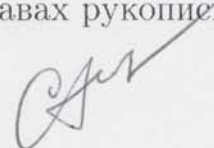


РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГЕОФИЗИКИ

На правах рукописи



Гусев Сергей Анатольевич

Оценка математических ожиданий функционалов от
диффузионных процессов и их производных по параметрам
методом Монте-Карло

01.01.07 — Вычислительная математика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

НОВОСИБИРСК — 2016

Оглавление

Введение	5
Глава 1. Оценка производных по параметрам математических ожиданий функционалов от диффузионных процессов с условием поглощения на границе	16
1.1. Постановка задачи	16
1.2. Применение метода Эйлера для получения оценок функционалов от диффузионных процессов	19
1.3. Оценка производных $\partial u/\partial\theta$	22
1.4. Метод FBVP1 для определения оценок производных вида $\partial u/\partial\theta$...	24
1.5. Моделирование траекторий процессов X и λ	51
1.6. Численный пример	53
1.7. Метод FBVP2 для определения оценок производных вида $\partial u/\partial\theta$...	56
1.8. Анализ погрешности аппроксимации производных по параметрам ..	63
1.9. Численная проверка метода FBVP2	74
Глава 2. Оценка производных по параметрам математических ожиданий функционалов от диффузионных процессов с условием отражения на границе	78
2.1. Моделирование диффузионного процесса в области с отражающей границей	81
2.2. Дифференцирование по параметру решения уравнения Скорохода .	85
2.3. Оценки производных $\partial u/\partial\theta$	96
2.4. Решение модельной задачи	100
Глава 3. Решение обратных задач для уравнения теплопроводности с использованием оценок $\partial u/\partial\theta$	103

3.1. Определение неизвестных коэффициентов в краевой задаче для уравнения теплопроводности	103
3.2. Решение модельной задачи	111
Глава 4. Минимизации дисперсии функционала от диффузионного процесса с использованием преобразования краевой задачи для параболического уравнения	115
4.1. Вариант метода для поглощающей границы	115
4.1.1. Оценка математического ожидания функционала и дисперсия оценки	119
4.1.2. Преобразование краевой задачи	124
4.1.3. Численные эксперименты	127
4.2. Вариант метода для условия отражения на границе	134
4.2.1. Постановка задачи минимизации дисперсии оценки	134
4.2.2. Преобразование краевой задачи	140
4.2.3. Численные эксперименты	143
Глава 5. Оценка решения линейного уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами	147
5.1. Аппроксимация обобщенного решения уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами	147
5.2. Сходимость приближенного решения краевой задачи и его статистическая оценка	152
5.3. Расчет теплового состояния сотовой теплозащитной панели	160
5.3.1 Расчет модельного примера	161
5.3.2 Расчет температуры сотовой панели по данным физического эксперимента	163

Заключение	167
Список работ, в которых отражены результаты диссертации	168
Список литературы	172
ПРИЛОЖЕНИЕ . Акт о внедрении результатов диссертации	186

Введение

Существует много прикладных задач в науке и технике, в которых фактор случайности играет существенную роль. При построении стохастических моделей для решения таких задач в модель обычно вводят случайные переменные, вероятностные характеристики которых соответствуют наблюдаемым случайным явлениям. В результате задача математического моделирования сводится к построению уравнений со случайными параметрами. При решении эволюционных задач с непрерывным временем и непрерывным множеством состояний в математической модели для описания случайных событий часто используются стохастические дифференциальные уравнения (СДУ), решениями которых являются случайные процессы. Среди множества случайных процессов особо выделяют марковские процессы и как подкласс диффузионные процессы. Эти процессы обладают свойством независимости поведения в будущем от прошлого при фиксированном настоящем. Марковским процессам посвящены многочисленные научные исследования и разработаны методы, позволяющие решать многие прикладные задачи в различных областях науки и техники. Эти исследования отражены в большом количестве монографий, см., например, [3], [11], [12], [17] – [22], [33], [36], [45], [51], [52], [60], [64], [77], [114].

Диффузионный случайный процесс X в \mathbf{R}^d описывается СДУ вида

$$dX = a(t, X)dt + \sigma(t, X)dW_t, \quad X(0) = x, \quad t \geq 0, \quad (0.1)$$

где X , x , a – d -мерные векторы; σ – $(d \times k)$ -матрица; W – k -мерный винеровский процесс.

В классе обобщенных функций производная винеровского процесса есть белый шум. Белый шум является дельта-коррелированным процессом и имеет равномерную спектральную плотность на всех частотах. В реальности такой процесс не существует. Предположим, что вместо белого шума в уравнении имеется некоторый стационарный процесс $k(t)$ с ненулевым временем корреляции. Тогда, если ширина полосы пропускания по входу динамической системы, описываемой уравнением (0.1) гораздо уже полосы частот равномерности спектра случайного возмущения, то процесс $k(t)$ можно приближенно считать белым шумом по отношению к рассматриваемой системе [15], [42], [52]. Такое возможно, если время корреляции $k(t)$ достаточно мало. В том случае, если соотношение указанных диапазонов частот динамической системы и случайного возмущения не позволяют допускать аппроксимацию $k(t)$ белым шумом, процесс $k(t)$ можно аппроксимировать решением СДУ типа (0.1) [42].

Задачи, в которых при математическом моделировании динамических систем используются СДУ вида (0.1), с успехом решаются в самых различных областях, таких как, например,

- решение задач фильтрации [38], [42], [45];
- решение задач автоматического регулирования и управления [34] — [38];
- в радиофизике [60], [67];
- в экономике и финансах [5], [34], [66], [96], [104], [107], [111] и в других областях.

Обычно при решении задач со случайными параметрами требуется находить некоторые усредненные характеристики поведения системы, например, оценки вероятностей каких-либо событий, оценки моментов распределений выходных

параметров. Вполне естественно полагать, что успешное практическое решение такого рода задач возможно на основе метода Монте-Карло [10], [35], [47],[57], [105].

Известны также применения метода Монте-Карло и для решения детерминированных задач. Особо следует отметить случаи решения методом Монте-Карло задач в то время, когда при использовании традиционных вычислительных алгоритмов возникают затруднения. Например, решение систем линейных алгебраических уравнений очень большой размерности [30]. Хорошо известна связь между диффузионными процессами и линейными эллиптическими и параболическими уравнениями [33], [64]. Эллиптическому или параболическому оператору в дифференциальном уравнении можно поставить в соответствие диффузионный процесс такой, что решение этого дифференциального уравнения имеет вероятностное представление в виде математического ожидания функционала соответствующего диффузионного процесса. Свойства решений эллиптических и параболических дифференциальных уравнений используются при исследовании соответствующих им стохастических уравнений. Так, например, из теоремы существования решения задачи Коши для параболического уравнения с не зависящими от переменной t коэффициентами следует существование полугруппы операторов, порождаемой переходной функцией соответствующего марковского процесса [33]. Также решения эллиптических и параболических уравнений и их свойства используются в оценках слабой сходимости численных методов интегрирования СДУ [79], [115]. С другой стороны, вероятностные представления используются при исследовании свойств решений дифференциальных уравнений второго порядка. Так, например, в работе [63] М.И. Фрейдлиным делается построение и исследование свойств обобщенного решения задачи Дирихле для

вырождающегося эллиптического уравнения.

В последние два-три десятилетия в связи с появлением мощной суперкомпьютерной техники открылись новые возможности для численного решения трудоемких задач, в том числе и для многомерных. В связи с тем, что методы Монте-Карло распараллеливаются с хорошим показателем эффективности и по сравнению с другими методами гораздо менее чувствительны по трудоемкости к увеличению размерности задач, они становятся более конкурентноспособными. В частности, методом статистического моделирования можно решать многомерные задачи для эллиптических и параболических уравнений на основе вероятностных представлений их решений.

Многомерные параболические уравнения возникают, например, в задачах финансовой математики. Известно [66], [99], что расчет цены опциона сводится к решению краевой задачи для параболического уравнения. В случае многофакторного опциона, размерность параболического уравнения, которое требуется решить, равна количеству базисных активов и может быть очень большой. Параболические уравнения большой размерности возникают также при моделировании динамики молекул полимеров, см., например, [73], [106], [108] [117].

Решение параболических уравнений на основе вероятностных представлений может быть использовано в задачах теплообмена для неоднородных сред, таких как, например сотовые теплозащитные панели. Такие панели содержат внутри тонкий сотовый каркас из углепластика, заполненный сотовым наполнителем с низкой теплопроводностью. Для построения сетки с учетом особенностей данной конструкции потребуется огромное количество узлов и применение разностных методов для решения таких задач может быть очень затруднительным. Для решения таких задач на основе вероятностных представлений построение сетки

по пространственным переменным не требуется.

Статистический метод позволяет определять решение параболического уравнения в одной или нескольких точках области. Это свойство может оказаться полезным при решении обратных задач, т.к. в таких задачах требуется определение решения только в местах расположения датчиков. При этом точность решения должна быть сопоставима с точностью измерительных приборов.

Решение практических задач с использованием математического моделирования невозможно без уточнения параметров модели и исследования влияния параметров на поведение решения. И это исследование не всегда может быть простой задачей. В некоторых случаях параметры модели могут быть определены с помощью физических измерений и экспериментов, но часто бывает, что это требует дополнительных значительных затрат бюджета и времени. Например, для уточнения всех параметров функционирования космического корабля экспериментальный метод, сопряженный с запусками космических аппаратов явно неприемлем.

Для оценки влияния параметров модели на решение могут быть использованы производные от решения задачи по параметрам, так называемые функции чувствительности. Эти производные можно вычислять с помощью разностей или решать еще дополнительно к уравнениям основной задачи уравнения, которые получаются из них в результате дифференцирования по параметрам. Если известны функции чувствительности, то уточнение параметров модели может также осуществляться с помощью решения обратной задачи.

Необходимость дифференцирования по параметрам функционалов от случайных процессов возникает в задачах стохастической оптимизации [8], [37], [40]. Решение таких задач осложняется в случаях, когда функционалы содержат вре-

мя первого выхода τ случайного процесса из области. Известны примеры, когда время первого выхода для гладких процессов не является непрерывным относительно малых изменений параметров. С другой стороны, для случайных диффузионных процессов возможна регулярность времени первого выхода случайного процесса, если эта случайная величина находится под знаком математического ожидания [75]. Исследованию времени первого выхода случайного процесса из области посвящены работы многих авторов, см., например, [31], [53], [75], [78], [98], [109].

В диссертации показано, что при определенных условиях возможно дифференцирование по параметрам математических ожиданий функционалов от диффузионных процессов, содержащих τ , и предложены методы вычисления таких производных.

Основные цели диссертационной работы:

- Исследование возможности дифференцирования по параметрам математических ожиданий функционалов от диффузионных процессов в областях с поглощающими и отражающими границами.
- Разработка на основе численного решения СДУ методов оценки математических ожиданий функционалов от диффузионных процессов и их производных по параметрам.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, списка литературы и приложения, в котором содержится копия акта о внедрении результатов диссертации.

Глава 1 посвящена разработке методов оценки производных по параметрам математических ожиданий функционалов от диффузионных процессов в областях с условием поглощения на границе. Получены формулы для расчета таких

производных, которые не содержат производных по параметрам времени первого выхода процесса из области. Эти формулы выведены путем перехода к пределу в разностном соотношении, полученном с помощью применения формулы Ито к некоторой достаточно гладкой функции g , которая равна нулю на границе.

Результаты главы 1 опубликованы в работах [23], [25], [27], [83] – [88], [93], [95].

Глава 2 посвящена построению метода оценки производных по параметрам математических ожиданий функционалов от диффузионных процессов с условиями отражения на границе. Показано, что при определенных условиях возможно дифференцирование по параметрам локального времени пребывания диффузионного процесса на границе области. Получены формулы для вычисления производных по параметрам математических ожиданий этих функционалов.

Результаты главы 2 опубликованы в работах [24], [49], [89], [92].

В главе 3 рассмотрена возможность применения производных по параметрам математических ожиданий функционалов от диффузионных процессов, получаемых с помощью методов, построенных в двух предыдущих главах, к решению обратных задач для уравнений теплопроводности. Рассмотрен пример решения обратной задачи по определению неизвестных коэффициентов в уравнении теплопроводности с граничным условием третьего рода.

Результаты главы 3 опубликованы в работах [87], [89].

Глава 4 посвящена построению метода минимизации дисперсии оценок математических ожиданий функционалов от диффузионных процессов. Получены два варианта формулы для предельного значения дисперсии этих оценок при уменьшении длины шага в методе Эйлера для случаев условий поглощения и отражения на границе. Предложенный метод минимизации дисперсии основан на преобразовании краевых задач для параболических уравнений.

Результаты главы 4 опубликованы в работах [26], [90], [91].

Глава 5 посвящена построению метода оценки решений краевых задач для параболических уравнений с разрывными коэффициентами. Предложенный метод основан на применении численного решения СДУ для оценки решения краевой задачи, которая получается из исходной в результате сглаживания коэффициентов. Решена практическая задача определения теплового состояния сотовых теплоизоляционных панелей, входящих в конструкцию теплозащитного покрытия самолета.

Результаты главы 5 опубликованы в работах [28], [29], [92], [94].

Заключение содержит перечень основных результатов диссертационной работы.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [23] – [29], [49], [84], [87], [89], [90] в рецензируемых изданиях, рекомендуемых ВАК.

Положения, выносимые на защиту:

1. Получены две формулы для определения производных по параметрам математических ожиданий функционалов от диффузионных процессов в областях с условиями поглощения на границе. На основе этих формул построены два метода оценки производных по параметрам математических ожиданий функционалов от диффузионных процессов.

2. Обоснована возможность дифференцирования по параметрам локального времени пребывания диффузионного процесса на границе. Построен метод оценки производных по параметрам математических ожиданий функционалов от диффузионных процессов в областях с условием отражения на границе.

3. Получена формула для предельного значения дисперсии оценки математического ожидания функционала от диффузионного процесса при убывании

длины шага в методе Эйлера.

4. Разработан метод минимизации дисперсии оценки математического ожидания функционала от диффузионного процесса, основанный на преобразовании краевой задачи для параболического уравнения.

5. Разработан метод оценки решений краевых задач для уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами. Решена задача оценки теплового состояния сотовых конструкций фюзеляжа самолета на основе численного решения стохастических дифференциальных уравнений.

Все выносимые на защиту результаты диссертации являются **новыми**. По опубликованным работам задача дифференцирования по параметрам под знаком математического ожидания функционалов от диффузионных процессов в областях, когда на границе задано условие поглощения или условие отражения, ранее не была решена.

Все основные результаты получены автором диссертации **лично, или при его активном участии**. В совместных работах с В.Н. Николаевым [49], [29], [94] В.Н. Николаеву принадлежит постановка задачи и получение экспериментальных данных для расчетов. В совместной работе с Н.Г. Докучаевым, опубликованной в журнале "Теория вероятностей и ее применения" [27], Н.Г. Докучаевым было предложено снять требование среднеквадратической дифференцируемости по параметру времени первого выхода случайного процесса из области, которое в более ранней в работе автора [25] требовалось для доказательства основной формулы о дифференцируемости функционалов под знаком математического ожидания.

Результаты диссертационной работы используются в инженерных расчетах при конструировании теплозащитных покрытий фюзеляжа самолета (см.

в приложении акт о внедрении). Методы расчета производных по параметрам математических ожиданий функционалов диффузионных процессов, разработанные в диссертации, могут быть использованы при исследовании параметрической зависимости, для уточнения или определения параметров математических моделей, содержащих стохастические дифференциальные уравнения.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы неоднократно докладывались и обсуждались на семинаре "Методы Монте-Карло в вычислительной математике и математической физике" под руководством чл.-корр. РАН Г.А. Михайлова в ИВМиМГ СОРАН, докладывались на семинаре кафедры теории вероятностей МАИ под руководством д.ф.-м.н., проф. А.И. Кибзуна, докладывались на четвертом, пятом и шестом Санкт-Петербургских семинарах по стохастическому моделированию (Санкт Петербург, 2001, 2005, 2009 гг.); на международной конференции по вычислительным методам "International Conference on Computational Methods in Science and Engineering CMMSE -(CMMSE-2002)" (Аликанте, Испания, 2002 г.); на четвертом международном семинаре по методам Монте-Карло "IVth IMACS Seminar on Monte Carlo methods September 15-19, 2003, Berlin" (Берлин, Германия, 2003 г.); на международной конференции, посвященной 100-летию академика И.И. Векуа "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения" (Новосибирск, 2007 г.); на международной конференции, посвященной 100-летию С.Л. Соболева "Дифференциальные уравнения, функциональные пространства, теория приближений" (Новосибирск, 2008 г.); на восьмом Всемирном конгрессе по вычислительной механике "8th World Congress on Computational Mechanics WCCM8" и пятом Европейском конгрессе по вычислительным методам в прикладных науках и технике "5th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering

ЕССОМАС 2008"(Венеция, Италия, 2008 г.); на пятой международной конференции по машиностроению и аэрокосмической технике "The 5th International Conference on Mechanical and Aerospace Engineering (ICMAE 2014)"(Мадрид, Испания, 2014 г.); на международных конференциях "Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики": АПВМ2014, АПВМ2015 (Новосибирск, 2014, 2015 гг.); на 19-й конференции по системотехнике и компьютерным технологиям "19th International Conference on Circuits, Systems, Communications and Computers, (CSCC 2015)"(Закинтос, Греция, 2015 г.); по прикладным методам статистического анализа "АМСА 2015"(Новосибирск, 2015 г.).

Глава 1

Оценка производных по параметрам математических ожиданий функционалов от диффузионных процессов в областях с условием поглощения на границе

В первой главе представлены статистические методы для определения оценок производных по параметрам функционалов от диффузионных процессов в областях с поглощающими границами. Математические ожидания этих функционалов задают вероятностные представления решений соответствующих краевых задач для параболических уравнений с краевыми условиями Дирихле. Построение статистических оценок математических ожиданий рассматриваемых функционалов осуществляется на основе численного решения СДУ методом Эйлера. Установлен порядок сходимости метода Эйлера для получаемых оценок производных по параметрам рассматриваемых функционалов. Даны результаты численных экспериментов.

1.1 Постановка задачи

Всюду в данной главе предполагается, что $G \subset \mathbf{R}^d$ – ограниченная область с регулярной границей ∂G .

Пусть задано вероятностное пространство (Ω, \mathcal{F}, P) , для которого задана неубывающая последовательность σ -алгебр $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$, $t \geq 0$. Предполагается, что задан W — d -мерный винеровский процесс такой, что при любом $t \geq 0$ случайная величина W_t измерима относительно \mathcal{F}_t ; для $s > t$ разность $W_s - W_t$ независима от σ -алгебры \mathcal{F}_t .

Символом $E_{t,x}$ обозначается математическое ожидание относительно вероятностной меры $P_{t,x}$, соответствующей случайному процессу, исходящему в момент времени t из точки x (определение $P_{t,x}$ см., например, в [21], стр. 385). Всюду по тексту черта сверху обозначения множества означает замыкание этого множества.

Обозначим $Q_T = (0, T) \times G$; $S_T = [0, T] \times \partial G$. Зададим открытое множество $U \subset \mathbf{R}^m$. Мы рассматриваем d -мерный диффузионный процесс X_\cdot , зависящий от векторного параметра $\theta \in U$, который при $(t, x) \in Q_T$ описывается следующим векторным СДУ

$$X_s(\theta) = x + \int_t^s a(v, X_v(\theta), \theta) dv + \int_t^s \sigma(v, X_v(\theta), \theta) dW_v \quad (1.1)$$

с некоторыми измеримыми функциями $a : [0, \infty) \times \mathbf{R}^d \times U \rightarrow \mathbf{R}^d$ и $\sigma : [0, \infty) \times \mathbf{R}^d \times U \rightarrow \mathbf{R}^{d \times d}$.

Ниже в данном разделе приведены основные предположения относительно коэффициентов СДУ (1.1).

A) существует константа \mathcal{K} такая, что для всех $\theta \in U$, $v \geq 0$, $x, y \in \mathbf{R}^d$, $i, j \in \{1, \dots, d\}$ выполняются неравенства

$$a_i(v, x, \theta)^2 + \sigma_{ij}(v, x, \theta)^2 \leq \mathcal{K}^2(1 + |x|^2),$$

$$|a_i(v, x, \theta) - a_i(v, y, \theta)| + |\sigma_{ij}(v, x, \theta) - \sigma_{ij}(v, y, \theta)| \leq \mathcal{K}|x - y|.$$

Предположения **A** относительно a , σ достаточно [21], [97], чтобы при любом $\theta \in U$ существовал единственный с точностью до стохастической эквивалентности с вероятностью 1 непрерывный процесс X_s , \mathcal{F}_s -измеримый, такой, что для него при всех $s \geq 0$ выполняется равенство (1.1).

В данной главе рассматриваются математические ожидания вида

$$u(t, x, \theta) = E_{t,x} [\varphi(X_T(\theta), \theta) \chi_{\tau > T} + \psi(\tau, X_\tau, \theta) \chi_{\tau < T} + \int_t^{T \wedge \tau} f(v, X_v(\theta), \theta) dv], \quad (1.2)$$

где $\tau = \inf\{v \mid v > t, X_v \notin G\}$ – время первого выхода X_\cdot из области, χ_A – индикаторная функция множества A .

Известно, что при некотором фиксированном $\theta \in U$ значение (1.2) совпадает с решением в точке $(t, x) \in Q_T$ следующей краевой задачи для параболического уравнения

$$Lu + f(t, x, \theta) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (t, x) \in Q_T, \quad (1.3)$$

$$u(T, x, \theta) = \varphi(x, \theta), \quad x \in G, \quad (1.4)$$

$$u(t, x, \theta) = \psi(t, x, \theta), \quad (t, x) \in S_T, \quad (1.5)$$

где $S_T = (0, T) \times \partial G$.

В уравнении (1.3) оператор L задан следующим образом

$$L \equiv \partial_t + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d b_{ij}(t, x, \theta) \partial_{x_i x_j}^2 + \sum_{i=1}^d a_i(t, x, \theta) \partial_{x_i}, \quad (1.6)$$

где b_{ij} – элементы матрицы $B \equiv \sigma \sigma^T$.

Будем считать, что при любом заданном наборе параметров $\theta \in U$ можно определить диффузионный процесс, являющийся решением СДУ (1.1), и соответствующий ему функционал в (1.2), которому можно поставить в соответствие

краевую задачу (1.3) – (1.5). Условия существования и единственности таких краевых задач можно найти в [44], см. глава IV, теорема 5.2, теорема 9.1. При этом тип функционального пространства, к которому принадлежит решение, существенно зависит от исходных данных задачи. Предполагается, что входные данные задачи (1.3) – (1.5) удовлетворяют приведенным в этих теоремах достаточным условиям существования решения. Также необходимо обеспечить возможность дифференцирования математических ожиданий вида (1.2) по θ . В связи с этим дополнительно к условию **A** вводятся следующие предположения:

Б) матричная функция $B(t, x, \theta) = (b_{ij}(t, x, \theta))$ в рассматриваемом параболическом операторе удовлетворяет при всех $(t, x) \in Q_T, \theta \in U$ условию:

$$B(t, x, \theta) > \alpha_0 I \quad (1.7)$$

для некоторого $\alpha_0 > 0$;

В) существуют непрерывные производные $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$ при любых $(x, \theta) \in Q \times U$;

Г) функция f непрерывна на $[0, T] \times \bar{Q}_T$ при любом $\theta \in U$ и существуют непрерывные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ при любых $(t, x, \theta) \in Q_T \times U$.

Д) производные

$$\frac{\partial a}{\partial x}, \quad \frac{\partial a}{\partial \theta_i}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \theta_i}, \quad \frac{\partial a}{\partial t}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

непрерывны и ограничены в $[0, \infty) \times \mathbf{R}^d \times U$;

Е) граница ∂G класса \mathbf{C}^3 .

1.2 Применение метода Эйлера для получения оценок функционалов от диффузионных процессов

Обычно определение статистических оценок функционалов от диффузионных процессов на основе численного решения соответствующих СДУ сводится к чис-

ленному моделированию большого числа траекторий этих процессов. В данном случае для этой цели используется метод Эйлера. При решении задач с поглощением на границе моделирование каждой траектории заканчивается либо при первом выходе ее из области, либо когда шагами по времени будет исчерпан заданный интервал $[t, T]$.

Зададим на интервале $[t, T]$ узлы сетки: $t_i = t + hi$ ($i = 0, \dots, N$), $h = \frac{T-t}{N}$. Численную аппроксимацию траектории случайного процесса в узлах сетки будем обозначать чертой сверху обозначения процесса и нижним индексом, равным номеру соответствующего узла. Для функций, заданных на сетке будем иногда, вместо значений аргументов, указывать у обозначения функции верхний индекс, соответствующий узлу сетки. Например, пишем u^i вместо $u(t_i, \bar{X}_i)$.

Тогда с использованием принятых обозначений, моделирование траекторий процесса X методом Эйлера осуществляется по схеме

$$\bar{X}_{i+1} = \bar{X}_i + ha^i + \sqrt{h} \sum_{j=1}^d \sigma_j^i \xi_j^i, \quad (1.8)$$

где σ_j^i – j -й столбец матрицы σ^i ; ξ_j^i – независимые стандартные нормальные случайные величины.

Обозначим $\tau^N = \inf\{t_i : \bar{X}_i \notin G\}$ и i^τ – соответствующий номер узла, т.е. $t_{i^\tau} = \tau^N$. Алгоритм расчета каждой траектории состоит в последовательном вычислении по формуле (1.8) значений случайного процесса до тех пор, пока не произойдет выход за границу области ∂G , либо получено значение \bar{X}_N , находящееся в области G . В случае выхода траектории из области в качестве последней точки траектории берется проекция вышедшей точки на границу вдоль внутренней нормали. Дополнительно на каждом шаге с номером i ($i = 0, \dots, (i^\tau - 1) \wedge (N - 1)$) производятся арифметические действия: $S_i := S_{i-1} + f(t_i, \bar{X}_i)(t_{i+1} - t_i)$, где

$S_{-1} = 0$.

В результате работы этого алгоритма определяются приближенные значения $u(t, x)$ для заданной точки $(t, x) \in [0, T) \times G$ по формуле

$$\begin{aligned} u^N(t, x) &= \mathbf{E}_{t,x} [\varphi(\bar{X}_N) \chi_{\tau^N > t_N} + \psi(\tau^N, \bar{X}_{\tau^N}) \chi_{\tau^N < t_N} \\ &+ \sum_{i=0}^{N-1} \chi_{\tau^N > t_i} f(t_i, \bar{X}_i) (t_{i+1} - t_i)]. \end{aligned} \quad (1.9)$$

В работах [79] – [82] показано, что погрешность аппроксимации метода Эйлера при вычислении математических ожиданий диффузионных процессов с поглощением на границе есть величина порядка $O(\sqrt{h})$. Как было установлено в многочисленных исследованиях (см., например, [68] – [72], [79]), основная причина такой низкой точности состоит в следующем. Для любых двух последовательных значений \bar{X}_i, \bar{X}_{i+1} , полученных на одном шаге метода Эйлера, принадлежащих G , существует ненулевая вероятность того, что соответствующий непрерывный процесс \bar{X}_t на отрезке $[t_i, t_{i+1}]$, определяемый уравнением

$$\bar{X}_t = \bar{X}_i + ha(t_i, \bar{X}_i)(t - t_i) + \sum_{j=1}^d \sigma_j(t_i, \bar{X}_i)(W(t) - W(t_i))_j \quad (1.10)$$

со значениями на границах отрезка \bar{X}_i, \bar{X}_{i+1} , есть процесс типа броуновского моста, который на интервале (t_i, t_{i+1}) может выйти из области G и снова в нее вернуться. То есть численный метод может продолжать работу внутри области после выхода реального процесса из области.

Если известна вероятность выхода случайного процесса (1.10) из области на i -м шаге $p(i, i+1)$ или ее достаточно хорошая оценка, то в целях улучшения сходимости в работах [79] – [82], [100] предлагается моделировать выход процесса (1.10) из области. В [70] – [72] (Buchmann F.M., Petersen W.P.) путем вычислений на простых примерах для одномерного случая показано, что порядок метода

Эйлера может быть равен единице, если на i -м шаге ($i = 0, \dots, \tau^N \wedge N - 1$) моделировать случайную величину ξ , распределенную по закону Бернулли с вероятностью "успеха" $p(i, i + 1)$. При этом на шаге i возможны следующие ситуации:

- а) $\bar{X}_i \in G, \bar{X}_{i+1} \notin G$, в этом случае ясно, что выход из области произошел;
- б) $\bar{X}_i, \bar{X}_{i+1} \in G$, и, если при моделировании ξ оказывается $\xi = 0$, то в этом случае осуществляется переход к следующему шагу; если $\xi = 1$, то фиксируется выход случайного процесса из области и траектория заканчивается.

В работе [100] для случая, когда область G является полупространством, соответственно при этом ∂G – полуплоскость, получена формула для вероятности $p(i, i + 1)$

$$p(i, i + 1) = \exp \left(-2 \frac{(n, \bar{X}_i - z)(n, \bar{X}_{i+1} - z)}{n^T \sigma \sigma^T (\bar{X}_i) n h} \right), \quad (1.11)$$

где n – вектор нормали ∂G ; z – проекция \bar{X}_i на ∂G .

В работе [80] для случая гладкой границы, гладкости не ниже \mathbf{C}^5 , формула (1.11) используется в качестве оценки вероятности $p(i, i + 1)$ в некоторой заданной окрестности границы, в которой область аппроксимируется полупространством, а граница – плоскостью. Там же утверждается, что для точек вне этой окрестности выход случайного процесса из области маловероятен, и дана оценка этой вероятности. Для варианта метода, в котором производится аппроксимации границы плоскостью с целью моделирования выхода процесса из области с использованием вероятности $p(i, i + 1)$ в [80] доказан первый порядок сходимости.

1.3 Оценка производных $\partial u / \partial \theta$

В дальнейшем, для сокращения записи формул, будем считать, что в уравнении (1.1) присутствует один скалярный параметр θ , отметив при этом, что все

результаты легко переносятся на случай нескольких параметров. Также иногда аргумент θ в списках аргументов функций будет опускаться.

Если формально продифференцировать по θ равенство (1.2), то получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \theta}(t, x) &= \mathbf{E}_{t,x} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(X_T, \theta) Z_T + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(X_T, \theta) \right) \chi_{\tau > T} \right. \\ &+ \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}(\tau, X_\tau, \theta) Z_\tau + \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(\tau, X_\tau, \theta) \right) \chi_{\tau < T} \\ &\left. + \int_t^{T \wedge \tau} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(v, X_v, \theta) Z_v + \frac{\partial f}{\partial \theta}(v, X_v, \theta) \right) dv \right] + \Phi(\theta) , \end{aligned} \quad (1.12)$$

где

$$\Phi(\theta) := \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \mathbf{E}_{t,x} \left(\frac{\tau(\theta + \Delta\theta) - \tau(\theta)}{\Delta\theta} (f(\tau, X_\tau, \theta) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(\tau, X_\tau, \theta)) \chi_{\tau < T} \right) \quad (1.13)$$

(если этот предел существует), и где процесс

$$Z_s(\theta) = \int_t^s \left(\frac{\partial a}{\partial x} Z_v(\theta) + \frac{\partial a}{\partial \theta} \right) dv + \int_t^s \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} Z_v(\theta) + \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right) dW(v) \quad (1.14)$$

является среднеквадратической (с.к.) производной $\frac{\partial X_\cdot}{\partial \theta}$ по параметру решения СДУ (1.1). Известно (см., например, [17]), что предположения **A** – **E** в разделе 1.1 обеспечивают существование с.к. производной $Z_s(\theta) = \frac{\partial X_\cdot}{\partial \theta}$, которая может быть получена в результате решения системы СДУ (1.1), (1.14).

Для определения первого слагаемого в (1.12) требуется только знать процесс $(X_\cdot(\theta), Z_\cdot(\theta))$, который является марковским, т.к. система СДУ (1.1), (1.14) удовлетворяет условиям существования сильного решения.

При определении второго слагаемого в (1.12) возникает необходимость учитывать зависимость τ от θ . Доказательство существования предела в (1.13) и методика определения $\Phi(\theta)$ даны в последующих разделах.

1.4 Метод FBVP1 для определения оценок производных вида $\partial u/\partial\theta$

Ниже дано описание метода FBVP1¹ (см. [86], [87]) для определения статистических оценок производных математических ожиданий функционалов от диффузионных процессов в областях с поглощающими границами, основанного на применении формулы Ито к некоторой достаточно гладкой функции $g(x)$. При этом функция g должна быть равной нулю на границе области ∂G , а функции Lg (L – дифференциальный оператор (1.6)) и $\sum_{ij} \frac{\partial g}{\partial x_i} \sigma_{ij}$ не равны нулю одновременно при любых $(t, x, \theta) \in S_T \times U$.

Оценки математических ожиданий функционалов, содержащих производные $\partial\tau/\partial\theta$ получаются с помощью уравнения, полученного в результате применения формулы Ито к функции g . Поскольку формула Ито содержит недифференцируемый интеграл Ито по винеровскому процессу, в верхнем пределе которого присутствует τ , то предлагается аппроксимировать интеграл Ито с.к. интегралом, в котором белый шум аппроксимируется стационарным гауссовским процессом с экспоненциальной корреляционной функцией, согласованной с шагом интегрирования в методе Эйлера.

Идея аппроксимации белого шума гауссовским процессом рассматривалась в [60]. При этом брался стационарный гауссовский процесс λ с корреляционной функцией

$$R_\lambda(t_1, t_2) = D \cdot \exp(-\beta|t_2 - t_1|). \quad (1.15)$$

Согласно [1], [60] стационарный гауссовский процесс λ с нулевым математическим ожиданием и экспоненциальной корреляционной функцией может быть

¹FBVP - First Boundary Value Problem

получен из СДУ

$$d\lambda = -\beta\lambda dv + \vartheta dW(v) \quad , \quad (1.16)$$

где $\lambda(0) = \lambda_0$ – гауссовская случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной $\frac{\vartheta^2}{2\beta}$. При таком выборе λ_0 процесс λ имеет постоянную дисперсию $D = \frac{\vartheta^2}{2\beta}$.

Точное решение СДУ (1.16) записывается в виде

$$\lambda(t) = e^{-\beta t} \lambda_0 + e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} \vartheta dW(s). \quad (1.17)$$

Пусть для случайной функции f определен стохастический интеграл Ито на отрезке $[0, T]$. Для него будем использовать обозначение $I_W \equiv \int_0^T f(v) dW(v)$. Далее предполагается, что рассматриваемые интегралы вида $I_\lambda \equiv \int_0^T f(v) \lambda(v) dv$ определены в с.к. смысле. Для аппроксимации интегралов I_W и I_λ будут использоваться соответствующие интегральные суммы на равномерной сетке с шагом $h = \frac{T}{N}$, определяемые как $I_W^h(f) \equiv \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) \Delta W_{t_n}$, где $\Delta W_{t_n} = W(t_{n+1}) - W(t_n)$, и $I_\lambda^h(f) \equiv h \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) \lambda(t_{n+1})$. Будем считать, что $f(t_0)$ – детерминированная величина, либо случайная величина, не зависящая от λ_0 .

Ниже в теореме показано, что при определенном выборе параметров процесса λ возможно его представление в узлах равномерной сетки на $[0, T]$ в виде суммы двух составляющих, одна из которых может быть использована для построения приращений винеровского процесса.

Теорема 1. Пусть процесс λ является решением СДУ

$$d\lambda = -\beta\lambda dv + \sqrt{\frac{2\beta}{h(1 - e^{-2\beta h})}} dW(v). \quad (1.18)$$

Тогда при фиксированном $h > 0$ для значений процесса λ в узлах сетки справедливо представление

$$\lambda(t_{n+1}) = \varepsilon_n + \frac{1}{\sqrt{h}}\xi_n, \quad n = 0, \dots, N,$$

где ε_n – нормально распределенные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\frac{\exp(-2\beta h)}{h(1-\exp(-2\beta h))}$; ξ_n – взаимно независимые нормально распределенные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Пусть f – случайная функция такая, что при каждом $v \in [0, T]$ она \mathcal{F}_v -измерима, и в каждой точке отрезка $[0, T]$ функция f с.к. непрерывна. Тогда имеет место сходимость по распределению $I_\lambda^h(f) \rightarrow I_w^h(f)$ при $\beta \rightarrow \infty$.

Доказательство. Выберем параметр ϑ в (1.16) так, чтобы выполнялось приближенное равенство

$$h\lambda((n+1)h) \approx h^{\frac{1}{2}}\xi_n, \quad (1.19)$$

где ξ_n независимые стандартные нормальные случайные величины. Отметим здесь, что $\lambda((n+1)h)$ – нормально распределенные коррелированные случайные величины. Возьмем в (1.17) $t = (n+1)h$ и представим выражение для $\lambda((n+1)h)$ в следующем виде:

$$\lambda((n+1)h) = \varepsilon_n + \gamma_n, \quad (1.20)$$

где

$$\varepsilon_n = e^{-\beta(n+1)h}\lambda_0 + e^{-\beta(n+1)h} \int_0^{nh} e^{\beta s} \vartheta dW(s), \quad (1.21)$$

$$\gamma_n = e^{-\beta(n+1)h} \int_{nh}^{(n+1)h} e^{\beta s} \vartheta dW(s). \quad (1.22)$$

Случайные величины ε_n коррелированы, они нормально распределены и имеют нулевое математическое ожидание и дисперсию $D_{\varepsilon_n} = e^{-2\beta h} \frac{\vartheta^2}{2\beta}$. Случайные величины γ_n взаимно независимы и нормально распределены с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $D_{\gamma_n} = \frac{\vartheta^2}{2\beta}(1 - e^{-2\beta h})$.

Выберем ϑ из условия равенства вторых моментов

$$h^2 \mathbb{E}(\gamma_n)^2 = h^2 \frac{\vartheta^2}{2\beta} (1 - e^{-2\beta h}) = \mathbb{E}(\Delta W(t_n))^2 = h. \quad (1.23)$$

Отсюда получаем $\vartheta = \left(\frac{2\beta}{h(1 - e^{-2\beta h})} \right)^{\frac{1}{2}}$. При этом значении ϑ случайные величины $h\gamma_n$ и $\Delta w(t_n)$ одинаково распределены, а дисперсия ε_n равна $\frac{e^{-2\beta h}}{h(1 - e^{-2\beta h})}$.

Ясно, что путем увеличения β при фиксированном h можно уменьшить вклад случайной величины ε_n в $\lambda((n+1)h)$ и, следовательно, уменьшить погрешность δ , получаемую в результате замены $\Delta w(t_n)$ на $h\lambda((n+1)h)$. Эта погрешность определяется случайными величинами ε_n и равна

$$\delta = h \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) \varepsilon_n. \quad (1.24)$$

Из определения ε_n в (1.21) следует, что при $\beta \rightarrow \infty$ математическое ожидание δ стремится к нулю. Действительно, по условиям теоремы функция f с.к. непрерывная на замкнутом отрезке $[0, T]$. Отсюда следует непрерывность на $[0, T]$ ее второго момента $\mathbb{E}|f(v)|^2$ [52]. Значит существует $C_f > 0$, что $\mathbb{E}|f(v)|^2 \leq C_f$ для $v \in [0, T]$. Используя неравенство Коши-Буняковского для математических ожиданий, имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|\delta| &\leq h \sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{E}|f(t_n)\varepsilon_n| \leq h \sum_{n=0}^{N-1} (\mathbb{E}|f(t_n)|^2)^{\frac{1}{2}} (\mathbb{E}|\varepsilon_n|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_f^{\frac{1}{2}} \frac{T e^{-\beta h}}{\sqrt{h(1 - e^{-2\beta h})}} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \beta \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Найдем оценку второго момента δ

$$m_{2,\delta} = h^2 \mathbb{E} \left[\sum_{n=0}^{N-1} f^2(t_n) \varepsilon_n^2 + \sum_{i \neq j} f(t_i) f(t_j) \varepsilon_i \varepsilon_j \right]. \quad (1.26)$$

Для $\mathbb{E}[f^2(t_n) \varepsilon_n^2]$, $n = 0, \dots, N-1$ выполняется неравенство

$$\mathbb{E}[f^2(t_n) \varepsilon_n^2] \leq C_f \frac{e^{-2\beta h}}{h(1 - e^{-2\beta h})}. \quad (1.27)$$

Теперь найдем оценку для $\mathbb{E}[f(t_i) f(t_j) \varepsilon_i \varepsilon_j]$ ($i, j = 0, \dots, N; i \neq j$). С помощью неравенства Коши-Буняковского получаем

$$\mathbb{E}[f(t_i) f(t_j) \varepsilon_i \varepsilon_j] \leq C_f (\mathbb{E}[\varepsilon_i^2 \varepsilon_j^2])^{\frac{1}{2}}. \quad (1.28)$$

Запишем выражение для $\varepsilon_i^2 \varepsilon_j^2$

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^2 \varepsilon_j^2 = & e^{-2\beta(i+j+2)h} \left[\lambda_0^4 + 2\lambda_0^3 \left[\int_0^{ih} e^{\beta s} \vartheta dW_s + \int_0^{jh} e^{\beta s} \vartheta dW_s \right] \right. \\ & + \lambda_0^2 \left[\left(\int_0^{ih} e^{\beta s} \vartheta dW_s \right)^2 + \left(\int_0^{jh} e^{\beta s} \vartheta dW_s \right)^2 \right] + 4\lambda_0^2 \left(\int_0^{ih} e^{\beta s} \vartheta dW_s \right) \\ & \cdot \left(\int_0^{jh} e^{\beta s} \vartheta dW_s \right) + 2\lambda_0 \left[\left(\int_0^{ih} e^{\beta s} \vartheta dW_s \right) \left(\int_0^{jh} e^{\beta s} \vartheta dW_s \right)^2 \right. \\ & \left. \left. + \left(\int_0^{ih} e^{\beta s} \vartheta dW_s \right)^2 \left(\int_0^{jh} e^{\beta s} \vartheta dW_s \right) \right] + \left(\int_0^{ih} e^{\beta s} \vartheta dW_s \right)^2 \left(\int_0^{jh} e^{\beta s} \vartheta dW_s \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Отсюда получаем математическое ожидание $\varepsilon_i^2 \varepsilon_j^2$. Поскольку $\lambda_0 \in \mathbf{N}(0, \frac{\vartheta}{\sqrt{2\beta}})$ и не зависит от W_s при $s > 0$, мы имеем

$$\mathbb{E}[\varepsilon_i^2 \varepsilon_j^2] = e^{-2\beta(i+j+2)h} \left[\frac{3\vartheta^4}{4\beta^2} + \frac{\vartheta^2}{2\beta} \left(\int_0^{ih} e^{2\beta s} \vartheta^2 ds + \int_0^{jh} e^{2\beta s} \vartheta^2 ds \right) + 4 \frac{\vartheta^2}{2\beta} \int_0^{(i \wedge j)h} e^{2\beta s} \vartheta^2 ds \right]$$

$$\begin{aligned}
& +\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{(i\wedge j)h} e^{\beta s} \vartheta dW_s\right)^4 + \left(\int_0^{(i\wedge j)h} e^{\beta s} \vartheta dW_s\right)^2 \left(\int_{(i\wedge j)h}^{(i\vee j)h} e^{\beta s} \vartheta dW_s\right)^2\right] \\
& = e^{-2\beta(i+j+2)h} \frac{\vartheta^4}{4\beta^2} \left[e^{2\beta ih} + e^{2\beta jh} - e^{2\beta(i\wedge j)h} + 2e^{4\beta(i\wedge j)h} + e^{2\beta(i+j)h} - e^{2\beta(i\vee j)h} \right] \\
& = e^{-4\beta h} \frac{\vartheta^4}{4\beta^2} + R_{ij}, \tag{1.30}
\end{aligned}$$

где R_{ij} – бесконечно малые величины (при больших значениях βh) по сравнению с $e^{-4\beta h} \frac{\vartheta^4}{4\beta^2}$.

Таким образом, на основании (1.28), (1.30) приходим к оценке

$$\mathbb{E}[f(t_i)f(t_j)\varepsilon_i\varepsilon_j] \leq C_f \frac{e^{-2\beta h}}{h(1 - e^{-2\beta h})}. \tag{1.31}$$

Из (1.26), (1.27), (1.31) получаем

$$m_{2,\delta} \leq \frac{C_f T^2 e^{-2\beta h}}{h(1 - e^{-2\beta h})} \tag{1.32}$$

Из того, что $\mathbb{E}|\delta| \rightarrow 0$ и $m_{2,\delta} \rightarrow 0$ при $\beta \rightarrow \infty$, следует п.в. сходимость $\delta \rightarrow 0$ при $\beta \rightarrow \infty$.

На основании того, что $I_\lambda^h(f) = \delta + h \sum_{i=0}^{N-1} f(t_k)\gamma_k$; суммы $h \sum_{i=0}^{N-1} f(t_k)\gamma_k$ и $I_w^h(f)$ распределены одинаково; $\delta \rightarrow 0$ п.в. при $\beta \rightarrow \infty$ (следовательно сходится к нулю и по вероятности), для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{I_\lambda^h(f) < x\} & = \mathbb{P}\{\delta + h \sum_{i=0}^{N-1} f(t_k)\gamma_k < x\} \leq \mathbb{P}\{I_w^h(f) < x + \varepsilon\} \\
& + \mathbb{P}\{|\delta| > \varepsilon\}, \tag{1.33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{I_w^h(f) < x - \varepsilon\} & = \mathbb{P}\{h \sum_{i=0}^{N-1} f(t_k)\gamma_k < x - \varepsilon\} \leq \\
\mathbb{P}\{\delta + h \sum_{i=0}^{N-1} f(t_k)\gamma_k < x\} & + \mathbb{P}\{|\delta| > \varepsilon\}. \tag{1.34}
\end{aligned}$$

Из (1.33), (1.34) следует

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{I_w^h(f) < x - \varepsilon\} - \mathbb{P}\{|\delta| > \varepsilon\} \leq \\ & \mathbb{P}\{\delta + h \sum_{i=0}^{N-1} f(t_k) \gamma_k < x\} \leq \mathbb{P}\{I_w^h(f) < x + \varepsilon\} + \mathbb{P}\{|\delta| > \varepsilon\}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $\beta \rightarrow \infty$, получаем (т.к. $\varepsilon > 0$ произвольно) доказательство теоремы.

Замечание 1.1. С помощью полученных в доказательстве теоремы 1 оценок математического ожидания и дисперсии случайной величины δ (1.25), (1.32) можно получить вероятностную оценку погрешности при использовании процесса λ для аппроксимации приращений винеровского процесса. Оценим вероятность того, что $|\delta|$ не превышает некоторый заданный уровень r_δ . Обозначим выражение в правой части (1.25) как $A \equiv C_f^{\frac{1}{2}} \frac{T e^{-\beta h}}{\sqrt{h(1-e^{-2\beta h})}}$. Пусть β и h такие, что выполняется неравенство $A < r_\delta$. Воспользуемся неравенствами Маркова и (1.25)

$$\mathbb{P}\{|\delta| > r_\delta\} \leq \frac{\mathbb{E}|\delta|}{r_\delta} \leq \frac{A}{r_\delta}, \quad (1.36)$$

откуда

$$\mathbb{P}\{|\delta| \leq r_\delta\} \geq 1 - \frac{A}{r_\delta}. \quad (1.37)$$

Для данного r_δ и некоторого $\alpha_\delta > 0$ выберем β из условия

$$\frac{A}{r_\delta} = \alpha_\delta. \quad (1.38)$$

Из (1.38) получаем соответствующее параметрам погрешности r_δ и α_δ значение коэффициента $\beta(r_\delta, \alpha_\delta, h)$

$$\beta(r_\delta, \alpha_\delta, h) = \frac{1}{2h} \ln \left(\frac{C_f T^2 + \alpha_\delta^2 r_\delta^2 h}{\alpha_\delta^2 r_\delta^2 h} \right). \quad (1.39)$$

Таким образом, если для аппроксимации приращений винеровского процесса использовать процесс λ , определяемый СДУ (1.18), у которого коэффициент $\beta \geq \beta(r_\delta, \alpha_\delta)$, то для погрешности этой аппроксимации δ будет выполняться неравенство

$$P\{|\delta| \leq r_\delta\} \geq 1 - \alpha_\delta. \quad (1.40)$$

Поскольку нормальный закон распределения однозначно определен по заданным математическому ожиданию и дисперсии, случайные величины $h\gamma_n$ с выбранным параметром ϑ из условия (1.23) могут рассматриваться как приращения винеровского процесса. Пусть W^γ обозначение этого процесса. Аналогично, для произвольного набора точек $\{t_1, \dots, t_n\} \subset [0, T]$ приращения W^γ определим как

$$\Delta W_{t_k - t_{k-1}}^\gamma \equiv \left(\frac{2\beta(t_k - t_{k-1})}{1 - e^{-2\beta(t_k - t_{k-1})}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\beta t_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{\beta s} dW_s .$$

Случайные величины $\Delta W_{t_k - t_{k-1}}^\gamma$ независимы для непересекающихся интервалов, они распределены по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $t_k - t_{k-1}$, т.е. они распределены так же как приращения винеровского процесса. По приращениям винеровского процесса с учетом того, что $W_0 = 0$, можно получить значения винеровского процесса в узлах сетки. Отсюда следует, что конечномерные распределения W^γ совпадают с конечномерными распределениями винеровского процесса. Семейство конечномерных распределений случайного процесса полностью определяют его свойства. По теореме Колмогорова (см., например, [21], стр. 110) существует случайный процесс на $[0, T]$, у которого семейство конечномерных распределений совпадает с семейством конечномерных распределений процесса W^γ . Будем этот процесс тоже обозначать символом W^γ . Процесс W^γ является винеровским.

Из доказательства теоремы 1 следует, что определенный в ней процесс λ может быть использован для аппроксимации приращений винеровского процесса на равномерной сетке с длиной шага h . При этом из формулы (1.17) точного решения СДУ (1.16) получается уравнение, связывающее значения процесса λ в двух последующих узлах

$$\lambda(t_{n+1}) = e^{-\beta h} \lambda(t_n) + \vartheta_h e^{-\beta t_{n+1}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{\beta s} dW_s, \quad (1.41)$$

где $\vartheta_h = \sqrt{\frac{2\beta}{h(1-e^{-2\beta h})}}$, $\lambda(t_n) \in N(0, \frac{\vartheta_h}{\sqrt{2\beta}})$.

С помощью вычислений значений λ в узлах сетки по формуле (1.41) можно получать приближения интегралов Ито интегральными суммами, определенными для ступенчатых функций.

Согласно [21] функция $r(t)$ на $[a, b]$ называется *ступенчатой*, если существует такое разбиение отрезка $[a, b]$: $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, что $r(t) = r(t_i)$ при $t \in [t_i, t_{i+1})$, $i = 0, \dots, n-1$.

Для аппроксимации интегралов Ито по процессу W^γ интегралами, определенными в с.к. смысле, содержащими процесс λ , нами используется оператор сдвига Θ_h в пространстве элементарных событий Ω [12]. Предполагается, что для любого $\omega \in \Omega$ и любого $h \in \mathbf{R}^1$ существует единственное элементарное событие $\omega_h^+ \in \Omega$ такое, что

$$\omega_h^+ = \Theta_h(\omega) . \quad (1.42)$$

При этом для всех $v \in [0, T]$ выполняется равенство $\lambda(v, \omega_h^+) = \lambda(v + h, \omega)$. В дальнейшем применение оператора сдвига будет сопровождаться обозначением $\lambda^h(v, \omega) \equiv \lambda(v, \omega_h^+)$, где ω и ω_h^+ связаны уравнением (1.42). Об операторах сдвига можно прочитать в [12], [36].

