На правах рукописи

Гусев Сергей Анатольевич

Оценка математических ожиданий функционалов от диффузионных процессов и их производных по параметрам методом Монте-Карло

01.01.07 — Вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Новосибирск – 2016

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук.

Официальные оппоненты:

Учайкин Владимир Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Ульяновский государственный университет», заведующий кафедрой теоретической и математической физики.

Григорьев Юрий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт вычислительных технологий СО РАН, главный научный сотрудник.

Перцев Николай Викторович, доктор физико-математических наук, профессор, Омский филиал Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, главный научный сотрудник.

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Защита диссертации состоится 29 сентября 2016 года в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 003.061.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук (ИВМиМГ СО РАН) по адресу: 630090, г. Новосибирск, проспект Академика Лаврентьева, 6.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИВМиМГ СО РАН и на сайте www.sscc.ru

Автореферат разослан 28 июня 2016 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д.ф.-м.н. С.В. Рогазинский

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Задачи эволюционного типа со случайными параметрами, математическое описание которых содержит случайные процессы диффузионного типа, встречаются во многих областях науки и техники. К таким задачам относятся, например, задачи автоматического управления, теории надежности, финансовой математики и др. Их решение обычно сводится к оценке требуемых усредненных характеристик, например, вероятностей каких-либо событий, оценок моментов распределений функционалов от случайных процессов. Как правило, успешное решение такого типа задач возможно с использованием метода статистического моделирования на основе численного решения стохастических дифференциальных уравнений (СДУ).

Известны также применения метода Монте-Карло с использованием решения СДУ и для нахождения решений детерминированных задач таких как, например, линейных эллиптических и параболических уравнений на основе вероятностных представлений их решений. Эти вероятностные представления выражаются в виде математических ожиданий функционалов от решений СДУ (Дынкин Е.Б. Марковские процессы. М.: Физматгиз, 1963. 860с.). Применение метода Монте-Карло в к решению детерминированных задач целесообразно при их большой размерности, т.к. для нахождения решения не требуется построение сетки по пространственным переменным, и с ростом размерности вычислительные затраты растут незначительно. Параболические уравнения большой размерности возникают, например, в задачах финансовой математики (Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т.1. М.: Фазис, 1998. 489с.) и в задачах диффузионной динамики наночастиц и макромолекул (Mikkelsen A. et al. Brownian dynamics symulation of needle spring chains. Physica A. 1998. 253. P. 66–76.).

Применение метода Монте-Карло может быть также полезным, когда требуется найти решение и его производные по параметрам или по пространственным переменным в одной или нескольких точках области, а для решения сеточным методом, в силу особенности решаемой задачи, требуется очень большое количество узлов. Существенным аргументом в пользу методов Монте-Карло является их относительная простота реализации и хорошая эффективность распараллеливания.

Важнейшей характеристикой практически любой математической модели является ее параметрическая чувствительность. Для ее исследования возможны как экспериментальные методы на основе физических экспериментов, так и математические, требующие определения производных по параметрам решений уравнений модели. При этом, как правило, математические методы менее дорогостоящие по сравнению с экспериментальными, но они требуют дополнительных теоретических исследований и построения алгоритмов расчета.

В задачах, в которых основную роль играют случайные процессы, определение параметрической чувствительности сводится к нахождению математических ожиданий производных по параметрам функционалов от этих случайных процессов. При этом, если по условиям задачи требуется, чтобы случайный процесс находился в заданной в области, важное значение имеют заданные граничные условия. Так, например, если на границе задано условие поглощения, то при вычислении производных следует учитывать производную по параметрам времени первого выхода диффузионного процесса из области. Если на границе задано условие отражения, то следует учитывать зависимость от параметров локального времени пребывания диффузионного процесса на границе.

