–2 марта, 2016) — 2016. — С. 79–80.
- [14] **Зюзина Н.А.**, Остапенко В.В. Разностный аналог энтропийного неравенства для схемы Кабаре // Сборник “Марчуковские научные чтения 2017. Труды международной научной конференции”. — 2017. — С. 329–335.
- [15] **Зюзина Н.А.**, Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О монотонности схемы КАБАРЕ при расчете гиперболических уравнений со звуковыми линиями // Сборник тезисов VI всероссийской конференции “Вычислительный эксперимент в аэроакустике” (Светлогорск, 19–24 сентября, 2016) — 2016. — С.161–164.