Пусть f – с.к. непрерывная случайная функция на $[0, T]$. По определению интеграла Ито существует последовательность ступенчатых функций f_m такая, что для любого заданного $t \in [0, T]$ имеет место с.к. сходимость

$$\mathbb{E} \left| \int_0^t f_m(v) dW^\gamma(v) - \int_0^t f(v) dW^\gamma(v) \right|^2 \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty.$$

Причем имеется много способов построения такой последовательности. Любой функции f_m из последовательности ступенчатых функций соответствует заданная на отрезке $[0, T]$ сетка $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$. Будем рассматривать последовательность ступенчатых функций, заданных на равномерных сетках. Каждой функции с номером m поставим в соответствие целое число N_m , такое, что соответствующий шаг равномерной сетки определяется из равенства $h_m = \frac{T}{N_m}$. При этом предполагается, что $N_m \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$.

Для каждого m представим соответствующую ступенчатую функцию f_m при любом значении $t \in [0, T]$ следующим образом

$$f_m(t, \omega) = \sum_{n=0}^{n_t-1} f(t_n, \omega) \chi_{t \in \Delta t_n} + f(t_{n_t}, \omega) \chi_{t \geq t_{n_t}}, \quad (1.43)$$

где $n_t = [\frac{t}{h_m}]$, $\Delta t_n = [t_n, t_{n+1})$. При этом интеграл Ито по винеровскому процессу W^γ от функции f_m является непрерывной функцией от t и определяется равенством

$$I_{W^\gamma}(t) \equiv \int_0^t f_m(v) dW^\gamma(v) = \sum_{n < n_t} f(t_n, \omega) \Delta W_{t_{n+1}-t_n}^\gamma + f(t_{n_t}, \omega) \Delta W_{t-t_{n_t}}^\gamma, \quad (1.44)$$

где

$$\Delta W_{u-v}^\gamma \equiv W^\gamma(u) - W^\gamma(v) = \sqrt{\frac{2\beta(u-v)}{1 - e^{-2\beta(u-v)}}} e^{-\beta u} \int_v^u e^{\beta s} dW(s).$$

При любых $\beta > 0$ и $u > v$ случайная величина ΔW_{u-v}^γ распределена по нормальному закону $N(0, (u-v)^{1/2})$.

По имеющейся последовательности ступенчатых функций $\{f_m\}$ (1.43), заданных на равномерных сетках с последовательностью шагов $\{h_m\}$, определим последовательность ступенчатых функций на $[0, T]$ вида

$$f_m^\lambda(t, \omega) = \sum_{n=0}^{n_t-1} f(t_n, \omega) \lambda^{h_m}(t_n, \omega) \chi_{t \in [t_n, t_{n+1})} + f(t_{n_t}, \omega) \lambda^{h_m}(t_{n_t}, \omega) \chi_{t \geq t_{n_t}}. \quad (1.45)$$

Для функции (1.45) интеграл $\int_0^t f_m^\lambda(v) dv$ может быть представлен в виде суммы

$$\begin{aligned} \int_0^t f_m^\lambda(v) dv &= h_m \sum_{n=0}^{n_t-1} f(t_n) \lambda^{h_m}(t_n) + (t - t_{n_t}) f(t_{n_t}) \lambda^{h_m}(t_{n_t}) \\ &= h_m \sum_{n=0}^{n_t-1} f(t_n) \lambda(t_{n+1}) + (t - t_{n_t}) f(t_{n_t}) \lambda(t_{n_t+1}). \end{aligned} \quad (1.46)$$

Теорема 2. Пусть f – с.к. непрерывная случайная функция на $[0, T]$, и λ – случайный процесс, который является решением СДУ

$$d\lambda = -\beta \lambda dv + \sqrt{\frac{2\beta}{h(1 - e^{-2\beta h})}} dW(v).$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно задать параметры h , β и функцию f_m^λ вида (1.45) такие, что равномерно по $t \in [0, T]$ будет выполняться неравенство

$$\mathbb{E} \left| \int_0^t f(v) dW^\gamma(v) - \int_0^t f_m^\lambda(v) dv \right| \leq \varepsilon. \quad (1.47)$$

Доказательство. Зададим $\varepsilon_1 > 0$. Так как f с.к. непрерывна на $[0, T]$, то для убывающей последовательности h_m существует номер $m_1 = m_1(\varepsilon_1)$ такой, что при $m \geq m_1$ и $|v - s| < h_m$ выполняется неравенство $\mathbb{E}|f(v) - f(s)|^2 < \varepsilon_1^2$. Тогда при $m \geq m_1$, используя неравенство Ляпунова с показателем, равным 2, и свойства интеграла Ито, получим следующее неравенство для функции f_m

вида (1.43)

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \int_0^t f_m(v) dW^\gamma(v) - \int_0^t f(v) dW^\gamma(v) \right| &\leq \left(\mathbb{E} \left| \int_0^t (f_m(v) - f(v)) dW^\gamma(v) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{n_t-1} \int_{t_n}^{t_{n_t-1}} \mathbb{E} (f(t_n) - f(v))^2 dv + \int_{t_{n_t}}^t \mathbb{E} (f(t_{n_t}) - f(v))^2 dv \right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon_1 \sqrt{T}. \end{aligned} \quad (1.48)$$

При этом неравенство (1.48) выполняется равномерно по $t \in [0, T]$.

Применим в (1.46) равенство (1.41), связывающее значения λ в двух последующих узлах сетки

$$\begin{aligned} &h_m \sum_{n=0}^{n_t-1} f(t_n) \lambda(t_{n+1}) + (t - t_{n_t}) f(t_{n_t}) \lambda(t_{n_t+1}) \\ &= e^{-\beta h_m} h_m \sum_{n=0}^{n_t-1} f(t_n) \lambda(t_n) + \sum_{n=0}^{n_t-1} f(t_n) \Delta W_{t_{n+1}-t_n}^\gamma + e^{-\beta h_m} (t - t_{n_t}) f(t_{n_t}) \lambda(t_{n_t}) \\ &+ \frac{t - t_{n_t}}{h_m} f(t_{n_t}) \Delta W_{t_{n_t+1}-t_{n_t}}^\gamma. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Найдем оценку математического ожидания модуля разности интегралов

$$\int_0^t f_m^\lambda(v) dv - \int_0^t f_m(v) dW^\gamma(v)$$

с использованием (1.44), (1.46), (1.49) и (1.17).

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \int_0^t f_m^\lambda(v) dv - \int_0^t f_m(v) dW^\gamma(v) \right| &\leq \mathbb{E} \left| h_m \sum_{n=0}^{n_t-1} f(t_n) \lambda(t_{n+1}) - \sum_{n=0}^{n_t-1} f(t_n) \Delta W_{t_{n+1}-t_n}^\gamma \right| \\ &+ \mathbb{E} \left| (t - t_{n_t}) f(t_{n_t}) \lambda(t_{n_t+1}) - f(t_{n_t}) \Delta W_{t-t_{n_t}}^\gamma \right| = \mathbb{E} \left| e^{-\beta h_m} h_m \sum_{n=0}^{n_t-1} f(t_n) \lambda(t_n) \right| \\ &+ \mathbb{E} \left| f(t_{n_t}) \left(e^{-\beta h_m} (t - t_{n_t}) \lambda(t_{n_t}) + \frac{t - t_{n_t}}{h_m} \Delta W_{t_{n_t+1}-t_{n_t}}^\gamma - \Delta W_{t-t_{n_t}}^\gamma \right) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq N_m C_f^{\frac{1}{2}} h_m^{\frac{1}{2}} \left(\frac{e^{-2\beta h_m}}{1 - e^{-2\beta h_m}} \right)^{\frac{1}{2}} + C_f^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E} \left(\frac{t - t_{n_t}}{h_m} \int_{t_{n_t}}^{t_{n_t+1}} dW^\gamma - \int_{t_{n_t}}^t dW^\gamma \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= N_m C_f^{\frac{1}{2}} h_m^{\frac{1}{2}} \left(\frac{e^{-2\beta h_m}}{1 - e^{-2\beta h_m}} \right)^{\frac{1}{2}} + C_f^{\frac{1}{2}} \left(\frac{(t - t_{n_t})(t_{n_t+1} - t)}{h_m} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_f^{\frac{1}{2}} \frac{T}{h_m^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{e^{-2\beta h_m}}{1 - e^{-2\beta h_m}} \right)^{\frac{1}{2}} + C_f^{\frac{1}{2}} \frac{h_m^{\frac{1}{2}}}{2} .
\end{aligned} \tag{1.50}$$

Обозначим β_h значение β , удовлетворяющее условию

$$\left(\frac{e^{-2\beta h_m}}{1 - e^{-2\beta h_m}} \right)^{\frac{1}{2}} = h_m . \tag{1.51}$$

Из (1.51) получим

$$\beta_h = \frac{1}{2h_m} \ln \left(\frac{1 + h_m^2}{h_m^2} \right). \tag{1.52}$$

Таким образом, при $\beta = \beta_h$ из (1.50) – (1.52) следует

$$\mathbb{E} \left| \int_0^t f_m^\lambda(v) dv - \int_0^t f_m(v) dW^\gamma(v) \right| \leq C_f^{\frac{1}{2}} (T + 0.5) h_m^{\frac{1}{2}} . \tag{1.53}$$

Пусть m_2 номер последовательности $\{h_m\}$ такой, что $C_f^{\frac{1}{2}} (T + 0.5) h_m^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда, если положить $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{T}}$, $m \geq \max(m_1, m_2)$ и $\beta = \beta_h$, то будет выполнено неравенство (1.47).

Теорема доказана.

В статье Н.Г. Докучаева [75] для различных коэффициентов $a^{(1)}$, $\sigma^{(1)}$ и $a^{(2)}$, $\sigma^{(2)}$ в СДУ (1.1) при условиях ограниченности этих коэффициентов и их производных по x на бесконечном цилиндре $Q_\infty \equiv (0, \infty) \times G$ доказано неравенство ([75], теорема 2.3)

$$\mathbb{E}_{t,x} \left[\frac{1}{\lambda} \left(\exp(\lambda|\tau_1 - \tau_2|) - 1 \right) \right] \leq \max_{k=1,2} \sup_{(t,x) \in Q_\infty} \left| \frac{dv_k}{dx} \right| \mathbb{E}_{t,x} \left| X_{\tau_1 \wedge \tau_2}^{(1)} - X_{\tau_1 \wedge \tau_2}^{(2)} \right|, \tag{1.54}$$

где $\lambda > 0$ – константа, зависящая от d , G , $\sup_{Q_\infty} a^{(k)}$ ($k = 1, 2$), α_0 . Будем считать, что коэффициенты $a^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$ ($k = 1, 2$) есть коэффициенты СДУ (1.1),

взяты при различных значениях параметра $\theta = \theta_k$, т.е. $a^{(k)}(t, x) \equiv a(t, x, \theta_k)$, $\sigma^{(k)}(t, x) \equiv \sigma(t, x, \theta_k)$. В (1.54) использованы следующие обозначения: $X_{\cdot}^{(k)}$ – случайный процесс, который получается, если в СДУ (1.1) подставить вместо a , σ соответственно коэффициенты $a^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$ ($k = 1, 2$); τ_k – время первого выхода $X_{\cdot}^{(k)}$ из области G ; v_k – решение следующей краевой задачи в Q_{∞}

$$L^{(k)}v_k + \lambda v_k + 1 = 0, \quad (1.55)$$

$$v_k(t, x) \Big|_{x \in \partial G} = 0, \quad (1.56)$$

$$\text{ess sup}_{t > 0} \|v_k(t, \cdot)\|_{L_2(G)} < \infty, \quad (1.57)$$

где $L^{(k)}$ – параболический оператор вида (1.6), у которого коэффициентами при первых и вторых производных по x являются соответственно элементы вектора $a^{(k)}$ и матрицы $B^{(k)} \equiv \sigma^{(k)}(\sigma^{(k)})^T$. По теореме 2.1 в [75] $\sup_{x, t, \theta_k} |\partial v_k / \partial x| < +\infty$.

Для выражения под знаком математического ожидания в левой части (1.54) выполняется очевидное неравенство

$$|\tau_1 - \tau_2|^p \leq p! \lambda^{-p} \left(\exp(\lambda |\tau_1 - \tau_2|) - 1 \right) \text{ для } p = 1, 2, \dots \quad (1.58)$$

Неравенства (1.54), (1.58) используются ниже по тексту, при этом в качестве $X_{\cdot}^{(1)}$, $X_{\cdot}^{(2)}$ берутся процессы $X_{\cdot}(\theta + \Delta\theta)$, $X_{\cdot}(\theta)$, а

$\max_{k=1,2} \sup_{(t,x) \in Q_{\infty}} \left| \frac{dv_k}{dx} \right|$ в (1.54) заменяется на $\sup_{(t,x,\theta) \in Q_{\infty} \times U} \left| \frac{dv}{dx} \right|$, где v – решение задачи вида (1.55) – (1.57) с оператором (1.6).

Лемма 1. . Для любого целого $p \geq 1$ имеет место сходимость

$$E_{t,x} |\tau(\theta + \Delta\theta) - \tau(\theta)|^p \rightarrow 0 \text{ при } \Delta\theta \rightarrow 0 \quad (1.59)$$

Доказательство. Заметим, что решение СДУ (1.1) непрерывно в среднем квадратическом по θ . Обозначим $\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta) = \tau(\theta) \wedge \tau(\theta + \Delta\theta)$. Применяя (1.54) и

(1.58) к $X_*(\theta + \Delta\theta)$ и $X_*(\theta)$, получим оценку математического ожидания для $|\tau(\theta + \Delta\theta) - \tau(\theta)|^p$

$$\mathbb{E}_{t,x}|\tau(\theta + \Delta\theta) - \tau(\theta)|^p \leq C(p)\mathbb{E}_{t,x}|X_{\tilde{\tau}(\theta,\Delta\theta)}(\theta + \Delta\theta) - X_{\tilde{\tau}(\theta,\Delta\theta)}(\theta)|, \quad (1.60)$$

где $C(p) = p!\lambda^{-p} \sup_{(t,x,\theta) \in Q_\infty \times U} \left| \frac{dv}{dx} \right|$.

Случайный процесс $X_*(\theta)$ с.к. непрерывен по θ , отсюда следует, что $\mathbb{E}_{t,x}|X_{\tilde{\tau}(\theta,\Delta\theta)}(\theta + \Delta\theta) - X_{\tilde{\tau}(\theta,\Delta\theta)}(\theta)| \rightarrow 0$ при $\Delta\theta \rightarrow 0$. Лемма доказана.

Лемма 2. . Существует постоянная $K > 0$, такая, что при $\Delta\theta > 0$

$$\mathbb{E}_{t,x} \left| \tau(\theta + \Delta\theta) - \tau(\theta) \right| < K\Delta\theta. \quad (1.61)$$

Доказательство. Мы знаем, что решение СДУ (1.1) дифференцируемо в среднем квадратическом по θ . Поделим неравенство (1.60) при $p = 1$ на $\Delta\theta$

$$\mathbb{E}_{t,x} \left| \frac{\tau(\theta + \Delta\theta) - \tau(\theta)}{\Delta\theta} \right| \leq C(1)\mathbb{E}_{t,x} \left| \frac{\Delta X_{\tilde{\tau}(\theta,\Delta\theta)}(\theta)}{\Delta\theta} \right|, \quad (1.62)$$

где $\Delta X_{\tilde{\tau}(\theta,\Delta\theta)}(\theta) = X_{\tilde{\tau}(\theta,\Delta\theta)}(\theta + \Delta\theta) - X_{\tilde{\tau}(\theta,\Delta\theta)}(\theta)$. Далее, применяя неравенство Коши-Буняковского, с учетом с.к. дифференцируемости X_* по θ , получаем при $\Delta\theta \rightarrow 0$

$$\mathbb{E}_{t,x} \left| \frac{\Delta X_{\tilde{\tau}(\theta,\Delta\theta)}(\theta)}{\Delta\theta} \right| \leq \left[\mathbb{E}_{t,x} \left(\frac{\Delta X_{\tilde{\tau}(\theta,\Delta\theta)}(\theta)}{\Delta\theta} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \sup_{0 \leq v \leq T} [\mathbb{E}_{t,x} \chi_{v \leq \tau \wedge T} Z_v^2(\theta)]^{\frac{1}{2}}. \quad (1.63)$$

В (1.106) Z_* есть с.к. производная X_* по θ . Величина $\mathbb{E}_{t,x} Z_v^2(\theta)$ ограничена, т.к. для уравнения (1.14) выполняются условия Теоремы 4 [17], стр. 48.

Лемма доказана.

Для функции f переменных t и x определим ступенчатые функции на траекториях процесса X_* аналогично как в (1.45)

$$f_m^\lambda(t, X_t) = \sum_{n=0}^{n_t-1} f(t_n, X_{t_n}) \lambda^{h_m}(t_n) \chi_{t \in [t_n, t_{n+1})} + f(t_{n_t}, X_{t_{n_t}}) \lambda^{h_m}(t_{n_t}, \omega) \chi_{t \geq t_{n_t}}. \quad (1.64)$$

Лемма 3. Пусть $f(t, x)$ функция, определенная на Q_T , дважды непрерывно дифференцируемая по x и один раз непрерывно дифференцируемая по t . Тогда можно задать ступенчатую функцию f_m^λ вида (1.64) и значение параметра β такое, что равномерно по $t \in [0, T]$ будет выполняться неравенство

$$\left| \mathbb{E} \left[\int_0^t f(v, X_v) \lambda^{h_m}(v) dv - \int_0^t f_m^\lambda(v, X_v) dv \right] \right| \leq C h_m^{\frac{1}{2}}. \quad (1.65)$$

для некоторого $C > 0$.

Доказательство. Для ступенчатой функции вида (1.64) запишем математическое ожидание разности интегралов

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\int_0^t f(v, X_v) \lambda^{h_m}(v) dv - \int_0^t f_m^\lambda(v, X_v) dv \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{n=0}^{t_{n_t-1}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (f(v, X_v) \lambda(v + h_m) - f(t_n, X_{t_n}) \lambda(t_{n+1})) dv \right. \\ & \left. + \int_{t_{n_t}}^t (f(v, X_v) \lambda(v + h_m) - f(t_{n_t}, X_{t_{n_t}}) \lambda(t_{n_t+1})) dv \right]. \quad (1.66) \end{aligned}$$

Для доказательства леммы достаточно рассмотреть одно слагаемое в (1.66). С помощью формулы Ито получим

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (f(v, X_v) \lambda(v + h_m) - f(t_n, X_{t_n}) \lambda(t_{n+1})) dv \\ &= \mathbb{E} \left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} (f(t_n, X_{t_n}) [\lambda(v + h_m) - \lambda(t_{n+1})]) dv \right. \\ & \left. + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\int_{t_n}^v Lf(s, X_s) ds + \int_{t_n}^v \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_{ij} dW_j^\gamma \right) \lambda(v + h_m) dv \right]. \quad (1.67) \end{aligned}$$

Найдем оценку первого слагаемого в правой части (1.67)

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[f(t_n, X_{t_n}) \int_{t_n}^{t_{n+1}} ([\lambda(v + h_m) - \lambda(t_{n+1})]) dv \right] \\
&= \mathbb{E} \left[f(t_n, X_{t_n}) \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[e^{-\beta h_m} \lambda(v) + \left(\frac{2\beta}{h_m(1 - e^{-2\beta h_m})} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\beta(v+h_m)} \int_v^{v+h_m} e^{\beta s} dW(s) \right] dv \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - h_m e^{-\beta h_m} \lambda(t_n) - \left(\frac{2\beta h_m}{1 - e^{-2\beta h_m}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\beta t_{n+1}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{\beta s} dW(s) \right) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[f(t_n, X_{t_n}) e^{-\beta h_m} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\lambda(v) - \lambda(t_n)) dv \right] \\
&\leq e^{-\beta h_m} \left(\mathbb{E} [f(t_n, X_{t_n})]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E} \left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} (\lambda(v) - \lambda(t_n)) dv \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{2} e^{-\beta h_m} \left(\mathbb{E} [f(t_n, X_{t_n})]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E} \left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} (\lambda(v) dv) \right]^2 + h_m^2 \mathbb{E} \lambda^2(t_n) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2C_f^{\frac{1}{2}} \left(\frac{e^{-2\beta h_m}}{1 - e^{-2\beta h_m}} \right)^{\frac{1}{2}} h_m^{\frac{1}{2}} . \tag{1.68}
\end{aligned}$$

При получении оценки (1.68) учитывалась независимость $f(t_n, X_{t_n})$ и интегралов $\int_v^{v+h} e^{\beta s} dW(s)$, $\int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{\beta s} dW(s)$. Из (1.68) в сумме по n получаем оценку

$$\begin{aligned}
& \left| \mathbb{E} \left[\sum_{n=0}^{n_t-1} f(t_n, X_{t_n}) \int_{t_n}^{t_{n+1}} ([\lambda(v + h_m) - \lambda(t_{n+1})]) dv \right] \right| \\
&\leq 2C_f^{\frac{1}{2}} (N_m - 1) \left(\frac{e^{-2\beta h_m}}{1 - e^{-2\beta h_m}} \right)^{\frac{1}{2}} h_m^{\frac{1}{2}} . \tag{1.69}
\end{aligned}$$

Рассмотрим второе слагаемое в правой части (1.67)

$$\mathbb{E} \left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\int_{t_n}^v Lf(s, X_s) ds + \int_{t_n}^v \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_{ij} dW_j^\gamma \right) \lambda(v + h_m) dv \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E} \left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\int_{t_{n_t}}^v Lf(s, X_s) ds + \int_{t_{n_t}}^v \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_{ij} dW_j^\gamma \right) \left(e^{-\beta h_m} \lambda(v) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{2\beta}{h_m(1 - e^{-2\beta h_m})} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\beta(v+h_m)} \int_v^{v+h_m} e^{\beta s} dW(s) \right) dv \right] \\
&= \mathbb{E} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\int_{t_{n_t}}^v Lf(s, X_s) ds \right) e^{-\beta h_m} \lambda(v) dv + \mathbb{E} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\int_{t_{n_t}}^v \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_{ij} dW_j^\gamma \right) e^{-\beta h_m} \lambda(v) dv \\
&\leq e^{-\beta h_m} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\mathbb{E} \left(\int_{t_{n_t}}^v Lf(s, X_s) ds \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E} (\lambda(v))^2 \right)^{\frac{1}{2}} dv \\
&\quad + e^{-\beta h_m} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\mathbb{E} \left(\int_{t_{n_t}}^v \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_{ij} dW_j^\gamma \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E} (\lambda(v))^2 \right)^{\frac{1}{2}} dv \\
&\leq \left(\frac{C_1}{2} h_m^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} dC_2 h_m \right) \left(\frac{e^{-2\beta h_m}}{1 - e^{-2\beta h_m}} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.70}
\end{aligned}$$

где $C_1 = \max_{(t,x) \in Q_T} |Lf|$, $C_2 = \max_{j=1,d; (t,x) \in Q_T} \left| \frac{\partial f}{\partial x} \sigma_j \right|$. Таким образом, в сумме по n получаем неравенство

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \left[\sum_{n=0}^{n_t-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\int_{t_{n_t}}^v Lf(s, X_s) ds + \int_{t_{n_t}}^v \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_{ij} dW_j^\gamma \right) \lambda(v + h_m) dv \right] \\
&\leq (N_m - 1) \left(\frac{C_1}{2} h_m^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} dC_2 h_m \right) \left(\frac{e^{-2\beta h_m}}{1 - e^{-2\beta h_m}} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.71}
\end{aligned}$$

Найдем оценку второго слагаемого в правой части (1.66)

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \left[\int_{t_{n_t}}^t (f(v, X_v) \lambda(v + h_m) - f(t_{n_t}, X_{t_{n_t}}) \lambda(t_{n_t+1})) dv \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\int_{t_{n_t}}^t (f(v, X_v) (\lambda(v + h_m) - \lambda(t_{n_t+1})) dv \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mathbf{E} \left[\int_{t_{n_t}}^t (f(v, X_v) - f(t_{n_t}, X_{t_{n_t}})) \lambda(t_{n_t+1}) dv \right] \\
& = \mathbf{E} \left[\int_{t_{n_t}}^t (f(v, X_v) e^{-\beta h_m} (\lambda(v) - \lambda(t_{n_t}))) dv \right] \\
& + \mathbf{E} \left[\int_{t_{n_t}}^t \left(\int_{t_{n_t}}^v Lf(s, X_s) ds + \int_{t_{n_t}}^v \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_{ij} dW_j^\gamma \right) e^{-\beta h_m} \lambda(t_{n_t}) dv \right] \\
& \leq \sqrt{2} e^{-\beta h_m} C_f^{\frac{1}{2}} \left(\mathbf{E} \left[\int_{t_{n_t}}^t (\lambda(v) dv) \right]^2 + (t - t_{n_t})^2 \mathbf{E} \lambda^2(t_{n_t}) \right)^{\frac{1}{2}} \\
& + e^{-\beta h_m} \int_{t_{n_t}}^t \left(\mathbf{E} \left(\int_{t_{n_t}}^v Lf(s, X_s) ds \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbf{E} (\lambda(t_{n_t}))^2 \right)^{\frac{1}{2}} dv \\
& + e^{-\beta h_m} \int_{t_{n_t}}^t \left(\mathbf{E} \left(\int_{t_{n_t}}^v \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_{ij} dW_j^\gamma \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbf{E} (\lambda(t_{n_t}))^2 \right)^{\frac{1}{2}} dv \\
& \leq \left(2C_f^{\frac{1}{2}} h_m^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} dC_2 h_m + \frac{C_1}{2} h_m^{\frac{3}{2}} \right) \left(\frac{e^{-2\beta h_m}}{1 - e^{-2\beta h_m}} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.72}
\end{aligned}$$

Из неравенств (1.69), (1.71), (1.72) при $\beta = \beta_h$, определенном в (1.52), следует

$$\left| \mathbf{E} \left[\int_0^t f(v, X_v) \lambda^{h_m}(v) dv - \int_0^t f_m^\lambda(v, X_v) dv \right] \right| \leq T \left(2C_f^{\frac{1}{2}} h_m^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} dC_2 h_m + \frac{C_1}{2} h_m^{\frac{3}{2}} \right).$$

Лемма доказана.

Для произвольной функции $r \in \mathbf{C}^1(\mathbf{R}^{d+1})$ введем обозначение $\frac{d}{d\theta} r(X_*(\theta), \theta) = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial X_*(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial r}{\partial \theta}$, где $\frac{\partial X_*(\theta)}{\partial \theta}$ – с.к. производная.

При выводе формулы для определения производных по параметрам математических ожиданий типа (1.2) будем предполагать, что в стохастических уравнениях, определяющих процессы X_* и Z_* , присутствует винеровский процесс W^γ

$$X_s(\theta) = x + \int_t^s a(v, X_v(\theta), \theta) dv + \int_t^s \sigma(v, X_v(\theta), \theta) dW^\gamma(v) \quad (1.73)$$

$$Z_s(\theta) = \int_t^s \left(\frac{\partial a}{\partial x} Z_v(\theta) + \frac{\partial a}{\partial \theta} \right) dv + \int_t^s \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} Z_v(\theta) + \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right) dW^\gamma(v) \quad (1.74)$$

Для случаев $d > 1$ определим d -мерный стационарный гауссовский процесс $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ так, что каждая его компонента λ_j , $j = 1, \dots, d$ является решением СДУ

$$d\lambda_j = -\beta\lambda_j dv + \vartheta dW_j(v) \quad , \quad (1.75)$$

где $\lambda_j(0) = \lambda_{j0}$ – гауссовская случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной $\frac{\vartheta^2}{2\beta}$.

Теорема 3. Пусть заданы случайные процессы $\lambda_j(v)$, $j = 1, \dots, d$ ($v \geq t$), являющиеся решениями СДУ

$$d\lambda_j = -\beta\lambda_j dv + \sqrt{\frac{2\beta}{h(1 - e^{-2\beta h})}} dW_j(v), \quad \lambda_j(t) \in N\left(0, \frac{\vartheta}{\sqrt{2\beta}}\right), \quad (1.76)$$

где W_j – взаимно независимые винеровские процессы.

Пусть существует дважды непрерывно дифференцируемая по x и непрерывно дифференцируемая по t , функция $g(t, x)$, которая равна нулю на границе ∂G , а функции Lg и $\sum_{ij} \frac{\partial g}{\partial x_i} \sigma_{ij}$ не равны нулю одновременно при любых $(t, x, \theta) \in S_T \times U$. Пусть коэффициенты уравнения (1.1) и функции φ , f удовлетворяют условиям **A** – **E**. Тогда для заданного $\varepsilon > 0$ найдутся такие значения параметров β , h СДУ (1.76), что для $\frac{\partial u}{\partial \theta}$ при $(t, x) \in Q_T$ справедливо неравенство

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \theta}(t, x) - \mathbb{E}_{t,x} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(X_T, \theta) Z_T + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(X_T, \theta) \right) \chi_{\tau > T} \right] \right|$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}(\tau, X_\tau, \theta) Z_\tau + \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(\tau, X_\tau, \theta) \right) \chi_{\tau < T} \\
& + \int_t^{T \wedge \tau} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(v, X_v, \theta) Z_v + \frac{\partial f}{\partial \theta}(v, X_v, \theta) \right) dv \\
& - \left(\frac{f(\tau, X_\tau, \theta) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(\tau, X_\tau, \theta)}{R(\tau, X_\tau, \theta)} \int_t^\tau \frac{d}{d\theta} R(v, X(v), \theta) dv \right) \chi_{\tau < T} \Bigg| \leq \varepsilon, \quad (1.77)
\end{aligned}$$

где

$$R(v, X(v), \theta) = \left(Lg + \sum_{ij} \frac{\partial g}{\partial x_i} \sigma_{ij} \lambda_j^h \right) \Big|_{(v, X(v), \theta)}. \quad (1.78)$$

Доказательство. При дифференцировании по θ равенства (1.2) получаем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \theta}(t, x) &= \mathbb{E}_{t,x} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(X_T, \theta) Z_T + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(X_T, \theta) \right) \chi_{\tau > T} \right. \\
& + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}(\tau, X_\tau, \theta) Z_\tau + \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(\tau, X_\tau, \theta) \right) \chi_{\tau < T} \\
& \left. + \int_t^{T \wedge \tau} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(v, X_v, \theta) Z_v + \frac{\partial f}{\partial \theta}(v, X_v, \theta) \right) dv \right] + \Phi(\theta), \quad (1.79)
\end{aligned}$$

где $\Phi(\theta)$ определяется равенством (1.13).

Ниже будет показано, что предел в (1.13) существует, и будет получена формула для определения производной $\frac{\partial u}{\partial \theta}$. Для произвольной функции $\mu \in \mathbf{C}^1(\mathbf{R}^{d+1})$ введем обозначение $R_j^\mu(v, X_v, \theta) = \sum_l \frac{\partial \mu(X_v(\theta))}{\partial x_l} \cdot \sigma_{lj}(v, X_v(\theta), \theta)$.

Применяя формулу Ито к функции $g(t, x)$, получим уравнение:

$$0 = g(t, x) + \int_t^\tau Lg(v, X_v, \theta) dv + \int_t^\tau \sum_j R_j^g dW_j^\gamma(v) \quad (1.80)$$

Добавим и вычтем в (1.80) интеграл $\int_t^{\tau(\theta)} \sum_j R_j^g(v, X_v, \theta) \lambda_j^h(v) dv$ и перепишем это уравнение в следующем виде

$$0 = g(t, x) + \int_t^\tau R(v, X_v, \theta) dv + \int_t^\tau \sum_j R_j^g(v, X_v, \theta) dW_j^\gamma(v)$$

$$- \int_t^\tau \sum_j R_j^g(v, X_v, \theta) \lambda_j^h(v) dv. \quad (1.81)$$

Как и в доказательстве леммы 1 используем обозначение $\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta) = \tau(\theta) \wedge \tau(\theta + \Delta\theta)$. С помощью равенств, полученных из (1.81) для значений параметра θ и $\theta + \Delta\theta$, можем записать равенство

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\Delta\theta} \left[\int_t^{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)} (R(v, X_v(\theta + \Delta\theta), \theta + \Delta\theta) - R(v, X_v(\theta), \theta)) dv \right. \\ &+ \int_{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)}^{\tau(\theta + \Delta\theta)} R(v, X_v(\theta + \Delta\theta), \theta + \Delta\theta) dv - \int_{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)}^{\tau(\theta)} R(v, X_v(\theta), \theta) dv \\ &+ \int_t^{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)} \sum_j R_j^g(v, X_v(\theta + \Delta\theta), \theta + \Delta\theta) dW_j^\gamma(v) \\ &- \int_t^{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)} \sum_j R_j^g(v, X_v(\theta + \Delta\theta), \theta + \Delta\theta) \lambda_j^h(v) dv \\ &- \int_t^{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)} \sum_j R_j^g(v, X_v(\theta), \theta) dW_j^\gamma(v) + \int_t^{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)} \sum_j R_j^g(v, X_v(\theta), \theta) \lambda_j^h(v) dv \\ &+ \int_{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)}^{\tau(\theta + \Delta\theta)} \sum_j R_j^g(v, X_v(\theta + \Delta\theta), \theta + \Delta\theta) dW_j^\gamma(v) \\ &- \int_{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)}^{\tau(\theta + \Delta\theta)} \sum_j R_j^g(v, X_v(\theta + \Delta\theta), \theta + \Delta\theta) \lambda_j^h(v) dv \\ &\left. - \int_{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)}^{\tau(\theta)} \sum_j R_j^g(v, X_v(\theta), \theta) dW_j^\gamma(v) + \int_{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)}^{\tau(\theta)} \sum_j R_j^g(v, X_v(\theta), \theta) \lambda_j^h(v) dv \right]. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Умножим (1.82) на $\chi_{\tau < T} \frac{f(\tau, X_\tau, \theta) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(\tau, X_\tau, \theta)}{R(\tau, X_\tau, \theta)}$, где τ берется при значении параметра θ , и рассмотрим предел при $\Delta\theta \rightarrow 0$ математического ожидания правой части полученного равенства.

Покажем, что

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \mathbf{E}_{t,x} \left[\chi_{\tau(\theta) < T} \frac{f(\tau, X_\tau, \theta) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(\tau, X_\tau, \theta)}{R(\tau, X_\tau, \theta)} \right. \\ & \quad \left. \int_t^{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)} \frac{R(v, X_v(\theta + \Delta\theta), \theta + \Delta\theta) - R(v, X_v(\theta), \theta)}{\Delta\theta} dv \right] \\ &= \mathbf{E}_{t,x} \left[\chi_{\tau(\theta) < T} \frac{f(\tau, X_\tau, \theta) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(\tau, X_\tau, \theta)}{R(\tau, X_\tau, \theta)} \int_t^{\tau(\theta)} \frac{d}{d\theta} R(v, X_v(\theta), \theta) dv \right]. \end{aligned} \quad (1.83)$$

Для этого запишем неравенство, которое следует из того, что случайная величина $\chi_{\tau(\theta) < T} \frac{f(\tau, X_\tau, \theta) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(\tau, X_\tau, \theta)}{R(\tau, X_\tau, \theta)}$ п.в. ограничена

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{E}_{t,x} \left[\chi_{\tau(\theta) < T} \frac{f(\tau, X_\tau, \theta) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(\tau, X_\tau, \theta)}{R(\tau, X_\tau, \theta)} \right. \right. \\ & \quad \left. \left(\int_t^{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)} \frac{R(v, X_v(\theta + \Delta\theta), \theta + \Delta\theta) - R(v, X_v(\theta), \theta)}{\Delta\theta} dv \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \int_t^{\tau(\theta)} \frac{d}{d\theta} R(v, X_v(\theta), \theta) dv \right) \right] \right| \leq C \int_t^T \left| \mathbf{E}_{t,x} \left[\chi_{v < \tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left(\frac{R(v, X_v(\theta + \Delta\theta), \theta + \Delta\theta) - R(v, X_v(\theta), \theta)}{\Delta\theta} - \frac{d}{d\theta} R(v, X_v(\theta), \theta) \right) \right] \right| dv \\ & \quad + C \left| \mathbf{E}_{t,x} \left[\int_{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)}^{\tau(\theta)} \frac{d}{d\theta} R(v, X_v(\theta), \theta) dv \right] \right|, \end{aligned} \quad (1.84)$$

где $C = \sup_{(v,x,\theta) \in [0,T] \times \partial G \times U} \left| \frac{f(v,x,\theta) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(\tau, X_\tau, \theta)}{R(v,x,\theta)} \right|$.

Поскольку производные функций a_i , σ_{ij} , g по x , θ непрерывны в \bar{G} и следовательно ограничены, для X_* выполнены условия с.к. дифференцируемости по θ [17], и т.к. процессы λ_j имеют ограниченную дисперсию на $[0, T]$ и не зависят от параметра θ , то несложно показать, что первое слагаемое в правой части неравенства (1.84) сходится к нулю при $\Delta\theta \rightarrow 0$.

Покажем, что второе слагаемое в правой части (1.84) сходится к нулю при $\Delta\theta \rightarrow 0$. Из определения функции R следует

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)}^{\tau(\theta)} \frac{d}{d\theta} R(v, X_v(\theta), \theta) dv &= \int_{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)}^{\tau(\theta)} \frac{d}{d\theta} Lg(v, X_v(\theta), \theta) dv + \\ &\int_{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)}^{\tau(\theta)} \sum_{i,j} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \sigma_{ij}(v, X_v(\theta), \theta) \right) \lambda_j^h(v) dv. \end{aligned} \quad (1.85)$$

Так как производные Lg непрерывны в \bar{G} , величина $\frac{d}{d\theta} Lg(v, X_v(\theta), \theta)$ ограничена. Поэтому математическое ожидание первого слагаемого в правой части (1.85) стремится к нулю при $\Delta\theta \rightarrow 0$ на основании леммы 1

$$\begin{aligned} \left| \mathbf{E}_{t,x} \left[\int_{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)}^{\tau(\theta)} \frac{d}{d\theta} Lg(v, X_v(\theta), \theta) dv \right] \right| &\leq C_1 \mathbf{E}_{t,x} \left| \tau(\theta) - \tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta) \right| \\ &\leq C_1 \mathbf{E}_{t,x} |\Delta\tau| \rightarrow 0 \text{ при } \Delta\theta \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где $C_1 = \sup_{(v,x,\theta) \in [0,T] \times \partial G \times U} \left| \frac{d}{d\theta} Lg(v, X_v(\theta), \theta) \right|$, $\Delta\tau = \tau(\theta + \Delta\theta) - \tau(\theta)$.

Сходимость при $\Delta\theta \rightarrow 0$ математического ожидания второго слагаемого в (1.85) следует из неравенств

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{t,x} \left[\int_{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)}^{\tau(\theta)} \sum_{i,j} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \sigma_{ij} \right) \lambda_j^h dv \right] &\leq \sum_{i,j} \mathbf{E}_{t,x} \left[\left(\int_{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)}^{\tau(\theta)} \left(\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \sigma_{ij} \right) \right)^2 dv \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \right. \\ &\left. \left(\int_{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)}^{\tau(\theta)} (\lambda_j^h)^2 dv \right)^{\frac{1}{2}} \right] \leq \sum_{i,j} \left[\mathbf{E}_{t,x} \int_{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)}^{\tau(\theta)} \left(\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \sigma_{ij} \right) \right)^2 dv \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\mathbf{E}_{t,x} \int_{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)}^{\tau(\theta)} (\lambda_j^h)^2 dv \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\leq C_2 \left(\sum_j \int_t^T \mathbb{E}_{t,x}(\lambda_j^h)^2 dv \right) (\mathbb{E}_{t,x}(\tau(\theta) - \tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)))^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \Delta\theta \rightarrow 0,$$

где $C_2 = d \cdot \max_{i,j=1,\dots,d} \left| \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \sigma_{ij} \right) \right|$.

$(v, x, \theta) \in [0, T] \times \bar{G} \times U$

Докажем, что при $\Delta\theta \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{t,x} \left[\chi_{\tau(\theta) < T} \frac{f(\tau, X_\tau, \theta) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(\tau, X_\tau, \theta)}{\Delta\theta R_\tau} \left(\int_{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)}^{\tau(\theta + \Delta\theta)} R(v, X_v(\theta + \Delta\theta), \theta + \Delta\theta) dv \right. \right. \\ & \left. \left. - \int_{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)}^{\tau(\theta)} R(v, X_v(\theta), \theta) dv \right) \right] - \mathbb{E}_{t,x} \left[\chi_{\tau(\theta) < T} \left(f(\tau, X_\tau, \theta) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(\tau, X_\tau, \theta) \right) \frac{\Delta\tau}{\Delta\theta} \right] \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (1.86)$$

где $R_\tau = R(\tau, X_\tau, \theta)$.

По построению для интегралов в (1.86) выполняется равенство

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)}^{\tau(\theta + \Delta\theta)} R(v, X_v(\theta + \Delta\theta), \theta + \Delta\theta) dv - \int_{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)}^{\tau(\theta)} R(v, X_v(\theta), \theta) dv \\ & = \int_{\tau(\theta)}^{\tau(\theta + \Delta\theta)} R(v, X_v(\theta + \eta\Delta\theta), \theta + \eta\Delta\theta) dv, \end{aligned} \quad (1.87)$$

где $\eta = \begin{cases} 1, & \text{если } \tau(\theta) < \tau(\theta + \Delta\theta), \\ 0, & \text{если } \tau(\theta + \Delta\theta) < \tau(\theta). \end{cases}$

Так как R непрерывная функция, то по теореме о среднем существует число γ , $\gamma \in [\tau(\theta) \wedge \tau(\theta + \Delta\theta), \tau(\theta) \vee \tau(\theta + \Delta\theta)]$ такое, что выполняется равенство

$$\int_{\tau(\theta)}^{\tau(\theta + \Delta\theta)} R(v, X_v(\theta + \eta\Delta\theta), \theta + \eta\Delta\theta) dv = R(\gamma, X_\gamma(\theta + \eta\Delta\theta), \theta + \eta\Delta\theta) \Delta\tau. \quad (1.88)$$

Перепишем разность математических ожиданий в (1.86) с учетом (1.87), (1.88) и получим для нее следующую оценку

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{t,x} \left[\chi_{\tau(\theta) < T} \frac{f(\tau, X_\tau) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(\tau, X_\tau)}{\Delta \theta R_\tau} (R(\gamma, X_\gamma(\theta + \eta \Delta \theta), \theta + \eta \Delta \theta) - R_\tau) \Delta \tau \right] \leq \\ & C \left(\mathbb{E}_{t,x} \left[\frac{R(\gamma, X_\gamma(\theta + \eta \Delta \theta), \theta + \eta \Delta \theta) - R_\tau}{\Delta \theta} \right]^2 \Delta \theta \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E}_{t,x} \frac{(\Delta \tau)^2}{\Delta \theta} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (1.89)$$

При $\Delta \theta \rightarrow 0$ величина $\frac{R(\gamma, X_\gamma(\theta + \eta \Delta \theta), \theta + \eta \Delta \theta) - R_\tau}{\Delta \theta}$ ограничена в силу непрерывности производных функции функции R по всем аргументам и существования с.к. производной $\frac{\partial X}{\partial \theta}$. При $\Delta \theta \rightarrow 0$ величина $\mathbb{E}_{t,x} \left[\frac{(\Delta \tau)^2}{\Delta \theta} \right]$ ограничена, т.к. в силу (1.60) имеем

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{t,x} \left[\frac{(\Delta \tau)^2}{\Delta \theta} \right] \leq C(2) \mathbb{E}_{t,x} \left| \frac{X_{\tilde{\tau}(\theta, \Delta \theta)}(\theta + \Delta \theta) - X_{\tilde{\tau}(\theta, \Delta \theta)}(\theta)}{\Delta \theta} \right| \leq \\ & C(2) \left(\mathbb{E}_{t,x} \left(\frac{X_{\tilde{\tau}(\theta, \Delta \theta)}(\theta + \Delta \theta) - X_{\tilde{\tau}(\theta, \Delta \theta)}(\theta)}{\Delta \theta} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow C(2) \left(\mathbb{E}_{t,x} \left(\frac{\partial X}{\partial \theta} \Big|_{\tau} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (1.90)$$

Таким образом, доказано, что при $\Delta \theta \rightarrow 0$ правая часть неравенства (1.89) сходится к нулю, и, следовательно, справедливо утверждение (1.86).

Покажем, что при $\Delta \theta \rightarrow 0$ сумма слагаемых в (1.82), содержащих интегралы с функциями R_j^g в подынтегральных выражениях, может быть как угодно близка к нулю за счет выбора параметров процессов λ_j . Действительно, при $\Delta \theta \rightarrow 0$ имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta \theta} \left[\int_t^{\tilde{\tau}(\theta, \Delta \theta)} \sum_j R_j^g(v, X_v(\theta + \Delta \theta), \theta + \Delta \theta) dW_j^\gamma(v) \right. \\ & - \int_t^{\tilde{\tau}(\theta, \Delta \theta)} \sum_j R_j^g(v, X_v(\theta + \Delta \theta), \theta + \Delta \theta) \lambda_j^h(v) dv \\ & - \left. \int_t^{\tilde{\tau}(\theta, \Delta \theta)} \sum_j R_j^g(v, X_v(\theta), \theta) dW_j^\gamma(v) + \int_t^{\tilde{\tau}(\theta, \Delta \theta)} \sum_j R_j^g(v, X_v(\theta), \theta) \lambda_j^h(v) dv \right] \rightarrow \\ & \int_t^{\tilde{\tau}(\theta, \Delta \theta)} \sum_j \frac{d}{d\theta} R_j^g(v, X_v(\theta), \theta) dW_j^\gamma(v) - \int_t^{\tilde{\tau}(\theta, \Delta \theta)} \sum_j \frac{d}{d\theta} R_j^g(v, X_v(\theta), \theta) \lambda_j^h(v) dv. \end{aligned} \quad (1.91)$$

На основании теоремы 1 для любого j ($j = 1, \dots, d$) и $\frac{\varepsilon}{2d}$ можно найти параметры $\beta 1_j$, $h 1_j$ процесса λ_j и задать ступенчатую функцию $\frac{d}{d\theta} R_{j,m}^g \lambda_j^{h 1_j}$ вида (1.45), определенную на равномерной сетке, такую, что будет выполняться неравенство

$$\mathbf{E}_{t,x} \left| \int_t^{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)} \frac{d}{d\theta} R_j^g(v, X_v(\theta), \theta) dW_j^\gamma(v) - \int_t^{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)} \frac{d}{d\theta} R_{j,m}^g(v, X_v(\theta), \theta) \lambda_j^{h 1_j}(v) dv \right| \leq \frac{\varepsilon}{2d}. \quad (1.92)$$

Согласно лемме 3 для любого j ($j = 1, \dots, d$) и $\frac{\varepsilon}{2d}$ можно найти параметры $\beta 2_j$, $h 2_j$ процесса λ_j и задать ступенчатую функцию $\frac{d}{d\theta} R_{j,m}^g \lambda_j^{h 2_j}$ вида (1.64), определенную на равномерной сетке, такую, что для некоторого $C > 0$ будет выполняться неравенство

$$\left| \mathbf{E}_{t,x} \left[\int_t^{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)} \frac{d}{d\theta} R_j^g(v, X_v(\theta), \theta) \lambda^{h 2_j}(v) dv - \int_t^{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)} \frac{d}{d\theta} R_{j,m}^g(v, \theta) \lambda_j^{h 2_j}(v) dv \right] \right| \leq C(h 2_j)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.93)$$

Для каждого j выберем $h 2_j$ таким, чтобы выполнялось неравенство $C(h 2_j)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\varepsilon}{2d}$, т.е. $h 2_j \leq \left(\frac{\varepsilon}{2dC}\right)^2$.

Зададим $h = \min_{j=1, \dots, d} (h 1_j, h 2_j)$ и $\beta = \max_{j=1, \dots, d} (\beta 1_j, \beta 2_j)$, и пусть m – соответствующий h номер последовательности ступенчатых функций. Тогда можно записать неравенства

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{E}_{t,x} \left(\int_t^{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)} \sum_j \frac{d}{d\theta} R_j^g(v, \theta) dW_j^\gamma(v) - \int_t^{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)} \sum_j \frac{d}{d\theta} R_j^g(v, \theta) \lambda_j^h(v) dv \right) \right| \\ & \leq \left| \mathbf{E}_{t,x} \left(\int_t^{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)} \sum_j \frac{d}{d\theta} R_j^g(v, \theta) dW_j^\gamma(v) - \int_t^{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)} \sum_j \frac{d}{d\theta} R_{j,m}^g(v, \theta) \lambda_j^h(v) dv \right) \right| \\ & + \left| \mathbf{E}_{t,x} \left(\int_t^{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)} \sum_j \frac{d}{d\theta} R_{j,m}^g(v, \theta) \lambda_j^h(v) dv - \int_t^{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)} \sum_j \frac{d}{d\theta} R_j^g(v, \theta) \lambda_j^h(v) dv \right) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_j \mathbf{E}_{t,x} \left| \int_t^{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)} \frac{d}{d\theta} R_j^g(v, \theta) dW_j^\gamma(v) - \int_t^{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)} \frac{d}{d\theta} R_{j,m}^g(v, \theta) \lambda_j^h(v) dv \right| \\
&+ \sum_j \left| \mathbf{E}_{t,x} \left(\int_t^{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)} \frac{d}{d\theta} R_{j,m}^g(v, \theta) \lambda_j^h(v) dv - \int_t^{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)} \frac{d}{d\theta} R_j^g(v, \theta) \lambda_j^h(v) dv \right) \right| \leq \varepsilon.
\end{aligned} \tag{1.94}$$

На основании теоремы 1, теоремы 2, леммы 1 и леммы 3 легко проверяется сходимость к нулю при $\Delta\theta \rightarrow 0$ суммы слагаемых в трех последних строках (1.82), содержащих интегралы с функциями R_j^g в подынтегральных выражениях.

Доказательство теоремы завершено.

Замечание 1.2. Для любой ограниченной области G в пространстве \mathbf{R}^d с границей ∂G класса \mathbf{C}^l , $l \geq 2$ можно построить функцию $g(x)$ класса \mathbf{C}^l , которая равна нулю на ∂G . Такой функцией, например, может быть функция расстояния до границы ∂G , которая определяется в окрестности ∂G как $l(x) = \min_{y \in \partial G} |x - y|$. Обычно задают функцию $l(x)$ так, чтобы она была положительной для точек внутри области и отрицательной для точек, находящихся вне области. Функцию $l(x)$ можно продолжить с сохранением ее гладкости на все пространство \mathbf{R}^d . Построение функций такого типа можно найти, например, в [101], [16]. Следовательно, функция g с требуемыми свойствами всегда существует в предположении, что граница области достаточно гладкая.

1.5 Моделирование траекторий процессов X и λ

Также как и в разделе 1.2 зададим равномерную сетку на отрезке $[t, T]$ с шагом $h = \frac{T-t}{N}$, узлы которой определяются равенством $t_i = t + hi$ ($i = 0, \dots, N$).