Основные цели диссертационной работы:

- Исследование возможности дифференцирования по параметрам математических ожиданий функционалов от диффузионных процессов в областях с поглощающими и отражающими границами.
- Разработка методов на основе численного решения СДУ оценки математических ожиданий функционалов от диффузионных процессов и их производных по параметрам.

Методы исследования. В данной работе использовались методы теории вероятностей, методы численного моделирования и анализа стохастических дифференциальных уравнений, методы оптимизации, методы функционального анализа, методы теории решения обратных задач, методы исследования краевых задач для параболических уравнений.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми. В работе впервые найден способ вычисления производных по параметрам математических ожиданий функционалов от диффузионных процессов, содержащих время первого выхода процесса из области, на основе которого построены два метода определения оценок производных по параметрам математических ожиданий функционалов от диффузионных процессов в областях с поглощающими границами. Исследована возможность дифференцирования по параметрам функционалов от диффузионных процессов с условием отражения на границе и разработан численный метод для получения оценок производных по параметрам математических ожиданий таких функционалов. Получена формула для предельного значения дисперсии оценки математического ожидания функционала от диффузионного процесса при убывании длины шага в методе Эйлера. Разработан метод уменьшения дисперсии функционалов от диффузионных процессов, использующий преобразование краевой задачи для параболического уравнения. Разработан метод для получения оценок решения параболического уравнения с разрывными коэффициентами, основанный на численном решении СДУ.

Теоретическая ценность и практическая значимость. В диссертации показана возможность дифференцирования по параметрам математических ожиданий функционалов от диффузионных процессов в областях с условиями поглощения и отражения на границе. В случае поглощающих границ получены формулы для для определения производных по параметрам математических ожиданий функционалов, содержащих время первого выхода диффузионного процесса из области. Следует отметить, что эти формулы не содержат производные по параметрам от времени первого выхода процесса из области. Основной проблемой, которая возникает при дифференцировании математических ожиданий функционалов в случае отражающих границ, является необходимость дифференцирования по параметрам локального времени пребывания диффузионного процесса на границе. Автором показано, что при определенных условиях на входные данные задачи такое дифференцирование возможно. На этой основе был разработан метод для определения производных функционалов от диффузионных процессов в случае, когда на границе задано условие отражения.

В диссертации на основе полученной формулы для дисперсии функционалов от диффузионных процессов построен метод минимизации дисперсии таких функционалов.

Разработанные автором методы определения производных по параметрам могут применяться для решения задач параметрической оптимизации градиентными методами. В работе такая оптимизация используется при решении обратной задачи для уравнения теплопроводности и в задаче минимизации дисперсии.

В диссертации разработан метод на основе численного решения СДУ, с помощью которого можно определять решения краевых задач для параболических уравнений с разрывными коэффициентами в заданных точках области. Данный метод используется на практике для определения теплового состояния теплозащитных покрытий фюзеляжей самолетов, содержащих теплозащитные панели сотового типа.

Основные результаты, выносимые на защиту:

1. Получены две формулы для вычисления производных по параметрам математических ожиданий функционалов от диффузионных процессов, содержащих время первого выхода случайного процесса из области. На основе этих формул построены два метода для получения оценок производных по параметрам математических ожиданий функционалов от диффузионных процессов с условием поглощения на границе.

2. Построен метод оценки производных по параметрам математических ожиданий функционалов от диффузионных процессов в областях с условием отражения на границе.

3. Получена формула для предельного значения дисперсии оценки математического ожидания функционала от диффузионного процесса при убывании длины шага в методе Эйлера.

4. Разработан метод минимизации дисперсии оценки математического ожидания функционала от диффузионного процесса, основанный на преобразовании краевой задачи для параболического уравнения.

5. Разработан метод оценки решений краевых задач для уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами.