Из уравнения (1.41), умноженного на h , получаем

$$\Delta W^\gamma = h(\lambda(t_{n+1}) - e^{-\beta h} \lambda(t_n)). \quad (1.95)$$

В равенстве (1.95) определена взаимосвязь между изменениями на одном шаге процесса λ и винеровского процесса W^γ , так что (1.95) можно использовать при численном моделировании случайных процессов W^γ и λ . Можно, например, по заданной на каждом шаге траектории процесса λ определить соответствующую траекторию винеровского процесса W^γ , а можно, наоборот, по моделируемой траектории W^γ определить соответствующую траекторию процесса λ .

Пусть на каждом шаге траектории диффузионного процесса X моделируются методом Эйлера на основе винеровских процессов W_j^γ

$$\bar{X}_{t_{n+1}} = \bar{X}_{t_n} + ha^n + \sum_{j=1}^d \sigma_j^n \Delta_n W_j^\gamma, \quad (1.96)$$

где

$$\Delta_n W_j^\gamma \equiv W_{n+1,j}^\gamma - W_{n,j}^\gamma = \sqrt{h} \xi_j^n, \quad (1.97)$$

ξ_j^n – взаимно независимые случайные величины из $N(0, 1)$. Тогда моделирование соответствующих компонент λ_j осуществляется по формуле

$$\lambda_{j,t_{n+1}} = e^{-\beta h} \lambda_{j,t_n} + \frac{\Delta_n W_j^\gamma}{h}, \quad \lambda_{j,t_0} \in N\left(0, \frac{\vartheta}{\sqrt{2\beta}}\right), \quad (1.98)$$

где $\vartheta = \sqrt{\frac{2\beta}{h(1-e^{-2\beta h})}}$.

Заметим, что из последнего равенства следует, что при больших значениях βh значения $h\lambda_{j,t_{n+1}}$ и $\Delta_n W_j^\gamma$ могут различаться незначительно.

1.6 Численный пример

В качестве примера взята первая краевая задача для параболического уравнения с параметром θ

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\theta}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} + f(t, x_1, x_2, \theta) = 0, \quad t \in (t_0, T), \quad x \in G, \quad (1.99)$$

где $G = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$;

$$f(t, x_1, x_2, \theta) = \theta[2(\theta + x_1 + x_2) - 0.3(1 - x_1^2 - x_2^2)] \exp(-0.3(T - t)).$$

$$u(T, x_1, x_2, \theta) = \theta(1 - x_1^2 - x_2^2), \quad (1.100)$$

$$u(t, x_1, x_2, \theta) = 0, \quad \text{при } x_1^2 + x_2^2 = 1. \quad (1.101)$$

Функция $u(t, x_1, x_2, \theta) = \theta(1 - x_1^2 - x_2^2) \exp(-0.3(T - t))$ является точным решением задачи (1.99) – (1.101). В вычислениях для оценки производной $\partial u / \partial \theta$ использовалась функция $g = \exp(t - T)(1 - x_1^2 - x_2^2)$. В расчетах брались следующие значения числовых параметров: начальное время $t_0 = 0.2$; конец интервала времени $T = 3.5$; значение параметра $\beta = 5 \cdot 10^7$; значение параметра задачи $\theta = 0.5$; объем выборки $2 \cdot 10^5$. Оценки u и $\partial u / \partial \theta$ были определены для точек: $(0.50; 0.0)$, $(0.75; 0.0)$, $(0.95; 0.0)$. Результаты этих вычислений для размеров шага $h = 10^{-5}$ и $h = 10^{-6}$ представлены в таблицах ниже.

Таблица 1. Оценки $u(t, x)$

x_1	Оценка u ($h = 10^{-5}$)	Оценка u ($h = 10^{-6}$)	Точное значение u
0.50	$1.3999 \cdot 10^{-1} \pm 4.6 \cdot 10^{-4}$	$1.3951 \cdot 10^{-1} \pm 4.6 \cdot 10^{-4}$	$1.3934 \cdot 10^{-1}$
0.75	$8.196 \cdot 10^{-2} \pm 3.7 \cdot 10^{-4}$	$8.120 \cdot 10^{-2} \pm 3.7 \cdot 10^{-4}$	$8.1282 \cdot 10^{-2}$
0.95	$1.864 \cdot 10^{-2} \pm 1.9 \cdot 10^{-4}$	$1.818 \cdot 10^{-2} \pm 1.8 \cdot 10^{-4}$	$1.8114 \cdot 10^{-2}$

При определении оценок $u(t, x)$ и $\partial u / \partial \theta$ вычислялись 95% доверительные интервалы.

Таблица 2. Оценки $\frac{\partial u}{\partial \theta}(t, x)$

x_1	Оценка $\frac{\partial u}{\partial \theta}$ ($h = 10^{-5}$)	Оценка $\frac{\partial u}{\partial \theta}$ ($h = 10^{-6}$)	Точное значение $\frac{\partial u}{\partial \theta}$
0.50	$2.742 \cdot 10^{-1} \pm 1.05 \cdot 10^{-2}$	$2.779 \cdot 10^{-1} \pm 1.4 \cdot 10^{-3}$	$2.7868 \cdot 10^{-1}$
0.75	$1.606 \cdot 10^{-1} \pm 6.5 \cdot 10^{-3}$	$1.613 \cdot 10^{-1} \pm 1.0 \cdot 10^{-3}$	$1.6256 \cdot 10^{-1}$
0.95	$3.629 \cdot 10^{-2} \pm 4.3 \cdot 10^{-4}$	$3.591 \cdot 10^{-2} \pm 4.1 \cdot 10^{-4}$	$3.6229 \cdot 10^{-2}$

В табл. 3 приведены результаты расчета $E_{t,x}(\frac{\partial \tau}{\partial \theta} f(\tau, y(\tau), \theta))$. Из табл. 3 видно, что эти значения, вносят существенный вклад в оценку $\partial u / \partial \theta$. В табл. 4 –

Таблица 3. Полученные значения $E_{t,x}[\frac{\partial \tau}{\partial \theta} f(\tau, X(\tau))]$

x_1	$E_{t,x}[\frac{\partial \tau}{\partial \theta} f(\tau, X(\tau))]$ ($h = 10^{-5}$)	$E_{t,x}[\frac{\partial \tau}{\partial \theta} f(\tau, X(\tau))]$ ($h = 10^{-6}$)
0.50	$0.817 \cdot 10^{-1}$	$0.768 \cdot 10^{-1}$
0.75	$0.419 \cdot 10^{-1}$	$0.393 \cdot 10^{-1}$
0.95	$0.893 \cdot 10^{-2}$	$0.831 \cdot 10^{-2}$

6 представлены аналогичные результаты расчетов по варианту алгоритма аппроксимации границы плоскостью из [80].

Таблица 4. Оценки $u(t, x)$

x_1	Оценка u ($h = 10^{-5}$)	Оценка u ($h = 10^{-6}$)	Точное значение u
0.50	$1.3918 \cdot 10^{-1} \pm 4.6 \cdot 10^{-4}$	$1.3958 \cdot 10^{-1} \pm 4.6 \cdot 10^{-4}$	$1.3934 \cdot 10^{-1}$
0.75	$8.097 \cdot 10^{-2} \pm 3.7 \cdot 10^{-4}$	$8.113 \cdot 10^{-2} \pm 3.7 \cdot 10^{-4}$	$8.1282 \cdot 10^{-2}$
0.95	$1.780 \cdot 10^{-2} \pm 1.8 \cdot 10^{-4}$	$1.793 \cdot 10^{-2} \pm 1.8 \cdot 10^{-4}$	$1.8114 \cdot 10^{-2}$

Расчеты показали, что применение локальной аппроксимации границы плоскостью в точке $(0.95; 0.00)$ не привело к заметному улучшению оценок u и $\frac{\partial u}{\partial \theta}$.

Для исследования влияния значения параметра β на точность оценки $\partial u / \partial \theta$ был проведен вычислительный эксперимент, в ходе которого для различных значений β от 10^1 до 10^6 при шаге $h = 10^{-6}$ и объёме выборки $5 \cdot 10^5$ были определены

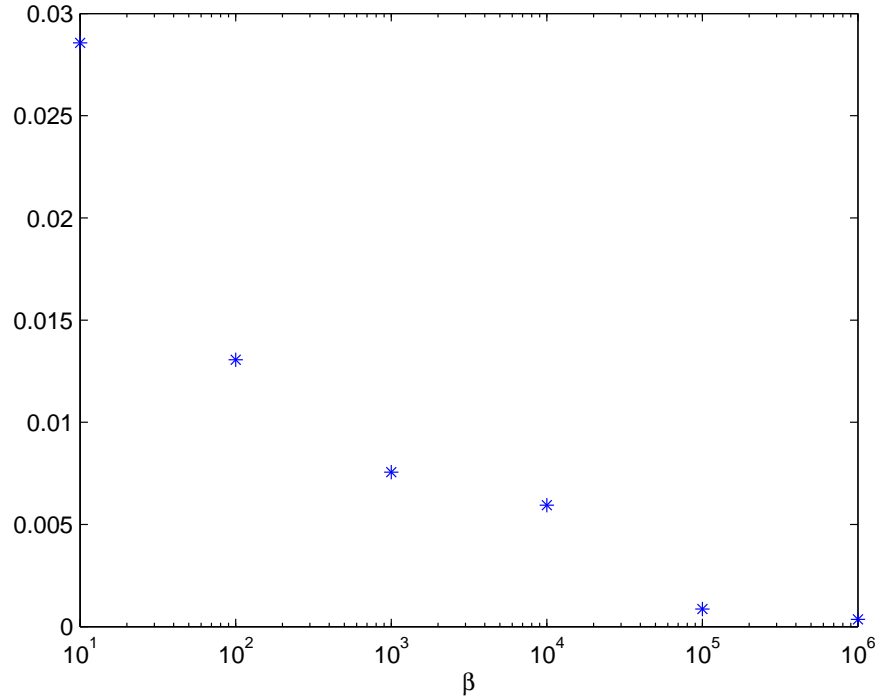


Рис. 1. Абсолютные величины разностей оценок $\partial u/\partial\theta$ и её точного значения при различных значениях β

оценки $\partial u/\partial\theta$. На рис. 1 представлены значения разности по абсолютной величине полученных оценок производной и её точного значения. При этом наглядно продемонстрировано улучшение оценок при увеличении β . Уже при $\beta h = 1$ получаются достаточно точные оценки $\partial u/\partial\theta$.

Таблица 5. Оценки $\frac{\partial u}{\partial\theta}(t, x)$

x_1	Оценка $\frac{\partial u}{\partial\theta}$ ($h = 10^{-5}$)	Оценка $\frac{\partial u}{\partial\theta}$ ($h = 10^{-6}$)	Точное значение $\frac{\partial u}{\partial\theta}$
0.50	$2.761 \cdot 10^{-1} \pm 1.3 \cdot 10^{-3}$	$2.787 \cdot 10^{-1} \pm 1.3 \cdot 10^{-3}$	$2.7868 \cdot 10^{-1}$
0.75	$1.605 \cdot 10^{-1} \pm 0.9 \cdot 10^{-3}$	$1.616 \cdot 10^{-1} \pm 0.9 \cdot 10^{-3}$	$1.6256 \cdot 10^{-1}$
0.95	$3.536 \cdot 10^{-2} \pm 4.0 \cdot 10^{-4}$	$3.563 \cdot 10^{-2} \pm 4.0 \cdot 10^{-4}$	$3.6229 \cdot 10^{-2}$

Таблица 6. Полученные значения $E_{t,x} \left[\frac{\partial \tau}{\partial \theta} f(\tau, X(\tau)) \right]$

x_1	$E_{t,x} \left[\frac{\partial \tau}{\partial \theta} f(\tau, X(\tau)) \right] (h = 10^{-5})$	$E_{t,x} \left[\frac{\partial \tau}{\partial \theta} f(\tau, X(\tau)) \right] (h = 10^{-6})$
0.50	$0.776 \cdot 10^{-1}$	$0.758 \cdot 10^{-1}$
0.75	$0.348 \cdot 10^{-1}$	$0.387 \cdot 10^{-1}$
0.95	$0.796 \cdot 10^{-2}$	$0.792 \cdot 10^{-2}$

1.7 Метод FBVP2 для определения оценок производных вида $\partial u / \partial \theta$

В данном разделе предложен метод FBVP2 для оценки производных по параметрам вида $\partial u / \partial \theta$, который так же как и метод FBVP1 основан на применении формулы Ито к функции g , равной нулю на границе. При этом дополнительно требуется, чтобы были равны нулю на границе первые производные функции g по пространственным переменным. Для решения задач методом FBVP2 не требуется моделирование процессов λ_j , что дает некоторое уменьшение вычислительных затрат по сравнению с FBVP1. Но для оценки производных $\partial u / \partial \theta$ методом FBVP2 требуются более сильные условия гладкости на коэффициенты СДУ и границу области, а именно

Д') производные

$$\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}, \frac{\partial a}{\partial \theta_i}, \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial \theta_i}, \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}, \frac{\partial \sigma}{\partial \theta_i}, \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial \theta_i}, \frac{\partial a}{\partial t}, \frac{\partial \sigma}{\partial t};$$

непрерывны и ограничены в $[0, \infty) \times \mathbf{R}^d \times U$;

Е') граница ∂G класса \mathbf{C}^4 .

Теорема 4. Пусть коэффициенты уравнения (1.1) и функции φ, ψ, f удовлетворяют условиям А – Г, Д', Е'. Тогда для $\frac{\partial u}{\partial \theta}$ справедливо равенство

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \theta}(t, x) &= \mathbb{E}_{t,x} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(X_T, \theta) Z_T + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(X_T, \theta) \right) \chi_{\tau > T} \right. \\
&+ \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}(\tau, X_\tau, \theta) Z_\tau + \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(\tau, X_\tau, \theta) \right) \chi_{\tau < T} \\
&\left. + \int_t^{T \wedge \tau} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(v, X_v, \theta) Z_v + \frac{\partial f}{\partial \theta}(v, X_v, \theta) \right) dv \right] + \Phi(\theta) , \quad (1.102)
\end{aligned}$$

где $\Phi(\theta)$ есть предел в (1.13) и он определяется из равенства

$$\begin{aligned}
\Phi(\theta) &= -\mathbb{E}_{t,x} \left[\chi_{\tau < T} \frac{f(\tau, X_\tau, \theta) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(\tau, X_\tau, \theta)}{(Lg)_\tau} \left(\int_t^\tau \frac{d}{d\theta} (Lg)_v dv \right. \right. \\
&\left. \left. + \int_t^\tau \frac{d}{d\theta} \left(\sum_{l,j} \frac{\partial g}{\partial x_l} \sigma_{lj} \right)_v dW_j(v) \right) \right], \quad (1.103)
\end{aligned}$$

в котором в качестве g можно выбрать любую функцию класса $\mathbf{C}^4(\mathbf{R}^d)$, равную нулю на ∂G вместе со своими первыми производными, но при этом значения Lg не обращаются в ноль на ∂G для всех $\theta \in U$.

Доказательство. Равенство (1.102) получается в результате дифференцирования по θ равенства (1.2). Ниже будет показано, что предел в (1.13) существует и при этом $\Phi(\theta)$ удовлетворяет равенству (1.103).

Так как функция g равна нулю на границе, то в результате применения формулы Ито, получим

$$0 = g(x) + \int_t^{\tau(\theta)} Lg(v, X_v(\theta), \theta) dv + \int_t^{\tau(\theta)} \sum_j R_j^g(v, X_v(\theta), \theta) dW_j(v) . \quad (1.104)$$

Как и в разделе 1.4 используем обозначение $\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta) = \tau(\theta) \wedge \tau(\theta + \Delta\theta)$. Применяя (1.104) для значений параметра θ и $\theta + \Delta\theta$, можем записать равенство

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{\Delta\theta} \left[\int_t^{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)} (Lg(v, X_v(\theta + \Delta\theta), \theta + \Delta\theta) - Lg(v, X_v(\theta), \theta)) dv \right. \\
&+ \int_{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)}^{\tau(\theta + \Delta\theta)} Lg(v, X_v(\theta + \Delta\theta), \theta + \Delta\theta) dv - \int_{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)}^{\tau(\theta)} Lg(v, X_v(\theta), \theta) dv \\
&+ \int_t^{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)} \sum_j (R_j^g(v, X_v(\theta + \Delta\theta), \theta + \Delta\theta) - R_j^g(v, X_v(\theta), \theta)) dW_j(v) \quad (1.105) \\
&+ \int_{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)}^{\tau(\theta + \Delta\theta)} \sum_j R_j^g(v, X_v(\theta + \Delta\theta), \theta + \Delta\theta) dW_j(v) \\
&\left. - \int_{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)}^{\tau(\theta)} \sum_j R_j^g(v, X_v(\theta), \theta) dW_j(v) \right].
\end{aligned}$$

Умножим (1.105) на $\chi_{\tau < T} \frac{f(\tau, X_\tau, \theta) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(\tau, X_\tau, \theta)}{(Lg)_\tau}$, где τ берется при значении параметра θ , и рассмотрим предел при $\Delta\theta \rightarrow 0$ математического ожидания правой части полученного равенства.

Покажем, что

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \mathbf{E}_{t,x} \left[\chi_{\tau(\theta) < T} \frac{f(\tau, X_\tau, \theta) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(\tau, X_\tau, \theta)}{(Lg)_\tau} \cdot \right. \\
&\quad \left. \int_t^{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)} \frac{Lg(v, X_v(\theta + \Delta\theta), \theta + \Delta\theta) - Lg(v, X_v(\theta), \theta)}{\Delta\theta} dv \right] \\
&= \mathbf{E}_{t,x} \left[\chi_{\tau(\theta) < T} \frac{f(\tau, X_\tau, \theta) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(\tau, X_\tau, \theta)}{(Lg)_\tau} \int_t^{\tau(\theta)} \frac{d}{d\theta} Lg(v, X_v(\theta), \theta) dv \right]. \quad (1.106)
\end{aligned}$$

Для этого запишем неравенство, которое следует из того, что случайная величина $\chi_{\tau(\theta) < T} \frac{f(\tau, X_\tau, \theta) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(\tau, X_\tau, \theta)}{(Lg)_\tau}$ п.в. ограничена

$$\begin{aligned}
&\left| \mathbf{E}_{t,x} \left[\chi_{\tau(\theta) < T} \frac{f(\tau, X_\tau, \theta) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(\tau, X_\tau, \theta)}{(Lg)_\tau} \cdot \right. \right. \\
&\quad \left. \left(\int_t^{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)} \frac{Lg(v, X_v(\theta + \Delta\theta), \theta + \Delta\theta) - Lg(v, X_v(\theta), \theta)}{\Delta\theta} dv \right) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_t^{\tau(\theta)} \frac{d}{d\theta} Lg(v, X_v(\theta), \theta) dv \Big) \Big| \leq C \int_t^T \Big| \mathbf{E}_{t,x} \left[\chi_{v < \tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)} \cdot \right. \\
& \left. \left(\frac{Lg(v, X_v(\theta + \Delta\theta), \theta + \Delta\theta) - Lg(v, X_v(\theta), \theta)}{\Delta\theta} - \frac{d}{d\theta} Lg(v, X_v(\theta), \theta) \right) \right] \Big| dv \\
& + C \Big| \mathbf{E}_{t,x} \left[\int_{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)}^{\tau(\theta)} \frac{d}{d\theta} Lg(v, X_v(\theta), \theta) dv \right] \Big| , \tag{1.107}
\end{aligned}$$

где $C = \sup_{(v,x,\theta) \in [0,T] \times \partial G \times U} \left| \frac{f(v,x,\theta) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(\tau, X_\tau, \theta)}{(Lg)(v,x,\theta)} \right|$.

Поскольку производные Lg по x , θ непрерывны и ограничены в \bar{G} , то можно показать, что при $\Delta\theta \rightarrow 0$

$$\frac{Lg(v, X_v(\theta + \Delta\theta), \theta + \Delta\theta) - Lg(v, X_v(\theta), \theta)}{\Delta\theta} \rightarrow \frac{d}{d\theta} Lg(v, X_v(\theta), \theta)$$

по вероятности. Поэтому первое слагаемое в правой части (1.107) стремится к нулю при $\Delta\theta \rightarrow 0$.

Также, из непрерывности и ограниченности в \bar{G} производных Lg следует, что величина $\frac{d}{d\theta} Lg(v, X_v(\theta), \theta)$ ограничена. Поэтому второе слагаемое в правой части (1.107) стремится к нулю при $\Delta\theta \rightarrow 0$ на основании леммы 1

$$\begin{aligned}
& \left| \mathbf{E}_{t,x} \left[\int_{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)}^{\tau(\theta)} \frac{d}{d\theta} Lg(v, X_v(\theta), \theta) dv \right] \right| \leq C_1 \mathbf{E}_{t,x} \left| \tau(\theta) - \tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta) \right| \\
& \leq C_1 \mathbf{E}_{t,x} |\Delta\tau| \rightarrow 0 \text{ при } \Delta\theta \rightarrow 0 , \tag{1.108}
\end{aligned}$$

где $C_1 = \sup_{(v,x,\theta) \in [0,T] \times \partial G \times U} \left| \frac{d}{d\theta} Lg(v, X_v(\theta), \theta) \right|$, $\Delta\tau = \tau(\theta + \Delta\theta) - \tau(\theta)$.

Докажем, что при $\Delta\theta \rightarrow 0$

$$\mathbf{E}_{t,x} \left[\chi_{\tau(\theta) < T} \frac{f(\tau, X_\tau, \theta) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(\tau, X_\tau, \theta)}{\Delta\theta (Lg)_\tau} \left(\int_{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)}^{\tau(\theta + \Delta\theta)} Lg(v, X_v(\theta + \Delta\theta), \theta + \Delta\theta) dv \right) \right]$$

$$- \int_{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)}^{\tau(\theta)} Lg(v, X_v(\theta), \theta) dv \Bigg] - \mathbf{E}_{t,x} \left[\chi_{\tau(\theta) < T} \left(f(\tau, X_\tau, \theta) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(\tau, X_\tau, \theta) \right) \frac{\Delta\tau}{\Delta\theta} \right] \rightarrow 0. \quad (1.109)$$

По построению для интегралов в (1.109) выполняется равенство

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)}^{\tau(\theta + \Delta\theta)} Lg(v, X_v(\theta + \Delta\theta), \theta + \Delta\theta) dv - \int_{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)}^{\tau(\theta)} Lg(v, X_v(\theta), \theta) dv \\ &= \int_{\tau(\theta)}^{\tau(\theta + \Delta\theta)} Lg(v, X_v(\theta + \eta\Delta\theta), \theta + \eta\Delta\theta) dv, \end{aligned} \quad (1.110)$$

$$\text{где } \eta = \begin{cases} 1, & \text{если } \tau(\theta) < \tau(\theta + \Delta\theta), \\ 0, & \text{если } \tau(\theta + \Delta\theta) < \tau(\theta). \end{cases}$$

Обозначим $C_2 = \sup_{(v,x,\theta) \in [0,T] \times \partial G \times U} \left| \frac{f(v,x,\theta) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(\tau, X_\tau, \theta)}{(Lg)_\tau} \right|$. Применяя формулу Ито к $Lg(v, X_v(\theta + \eta\Delta\theta), \theta + \eta\Delta\theta)$, с учетом (1.110) запишем неравенство для модуля выражения в (1.109)

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{E}_{t,x} \left[\chi_{\tau(\theta) < T} \frac{f(\tau, X_\tau, \theta) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(\tau, X_\tau, \theta)}{\Delta\theta (Lg)_\tau} \right. \right. \\ & \left. \left. \int_{\tau(\theta)}^{\tau(\theta + \Delta\theta)} \left(Lg(v, X_v(\theta + \eta\Delta\theta), \theta + \eta\Delta\theta) - (Lg)_\tau \right) dv \right] \right| \\ & \leq C_2 \mathbf{E}_{t,x} \left[\chi_{(\tau(\theta) < T) \& (\eta=1)} \frac{\Delta\tau}{\Delta\theta} \left| Lg(\tau, X_\tau(\theta + \Delta\theta), \theta + \Delta\theta) - Lg(\tau, X_\tau(\theta), \theta) \right| \right] \\ & \quad + C_2 \left| \mathbf{E}_{t,x} \left[\chi_{\tau(\theta) < T} \frac{1}{\Delta\theta} \int_{\tau(\theta)}^{\tau(\theta + \Delta\theta)} dv \int_{\tau(\theta)}^v L^2 g(s, X_s(\theta + \eta\Delta\theta), \theta + \eta\Delta\theta) ds \right] \right| \end{aligned}$$

$$+C_2 \left| \mathbf{E}_{t,x} \left[\chi_{\tau(\theta) < T} \frac{1}{\Delta\theta} \int_{\tau(\theta)}^{\tau(\theta+\Delta\theta)} dv \int_{\tau(\theta)}^v \sum_j R_j^{Lg}(s, X_s(\theta + \eta\Delta\theta), \theta + \eta\Delta\theta) dW_j(s) \right] \right|. \quad (1.111)$$

Очевидно, второе и третье слагаемые в правой части (1.111) стремятся к нулю при $\Delta\theta \rightarrow 0$. Рассмотрим $\mathbf{E}_{t,x} [\chi_{\tau(\theta) < T \& (\eta=1)} \frac{\Delta\tau}{\Delta\theta} |\Delta Lg|]$, где $\Delta Lg := Lg(\tau, X_\tau(\theta + \Delta\theta), \theta + \Delta\theta) - Lg(\tau, X_\tau(\theta), \theta)$. Как было указано выше, $\Delta Lg \rightarrow 0$ при $\Delta\theta \rightarrow 0$ по вероятности. Зададим $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$. Пусть $\delta > 0$ такое, что $P\{|\Delta Lg| > \varepsilon_1\} < \varepsilon_2$ при $\Delta\theta < \delta$. Тогда при $\Delta\theta < \delta$

$$\mathbf{E}_{t,x} \left[\chi_{(\tau(\theta) < T) \& (\eta=1)} \frac{\Delta\tau}{\Delta\theta} |\Delta Lg| \right] < 2KM\varepsilon_2 + K\varepsilon_1,$$

где K – постоянная в неравенстве (1.61), $M = \sup_{[0,T] \times \partial G \times U} Lg$. Таким образом, (1.109) доказано.

Рассмотрим теперь интегралы по винеровскому процессу в (1.105). Покажем, что

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \mathbf{E}_{t,x} \left[\chi_{\tau(\theta) < T} \frac{f(\tau, X_\tau) + \frac{\partial\psi}{\partial t}(\tau, X_\tau)}{(Lg)_\tau} \right. \\ & \quad \cdot \left. \int_t^{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)} \sum_j \frac{R_j^g(v, X_v(\theta + \Delta\theta), \theta + \Delta\theta) - R_j^g(v, X_v(\theta), \theta)}{\Delta\theta} dW_j(v) \right] \\ & = \mathbf{E}_{t,x} \left[\chi_{\tau(\theta) < T} \frac{f(\tau, X_\tau) + \frac{\partial\psi}{\partial t}(\tau, X_\tau)}{(Lg)_\tau} \int_t^{\tau(\theta)} \sum_j \frac{d}{d\theta} \left(R_j^g(v, X_v(\theta), \theta) \right) dW_j(v) \right]. \quad (1.112) \end{aligned}$$

Для этого рассмотрим цепочку неравенств

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{E}_{t,x} \left[\chi_{\tau(\theta) < T} \frac{f(\tau, X_\tau) + \frac{\partial\psi}{\partial t}(\tau, X_\tau)}{(Lg)_\tau} \right. \right. \\ & \quad \left. \left(\int_t^T \chi_{v \leq \tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)} \sum_j \left(\frac{R_j^g(v, X_v(\theta + \Delta\theta), \theta + \Delta\theta) - R_j^g(v, X_v(\theta), \theta)}{\Delta\theta} \right) \right) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{d}{d\theta} R_j^g(v, X_v(\theta), \theta) dW_j(v) - \int_{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)}^{\tau(\theta)} \sum_j \frac{d}{d\theta} \left(R_j^g(v, X_v(\theta), \theta) \right) dW_j(v) \right| \\
& \leq C_2 \int_t^T \left(\sum_j \mathbf{E}_{t,x} \left(\frac{R_j^g(v, X_v(\theta + \Delta\theta), \theta + \Delta\theta) - R_j^g(v, X_v(\theta), \theta)}{\Delta\theta} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{d}{d\theta} R_j^g(v, X_v(\theta), \theta) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dv + C_2 \mathbf{E}_{t,x} \left| \int_{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)}^{\tau(\theta)} \sum_j \frac{d}{d\theta} \left(R_j^g(v, X_v(\theta), \theta) \right) dW_j(v) \right|.
\end{aligned} \tag{1.113}$$

Функция $R_j^g(v, X_v(\theta + \Delta\theta), \theta + \Delta\theta)$ и ее производные по x , θ ограничены в \bar{G} .

Поэтому можно показать, что при $\Delta\theta \rightarrow 0$

$$\frac{R_j^g(v, X_v(\theta + \Delta\theta), \theta + \Delta\theta) - R_j^g(v, X_v(\theta), \theta)}{\Delta\theta} \rightarrow \frac{d}{d\theta} R_j^g(v, X_v(\theta), \theta)$$

по вероятности. Отсюда следует, что первое слагаемое в правой части (1.113) стремится к нулю при $\Delta\theta \rightarrow 0$. Так как функция $\frac{d}{d\theta} R_j^g(\cdot, X, \theta)$ ограничена, то очевидно, что второе слагаемое стремится к нулю при $\Delta\theta \rightarrow 0$.

Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\begin{aligned}
& \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\theta} \mathbf{E}_{t,x} \left[\chi_{\tau < T} \frac{f(\tau, X_\tau) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(\tau, X_\tau)}{R(\tau, X_\tau)} \right. \\
& \left. \left(\int_{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)}^{\tau(\theta + \Delta\theta)} \sum_j R_j^g(v, X_v(\theta + \Delta\theta), \theta + \Delta\theta) dW_j(v) \right. \right. \\
& \left. \left. - \int_{\tilde{\tau}(\theta, \Delta\theta)}^{\tau(\theta)} \sum_j R_j^g(v, X_v(\theta), \theta) dW_j(v) \right) \right] = 0.
\end{aligned} \tag{1.114}$$

Доказательство (1.114) следует из того, что функция R_j^g равна нулю на границах отрезков $[\tilde{\tau}, \tau(\theta)]$ и $[\tilde{\tau}, \tau(\theta + \Delta\theta)]$. Применяя формулу Ито к этой функции в подынтегральных выражениях в (1.114), легко можно убедиться в справедливости (1.114). Теорема доказана.

1.8 Анализ погрешности аппроксимации производных по параметрам

Обозначим $\frac{\partial u^N}{\partial \theta}$ аппроксимацию производной $\frac{\partial u}{\partial \theta}$, полученную на основе формул (1.102), (1.103) путем численного решения СДУ методом Эйлера, а \bar{Z}_{t_k} соответствующую аппроксимацию с.к. производной случайного процесса X по параметру θ в точке t_k ($k = 1, \dots, N$).

Определение оценок $\frac{\partial u}{\partial \theta}$ сводится к усреднению полученных на основе численного моделирования значений случайной величины

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\bar{X}_{t_N}, \theta) \bar{Z}_{t_N} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\bar{X}_{t_N}, \theta) \right) \chi_{\tau^N > t_N} \\ & + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}(\tau^N, \bar{X}_{\tau^N}, \theta) \bar{Z}_{\tau^N} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(\tau^N, \bar{X}_{\tau^N}, \theta) \right) \chi_{\tau^N < t_N} \\ & + h \sum_{k=0}^{(N-1) \wedge (i^\tau - 1)} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(t_k, \bar{X}_{t_k}) \bar{Z}_{t_k} + \frac{\partial f}{\partial \theta}(t_k, \bar{X}_{t_k}) \right) \\ & - \chi_{\tau^N < t_N} \frac{f(\tau^N, \bar{X}_{\tau^N}) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(\tau^N, \bar{X}_{\tau^N})}{(Lg)_\tau^N} \\ & \cdot \sum_{k=0}^{i^\tau - 1} \left(h \frac{d}{d\theta} (Lg)_{t_k} + \frac{d}{d\theta} \left(\sum_{l,j} \frac{\partial g}{\partial x_l} \sigma_{l,j} \right)_{t_k} (W_j(t_{k+1}) - W_j(t_k)) \right). \end{aligned}$$

Добавим к системе СДУ (1.1), (1.14) еще уравнение

$$Y(s, \theta) = \int_t^s \frac{d}{d\theta} (Lg)_v dv + \int_t^s \frac{d}{d\theta} \left(\sum_{l,j} \frac{\partial g}{\partial x_l} \sigma_{l,j} \right)_v dW_j(v). \quad (1.115)$$

Далее, символом \bar{Y} будет обозначаться аппроксимация процесса Y , полученная методом Эйлера.

В ходе исследования сходимости $\frac{\partial u^N}{\partial \theta}$ к $\frac{\partial u}{\partial \theta}$ будем рассматривать выражение в правой части (1.102) как математическое ожидание функционала случайного

процесса $(X., Z., Y.)$

$$\begin{aligned} \Psi(X, Z, Y) = & \mathbf{E}_{t,x,0,0} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(X_T, \theta) Z_T + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(X_T, \theta) \right) \chi_{\tau > T} \right. \\ & + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}(\tau, X_\tau, \theta) Z_\tau + \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(\tau, X_\tau, \theta) \right) \chi_{\tau < T} \\ & \left. + \int_t^{T \wedge \tau} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(v, X_v) Z_v + \frac{\partial f}{\partial \theta}(v, X_v) \right) dv - \chi_{\tau < T} \frac{f(\tau, X_\tau) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(\tau, X_\tau)}{(Lg)_\tau} Y_\tau \right], \quad (1.116) \end{aligned}$$

где нижние индексы у символа математического ожидания $\mathbf{E}_{t,x,0,0}$ означают, что процесс $(X., Z., Y.)$ начинает свое движение в точке $(t, x, 0, 0) \in [0, T) \times G \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}$.

При исследовании сходимости аппроксимации выражения в (1.116), полученной методом Эйлера, применим метод, основанный на представлении $\Psi(X, Z, Y)$ в виде решения краевой задачи для параболического уравнения в пространстве переменных (t, x, z, y) .

Введем обозначения коэффициентов в СДУ для $Z.$ и $Y.$ соответственно

$$\begin{aligned} \sigma_Z &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} z + \frac{\partial \sigma}{\partial \theta}, \quad a_Z = \frac{\partial a}{\partial x} z + \frac{\partial a}{\partial \theta}, \\ \sigma_Y &= \left(\frac{d}{d\theta} \left(\sum_l \frac{\partial g}{\partial x_l} \sigma_{l1} \right), \dots, \frac{d}{d\theta} \left(\sum_l \frac{\partial g}{\partial x_l} \sigma_{ld} \right) \right), \quad a_Y = \frac{d}{d\theta} (Lg). \quad (1.117) \end{aligned}$$

Обозначим $\Pi = (0, T) \times G \times \mathbf{R}^d \times R$. Случайному процессу $(X., Z., Y.)$ поставим в соответствие следующий параболический оператор

$$\mathcal{L} \equiv \frac{\partial}{\partial s} + \mathcal{A}, \quad (1.118)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \equiv & \frac{1}{2} \left(\sum_{k,l=1}^d (\sigma \sigma^T)_{k,l} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k,l=1}^d (\sigma \sigma_Z^T)_{k,l} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial z_l} + \sum_{k=1}^d (\sigma \sigma_Y^T)_k \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial y} \right. \\ & \left. + \sum_{k,l=1}^d (\sigma_Z \sigma^T)_{k,l} \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial x_l} + \sum_{k,l=1}^d (\sigma_Z \sigma_Z^T)_{k,l} \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial z_l} + \sum_{k=1}^d (\sigma_Z \sigma_Y^T)_k \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial y} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^d (\sigma_Y \sigma^T)_k \frac{\partial^2}{\partial y \partial x_k} + \sum_{k=1}^d (\sigma_Y \sigma_Z^T)_k \frac{\partial^2}{\partial y \partial z_k} + (\sigma_Y \sigma_Y^T) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\
& + \sum_{k=1}^d a_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^d (a_Z)_k \frac{\partial}{\partial z_k} + a_Y \frac{\partial}{\partial y}
\end{aligned} \tag{1.119}$$

Положим

$$\psi_\theta(t, x, z, y) \equiv \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, x)z + \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(t, x) - \frac{f(t, x) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x)}{Lg(t, x)}y. \tag{1.120}$$

Поставим в соответствие функционалу случайного процесса (X, Y, Z) , определенному в (1.116), следующую краевую задачу

$$\mathcal{L}\tilde{u} + \sum_{k=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_k} z_k + \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0, \quad (t, x, z, y) \in \Pi; \tag{1.121}$$

$$\tilde{u}(T, x, z, y) = \sum_{k=1}^d \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x, \theta) z_k + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(x, \theta), \quad (x, z, y) \in G \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}; \tag{1.122}$$

$$\tilde{u}(t, x, z, y) = \psi_\theta(t, x, z, y), \quad (t, x, z, y) \in S_T \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}. \tag{1.123}$$

В задаче (1.121) – (1.123) матрица при старших производных в параболическом уравнении вырождена. В связи с этим введем в рассмотрение задачу с невырожденной матрицей при старших производных, которую будем называть *регуляризованной задачей*

$$\mathcal{L}u_\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{k=1}^d \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial z_k^2} + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial y^2} + \sum_{k=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_k} z_k + \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0, \quad (t, x, z, y) \in \Pi; \tag{1.124}$$

$$u_\varepsilon(T, x, z, y) = \sum_{k=1}^d \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x, \theta) z_k + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(x, \theta), \quad (x, z, y) \in G \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}; \tag{1.125}$$

$$u_\varepsilon(t, x, z, y) = \psi_\theta(t, x, z, y), \quad (t, x, z, y) \in S_T \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}. \tag{1.126}$$

Параболическому оператору в (1.124) можно поставить в соответствие диффузионный процесс. Обозначим этот процесс как $(X_\cdot, Z_\cdot^\varepsilon, Y_\cdot^\varepsilon)$, при этом $Z_\cdot^\varepsilon, Y_\cdot^\varepsilon$

определяются из уравнений

$$\begin{aligned} Z_s^\varepsilon &= \int_t^s \left(\frac{\partial a}{\partial x} Z_v^\varepsilon + \frac{\partial a}{\partial \theta_i} \right) dv + \int_t^s \sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial \sigma_j}{\partial x} Z_v^\varepsilon + \frac{\partial \sigma_j}{\partial \theta} \right) dW_j(v) \\ &\quad + \varepsilon \int_t^s \sum_{j=1}^d e_j dW_{d+j}(v) \quad , \end{aligned} \quad (1.127)$$

$$Y_s^\varepsilon = \int_t^s \frac{d}{d\theta} (Lg)_v dv + \int_t^s \frac{d}{d\theta} \left(\sum_{j,l=1}^d \frac{\partial g}{\partial x_l} \sigma_{l,j} \right)_v dW_j(v) + \varepsilon \int_t^s dW_{2d+1}(v). \quad (1.128)$$

В (1.127) e_j ($j = 1, \dots, d$) обозначены единичные d -мерные вектор-столбцы, W_1, \dots, W_{2d+1} – взаимно независимые d -мерные винеровские процессы. Вектор сноса и матрица диффузии процесса (X, Z, Y) соответственно имеют вид

$$A^\varepsilon = \begin{pmatrix} a \\ a_Z \\ a_Y \end{pmatrix}, \quad S^\varepsilon (S^\varepsilon)^T, \quad \text{где} \quad S^\varepsilon = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ \sigma_Z & \varepsilon I_d & 0 \\ \sigma_Y & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}. \quad (1.129)$$

Из построения регуляризованной задачи (1.124) – (1.126) и равенства (1.116) ясно, что $\Psi(X, Z^\varepsilon, Y^\varepsilon) = u_\varepsilon(t, x, 0, 0)$, а из линейности Ψ по Z и Y следует

$$\Psi(X, Z, Y) = \Psi_1(X, Z - Z^\varepsilon, Y - Y^\varepsilon) + \Psi(X, Z^\varepsilon, Y^\varepsilon), \quad (1.130)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_1(X, Z - Z^\varepsilon, Y - Y^\varepsilon) &= \mathbb{E}_{t,x,0,0} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} (X_T, \theta) (Z_T - Z_T^\varepsilon) \right) \chi_{\tau > T} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} (\tau, X_\tau, \theta) (Z_\tau - Z_\tau^\varepsilon) \right) \chi_{\tau < T} \right. \\ &\quad \left. + \int_t^{T \wedge \tau} \left(\frac{\partial f}{\partial x} (v, X_v) (Z_v - Z_v^\varepsilon) \right) dv - \chi_{\tau < T} \frac{f(\tau, X_\tau) + \frac{\partial \psi}{\partial t} (\tau, X_\tau)}{(Lg)_\tau} (Y_\tau - Y_\tau^\varepsilon) \right]. \end{aligned} \quad (1.131)$$

Очевидно, что равенство аналогичное (1.130), можно записать и для численных оценок. Обозначим Θ^N , Θ_δ^N , Θ_ε^N разностные аппроксимации выражений под

знаком математического ожидания, входящих в $\Psi(X, Z, Y)$, $\Psi_1(X, Z - Z^\varepsilon, Y - Y^\varepsilon)$ и $\Psi(X, Z^\varepsilon, Y^\varepsilon)$, соответственно, которые получаются в результате применения метода Эйлера. Тогда, поскольку X_\cdot не зависит от $Z_\cdot, Y_\cdot, Z_\cdot^\varepsilon, Y_\cdot^\varepsilon$, и при этом $Z_\cdot, Y_\cdot, Z_\cdot^\varepsilon, Y_\cdot^\varepsilon$ входят линейно в выражениях для $\Psi(X, Z, Y)$, $\Psi_1(X, Z - Z^\varepsilon, Y - Y^\varepsilon)$ то, верно равенство

$$\Theta^N = \Theta_\delta^N + \Theta_\varepsilon^N. \quad (1.132)$$

Введем обозначения: $Z_\cdot^\delta = Z_\cdot - Z_\cdot^\varepsilon$, $Y_\cdot^\delta = Y_\cdot - Y_\cdot^\varepsilon$, $a_Z^\delta = \frac{\partial a}{\partial x} Z$, $\sigma_Z^\delta = \frac{\partial \sigma}{\partial x} Z$, $a_Y^\delta = \frac{\partial}{\partial x} (LgZ) Z$, $\sigma_Y^\delta = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial g}{\partial x} \sigma \right) Z$, $\psi_\theta^\delta(t, x, z, y) = \sum_k \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x_k} z_k - \frac{f(t, x) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x)}{(Lg)_t} y$.

Под знаком математического ожидания в (1.131) находится функционал случайного процесса $(X_\cdot, Z_\cdot^\delta, Y_\cdot^\delta)$, вектор сноса и матрица диффузии которого соответственно имеют вид

$$A^\delta = \begin{pmatrix} a \\ a_Z^\delta \\ a_Y^\delta \end{pmatrix}, \quad S^\delta (S^\delta)^T, \quad \text{где} \quad S^\delta = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ \sigma_Z^\delta & -\varepsilon I_d & 0 \\ \sigma_Y^\delta & 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}. \quad (1.133)$$

Введем оператор

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\delta \equiv & \frac{1}{2} \left(\sum_{k,l=1}^d (\sigma \sigma^T)_{k,l} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k,l=1}^d (\sigma \sigma_Z^{\delta T})_{k,l} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial z_l} + \sum_{k=1}^d (\sigma \sigma_Y^{\delta T})_k \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial y} \right. \\ & + \sum_{k,l=1}^d (\sigma_Z^\delta \sigma^T)_{k,l} \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial x_l} + \sum_{k,l=1}^d [(\sigma_Z^\delta \sigma_Z^{\delta T})_{k,l} + \delta_k^l \varepsilon^2] \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial z_l} + \sum_{k=1}^d (\sigma_Z^\delta \sigma_Y^{\delta T})_k \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial y} \\ & + \sum_{k=1}^d (\sigma_Y^\delta \sigma^T)_k \frac{\partial^2}{\partial y \partial x_k} + \sum_{k=1}^d (\sigma_Y^\delta \sigma_Z^{\delta T})_k \frac{\partial^2}{\partial y \partial z_k} + [\sigma_Y^\delta \sigma_Y^{\delta T} + \varepsilon^2] \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Big) \\ & + \sum_{k=1}^d a_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^d a_{Z_k}^\delta \frac{\partial}{\partial z_k} + a_Y^\delta \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned} \quad (1.134)$$

Значение функционала Ψ_1 совпадает с решением в точке $(t, x, 0, 0)$ следующей

краевой задачи

$$\frac{\partial u_\delta}{\partial t} + \mathcal{A}_\delta u_\delta + \sum_{k=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_k} z_k = 0, \quad (t, x, z, y) \in \Pi, \quad (1.135)$$

$$u_\delta(T, x, z, y) = \sum_{k=1}^d \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x, \theta) z_k, \quad (x, z, y) \in G \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}, \quad (1.136)$$

$$u_\delta(t, x, z, y) = \psi_\theta^\delta(t, x, z, y), \quad (t, x, z, y) \in S_T \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}. \quad (1.137)$$

В (1.135) δ_k^l означает символ Кронекера.

Отметим, что с использованием неравенства Коши-Буняковского и применением известной леммы Гронуолла несложно показать, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет место сходимость $Z_s^\varepsilon \rightarrow Z_s$, $Y_s^\varepsilon \rightarrow Y_s$ при $s > t \geq 0$ в с.к. смысле. Действительно,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{t,x} |Z_s^\varepsilon - Z_s|^2 &= \mathbf{E}_{t,x} \left| \int_t^s \frac{\partial a}{\partial x}(Z_v^\varepsilon - Z_v) dv + \int_t^s \sum_{j=1}^d \frac{\partial \sigma_j}{\partial x}(Z_v^\varepsilon - Z_v) dW_j(v) \right. \\ &+ \left. \varepsilon \int_t^s \sum_{j=1}^d e_j dW_{d+j} \right|^2 \leq 3 \mathbf{E}_{t,x} \left| \int_t^s \frac{\partial a}{\partial x}(Z_v^\varepsilon - Z_v) dv \right|^2 \\ &+ 3 \mathbf{E}_{t,x} \left| \int_t^s \sum_{j=1}^d \frac{\partial \sigma_j}{\partial x}(Z_v^\varepsilon - Z_v) dW_j(v) \right|^2 + 3\varepsilon^2 \mathbf{E}_{t,x} \left| \int_t^s \sum_{j=1}^d e_j dW_{d+j} \right|^2 \\ &\leq 3 \sum_i \mathbf{E}_{t,x} \left(\int_t^s \left| \frac{\partial a}{\partial x_i} \right|^2 dv \int_t^s |Z_v^\varepsilon - Z_v|^2 dv \right) \\ &+ 3 \sum_i \mathbf{E}_{t,x} \left(\int_t^s \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \right\|_F^2 dv \int_t^s |Z_v^\varepsilon - Z_v|^2 dv \right) + 3\varepsilon^2 d(s-t) \\ &\leq C \int_t^s \mathbf{E}_{t,x} |Z_v^\varepsilon - Z_v|^2 dv + 3\varepsilon^2 d(s-t), \end{aligned} \quad (1.138)$$

где $|\cdot|$ – евклидова норма вектора; $\|\cdot\|_F$ – норма Фробениуса матрицы; $C = 3T \sup_G \left(\sum_i \left| \frac{\partial a}{\partial x_i} \right|^2, \sum_i \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \right\|_F^2 \right)$.

Для завершения доказательства достаточно применить к (1.138) лемму Гронуолла (см., например, [21], стр. 471).

Лемма 4. (Гронуолла). Пусть неотрицательная интегрируемая функция $\alpha(t)$, определенная при $t \in [t_0, T]$, удовлетворяет неравенству

$$\alpha(t) \leq \beta(t) + C \int_{t_0}^t \alpha(s) ds,$$

где C – некоторая неотрицательная константа, а $\beta(t)$ – интегрируемая функция. Тогда

$$\alpha(t) \leq \beta(t) + C \int_{t_0}^t e^{C(t-s)} \beta(s) ds.$$

Достаточные условия существования и единственности решений краевых задач в пространствах Гельдера $\mathbf{H}^{\frac{l+\alpha}{2}, l+\alpha}(\bar{\Pi})$ (l – целое $0 < \alpha < 1$) для линейных параболических уравнений с гладкими коэффициентами можно найти в [44].

Анализ оценки погрешности оценок производных $\frac{\partial u}{\partial \theta}$, которые получаются с использованием формул (1.102), (1.103) и дискретизацией решений СДУ методом Эйлера будем проводить в предположении существования решений задач (1.124) – (1.126), (1.135) – (1.137) в пространстве $\mathbf{H}^{\frac{3+\alpha}{2}, 3+\alpha}(\bar{\Pi})$. Для этого согласно [44] надо потребовать выполнения следующих условий :

A1) коэффициенты соответствующих параболических операторов принадлежат пространству $\mathbf{H}^{\frac{1+\alpha}{2}, 1+\alpha}(\bar{\Pi})$;

B1) $\partial G \in \mathbf{H}^{3+\alpha}$;

B1) $\sum_{k=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_k} z_k + \frac{\partial f}{\partial \theta}, \sum_{k=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_k} z_k \in \mathbf{H}^{\frac{1+\alpha}{2}, 1+\alpha}(\bar{\Pi})$;

G1) $\sum_{k=1}^d \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} z_k + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \sum_{k=1}^d \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} z_k \in \mathbf{H}^{3+\alpha}(\bar{G} \times \mathbf{R}^d)$;

D1) $\psi_\theta \in \mathbf{H}^{\frac{3+\alpha}{2}, 3+\alpha}(\bar{S}_T \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R})$;

E1) выполняются условия согласования первого порядка:

$$\begin{aligned}
& - \left[\mathcal{A}u_\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{k=1}^d \frac{\partial^2}{\partial z_k^2} + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \left(\sum_{k=1}^d \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x, \theta) z_k + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(x, \theta) \right) \\
& + \sum_{k=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_k} z_k + \frac{\partial f}{\partial \theta} \Big|_{t=T} = \frac{\partial \psi_\theta}{\partial t} \Big|_{t=T} \\
& - \mathcal{A}_\delta \left(\sum_{k=1}^d \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x, \theta) z_k \right) - \sum_{k=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_k} z_k \Big|_{t=T} = \frac{\partial \psi_\theta}{\partial t} \Big|_{t=T}
\end{aligned}$$

Условие **E1** будет выполняться, например, если функции φ , ψ равны нулю на границе вместе со всеми их первыми производными по всем аргументам, а функция f и её первые производные по по всем аргументам равны нулю при $t = T$, $x \in \partial G$.

Поскольку при моделировании траекторий случайного процесса $(X_\cdot, Z_\cdot, Y_\cdot)$ в случае $\tau^N < T$ последняя точка траектории X_\cdot находится вне области G , то для исследования погрешности получаемых оценок следует предположить, что функция ψ вместе с ее первыми производными по всем аргументам и функция f непрерывным образом продолжены вне области в некоторую окрестность границы.

Для точек, находящихся в некоторой окрестности области G определим следующие функции: $\rho(x)$ – ортогональная проекция на \bar{G} точки x ; $n(x)$ – единичный вектор внутренней нормали в точке $\rho(x)$; $d(x)$ – длина вектора $\rho(x) - x$.

Будем предполагать, что для рассматриваемых точек $x \in \mathbf{R}^d$ проекция $\rho(x)$ однозначно определяется (такое возможно, например, когда область G выпуклая). При этом выполняется равенство

$$x = \rho(x) - d(x)n(x) . \quad (1.139)$$

Для $x \in \bar{G}$ считаем $\rho(x) = x$ и $d(x) = 0$.

Теорема 5. Пусть выполнены условия **A1** – **E1**, тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^N}{\partial \vartheta}(t, x) &= \frac{\partial u}{\partial \theta}(t, x) + \mathbb{E}_{t,x,0,0} \left[\chi_{\tau^N < t_N} \left(\frac{\partial u_\varepsilon^{i^\tau-1}}{\partial x} + \frac{\partial u_\delta^{i^\tau-1}}{\partial x} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{\partial \psi_\theta^\delta}{\partial x} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} \right) \Bigg|_{(\tau^N, \rho(\bar{X}_{i^\tau}), \bar{Z}_{i^\tau}, \bar{Y}_{i^\tau})} \right) n^{i^\tau} d^{i^\tau} \right] + O(h^{\frac{1}{2}+\alpha}). \end{aligned} \quad (1.140)$$

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\frac{\partial u^N}{\partial \theta}(t, x) - \frac{\partial u}{\partial \theta}(t, x) = \mathbb{E}_{t,x,0,0} \Theta^N - \Psi(X, Z, Y).$$

Учитывая (1.130), (1.132), представим эту разность следующим образом

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{t,x,0,0} \Theta^N - \Psi(X, Z, Y) &= \mathbb{E}_{t,x,0,0} \Theta_\delta^N - \Psi_1(X, Z^\delta, Y^\delta) \\ &+ \mathbb{E}_{t,x,0,0} \Theta_\varepsilon^N - \Psi(X, Z^\varepsilon, Y^\varepsilon). \end{aligned} \quad (1.141)$$

Из построения случайных процессов $(X_\bullet, Z_\bullet, Y_\bullet)$ и $(X_\bullet, Z_\bullet^\varepsilon, Y_\bullet^\varepsilon)$ ясно, что время первого выхода из $G \times \mathbf{R}^d \times R$ каждого из них определяется исключительно процессом X_\bullet . Поэтому для случайных процессов, соответствующих краевым задачам (1.121) – (1.123) и (1.124) – (1.126), значение τ одно и то же.

Выразим Θ_δ^N с использованием разностей u_δ

$$\begin{aligned} \Theta_\delta^N &= \sum_{i=0}^{N-1} \left[\chi_{\tau^N = t_{i+1}} \left(\psi_\theta^\delta(t_{i+1}, \bar{X}_{i+1}, \bar{Z}_{i+1}^\delta, \bar{Y}_{i+1}^\delta) - \psi_\theta^\delta(t_{i+1}, \rho(\bar{X}_{i+1}), \bar{Z}_{i+1}^\delta, \bar{Y}_{i+1}^\delta) \right) \right. \\ &+ \chi_{\tau^N > t_i} \left(u_\delta(t_{i+1}, \rho(\bar{X}_{i+1}), \bar{Z}_{i+1}^\delta, \bar{Y}_{i+1}^\delta) - u_\delta^i + \sum_{k=1}^d \frac{\partial f^i}{\partial x_k}(\bar{Z}_i^\delta) \right) \Big] \\ &+ u_\delta(t, x, 0, 0) . \end{aligned} \quad (1.142)$$

Последующее преобразование (1.142) основано на применении равенств

$$\rho(\bar{X}_{i^\tau}) = \bar{X}_{i^\tau-1} + h a^{i^\tau-1} + \sqrt{h} \sum_j \sigma_j^{i^\tau-1} \xi_j^{i^\tau-1} + n^{i^\tau} d^{i^\tau},$$

$$\begin{aligned}\bar{X}_{i+1} &= \bar{X}_i + ha^i + \sqrt{h} \sum_j \sigma_j^i \xi_j^i, \text{ при } t_{i+1} < \tau^N, \\ \bar{Z}_{i+1}^\delta &= \bar{Z}_i + ha_Z^{\delta i} + \sqrt{h} \left(\sum_{j=1}^d [(\sigma_Z^\delta)_j^i \xi_j^i - \varepsilon e_j \xi_{d+j}^i] \right), \\ \bar{Y}_{i+1}^\delta &= \bar{Y}_i + ha_Y^{\delta i} + \sqrt{h} \left(\sum_{j=1}^d (\sigma_Y^\delta)_j^i \xi_j^i - \varepsilon \xi_{2d+1}^i \right),\end{aligned}$$

разложении в ряд Тейлора и удалении слагаемых, которые в сумме удовлетворяют уравнению (1.135)

$$\begin{aligned}\Theta_\delta^N &= u_\delta(t, x, 0, 0) + \chi_{\tau^N \leq t_N} \sum_k \left(\frac{\partial u_\delta^{i\tau-1}}{\partial x_k} - \frac{\partial \psi_\theta}{\partial x_k}(\tau^N, \rho(\bar{X}_{i\tau}), \bar{Z}_{i\tau}, \bar{Y}_{i\tau}) \right) n_k^{i\tau} d^{i\tau} \\ &+ \sum_{i=0}^{N-1} \chi_{\tau^N > t_i} \left[h^{\frac{1}{2}} \left(\sum_k \frac{\partial u_\delta^i}{\partial x_k} \sum_{j=1}^d \sigma_{k,j}^i \xi_j^i + \sum_k \frac{\partial u_\delta^i}{\partial z_k} \left(\sum_{j=1}^d (\sigma_Z^{\delta i})_{kj} \xi_j^i - \varepsilon \delta_k^j \xi_{d+j}^i \right) \right. \right. \\ &+ \left. \frac{\partial u_\delta^i}{\partial y} \left(\sum_{j=1}^d \sigma_{Yj}^{\delta i} \xi_j^i - \varepsilon \xi_{2d+1}^i \right) \right) + \frac{1}{2} \sum_{k,l} \frac{\partial^2 u_\delta^i}{\partial x_k \partial x_l} \left[2h^{\frac{3}{2}} a_k^i \sum_j \sigma_{lj}^i \xi_j^i \right. \\ &+ h \left(\sum_j \sigma_{kj}^i \xi_j^i \right) \left(\sum_j \sigma_{lj}^i \xi_j^i \right) - h(\sigma^i \sigma^{iT})_{kl} \left. \right] + \frac{1}{2} \sum_{k,l} \frac{\partial^2 u_\delta^i}{\partial x_k \partial z_l} \left[h^{\frac{3}{2}} \left(a_k^i \left(\sum_{j=1}^d (\sigma_Z^{\delta i})_{lj} \xi_j^i \right. \right. \right. \\ &- \left. \left. \varepsilon \xi_{d+l}^i \right) + (a_Z^{\delta i})_l \sum_{j=1}^d \sigma_{kj}^i \xi_j^i \right) + h \left(\sum_{j=1}^d \sigma_{kj}^i \xi_j^i \right) \left(\sum_{j=1}^d (\sigma_Z^{\delta i})_{lj} \xi_j^i - \varepsilon \xi_{d+l}^i \right) \\ &- h(\sigma^i (\sigma_Z^{\delta i})^T)_{kl} \left. \right] + \frac{1}{2} \sum_k \frac{\partial^2 u_\delta^i}{\partial x_k \partial y} \left[h^{\frac{3}{2}} \left(a_k^i \left(\sum_{j=1}^d (\sigma_Y^{\delta i})_j \xi_j^i - \varepsilon \xi_{2d+1}^i \right) \right. \right. \\ &+ \left. \left. a_Y^{\delta i} \sum_{j=1}^d \sigma_{kj}^i \xi_j^i \right) + h \left(\sum_{j=1}^d (\sigma_{kj}^i \xi_j^i) \left(\sum_{j=1}^d (\sigma_Y^{\delta i})_j \xi_j^i - \varepsilon \xi_{2d+1}^i \right) - h(\sigma^i (\sigma_Y^{\delta i})^T)_k \right] \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k,l} \frac{\partial^2 u_\delta^i}{\partial z_k \partial z_l} \left[2h^{\frac{3}{2}} (a_Z^{\delta i})_k \left(\sum_{j=1}^d (\sigma_Z^{\delta i})_{lj} \xi_j^i - \varepsilon \xi_{d+l}^i \right) \right. \\ &+ \left. h \left(\sum_{j=1}^d (\sigma_Z^{\delta i})_{kj} \xi_j^i - \varepsilon \xi_{d+k}^i \right) \left(\sum_{j=1}^d (\sigma_Z^{\delta i})_{lj} \xi_j^i - \varepsilon \xi_{d+l}^i \right) - h(\sigma_Z^{\delta i} (\sigma_Z^{\delta i})^T)_{kl} - h\delta_k^l \varepsilon^2 \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \sum_k \frac{\partial^2 u_\delta^i}{\partial z_k \partial y} \left[h^{\frac{3}{2}} \left((a_Z^{\delta^i})_k \left(\sum_{j=1}^d (\sigma_Y^{\delta^i})_j \xi_j^i - \varepsilon \xi_{2d+1}^i \right) + a_Y^{\delta^i} \left(\sum_{j=1}^d (\sigma_Z^{\delta^i})_{kj} \xi_j^i \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \varepsilon \xi_{d+k}^i \right) \right) + h \left(\sum_{j=1}^d (\sigma_Z^{\delta^i})_{kj} \xi_j^i - \varepsilon \xi_{d+k}^i \right) \left(\sum_{j=1}^d (\sigma_Y^{\delta^i})_j \xi_j^i - \varepsilon \xi_{2d+1}^i \right) - h (\sigma_Z^{\delta^i} (\sigma_Y^{\delta^i})^T)_k \right] \\
& + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_\delta^i}{\partial y^2} \left[2h^{\frac{3}{2}} a_Y^{\delta^i} \left(\sum_{j=1}^d (\sigma_Y^{\delta^i})_j \xi_j^i - \varepsilon \xi_{2d+1}^i \right) + h \left(\sum_{j=1}^d (\sigma_Y^{\delta^i})_j \xi_j^i - \varepsilon \xi_{2d+1}^i \right)^2 \right. \\
& \left. - h (\sigma_Y^{\delta^i} (\sigma_Y^{\delta^i})^T) - h \varepsilon^2 \right] + \frac{h^{\frac{3}{2}}}{6} \sum_{k,l,r} D_{k,l,r}^3 u_\delta^i (S_k^\delta)^i \xi^i (S_l^\delta)^i \xi^i (S_r^\delta)^i \xi^i \left. \right] + O(h^{\frac{1}{2}+\alpha}), \quad (1.143)
\end{aligned}$$

где $D_{k,l,r}^3 u_\delta$ обозначены третьи производные u_δ по пространственным переменным; S_k^δ – k -я строка матрицы (1.133). Из (1.143) получим математическое ожидание Θ_δ^N

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{t,x} \Theta_\delta^N & = u_\delta(t, x, 0, 0) + \mathbb{E}_{t,x,0,0} \left[\chi_{\tau^N \leq t_N} \sum_k \left(\frac{\partial u_\delta^{i\tau-1}}{\partial x_k} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\partial \psi_\theta}{\partial x_k}(\tau^N, \rho(\bar{X}_{i\tau}), \bar{Z}_{i\tau}, \bar{Y}_{i\tau}) \right) n_k^{i\tau} d^{i\tau} \right] + O(h^{\frac{1}{2}+\alpha}). \quad (1.144)
\end{aligned}$$

Такое же равенство, запишем для Θ_ε^N

$$\begin{aligned}
\Theta_\varepsilon^N & = u_\varepsilon(t, x, 0, 0) + \chi_{\tau^N \leq t_N} \sum_k \left(\frac{\partial u_\varepsilon^{i\tau-1}}{\partial x_k} - \frac{\partial \psi_\theta}{\partial x_k}(\tau^N, \rho(\bar{X}_{\tau^N}), \bar{Z}_{\tau^N}, \bar{Y}_{\tau^N}) \right) n_k^{i\tau} d^{i\tau} \\
& + \sum_{i=0}^{N-1} \chi_{\tau^N > t_i} \left[h^{\frac{1}{2}} \left(\sum_k \frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x_k} \sum_{j=1}^d \sigma_{k,j}^i \xi_j^i + \sum_k \frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial z_k} \left(\sum_{j=1}^d (\sigma_Z^i)_{kj} \xi_j^i + \varepsilon \xi_{d+k}^i \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial y} \left(\sum_{j=1}^d \sigma_{Yj}^i \xi_j^i + \varepsilon \xi_{2d+1}^i \right) \right) + \frac{1}{2} \sum_{k,l} \frac{\partial^2 u_\varepsilon^i}{\partial x_k \partial x_l} \left[2h^{\frac{3}{2}} a_k^i \sum_j \sigma_{lj}^i \xi_j^i \right. \right. \\
& \left. \left. + h \left(\sum_j \sigma_{kj}^i \xi_j^i \right) \left(\sum_j \sigma_{lj}^i \xi_j^i \right) - h (\sigma^i \sigma^{iT})_{kl} \right] + \frac{1}{2} \sum_{k,l} \frac{\partial^2 u_\varepsilon^i}{\partial x_k \partial z_l} \left[h^{\frac{3}{2}} \left(a_k^i \left(\sum_{j=1}^d (\sigma_Z^i)_{lj} \xi_j^i \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \varepsilon \xi_{d+l}^i \right) + (a_Z^i)_l \sum_{j=1}^d \sigma_{kj}^i \xi_j^i \right) + h \left(\sum_{j=1}^d \sigma_{kj}^i \xi_j^i \right) \left(\sum_{j=1}^d (\sigma_Z^i)_{lj} \xi_j^i + \varepsilon \xi_{d+l}^i \right) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -h(\sigma^i(\sigma_Z^i)^T)_{kl}] + \frac{1}{2} \sum_k \frac{\partial^2 u_\varepsilon^i}{\partial x_k \partial y} \left[h^{\frac{3}{2}} \left(a_k^i \left(\sum_{j=1}^d (\sigma_Y^i)_j \xi_j^i + \varepsilon \xi_{2d+1}^i \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + a_Y^i \sum_{j=1}^d \sigma_{kj}^i \xi_j^i \right) + h \left(\sum_{j=1}^d \sigma_{kj}^i \xi_j^i \right) \left(\sum_{j=1}^d (\sigma_Y^i)_j \xi_j^i + \varepsilon \xi_{2d+1}^i \right) - h(\sigma^i(\sigma_Y^i)^T)_k \right] \\
& + \frac{1}{2} \sum_{k,l} \frac{\partial^2 u_\varepsilon^i}{\partial z_k \partial z_l} \left[2h^{\frac{3}{2}} (a_Z^i)_k \left(\sum_{j=1}^d (\sigma_Z^i)_{lj} \xi_j^i + \varepsilon \xi_{d+l}^i \right) \right. \\
& \left. + h \left(\sum_{j=1}^d (\sigma_Z^i)_{kj} \xi_j^i + \varepsilon \xi_{d+k}^i \right) \left(\sum_{j=1}^d (\sigma_Z^i)_{lj} \xi_j^i + \varepsilon \xi_{d+l}^i \right) - h(\sigma_Z^i(\sigma_Z^i)^T)_{kl} \right] \\
& + \frac{1}{2} \sum_k \frac{\partial^2 u_\varepsilon^i}{\partial z_k \partial y} \left[h^{\frac{3}{2}} \left((a_Z^i)_k \left(\sum_{j=1}^d (\sigma_Y^i)_j \xi_j^i + \varepsilon \xi_{2d+1}^i \right) + a_Y^i \left(\sum_{j=1}^d (\sigma_Z^i)_{kj} \xi_j^i \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \varepsilon \xi_{d+k}^i \right) \right) + h \left(\sum_{j=1}^d (\sigma_Z^i)_{kj} \xi_j^i + \varepsilon \xi_{d+k}^i \right) \left(\sum_{j=1}^d (\sigma_Y^i)_j \xi_j^i + \varepsilon \xi_{2d+1}^i \right) - h(\sigma_Z^i(\sigma_Y^i)^T)_k \right] \\
& + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_\varepsilon^i}{\partial y^2} \left[2h^{\frac{3}{2}} a_Y^i \left(\sum_{j=1}^d (\sigma_Y^i)_j \xi_j^i + \varepsilon \xi_{2d+1}^i \right) + h \left(\sum_{j=1}^d (\sigma_Y^i)_j \xi_j^i + \varepsilon \xi_{2d+1}^i \right)^2 \right. \\
& \left. - h(\sigma_Y^i(\sigma_Y^i)^T) - h\varepsilon^2 \right] + \frac{h^{\frac{3}{2}}}{6} \sum_{k,l,r} D^3 u_\varepsilon^i (S_k^\delta)^i \xi^i (S_l^\delta)^i \xi^i (S_r^\delta)^i \xi^i \Big] + O(h^{\frac{1}{2}+\alpha}) . \quad (1.145)
\end{aligned}$$

Из (1.145) получим математическое ожидание Θ_ε^N

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{t,x} \Theta_\varepsilon^N &= u_\varepsilon(t, x, 0, 0) + \mathbb{E}_{t,x,0,0} \left[\chi_{\tau^N \leq t_N} \sum_k \left(\frac{\partial u_\varepsilon^{i\tau-1}}{\partial x_k} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\partial \psi_\theta}{\partial x_k}(\tau^N, \rho(\bar{X}_{\tau^N}), \bar{Z}_{\tau^N}, \bar{Y}_{\tau^N}) \right) n_k^{i\tau} d^{i\tau} \right] + O(h^{\frac{1}{2}+\alpha}) . \quad (1.146)
\end{aligned}$$

Складывая равенства (1.144) и (1.146), получим требуемое. Теорема доказана.

1.9 Численная проверка метода FBVP2

Проверка алгоритма FBVP2 осуществлялась на получении оценок решения и его производных краевой задачи, представленной на стр.53.

Поскольку при использовании метода FBVP2 требуется, чтобы функция g и ее первые производные обращались в нуль на границе области, то в вычислениях для оценки производной $\partial u/\partial\theta$ использовалась функция $g = \exp(t - T)(1 - x_1^2 - x_2^2)^2$. При этом были взяты следующие значения числовых характеристик: начальное время $t_0 = 0.2$; конец интервала времени $T = 3.5$; значение параметра $\beta = 5 \cdot 10^7$; значение параметра задачи $\theta = 0.5$; объем выборки $2 \cdot 10^5$. Оценки u и $\partial u/\partial\theta$ были получены для следующих точек в G : $(0.50; 0.0)$, $(0.75; 0.0)$, $(0.95; 0.0)$. Результаты этих вычислений для размеров шага $h = 10^{-5}$ и $h = 10^{-6}$ представлены в таблицах ниже.

Таблица 7. Оценки $u(t, x)$

x_1	Оценка u ($h = 10^{-5}$)	Оценка u ($h = 10^{-6}$)	Точное значение u
0.50	$1.4024 \cdot 10^{-1} \pm 4.6 \cdot 10^{-4}$	$1.3954 \cdot 10^{-1} \pm 4.6 \cdot 10^{-4}$	$1.3934 \cdot 10^{-1}$
0.75	$8.176 \cdot 10^{-2} \pm 3.8 \cdot 10^{-4}$	$8.137 \cdot 10^{-2} \pm 3.8 \cdot 10^{-4}$	$8.1282 \cdot 10^{-2}$
0.95	$1.878 \cdot 10^{-2} \pm 1.9 \cdot 10^{-4}$	$1.843 \cdot 10^{-2} \pm 1.9 \cdot 10^{-4}$	$1.8114 \cdot 10^{-2}$

Таблица 8. Оценки $\frac{\partial u}{\partial\theta}(t, x)$

x_1	Оценка $\frac{\partial u}{\partial\theta}$ ($h = 10^{-5}$)	Оценка $\frac{\partial u}{\partial\theta}$ ($h = 10^{-6}$)	Точное значение $\frac{\partial u}{\partial\theta}$
0.50	$2.774 \cdot 10^{-1} \pm 2.2 \cdot 10^{-3}$	$2.767 \cdot 10^{-1} \pm 2.2 \cdot 10^{-3}$	$2.7868 \cdot 10^{-1}$
0.75	$1.585 \cdot 10^{-1} \pm 1.6 \cdot 10^{-3}$	$1.590 \cdot 10^{-1} \pm 1.6 \cdot 10^{-3}$	$1.6256 \cdot 10^{-1}$
0.95	$3.594 \cdot 10^{-2} \pm 7.4 \cdot 10^{-4}$	$3.594 \cdot 10^{-2} \pm 7.4 \cdot 10^{-4}$	$3.6229 \cdot 10^{-2}$

При определении оценок $u(t, x)$ и $\partial u/\partial\theta$ вычислялись 95% доверительные интервалы. Ниже в табл. 9 приведены результаты расчета $E_{t,x}(\frac{\partial\tau}{\partial\theta}f(\tau, y(\tau), \theta))$. Из табл. 9 видно, что эти значения, вносят существенный вклад в оценку $\partial u/\partial\theta$. В табл. 10 – 12 представлены аналогичные результаты расчетов по варианту алгоритма аппроксимации границы плоскостью из [80]

Результаты расчетов методом FBVP2 показали, что при использовании ло-

Таблица 9. Полученные значения $E_{t,x} \left[\frac{\partial \tau}{\partial \theta} f(\tau, X(\tau)) \right]$

x_1	$E_{t,x} \left[\frac{\partial \tau}{\partial \theta} f(\tau, X(\tau)) \right] (h = 10^{-5})$	$E_{t,x} \left[\frac{\partial \tau}{\partial \theta} f(\tau, X(\tau)) \right] (h = 10^{-6})$
0.50	$0.786 \cdot 10^{-1}$	$0.779 \cdot 10^{-1}$
0.75	$0.429 \cdot 10^{-1}$	$0.423 \cdot 10^{-1}$
0.95	$0.958 \cdot 10^{-2}$	$0.876 \cdot 10^{-2}$

Таблица 10. Оценки $u(t, x)$

x_1	Оценка $u (h = 10^{-5})$	Оценка $u (h = 10^{-6})$	Точное значение u
0.50	$1.3891 \cdot 10^{-1} \pm 4.6 \cdot 10^{-4}$	$1.3950 \cdot 10^{-1} \pm 4.6 \cdot 10^{-4}$	$1.3934 \cdot 10^{-1}$
0.75	$8.080 \cdot 10^{-2} \pm 3.7 \cdot 10^{-4}$	$8.136 \cdot 10^{-2} \pm 3.7 \cdot 10^{-4}$	$8.1282 \cdot 10^{-2}$
0.95	$1.782 \cdot 10^{-2} \pm 1.9 \cdot 10^{-4}$	$1.819 \cdot 10^{-2} \pm 1.9 \cdot 10^{-4}$	$1.8114 \cdot 10^{-2}$

Таблица 11. Оценки $\frac{\partial u}{\partial \theta}(t, x)$

x_1	Оценка $\frac{\partial u}{\partial \theta} (h = 10^{-5})$	Оценка $\frac{\partial u}{\partial \theta} (h = 10^{-6})$	Точное значение $\frac{\partial u}{\partial \theta}$
0.50	$2.775 \cdot 10^{-1} \pm 2.2 \cdot 10^{-3}$	$2.779 \cdot 10^{-1} \pm 2.2 \cdot 10^{-3}$	$2.7868 \cdot 10^{-1}$
0.75	$1.565 \cdot 10^{-1} \pm 1.6 \cdot 10^{-3}$	$1.588 \cdot 10^{-1} \pm 1.6 \cdot 10^{-3}$	$1.6256 \cdot 10^{-1}$
0.95	$3.405 \cdot 10^{-2} \pm 7.1 \cdot 10^{-4}$	$3.559 \cdot 10^{-2} \pm 7.4 \cdot 10^{-4}$	$3.6229 \cdot 10^{-2}$

Таблица 12. Полученные значения $E_{t,x} \left[\frac{\partial \tau}{\partial \theta} f(\tau, X(\tau)) \right]$

x_1	$E_{t,x} \left[\frac{\partial \tau}{\partial \theta} f(\tau, X(\tau)) \right] (h = 10^{-5})$	$E_{t,x} \left[\frac{\partial \tau}{\partial \theta} f(\tau, X(\tau)) \right] (h = 10^{-6})$
0.50	$0.759 \cdot 10^{-1}$	$0.766 \cdot 10^{-1}$
0.75	$0.433 \cdot 10^{-1}$	$0.419 \cdot 10^{-1}$
0.95	$0.919 \cdot 10^{-2}$	$0.851 \cdot 10^{-2}$

кальной аппроксимации границы плоскостью точность оценок u незначительно улучшается, но при этом не происходит повышения точности оценок производной $\frac{\partial u}{\partial \theta}$.

Глава 2

Оценка производных по параметрам математических ожиданий функционалов от диффузионных процессов с условием отражения на границе

В данной главе рассматриваются вопросы численного моделирования и оценок производных по параметрам функционалов от диффузионных процессов, движение которых происходит в областях с отражающими границами.

Пусть G – заданная выпуклая область в \mathbf{R}^d с гладкой границей ∂G . Рассмотрим диффузионный процесс X , с отражением на границе ∂G в направлении внутренней нормали, который начинает свое движение из точки $(t, x) \in [0, T) \times G$. Предполагается, что коэффициенты векторного СДУ, которое задает этот процесс, есть функции $a : \mathbf{R}^{d+2} \rightarrow \mathbf{R}^d$, $\sigma : \mathbf{R}^{d+2} \rightarrow \mathbf{R}^{d^2}$, зависящие от скалярного параметра $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$. Процесс X описывается системой СДУ

$$X_s = x + \int_t^s a(v, X_v, \theta) dv + \int_t^s \sigma(v, X_v, \theta) dW_v + k_s, \quad (2.1)$$

$$k_s = \int_t^s n(X_v) d|k_v|, \quad |k_s| = \int_t^s \chi_{\partial G}(X_v) d|k_v|, \quad (2.2)$$

где $n(y)$ – единичный вектор внутренней нормали в точке $y \in \partial G$; $|k|$ – скалярный возрастающий процесс, который растет только тогда, когда $X \in \partial G$.

Процесс $|k_\cdot|$ называется локальным временем процесса X_\cdot на ∂G , и он представляет собой полную вариацию функции k_\cdot на отрезке $[t, s]$.

Уравнение (2.1) носит название уравнения Скорохода, который впервые рассмотрел отраженное броуновское движение на полупрямой [54]. Теоретическое обоснование уравнения (2.1), теоремы существования и единственности решения (2.1) можно найти в работах [102], [110], [116]. Исследованиям численного решения уравнения (2.1) посвящены работы [69], [74], [48], [112], [113].

Данная глава посвящена получению оценок, на основе численного моделирования траекторий системы типа (2.1), (2.2), математических ожиданий и их производных по параметрам вида

$$u(t, x, \theta) = E_{t,x}(\varphi(X_T, \theta)Y_T(\theta) + Z_T(\theta)). \quad (2.3)$$

В (2.3) $Y_T(\theta)$, $Z_T(\theta)$ — значения при $s = T$ следующих функций

$$Y_s(\theta) = \exp\left(\int_t^s c(v, X_v, \theta)dv + \int_t^s \eta(v, X_v, \theta)d|k_v|\right), \quad (2.4)$$

$$Z_s(\theta) = \int_t^s f(v, X_v, \theta)Y_v dv + \int_t^s \gamma(v, X_v, \theta)Y_v d|k_v|. \quad (2.5)$$

Значение $u(t, x, \theta)$ при любом $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ совпадает с решением следующей краевой задачи (см., например, [21])

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d b_{ij}(t, x, \theta) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d a_i(t, x, \theta) \frac{\partial u}{\partial x_i} \\ + c(t, x, \theta)u + f(t, x, \theta) = 0, \quad t \in [0, T], \quad x \in G, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$u(T, x, \theta) = \varphi(x, \theta), \quad x \in G, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \eta(t, x, \theta)u + \gamma(t, x, \theta) = 0, \quad x \in \partial G. \quad (2.8)$$

Задачи такого типа часто встречаются в различных технических приложениях. Например, в задачах, связанных с авиационной техникой, граничными

условиями обычно являются условия конвективного теплообмена. В работе [49] путем численного решения СДУ определялись градиенты решения уравнения теплопроводности с целью определения внутренних тепловых потоков. При этом параметрами служили координаты начальной точки СДУ. В работе [92] на основе численного моделирования траекторий СДУ решалась задача теплообмена в сотовой теплозащитной панели обшивки фюзеляжа самолета. При этом решалась краевая задача для уравнения теплопроводности с граничными условиями конвективного теплообмена.

Предполагается, что задача (2.6) – (2.8) имеет решение, у которого первая производная по t и вторые производные по x непрерывны вплоть до границы. Условия, при которых это выполняется даны в [44].

Обозначим $\bar{G}_T = \bar{G} \times [0, T]$. Пусть решение краевой задачи (2.6) – (2.8) принадлежит для некоторого нецелого $\alpha > 0$ пространству Гельдера $\mathbf{H}^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{G}_T)$ (в соответствии с теоремой существования и единственности, см. [44], стр.364).

В дальнейшем, в записи функций, зависящих от трех аргументов v, X_v, θ , иногда для краткости, в виде нижнего индекса будем указывать только один аргумент v .

В данной главе предполагается, что

- A2)** область G выпуклая, ограниченная класса \mathbf{C}^3 . При этом существует функция $\Gamma(x) \in \mathbf{C}^3$ такая, что $\Gamma(x) > 0$ при $x \in G$, $\Gamma(x) = 0$ при $x \in \partial G$ и $\inf_{x \in \partial G} |\nabla \Gamma| > 0$ (здесь, как и раньше, $|\cdot|$ – евклидова норма в \mathbf{R}^d);
- B2)** при всех рассматриваемых значениях θ матричная функция $B(t, x, \theta) = (b_{ij}(t, x, \theta))$ удовлетворяет равномерно по всем своим аргументам *условию регу-*

лярности:

$$B(t, x, \theta) \geq \alpha_0 I$$

для некоторого $\alpha_0 > 0$;

B2) функции a, σ ограниченные и существует константа \mathcal{K} такая, что для всех $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$, $v \geq 0$, $x, y \in \mathbf{R}^d$, $i, j \in \{1, \dots, d\}$ выполняется неравенство

$$|a_i(v, x, \theta) - a_i(v, y, \theta)| + |\sigma_{ij}(v, x, \theta) - \sigma_{ij}(v, y, \theta)| \leq \mathcal{K}|x - y|.$$

Г2) производные $\partial a_i / \partial x_k$, $\partial \sigma_{ij} / \partial x_k$, $\partial a_i / \partial \theta$, $\partial \sigma_{ij} / \partial \theta$ ($i, j, k = 1, \dots, d$) ограничены на $[0, T] \times \bar{G} \times (\theta_1, \theta_2)$.

Если выполнены условия **A2**, **B2**, **B2**, то можно показать [110], что существует единственное решение системы СДУ (2.1), (2.2). Поскольку область G выпуклая, то для любой точки $x \notin G$ однозначно определяется $\rho(x) \in G$ – ее ортогональная проекция на \bar{G} , и функция $d(x) \leq 0$ такая, что

$$x = \rho(x) + d(x)n(\rho(x)).$$

В дальнейшем, для краткости, если $x \notin \bar{G}$ вместо $n(\rho(x))$ будем писать $n(x)$. При $x \in \bar{G}$ будем считать, что $d(x) = 0$ и $x = \rho(x)$. Функции $\rho(x)$, $n(x)$, есть функции класса \mathbf{C}^2 , $d(x)$ – класса \mathbf{C}^3 (см., например, [16], стр. 326).

2.1 Моделирование диффузионного процесса в области с отражающей границей

Для численного моделирования траекторий системы СДУ (2.1), (2.2) предлагается использовать вариант схемы Эйлера с ортогональным проектированием численного решения на \bar{G} . В работах [69], [74] была исследована погрешность оценки решения параболического уравнения без источника, получаемая на основе этого метода, и был установлен порядок аппроксимации $O(h^{\frac{1}{2}})$. При этом

рассматривался другой вид функционала, т.е. такой, в котором отсутствует интеграл от источника.

В работе [69] был также исследован так называемый *симметризованный* метод, в котором при выходе траектории из области на каком-либо шаге численного моделирования, очередная точка на данном шаге берется внутри области симметрично относительно границы. Для симметризованного метода установлен первый порядок сходимости. Но при этом остается открытым вопрос об оценке математических ожиданий функционалов, содержащих интегралы по локальному времени.

Пусть h – шаг интегрирования и положим $N = (T - t)/h$. На отрезке $[t, T]$ зададим сетку с узлами $t_i = t + ih$, ($i = 0, \dots, N$). Свяжем с узлами этой сетки следующие обозначения: \bar{X}_i, \bar{k}_i – аппроксимация траектории системы СДУ (2.1)-(2.2) в точке t_i ; $\Delta_{i+1}X, \Delta_{i+1}K$ – изменение приближенных значений X, K , за один шаг численного интегрирования; g_i – значение $g(t_i, \bar{X}_i)$ для некоторой функции $g(t, x)$; n_i – единичный вектор внутренней нормали в точке $\rho(X_{i+1}^\Delta)$. Далее, для указания k -й компоненты вектора v будет использоваться обозначение $(v)_k$.

Численное моделирование траекторий системы СДУ (2.1), (2.2) в узлах заданной сетки осуществляется по следующей схеме

$$X_{i+1}^\Delta = \bar{X}_i + ha_i + \sqrt{h}\sigma_i\xi_i, \quad (2.9)$$

$$\bar{X}_{i+1} = X_{i+1}^\Delta + (\Delta_{i+1}K)n_i, \quad (2.10)$$

$$\bar{k}_{i+1} = \bar{k}_i + \Delta_{i+1}K, \quad (2.11)$$

где ξ_i – нормальные $N(0, 1)$ случайные величины; $\Delta_{i+1}K = [d(X_{i+1}^\Delta)]^-$.

Заменив в функциях (2.4), (2.5) интегрирование суммированием по узлам

сетки, определим соответствующие сеточные функции \bar{Y}_i, \bar{Z}_i , заданные в узлах (t_i, \bar{X}_i) ($i = 0, \dots, N$),

$$\bar{Y}_i = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ \exp\left(\sum_{k=0}^{i-1} (hc_k + \eta_k \chi_{\partial G}(\bar{X}_k) \Delta_{k+1} K)\right), & i = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\bar{Z}_i = \begin{cases} 0, & i = 0, \\ \sum_{k=0}^{i-1} (hf_k + \gamma_k \chi_{\partial G}(\bar{X}_k) \Delta_{k+1} K) \bar{Y}_k, & i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (2.13)$$

В качестве приближенного решения краевой задачи (2.6) — (2.8) принимается оценка

$$u^h(t, x) = \mathbb{E}_{t,x}(\varphi(\bar{X}_N) \bar{Y}_N + \bar{Z}_N), \quad (2.14)$$

которая получается в результате моделирования траекторий системы (2.1), (2.2) по формулам (2.9) — (2.13). В следующей теореме доказывается, что оценка (2.14) имеет порядок точности $O(h^{\frac{1}{2}})$.

Теорема 6. Пусть выполнены условия **A2**, **B2**, **B2**. Тогда при достаточно малых h существует константа C , зависящая от $T - t$, a , σ , f такая, что

$$|u^h(t, x) - u(t, x)| \leq Ch^{\frac{1}{2}}. \quad (2.15)$$

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} u^h(t, x) - u(t, x) &= \mathbb{E}_{t,x}(\varphi(\bar{X}_N) \bar{Y}_N + \bar{Z}_N) - u(t, x) \\ &= \mathbb{E}_{t,x}(u(t_N, \bar{X}_N) \bar{Y}_N + \bar{Z}_N) - u(t, x) \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} (\mathbb{E}_{t,x}(u(t_{i+1}, \bar{X}_{i+1}) \bar{Y}_{i+1} + \bar{Z}_{i+1}) - u(t_i, \bar{X}_i) \bar{Y}_i - \bar{Z}_i). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Найдем оценку выражения

$$\left| \mathbb{E}_{t,x} (u_{i+1} \bar{Y}_{i+1} + \bar{Z}_{i+1} - u_i \bar{Y}_i - \bar{Z}_i) \right|. \quad (2.17)$$

Используя разложение u_{i+1} в точке (t_i, \bar{X}_i) в ряд Тейлора до членов, содержащих производные второго порядка функции u , включительно и определение \bar{Y}_i, \bar{Z}_i , получим

$$\begin{aligned} u_{i+1} \bar{Y}_{i+1} + \bar{Z}_{i+1} = & \left(u_i + \frac{\partial u_i}{\partial t} h + \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} (\Delta_{i+1} X)_k + \frac{1}{2} (h^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right. \\ & + 2h \sum_k \frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial x_k} (\Delta_{i+1} X)_k + \left. \sum_{k,l} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_l} (\Delta_{i+1} X)_k (\Delta_{i+1} X)_l \right) \bar{Y}_i \exp(hc_i \\ & + \eta_i \chi_{\partial G}(x_i) \Delta_{i+1} K) + \bar{Z}_i + (hf_i + \gamma_i \chi_{\partial G}(x_i) \Delta_{i+1} K) \bar{Y}_i. \end{aligned} \quad (2.18)$$

По построению, $\Delta_{i+1} K$ есть величина порядка $O(h^{\frac{1}{2}})$. Запишем равенство, которое получается в результате разложения экспоненты при достаточно малых h

$$\begin{aligned} \exp(hc_i + \eta_i \chi_{\partial G}(\bar{X}_i) \Delta_{i+1} K) = & 1 + hc_i + \eta_i \chi_{\partial G}(\bar{X}_i) \Delta_{i+1} K \\ & + \frac{1}{2} (hc_i + \eta_i \chi_{\partial G}(\bar{X}_i) \Delta_{i+1} K)^2 + O(h^{\frac{3}{2}}). \end{aligned} \quad (2.19)$$

При получении оценки (2.15) мы используем тот факт, что при некотором $h_0 > 0$ выполняется [112]

$$\sup_{h \leq h_0} \mathbb{E}_{t,x} ((\bar{k}_N)^q) < \infty \quad \forall q \in \mathbf{N}, \quad (2.20)$$

и, что вероятность выхода моделируемой траектории из области есть величина порядка $O(h^{\frac{1}{2}})$ [79]

$$P\{\bar{X}_i \in G, X_{i+1}^\Delta \notin \bar{G}\} \leq Ch^{\frac{1}{2}}. \quad (2.21)$$

Из (2.18), (2.19) с учетом (2.20), (2.21) и того, что в точке (t_i, \bar{X}_i) выполняется

уравнение (2.6), получим

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{t,x} (u_{i+1} \bar{Y}_{i+1} + \bar{Z}_{i+1} - u_i \bar{Y}_i - \bar{Z}_i) &= \mathbb{E}_{t,x} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} h + \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} (\Delta_{i+1} X)_k \right. \right. \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{k,l} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_l} (\Delta_{i+1} X)_k (\Delta_{i+1} X)_l \Big) \bar{Y}_i + \bar{Y}_i c_i u_i h + \bar{Y}_i \eta_i u_i \chi_{\partial G}(\bar{X}_i) \Delta_{i+1} K \\
&+ \bar{Y}_i f_i h + \bar{Y}_i \gamma_i \chi_{\partial G}(\bar{X}_i) \Delta_{i+1} K + \bar{Y}_i \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} (\Delta_{i+1} X)_k \eta_i \chi_{\partial G}(\bar{X}_i) \Delta_{i+1} K \Big] \\
&+ O(h^{\frac{3}{2}}) = \mathbb{E}_{t,x} \left[\bar{Y}_i \Delta_{i+1} K \left(\sum_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} (n_i)_k \chi_{\mathbf{R}^d \setminus \bar{G}}(X_{i+1}^\Delta) + \eta_i u_i \chi_{\partial G}(\bar{X}_i) \right. \right. \\
&\left. \left. + \gamma_i \chi_{\partial G}(\bar{X}_i) \right) \right] + O(h^{\frac{3}{2}}). \tag{2.22}
\end{aligned}$$

Ясно, что при $\bar{X}_i \in \bar{G}$ и $X_{i+1}^\Delta \in \bar{G}$, выражение под знаком математического ожидания в правой части (2.22) равно нулю, а при $\bar{X}_i \in \partial G$ и $X_{i+1}^\Delta \notin \bar{G}$ оно обращается в ноль в силу выполнения граничного условия (2.8). В случае, когда $\bar{X}_i \in G$ и $X_{i+1}^\Delta \notin \bar{G}$ это выражение равно

$$\bar{Y}_i \Delta_{i+1} K \left(\sum_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} (n_i)_k \chi_{\mathbf{R}^d \setminus \bar{G}}(X_{i+1}^\Delta) \right).$$

Но здесь следует отметить, что справедлива оценка

$$\left| \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{E}_{t,x} (\bar{Y}_i \Delta_{i+1} K \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} (n_i)_k \chi_{\mathbf{R}^d \setminus \bar{G}}(X_{i+1}^\Delta)) \right| \leq C E_{t,x}(\bar{k}_N) h^{\frac{1}{2}}, \tag{2.23}$$

которая следует из (2.20) и (2.21).

Из (2.22) и (2.23) следует, что $|u^h(t, x) - u(t, x)| < Ch^{\frac{1}{2}}$.

Теорема доказана. \square

2.2 Дифференцирование по параметру решения уравнения Скорохода

Рассмотрим сначала детерминированный случай. Пусть дана неслучайная функция $r(t, \theta)$ с областью определения $[0, T] \times [\theta_1, \theta_2]$, принимающая значения в

\mathbf{R}^d , и $r(0, \theta) \in \bar{G}$ при всех значениях параметра $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Будем предполагать, что для функции r выполнено условие

Д2) функция r непрерывна по t на отрезке $[0, T]$ и имеет производную по θ в каждой точке интервала (θ_1, θ_2) , непрерывную по t и по θ .

Решение уравнения Скорохода состоит в нахождении непрерывной функции $\mu : [0, T] \times [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \bar{G}$ и функции ограниченной вариации $k : [0, T] \times [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbf{R}^d$ таких, что $k_i(0, \theta) = 0$ ($i = 1, \dots, d$) при всех $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, и k изменяется только когда $\mu \in \partial G$. При этом для всех $(t, \theta) \in [0, T] \times [\theta_1, \theta_2]$ должны выполняться равенства:

$$\mu = r + k, \quad (2.24)$$

$$|k(t, \theta)| = \int_0^t \chi_{\partial G}(\mu(s, \theta)) d|k(s, \theta)|, \quad (2.25)$$

$$k(t, \theta) = \int_0^t n(\mu(s, \theta)) d|k(s, \theta)|, \quad (2.26)$$

где $|k(t, \theta)|$ при фиксированном θ есть полная вариация функции $k(t, \theta)$ на отрезке $[0, t]$. По определению полной вариации $|k(t, \theta)| = \sup_k \sum |k(t_i, \theta) - k(t_{i-1}, \theta)|$, где супремум берется по всем разбиениям вида $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$. Теоремы существования и единственности решений уравнений вида (2.24) даны в работах [102], [110], [116].

В работах [110], [116] доказательство существования и единственности решения уравнения (2.24) проводилось сначала для ступенчатых функции и затем осуществлялся переход к пределу. Для обоснования дифференцируемости по параметру решения уравнения (2.24) тоже будем сначала рассматривать ступенчатые функции.

Зададим равномерное разбиение $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ отрезка $[0, T]$

с шагом $h = t_i - t_{i-1} = 1/2^m$, ($i = 1, \dots, N - 1$), где число узлов разбиения $N = [2^m T]$, если $2^m T - [2^m T] = 0$ и $N = [2^m T] + 1$ в противном случае. Непрерывная функция $r(t, \theta)$ на отрезке $[0, T]$ равномерно по $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ может быть аппроксимирована ступенчатыми функциями, которые определяются по правилу: $r_m(t, \theta) = r(k2^{-m}, \theta)$ при $k2^{-m} \leq t < (k + 1)2^{-m}$, $k = 0, \dots, N - 1$.

Рассмотрим уравнение Скорохода для r_m :

$$\mu_m = r_m + k_m. \quad (2.27)$$

Для функции r_m решение уравнения (2.27) записывается явно [110]

$$\mu_m(t, \theta) = \begin{cases} r_m(0, \theta), & 0 \leq t < \frac{1}{2^m}, \\ \rho(\mu_m(\frac{i-1}{2^m}, \theta) + \Delta r_m(\frac{i}{2^m})), & \frac{i}{2^m} \leq t < \frac{i+1}{2^m}, \end{cases} \quad (2.28)$$

$$k_m(t, \theta) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \frac{1}{2^m}, \\ k_m(\frac{i-1}{2^m}, \theta) + \rho(\mu_m(\frac{i-1}{2^m}, \theta) + \Delta r_m(\frac{i}{2^m}, \theta)) \\ \quad - \mu_m(\frac{i-1}{2^m}, \theta) - \Delta r_m(\frac{i}{2^m}, \theta), & \frac{i}{2^m} \leq t < \frac{i+1}{2^m}, \end{cases} \quad (2.29)$$

где $\Delta r_m(\frac{i}{2^m}, \theta) = r_m(\frac{i}{2^m}) - r_m(\frac{i}{2^m} - 0)$.

В дальнейшем, производную по параметру θ некоторой функции $\alpha(\theta)$ будем обозначать как $\partial_\theta \alpha$. Из дифференцируемости по θ функции r , дифференцируемости по x функции $\rho(x)$ и формул (2.28), (2.29) ясно, что функции r_m , k_m дифференцируемы по θ . В силу дифференцируемости $\rho(x)$ (проекции точки x на \bar{G}) и функции r по θ можно последовательно для каждого интервала разбиения отрезка $[0, T]$ продифференцировать по θ равенства (2.28), (2.29). В результате получим производные функций r_m , k_m по параметру

$$\partial_\theta \mu_m(t, \theta) = \begin{cases} \partial_\theta r_m(0, \theta), & 0 \leq t < \frac{1}{2^m}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_{\mu_m(\frac{i-1}{2^m}, \theta) + \Delta r_m(\frac{i}{2^m}, \theta)} \cdot [\partial_\theta \mu_m(\frac{i-1}{2^m}, \theta) \\ + \partial_\theta \Delta r_m(\frac{i}{2^m}, \theta)], & \frac{i}{2^m} \leq t < \frac{i+1}{2^m}, \end{cases} \quad (2.30)$$

$$\partial_\theta k_m(t, \theta) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \frac{1}{2^m}, \\ \partial_\theta k_m(\frac{i-1}{2^m}, \theta) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_{\mu_m(\frac{i-1}{2^m}, \theta) + \Delta r_m(\frac{i}{2^m}, \theta)} - I \right) \\ \cdot [\partial_\theta \mu_m(\frac{i-1}{2^m}, \theta) + \partial_\theta \Delta r_m(\frac{i}{2^m}, \theta)], & \frac{i}{2^m} \leq t < \frac{i+1}{2^m}, \end{cases} \quad (2.31)$$

где I – единичная матрица. Очевидно, что функции (2.30), (2.31) удовлетворяют уравнению

$$\partial_\theta \mu_m = \partial_\theta r_m + \partial_\theta k_m. \quad (2.32)$$

Введем обозначения:

$$dk_m\left(\frac{i}{2^m}, \theta\right) = \rho\left(\mu_m\left(\frac{i-1}{2^m}, \theta\right) + \Delta r_m\left(\frac{i}{2^m}, \theta\right)\right) - \mu_m\left(\frac{i-1}{2^m}, \theta\right) - \Delta r_m\left(\frac{i}{2^m}, \theta\right),$$

$$d\left|k_m\left(\frac{i}{2^m}, \theta\right)\right| = \left|\rho\left(\mu_m\left(\frac{i-1}{2^m}, \theta\right) + \Delta r_m\left(\frac{i}{2^m}, \theta\right)\right) - \mu_m\left(\frac{i-1}{2^m}, \theta\right) - \Delta r_m\left(\frac{i}{2^m}, \theta\right)\right|.$$

Тогда уравнения (2.25), (2.26) принимают соответственно вид:

$$|k_m(t, \theta)| = \sum_{i=1}^{j_m} \chi_{\partial G} \left(\mu_m\left(\frac{i}{2^m}, \theta\right) \right) d\left|k_m\left(\frac{i}{2^m}, \theta\right)\right|, \quad (2.33)$$

$$k_m(t, \theta) = \sum_{i=1}^{j_m} dk_m\left(\frac{i}{2^m}, \theta\right) = \sum_{i=1}^{j_m} n\left(\mu_m\left(\frac{i}{2^m}, \theta\right)\right) d\left|k_m\left(\frac{i}{2^m}, \theta\right)\right|, \quad (2.34)$$

где j_m – номер узла такой, что $\frac{j_m}{2^m} \leq t < \frac{j_m+1}{2^m}$.

Изменение ступенчатой функции $|k_m(\cdot, \theta)|$ в точке $\frac{i}{2^m}$ равно $d|k_m(\frac{i}{2^m}, \theta)|$. В статье Y. Saisho [110] показано, что последовательности функций μ_m, k_m сходятся равномерно при $m \rightarrow \infty$ к непрерывным функциям μ, k соответственно, которые являются решением уравнения (2.24). В данной работе рассматривается

функция r , которая зависит от параметра и имеет производные по параметру. В связи с этим возникает вопрос о сходимости производных $\partial_\theta \mu_m$, $\partial_\theta k_m$ при $m \rightarrow \infty$.

Теорема 7. Пусть выполнены условия **A2**, **D2**, тогда последовательности $\partial_p \mu_m$, $\partial_p k_m$ сходятся равномерно при $m \rightarrow \infty$ к функциям $\partial_\theta \mu$, $\partial_\theta k$ соответственно, для которых выполнены следующие равенства:

$$\partial_\theta \mu = \partial_\theta r + \partial_\theta k, \quad (2.35)$$

$$\partial_p k(t, \theta) = \int_0^t \frac{\partial n}{\partial x}(\mu(s, \theta)) \partial_\theta \mu(s, \theta) d|k(s, \theta)| + \int_0^t \chi_{\partial G}(\mu(s, \theta)) n(\mu(s, \theta)) d(\partial_\theta |k(s, \theta)|). \quad (2.36)$$

Доказательство. Обозначим $\psi_{m,n}(t, \theta) = \mu_m(t, \theta) - \mu_n(t, \theta)$. При каждом $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ последовательность μ_m сходится равномерно к непрерывной функции μ на $[0, T]$ [110], [116]. В работе [116] (Лемма 2.2) для двух различных функций $r(t)$, $\tilde{r}(t)$ и соответствующих решений уравнения (2.24) доказано следующее неравенство :

$$\begin{aligned} |\mu(t) - \tilde{\mu}(t)|^2 &\leq |r(t) - \tilde{r}(t)|^2 \\ &+ 2 \int_0^t (r(t) - \tilde{r}(t) - r(s) + \tilde{r}(s), dk(s) - d\tilde{k}(s)). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Отсюда, учитывая ограниченность функций k , \tilde{k} , приходим к неравенству:

$$|\mu(t) - \tilde{\mu}(t)|^2 \leq |r(t) - \tilde{r}(t)|^2 + C \sup_{0 \leq s \leq t} |r(s) - \tilde{r}(s)|, \quad (2.38)$$

где $C > 0$ – константа. Применим неравенство (2.38) к функциям $r_m(t, \theta + \delta\theta)$ и

$r_m(t, \theta)$

$$\begin{aligned} |\mu_m(t, \theta + \delta\theta) - \mu_m(t, \theta)|^2 &\leq |r_m(t, \theta + \delta\theta) - r_m(t, \theta)|^2 \\ &+ C \sup_{0 \leq s \leq t} |r_m(s, \theta + \delta\theta) - r_m(s, \theta)|. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Обозначим $\omega_r^t(\theta, \delta)$ модуль непрерывности функции r по переменной t при заданном значении параметра θ .

Запишем неравенство для первого слагаемого в правой части (2.39)

$$\begin{aligned} |r_m(t, \theta + \delta\theta) - r_m(t, \theta)|^2 &\leq 3|r_m(t, \theta + \delta\theta) - r(t, \theta + \delta\theta)|^2 \\ &+ 3|r(t, \theta + \delta\theta) - r(t, \theta)|^2 + 3|r(t, \theta) - r_m(t, \theta)|^2 \leq \\ &3(\omega_r^t(\theta + \delta\theta, 2^{-m}))^2 + 3\left(\sup_{t \in [0, T], \theta \in (\theta_1, \theta_2)} \partial_\theta r(t, \theta) \delta\theta\right)^2 + 3(\omega_r^t(\theta, 2^{-m}))^2. \end{aligned} \quad (2.40)$$

где $\delta\theta > 0$ и $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ такие, что $\theta + \delta\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Аналогично, для второго слагаемого в правой части (2.39)

$$C \sup_{0 \leq s \leq t} |r_m(s, \theta + \delta\theta) - r_m(s, \theta)| \leq C_1 \sup_{\theta \in (\theta_1, \theta_2)} \omega_r^t(\theta, 2^{-m}) + C_2 \delta\theta, \quad (2.41)$$

где C_1, C_2 – константы, которые не зависят от t, θ, m . Покажем, что $\partial_\theta \psi_{m,n} \rightarrow 0$ при $m, n \rightarrow \infty$ для любых $(t, \theta) \in [0, T] \times (\theta_1, \theta_2)$. Предположим, что это не так. Тогда существуют подпоследовательность $\{\psi_{m_k, n_k}\}$ и $(t', \theta') \in [0, T] \times (\theta_1, \theta_2)$, для которых при $m_k, n_k \rightarrow \infty$

$$|\partial_\theta \psi_{m_k, n_k}(t', \theta')| > \delta > 0. \quad (2.42)$$

Из (2.40), (2.41) следует, что в некоторой окрестности θ' при достаточно больших m_k, n_k выполняется приближенное равенство:

$$\psi_{m_k, n_k}(t', \theta' + \delta\theta) \approx \psi_{m_k, n_k}(t', \theta') + \partial_\theta \psi_{m_k, n_k}(t', \theta') \delta\theta. \quad (2.43)$$

При $m_k, n_k \rightarrow \infty$ левая часть (2.43) стремится к нулю силу равномерной сходимости r_m , а правая нет из-за (2.42). Получаем противоречие. Отсюда следует,

что для $\forall(t, \theta) \in [0, T] \times [\theta_1, \theta_2]$ существует предел числовой последовательности $\partial_\theta \mu_m(t, \theta)$ при $m \rightarrow \infty$. И, значит, числовая последовательность $\partial_p k_m(t, \theta)$ тоже имеет предел. Полученные таким образом функции обозначим $\partial_\theta \mu$, $\partial_\theta k$ и будем считать производными по параметру функций μ , k соответственно. Ясно, что $\partial_\theta \mu$, $\partial_\theta k$ определены однозначно и удовлетворяют уравнению (2.35).

Для получения производной по параметру решения уравнения (2.24) необходимо дифференцировать по параметру уравнения (2.25), (2.26). Рассмотрим дифференцирование по параметру этих уравнений, когда они записаны для ступенчатых функций. Представим равенство (2.34) в виде

$$k_m(t, \theta) = \sum_{i=1}^{j_m} n\left(\mu_m\left(\frac{i}{2^m}, \theta\right)\right) d|k_m\left(\frac{i}{2^m}, \theta\right)|, \quad \frac{j_m}{2^m} \leq t < \frac{j_m + 1}{2^m}, \quad (2.44)$$

а также в виде интеграла

$$k_m(t, \theta) = \int_0^t n(\mu_m(s, \theta)) d|k_m(s, \theta)|. \quad (2.45)$$

В результате дифференцирования (2.44) по θ получим

$$\begin{aligned} \partial_\theta k_m(t, \theta) &= \sum_{i=1}^j \frac{\partial n}{\partial x}\left(\mu_m\left(\frac{i}{2^m}, \theta\right)\right) \partial_\theta \mu_m\left(\frac{i}{2^m}, \theta\right) d|k_m\left(\frac{i}{2^m}, \theta\right)| \\ &+ \sum_{i=1}^j \chi_{\partial G}\left(\mu_m\left(\frac{i}{2^m}, \theta\right)\right) n\left(\mu_m\left(\frac{i}{2^m}, \theta\right)\right) \left(n\left(\mu_m\left(\frac{i}{2^m}, \theta\right)\right), \partial_\theta dk_m\left(\frac{i}{2^m}, \theta\right)\right). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Рассмотрение сходимости при $m \rightarrow \infty$ выражений в правой части (2.46) более удобно проводить, когда первая сумма представлена интегралом

$$\begin{aligned} \partial_\theta k_m(t, \theta) &= \int_0^t \frac{\partial n}{\partial x}(\mu_m(s, \theta)) \partial_\theta \mu_m(s, \theta) d|k_m(s, \theta)| \\ &+ \sum_{i=1}^j \chi_{\partial G}\left(\mu_m\left(\frac{i-1}{2^m}, \theta\right)\right) n\left(\mu_m\left(\frac{i-1}{2^m}, \theta\right)\right) \frac{dk_m\left(\frac{i-1}{2^m}, \theta\right) \partial_\theta (dk_m\left(\frac{i-1}{2^m}, \theta\right))}{d|k_m\left(\frac{i-1}{2^m}, \theta\right)|}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

Для доказательства сходимости интеграла в (2.47) нужно показать, что $\partial_\theta k_m$ равномерно ограничены. В связи с этим докажем следующую лемму

Лемма 5. Пусть выполнены условия **A2**, **D2**. Тогда функции $\partial_\theta k_m$ равномерно ограничены, т.е. существует константа $L > 0$, которая не зависит от m , такая, что $\forall (t, \theta) \in [0, T] \times (\theta_1, \theta_2)$ выполняется неравенство $|\partial_\theta k_m(t, \theta)| < L$.

Доказательство. Умножим скалярно равенство

$$\mu_m(s, \theta + \delta\theta) - \mu_m(s, \theta) = r_m(s, \theta + \delta\theta) - r_m(s, \theta) + k_m(s, \theta + \delta\theta) - k_m(s, \theta)$$

на $dk(s, \theta + \delta\theta) - dk(s, \theta)$ и проинтегрируем от 0 до t

$$\begin{aligned} & \int_0^t (\mu_m(s, \theta + \delta\theta) - \mu_m(s, \theta), dk(s, \theta + \delta\theta) - dk(s, \theta)) \\ &= \int_0^t (r_m(s, \theta + \delta\theta) - r_m(s, \theta), dk(s, \theta + \delta\theta) - dk(s, \theta)) \\ &+ \int_0^t (k_m(s, \theta + \delta\theta) - k_m(s, \theta), dk(s, \theta + \delta\theta) - dk(s, \theta)). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Интеграл в левой части (2.48) неположителен. Это следует из того, что направления векторов $dk(s, \theta + \delta\theta)$ и $dk(s, \theta)$ совпадают с направлениями соответствующих векторов внутренних нормалей, а из выпуклости области G следует, что векторы $dk(s, \theta + \delta\theta)$, $-dk(s, \theta)$ образуют с вектором $\mu_m(s, \theta + \delta\theta) - \mu_m(s, \theta)$ углы большие чем $\frac{\pi}{2}$.

Справедливо следующее неравенство, которое легко доказывается с использованием свойств интеграла Стильтьеса и функций ограниченной вариации

$$\int_0^t (k_m(s, \theta + \delta\theta) - k_m(s, \theta), dk(s, \theta + \delta\theta) - dk(s, \theta)) \geq \frac{1}{2} |(k_m(t, \theta + \delta\theta) - k_m(t, \theta))|^2. \quad (2.49)$$

Тогда из (2.48), (2.49) следует

$$|k_m(t, \theta + \delta\theta) - k_m(t, \theta)|^2 \leq 2 \int_0^t (r_m(s, \theta) - r_m(s, \theta + \delta\theta), dk(s, \theta + \delta\theta) - dk(s, \theta)). \quad (2.50)$$

Разделив на $\delta\theta$, и переходя к пределу при $\delta\theta \rightarrow 0$, окончательно получим

$$|\partial_\theta k_m(t, \theta)| \leq C \sup_{0 \leq s \leq T} |\partial_\theta r_m(s, \theta)| \leq C \sup_{0 \leq s \leq T} |\partial_\theta r(s, \theta)|. \quad (2.51)$$

Лемма доказана. \square

Рассмотрим интеграл в правой части (2.47)

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\partial n}{\partial x}(\mu_m(s, \theta)) \partial_\theta \mu_m(s, \theta) d|k_m(s, \theta)| &= \int_0^t \frac{\partial n}{\partial x}(\mu(s, \theta)) \partial_\theta \mu(s, \theta) d|k_m(s, \theta)| \\ &+ \int_0^t \left(\frac{\partial n}{\partial x}(\mu_m(s, \theta)) \partial_\theta \mu_m(s, \theta) - \frac{\partial n}{\partial x}(\mu(s, \theta)) \partial_\theta \mu(s, \theta) \right) d|k_m(s, \theta)|. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Так как последовательности μ_m и $\partial_\theta \mu_m$ сходятся при $m \rightarrow \infty$ равномерно, и функция $\frac{\partial n}{\partial x}$ непрерывна, то $\forall \varepsilon > 0$ найдется номер N_ε такой, что при всех $m > N_\varepsilon$

$$\sup_{0 \leq s \leq T} \left| \frac{\partial n}{\partial x}(\mu_m(s, \theta)) \partial_\theta \mu_m(s, \theta) - \frac{\partial n}{\partial x}(\mu(s, \theta)) \partial_\theta \mu(s, \theta) \right| < \varepsilon \quad (2.53)$$

Первый интеграл в правой части (2.52) сходится к интегралу

$$\int_0^t \frac{\partial n}{\partial x}(\mu(s, \theta)) \partial_\theta \mu(s, \theta) d|k(s, \theta)|$$

в силу известной теоремы Хелли о сходимости интегралов Стильтьеса (см., например, [55]). Из сходимости $\partial_\theta k_m$ и интеграла в правой части (2.47) следует, что существует предел при $m \rightarrow \infty$ интегральных сумм в правой части (2.47) и, значит, их норм. Обозначим предел норм этих интегральных сумм как $|\partial_\theta k(t, \theta)|$

при $0 \leq t \leq T$. Величина $|\partial_\theta k(t, \theta)|$ является полной вариацией производной $\partial_\theta k(t, \theta)$. Тогда сами интегральные суммы в (2.47) сходятся к интегралу $\int_0^t \chi_{\partial G}(\mu(s, \theta)) n(\mu(s, \theta)) d|\partial_\theta k(s, \theta)|$.

Теорема доказана. \square

Замечание 2.1. Время выхода функции $r(\cdot, \theta)$ на границу области зависит от параметра θ . Поэтому при дифференцировании по θ интегралов (2.25), (2.26) должны появляться слагаемые, каждый из которых равен производной по θ времени выхода, умноженной на подынтегральное выражение. Так как в момент достижения границы $d|k|$ равно нулю, то эти слагаемые не учитываются.

Рассмотрим уравнение Скорохода для стохастических дифференциальных уравнений. В статье [116] Х. Танака доказал (потраекторно), при выполнении условия **B2**, теорему существования и единственности решения векторного СДУ в выпуклой области

$$X_t = x + \int_0^t a(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s + k_t \quad (2.54)$$

Доказательство основано на методе последовательных приближений:

$$\begin{aligned} X^{(0)}(t) &= x, \\ X_t^{(n)} &= x + \int_0^t a(s, X_s^{(n-1)}) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(n-1)}) dW_s + k_t^{(n)}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

При выполнении условий теоремы итерации сходятся, т.е. в пределе получается уравнение (2.54). В нашем случае коэффициенты a , σ в (2.55) зависят от θ , и, если рассматривать для каждой траектории решения СДУ выражение в (2.54) $x + \int_0^t a(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s$ как функцию $r(t, \theta)$, то при дифференцировании по параметру можно применить результаты, полученные в разделе 2.2

для детерминированного случая. Таким образом, приходим к уравнениям для получения $\partial_\theta X_t$:

$$\partial_\theta X_t = \int_0^t \left(\frac{\partial a}{\partial x}(s, X_s, \theta) \partial_\theta X_s + \frac{\partial a}{\partial \theta}(s, X_s, \theta) \right) ds + \int_0^t \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}(s, X_s, \theta) \partial_\theta X_s \right. \quad (2.56)$$

$$\left. + \frac{\partial \sigma}{\partial \theta}(s, X_s, \theta) \right) dW_s + \int_0^t \frac{\partial n}{\partial x}(X_s) \partial_\theta X_s d|k(s, \theta)| \\ + \int_0^t \chi_{\partial G}(X_s) n(X_s) d|\partial_\theta k(s, \theta)|, \quad (2.57)$$

$$d|\partial_\theta k(s, \theta)| = \frac{dk(s, \theta) \partial_\theta (dk(s, \theta))}{d|k(s, \theta)|}, \quad (2.58)$$

$$|\partial_\theta k(t, \theta)| = \int_0^t \chi_{\partial G}(X_s) d|\partial_\theta k(s, \theta)|. \quad (2.59)$$

Стандартным образом доказываем единственность производной $\partial_\theta X_\cdot$. Если рассмотреть уравнение, которое получается из (2.57) для разности $(\partial_\theta X_\cdot)' - (\partial_\theta X_\cdot)''$ двух решений этого СДУ при одном ω и одним и тем же X_\cdot , то из-за линейности получится уравнение, у которого в правой части во всех подынтегральных выражениях разность производных $(\partial_\theta X_\cdot)' - (\partial_\theta X_\cdot)''$ входит как сомножитель ограниченных функций. Поэтому, после возведения в квадрат, можно получить неравенство:

$$|(\partial_\theta X_t)' - (\partial_\theta X_t)''|^2 \leq C \int_0^t |(\partial_\theta X_s)' - (\partial_\theta X_s)''|^2 ds, \quad (2.60)$$

где $C > 0$ – константа. Из неравенства (2.60) следует единственность решения уравнения (2.57). Если для уравнения (2.57) при заданном X_\cdot рассмотреть итерации, подобные (2.55), то с использованием (2.60) точно так же доказываемся

существование решения уравнения (2.57). Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 8. Пусть выполнены условия **A2**, **B2**, **B2**, **Г2**. Тогда существует производная по параметру решения уравнения (2.54), которая определена однозначно и удовлетворяет системе уравнений (2.57) – (2.59).

2.3 Оценки производных $\partial u/\partial\theta$

В данном разделе предложен метод оценки производных по параметрам решения задачи (2.6) – (2.8). Получаемая оценка $\partial u/\partial\theta$ рассматривается как результат приближенного определения значений функционала, полученного в результате дифференцирования по параметру уравнения (2.3)

$$\frac{\partial u}{\partial\theta}(t, x) = E_{t,x} \left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(X_T) \partial_\theta X_T + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(X_T) \right) Y_T + \varphi(X_T) \partial_\theta Y_T + \partial_\theta Z_T \right), \quad (2.61)$$

где $\partial_\theta X$, $\partial_\theta Y$, $\partial_\theta Z$ обозначены производные по параметру от X , Y , Z . Причем значения этих производных находятся из уравнений

$$\begin{aligned} \partial_\theta X_s &= \int_t^s \left(\frac{\partial a_v}{\partial x} \partial_\theta X_v + \frac{\partial a_v}{\partial\theta} \right) dv + \int_t^s \left(\frac{\partial\sigma_v}{\partial x} \partial_\theta X_v + \frac{\partial\sigma_v}{\partial\theta} \right) dW_v \\ &+ \int_t^s \frac{\partial n(X_v)}{\partial x} \partial_\theta X_v d|k_v| + \int_t^s n(X_v) d|\partial_\theta k_v|, \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} \partial_\theta Y_s &= Y_s \left[\int_t^s \left(\frac{\partial c_v}{\partial x} \partial_\theta X_v + \frac{\partial c_v}{\partial\theta} \right) dv \right. \\ &+ \left. \int_t^s \left(\frac{\partial\eta_v}{\partial x} \partial_\theta X_v + \frac{\partial\eta_v}{\partial\theta} \right) d|k_v| + \int_t^s \eta_v d|\partial_\theta k_v| \right], \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} \partial_\theta Z_s = & \int_t^s \left[\left(\frac{\partial f_v}{\partial x} \partial_\theta X_v + \frac{\partial f_v}{\partial \theta} \right) Y_v + f_v \partial_\theta Y_v \right] dv + \int_t^s \left[\left(\frac{\partial \gamma_v}{\partial x} \partial_\theta X_v \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial \gamma_v}{\partial \theta} \right) Y_v + \gamma_v \partial_\theta Y_v \right] d|k_v| + \int_t^s \gamma_v Y_v d|\partial_\theta k_v|, \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$|\partial_\theta k_s| = \int_t^s \chi_{\partial G}(X_v) d|\partial_\theta k_v|. \quad (2.65)$$

Обозначим $(\partial_\theta X)_i$, $(\partial_\theta Y)_i$, $(\partial_\theta Z)_i$ ($i = 0, \dots, N$) соответствующие значения производных $\partial_\theta X_s$, $\partial_\theta Y_s$, $\partial_\theta Z_s$ ($s \in [t, T]$) в узлах сетки, полученные в результате расчетов. Для вычисления $(\partial_\theta X)_i$, $(\partial_\theta Y)_i$, $(\partial_\theta Z)_i$ используется следующая схема

$$\begin{aligned} (\partial_\theta X)_{i+1}^\Delta = & (\partial_\theta X)_i + h \left(\frac{\partial a_i}{\partial x} (\partial_\theta X)_i + \frac{\partial a_i}{\partial \theta} \right) \\ & + \sqrt{h} \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial x} (\partial_\theta X)_i + \frac{\partial \sigma_i}{\partial \theta} \right) \xi_i, \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$(\partial_\theta X)_{i+1} = (\partial_\theta X)_{i+1}^\Delta + (\Delta_{i+1} K) \left(\frac{\partial n_i}{\partial x} (\partial_\theta X)_i \right) + \partial_\theta (\Delta_{i+1} K) n_i,$$

$$\begin{aligned} (\partial_\theta Y)_{i+1} = & (\partial_\theta Y)_i (1 + hc_i + \eta_i \chi_{\partial G}(x_i) \Delta_{i+1} K) + y_i \left[h \left(\frac{\partial c_i}{\partial x} (\partial_\theta X)_i + \frac{\partial c_i}{\partial \theta} \right) \right. \\ & \left. + \chi_{\partial G}(x_i) \left(\left(\frac{\partial \eta_i}{\partial x} (\partial_\theta X)_i + \frac{\partial \eta_i}{\partial \theta} \right) \Delta_{i+1} K + \eta_i \partial_\theta (\Delta_{i+1} K) \right) \right], \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} (\partial_\theta Z)_{i+1} = & (\partial_\theta Z)_i + (\partial_\theta Y)_i (hf_i + \gamma_i \chi_{\partial G}(x_i) \Delta_{i+1} K) + y_i \left[h \left(\frac{\partial f_i}{\partial x} (\partial_\theta X)_i + \frac{\partial f_i}{\partial \theta} \right) \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial x} (\partial_\theta X)_i + \frac{\partial \gamma_i}{\partial \theta} \right) \chi_{\partial G}(x_i) \Delta_{i+1} K + \gamma_i \chi_{\partial G}(x_i) \partial_\theta (\Delta_{i+1} K) \right], \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$(\partial_\theta K)_{i+1} = (\partial_\theta K)_i + \partial_\theta (\Delta_{i+1} K), \quad (2.69)$$

где $\partial_\theta (\Delta_{i+1} K) = \frac{\partial (\Delta_{i+1} K)}{\partial \theta}$. В качестве оценки $\partial u / \partial \theta(t, x)$ по результатам статистического моделирования принимается значение величины

$$\frac{\partial u^h}{\partial \theta}(t, x) = \mathbb{E}_{t,x} \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\bar{X}_N) (\partial_\theta X)_N + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\bar{X}_N) \right) \bar{Y}_N + \varphi(\bar{X}_N) (\partial_\theta Y)_N + (\partial_\theta Z)_N \right). \quad (2.70)$$

Покажем, что погрешность оценки (2.70) есть величина порядка $O(h^{\frac{1}{2}})$.

Теорема 9. Пусть выполнены **A2**, **B2**, **B2**, **Г2**. Тогда при достаточно малых h существует константа C , зависящая от $T - t$, a , σ , f такая, что

$$\left| \frac{\partial u^h}{\partial \theta}(t, x) - \frac{\partial u}{\partial \theta}(t, x) \right| \leq Ch^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^h}{\partial \theta}(t, x) - \frac{\partial u}{\partial \theta}(t, x) &= \mathbf{E}_{t,x} \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\bar{X}_N)(\partial_\theta X)_N + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\bar{X}_N) \right) \bar{Y}_N \right. \\ &\quad \left. + \varphi(\bar{X}_N)(\partial_\theta Y)_N + (\partial_\theta Z)_N \right) - \frac{\partial u}{\partial \theta}(t, x) \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{E}_{t,x} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}(t_{i+1}, \bar{X}_{i+1})(\partial_\theta X)_{i+1} + \frac{\partial u}{\partial \theta}(t_{i+1}, \bar{X}_{i+1}) \right) \bar{Y}_{i+1} \right. \\ &\quad \left. + u(t_{i+1}, \bar{X}_{i+1})(\partial_\theta Y)_{i+1} + (\partial_\theta Z)_{i+1} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t_i, \bar{X}_i)(\partial_\theta X)_i + \frac{\partial u}{\partial \theta}(t_i, \bar{X}_i) \right) \bar{Y}_i \right. \\ &\quad \left. - u(t_i, \bar{X}_i)(\partial_\theta Y)_i - (\partial_\theta Z)_i \right]. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Действуем как в теореме 6, применяя разложение в ряд Тейлора к функциям u , $\partial u/\partial x$ и $\partial u/\partial \theta$.

Так как в точке (t_i, \bar{X}_i) для функции u выполняется уравнение (2.6), то в полученном выражении после разложения пропадут слагаемые, которые в сумме будут удовлетворять этому уравнению, умноженному на $(\partial_\theta Y)_i$. Таким же образом пропадут слагаемые, которые в сумме будут удовлетворять равенствам, полученным из (2.6) в результате дифференцирования по θ и умножения на \bar{Y}_i и в результате дифференцирования равенства (2.6) по \bar{X}_k и умножения на $\bar{Y}_i(\partial_\theta X_k)_i$ для всех $k = 1, \dots, d$. В результате получаем

$$\mathbf{E}_{t,x} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}(t_{i+1}, \bar{X}_{i+1})(\partial_\theta X)_{i+1} + \frac{\partial u}{\partial \theta}(t_{i+1}, \bar{X}_{i+1}) \right) \bar{Y}_{i+1} + u(t_{i+1}, \bar{X}_{i+1})(\partial_\theta Y)_{i+1} \right]$$

$$\begin{aligned}
& +(\partial_\theta Z)_{i+1} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t_i, \bar{X}_i)(\partial_\theta X)_i + \frac{\partial u}{\partial \theta}(t_i, \bar{X}_i) \right) \bar{Y}_i - u(t_i, \bar{X}_i)(\partial_\theta Y)_i - (\partial_\theta Z)_i \Big] \\
& = \mathbb{E}_{t,x} \left[\bar{Y}_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} (\partial_\theta X)_i (\sqrt{h} \sigma_i \xi_i + (\Delta_{i+1} K) n_i \chi_{\mathbf{R}^d \setminus \bar{G}}(X_{i+1}^\Delta)) \right. \\
& + \bar{Y}_i \frac{\partial u_i}{\partial x} (\partial_\theta X)_i \eta_i \chi_{\partial G}(\bar{X}_i) (\Delta_{i+1} K) + \bar{Y}_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \left[\sqrt{h} \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial x} (\partial_\theta X)_i + \frac{\partial \sigma_i}{\partial \theta} \right) \xi_i \right. \\
& + \left. \left. \left((\Delta_{i+1} K) \frac{\partial n_i}{\partial x} (\partial_\theta X)_i + \partial_\theta (\Delta_{i+1} K) n_i \right) \chi_{\mathbf{R}^d \setminus \bar{G}}(X_{i+1}^\Delta) \right] \right. \\
& + \bar{Y}_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial \theta \partial x} \left[\sqrt{h} \sigma_i \xi_i + (\Delta_{i+1} K) n_i \chi_{\mathbf{R}^d \setminus \bar{G}}(X_{i+1}^\Delta) \right] + \bar{Y}_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial \theta} \eta_i \chi_{\partial G}(\bar{X}_i) (\Delta_{i+1} K) \right) \\
& + \left[(\partial_\theta Y)_i \gamma_i (\Delta_{i+1} K) + \bar{Y}_i \left(\gamma_i \partial_\theta (\Delta_{i+1} K) + \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial x} (\partial_\theta X)_i \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \left. \frac{\partial \gamma_i}{\partial \theta} \right) (\Delta_{i+1} K) \right) \right] \chi_{\partial G}(\bar{X}_i) + \frac{\partial u_i}{\partial x} (\partial_\theta Y)_i \left(\sqrt{h} \sigma_i \xi_i + (\Delta_{i+1} K) n_i \chi_{\mathbf{R}^d \setminus \bar{G}}(X_{i+1}^\Delta) \right) \\
& + u_i \left[\left((\partial_\theta Y)_i \eta_i + \bar{Y}_i \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial x} (\partial_\theta X)_i + \frac{\partial \eta_i}{\partial \theta} \right) \right) (\Delta_{i+1} K) \right. \\
& \left. + \bar{Y}_i \eta_i \partial_\theta (\Delta_{i+1} K) \right] \chi_{\partial G}(\bar{X}_i) \Big] + O(h^{\frac{3}{2}}). \tag{2.72}
\end{aligned}$$

Очевидно, что математическое ожидание в правой части равенства (2.72) равно нулю, если $\bar{X}_i \in \bar{G}$ и $X_{i+1}^\Delta \in \bar{G}$. Если $\bar{X}_i \in \partial G$ и $X_{i+1}^\Delta \notin \bar{G}$, то оно тоже равно нулю. Действительно, в этом случае выражение под знаком математического ожидания в правой части (2.72) можно представить в виде суммы трех слагаемых, каждое из которых равно нулю. Первое есть левая часть равенства (2.8), умноженная на $(\partial_\theta Y)_i (\Delta_{i+1} K) + \bar{Y}_i \partial_\theta (\Delta_{i+1} K)$. Второе слагаемое есть производная по x левой части равенства (2.8), умноженная на $(\partial_\theta X)_i (\Delta_{i+1} K) \bar{Y}_i$. Третье – производная по θ левой части равенства (2.8), умноженная на $\bar{Y}_i (\Delta_{i+1} K)$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\bar{X}_i \in G$ и $X_{i+1}^\Delta \notin G$. Тогда правая часть (2.72) равна

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{t,x} \left(\bar{Y}_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} (\partial_\theta X)_i (\Delta_{i+1} K) n_i + \bar{Y}_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \partial_\theta (\Delta_{i+1} K) n_i \right. \\
& \left. + \bar{Y}_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial \theta \partial x} (\Delta_{i+1} K) n_i + (\partial_\theta Y)_i \frac{\partial u_i}{\partial x} (\Delta_{i+1} K) n_i \right). \tag{2.73}
\end{aligned}$$

Используя такие же рассуждения как и доказательстве теоремы (6), можно показать, что после суммирования по i выражения (2.73) получится величина, абсолютное значение которой $\leq Ch^{\frac{1}{2}}$.

Доказательство теоремы завершено. \square

2.4 Решение модельной задачи

В качестве примера для расчета была взята следующая краевая задача

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + 0.5 \left(\theta_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \theta_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} - (x_1^2 + 0.5)u \\ & + \exp(-0.3(T-t)) \cdot [(x_1^2 + 0.2)(1 - \theta_1 x_1^2 - \theta_2 x_2^2) \\ & + \theta_1^2 + 2\theta_1 x_1 + \theta_2^2 + 2\theta_2 x_2] = 0, \quad t \in (0, T), \quad x \in G, \end{aligned} \quad (2.74)$$

$$G = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}, \quad \theta_1, \theta_2 \in [10^{-3}, 1.0], \quad (2.75)$$

$$u(T, x_1, x_2, \theta_1, \theta_2) = (1 - \theta_1 x_1^2 - \theta_2 x_2^2), \quad (2.76)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial G} - 2 \exp(-0.3(T-t))(\theta_1 x_2^2 + \theta_2 x_2^2) = 0 \quad \text{при } t \in [0, T]. \quad (2.77)$$

Точным решением этой задачи является функция

$$u(t, x_1, x_2, \theta_1, \theta_2) = \exp(-0.3(T-t))(1 - \theta_1 x_1^2 - \theta_2 x_2^2). \quad (2.78)$$

В расчетах были взяты следующие числовые характеристики:

$T = 0.5$; $t = 0.2$; $\theta_1 = 0.05$, $\theta_2 = 0.15$; объём выборки 10^5 .

Оценка значений u , $\frac{\partial u}{\partial \theta_1}$, $\frac{\partial u}{\partial \theta_2}$ производилась в трех точках $x^{(1)} = (0.332, 0.500)$, $x^{(2)} = (0.559, 0.500)$, $x^{(3)} = (0.808, 0.500)$ с расстояниями до границы 0.60, 0.75., 0.95, соответственно.

Полученные оценки решения краевой задачи u и его производных $\partial u / \partial \theta_i$, $i = 1, 2$ для $h = 1 \cdot 10^{-5}$, $h = 1 \cdot 10^{-6}$ даны в табл. 1 – 3.

Таблица 1. Оценки $u(t, x)$

x	Оценка u ($h = 10^{-5}$)	Оценка u ($h = 10^{-6}$)	Точное значение u
$x^{(1)}$	$0.8747 \pm 3.5 \cdot 10^{-4}$	$0.8748 \pm 3.5 \cdot 10^{-4}$	0.8746
$x^{(2)}$	$0.8655 \pm 3.4 \cdot 10^{-4}$	$0.8655 \pm 3.4 \cdot 10^{-4}$	0.8654
$x^{(3)}$	$0.8501 \pm 3.1 \cdot 10^{-4}$	$0.8500 \pm 3.1 \cdot 10^{-4}$	0.8498

Таблица 2. Оценки $\frac{\partial u}{\partial \theta_1}(t, x)$

x	Оценка $\frac{\partial u}{\partial \theta_1}$ ($h = 10^{-5}$)	Оценка $\frac{\partial u}{\partial \theta_1}$ ($h = 10^{-6}$)	Точное значение $\frac{\partial u}{\partial \theta_1}$
$x^{(1)}$	$-0.1014 \pm 1.5 \cdot 10^{-3}$	$-0.1014 \pm 1.5 \cdot 10^{-3}$	-0.1007
$x^{(2)}$	$-0.2890 \pm 2.1 \cdot 10^{-3}$	$-0.2873 \pm 2.1 \cdot 10^{-3}$	-0.2856
$x^{(3)}$	$-0.6061 \pm 2.5 \cdot 10^{-3}$	$-0.6003 \pm 2.5 \cdot 10^{-3}$	-0.5967

Таблица 3. Оценки $\frac{\partial u}{\partial \theta_2}(t, x)$

x	Оценка $\frac{\partial u}{\partial \theta_2}$ ($h = 10^{-5}$)	Оценка $\frac{\partial u}{\partial \theta_2}$ ($h = 10^{-6}$)	Точное значение $\frac{\partial u}{\partial \theta_2}$
$x^{(1)}$	$-0.2308 \pm 3.5 \cdot 10^{-3}$	$-0.2279 \pm 3.5 \cdot 10^{-3}$	-0.2285
$x^{(2)}$	$-0.2331 \pm 3.3 \cdot 10^{-3}$	$-0.2287 \pm 3.3 \cdot 10^{-3}$	-0.2285
$x^{(3)}$	$-0.2363 \pm 3.0 \cdot 10^{-3}$	$-0.2297 \pm 2.9 \cdot 10^{-3}$	-0.2285

Заметим, что точное значение производной по θ_2 функции (2.78) определяется по формуле: $-\exp(-0.3(T-t))x_2^2$. Поскольку все точки $x^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$ имеют одну и ту же вторую координату, то все значения $\partial u / \partial \theta_2$ в последнем столбце табл. 3 совпадают.

Результаты расчетов в табл. 1–3 показали, что наиболее точные оценки получились для точки $x^{(1)}$, наиболее удаленной от границы. Наименее точные оценки получились для точки $x^{(3)}$, которая расположена вблизи границы. Это согласуется с тем фактом, что наибольшая потеря точности метода происходит, когда моделируемая траектория пересекает границу.

Глава 3

Решение обратных задач для уравнения теплопроводности с использованием

оценок $\frac{\partial u}{\partial \theta}$

В данной главе представлено решение обратных задач для уравнения теплопроводности, в которых, для вычисления градиента минимизируемой функции используются оценки $\frac{\partial u}{\partial \theta}$.

3.1 Определение неизвестных коэффициентов в краевой задаче для уравнения теплопроводности

Рассматривается следующая краевая задача для параболического уравнения с заданным конечно-временным условием

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d b_{ij}(t, x, \theta) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d a_i(t, x, \theta) \frac{\partial u}{\partial x_i} \\ + c(t, x, \theta)u + f(t, x, \theta) = 0, \quad t \in [0, T], \quad x \in G, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$u(T, x, \theta) = \varphi(x, \theta), \quad x \in G, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \eta(t, x, \theta)u + \gamma(t, x, \theta) = 0, \quad x \in \partial G, \quad (3.3)$$

где G – область в \mathbf{R}^d с границей ∂G ; n – единичный вектор внутренней нормали в точке $x \in \partial G$; $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ – вектор параметров.

Будем предполагать, что задача (3.1) – (3.3) имеет решение, у которого первая производная по t и вторые производные по x непрерывны вплоть до границы. Условия, при которых это выполняется даны в [44].

Заметим, что краевая задача (3.1) – (3.3) может быть легко преобразована к задаче с начальным условием в результате замены переменной $\tau = T - t$. С учетом этого будем считать, что задача (3.1) – (3.3), описывает некоторый физический процесс, например, процесс передачи тепла в твердом однородном теле.

В практике часто возникает необходимость решать следующую задачу. Пусть вектор параметров θ неизвестен, но известны измерения температуры во внутренних точках тела на заданном отрезке времени $[0, T]$. Требуется на основе данных измерений получить достаточно точные оценки параметров. Задачи такого типа называются *обратными задачами*. Решение обратных задач для уравнений теплопроводности находит применение при конструировании различных технических устройств, функционирование которых связано с процессами теплообмена. Необходимость решения таких задач возникает при создании аэрокосмической техники, ядерных реакторов, ракетных двигателей и двигателей внутреннего сгорания, а также в металлургии, создании теплозащитных покрытий, исследовании теплофизических свойств материалов и др. (см., например, [2], [7]).

При решении обратных задач очень важно построить процесс решения так, чтобы полученные оценки параметров были устойчивы к небольшим погрешностям входных данных. Для этого применяются алгоритмы регуляризации. В данной работе предполагается, что неизвестный вектор параметров принадлежит известному компактному множеству в \mathbf{R}^m и в качестве метода регуляриза-

ции выбран метод δ -квазирешений [6].

Обозначим $\bar{G}_T = \bar{G} \times [0, T]$. Пусть решение краевой задачи (3.1) – (3.3) принадлежит для некоторого нецелого $\alpha > 0$ пространству Гельдера $\mathbf{H}^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{G}_T)$ (в соответствии с теоремой существования и единственности, см. [44], стр.364).

Зададим оператор $A : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{H}^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{G}_T)$, который каждому вектору $\theta \in \mathbf{R}^m$ ставит в соответствие функцию $u(\cdot, \cdot, \theta) \in \mathbf{H}^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{G}_T)$, являющуюся решением задачи (3.1) – (3.3) при данном θ . Будем предполагать, что для каждого параметра θ_i , ($i = 1, \dots, m$) известен отрезок $[a_i, b_i]$, которому он принадлежит, т.е. вектор θ принадлежит множеству $P \equiv \prod_{i=1}^m [a_i, b_i]$.

Предположим также, что отображение $A : P \rightarrow AP$, которое каждому вектору $\theta \in P$ ставит в соответствие функцию u – решение задачи (3.1) – (3.3), взаимно однозначно и непрерывно. Тогда, поскольку множество P является компактом в \mathbf{R}^m , из известной леммы А.Н. Тихонова о непрерывности обратного оператора [58], [59] следует, что обратное отображение $A^{-1} : AP \rightarrow P$ является непрерывным.

Пусть для некоторого значения $\bar{u} \in AP$ требуется определить соответствующий вектор параметров $\bar{\theta}$, т.е. надо решить уравнение

$$A\theta = \bar{u}. \quad (3.4)$$

Но вместо \bar{u} известно $u_\delta \in AP$ такое, что $\|u_\delta - \bar{u}\| \leq \delta$, где δ достаточно малое число. Тогда, поскольку отображение A^{-1} непрерывно, в качестве приближенного решения уравнения (3.4) можно взять θ_δ , которое является решением уравнения (3.4) с u_δ в правой части.

Как правило, полученное в результате измерений u_δ не принадлежит множеству AP , и выражение $A^{-1}u_\delta$ не всегда может быть определено. В этом случае в

качестве приближенного решения уравнения (3.4) можно принять вектор $\theta_\delta^* \in P$, который минимизирует норму невязки $\|A\theta - u_\delta\|$. Приближенное решение вида θ_δ^* называют *квазирешением* [59]. Поскольку $\theta_\delta^*, \bar{\theta} \in P$, а оператор A^{-1} непрерывен из AP в P , то нетрудно показать [6], что

$$\|\theta_\delta^* - \bar{\theta}\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0. \quad (3.5)$$

Обозначим R оператор, который каждой паре (u_δ, δ) ставит в соответствие $\theta_\delta^* \in P$. Операторы такого типа, обладающие свойством (3.5), названы в [6] *регуляризирующими алгоритмами*.

Для определения θ_δ^* будем находить минимум функции $\Phi(\theta) \equiv \|A\theta - u_\delta\|^2$ с помощью итерационного алгоритма минимизации, использующего производные функции $\Phi(\theta)$. Для этой цели предлагается использовать вариант стохастического квазиградиентного алгоритма с переменной метрикой [61], в котором приближения к точке минимума строятся по правилу

$$\theta^{k+1} = \theta^k - \rho_k H^k \nabla^k \Phi, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.6)$$

где H^k – случайная квадратная матрица размера $l \times l$; $\nabla^k \Phi$ – градиент целевой функции в точке θ^k ; ρ_k – параметр шага.

Последовательность матриц H^k вычисляется по схеме: $H^0 = I$, $H^{k+1} = (I - \mu_k \nabla^{k+1} \Phi \cdot (\Delta^{k+1} \theta)^T) H^k$, $\Delta^{k+1} \theta = \theta^{k+1} - \theta^k$. Параметр μ_k выбирается из равенства $\mu_k = \mu / (|\nabla^{k+1} \Phi| \cdot |\Delta^{k+1} \theta|)$, где μ – константа такая, что $0 < \mu < 1$.

На каждом шаге алгоритма происходит автоматическая подстройка параметра шага ρ_k . Если $\Phi(\theta^{k+1}) > \Phi(\theta^k)$, то $\rho_{k+1} = \rho_k / \gamma$, где $\gamma > 1$ – фиксированный параметр. Если $\Phi(\theta^{k+1}) < \Phi(\theta^k)$, то выполняется следующая последовательность действий: $\rho_{k,i} = \rho_k \gamma^i$, $\theta^{k+1,i} = \theta^k - \rho_{k,i} H^k \nabla^k \Phi$ и вычисление $\Phi(\theta^{k+1,i})$, $i = 0, 1, \dots$. Эти действия производятся до тех пор пока убывает значение функции Φ и при

этом выполняются условия: $\rho_{\min} \leq \rho_{k,i} \leq \rho_{\max}$ (ρ_{\min} , ρ_{\max} – минимальная, максимальная длина шага, соответственно) и $i < i_{\max}$ (i_{\max} – заданное максимальное число итераций по увеличению шага). Значения θ^{k+1} , ρ_{k+1} полагаются равными соответственно значениям $\theta^{k+1,i}$, $\rho_{k,i}$, которые соответствуют минимальному из полученных таким образом значений Φ .

Как правило, итерационные алгоритмы минимизации не дают точный минимум целевой функции за конечное число итераций. В книге [6] дана модификация метода квазирешений, позволяющая находить приближенное решение уравнения (3.4). Суть модификации в том, что заданной паре (u_δ, δ) ставится в соответствие произвольный вектор θ_δ такой, что

$$\|A\theta_\delta - u_\delta\| \leq \delta. \quad (3.7)$$

При таком подходе $\theta_\delta \rightarrow \bar{\theta}$ при $\delta \rightarrow 0$ и такой алгоритм является регуляризирующим. Регуляризирующий алгоритм такого типа назван в [6] алгоритмом δ -квазирешения.

Пусть u_{ij}^δ ($i = 1, \dots, K_T$; $j = 1, \dots, L_G$) – измерения температуры с погрешностью δ , сделанные в моменты времени t_i ($i = 1, \dots, K_T$) в точках $x_j \in G$ ($j = 1, \dots, L_G$). Оценки параметров будем находить как результат минимизации функции:

$$\tilde{\Phi}(\theta) = \sum_{i=1}^{K_T} \sum_{j=1}^{L_G} (u(t_i, x_j, \theta) - u_{ij}^\delta)^2. \quad (3.8)$$

В соответствии со сказанным ранее, в качестве оценки вектора θ принимается любой вектор $\hat{\theta}$, который удовлетворяет неравенству $\tilde{\Phi}(\hat{\theta}) \leq \delta^2$.

Вычисление решения задачи данной работе предлагается осуществлять на основе вероятностного представления решения краевой задачи в виде функционала диффузионного процесса с отражением от границы. Вероятностные пред-

ставления решений параболических краевых задач хорошо известны (см., например, [43], [64]), они сравнительно легко реализуются и позволяют оценить решение в отдельно взятой точке внутри области. Поэтому использование вероятностного представления хорошо подходит для решения обратных задач, т.к. решение можно оценивать не во всей области, а только в точках расположения датчиков температуры. Существенным недостатком использования вероятностных представлений можно считать большую трудоемкость. Но эти трудности могут быть преодолены путем применения параллельных компьютеров. К тому же хорошо известно, что алгоритмы на основе метода Монте-Карло хорошо распараллеливаются.

Краевой задаче (3.1) – (3.3) поставим в соответствие систему СДУ, которая описывает диффузионный процесс с отражением на границе в направлении внутренней нормали

$$X_s = x + \int_t^s a(v, X_v, \theta) dv + \int_t^s \sigma(v, X_v, \theta) dW_v + k_s, \quad (3.9)$$

$$k_s = \int_t^s n(X_v) d|k_v|, \quad |k_s| = \int_t^s \chi_{\partial G}(X_v) d|k_v|, \quad (3.10)$$

Для вычисления значений функции (3.8) используем оценку решения задачи (3.1)– (3.3) как приближенное значение следующего функционала, полученное в результате моделирования траекторий системы (3.9), (3.10) (см. главу 2)

$$u(t, x, \theta) = E_{t,x}(\varphi(X_T, \theta) Y_T(\theta) + Z_T(\theta)), \quad (3.11)$$

где $Y_T(\theta)$, $Z_T(\theta)$ — значения при $s = T$ следующих функций

$$Y_s(\theta) = \exp\left(\int_t^s c_v dv + \int_t^s \eta_v d|k_v|\right), \quad (3.12)$$

$$Z_s(\theta) = \int_t^s f_v Y_v dv + \int_t^s \gamma_v Y_v d|k_v|. \quad (3.13)$$

Будем считать, что выполнены условия **A2** – **Г2**, сформулированные в главе 2.

Для вычисления градиента функции (3.8) необходимо оценивать производные функции u по параметрам. Для этой цели используются формулы, полученные в главе 2, которые являются результатом дифференцирования по параметрам вероятностного представления решения (3.11).

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}(t, x) = \mathbb{E}_{t,x} \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(X_T) \partial_\theta X_T + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(X_T) \right) Y_T + \varphi(X_T) \partial_\theta Y_T + \partial_\theta Z_T \right). \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \partial_\theta X_s &= \int_t^s \left(\frac{\partial a_v}{\partial x} \partial_\theta X_v + \frac{\partial a_v}{\partial \theta} \right) dv + \int_t^s \left(\frac{\partial \sigma_v}{\partial x} \partial_\theta X_v + \frac{\partial \sigma_v}{\partial \theta} \right) dW_v \\ &+ \int_t^s \frac{\partial n(X_v)}{\partial x} \partial_\theta X_v d|k_v| + \int_t^s n(X_v) d|\partial_\theta k_v|, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \partial_\theta Y_s &= Y_s \left[\int_t^s \left(\frac{\partial c_v}{\partial x} \partial_\theta X_v + \frac{\partial c_v}{\partial \theta} \right) dv \right. \\ &\left. + \int_t^s \left(\frac{\partial \eta_v}{\partial x} \partial_\theta X_v + \frac{\partial \eta_v}{\partial \theta} \right) d|k_v| \right] + \int_t^s \eta_v d|\partial_\theta k_v|, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \partial_\theta Z_s &= \int_t^s \left[\left(\frac{\partial f_v}{\partial x} \partial_\theta X_v + \frac{\partial f_v}{\partial \theta} \right) Y_v + f_v \partial_\theta Y_v \right] dv + \int_t^s \left[\left(\frac{\partial \gamma_v}{\partial x} \partial_\theta X_v \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{\partial \gamma_v}{\partial \theta} \right) Y_v + \gamma_v \partial_\theta Y_v \right] d|k_v| + \int_t^s \gamma_v Y_v d|\partial_\theta k_v|, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$|\partial_{\theta} k_s| = \int_t^s \chi_{\partial G}(X_v) d|\partial_{\theta} k_v|. \quad (3.18)$$

Значения функции u и ее градиента, определенные формулами (3.8) и (3.14) – (3.18), вычисляются с помощью модифицированного метода Эйлера, описанного в главе 2.

Если известны производные $\frac{\partial u(t_i, x_j)}{\partial \theta_k}$ ($i = 1, \dots, K_T$; $j = 1, \dots, L_G$; $k = 1, \dots, m$), вычисленные для значения вектора параметров θ_{δ} из (3.7), то можно приближенно определить область в пространстве параметров, которая содержит истинный вектор параметров $\bar{\theta}$.

Запишем измерения u_{ij}^{δ} в виде суммы значения решения краевой задачи (3.1) – (3.3) для значения вектора параметров $\bar{\theta}$ и погрешности, соответствующей уровню δ

$$u_{ij}^{\delta} = u(t_i, x_j, \bar{\theta}) + r_{ij}^{\delta}. \quad (3.19)$$

Выразим уровень погрешности через соответствующие ему ошибки измерения согласно равенству

$$\delta^2 = \sum_{ij} (r_{ij}^{\delta})^2. \quad (3.20)$$

Запишем возведенное в квадрат неравенство (3.7), которое получается при определении квазирешения в случае краевой задачи (3.1) – (3.3)

$$\sum_{i,j} (u(t_i, x_j, \theta_{\delta}) - u_{ij}^{\delta})^2 \leq \delta^2. \quad (3.21)$$

Обозначим $\Delta\theta_k^{\delta} \equiv (\theta_{\delta} - \bar{\theta})_k$, $k = 1, \dots, m$. Будем считать, что уровень погрешности измерений достаточно мал. Тогда с точностью до членов второго порядка имеем $u(t_i, x_j, \bar{\theta}) = u(t_i, x_j, \theta_{\delta}) - \sum_{k=1}^m \frac{\partial u(t_i, x_j, \theta_{\delta})}{\partial \theta_k} \Delta\theta_k^{\delta}$. Выразим из этого равенства

$u(t_i, x_j, \theta_\delta)$ и подставим в (3.21). Тогда с учетом (3.20) получим

$$\sum_{i,j} \left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial u_{ij}(\theta_\delta)}{\partial \theta_k} \Delta \theta_k^\delta - r_{ij}^\delta \right)^2 \leq \sum_{ij} (r_{ij}^\delta)^2, \quad (3.22)$$

где $u_{ij}(\theta_\delta) = u(t_i, x_j, \theta_\delta)$. Из (3.22) следует

$$\sum_{i,j} \left(\left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial u_{ij}(\theta_\delta)}{\partial \theta_k} \Delta \theta_k^\delta \right)^2 - 2 \left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial u_{ij}(\theta_\delta)}{\partial \theta_k} \Delta \theta_k^\delta \right) r_{ij}^\delta \right) \leq 0. \quad (3.23)$$

С помощью неравенства Коши-Буняковского из (3.23) получим

$$\sum_{i,j} \left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial u_{ij}(\theta_\delta)}{\partial \theta_k} \Delta \theta_k^\delta \right)^2 \leq 4 \sum_{i,j} (r_{ij}^\delta)^2. \quad (3.24)$$

Окончательно из (3.24) получим неравенство, которое определяет требуемую область в пространстве параметров

$$\sum_{k=1}^m \sum_{i,j} \left(\frac{\partial u_{ij}(\theta_\delta)}{\partial \theta_k} \right)^2 (\Delta \theta_k^\delta)^2 + \sum_{\substack{k_1, k_2=1 \\ k_1 \neq k_2}}^m \sum_{i,j} \frac{\partial u_{ij}(\theta_\delta)}{\partial \theta_{k_1}} \frac{\partial u_{ij}(\theta_\delta)}{\partial \theta_{k_2}} \Delta \theta_{k_1}^\delta \Delta \theta_{k_2}^\delta \leq 4\delta^2. \quad (3.25)$$

3.2 Решение модельной задачи

Рассматривалась следующая краевая задача

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\theta_1^2}{2} \left(x_1^4 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + x_2^4 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + \theta_1 (x_1^2 + x_2^2) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \theta_1 x_1^2 \frac{\partial u}{\partial x_2} - (x_1^2 + 0.5)u \\ & + \frac{1}{2} \exp(-\theta_2(T-t)) \cdot [(\theta_1 \theta_2 (x_1^2 + x_2^2 - 1) + 2\theta_1^2 x_1 (x_1^2 + x_2^2) + \theta_1^3 (x_1^4 + x_2^4) \\ & + 2\theta_1^2 x_2^3 - \theta_1 (x_1^2 + x_2^2 - 1)(2x_1^2 + 1)) = 0, \quad t \in (t_0, T), \quad x \in G, \end{aligned}$$

$$G = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}, \quad \theta_1, \theta_2 \in [10^{-3}, 0.5],$$

$$u(T, x_1, x_2, \theta_1, \theta_2) = \exp(-\theta_2(T-t))(1 - x_1^2 - x_2^2)\theta_1,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial G} - 2\theta_1 \exp(-\theta_2(T-t))(x_1^2 + x_2^2) = 0 \quad \text{при } t \in [0, T].$$

Точным решением этой задачи является функция

$$u(t, x_1, x_2, \theta_1, \theta_2) = \exp(-\theta_2(T-t))(1 - x_1^2 - x_2^2)\theta_1. \quad (3.26)$$

Задача решалась со следующими числовыми характеристиками:

$$T = 3.5; \quad t_0 = 0.2; \quad h = 10^{-5}.$$

В табл. 1 – 2 даны результаты оценки решения краевой задачи u и его производных $\partial u / \partial \theta_i$, $i = 1, 2$, при двух значениях объема выборки $N=300$ и $N=1000$ на различном удалении от границы области, а именно, в точках $(0.0; 0.25)$, $(0.0; 0.75)$, соответственно. Результаты расчетов в табл. 1 – 2 показали, что оценки реше-

Таблица 1. Оценки $u(t, x)$ и производных $\partial u / \partial \theta_1$, $\partial u / \partial \theta_2$ в точке $x = (0.00; 0.25)$

	полученная оценка, $N=300$	полученная оценка, $N=1000$	точное значение
u	$3.5998 \cdot 10^{-2} \pm 1.94 \cdot 10^{-4}$	$3.5999 \cdot 10^{-2} \pm 1.99 \cdot 10^{-4}$	$3.5999 \cdot 10^{-2}$
$\frac{\partial u}{\partial \theta_1}$	$0.7197 \pm 7.98 \cdot 10^{-3}$	$-0.7197 \pm 8.16 \cdot 10^{-3}$	0.7200
$\frac{\partial u}{\partial \theta_2}$	$-0.1188 \pm 4.71 \cdot 10^{-4}$	$-0.1188 \pm 4.83 \cdot 10^{-4}$	-0.1188

ния краевой задачи и его производных получаются лучше для более удаленной точки от границы. При $x = (0.00; 0.25)$ ни одна моделируемая траектория не достигла границы, поэтому точность вычислений была порядка $O(h)$.

Таблица 2. Оценки $u(t, x)$ и производных $\partial u / \partial \theta_1$, $\partial u / \partial \theta_2$ в точке $x = (0.00; 0.75)$

	полученная оценка, $N=300$	полученная оценка, $N=1000$	точное значение
u	$1.6787 \cdot 10^{-2} \pm 5.88 \cdot 10^{-3}$	$1.6819 \cdot 10^{-2} \pm 5.85 \cdot 10^{-3}$	$1.6799 \cdot 10^{-2}$
$\frac{\partial u}{\partial \theta_1}$	$0.3283 \pm 1.68 \cdot 10^{-2}$	$0.3293 \pm 2.96 \cdot 10^{-2}$	0.3360
$\frac{\partial u}{\partial \theta_2}$	$-5.7766 \cdot 10^{-2} \pm 1.26 \cdot 10^{-2}$	$-5.7856 \cdot 10^{-2} \pm 2.20 \cdot 10^{-2}$	$-5.5438 \cdot 10^{-2}$

Решение обратной задачи. Экспериментальные данные для решения обратной задачи были рассчитаны по формуле точного решения (3.26) при значе-

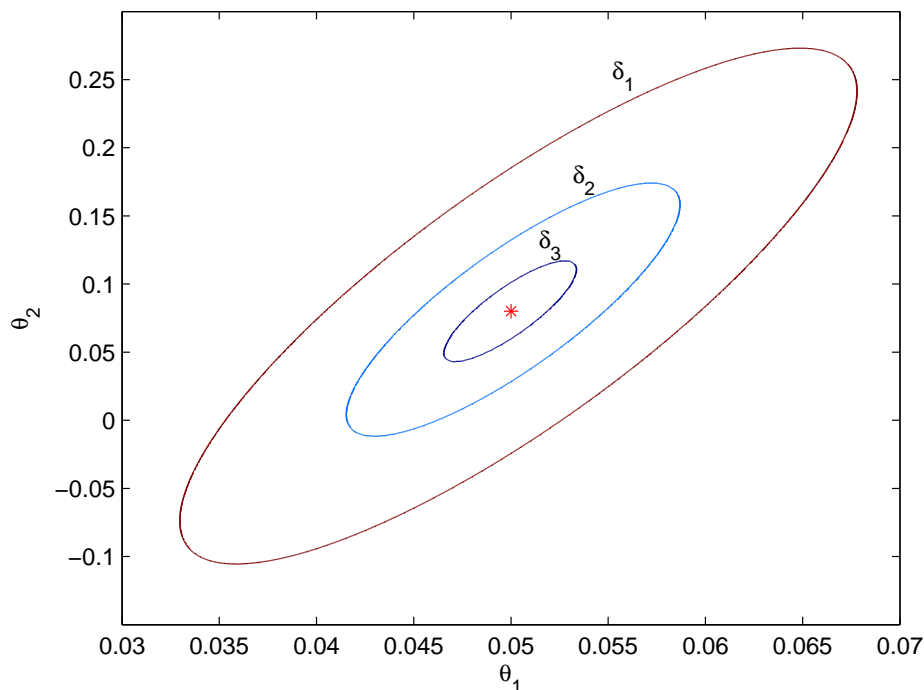


Рис. 2. Области в пространстве параметров, соответствующие различным погрешностям измерений

ниях параметров $\theta_1 = 5 \cdot 10^{-2}$, $\theta_2 = 8 \cdot 10^{-2}$ в точках, находящихся от центра круга на расстоянии 0.25, 0.50 и 0.75 в положительных и отрицательных направлениях каждой координатной оси и в моменты времени на отрезке $[0.2; 3.4]$ с шагом 0.4. При проведении расчетов в полученные таким образом данные вносились с помощью датчика случайных чисел "ошибки измерения соответствующие нормальному закону с нулевым средним и стандартным отклонением, равным 2%, 5% и 10% от точных значений данных. Значения параметров $\theta_1^0 = 0.1$, $\theta_2^0 = 0.01$ были взяты в качестве начальных. Объем выборки в начале минимизации был равен 300, затем, для получения удовлетворительной статистической оценки u и $\partial u / \partial \theta$, был увеличен до 1000. В табл. 3 приведены результаты оценки параметров при точных данных и данных с ошибками.

Таблица 3. Оценки параметров при различных погрешностях в данных

Параметры	Точные данные	Данные с ошибками		
		$\sigma = 0.02u$	$\sigma = 0.05u$	$\sigma = 0.1u$
θ_1	$4.9993 \cdot 10^{-2}$	$4.9898 \cdot 10^{-2}$	$4.9824 \cdot 10^{-2}$	$4.9749 \cdot 10^{-2}$
θ_2	$7.9841 \cdot 10^{-2}$	$8.0008 \cdot 10^{-2}$	$8.1162 \cdot 10^{-2}$	$8.3795 \cdot 10^{-2}$

Представленные в табл.3 данные расчетов показывают, что при уменьшении погрешности входных данных получаемые в ходе минимизации оценки параметров сходятся к известным точным значениям этих параметров.

На рис. 2 изображены области в пространстве параметров, соответствующие уровням погрешности измерений. Уровни δ_1 , δ_2 , δ_3 заданы соответственно для погрешностей измерений $\sigma = 0.1u$, $\sigma = 0.05u$, $\sigma = 0.02u$.

Глава 4

Минимизации дисперсии функционала от диффузионного процесса с использованием преобразования краевой задачи для параболического уравнения

Предлагаемый в данной главе метод минимизации дисперсии основан на параметризованном преобразовании соответствующей функционалу случайного процесса краевой задачи для параболического уравнения. Минимизация дисперсии сводится к минимизации модуля коэффициента вариации значений функционала, соответствующего преобразованной краевой задаче. При этом для вычисления градиента целевой функции используются производные функционала диффузионного процесса по параметрам.

4.1 Вариант метода для поглощающей границы

Пусть $G \subset \mathbf{R}^d$ – заданная ограниченная область с регулярной границей ∂G и X_t – d -мерный диффузионный процесс, который начинает свое движение из точки $x \in G$ в момент времени $t \in (0, T)$, и для которого на границе области задано условие поглощения. Предполагается, что задан процесс X_t , который описывается следующим СДУ

$$X_s = x + \int_t^s a(v, X_v)dv + \int_t^s \sigma(v, X_v)dW_v. \quad (4.1)$$

Предположим, что заданы функции $c, f : [0, \infty) \times \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$. Определим случайные функции Y, Z .

$$Y_s = \exp\left(\int_t^s c(v, X_v)dv\right), \quad Z_s = \int_t^s f(v, X_v)Y_v dv, \quad (4.2)$$

которые определяют функционал

$$\varphi(X_T)Y_T\chi_{\tau>T} + Z_{T\wedge\tau}, \quad (4.3)$$

где $\tau = \min\{v \mid v > t, X_v \notin G\}$ – время первого выхода процесса X из области.

Обозначим $Q_T = (0, T) \times G$, $S_T = [0, T] \times \partial G$. Положим

$$u(t, x) \equiv E_{t,x}\left(\varphi(X_T)Y_T\chi_{\tau>T} + Z_{T\wedge\tau}\right) \quad (4.4)$$

– математическое ожидание функционала (4.3).

Известно, что (4.4) определяет решение в точке $(t, x) \in Q_T$ следующей краевой задачи для параболического уравнения с условием, заданным на конце интервала времени

$$Lu + f(t, x) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (t, x) \in Q_T, \quad (4.5)$$

$$u(T, x) = \varphi(x), \quad x \in G, \quad (4.6)$$

$$u(t, x) = 0, \quad x \in \partial G, \quad (4.7)$$

где $Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d b_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d a_i(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(t, x)u$; b_{ij} – элементы матрицы $B \equiv \sigma\sigma^T$.

Относительно матричной функции $B(t, x) = (b_{ij}(t, x))$ предполагается, что она удовлетворяет равномерно по всем своим аргументам при некотором $\alpha_0 > 0$

условию регулярности:

$$y^T B(t, x)y > \alpha_0 |y|^2 \quad (4.8)$$

для любого $y \in \mathbf{R}^d$.

Также предполагается, что область G и все функции, входящие в определение задачи (4.5) – (4.7) такие, что ее решение существует и единственно в пространстве Гельдера $\mathbf{H}^{\frac{3+\alpha}{2}, 3+\alpha}(\bar{Q}_T)$ (см. [44], Теорема 5.2, стр. 364). При этом значения норм функций u , f , φ в соответствующих пространствах Гельдера удовлетворяют неравенству

$$|u|_{Q_T}^{3+\alpha} < c(|f|_{Q_T}^{1+\alpha} + |\varphi|_{Q_T}^{3+\alpha}).$$

По условию этой теоремы этой требуется, чтобы

$$a_i, b_{ij}, f \in \mathbf{H}^{\frac{1+\alpha}{2}, 1+\alpha}, \quad \varphi \in H^{3+\alpha}(\bar{G}), \quad \partial G \in \mathbf{H}^{3+\alpha}. \quad (4.9)$$

Должны также выполняться условия согласования первого порядка при $t = T$, $x \in \partial G$. Определение функциональных пространств Гельдера $\mathbf{H}^{l+\alpha}$, $\mathbf{H}^{\frac{l+\alpha}{2}, l+\alpha}$ (l – неотрицательное целое, $0 < \alpha < 1$) дано в книге [44].

Также как и в главе 1, для произвольной точки $x \notin \bar{G}$ обозначим $\rho(x)$ ортогональную проекцию на \bar{G} ; $n(x)$ единичный вектор внутренней нормали в точке $\rho(x)$; $d(x)$ длину вектора $\rho(x) - x$.

Будем предполагать, что для рассматриваемых точек $x \in \mathbf{R}^d$ проекция $\rho(x)$ однозначно определяется (такое возможно, например, когда область G выпуклая). При этом выполняется равенство

$$x = \rho(x) - d(x)n(x) .$$

Для $x \in \bar{G}$ считаем $\rho(x) = x$ и $d(x) = 0$.

Для произвольной случайной величины ξ с ненулевым математическим ожиданием μ_ξ и стандартным отклонением σ_ξ введем обозначение ее коэффициента

вариации R_ξ , определяемого по формуле $R_\xi = \frac{\sigma_\xi}{\mu_\xi}$.

Обозначим ϑ случайную величину, которая равна значению функционала (4.3). В следующем подразделе получена формула для дисперсии ϑ , из которой следует, что она определяется значениями случайных величин $\left(\frac{\partial u(v, X_v)}{\partial x}\right)^T B(v, X_v) \frac{\partial u(v, X_v)}{\partial x}$ и Y_v при $v \in [t, T]$. Из полученной формулы в частности следует, что дисперсия ϑ конечна, а также, что уменьшение значений градиента решения задачи (4.5) – (4.7) в среднем в той части Q_T , где пробегают траектории диффузионного процесса, приводит к уменьшению дисперсии функционала (4.3). Предлагаемый способ уменьшения дисперсии функционала основан на следующем представлении решения краевой задачи (4.5)–(4.7)

$$u = \tilde{u}V . \quad (4.10)$$

В (4.10) $V(x)$ – некоторая функция, которую требуется определить. Затем формулируется краевая задача относительно \tilde{u} и решается соответствующая ей система СДУ. Также вместо ϑ рассматривается случайная величина $\tilde{\vartheta} = \tilde{\varphi}(\tilde{X}_T)\tilde{Y}_T + \tilde{Z}_T$, где знак " \sim " указывает на соответствие \tilde{u} . При этом вместе с изменением дисперсии оценки, как правило, происходит изменение значения функционала (4.3). Поэтому рассматриваются такие преобразования, в результате которых выполняется неравенство $|R_{\tilde{\vartheta}}| < |R_\vartheta|$. После того, как получена оценка для \tilde{u} , оценка для исходной задачи определяется по формуле (4.10).

Суть метода состоит в том, что предлагается задавать функцию V , зависящую от некоторого набора параметров и затем минимизировать выборочное значение квадрата коэффициента вариации $\tilde{\vartheta}$. Для минимизации в расчетах был использован вариант стохастического квазиградиентного алгоритма с переменной метрикой [61]. Для минимизации функции (4.37) используется вариант стохастического квазиградиентного алгоритма с переменной метрикой [61], в котором

приближения к точке минимума строятся по правилу

$$\alpha^{k+1} = \alpha^k - \rho_k H^k \nabla^k \Phi, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (4.11)$$

где H^k – случайная квадратная матрица размера $l \times l$; $\nabla^k \Phi$ – градиент целевой функции в точке α^k ; ρ_k – параметр шага.

Последовательность матриц H^k вычисляется по схеме: $H^0 = I$, $H^{k+1} = (I - \mu_k \nabla^{k+1} \Phi \cdot (\Delta^{k+1} \alpha)^T) H^k$, $\Delta^{k+1} \alpha = \alpha^{k+1} - \alpha^k$. Параметр μ_k выбирается из равенства $\mu_k = \mu / (|\nabla^{k+1} \Phi| \cdot |\Delta^{k+1} \alpha|)$, где μ – константа такая, что $0 < \mu < 1$.

На каждом шаге алгоритма происходит автоматическая подстройка параметра шага ρ_k . Если $\Phi(\alpha^{k+1}) > \Phi(\alpha^k)$, то $\rho_{k+1} = \rho_k / \gamma$, где $\gamma > 1$ – фиксированный параметр. Если $\Phi(\alpha^{k+1}) < \Phi(\alpha^k)$, то выполняется следующая последовательность действий: $\rho_{k,i} = \rho_k \gamma^i$, $\alpha^{k+1,i} = \alpha^k - \rho_{k,i} H^k \nabla^k \Phi$ и вычисление $\Phi(\alpha^{k+1,i})$, $i = 0, 1, \dots$. Эти действия производятся до тех пор пока убывает значение функции Φ и при этом выполняются условия: $\rho_{\min} \leq \rho_{k,i} \leq \rho_{\max}$ (ρ_{\min} , ρ_{\max} – минимальная, максимальная длина шага, соответственно) и $i < i_{\max}$ (i_{\max} – заданное максимальное число итераций по увеличению шага). Значения α^{k+1} , ρ_{k+1} полагаются равными соответственно значениям $\alpha^{k+1,i}$, $\rho_{k,i}$, которые соответствуют минимальному из полученных таким образом значений Φ .

Для вычисления градиента целевой функции используется метод оценки параметрических производных функционала диффузионного процесса FBVP2, предложенный в [25]. Численное решение СДУ осуществляется методом Эйлера.

4.1.1 Оценка математического ожидания функционала и дисперсия оценки

В данном разделе будет рассмотрено получение оценки математического ожидания функционала (4.3) при использовании метода Эйлера для численного решения СДУ и будет получена формула для предельного значения дисперсии ϑ

при уменьшении шага интегрирования в методе Эйлера.

Зададим узлы сетки на $[t, T]$ $t_i = t + hi$ ($i = 0, \dots, N$), $h = \frac{T-t}{N}$. Согласно методу Эйлера расчет траекторий случайного процесса выполняется по формуле

$$\bar{X}_{i+1} = \bar{X}_i + ha(t_i, \bar{X}_i) + \sigma(t_i, \bar{X}_i)dW^i . \quad (4.12)$$

Здесь $dW^i = W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ – приращение d -мерного винеровского процесса на i -м шаге. В вычислениях полагаем для l -й компоненты приращения ($l = 1, \dots, d$) $dW_l^i \equiv \sqrt{h}\xi_l^i$, где ξ_l^i – независимые стандартные нормальные случайные величины.

В процессе моделирования траекторий методом Эйлера в случае выхода траектории из области на некотором шаге, в качестве конечной точки траектории будем принимать ортогональную проекцию точки выхода на границу области.

В формулах для сокращения записи значений функции на сетке будет иногда использоваться обозначение функции с индексом, равным номеру узла. Например, u_i есть то же самое, что и $u(t_i, \bar{X}_i)$. Для обозначения компонент векторов используем нижние индексы. Обозначим $\tau^N = \min\{t_i : \bar{X}_i \notin G\}$ – узел сетки, соответствующий первому выходу моделируемой траектории из области. Пользуясь геометрическими построениями несложно показать, что расстояние от точки выхода траектории за границу до ее ортогональной проекции на \bar{G} есть величина порядка $O(\sqrt{h})$.

Заменив в функциях (4.2) интегрирование суммированием по узлам сетки, определим соответствующие сеточные функции \bar{Y}_i, \bar{Z}_i , заданные в узлах (t_i, \bar{X}_i) ($i = 0, \dots, N$),

$$\bar{Y}_i = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ \exp(h \sum_{k=0}^{i-1} c_k), & i = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (4.13)$$

$$\bar{Z}_i = \begin{cases} 0, & i = 0, \\ h \sum_{k=0}^{i-1} f_k \bar{Y}_k, & i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (4.14)$$

Для всех $(t, x) \in [0, T) \times G$ приближенные значения $u(t, x)$, получаемые на основе численного решения СДУ методом Эйлера, определяются по формуле:

$$u^N(t, x) = \mathbf{E}_{t,x} [\varphi(\bar{X}_N) \bar{Y}_N \chi_{\tau^N > t_N} + h \bar{Z}_{N \wedge i\tau}] . \quad (4.15)$$

Известно (см., например, [82]), что оценка (4.15) сходится при $N \rightarrow \infty$ к точному значению $u(t, x)$ с порядком $O(\sqrt{h})$.

Обозначим ϑ^N выражение под знаком математического ожидания в (4.15). Введем также обозначения $u_v = u(v, X_v)$, $\sigma_v = \sigma(v, X_v)$.

Теорема 10. *При выполнении условий существования и единственности решения СДУ (4.1) и существования единственного решения краевой задачи (4.5) – (4.7) в классе $\mathbf{H}^{\frac{3+\alpha}{2}, 3+\alpha}(\bar{Q}_T)$ дисперсия случайной величины ϑ^N сходится при $N \rightarrow \infty$ с порядком $O(\sqrt{h})$ к значению величины*

$$\mathbf{D}_{t,x} \vartheta = \mathbf{E}_{t,x} \left[\int_t^{T \wedge \tau} \left(\frac{\partial u_v}{\partial x} \right)^T (\sigma_v \sigma_v^T) \frac{\partial u_v}{\partial x} Y_v^2 dv \right]. \quad (4.16)$$

Доказательство. При моделировании траектории случайного процесса (4.1) в случае $\{\tau^N > T\}$ выполняется равенство $\varphi(\bar{X}_N) = u(t_N, \bar{X}_N)$. В случае $\{\tau^N < T\}$ имеем $\bar{X}_{i\tau} \notin G$, и в качестве конечной точки траектории принимается ортогональная проекция точки выхода траектории из области на границу. С учетом сказанного можно записать равенство для ϑ^N

$$\vartheta^N = \sum_{i=0}^{N-1} \chi_{\tau^N > t_i} \left(u(t_{i+1}, \rho(\bar{X}_{i+1})) \bar{Y}_{i+1} - u(t_i, \bar{X}_i) \bar{Y}_i + h f(t_i, \bar{X}_i) \bar{Y}_i \right) + u(t, x). \quad (4.17)$$

Обозначим Δx_k^i k -ю компоненту изменения решения СДУ на одном шаге. Величина Δx_k^i определяется следующим равенством:

$$\Delta x_k^i = (\rho_{i+1} - \bar{X}_i)_k = h(a_i)_k + \sqrt{h} \sum_l (\sigma_i)_{k,l} (\xi_i)_l + (n_{i+1})_k d_{i+1} .$$

При этом заметим, что в случае $\bar{X}_{i+1} \in G$, $\rho_{i+1} = \bar{X}_{i+1}$ и $d_{i+1} = 0$.

Рассмотрим i -е слагаемое под знаком суммы в (4.17). Представим \bar{Y}_{i+1} с помощью разложения экспоненты следующим образом $\bar{Y}_{i+1} = \bar{Y}_i(1 + hc_i) + O(h^2)$. Применяя разложение в ряд Тейлора до членов второго порядка включительно, получим

$$\begin{aligned} u(t_{i+1}, \rho_{i+1}) \bar{Y}_{i+1} - u_i \bar{Y}_i + hf_i \bar{Y}_i &= \left(hf_i + h \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \Delta x_k^i \right. \\ &+ \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + h \sum_k \frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial x_k} \Delta x_k^i + \frac{1}{2} \sum_{k,l} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_l} \Delta x_k^i \Delta x_l^i \left. \right) \bar{Y}_i \\ &+ \frac{1}{6} \bar{Y}_i h \sum_{k,l} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x_k \partial x_l} (t_i + \mu h, \bar{X}_i + \mu \Delta x^i) \Delta x_k^i \Delta x_l^i \\ &+ \frac{1}{6} \bar{Y}_i \sum_{k,l,r} \frac{\partial^3 u}{\partial x_k \partial x_l \partial x_r} (t_i + \mu h, \bar{X}_i + \mu \Delta x^i) \Delta x_k^i \Delta x_l^i \Delta x_r^i \\ &+ hu_i \bar{Y}_i c_i + O(h^2), \end{aligned} \tag{4.18}$$

где $0 < \mu < 1$. Исключим из правой части (4.18) слагаемые, которые в сумме удовлетворяют уравнению (4.5), умноженному на $h\bar{Y}_i$. Затем умножим на $\chi_{\tau^N > t_i}$ и просуммируем по i от 0 до $N-1$. Из равенства, которое таким образом получается, и из (4.17) выводится выражение для ϑ^N

$$\begin{aligned} \vartheta^N &= u(t, x) + \chi_{\tau^N \leq t_N} \bar{Y}_{i^{\tau}-1} \sum_k \frac{\partial u_{i^{\tau}-1}}{\partial x_k} (n_{i^{\tau}})_k d_{i^{\tau}} \\ &+ \sum_{i=0}^{N-1} \chi_{\tau^N > t_i} \left[h^{\frac{1}{2}} \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \sum_j (\sigma_i)_{kj} (\xi_i)_j + h \sum_k \frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial x_k} \sum_l (\sigma_i)_{k,l} (\xi_i)_l \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \sum_{k,l} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_l} \left[h^{\frac{3}{2}} (a_i)_k \sum_j (\sigma_i)_{lj} (\xi_i)_j + h \left(\sum_j (\sigma_i)_{kj} (\xi_i)_j \right) \left(\sum_j (\sigma_i)_{lj} (\xi_i)_j \right) \right. \\
& \quad \left. - h \sum_j ((\sigma_i)_{kj} (\sigma_i)_{lj}) \right] + \frac{h^{\frac{3}{2}}}{6} \sum_{k,l,r} \frac{\partial^3 u_i}{\partial x_k \partial x_l \partial x_r} \\
& \quad \cdot \left(\sum_j (\sigma_i)_{kj} (\xi_i)_j \right) \left(\sum_j (\sigma_i)_{lj} (\xi_i)_j \right) \left(\sum_j (\sigma_i)_{rj} (\xi_i)_j \right) \Big] \bar{Y}_i + O(h^{\frac{1}{2}+\alpha}) . \quad (4.19)
\end{aligned}$$

Из (4.19) следует

$$\mathbb{E}_{t,x} \vartheta^N = u(t, x) + \mathbb{E}_{t,x} \left[\chi_{\tau^N \leq t_N} \bar{Y}_{i^{\tau-1}} \sum_k \frac{\partial u_{i^{\tau-1}}}{\partial x_k} (n_{i^{\tau}})_k d_{i^{\tau}} \right] + O(h^{\frac{1}{2}+\alpha}). \quad (4.20)$$

Найдем теперь выражение дисперсии случайной величины ϑ^N . Возведем в квадрат равенство (4.19) и возьмем математическое ожидание

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{t,x} (\vartheta^N)^2 &= u(t, x)^2 + 2u(t, x) \mathbb{E}_{t,x} \left[\chi_{\tau^N \leq t_N} \bar{Y}_{i^{\tau-1}} \sum_k \frac{\partial u_{i^{\tau-1}}}{\partial x_k} (n_{i^{\tau}})_k d_{i^{\tau}} \right] \\
&+ 2\mathbb{E}_{t,x} \left[\chi_{\tau^N \leq t_N} \bar{Y}_{i^{\tau-1}} \left(\sum_k \frac{\partial u_{i^{\tau-1}}}{\partial x_k} (n_{i^{\tau}})_k d_{i^{\tau}} \right) \sum_{i=0}^{N-1} \chi_{\tau^N > t_i} \bar{X}_i h^{\frac{1}{2}} \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \sum_j (\sigma_i)_{k,j} (\xi_i)_j \right] \\
&+ h \mathbb{E}_{t,x} \left[\sum_{i=0}^{N-1} \chi_{\tau^N > t_i} \bar{Y}_i \sum_{k,l} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \left(\sum_j (\sigma_i)_{k,j} (\sigma_i)_{l,j} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \right] \\
&+ \frac{h^{\frac{3}{2}}}{2} \mathbb{E}_{t,x} \left[\sum_{i,i_1=0}^{N-1} \chi_{\tau^N > (t_i \vee t_{i_1})} \bar{Y}_i \bar{Y}_{i_1} \left(\sum_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \sum_j (\sigma_i)_{k,j} (\xi_i)_j \right) \right. \\
& \quad \cdot \left. \sum_{k,l} \frac{\partial^2 u_{i_1}}{\partial x_k \partial x_l} \left(\left(\sum_j (\sigma_{i_1})_{kj} (\xi_{i_1})_j \right) \left(\sum_j (\sigma_{i_1})_{lj} (\xi_{i_1})_j \right) - \sum_j (\sigma_{i_1})_{kj} (\sigma_{i_1})_{lj} \right) \right] \\
&+ O(h^{\frac{1}{2}}) . \quad (4.21)
\end{aligned}$$

Третье слагаемое в (4.21), есть величина порядка $O(h^{\frac{1}{2}})$, т.к. сумма по i при $h \rightarrow 0$ сходится к винеровскому интегралу, а $d_{i^{\tau}}$ имеет порядок $O(h^{\frac{1}{2}})$. Нетрудно проверить, что пятое слагаемое в (4.21) равно нулю.

Возведем в квадрат равенство (4.20)

$$(\mathbf{E}_{t,x} \vartheta^N)^2 = u(t,x)^2 + 2u(t,x) \mathbf{E}_{t,x} \left[\chi_{\tau^N \leq t_N} \bar{Y}_{i^{\tau-1}} \sum_k \frac{\partial u_{i^{\tau-1}}}{\partial x_k} (n_{i^{\tau}})_k d_{i^{\tau}} \right] + O(h^{\frac{1}{2}+\alpha}). \quad (4.22)$$

Из (4.21), (4.22) следует

$$\mathbf{D}_{t,x}(\vartheta^N) = h \mathbf{E}_{t,x} \left[\sum_{i=0}^{N-1} \chi_{\tau^N > t_i} \bar{Y}_i^2 \sum_{k,l} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \left(\sum_j (\sigma_i)_{kj} (\sigma_i)_{lj} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \right] + O(h^{\frac{1}{2}}). \quad (4.23)$$

Переходя в (4.23) к пределу при $N \rightarrow \infty$, получим требуемое.

Теорема доказана. \square

4.1.2 Преобразование краевой задачи

Запишем краевую задачу для определения функции \tilde{u} , которая удовлетворяет равенству $u(t,x) = \tilde{u}(t,x)V(x)$. Эта задача имеет вид

$$\tilde{L}\tilde{u} + \tilde{f}(t,x) = 0, \quad (t,x) \in Q_T, \quad (4.24)$$

$$\tilde{u}(T,x) = \tilde{\varphi}(x), \quad x \in G, \quad (4.25)$$

$$\tilde{u}(t,x) = 0, \quad x \in \partial G, \quad (4.26)$$

В уравнениях (4.24) – (4.26) используются следующие обозначения:

$$\tilde{L}\tilde{u} \equiv \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d b_{ij}(t,x) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d \tilde{a}_i(t,x) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} + \tilde{c}(t,x) \tilde{u}, \quad (4.27)$$

$$\tilde{a}_i \equiv a_i + \frac{1}{2V} \left(2b_{ii} \frac{\partial V}{\partial x_i} + \sum_{i \neq j} (b_{ij} + b_{ji}) \frac{\partial V}{\partial x_j} \right), \quad (4.28)$$

$$\tilde{c} \equiv c + \frac{1}{V} \left(\sum_i a_i \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} b_{ij} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right), \quad (4.29)$$

$$\tilde{f}(t,x) \equiv \frac{f(t,x)}{V(x)}, \quad \tilde{\varphi}(x) \equiv \frac{\varphi(x)}{V(x)}. \quad (4.30)$$

Поставим в соответствие параболическому оператору в (4.24) диффузионный процесс \tilde{X}_\cdot , который задается системой СДУ

$$\tilde{X}_s = x + \int_t^s \tilde{a}(v, \tilde{X}_v) dv + \int_t^s \sigma(v, \tilde{X}_v) dW_v . \quad (4.31)$$

Тогда значение решения краевой задачи (4.24)–(4.26) в точке (t, x) равно значению функционала

$$\tilde{u}(t, x) = \mathbf{E}_{t,x}(\varphi(\tilde{X}_T) \tilde{Y}_T \chi_{\tilde{\tau} > T} + \tilde{Z}_{T \wedge \tilde{\tau}}), \quad (4.32)$$

где

$$\tilde{Y}_s = \exp\left(\int_t^s \tilde{c}(v, \tilde{X}_v) dv\right), \quad \tilde{Z}_s = \int_t^s \tilde{f}(v, \tilde{X}_v) \tilde{Y}_v dv . \quad (4.33)$$

Заметим, что в задаче (4.24)–(4.26) матрица при вторых производных в параболическом уравнении такая же как в задаче (4.5)–(4.7). Поэтому из формулы (4.16) для дисперсии оценки функционала (4.3) следует, что уменьшение дисперсии оценки возможно за счет изменения градиента решения краевой задачи и коэффициента c . Функция V должна быть такой, чтобы при выполнении равенства (4.10) было справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tilde{u}(t, x)^2} \mathbf{E}_{t,x} \left[\int_t^{T \wedge \tilde{\tau}} \left(\frac{\partial \tilde{u}(v, \tilde{X}_v)}{\partial x} \right)^T B \frac{\partial \tilde{u}(v, \tilde{X}_v)}{\partial x} \tilde{Y}_v^2 dv \right] \\ & < \frac{1}{u(t, x)^2} \mathbf{E}_{t,x} \left[\int_t^{T \wedge \tau} \left(\frac{\partial u_v}{\partial x} \right)^T B \frac{\partial u_v}{\partial x} Y_v^2 dv \right] . \end{aligned} \quad (4.34)$$

Можно подобрать функцию V так, чтобы выполнялось (4.34), но можно определить функцию V в результате решения следующей ниже задачи минимизации. Зададим параметризацию функции V в области G , например, в виде линейной

комбинации некоторой системы базисных функций

$$V_\alpha(x) = \sum_{i=1}^l \alpha_i S_i(x), \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l) . \quad (4.35)$$

При таком задании функции V решение краевой задачи (4.24)–(4.26) зависит от параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ и задачу уменьшения квадрата коэффициента вариации можно сформулировать как задачу минимизации

$$\min_{\alpha_1, \dots, \alpha_l} \frac{1}{\tilde{u}(t, x)^2} \mathbf{E}_{t,x} \left[\int_t^{T \wedge \tilde{\tau}} \left(\frac{\partial \tilde{u}(v, \tilde{X}_v)}{\partial x} \right)^T B(v, \tilde{X}_v) \frac{\partial \tilde{u}(v, \tilde{X}_v)}{\partial x} \tilde{Y}_v^2 dv \right] . \quad (4.36)$$

Обозначим $\tilde{\vartheta}_{\alpha_i} = \frac{\partial \tilde{\vartheta}}{\partial \alpha_i}$. Поскольку функция \tilde{u} не известна, то рассматриваем минимизацию функции

$$\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_l) \equiv \frac{\mathbf{E}_{t,x}(\tilde{\vartheta})^2 - (\mathbf{E}_{t,x}\tilde{\vartheta})^2}{(\mathbf{E}_{t,x}\tilde{\vartheta})^2} , \quad (4.37)$$

значения которой совпадают с значениями целевой функции в (4.36). При этом компоненты градиента функции (4.37) определяются из равенства

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i} = 2 \frac{\mathbf{E}_{t,x}(\tilde{\vartheta}\tilde{\vartheta}_{\alpha_i})\mathbf{E}_{t,x}\tilde{\vartheta} - \mathbf{E}_{t,x}\tilde{\vartheta}^2\mathbf{E}_{t,x}\tilde{\vartheta}_{\alpha_i}}{(\mathbf{E}_{t,x}\tilde{\vartheta})^3} . \quad (4.38)$$

В вычислениях в качестве значений целевой функции и ее градиента берутся соответствующие им выборочные значения, полученные для аппроксимации $\tilde{\vartheta}$ методом Эйлера. Для оценки математических ожиданий $\mathbf{E}_{t,x}(\tilde{\vartheta}\tilde{\vartheta}_{\alpha_i})$ и $\mathbf{E}_{t,x}\tilde{\vartheta}_{\alpha_i}$ в (4.38), хорошо подходит метод оценки производных по параметрам функционалов от диффузионных процессов, построенный в работе [25]. При этом требуется вычисление производных по параметрам α_i решения СДУ (4.31). Эти производные определяются при совместном решении СДУ (4.31) и системы СДУ, которая получается из неё в результате дифференцирования по параметрам

$$\partial_{\alpha_i} X_s = \int_t^s \left(\frac{\partial \tilde{a}}{\partial x} \partial_{\alpha_i} X_v + \frac{\partial \tilde{a}}{\partial \alpha_i} \right) dv + \int_t^s \frac{\partial \sigma}{\partial x} \partial_{\alpha_i} X_v dW_v \quad (4.39)$$

Для минимизации функции (4.37) используется вариант стохастического квазиградиентного алгоритма с переменной метрикой [61].

4.1.3 Численные эксперименты

Рассмотрим двумерный диффузионный процесс, который описывается векторным СДУ

$$X_s = x + \int_t^s a(v, X_v)dv + \int_t^s \sigma(v, X_v)dW_v, \quad (4.40)$$

где x – точка внутри единичного круга ;

$$a = \begin{pmatrix} \theta_1(X_{1,v}^2 + X_{2,v}^2) \\ \theta_1 X_{2,v}^2 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad t, s \in [0, T] .$$

Зададим функционал

$$\varphi(X_T) \exp\left(-\int_t^T (X_{1,v}^2 + 0.5)dv\right) \chi_{\tau > T} + \int_t^{T \wedge \tau} f(v, X_v) \exp\left(-\int_t^v (X_{1,r}^2 + 0.5)dr\right) dv, \quad (4.41)$$

где $\varphi(x_1, x_2) = (1 - x_1^2 - x_2^2)\theta_1$; $\tau = \min\{v \mid v > t, X_{1,v}^2 + X_{2,v}^2 \geq 1\}$;

$f(v, x_1, x_2) = [\theta_1\theta_2(x_1^2 + x_2^2 - 1) + 2\theta_1^2x_1(x_1^2 + x_2^2) + 2\theta_1^2x_2^3 + \theta_1(200 - (x_1^2 + x_2^2 - 1)(2x_1^2 + 1)/2)] \exp(-\theta_2(T - v))$.

Математическое ожидание функционала (4.41) совпадает с решением следующей краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 100 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + \theta_1(x_1^2 + x_2^2) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \theta_1 x_2^2 \frac{\partial u}{\partial x_2} - (x_1^2 + 0.5)u + f = 0,$$

$$\text{при } t \in (0, T), \quad (x_1, x_2) \in \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}, \quad (4.42)$$

$$u(T, x_1, x_2) = (1 - x_1^2 - x_2^2)\theta_1, \quad (4.43)$$

$$u(t, x_1, x_2) = 0 \text{ при } (t, x) \in S_T. \quad (4.44)$$

Точным решением задачи (4.42) – (4.44) является функция

$$u(t, x_1, x_2) = \exp(-\theta_2(T - t))(1 - x_1^2 - x_2^2)\theta_1. \quad (4.45)$$

В расчетах были выбраны следующие значения параметров задачи: $T = 3.5$; $t = 0.2$; $\theta_1 = 9$, $\theta_2 = 0.01$.

Выбор функции V был сделан следующим образом. На отрезке $[0, 1]$ была задана сетка $\{r_1, r_2, \dots, r_l\}$, $r_1 = 0$, $r_l = 1$, $r_i < r_{i+1}$, $i = 1, \dots, l - 1$, и была определена система функций $\{\phi_1, \dots, \phi_l\}$:

$$\phi_1(x) = \begin{cases} \frac{r_2 - x}{r_2 - r_1}, & x \in (r_1, r_2), \\ 0, & x \notin (r_1, r_2). \end{cases} \quad \phi_l(x) = \begin{cases} \frac{x - r_{l-1}}{r_l - r_{l-1}}, & x \in (r_{l-1}, r_l), \\ 0, & x \notin (r_{l-1}, r_l). \end{cases}$$

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - r_{i-1}}{r_i - r_{i-1}}, & x \in (r_{i-1}, r_i), \\ \frac{r_{i+1} - x}{r_{i+1} - r_i}, & x \in (r_i, r_{i+1}), \\ 0, & x \notin (r_{i-1}, r_{i+1}). \end{cases} \quad (i = 2, \dots, l - 1).$$

В качестве базисных функций рассматривались следующие функции:

$$S_0(x) = 1, \quad S_i(x) = \phi_i(|x|^2), \quad x \in G, \quad i = 1, \dots, l. \quad (4.46)$$

Функцию V положили равной $V_{\alpha_0, \dots, \alpha_l}(x) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^l \alpha_i S_i(x)$. При проведении расчетов брали $l = 3$, $r_1 = 0$, $r_2 = 0.5$, $r_3 = 1$. Значения коэффициентов $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 100$, $\alpha_2 = 100$, $\alpha_3 = 5$ были приняты как начальные для минимизации квадрата коэффициента вариации. Отметим, что минимизация проводилась только для диффузионного процесса с начальной точкой $x^{(1)} = (0.0; 0.1)$.

Вычисление оценок решения задачи (4.42) – (4.44) на основе полученного преобразования показало, что уменьшение дисперсии произошло также в других точках области, значительно удаленных от $x^{(1)}$.

В результате минимизации были получены следующие значения коэффициентов функции V : $\alpha_0 = 0.00000$, $\alpha_1 = 133.00144$, $\alpha_2 = 64.87320$, $\alpha_3 = 5.13470$. При этом получили $R_{\tilde{\vartheta}N} = 0.03421$, в то время как $R_{\vartheta N} = 1.20025$. В процессе минимизации вычисления делались с шагом $h = 10^{-7}$ в методе Эйлера и объемом выборки 1000. При этом было сделано четыре вычисления градиента и четыре вычисления целевой функции для подстройки шага.

В некоторых случаях удается подобрать функцию V (или её параметры) так, что соответствующее преобразование позволяет значительно уменьшить дисперсию оценки математического ожидания функционала (4.3). Для рассматриваемого примера удачным выбором оказался следующий набор параметров: $\alpha_0 = 0.0$, $\alpha_1 = 100.0$, $\alpha_2 = 50.0$, $\alpha_3 = 0.08$. Этим параметрам соответствует $R_{\tilde{\vartheta}N} = 0.01793$.

Поскольку решения краевой задачи (4.42) – (4.44) и задачи, полученной из нее после преобразования, симметричны относительно начала координат, то для иллюстрации достаточно дать их изображения вдоль одной из координатных осей. На рис. 1, рис. 2 и рис. 3 изображены соответственно графики решений при $t = 0.2$, $x_1 = 0$ задачи (4.42) – (4.44) и двух задач, которые из нее были получены в результате преобразования на основе оптимизации коэффициента вариации и в результате подбора.

На рис. 2 видно, что за исключением приграничных точек значения угла наклона кривой по абсолютной величине для преобразованной задачи значительно меньше соответствующих значений для исходной задачи. Значения угла наклона кривой на рис. 3 на большей части области визуально равны нулю. Также при этом на большей части области соответствующие значения \tilde{u} значительно меньше u . Это означает, что за исключением приграничных точек значения $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}$

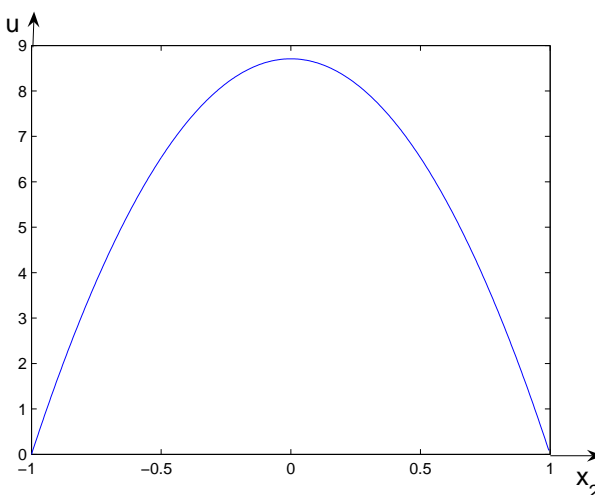


Рис. 1. Решение краевой задачи (4.42) – (4.44)

значительно меньше $\frac{\partial u}{\partial x}$, что согласно формуле (4.16) приводит к уменьшению значения дисперсии оценки.

В табл. 1 даны значения стандартных отклонений оценок математического ожидания функционала (4.41) до преобразования краевой задачи (4.42)–(4.44) (обозначение σ_0) и для сравнения соответствующие значения стандартных отклонений оценок, полученных на основе преобразования с параметрами функции V , определенными в результате минимизации (обозначение σ_1), и путем подбора (обозначение σ_2). В табл. 2 приведены значения оценок с доверительными интервалами, соответствующими 95% уровню доверительной вероятности. Результаты расчетов в этих таблицах приведены для трех точек области: $x^{(1)} = (0.0; 0.1)$, $x^{(2)} = (0.0; 0.5)$, $x^{(3)} = (0.0; 0.75)$. При этом вычисления делались, также как и при минимизации, с шагом $h = 10^{-7}$ и объемом выборки 1000.

Строки табл. 2 соответствуют следующим данным : \hat{u}_0 — оценка, полученная без применения преобразования задачи (4.42)–(4.44); \hat{u}_1 — оценка, полученная с помощью преобразования задачи (4.42)–(4.44) с параметрами α_i , определенными в результате минимизации коэффициента вариации; \hat{u}_2 — оценка, полученная с

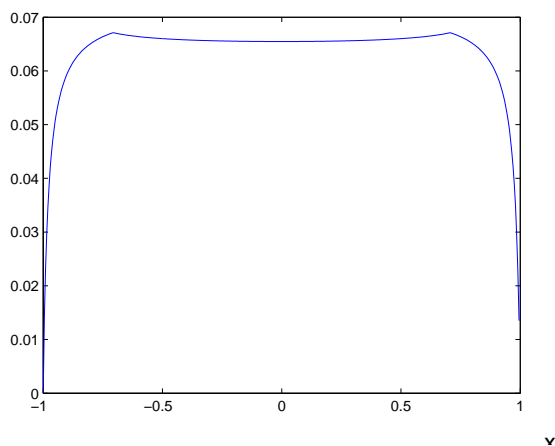


Рис. 2. Решение преобразованной задачи с параметрами, полученными после минимизации

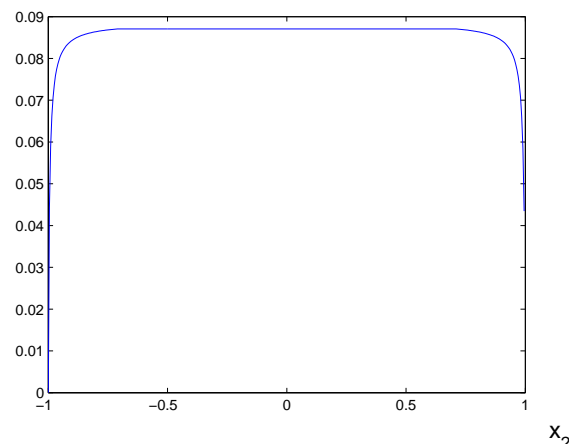


Рис. 3. Решение преобразованной задачи с параметрами, полученными в результате подбора

помощью преобразования задачи (4.42)–(4.44) с параметрами α_i , определенными в результате подбора; u — значение функционала (4.41), полученное по формуле (4.45).

Таблица 1. Стандартные отклонения оценок математического ожидания функционала (4.41)

	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$x^{(3)}$
σ_0	1.963443	1.258443	0.741528
σ_1	0.311564	0.259965	0.208858
σ_2	0.154627	0.105379	0.053354

Вычисления оценок математического ожидания функционала (4.41) показали, что построенные преобразования краевой задачи (4.42)–(4.44) дают значительное уменьшение стандартных отклонений оценок.

Теперь проведем сравнение вычислительных затрат, которые потребовались на получение оценок математического ожидания функционала (4.41) с использо-

Таблица 2. Оценки математического ожидания функционала (4.41))

	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$x^{(3)}$
\hat{u}_0	8.573909 ± 3.9	6.597331 ± 2.5	3.842311 ± 1.5
\hat{u}_1	8.545510 ± 0.62	6.502155 ± 0.52	3.878340 ± 0.22
\hat{u}_2	8.625853 ± 0.31	6.549332 ± 0.21	3.826691 ± 0.11
u	8.620769	6.530089	3.809683

ванием процедуры минимизации, и вычислительных затрат на получение оценок такой же точности просто увеличением объема выборки. Заметим, что в результате преобразования краевой задачи согласно формулам (4.28) – (4.30) к затратам, которые требовались для решения задачи до преобразования добавляются дополнительные затраты, связанные с вычислением коэффициента сноса, коэффициента при \tilde{u} , источника и условия при $t = T$. Это означает, что если доля вычислений всех функций, составляющих исходную краевую задачу, невелика по сравнению с затратами, которые добавляются в результате преобразования этой задачи, то при решении СДУ затраты на расчет траекторий могут существенно возрасти. Если вычислительные затраты, связанные с преобразованием краевой задачи, существенно меньше вычислительных затрат, требуемых для решения исходной задачи, то существенного увеличения затрат на расчет траекторий может не произойти.

Здесь следует отметить также, что возникающее в результате преобразования изменение коэффициента сноса в системе СДУ может существенно повлиять на время достижения диффузионным процессом границы области. Поэтому в процессе минимизации время вычисления целевой функции и её градиента может сильно различаться на разных этапах минимизации, так как параметры преобра-

зования меняются при каждом их вычислении. По этой причине в общем случае трудно оценить выгоду от минимизации параметров по сравнению с простым увеличением объема выборки.

Мы приведем сравнение времени вычисления оценки математического ожидания функционала (4.41) для задачи без преобразования и задачи, которая получается в результате преобразования для набора параметров: $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$. Этот набор параметров соответствует тождественному преобразованию $\tilde{y} = u$, но при этом для вычисления оценки требуются затраты, связанные с преобразованием. Все расчеты оценок математического ожидания функционала (4.41) проводились с использованием процессора Intel Core 2 Duo T7100 1.8ГГц.

Расчеты показали, что среднее время вычисления оценки (при объеме выборки 1000) без использования преобразования получилось равным 209 сек., а с использованием преобразования 355 сек. Для вычисления градиента целевой функции численно решалась система СДУ (4.40) и система СДУ, которая получается из нее в результате дифференцирования по параметрам функции V . Среднее время вычисления градиента составило 853 сек.

Если не использовать преобразование, то для определения оценки с такой же точностью, с какой была получена оценка в результате минимизации, надо увеличить объем выборки до 39000 траекторий. На эти вычисления потребовалось 8373 сек. При этом была получена более точная оценка только в одной точке $x^{(1)}$. Для вычисления оценки с минимизацией параметров потребовалось 6388 сек. Как показали расчеты, определение параметров в результате минимизации относительно этой точки позволило определить более точные оценки в других точках области, значительно удаленных от нее, причем эти оценки были полу-

чены при объеме выборки 1000 траекторий.

4.2 Вариант метода для условия отражения на границе

В данном разделе изложен вариант метода минимизации дисперсии функционала диффузионного процесса для случая отражающей границы области. Предполагается, что задана выпуклая область $G \subset \mathbf{R}^d$ с границей ∂G , на которой задано условие отражения в направлении внутренней нормали.

Также в данном разделе получена формула для предельного (при убывании шага в методе Эйлера) значения дисперсии требуемой оценки, аналогичная формуле для дисперсии, данной в разделе 4.1.1. Для уменьшения дисперсии вводится параметризованное преобразование параболической краевой задачи с последующей минимизацией выборочной дисперсии оценки. В результате минимизации получается набор параметров, которому соответствует функционал такой, что при вычислении его математического ожидания получается оценка с гораздо меньшей дисперсией.

4.2.1 Постановка задачи минимизации дисперсии оценки

Пусть $x \in G$, $t \in (0, T)$. Предположим, что задан диффузионный процесс X_\cdot , который описывается системой СДУ

$$X_s = x + \int_t^s a(v, X_v)dv + \int_t^s \sigma(v, X_v)dW_v + \int_t^s n(X_v)dK_v, \quad (4.47)$$

$$(4.48)$$

$$K_s = \int_t^s \chi_{\partial G}(X_v)dK_v, \quad (4.49)$$

где n – единичный вектор внутренней нормали; $K_.$ – локальное время процесса X на ∂G .

Пусть $c, \eta, f, \gamma : \bar{Q}_T \rightarrow R$ некоторые достаточно гладкие функции. Определим функции $Y_., Z_.$ следующим образом

$$Y_s = \exp \left(\int_t^s c(v, X_v) dv + \int_t^s \eta(v, X_v) dK_v \right), \quad (4.50)$$

$$Z_s = \int_t^s f(v, X_v) Y_v dv + \int_t^s \gamma(v, X_v) Y_v dK_v. \quad (4.51)$$

Мы рассматриваем оценку математического ожидания следующего функционала

$$\varphi(X_T)Y_T + Z_T. \quad (4.52)$$

Известно, что при $(t, x) \in Q_T$ математическое ожидание этого функционала

$$u(t, x) = E_{t,x}(\varphi(X_T)Y_T + Z_T) \quad (4.53)$$

совпадает со значением решения в точке (t, x) следующей краевой задачи для параболического уравнения с заданным условием при $t = T$

$$Lu + f(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q_T, \quad (4.54)$$

$$u(T, x) = \varphi(x), \quad x \in G, \quad (4.55)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \eta(t, x)u + \gamma(t, x) = 0, \quad (t, x) \in S_T, \quad (4.56)$$

где $Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d b_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d a_i(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(t, x)u$; матрица B с элементами b_{ij} удовлетворяет условию $B = \sigma \sigma^T$. Заметим, что при введении замены переменной времени $t' = T - t$ задача (4.54)–(4.56) становится начально-краевой.

Обозначим $\vartheta = \varphi(X_T)Y_T + Z_T$. Также, как для случая поглощающей границы, в данном разделе получена формула для дисперсии ϑ , из которой следует,

что значение дисперсии ϑ зависит от $(\frac{\partial u}{\partial x})^T B \frac{\partial u}{\partial x}$ и Y в точках (v, X_v) , $v \in [0, T]$. Уменьшение значений этих случайных величин в среднем на траекториях X приводит к уменьшению дисперсии ϑ . Для уменьшения дисперсии оценки математического ожидания (4.53) предлагается использовать преобразование краевой задачи (4.54)—(4.56) в результате которого первоначальное решение u и новое решение \tilde{u} связаны соотношением

$$u = \tilde{u}V, \quad (4.57)$$

где $V(x) > 0$. Затем рассматривается краевая задача относительно \tilde{u} и решается соответствующая ей система СДУ, с которой связывается случайная величина $\tilde{\vartheta} = \tilde{\varphi}(\tilde{X}_T)\tilde{Y}_T + \tilde{Z}_T$. Понятно, что при таком преобразовании краевой задачи происходит изменение оценки функционала и ее дисперсии. Поэтому желательно, чтобы в результате такой замены выполнялось неравенство $|R_{\tilde{\vartheta}}| < |R_{\vartheta}|$. После того, как получена оценки для \tilde{u} , оценка для исходной задачи определяется по формуле (4.57).

Функция V выбирается, зависящей от некоторого набора параметров, поэтому решение преобразованной краевой задачи тоже зависит от этих параметров. Поскольку в формуле для дисперсии оценки присутствует градиент решения краевой задачи, то и дисперсия оценки решения преобразованной краевой задачи также зависит от этих параметров. Затем с использованием стохастического квазиградиентного алгоритма с переменной метрикой [61] определяется набор параметров, которому соответствует минимальное значение квадрата коэффициента вариации $\tilde{\vartheta}$. Градиент целевой функции вычисляется на основе решения системы СДУ (4.47), (4.49) и системы СДУ, которая получается из нее в результате дифференцирования по параметрам. Для численного решения СДУ используется метод Эйлера.

Основные требования, которые налагаются на все функции в уравнениях (4.47) – (4.56) такие же как в главе 2, и они совпадают с условиями **A2 – Г2**.

Запишем численную схему метода Эйлера для расчета траекторий пары процессов X_\cdot и K_\cdot . Для этого обозначим h шаг по времени и положим $N = (T-t)/h$. На отрезке $[t, T]$ зададим сетку с узлами $t_i = t + ih$, ($i = 0, \dots, N$). Свяжем с узлами этой сетки следующие обозначения:

\bar{X}_i, \bar{k}_i – аппроксимация траектории решения системы СДУ (4.47)-(4.49) в точке t_i ; $\Delta_i X, \Delta_i K$ – изменение приближенных значений X_\cdot, K_\cdot , на i -м шаге.

Моделирование траекторий решения системы СДУ (4.47), (4.49) в узлах сетки осуществляется по следующей схеме

$$X_{i+1}^\Delta = \bar{X}_i + ha_i + \sqrt{h}\sigma_i\xi_i, \quad (4.58)$$

$$\bar{X}_{i+1} = X_{i+1}^\Delta + (\Delta_i K)n_i, \quad (4.59)$$

$$\bar{k}_{i+1} = \bar{k}_i + \Delta_i K, \quad (4.60)$$

где $\Delta_i K = [d(X_{i+1}^\Delta)]^-$, $[x]^- = \max\{0, -x\}$, n_i – единичный вектор внутренней нормали в точке $\rho(X_{i+1}^\Delta)$.

Определим сеточные функции \bar{Y}_i, \bar{Z}_i , соответствующие функциям (4.50), (4.51)

$$\bar{Y}_i = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ \exp\left(\sum_{k=0}^{i-1} (hc_k + \eta_k \chi_{\partial G}(\bar{X}_k) \Delta_k K)\right), & i = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (4.61)$$

$$\bar{Z}_i = \begin{cases} 0, & i = 0, \\ \sum_{k=0}^{i-1} (hf_k + \gamma_k \chi_{\partial G}(\bar{X}_k) \Delta_k K) \bar{Y}_k, & i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (4.62)$$

Тогда аппроксимация значения функционала (4.53) на основе метода Эйлера определяется выражением

$$u^N(t, x) = E_{t,x}(\varphi(\bar{X}_N) \bar{Y}_N + \bar{Z}_N). \quad (4.63)$$

Введем обозначения: $\vartheta^N = \varphi(\bar{X}_N)\bar{Y}_N + \bar{Z}_N$, $u_v = u(v, X_v)$, $\sigma_v = \sigma(v, X_v)$.

Формула для дисперсии ϑ дается в следующей теореме

Теорема 11. *При выполнении условий **A2** – **Г2** имеет место сходимость*

$D_{t,x}\vartheta^N \rightarrow D_{t,x}\vartheta$ при $N \rightarrow \infty$. При этом

$$D_{t,x}\vartheta = E_{t,x} \left[\int_t^T \left(\frac{\partial u_v}{\partial x} \right)^T (\sigma_v \sigma_v^T) \frac{\partial u_v}{\partial x} Y_v^2 dv \right]. \quad (4.64)$$

Доказательство. Представим ϑ^N следующим образом

$$\vartheta^N = \sum_{i=0}^{N-1} (u(t_{i+1}, \bar{X}_{i+1})\bar{Y}_{i+1} + \bar{Z}_{i+1} - u(t_i, \bar{X}_i)\bar{Y}_i - \bar{Z}_i) + u(t, x). \quad (4.65)$$

Как было указано в главе 2, величина $\Delta_i K$ имеет порядок $O(h^{\frac{1}{2}})$.

Используя разложение u_{i+1} в точке (t_i, \bar{X}_i) в ряд Тейлора до членов, содержащих производные второго порядка функции u включительно, и определение \bar{Y}_i, \bar{Z}_i , получим

$$\begin{aligned} u_{i+1}\bar{Y}_{i+1} + \bar{Z}_{i+1} &= \left(u_i + \frac{\partial u_i}{\partial t} h + \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} (\Delta_i X)_k + \frac{1}{2} (h^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right. \\ &+ 2h \sum_k \frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial x_k} (\Delta_i X)_k + \left. \sum_{k,l} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_l} (\Delta_i X)_k (\Delta_i X)_l \right) \bar{Y}_i \exp(hc_i \\ &+ \eta_i \chi_{\partial G}(\bar{X}_i) \Delta_i K) + z_i + (hf_i + \gamma_i \chi_{\partial G}(\bar{X}_i) \Delta_i K) \bar{Y}_i + O(h^{\frac{3}{2}}). \end{aligned} \quad (4.66)$$

При достаточно малых h имеем

$$\begin{aligned} \exp(hc_i + \eta_i \chi_{\partial G}(\bar{X}_i) \Delta_i K) &= 1 + hc_i + \eta_i \chi_{\partial G}(\bar{X}_i) \Delta_i K \\ &+ \frac{1}{2} (hc_i + \eta_i \chi_{\partial G}(\bar{X}_i) \Delta_i K)^2 + O(h^{\frac{3}{2}}). \end{aligned} \quad (4.67)$$

Из (4.66), (4.67) получим

$$\begin{aligned}
u_{i+1}y_{i+1} + z_{i+1} - u_iy_i - z_i &= \left[u_i + \frac{\partial u_i}{\partial t}h + \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}(ha_i + \sqrt{h}\sigma_i\xi_i + \Delta_iKn_i)_k \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(h^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + 2h \sum_k \frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial x_k} (ha_i + \sqrt{h}\sigma_i\xi_i + \Delta_iKn_i)_k \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{k,l} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_l} (ha_i + \sqrt{h}\sigma_i\xi_i + \Delta_iKn_i)_k (ha_i + \sqrt{h}\sigma_i\xi_i + \Delta_iKn_i)_l \right) \right] y_i (1 + hc_i \\
&\quad + \eta_i \chi_{\partial G}(x_i) \Delta_i K) + (hf_i + \gamma_i \chi_{\partial G}(x_i) \Delta_i K) y_i - u_i y_i + O(h^{\frac{3}{2}}). \tag{4.68}
\end{aligned}$$

Поскольку вычисления производятся на конечном отрезке времени, величина $\Delta_i K$ имеет порядок $O(h^{\frac{1}{2}})$ и математическое ожидание ее ограничено, то при заданном $h > 0$ имеет место неравенство

$$\sup_{h \leq h_0} \mathbf{E}_{t,x} K_N < \infty. \tag{4.69}$$

При определении порядка слагаемых, содержащих $\Delta_i K$ мы используем тот факт, что вероятность выхода моделируемой траектории из области есть величина порядка $O(h^{\frac{1}{2}})$ [79]

$$P\{x_i \in G, X_{i+1}^\Delta \notin \bar{G}\} \leq Ch^{\frac{1}{2}}. \tag{4.70}$$

Перемножим скобки в (4.68) и удалим слагаемые, которые в сумме удовлетворяют уравнению (4.54) и граничному условию (4.56). В результате получим

$$\begin{aligned}
u_{i+1}\bar{Y}_{i+1} + \bar{Z}_{i+1} - u_i\bar{Y}_i - \bar{Z}_i &= \sqrt{h} \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial \bar{X}_k} (\sigma_i \xi_i)_k \bar{Y}_i \\
&\quad + \frac{h}{2} \sum_{k,l} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_l} [(\sigma_i \xi_i)_k (\sigma_i \xi_i)_l - (\sigma_i \sigma_i^T)_{k,l}] \bar{Y}_i + O(h^{\frac{3}{2}}). \tag{4.71}
\end{aligned}$$

Из (4.71) следует, что

$$\begin{aligned}
\vartheta^N &= u(t, x) + \sum_{i=0}^{N-1} \left(\sqrt{h} \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} (\sigma_i \xi_i)_k \bar{Y}_i \right. \\
&\quad \left. + \frac{h}{2} \sum_{k,l} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_l} [(\sigma_i \xi_i)_k (\sigma_i \xi_i)_l - (\sigma_i \sigma_i^T)_{k,l}] \bar{Y}_i \right) + O(h^{\frac{1}{2}}). \tag{4.72}
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $E_{t,x} \vartheta^N = u(t, x) + O(h^{\frac{1}{2}})$. После возведения (4.72) в квадрат с последующим взятием математического ожидания получим

$$E_{t,x} (\vartheta^N)^2 - u(t, x)^2 = h E_{t,x} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k,l} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \bar{Y}_i^2 (\sigma_i \sigma_i^T)_{k,l} + O(h^{\frac{1}{2}}) . \quad (4.73)$$

Переходя к пределу при $h \rightarrow 0$, получим требуемое.

Теорема доказана. \square

Как было сказано, для уменьшения дисперсии оценки функционала (4.53) в работе предлагается задавать функцию V , зависящую от некоторого набора параметров с последующей минимизацией R_{ϑ}^2 с помощью квазиградиентного алгоритма. Для применения квазиградиентного алгоритма требуется вычисление градиента целевой функции и, следовательно, производных по параметрам функционала (4.53). Для этой цели используется метод оценки $\frac{\partial u}{\partial \theta}$ из главы 2.

4.2.2 Преобразование краевой задачи

Как было сказано, для минимизации квадрата коэффициента вариации в предлагаемом методе делается преобразование задачи (4.54)–(4.56), при котором старое и новое значения решений связаны равенством (4.57).

В результате этого преобразования задача (4.54)–(4.56) преобразуется в краевую задачу относительно \tilde{u}

$$\tilde{L}\tilde{u} + \tilde{f}(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q_T, \quad (4.74)$$

$$\tilde{u}(T, x) = \tilde{\varphi}(x), \quad x \in G, \quad (4.75)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} + \tilde{\eta}(t, x)\tilde{u} + \tilde{\gamma}(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \partial S_T. \quad (4.76)$$

В уравнениях (4.74) – (4.76) используются следующие обозначения:

$$\tilde{L}\tilde{u} \equiv \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d b_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d \tilde{a}_i(t, x) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} + \tilde{c}(t, x)\tilde{u} ,$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_i &\equiv a_i + \frac{1}{2V} \left(2b_{ii} \frac{\partial V}{\partial x_i} + \sum_{i \neq j} (b_{ij} + b_{ji}) \frac{\partial V}{\partial x_j} \right), \quad \tilde{c} \equiv c + \frac{1}{V} \left(\sum_i a_i \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} b_{ij} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right), \quad \tilde{f}(t, x) \equiv \\ &\frac{f(t, x)}{V(x)}, \quad \tilde{\varphi}(x) \equiv \frac{\varphi(x)}{V(x)}, \quad \tilde{\eta}(t, x) \equiv \left(\eta(t, x) + \frac{1}{V(x)} \frac{\partial V(x)}{\partial n} \right), \quad \tilde{\gamma}(t, x) \equiv \frac{\gamma(t, x)}{V(x)}. \end{aligned}$$

Поставим в соответствие краевой задаче (4.74)–(4.76) диффузионный процесс \tilde{X}_\cdot , который задается системой СДУ

$$\tilde{X}_s = x + \int_t^s \tilde{a}(v, \tilde{X}_v) dv + \int_t^s \sigma(v, \tilde{X}_v) dW_v + \int_t^s n(\tilde{X}_v) d\tilde{K}_v, \quad (4.77)$$

$$\tilde{K}_s = \int_t^s \chi_{\partial G}(\tilde{X}_v) d\tilde{K}_v, \quad (4.78)$$

Тогда решение задачи (4.74)–(4.76) в точке (t, x) удовлетворяет равенству

$$\tilde{u}(t, x) = \mathbb{E}_{t,x}(\varphi(\tilde{X}_T) \tilde{Y}_T + \tilde{Z}_T), \quad (4.79)$$

где

$$\tilde{Y}_s = \exp \left(\int_t^s \tilde{c}(v, \tilde{X}_v) dv + \int_t^s \tilde{\eta}(v, \tilde{X}_v) d\tilde{K}_v \right), \quad (4.80)$$

$$\tilde{Z}_s = \int_t^s \tilde{f}(v, \tilde{X}_v) \tilde{Y}_v dv + \int_t^s \tilde{\gamma}(v, \tilde{X}_v) \tilde{Y}_v d\tilde{K}_v. \quad (4.81)$$

Заметим, что в преобразованной задаче (4.74)–(4.76) матрица при вторых производных в параболическом уравнении такая же как в задаче (4.54)–(4.56). Поэтому из теоремы 11 следует, что уменьшение дисперсии оценки возможно за счет изменения градиента решения краевой задачи и коэффициента c . Функция V должна быть такой, чтобы выполнялось неравенство

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\tilde{u}(t, x)^2} \mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^T \left(\frac{\partial \tilde{u}(v, \tilde{X}_v)}{\partial x} \right)^T B \frac{\partial \tilde{u}(v, \tilde{X}_v)}{\partial x} \tilde{Y}_v^2 dv \right] \\ &< \frac{1}{u(t, x)^2} \mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^T \left(\frac{\partial u_v}{\partial x} \right)^T B \frac{\partial u_v}{\partial x} Y_v^2 dv \right]. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Можно подобрать функцию V так, чтобы выполнялось (4.82), но можно определить функцию V в результате решения следующей ниже задачи минимизации.

Зададим представление функции V в области G в виде линейной комбинации некоторой системы базисных функций

$$V_\alpha(x) = \sum_{i=1}^l \alpha_i S_i(x), \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l) . \quad (4.83)$$

Для таким образом заданной функции V решение краевой задачи (4.74)–(4.76) зависит от параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ и задачу уменьшения дисперсии можно сформулировать как задачу минимизации

$$\min_{\alpha_1, \dots, \alpha_l} \frac{1}{\tilde{u}(t, x)^2} \mathbf{E}_{t,x} \left[\int_t^T \left(\frac{\partial \tilde{u}(v, \tilde{X}_v)}{\partial x} \right)^T B(v, \tilde{X}_v) \frac{\partial \tilde{u}(v, \tilde{X}_v)}{\partial x} \tilde{Y}_v^2 dv \right] . \quad (4.84)$$

Обозначим $\tilde{\vartheta}_{\alpha_i} = \frac{\partial \tilde{\vartheta}}{\partial \alpha_i}$. Поскольку функция \tilde{u} не известна, то рассматриваем минимизацию функции

$$\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_l) \equiv \frac{\mathbf{E}_{t,x}(\tilde{\vartheta})^2 - (\mathbf{E}_{t,x}\tilde{\vartheta})^2}{(\mathbf{E}_{t,x}\tilde{\vartheta})^2} , \quad (4.85)$$

значения которой совпадают с значениями целевой функции в (4.84). При этом компоненты градиента функции (4.85) определяются из равенства

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i} = 2 \frac{\mathbf{E}_{t,x}(\tilde{\vartheta}\tilde{\vartheta}_{\alpha_i})\mathbf{E}_{t,x}\tilde{\vartheta} - \mathbf{E}_{t,x}\tilde{\vartheta}^2\mathbf{E}_{t,x}\tilde{\vartheta}_{\alpha_i}}{(\mathbf{E}_{t,x}\tilde{\vartheta})^3} . \quad (4.86)$$

В вычислениях в качестве значений целевой функции и ее градиента берутся соответствующие им выборочные значения, полученные для аппроксимации $\tilde{\vartheta}$ методом Эйлера. При этом, также как в случае поглощающей границы, для минимизации используется вариант стохастического квазиградиентного алгоритма с переменной метрикой [61].

4.2.3 Численные эксперименты

Для проведения численных экспериментов был выбран функционал, соответствующий следующей краевой задаче

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + 8 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + \theta_1 (x_1^2 + x_2^2) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \theta_1 x_2^2 \frac{\partial u}{\partial x_2} - (x_1^2 + 0.5)u \\ + [\theta_1 \theta_2 (x_1^2 + x_2^2 - 1) + 2\theta_1^2 x_1 (x_1^2 + x_2^2) + 2\theta_1^2 x_2^3 \\ + \theta_1 (32 - (x_1^2 + x_2^2 - 1)(2x_1^2 + 1)/2)] \exp(-\theta_2(T - t)) = 0, \end{aligned}$$

$$t \in (0, T), \quad (x_1, x_2) \in G, \text{ где } G = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}, \quad (4.87)$$

$$u(T, x_1, x_2) = (1 - x_1^2 - x_2^2)\theta_1, \quad (4.88)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} - u + \theta_1 \exp(-\theta_2(T - t))(1 - 3(x_1^2 + x_2^2)) = 0 \text{ при } (t, x) \in S_T. \quad (4.89)$$

Точным решением этой задачи является функция

$$u(t, x_1, x_2) = \exp(-\theta_2(T - t))(1 - x_1^2 - x_2^2)\theta_1. \quad (4.90)$$

В расчетах были выбраны следующие числовые характеристики:

$$T = 3.5; \quad t = 0.2; \quad \theta_1 = 0.9, \quad \theta_2 = 0.01.$$

Выбор функции V был сделан следующим образом. На отрезке $[0, 1]$ была задана сетка $\{r_1, r_2, \dots, r_l\}$, $r_1 = 0$, $r_l = 1$, $r_i < r_{i+1}$, $i = 1, \dots, l - 1$, и была определена система функций $\{\phi_1, \dots, \phi_l\}$:

$$\begin{aligned} \phi_1(x) = \begin{cases} \frac{r_2 - x}{r_2 - r_1}, & x \in (r_1, r_2), \\ 0, & x \notin (r_1, r_2). \end{cases} \quad \phi_l(x) = \begin{cases} \frac{x - r_{l-1}}{r_l - r_{l-1}}, & x \in (r_{l-1}, r_l), \\ 0, & x \notin (r_{l-1}, r_l). \end{cases} \\ \phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - r_{i-1}}{r_i - r_{i-1}}, & x \in (r_{i-1}, r_i), \\ \frac{r_{i+1} - x}{r_{i+1} - r_i}, & x \in (r_i, r_{i+1}), \\ 0, & x \notin (r_{i-1}, r_{i+1}). \end{cases} \quad (i = 2, \dots, l - 1). \end{aligned}$$

В качестве базисных функций рассматривались следующие функции:

$$S_i(x) = \phi_i(|x|^2), \quad x \in G, \quad i = 1, \dots, l. \quad (4.91)$$

Функцию V положили равной $V_{\alpha_1, \dots, \alpha_l}(x) = \sum_{i=1}^l \alpha_i S_i(x)$. При проведении расчетов брали $l = 3$, $r_1 = 0$, $r_2 = 0.5$, $r_3 = 1$. Значения коэффициентов $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 50$ были приняты как начальные. Отметим, что минимизация проводилась только для диффузионного процесса с начальной точкой $x^{(1)} = (0.0; 0.1)$. Дальнейшие расчеты показали, что уменьшение дисперсии оценок функционала произошло также в других точках области, значительно удаленных от $x^{(1)}$.

В результате минимизации были получены следующие значения коэффициентов функции V : $\alpha_1 = 80.67849$, $\alpha_2 = 41.07728$, $\alpha_3 = 0.72921$. При этом получили $R_{\hat{\vartheta}N} = 3.64679 \cdot 10^{-2}$, в то время как $R_{\vartheta N} = 1.05875$. В процессе минимизации вычисления делались с шагом $h = 10^{-5}$ в методе Эйлера и объемом выборки 1000.

Для данного примера также была успешной попытка определить функцию V путем подбора коэффициентов. Так, значительному уменьшению коэффициента вариации ($R_{\hat{\vartheta}N} = 4.06345 \cdot 10^{-4}$) приводит выбор параметров $\alpha_1 = 80$, $\alpha_2 = 40$, $\alpha_3 = 0.01$.

На рис. 4, рис. 5 и рис. 6 изображены соответственно графики решений при $t = 0.2$, $x_1 = 0$ задачи (4.87) – (4.89) и двух задач, которые из нее были получены в результате преобразования на основе оптимизации коэффициента вариации и в результате подбора.

На рис. 5, рис. 6 видно, что на большей части области (за исключением приграничных точек) значения $\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}$ значительно меньше $\frac{\partial u}{\partial x}$. Это согласно формуле (4.64) приводит к уменьшению значения дисперсии оценки.

В табл. 3 даны значения стандартных отклонений оценок функционала (4.53)

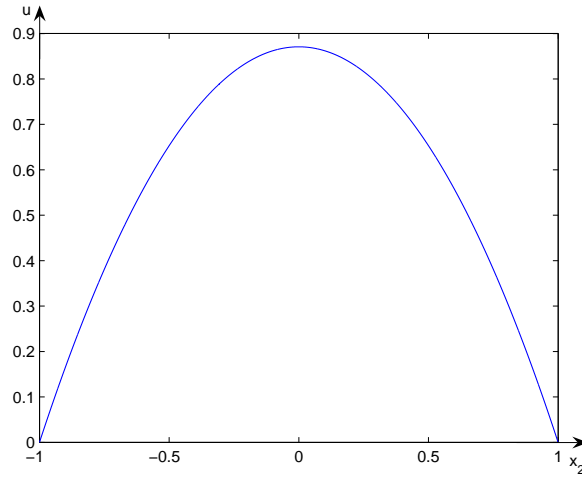


Рис. 4. Решение краевой задачи (4.87) – (4.89)

до преобразования краевой задачи (4.54)–(4.56) и стандартных отклонений оценок этого функционала, полученных с использованием процедуры минимизации $R_{\vartheta_N}^2$ и путем подбора коэффициентов функции V . В табл. 4 приведены значения этих оценок с доверительными интервалами, соответствующими 95% уровню доверительной вероятности. Результаты расчетов в этих таблицах приведены для трех точек области: $x^{(1)} = (0.0; 0.1)$, $x^{(2)} = (0.0; 0.5)$, $x^{(3)} = (0.0; 0.8)$. При этом вычисления делались с шагом $h = 10^{-6}$ и объемом выборки 1000.

Таблица 3. Стандартные отклонения оценок

	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$x^{(3)}$
σ_0	1.096978	1.067407	1.000170
σ_1	$1.100937 \cdot 10^{-2}$	$9.354682 \cdot 10^{-3}$	$1.251053 \cdot 10^{-2}$
σ_2	$3.503312 \cdot 10^{-4}$	$1.269890 \cdot 10^{-4}$	$7.719738 \cdot 10^{-4}$

В табл. 3 использованы следующие обозначения: σ_0 — стандартное отклонение оценки функционала, полученное до преобразования задачи (4.54)–(4.56); σ_1 , σ_2 — стандартные отклонения оценок функционала, полученные после преобразования задачи (4.54)–(4.56) с параметрами α_i , определенными соответственно

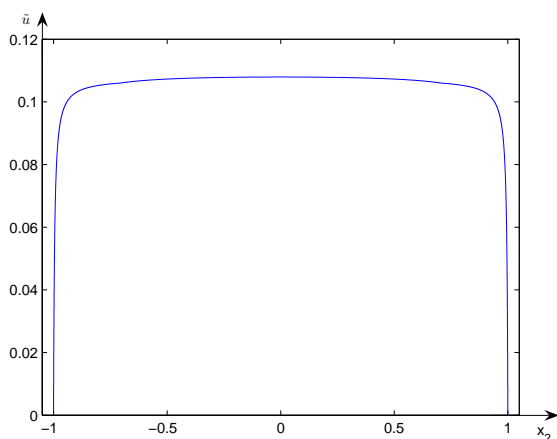


Рис. 5. Решение преобразованной задачи с параметрами, полученными после минимизации

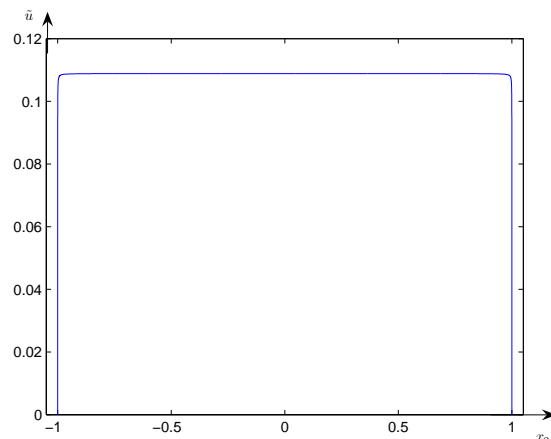


Рис. 6. Решение преобразованной задачи с параметрами, полученными в результате подбора

в результате минимизации коэффициента вариации и путем подбора. Строки

Таблица 4. Оценки функционала

	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$x^{(3)}$
\hat{u}_0	$0.908964 \pm 6.9 \cdot 10^{-2}$	$0.686924 \pm 6.8 \cdot 10^{-2}$	$0.343715 \pm 6.3 \cdot 10^{-2}$
\hat{u}_1	$0.876302 \pm 7.0 \cdot 10^{-4}$	$0.667236 \pm 5.9 \cdot 10^{-4}$	$0.326028 \pm 7.9 \cdot 10^{-4}$
\hat{u}_2	$0.862152 \pm 2.2 \cdot 10^{-5}$	$0.653149 \pm 8.0 \cdot 10^{-6}$	$0.313563 \pm 4.9 \cdot 10^{-5}$
u	0.862077	0.653089	0.313482

табл. 4 соответствуют следующим данным : \hat{u}_0 — оценка функционала, полученная до преобразования задачи (4.54)–(4.56); \hat{u}_1 , \hat{u}_2 — оценки функционала, полученные после преобразования задачи (4.54)–(4.56) с параметрами α_i , определенными соответственно в результате минимизации коэффициента вариации и путем подбора; u — значение функционала (4.53), полученное по формуле (4.90). Отметим, что значительное уменьшение дисперсии оценок привело к тому, что в расчетах статистическая погрешность стала заметно меньше погрешности дискретизации в методе Эйлера .

Глава 5

Оценка решения линейного уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами

Данная глава посвящена получению методом статистического моделирования оценок решения краевых задач для линейного уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами. Предлагаемый метод основан на применении численного решения СДУ к оценке решения краевой задачи для уравнения теплопроводности, которое получается из исходного уравнения в результате процедуры сглаживания коэффициентов. В конце главы описано применение метода для оценки теплового состояния сотовой теплозащитной панели, являющейся составной частью теплоизоляции обшивки самолета. Приведены результаты расчетов.

5.1 Аппроксимация обобщенного решения уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами

Пусть задана связная ограниченная область $G \subset \mathbf{R}^d$ границей ∂G . В данной главе, как и ранее, символом Q_T обозначается цилиндр в \mathbf{R}^{d+1} , т.е. $Q_T = (0, T) \times G$. В данной главе основным объектом рассмотрения является уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(b_{i,j}(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^d a_i(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + f(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q_T. \quad (5.1)$$

Предполагается, что область G представляет собой объединение конечного числа непересекающихся подобластей $G = \bigcup_{i=1}^M G_i$ в каждой из которых коэффициенты b_{ij} , a_i удовлетворяют условию Липшица равномерно по t , но при переходе из одной подобласти в другую эти коэффициенты могут терпеть разрыв первого рода. Мы рассматриваем тот случай, когда поверхности раздела подобластей G_i не зависят от переменной t и отстоят от границы ∂G на некотором положительном расстоянии. Также будем предполагается выполнение условия равномерной параболичности

$$\alpha_0 \sum_{i=1}^d \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^d b_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j \leq \alpha_1 \sum_{i=1}^d \xi_i^2, \quad (5.2)$$

где $\alpha_0, \alpha_1 > 0$ — константы.

Пусть при $t = 0$ задано начальное условие

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad (5.3)$$

а на ∂G первое краевое условие

$$u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in (0, T) \times \partial G. \quad (5.4)$$

Ниже приведены обозначения и определения функциональных пространств (см. [44], Гл. I), которые используются в работе:

$$\|f\|_{q,G} = \left(\int_G |u(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} - \text{норма пространства } \mathbf{L}_q(G), \quad q \geq 1;$$

$\mathbf{L}_{q,r}(Q_T)$, $q \geq 1$, $r \geq 1$ — банахово пространство, состоящее из всех измеримых на Q_T функций с конечной нормой

$$\|u\|_{q,r,Q_T} = \left(\int_0^T \left(\int_G |u|^q dx \right)^{\frac{r}{q}} dt \right)^{\frac{1}{r}}.$$

$\mathbf{W}_2^{1,0}(Q_T)$ – гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u, v)_{\mathbf{W}_2^{1,0}(Q_T)} = \int_{Q_T} \left(uv + \sum_{i=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dxdt;$$

$\mathbf{W}_2^{1,1}(Q_T)$ – гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u, v)_{\mathbf{W}_2^{1,1}(Q_T)} = \int_{Q_T} \left(uv + \sum_{i=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} \right) dxdt;$$

$\mathbf{V}_2(Q_T)$ – банахово пространство, состоящее из всех элементов $\mathbf{W}_2^{1,0}(Q_T)$, имеющих конечную норму

$$\|u\|_{\mathbf{V}_2(Q_T)} = \text{vrai max}_{0 \leq t \leq T} \|u\|_{2,G} + \|u_x\|_{2,Q_T},$$

где $\|u_x\|_{2,Q_T} = \left(\int_{Q_T} \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}}$;

$\mathbf{V}_2^{1,0}(Q_T)$ – банахово пространство, состоящее из всех элементов $\mathbf{V}_2(Q_T)$, непрерывных по t в норме $\mathbf{L}_2(G)$, норма которых определяется равенством

$$\|u\|_{\mathbf{V}_2^{1,0}(Q_T)} = \max_{t \in [0, T]} \|u(t, x)\|_{2,G} + \|u_x\|_{2,Q_T} .$$

При выводе некоторых оценок ниже будет использовано свойство произвольной функции u из $\mathbf{V}_2(Q_T)$ (см. [44], стр. 89)

$$\|u\|_{q,r,Q_T} \leq \beta \|u\|_{\mathbf{V}_2^{1,0}(Q_T)}. \quad (5.5)$$

При этом параметры q и r удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} + \frac{d}{2q} &= \frac{d}{4}, \\ r \in [2, \infty), \quad q \in [2, \frac{2d}{d-2}] &\text{ при } d > 2, \\ r \in [2, \infty), \quad q \in [2, \infty) &\text{ при } d = 2, \\ r \in [4, \infty), \quad q \in [2, \infty] &\text{ при } d = 1. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Константа β в (5.5) зависит от d и q , ее значения для разных вариантов d , q даны в [44], Гл. II.

Будем предполагать, что задача (5.1), (5.3), (5.4) имеет единственное решение в пространстве $\mathbf{V}_2^{1,0}(Q_T)$. Достаточным для этого является выполнение данных в [44] условий, а именно: условие равномерной параболичности (5.2), $\varphi \in \mathbf{L}_2(G)$ и условий конечности норм

$$\left\| \sum_{i=1}^d a_i^2 \right\|_{q_1, r_1, Q_T} \leq \mu_1, \quad \frac{1}{r_1} + \frac{d}{2q_1} = 1, \quad (5.7)$$

где $q_1 \in (\frac{d}{2}, \infty)$, $r_1 \in [1, \infty)$ при $d \geq 2$; $q_1 \in [1, \infty)$, $r_1 \in [1, 2]$ при $d = 1$.

$$\|f\|_{q_2, r_2, Q_T} \leq \mu_2, \quad \frac{1}{r_2} + \frac{d}{2q_2} = 1 + \frac{d}{4}, \quad (5.8)$$

где $q_2 \in [\frac{2d}{d+2}, 2]$, $r_2 \in [1, 2]$ при $d \geq 3$; $q_2 \in (1, 2]$, $r_2 \in [1, 2)$ при $d = 2$; $q_2 \in [1, 2]$, $r_2 \in [1, 4/3]$ при $d = 1$.

Следуя определению, данному в [44], обобщенным решением задачи (5.1), (5.3), (5.4) в пространстве $\mathbf{V}_2^{1,0}(Q_T)$ назовем функцию $u \in \mathbf{V}_2^{1,0}(Q_T)$, обращающуюся в ноль на боковой поверхности цилиндра Q_T , для которой при почти всех $t_1 \in [0, T]$ выполняется тождество

$$\begin{aligned} & \int_G u(t_1, x) \eta(t_1, x) dx - \int_0^{t_1} \int_G u \frac{\partial \eta}{\partial t} dx dt + \\ & \int_0^{t_1} \int_G \left[\sum_{i,j} b_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + \left(\sum_i a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + f \right) \eta \right] dx dt = \int_G \varphi(x) \eta(x, 0) dx \end{aligned}$$

при всех $\eta \in \mathbf{W}_2^{1,1}(Q_T)$, равных нулю на $[0, T] \times \partial G$ и при $t = 0$.

Как утверждается в [44] (Теорема 4.5, Гл. III), обобщенное решение задачи (5.1), (5.3), (5.4) в норме пространства $\mathbf{V}_2^{1,0}(Q_T)$ устойчиво относительно вариаций коэффициентов и свободных членов уравнения (5.1). Согласно этой теореме,

если при $m \rightarrow \infty$ равномерно ограниченная последовательность $b_{ij}^{(m)}$ сходится почти всюду к b_{ij} , а функции $a_i^{(m)}$, $f^{(m)}$ сходятся к a_i , f соответственно в нормах (5.7), (5.8), тогда обобщенные решения задач с коэффициентами $b_{ij}^{(m)}$, $a_i^{(m)}$ и правыми частями $f^{(m)}$ сходятся сильно в норме $\mathbf{V}_2^{1,0}(Q_T)$ к обобщенному решению задачи (5.1), (5.3), (5.4).

Таким образом, при достаточно больших значениях m приближенное решение $u^{(m)}$ задачи (5.1), (5.3), (5.4) с разрывными коэффициентами и правой частью можно получить, если решать задачу, в которой в уравнении (5.1) эти функции заменены на их гладкие аппроксимации $b_{ij}^{(m)}$, $a_i^{(m)}$ и $f^{(m)}$ соответственно. В качестве такой замены этих функций можно, например, рассматривать их сглаживание в окрестности поверхностей разрыва с помощью интегральных усреднений с бесконечно дифференцируемым финитным ядром [56]

$$g^{(m)}(x) = \int_{|x-y|<\rho_m} \omega_{\rho_m}(|x-y|)g(y)dy = \frac{1}{\rho_m^d} \int_{|x-y|<\rho_m} \omega_1\left(\frac{|x-y|}{\rho_m}\right)g(y)dy . \quad (5.9)$$

При этом $\omega_1(|\xi|) = 0$ при $|\xi| \geq 1$; $\int_{|\xi| \leq 1} \omega_1(|\xi|)d\xi = 1$. В (5.9) предполагается, что $\rho_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Функции $g^{(m)}$ имеют все производные любого порядка [56], [50]. Если функции $g \in L_q(G)$, то для любой подобласти $G' \subset G$, отстоящей от границы ∂G на расстоянии не меньшем ρ_m , усреднение $g^{(m)}$ сходится к g в $L_q(G')$

$$\|g^{(m)} - g\|_{q,G'} \leq \sup_{|v| \leq \rho_m} \left(\int_{G'} |g(x-v) - g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty . \quad (5.10)$$

Отметим, что одним из требований сходимости приближенного решения, указанных выше, является сходимость почти всюду коэффициентов $b_{ij}^{(m)}$ к b_{ij} при $m \rightarrow \infty$.

Так как при любом фиксированном $t \in [0, T]$ функции b_{ij} есть элементы $\mathbf{L}_q(G)$, то аппроксимации $b_{ij}^{(m)}$ сходятся к b_{ij} в норме пространства $\mathbf{L}_q(G)$. Извест-

но также, что сходимость в $\mathbf{L}_q(G)$ влечет сходимость по мере, а, из сходящейся последовательности функций по мере можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся почти всюду [39]. Причем в [39] дан конструктивный метод построения такой подпоследовательности. В связи со сказанным, далее будем считать, что такая подпоследовательность выбрана и это есть последовательность $\{b_{ij}^{(m)}\}$.

Далее будем использовать обозначение P_m для краевой задачи, которая получается из задачи (5.1), (5.3), (5.4) в результате замены коэффициентов и функции f функциями $b_{ij}^{(m)}$, $a_i^{(m)}$ и $f^{(m)}$.

$$\frac{\partial u^{(m)}}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(b_{i,j}^{(m)} \frac{\partial u^{(m)}}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^d a_i^{(m)} \frac{\partial u^{(m)}}{\partial x_i} + f^{(m)} = 0, \quad (5.11)$$

$$u^{(m)}(0, x) = \varphi(x), \quad (5.12)$$

$$u^{(m)}(t, x) = 0, \quad (t, x) \in (0, T) \times \partial G. \quad (5.13)$$

Гладкость коэффициентов задачи P_m позволяет находить оценку ее решения на основе численного решения СДУ.

5.2 Сходимость приближенного решения краевой задачи и его статистическая оценка

В данном разделе рассматриваются вопросы точности аппроксимации краевой задачи (5.1), (5.3), (5.4) при сглаживании ее коэффициентов и свободных членов. Обозначим $v^{(m)} \equiv u^{(m)} - u$ – погрешность приближенного решения. Взяв разность уравнений (5.11) и (5.1), после преобразований получим уравнение для функции $v^{(m)}$

$$\frac{\partial v^{(m)}}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(b_{ij}^{(m)} \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^d a_i^{(m)} \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_i} + f_0^{(m)} + \sum_{i=1}^d \frac{\partial f_i^{(m)}}{\partial x_i} = 0, \quad (5.14)$$

где $f_i^{(m)} \equiv \sum_{j=1}^d (b_{ij} - b_{ij}^{(m)}) \frac{\partial u}{\partial x_j}$, $f_0^{(m)} \equiv f^{(m)} - f$.

Функция $v^{(m)}$ удовлетворяет нулевым начальным и граничным условиям

$$v^{(m)}(0, x) = 0, \quad x \in G \quad (5.15)$$

$$v^{(m)}(t, x) = 0, \quad (t, x) \in (0, T) \times \partial G. \quad (5.16)$$

Краевая задача (5.14), (5.15), (5.16) удовлетворяет всем условиям существования обобщенного решения, данным в [44].

При доказательстве нижеследующих утверждений в данном разделе используются методика и вспомогательные утверждения из книги [44], гл. II, III, которые применяются для нахождения $\max_{Q_T} |u|$.

Зададим функцию $v^{(m,k)} = \max\{0; v^{(m)} - k\}$ и определим множество $A_k(t) = \{x | v^{(m)}(t, x) > k\}$.

Лемма 6. Пусть выполнены условия (5.2), (5.7), (5.8), $\varphi \in \mathbf{L}_2(G)$. Тогда имеет место сходимость $\|v^{(m,k)}\|_{\mathbf{V}_2^{1,0}(Q_T)} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$.

Доказательство. Следующее равенство для произвольного отрезка $[t_{l-1}, t_l] \subseteq [0, T]$ получается на основе уравнения (5.14) аналогично равенству (7.6) из [44], Гл. III, стр. 215

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_G [v^{(m,k)}(t, x)]^2 dx \Big|_{t=t_{l-1}}^{t=t_l} + \int_{t_{l-1}}^{t_l} \int_{A_k(t)} \left[\sum_{i,j=1}^d b_{ij} \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_j} \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_i} - \right. \\ & \left. \sum_{i=1}^d f_i^{(m)} \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_i} + \left(\sum_{i=1}^d a_i^{(m)} \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_i} + f_0^{(m)} \right) v^{(m,k)} \right] dx dt = 0. \end{aligned} \quad (5.17)$$

С учетом (5.2) получим из (5.17)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_G [v^{(m,k)}(t_l, x)]^2 dx + \alpha_0 \int_{t_{l-1}}^{t_l} \int_{A_k(t)} \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_i} \right)^2 dx dt \leq \frac{1}{2} \int_G [v^{(m,k)}(t_{l-1}, x)]^2 dx + \\ \int_{t_{l-1}}^{t_l} \int_{A_k(t)} \left[\sum_{i=1}^d f_i^{(m)} \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_i} - \left(\sum_{i=1}^d a_i^{(m)} \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_i} + f_0^{(m)} \right) v^{(m,k)} \right] dx dt. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Оценим слагаемые в правой части (5.18).

С помощью неравенства Коши

$$ab \leq \frac{\kappa}{2} a^2 + \frac{1}{2\kappa} b^2, \quad \kappa \geq 0. \quad (5.19)$$

и неравенства Гельдера получим следующее неравенство

$$\begin{aligned} \int_{t_{l-1}}^{t_l} \int_{A_k(t)} \sum_{i=1}^d f_i^{(m)} \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_i} dx dt \leq \int_{t_{l-1}}^{t_l} \int_{A_k(t)} \sum_{i=1}^d |f_i^{(m)}| \cdot \left| \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_i} \right| dx dt \leq \\ \frac{1}{\alpha_0} \int_{t_{l-1}}^{t_l} \int_{A_k(t)} \sum_{i=1}^d (f_i^{(m)})^2 dx dt + \frac{\alpha_0}{4} \int_{t_{l-1}}^{t_l} \int_{A_k(t)} \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_i} \right)^2 dx dt \leq \\ \frac{1}{\alpha_0} \mu_{q,r,k}(t_{l-1}, t_l) \cdot \sum_{i=1}^d \| (f_i^{(m)})^2 \|_{\bar{q}, \bar{r}, Q_T} + \frac{\alpha_0}{4} \int_{t_{l-1}}^{t_l} \int_{A_k(t)} \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_i} \right)^2 dx dt, \end{aligned} \quad (5.20)$$

где $\bar{q} = \frac{q}{q-1}$; $\bar{r} = \frac{r}{r-1}$; $\mu_{q,r,k}(t_{l-1}, t_l) = \left(\int_{t_{l-1}}^{t_l} (\text{mes} A_k(t))^{\frac{r}{q}} dt \right)^{\frac{1}{r}}$; $\text{mes} A$ – мера Лебегга множества A .

Следующее неравенство для слагаемого, содержащего $f_0^{(m)}$, в правой части (5.18) получается с помощью неравенства (5.19) при некотором $\nu_1 > 0$

$$- \int_{t_{l-1}}^{t_l} \int_{A_k(t)} f_0^{(m)} v^{(m,k)} dx dt \leq \int_{t_{l-1}}^{t_l} \int_{A_k(t)} |f_0^{(m)} v^{(m,k)}| dx dt \leq$$

$$\frac{\nu_1}{2} \int_{t_{l-1}}^{t_l} \int_{A_k(t)} (f_0^{(m)})^2 dx dt + \frac{1}{2\nu_1} \int_{t_{l-1}}^{t_l} \int_G (v^{(m,k)})^2 dx dt . \quad (5.21)$$

Найдем оценку первого интеграла в правой части (5.21) с помощью неравенства Гельдера

$$\int_{t_{l-1}}^{t_l} \int_{A_k(t)} (f_0^{(m)})^2 dx dt \leq \mu_{q,r,k}(t_{l-1}, t_l) \| (f_0^{(m)})^2 \|_{\bar{q}, \bar{r}, Q_T} . \quad (5.22)$$

Используя неравенство (3.7) из [44] на стр.91, возведенное в квадрат, найдем оценку второго интеграла в правой части (5.21)

$$\int_{t_{l-1}}^{t_l} \int_G (v^{(m,k)})^2 dx dt \leq \beta^2 (\text{mes} Q_T^0)^{\frac{2}{d+2}} \| v^{(m,k)} \|_{\mathbf{V}_{2(Q_{t_{l-1}, t_l})}^{1,0}}^2 \quad (5.23)$$

где Q_T^0 – множество точек $(t, x) \in Q_T$, в которых $|v^{(m,k)}| > 0$; $Q_{t_{l-1}t_l} \equiv [t_{l-1}, t_l] \times G$

Выберем константу ν_1 в (5.21) из равенства

$$\frac{\beta^2 (\text{mes} Q_T^0)^{\frac{2}{d+2}}}{2\nu_1} = \frac{1}{4} \min(1, \alpha_0),$$

в результате получим $\nu_1 = \frac{2\beta^2 (\text{mes} Q_T^0)^{\frac{2}{d+2}}}{\min(1, \alpha_0)}$.

Следующее неравенство получается также с использованием неравенства Коши, неравенства Гельдера и неравенства (5.5)

$$\begin{aligned} - \int_{t_{l-1}}^{t_l} \int_{A_k(t)} \sum_{i=1}^d a_i^{(m)} \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_i} v^{(m,k)} dx dt &\leq \int_{t_{l-1}}^{t_l} \int_{A_k(t)} \left| \sum_{i=1}^d a_i^{(m)} \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_i} v^{(m,k)} \right| dx dt \leq \\ &\int_{t_{l-1}}^{t_l} \int_{A_k(t)} \left(\frac{\alpha_0}{4} \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{1}{\alpha_0} \sum_{i=1}^d (a_i^{(m)})^2 (v^{(m,k)})^2 \right) dx dt \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha_0}{4} \int_{t_{l-1}}^{t_l} \int_{A_k(t)} \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_i} \right)^2 dx dt + \frac{1}{\alpha_0} \left\| \sum_{i=1}^d (a_i^{(m)})^2 \right\|_{\bar{q}_1, \bar{r}_1, Q_{t_{l-1}t_l}} \cdot \\
& \cdot \|v^{(m,k)}\|_{2q_1, 2r_1, Q_{t_{l-1}t_l}}^2 \leq \frac{\alpha_0}{4} \int_{t_{l-1}}^{t_l} \int_{A_k(t)} \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_i} \right)^2 dx dt + \\
& \frac{\beta^2}{\alpha_0} \left\| \sum_{i=1}^d (a_i^{(m)})^2 \right\|_{\bar{q}_1, \bar{r}_1, Q_{t_{l-1}t_l}} \|v^{(m,k)}\|_{\mathbf{V}_2^{1,0}(Q_{t_{l-1}t_l})}^2, \tag{5.24}
\end{aligned}$$

где $q_1 > 1$, $r_1 > 1$ такие, что $2q_1$, $2r_1$ удовлетворяют условиям (5.6).

На основе неравенств (5.18) – (5.24) получаем следующее

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} \min\{1, \alpha_0\} \|v^{(m,k)}\|_{\mathbf{V}_2^{1,0}(Q_{t_{l-1}t_l})}^2 \leq \frac{1}{2} \int_G [v^{(m,k)}(t_{l-1}, x)]^2 dx + \\
& \mu_{q,r,k}(t_{l-1}, t_l) \left(\frac{1}{\alpha_0} \sum_{i=1}^d \|(f_i^{(m)})^2\|_{\bar{q}, \bar{r}, Q_T} + \frac{\nu_1}{2} \|(f_0^{(m)})^2\|_{\bar{q}, \bar{r}, Q_T} \right) + \\
& \frac{\beta^2}{\alpha_0} \left\| \sum_{i=1}^d (a_i^{(m)})^2 \right\|_{\bar{q}_1, \bar{r}_1, Q_{t_{l-1}t_l}} \|v^{(m,k)}\|_{\mathbf{V}_2^{1,0}(Q_{t_{l-1}t_l})}^2. \tag{5.25}
\end{aligned}$$

Выберем длину отрезка $[t_{l-1}, t_l]$ так, чтобы $\frac{\beta^2}{\alpha_0} \left\| \sum_{i=1}^d (a_i^{(m)})^2 \right\|_{\bar{q}_1, \bar{r}_1, Q_{t_{l-1}t_l}}$ было меньше $\frac{1}{4} \min\{1, \alpha_0\}$, например,

$$\frac{\beta^2}{\alpha_0} \left\| \sum_{i=1}^d (a_i^{(m)})^2 \right\|_{\bar{q}_1, \bar{r}_1, Q_{t_{l-1}t_l}} \leq \frac{1}{8} \min\{1, \alpha_0\}. \tag{5.26}$$

Тогда из (5.25) получим

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{8} \min\{1, \alpha_0\} \|v^{(m,k)}\|_{\mathbf{V}_2^{1,0}(Q_{t_{l-1}t_l})}^2 \leq \frac{1}{2} \int_G [v^{(m,k)}(t_{l-1}, x)]^2 dx + \\
& \mu_{q,r,k}(t_{l-1}, t_l) \left(\frac{1}{\alpha_0} \sum_{i=1}^d \|(f_i^{(m)})^2\|_{\bar{q}, \bar{r}, Q_T} + \frac{\nu_1}{2} \|(f_0^{(m)})^2\|_{\bar{q}, \bar{r}, Q_T} \right). \tag{5.27}
\end{aligned}$$

Зададим на отрезке $[0, T]$ сетку $S = \{t_0, t_1, \dots, t_{N-1}, t_N\}$ такую, что $t_0 = 0$, $t_N = T$ и чтобы для любой пары соседних узлов выполнялось условие (5.26).

Тогда, с учетом того, что $v^{m,k}(0, x) \Big|_{x \in G} = 0$, из совокупности неравенств (5.27) следует следующее неравенство

$$\|v^{(m,k)}\|_{\mathbf{V}_2^{1,0}(Q_T)}^2 \leq \mu_{q,r,k}(0, T) \left(C_1 \sum_{i=1}^d \|(f_i^{(m)})^2\|_{\bar{q}, \bar{r}, Q_T} + C_2 \|(f_0^{(m)})^2\|_{\bar{q}, \bar{r}, Q_T} \right), \quad (5.28)$$

где $C_1 = \frac{8}{\alpha_0 \min\{1, \alpha_0\}}$, $C_2 = \frac{4\beta^2 \nu_1}{\min\{1, \alpha_0\}}$.

Из сходимости $\|(f_i^{(m)})^2\|_{\bar{q}, \bar{r}, Q_T} \rightarrow 0$, $\|(f_0^{(m)})^2\|_{\bar{q}, \bar{r}, Q_T} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ следует доказательство леммы.

Теорема 12. Пусть выполнены условия Леммы 6. Тогда для заданного уровня погрешности приближенного решения ε существует такое значение параметра m_ε , что при всех $m \geq m_\varepsilon$

$$\operatorname{vrai} \max_{Q_T} |v^{(m)}| < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть ε – заданный уровень погрешности. Зададим последовательность уровней $\varepsilon_l = \frac{\varepsilon}{2}(2 - 2^{-l})$, ($l = 0, 1, \dots$). Тогда для некоторых q, r , которые возьмем удовлетворяющими условиям (5.6), выполняется неравенство

$$(\varepsilon_{l+1} - \varepsilon_l) \mu_{q,r,\varepsilon_{l+1}}(0, T) \leq \|v^{(m,\varepsilon_l)}\|_{q,r,Q_T}. \quad (5.29)$$

Будем предполагать, что при некоторых значениях m величина погрешности превышает порог $\frac{\varepsilon}{2}$, т.е. $\mu_{q,r,\varepsilon_0}(0, T) \neq 0$. Для правой части (5.29) из неравенства (5.5) следует оценка

$$\|v^{(m,\varepsilon_l)}\|_{q,r,Q_T} \leq \beta \|v^{(m,\varepsilon_l)}\|_{\mathbf{V}_2^{1,0}(Q_T)}. \quad (5.30)$$

С другой стороны, из неравенства (5.28) следует, что для некоторых $q' > 1$, $r' > 1$

$$\|v^{(m,\varepsilon_l)}\|_{\mathbf{V}_2^{1,0}(Q_T)} \leq \mu_{q',r',\varepsilon_l}^{\frac{1}{2}}(0, T) \left[C_1 \sum_{i=1}^d \|(f_i^{(m)})^2\|_{\bar{q}', \bar{r}', Q_T} + C_2 \|(f_0^{(m)})^2\|_{\bar{q}', \bar{r}', Q_T} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (5.31)$$

где $\bar{q}' = \frac{q'}{q'-1}$, $\bar{r}' = \frac{r'}{r'-1}$.

Выберем параметры q' , r' из условий: $\frac{r'}{q'} = \frac{r}{q}$, $\frac{1}{2r'} = \frac{1+\varrho}{r}$, где $\varrho > 0$. Получаем

$$q' = \frac{q}{2(1+\varrho)}, \quad r' = \frac{r}{2(1+\varrho)}. \quad (5.32)$$

Из (5.29) – (5.32) следует

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{l+1} - \varepsilon_l) \mu_{q,r,\varepsilon_{l+1}}(0, T) &\leq (\mu_{q,r,\varepsilon_l}(0, T))^{1+\varrho} \left[C_1 \sum_{i=1}^d \|(f_i^{(m)})^2\|_{\bar{q}', \bar{r}', Q_T} + \right. \\ &\left. C_2 \|(f_0^{(m)})^2\|_{\bar{q}', \bar{r}', Q_T} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Для выражения $\sum_{i=1}^d \|(f_i^{(m)})^2\|_{\bar{q}', \bar{r}', Q_T}$, которое присутствует в правой части (5.33), запишем следующее неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d \|(f_i^{(m)})^2\|_{\bar{q}', \bar{r}', Q_T} &= \sum_{i=1}^d \left\| \sum_{j=1}^d (b_{ij} - b_{ij}^{(m)})^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 \right\|_{\bar{q}', \bar{r}', Q_T}^2 \leq \\ &\sum_{i,j=1}^d \left\| (b_{ij} - b_{ij}^{(m)}) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{2\bar{q}', 2\bar{r}', Q_T}^2. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Далее, применим неравенство Гельдера

$$\left\| (b_{ij} - b_{ij}^{(m)}) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{2\bar{q}', 2\bar{r}', Q_T}^2 \leq \left\| b_{ij} - b_{ij}^{(m)} \right\|_{2\bar{q}'\lambda, 2\bar{r}'\mu, Q_T}^2 \cdot \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{2\bar{q}'\bar{\lambda}, 2\bar{r}'\bar{\mu}, Q_T}^2, \quad (5.35)$$

где $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\bar{\lambda}} = 1$, $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\bar{\mu}} = 1$, $\lambda, \mu \geq 1$.

Функции $b_{ij}^{(m)}$, $f^{(m)}$ сходятся при $m \rightarrow \infty$ соответственно к b_{ij} , f в пространствах $\mathbf{L}_{2\bar{q}'\lambda, 2\bar{r}'\mu, Q_T}$, \mathbf{L}_{q', r', Q_T} . Поэтому для $\delta > 0$ существует целое число m_δ такое, что при $m \geq m_\delta$ выполняется неравенство

$$\left[C_1 \sum_{i=1}^d \|(f_i^{(m)})^2\|_{\bar{q}', \bar{r}', Q_T} + C_2 \|(f_0^{(m)})^2\|_{\bar{q}', \bar{r}', Q_T} \right]^{\frac{1}{2}} \leq \delta. \quad (5.36)$$

Для краткости записи формул обозначим $\bar{\mu}_l = \mu_{q,r,\varepsilon_l}(0, T)$. Из (5.33), (5.36) получаем при $m \geq m_\delta$

$$\bar{\mu}_{l+1} \leq 2^{l+2} \left(\frac{\delta}{\varepsilon} \right) (\bar{\mu}_l)^{1+\varrho}. \quad (5.37)$$

На основании (5.37) имеем

$$\bar{\mu}_{l+1} \leq 2^{\sum_{j=0}^l (l+2-j)(1+\varrho)^j} \left(\frac{\delta}{\varepsilon} \right)^{\sum_{j=0}^l (1+\varrho)^j} (\bar{\mu}_0)^{(1+\varrho)^{l+1}}. \quad (5.38)$$

С использованием формулы суммы геометрической прогрессии находим показатели степеней 2 и $\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)$ в (5.38)

$$\sum_{j=0}^l (l+2-j)(1+\varrho)^j = \frac{(1+\varrho)^{l+1} - 1}{\varrho} \cdot \frac{2\varrho + 1}{\varrho} - \frac{l+1}{\varrho}; \quad \sum_{j=0}^l (1+\varrho)^j = \frac{(1+\varrho)^{l+1} - 1}{\varrho}.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\bar{\mu}_{l+1} \leq \left(2^{\frac{2\varrho+1}{\varrho^2}} \left(\frac{\delta}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{\varrho}} \bar{\mu}_0 \right)^{(1+\varrho)^{l+1}} \cdot 2^{\left(-\frac{2\varrho+1}{\varrho^2} - \frac{l+1}{\varrho}\right)} \cdot \left(\frac{\delta}{\varepsilon} \right)^{-\frac{1}{\varrho}}. \quad (5.39)$$

Из (5.39) следует, что $\bar{\mu}_l \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$, если $2^{\frac{2\varrho+1}{\varrho^2}} \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\varrho}} \bar{\mu}_0 \leq 1$. Отсюда находим условие для определения радиуса ядра усреднения: при заданном уровне погрешности ε величина ρ_m должна быть такой, чтобы выполнялось неравенство (5.36) для δ , удовлетворяющего неравенству

$$\delta \leq \varepsilon \left(\frac{1}{\bar{\mu}_0 2^{\frac{2\varrho+1}{\varrho^2}}} \right)^\varrho, \quad (5.40)$$

т.е.

$$\left[C_1 \sum_{i=1}^d \|(f_i^{(m)})^2\|_{\bar{q}', \bar{r}', Q_T} + C_2 \|(f_0^{(m)})^2\|_{\bar{q}', \bar{r}', Q_T} \right]^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon \left(\frac{1}{\bar{\mu}_0 2^{\frac{2\varrho+1}{\varrho^2}}} \right)^\varrho. \quad (5.41)$$

Аналогичные рассуждения можно проделать для функции $-v^{(m)}$. То есть, существует номер m_ε , соответствующий уровню погрешности ε такой, что при

$m \geq m_\varepsilon$ vrai $\max_{Q_T} |v^{(m)}| < \varepsilon$. Теорема доказана.

Для нахождения статистических оценок решения задачи P_m с использованием численного решения СДУ требуется привести эту задачу к задаче с обратным временем. Это делается с помощью замены переменной времени $s = T - t$. Определим функцию $\tilde{u}(s, x) \equiv u^{(m)}(T - s, x)$ и преобразуем задачу P_m к краевой задаче относительно \tilde{u}

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial s} + \sum_{i,j=1}^d b_{i,j}^{(m)}(T - s, x) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d \tilde{a}_i^{(m)}(T - s, x) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} + f^{(m)}(T - s, x) = 0, \quad (5.42)$$

$$\tilde{a}_i^{(m)}(T - s, x) = \sum_{j=1}^d \frac{\partial b_{ij}^{(m)}}{\partial x_j}(T - s, x) + a_i^{(m)}(T - s, x).$$

$$\tilde{u}|_{s=T} = \varphi(x), \quad \tilde{u}|_{\partial G} = 0. \quad (5.43)$$

Уравнению (5.42) мы ставим в соответствие векторное СДУ

$$X_r = x + \int_s^r \tilde{a}^{(m)}(T - v, X_v) dv + \int_s^r \sigma^{(m)}(T - v, X_v) dW_v \quad (5.44)$$

где $\tilde{a}^{(m)}$ – вектор с компонентами $\tilde{a}_i^{(m)}$; $\sigma^{(m)}$ – матрица такая, что $2\sigma^{(m)} \cdot (\sigma^{(m)})^T = B^{(m)}$, $B^{(m)} \equiv (b_{ij}^{(m)})$; W_\cdot – винеровский процесс.

Нахождение оценок решения задачи (5.1), (5.3), (5.4) осуществляется на основе вероятностного представления решения задачи (5.42), (5.43)

$$\tilde{u}(s, x) = E_{s,x} [\varphi(X_T) \chi_{\tau > T} + \int_s^{T \wedge \tau} f^{(m)}(T - v, X_v) dv]. \quad (5.45)$$

5.3 Расчет теплового состояния сотовой теплозащитной панели

Сотовая теплозащитная панель представляет собой конструкцию, состоящую из двух тонких пластин, между которыми заключен каркас в виде пчелиных сот,

заполненных некоторой субстанцией с низкой теплопроводностью, см. Рис. 1.

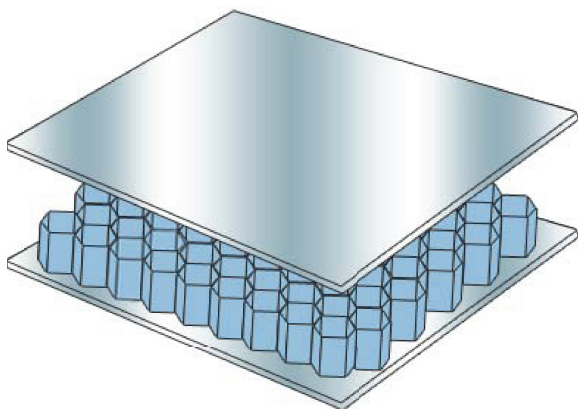


Рис. 1. Сотовая панель

Для расчета рассматривалась сотовая панель, каркас которой изготовлен из углепластика, а наполнителем служит воздух. Основные характеристики панели следующие: общая толщина панели – 0.035м; толщина каждой из граничных пластин панели – 0.001м; толщина стенок сотового каркаса – $6.0 \cdot 10^{-5}$ м; сотовыми ячейками являются правильные шестиугольники одинакового размера с длиной

стороны, равной 0.006м; коэффициенты температуропроводности углепластика и воздуха равны соответственно $8.0 \cdot 10^{-4}$ м²/с и $2.36 \cdot 10^{-5}$ м²/с.

С использованием методики инженерных расчетов, применяемой для определения эффективной теплопроводности неоднородных материалов [46] была определена эффективная теплопроводность рассматриваемой панели при условии, что тепловой поток внутри пластины параллелен сотовому каркасу, которая оказалась равной $4.11 \cdot 10^{-2}$ Вт/(м · К). В данном случае объемные теплоемкости воздуха и углепластика совпадают и это значение равно 10^3 Дж/(м³ · К). Таким образом, усредненное значение температуропроводности панели равно $4.11 \cdot 10^{-2}$ м²/с.

5.3.1 Расчет модельного примера

Для эксперимента была взята следующая трехмерная задача. В качестве начального распределения температуры бралось одинаковое во всех точках панели

значение температуры, равное 283К. Затем одну из сторон (назовем ее верхней) панели стали охлаждать. График изменения температуры верхней стороны пластины приведен на рис. 2.

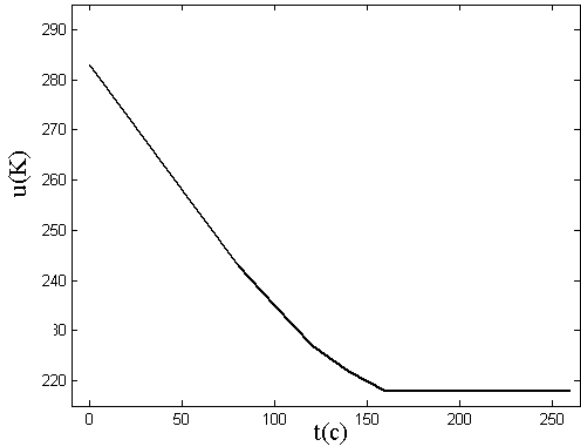


Рис. 2. Температура на верхней границе

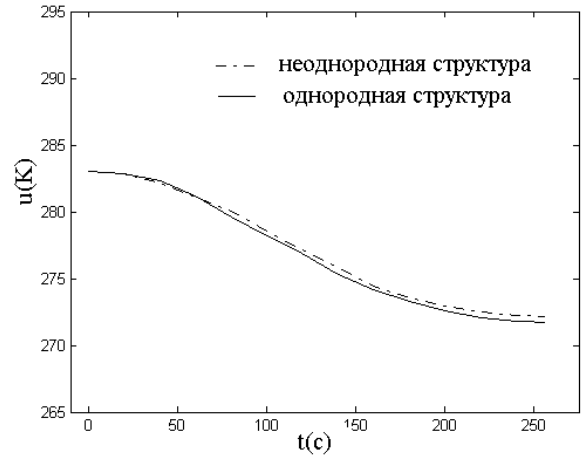


Рис. 3. Расчет температуры внутри пластины

Был проведен расчет с использованием СДУ значений температуры в точке, находящейся в центре шестиугольника и на одинаковом расстоянии от верхней и нижней границ панели, на интервале времени от 0 до 250с. При этом панель рассматривалась как неоднородный материал. Для сравнения был проведен расчет значений температуры в той же самой точке, но при этом пластина считалась однородной с усредненным значением теплопроводности, полученным на основе инженерных расчетов. Полученные результаты этих расчетов приведены в виде графиков на рис. 3.

Отметим, что в программу расчета была заложена декартова система координат с началом в центре границы нижней стороны панели, ось Z направлена перпендикулярно панели, а оси X и Y – параллельно панели. Границы шестиугольных сот образованы сетью параллельных оси X прямых и прямых под углом $\pi/3$ к оси X на расстоянии друг от друга, которое определяется размером сот. В ходе

расчетов благодаря циклической структуре расположения прямых, образующих соты, на каждом шаге определяется расстояние до ближайшей прямой. Таким образом определяется ориентация траектории относительно расположения сот.

В процессе вычислений использовалась функция сглаживания $\gamma_d(\frac{\rho^2 - |x|^2}{\rho^2})$, где γ_d – нормирующий коэффициент. Величина шага в методе Эйлера бралась равной 10^{-6} с таким расчетом, чтобы вероятность попасть за один шаг из одной соты в другую была мала; величина ρ была задана равной 10^{-5} . Моделировалось 4000 траекторий случайного процесса. При этом объеме выборки ширина 95% доверительного интервала не превышала 1% от значений температуры во всех точках интервала времени, для которого проводился расчет.

Из графика на рис. 3 видно хорошее совпадение значений температур, полученных в результате вычислений с использованием СДУ с результатами расчета соответствующих значений как для однородного материала.

5.3.2 Расчет температуры сотовой панели по данным физического эксперимента

В работе [92] для такого же образца сотовой панели что и в предыдущем примере приведены данные расчета температуры с граничными условиями третьего рода. Для расчета были использованы входные данные, полученные на основе измерений физических данных в течение первых 150с полета самолета в холодном климате. На границе было задано условие

$$\left(\sum_{i,j} b_{i,j}(t, x) n_i \frac{\partial u}{\partial x_j} + \eta(t, x)u + \gamma(t, x) \right) \Big|_{x \in \partial G} = 0, \quad (5.46)$$

где

$$\eta(t, x) = \begin{cases} \alpha_{out}(t), & \text{если } x \text{ находится на верхней границе,} \\ -\alpha_{in}(t), & \text{если } x \text{ находится на внутренней границе} \end{cases}$$

$$\gamma(t, x) = \begin{cases} -\alpha_{out}(t)u_{out}(t), & \text{если } x \text{ находится на верхней границе,} \\ \alpha_{in}(t)u_{in}(t), & \text{если } x \text{ находится на внутренней границе.} \end{cases}$$

α_{out} , α_{in} – соответственно внешний и внутренний коэффициенты теплообмена, которые рассчитываются на основе экспериментальных данных по методикам, описанным в работах [14], [32]; u_{out} , u_{in} – функции температуры окружающей среды соответственно с наружной и внутренней сторон обшивки.

Таким образом, расчет температуры в заданной точке сотовой панели осуществлялся путем оценки решения в этой точке краевой задачи (5.1), (5.3), (5.46) с использованием численного решения системы СДУ с нулевым вектором сноса

$$X_r = x + \int_s^r \sigma^{(m)}(T - v, X_v) dW_v + \int_s^r n^B(T - v, X_v) d|k_v|, \quad (5.47)$$

где n^B – единичный вектор внутренней кономали ($n^B = \frac{Bn}{|Bn|}$); $|k_v| = \int_s^v \chi(X_r \in \partial G) d|k_r|$ – неотрицательный случайный процесс, который возрастает только тогда, когда процесс X находится на границе.

Оценка температуры внутри пластины в точке x в момент времени s определялась по формуле

$$\tilde{u}(s, x) = E_{s,x} \left[\varphi(X_T) \exp \left(\int_s^T \eta(T - v, X_v) dv \right) + \int_s^T \gamma(T - v, X_v) dv \right]. \quad (5.48)$$

Для расчёта теплового состояния панели была разработана параллельная программа на языке Fortran 90. Распараллеливание в программе осуществляется по схеме ведущий-ведомые (Master-Slave). В этой схеме одно вычислительное ядро считается главным, и оно распределяет весь объём работы по моделированию случайных траекторий по всем ядрам, участвующим в работе. По окончании моделирования всех траекторий все ядра передают ведущему ядру полученные

результаты расчетов для вычисления математического ожидания функционала, дающего оценку температуры. При написании параллельной программы использовалось программное обеспечение Intel MPI, Version 4.1. Моделирование траекторий случайного процесса осуществлялось с использованием параллельного датчика гауссовских случайных величин из библиотеки Intel MKL [15]. Вычисления проводились в Сибирском Суперкомпьютерном центре на гибридном кластере НКС-30Т+GPU с использованием 36 4-х ядерных процессоров E5540 2,53 GHz. Расчеты температуры проводились вблизи нижнего края панели в точке (x_0, y_0, z_0) с координатами $x_0 = y_0 = 0, z_0 = 0,0001\text{м}$. Величина шага в методе Эйлера бралась равной $5 \cdot 10^{-7}$ и объемом выборки 4000 случайных траекторий.

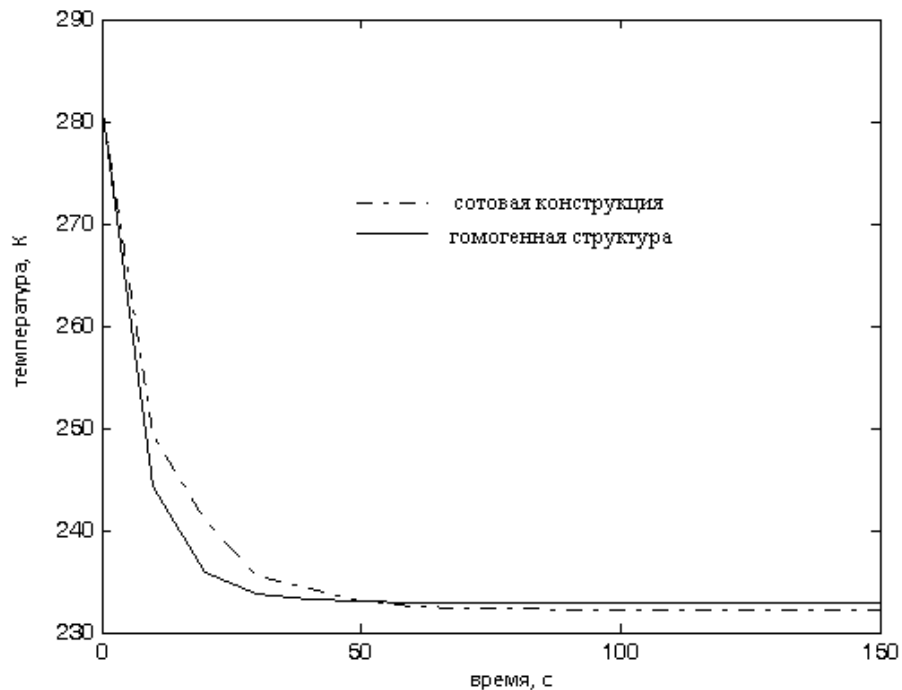


Рис. 4. Температура на внутренней стороне обшивки

При этом величина доверительного интервала температуры сотовой конструкции не превышала 1,2 в нестационарных и 0,7 К в стационарных условиях при доверительной вероятности 95%. На первом этапе были получены значения тем-

пературы сотовой конструкции с помощью предложенного в данной работе метода. Затем аналогичные расчёты были выполнены для однородной (гомогенной) структуры с экспериментально полученными значениями эффективной теплопроводности и температуропроводности. Полученные результаты рис. 4 показывают, что значения температуры для сотовой конструкции и однородной структуры находятся в хорошем согласии, когда процесс передачи тепла близок к стационарному.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Получены две формулы для определения производных по параметрам математических ожиданий функционалов от диффузионных процессов в областях с условиями поглощения на границе. На основе этих формул построены два метода оценки производных по параметрам математических ожиданий функционалов от диффузионных процессов.

2. Обоснована возможность дифференцирования по параметрам локального времени пребывания диффузионного процесса на границе. Построен метод оценки производных по параметрам математических ожиданий функционалов от диффузионных процессов в областях с условием отражения на границе.

3. Получена формула для предельного значения дисперсии оценки математического ожидания функционала от диффузионного процесса при убывании длины шага в методе Эйлера.

4. Разработан метод минимизации дисперсии оценки математического ожидания функционала от диффузионного процесса, основанный на преобразовании краевой задачи для параболического уравнения.

5. Разработан метод оценки решений краевых задач для уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами. Решена задача оценки теплового состояния сотовых конструкций фюзеляжа самолета на основе численного решения стохастических дифференциальных уравнений.

Список работ, в которых отражены результаты диссертации

а) рецензируемые периодические издания, рекомендованные ВАК, в которых опубликованы основные результаты диссертации:

- [1] Gusev S.A. Numerical estimation of the coefficients of the parabolic equation by solving stochastic differential equations // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modeling.– 2000.– Vol. 15, No.5.– P.397-404.
- [2] Gusev S. A. Estimation of the coefficients in the parabolic equation by the statistical simulation of diffusion trajectories // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.– 2003, Vol. 18, No 4.– P. 297-306.
- [3] Гусев С.А. Оценки методом Монте-Карло производных по параметрам решения параболического уравнения на основе численного решения СДУ // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.– Новосибирск 2005.– Т.8, №4.– 2005.– С. 297-306.
- [4] Гусев С.А. Использование численного решения СДУ для оценки производных по параметрам решения параболической краевой задачи с граничным условием Неймана // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.– Новосибирск, 2007.– Т.10, №3.– С. 237-246.
- [5] Gusev S.A. Using SDE for solving inverse parabolic boundary value problem with a Neumann boundary condition // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modeling.– 2007.- Vol. 22, No 5.– P. 449-470.

- [6] Гусев С.А. Оценка производных по параметрам функционалов диффузионного процесса, движущегося в области с поглощающей границей // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.– Новосибирск, 2008, т.11, № 4.– С. 385-404.
- [7] Гусев С.А. Минимизация дисперсии оценки математического ожидания функционала диффузионного процесса на основе параметрического преобразования параболической краевой задачи // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.- Новосибирск, 2011.– Т.14, №2.– С. 141-153.
- [8] Gusev S.A. Variances of estimates of a diffusion process functional and its derivatives with respect to parameters // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.– 2009.– Vol. 24, No 5.– P. 439-454.
- [9] Николаев В.Н., Гусев С.А. Определение оптимальных значений толщины теплоизоляции кабины экипажа и салонов пассажиров магистрального самолета // Авиакосмическое приборостроение.– 2013.– №7.– С. 46-55.
- [10] Гусев С.А., Докучаев Н.Г. О дифференцировании функционалов, содержащих время первого выхода диффузионного процесса из области // ТВП.– 2014.– Т.59, №1.– С. 159-168.
- [11] Гусев С.А. Применение СДУ к оценке решения уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами// Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.– Новосибирск.– 2015.– Т.18, №2.– С. 147-161.
- [12] Гусев С.А. , Николаев В.Н. Метод определения теплового состояния сотовых

конструкций фюзеляжа самолета на основе численного решения стохастических дифференциальных уравнений // Научный вестник НГТУ.–2015.– №2(59).– С. 20-31.

б) другие публикации теме диссертации:

- [13] Gusev S.A., Monakhov O.G. Use of Parallel Computation for Estimation of Coefficients of Heat Equation by Monte Carlo Method // Bulletin of the Novosibirsk Computing Center.-Series: Computer Science, NCC Publisher.– Novosibirsk.– 1999.– Iss. 10.– P.15-23.
- [14] Gusev S. A. Monte Carlo estimates of the solution of a parabolic equation and its derivatives made by solving stochastic differential equations // Proceedings of the CMMSE-2002, Conference, Alicante, Spain, 20–25 September.– 2002.– Vol.I.– P.159-166.
- [15] Gusev S.A. Monte Carlo estimates of the solution of a parabolic equation and its derivatives made by solving stochastic differential equations// Comm. Nonlin. Sci. Numer. Simulation.– 2003.– Vol.9, Iss. 2.– P. 177–185.
- [16] Gusev S.A. Monte Carlo estimation of the solution of the parabolic equation and its parametric derivatives by solving SDE's // Proceedings of the 5th St. Petersburg Workshop on Simulation.- St. Petersburg, Russia, June 26 – July 2, 2005.-NII Chemistry St. Petersburg Univ. Publ.– 2005.– P. 299-304.
- [17] Gusev S.A. Monte Carlo estimation of a functional of a diffusion process with variance reduction by transformation of the corresponding boundary value problem

- // Proceedings of the 6th St. Petersburg Workshop on Simulation.- St. Petersburg, Russia, June 28 – July 4, 2009.– Vol.I.– P. 128–132.
- [18] Gusev S.A., Nikolaev V.N. Calculation of heat transfer in heterogeneous structures such as honeycomb by using numerical solution of stochastic differential equations // Advanced Materials Research.– 2014.– Vol. 1016.– P. 758-763.
- [19] Gusev S.A. Estimating Parametric Derivatives of First Exit Times of Diffusions by Approximation of Wiener Processes // International Journal of Pure Mathematics.- 2015.- Vol. 2.- P. 55-63.
- [20] Gusev S.A., Nikolaev V.N. Numerical Statistical Modeling of the Thermal State of Aircraft Honeycomb Coatings // Applied Methods of Statistical Analysis. Nonparametric Approach. AMSA'15. Proceedings of the International Workshop, Novosibirsk, 14–19 September, 2015.– P.416–423.
- [21] Гусев С.А. Построение оценок математических ожиданий выражений, содержащих производные по параметрам времени первого выхода диффузионного процесса из области.- Труды Международной конференции "Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики - 2015", посвященной 90-летию со дня рождения академика Г.И. Марчука. ИВМиМГ СО РАН. Новосибирск. 19-23 октября 2015 г. [Электрон. ресурс]. Новосибирск: Абвей, 2015.– С. 203-209. ISBN 978-5-9905347-2-8

Список литературы

- [1] Аверина Т.А., Артемьев С.С. Моделирование стационарных случайных процессов с заданным одномерным распределением и экспоненциальной корреляционной функцией. – Новосибирск, 1984. – 24 с. – (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ; 495).
- [2] О.М. Алифанов Обратные задачи теплообмена.– М: Машиностроение, 1988.
- [3] Анулова С.В., Веретенников А.Ю., Крылов Н.В., Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Стохастическое исчисление. Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Фундам. направления.- М.: ВИНТИ.– 1989.– Т.49. С. 5-260.
- [4] Артемьев С.С., Гусев С.А., Забиняко Г.И. Оценка параметров в системах автоматического управления динамическими объектами. – Новосибирск, 1994. – (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ; 1017).
- [5] Артемьев С.С., Якунин М.А. Математическое и статистическое моделирование в финансах.– Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2008.
- [6] Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения.- М: Изд-во Моск. ун-та, 1989.
- [7] Бек Дж., Блакуэлл Б., Сент-Клэр Ч. Некорректные обратные задачи теплопроводности.- М: Мир, 1989.
- [8] Боднер В.А., Роднищев Н.Е., Юриков Е.П. Оптимизация терминальных стохастических систем.- М.: Машиностроение, 1987.
- [9] Боровков А.А. Теория вероятностей.- М.: Эдиториал УРСС, 1999.

- [10] Бусленко Н.П., Голенко Д.И., Соболев И.М., Срагович В.Г., Шрейдер Ю.А. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло) М.: Физматгиз, 1962.
- [11] Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы.– М.: Наука, 1986.
- [12] Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов.– М.: Наука, 1975.
- [13] Владимиров В.С. Уравнения математической физики.– М., "Наука 1981.
- [14] Воронин Г.И. Системы кондиционирования на летательных аппаратах. М., Машиностроение, 1973.
- [15] Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках.– М.: Мир, 1986.
- [16] Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка: Пер. с англ. / Под ред. А.К. Гущина.– М.: Наука, 1989.
- [17] Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения.– Киев: Наукова думка, 1968.
- [18] Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. Т. I.– М.: Наука, 1971.
- [19] Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. Т. II.– М.: Наука, 1973.
- [20] Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. Т. III.– М.: Наука, 1975.

- [21] Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов.- М.: Наука, 1977.
- [22] Гихман И.И., Скороход А.В. Управляемые случайные процессы.- Киев: Наукова думка, 1977.
- [23] Гусев С.А. Оценки методом Монте-Карло производных по параметрам решения параболического уравнения на основе численного решения СДУ // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.- Новосибирск 2005.- Т.8, №4.- 2005.- С. 297-306.
- [24] Гусев С.А. Использование численного решения СДУ для оценки производных по параметрам решения параболической краевой задачи с граничным условием Неймана // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.- Новосибирск, 2007.- Т.10, №3.- С. 237-246.
- [25] Гусев С.А. Оценка производных по параметрам функционалов диффузионного процесса, движущегося в области с поглощающей границей // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.- Новосибирск, 2008, т.11, № 4, с. 385-404.
- [26] Гусев С.А. Минимизация дисперсии оценки математического ожидания функционала диффузионного процесса на основе параметрического преобразования параболической краевой задачи // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.- Новосибирск.- 2011.- Т.14, №2.- С. 141-153.
- [27] Гусев С.А., Докучаев Н.Г. О дифференцировании функционалов, содержащих время первого выхода диффузионного процесса из области // ТВП.- 2014.- Т.59, №1.- С. 159-168 .

- [28] Гусев С.А. Применение СДУ к оценке решения уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами// Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.- Новосибирск.- 2015.- Т.18, №2.- С. 147-161.
- [29] Гусев С.А. , Николаев В.Н. Метод определения теплового состояния сотовых конструкций фюзеляжа самолета на основе численного решения стохастических дифференциальных уравнений // Научный вестник НГТУ.- 2015.- №2(59).- С. 20-31.
- [30] Данилов Д.Л., Ермаков С.М. О сравнительной трудоемкости метода Монте-Карло для решения систем линейных алгебраических уравнений // ЖВМиМФ.- 1995, Т.35, 5.- С. 661-676.
- [31] Докучаев Н.Г. О моментах первого выхода для однородных диффузионных процессов// Теория вероятностей и ее применения. – 1986, Т.31, 3.- С. 565-566.
- [32] Дульнев Г. Н., Тартаковский Н. Н. Тепловые режимы электронной аппаратуры. Л., Энергия, 1971.
- [33] Дынкин Е.Б. Марковские процессы.- М.: Физматгиз, 1963.
- [34] Дынкин Е.Б., Юшкевич А.А. Управляемые марковские процессы и их приложения.- М.: Наука, 1975.
- [35] Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования. М.: Наука, 1976.
- [36] Ито К., Маккин Г. Диффузионные процессы и их траектории.- М.: Мир, 1968.

- [37] Кан Ю. С., Кибзун А. И., Стабилизация динамической системы, находящейся под действием неопределенных и случайных возмущений// Автомат. и телемех.– 1990, вып. 12.– С. 75–84.
- [38] Kloeden P.E., Platen E. Numerical solution of stochastic differential equations.- Berlin: Springer-Verlag, 1992.
- [39] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
- [40] Красовский Н.Н., Куржанский А. Б., А. И. Кибзун, Современные проблемы оптимизации и устойчивости неопределенных и стохастических систем, Автомат. и телемех., 2007, выпуск 10, 3–4.
- [41] Крылов Н.В. Управляемые процессы диффузионного типа.- М.: Наука, 1977.
- [42] Кузнецов Д.Ф. Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения, 4-е изд., Изд-во Политехнического ун-та, Санкт-Петербург, 2010.
- [43] Кушнер Г. Дж. Вероятностные методы аппроксимации в стохастических задачах управления и теории эллиптических уравнений.- М. Наука, 1985.
- [44] О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. - М.: Наука, 1967.
- [45] Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов.- М.: Наука, 1974.

- [46] Миснар А. Теплопроводность твердых тел, жидкостей, газов и их составляющих. М.: Мир, 1968.
- [47] Михайлов Г.А., Войтишек А.В. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло: Учебн. пособие.- М. Изд. центр "Академия 2006.
- [48] Мильштейн Г.Н. Применение численного интегрирования стохастических уравнений для решения краевых задач с граничными условиями Неймана // ТВП.- 1996.- Т.41, Вып.1.- С.210-218.
- [49] Николаев В.Н., Гусев С.А. Определение оптимальных значений толщины теплоизоляции кабины экипажа и салонов пассажиров магистрального самолета // Авиакосмическое приборостроение.- 2013.-№7.- С.46-55.
- [50] Никольский С.М. Курс математического анализа, т.II.- 3-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1983.
- [51] Портенко Н.И., Скороход А.В., Шуренков В.М. Марковские процессы. Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Фундам. направления.- М.: ВИНТИ, 1989.- 46. 2.- С. 5-248.
- [52] Пугачев В.С., Сеницын И.Н. Стохастические дифференциальные системы.- М.: Наука, 1985.
- [53] Семаков С.Л. Первое достижение границ случайным процессом// Автомат. и телемех.- 1988.- 6.- С. 87-95.
- [54] Скороход А.В. Стохастические уравнения для диффузионных процессов в ограниченной области 1,2 // ТВП.- 1961.- Т.6.- С.264-274; 1962.- Т.7.- С.3-23.

- [55] Смирнов В.И. Курс высшей математики, том 5.– М.: Госуд. изд-во физ.-мат. лит., 1959.
- [56] Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, Изд. 3-е, 1988.
- [57] Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, 1973.
- [58] А.Н. Тихонов Об устойчивости обратных задач, ДАН СССР 39, 5, 1943.
- [59] А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин Методы решения некорректных задач.– М.:Наука, 1974.
- [60] Тихонов В.И., Миронов В.А. Марковские процессы.– М.: Советское радио, 1977.
- [61] Урясьев С.П. Адаптивные алгоритмы стохастической оптимизации и теории игр.- М.: Наука, 1990.
- [62] Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами.- М.: Мир, 1978.
- [63] Фрейдлин М.И. О гладкости решений вырождающихся эллиптических уравнений // Изв. АН СССР. Сер. матем.– 1962, 26(5).– С. 653-676.
- [64] Фрейдлин М.И. Марковские процессы и дифференциальные уравнения, Итоги науки. Теор. вероятн. Мат. стат. Теор. кибернет.- М.: ВИНТИ, 1966, 1967.– С. 7-58.
- [65] Хида Т. Броуновское движение. - М.: Наука, 1987.
- [66] Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики: В 2-х т. М. Фазис, 1998.

- [67] Шиховцев И.В., Якубов В.П. Статистическая радиофизика. Курс лекций.– Новосибирск: НГУ, 2011.
- [68] Baldi P. Exact asymptotics for the probability of exit from a domain and applications to simulation // The Annals of Probability.– 1995.– Vol. 23, No. 4.– P. 1644–1670.
- [69] Bossy M., Gobet E., Talay D. Symmetrized Euler scheme for an efficient approximation of reflected diffusions // J. Appl. Probab.- 2004.- Vol.41.- No. 3.- P. 877-889.
- [70] Buchmann F.M., Petersen W.P. Solving Dirichlet problems numerically using the Feynman-Kac representation // Ecole polytechnique fédérale de Zurich Politecnico federale di Zurigo Swiss Federal Institute of Technology Zurich. Research Report No. 2002-01. Seminar für Angewandte Mathematik Eidgenössische Technische Hochschule CH-8092 Zürich Switzerland.- February 2002.– P. 23.
- [71] Buchmann F.M. Computing Exit Times with the Euler Scheme // Ecole polytechnique fédérale de Zurich Politecnico federale di Zurigo Swiss Federal Institute of Technology Zurich. Research Report No. 2003-02. Seminar für Angewandte Mathematik Eidgenössische Technische Hochschule CH-8092 Zürich Switzerland.- March 2003.– P. 15.
- [72] Buchmann F.M., Petersen W.P. An Exit Probabiliry Approach to solve high dimensional Dirichlet Problems // Ecole polytechnique fédérale de Zurich Politecnico federale di Zurigo Swiss Federal Institute of Technology Zurich. Research Report No. 2004-09. Seminar für Angewandte Mathematik

Eidgenössische Technische Hochschule CH-8092 Zürich Switzerland.- October 2004.- P. 13.

- [73] Bird R. Byron, Curtiss C. F., Armstrong R. C., Hassager O., Dynamics of Polymeric liquids, Vol. 2, Wiley Interscience, 1987.
- [74] Costantini C., Pacchiarotti P., Sartoretto F. Numerical approximation for functionals for reflected diffusion processes // SIAM J. Appl. Math.- 1998.- Vol. 58.- No. 1.- P. 73-102.
- [75] Dokuchaev N. Estimates for distances between first exit times via parabolic equations in unbounded cylinders // Probab. Theory Relat. Fields.- 2004, V.129, P.290-314.
- [76] Fournie E., Lasry J.M., Lebuchoux J., Lions P.L., Touzi N. Applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance. — Finance Stochast. 1999. v. 3, №4, p. 391-412.
- [77] Friedman A. Stochastic differential equations and applications. Vol.1.- Academic Press, New York, San Francisco, London, 1975.
- [78] Giraud M.T., Sacerdote L., Zucca C. A Monte Carlo method for the simulation of first passage times of diffusion processes// Methodology and Computing in Applied Probability.- 2001.- 3.- P. 215-231.
- [79] E. Gobet Weak approximation of killed diffusion using Euler schemes // Stochastic Processes and their Applications.- 2000.- Vol. 87.- P. 167-197.
- [80] Gobet E. Euler schemes and half-space approximation for the simulation of diffusion in a domain // ESAIM: Probability and Statistics.- 2001.- Vol. 5- P. 261-297.

- [81] Gobet E., Menozzi S. Exact approximation rate of killed hypoelliptic diffusions using the discrete Euler scheme// Stochastic Processes and their Applications.– 2004.– Vol. 112, P. 201–223.
- [82] Gobet E. , Menozzi S. Stopped diffusion process: overshoots and boundary correction// Stochastic Processes and their Applications.–2010.– Vol.120.– P.130–162.
- [83] Gusev S.A., Monakhov O.G. Use of Parallel Computation for Estimation of Coefficients of Heat Equation by Monte Carlo Method // Bulletin of the Novosibirsk Computing Center.-Series: Computer Science.– Issue 10.– NCC Publisher.- Novosibirsk, 1999, P.15–23.
- [84] Gusev S.A. Numerical estimation of the coefficients of the parabolic equation by solving stochastic differential equations// Rus. J. Numer. Anal. Math. Modeling.– 2000.– Vol. 15, No.5.– P.397–404.
- [85] Gusev S. A. Monte Carlo estimates of the solution of a parabolic equation and its derivatives made by solving stochastic differential equations // Proceedings of the CMMSE-2002, Conference, Alicante, Spain, 20-25 September.– 2002.– Vol.I.– P.159-166.
- [86] Gusev S.A. Monte Carlo estimates of the solution of a parabolic equation and its derivatives made by solving stochastic differential equations// Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.– Vol.9, Issue 2.– P. 177–185.
- [87] Gusev S. A. Estimation of the coefficients in the parabolic equation by the statistical simulation of diffusion trajectories // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.- 2003, Vol.18, No 4.– P. 297–306.

- [88] Gusev S.A. Monte Carlo estimation of the solution of the parabolic equation and its parametric derivatives by solving SDE's // Proceedings of the 5th St. Petersburg Workshop on Simulation.- St. Petersburg, Russia, June 26 - July 2, 2005.-NII Chemistry St. Petersburg Univ. Publ.- 2005, P. 299-304.
- [89] Gusev S.A. Using SDE for solving inverse parabolic boundary value problem with a Neumann boundary condition // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling.- 2007.- Vol. 22, No 5, P. 449-470.
- [90] Gusev S.A. Variances of estimates of a diffusion process functional and its (8) derivatives with respect to parameters // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.-2009.- Vol. 24, No 5.- P. 439-454.
- [91] Gusev S.A. Monte Carlo estimation of a functional of a diffusion process with variance reduction by transformation of the corresponding boundary value problem // Proceedings of the 6th St. Petersburg Workshop on Simulation.- St. Petersburg, Russia, June 28 – July 4.- 2009.-Volume I.- P. 128-132.
- [92] Gusev S.A., Nikolaev V.N. Calculation of heat transfer in heterogeneous structures such as honeycomb by using numerical solution of stochastic differential equations // Advanced Materials Research.- 2014.- Vol. 1016.- P. 758-763.
- [93] Gusev S.A. Estimating Parametric Derivatives of First Exit Times of Diffusions by Approximation of Wiener Processes // International Journal of Pure Mathematics.- 2015.- Vol. 2.- P. 55-63.
- [94] Gusev S.A., Nikolaev V.N. Numerical Statistical Modeling of the Thermal State of Aircraft Honeycomb Coatings // Applied Methods of Statistical

Analysis. Nonparametric Approach. AMSA'15. Proceedings of the International Workshop, Novosibirsk, 14–19 September, 2015.– P. 416–423.

- [95] Гусев С.А. Построение оценок математических ожиданий выражений, содержащих производные по параметрам времени первого выхода диффузионного процесса из области.- Труды Международной конференции "Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики - 2015", посвященной 90-летию со дня рождения академика Г.И. Марчука. ИВМиМГ СО РАН. Новосибирск. 19–23 октября 2015 г. [Электрон. ресурс]. Новосибирск: Абвей, 2015.– С. 203–209. ISBN 978-5-9905347-2-8.
- [96] Henderson V., Hobson D. Local time, coupling and the passport option// Finance Stochast.– 2002, V.4, P. 69–80.
- [97] Ito K. On a stochastic integral equation. — Proc. Japan Acad.– 1946, V.22.– P. 32–35.
- [98] Kinater K., McDonald P. Hypersurfaces in \mathbf{R}^d and the variance of exit times for brownian motion// Proceedings AMS.– 1997.– V. 125.– 8.– P. 2453-2462.
- [99] Lamberton D. and Lapeyre B. Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance. U.K.: Chapman and Hall, 1996.
- [100] Lépingle D. Un schéma d'Euler pour équations différentielles stochastiques réfléchies// C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 1993.– 316(6).– P. 601–605.
- [101] Lieberman G.E. Second order parabolic differential equations.- World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2005.
- [102] Lions P.L., Sznitman A.S. Stochastic differential equations with reflected boundary conditions // Comm. Pure Appl. Math.- 1984.– Vol.37.– P. 511–537.

- [103] Maruyama G. Continuous Markov processes and stochastic equations // Rend. Circolo Math. Palermo.– 1955, V.4.– P.48-90.
- [104] Merton R.C. Continuous-time finance. Oxford N.Y.: Blackwell, 1990.
- [105] Metropolis N., Ulam S.M. The Monte Carlo method// J. Amer. Statist. Assoc.– 1949.– V. 44, N 247.– P. 335–341.
- [106] Mikkelsen A., Knudsen R.D., Elgsaeter A. Brownian dynamics simulation of needle spring chains.- Physica A.– 1998, 253.– P. 66–76.
- [107] Montero M., Kohatsu-Higa A. Malliavin calculus applied to Finance.- Physica A.– 2003, 320.– P. 548–570.
- [108] Naess S.N., Elgsaeter A. Transport properties of non-spherical nonparticles studied by Brownian dynamics: theory and numerical simulations.- Energy.– 2007, V.30.– P 831-844.
- [109] Patie P., Winter C. First exit time probability for multidimensional diffusions: A PDE-based approach// J. Comp. Appl. Math.– 2008.–V. 222.– P. 42-53.
- [110] Saisho Y. Stochastic differential equations for multi-dimensional domain with reflecting boundary // Probab. Theory Rel. Fields.– 1987.– Vol.74.- P. 455–477.
- [111] Schmock U., Shreve S.E., Wystup U. Valuation of exotic options under shortselling constraints// Finance Stochast.– 2002, V.6.– P. 143–172.
- [112] Slominski L. On approximation of solutions of multidimensional stochastic differential equations with reflecting boundary conditions // Stochastic Process. Appl.– 1994.– Vol. 50.– P. 197–220.

- [113] Slominski L. Some remarks on approximation of solutions of SDE's with reflecting boundary conditions // Mathematics and Computers in Simulation .- 1995.- Vol.38.- P. 109–117.
- [114] Strook D.W., Varadhan S.R.S. Multidimensional Diffusion Processes.- Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.
- [115] Talay D., Tubaro L. Expansion of the global error for numerical schemes solving Stochastic Differential Equations // Stochastic Analysis and Applications.- 1990.- 8(4).- P. 483–509.
- [116] Tanaka H. Stochastic differential equations with reflected boundary condition in convex regions.- 1979.- Vol.9.- P. 163–177.
- [117] Venkiteswaran G, Junk M. A QMC Approach for High Dimensional Fokker-Planck Equations Modelling Polymeric Liquids// Mathematics and Computers in Simulation.- 2005.- 68(1).- P. 43–56.

ПРИЛОЖЕНИЕ. Акт о внедрении результатов диссертации

УТВЕРЖДАЮ
 Директор ФГУП
 «СибНИА им. С. А. Чаплыгина»
 кандидат технических наук



В. Е. Барсук
 «11» 07 2016 г.
 630051 г. Новосибирск,
 ул. Ползунова, 21,
 тел.: (383) 279-01-56,
 факс: (383) 227-88-77,
 e-mail: sibnia@sibnia.ru

А К Т

внедрения результатов диссертационной работы Сергея Анатольевича Гусева «Оценка математических ожиданий функционалов от диффузионных процессов и их производных по параметрам методом Монте-Карло» на Федеральном государственном унитарном предприятии «Сибирский научно-исследовательский институт авиации имени С. А. Чаплыгина»

Мы, нижеподписавшиеся: научный руководитель института Серьёзов А. Н., начальник научно-исследовательского отделения «Разработка, создание, сопровождение и эксплуатация авиационной техники» Капота А. А., начальник отдела научно-исследовательского отделения «Разработка, создание, сопровождение и эксплуатация авиационной техники» Николаев В. Н. составили настоящий акт об использовании в ФГУП «СибНИА им. С. А. Чаплыгина» метода решения параболической краевой задачи с разрывными коэффициентами на основе численного решения стохастических дифференциальных уравнений.

Проведена разработка и исследование алгоритмов параметрической идентификации модели теплового состояния отсеков и систем летательного аппарата с использованием алгоритма определения теплового состояния гомогенных и гетерогенных конструкций фюзеляжа, в том числе – сотовых конструкций.

Результаты эксперимента теплового состояния сотовой конструкции и расчёта теплового состояния сотовой конструкции по алгоритму с использованием математических ожиданий функционалов от диффузионных процессов методом Монте-Карло находятся в хорошем согласии.

Математические модели теплового состояния отсеков и систем самолётов с использованием алгоритма определения теплового состояния гомогенных и гетерогенных конструкций фюзеляжа применялись при лётных испытаниях транспортного самолёта Ан-74 и фоторазведчика с целью распространения результатов измерений на другие режимы полёта и параметры воздушной среды за бортом, а также при проектировании лёгкого многоцелевого самолёта, магистрального самолёта SuperJet 100, сверхзвукового самолёта: определение оптимальных характеристик системы кондиционирования воздуха, системы вентиляции кабины экипажа и салонов пассажиров и толщины теплоизоляции кабины экипажа и салона пассажиров для обеспечения комфортных условий, оптимизации параметров электротепловой и струйной защиты от запотевания стёкол в кабине и салонах

пассажиров, температуры и расхода воздуха системы обеспечения теплового режима в продуваемом отсеке в соответствии с нормами АП-23, АП-25.

Проведённые в работе теоретические исследования теплового состояния отсеков и систем самолётов с использованием алгоритма определения теплового состояния гомогенных и гетерогенных конструкций фюзеляжа позволяют существенно увеличить достоверность математического моделирования теплового состояния отсеков самолётов и оценивания оптимальных теплофизических характеристик отсеков и систем летательных аппаратов.


Полученные результаты могут быть использованы при проведении исследований теплового состояния и проектирования отсеков и систем летательных аппаратов.

В целом, использование моделей модели теплового состояния отсеков и систем летательного аппарата с использованием алгоритма определения теплового состояния гомогенных и гетерогенных конструкций фюзеляжа позволило в 4...16 раз увеличить информативность результатов лётных испытаний.

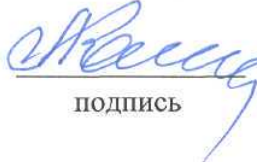
Документация изложена в отчётах ФГУП «СибНИА им. С.А. Чаплыгина» № 14-06, № 15-06, № 16-06, № 52-06, № 53-06, № 22-07, № 22А-07, № 39-07, № 39-13, № 58-13, № 58-14, № 12-15.

Результаты использованы в разработанном программном обеспечении, зафиксированном в Свидетельствах о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2013616848 от 24.07.2013, № 2015617516 от 13.07.2015, правообладатель ФГУП «СибНИА им. С. А. Чаплыгина».

Научный руководитель института
доктор технических наук
профессор
А. Н. Серьёзов


«15» 01 2016 г.
подпись дата

Начальник НИО – 9
А. А. Калюта


«14» января 2016 г.
подпись дата

Начальник отдела НИО – 9
доктор технических наук
В. Н. Николаев


«14» 01 2016 г.
подпись дата