6. Решена задача оценки теплового состояния сотовых конструкций фюзеляжа самолета на основе численного решения СДУ.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы неоднократно докладывались и обсуждались на семинаре "Методы Монте-Карло в вычислительной математике и математической физике"под руководством чл.-корр. РАН Г.А. Михайлова в ИВМиМГ СОРАН, докладывались на семинаре кафедры теории вероятностей МАИ под руководством д.ф.-м.н., проф. А.И. Кибзуна, докладывались на четвертом , пятом и шестом Санкт-Петербургских семинарах по стохастическому моделированию (Санкт Петербург, 2001, 2005, 2009 гг.); на международной конференции по вычислительным методам "International Conference on Computational Methods in Science and Engeneering CMMSE -(CMMSE-2002)"(Аликанте, Испания, 2002 г.); на четвертом международном семинаре по методам Монте-Карло "IVth IMACS Seminar on Monte Carlo methods September 15-19, 2003, Berlin"(Берлин, Германия, 2003 г.); на международной конференции, посвященной 100-летию академика И.И. Векуа "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения"(Новосибирск, 2007 г.); на международной конференции, посвященной 100-летию С.Л. Соболева "Дифференциальные уравнения, функциональные пространства, теория приближений"(Новосибирск, 2008 г.); на восьмом Всемирном конгрессе по вычислительной механике "8th World Congress on Computational Mechanics WCCM8"и пятом Европейском конгрессе по вычислительным методам в прикладных науках и технике "5th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering ECCOMAS 2008"(Венеция, Италия, 2008 г.); на пятой международной конференции по машиностроению и аэрокосмической технике "The 5th International Conference on Mechanical and Aerospace Engineering (ICMAE 2014)"(Мадрид, Испания, 2014 г.); на международных конференциях "Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики": АПВМ2014, АПВМ2015 (Новосибирск, 2014, 2015 гг.); на 19-й конференции по системотехнике и компьютерным технологиям "19th International Conference on Circuits, Systems, Communications and Computers, (CSCC 2015)" (Закинтос, Греция, 2015 г.); по прикладным методам статистического анализа "AMSA 2015"(Новосибирск, 2015 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 21 работ. Из них 12 работ опубликовано в журналах, рекомендованных ВАК. Список работ автора по теме диссертации приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения, списка литературы и приложения. Общий объем рпботы составляет 188 страниц.

Содержание работы

Во **введении** содержится вводная информация по теме исследования, сформулированы основные цели исследования, дано описание структуры диссертации, включая краткое описание содержания по главам.

Глава 1 посвящена разработке методов оценки производных по параметрам математических ожиданий функционалов от диффузионных процессов в областях с условием поглощения на границе. Результаты первой главы опубликованы и использованы в работах автора 1 – 3, 6 – 8, 10 – 17, 19, 21. В **п. 1.1** даны основные обозначения и определения, и сделаны основные предположения относительно исходных данных.

Основные обозначения:

$G \subset \mathbf{R}^d$ – ограниченная область с регулярной границей ∂G;

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство;

$\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$, $t \geq 0$ — не убывающая последовательность σ-алгебр $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$, $t \geq 0$;

$W_{\bullet}$— d-мерный винеровский процесс, согласованный с $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$;

$\mathrm{E}_{t,x}$ — обозначение математического ожидания относительно вероятностной меры $\mathrm{P}_{t,x}$, соответствующей случайному процессу, исходящему в момент времени t из точки x;

$Q_T \equiv (0,T) \times G; \qquad S_T \equiv [0,T] \times \partial G.$

Пусть задан d-мерный диффузионный процесс $X_{\bullet}$, зависящий от векторного параметра $\theta \in U \subset \mathbf{R}^m$ (U – открытое множество), который при $(t,x) \in Q_T$ описывается следующим СДУ

$$X_s(\theta) = x + \int_t^s a(v, X_v(\theta), \theta)dv + \int_t^s \sigma(v, X_v(\theta), \theta)dW_v, \qquad (1)$$

где $a : [0,\infty) \times \mathbf{R}^d \times U \to \mathbf{R}^d$ и $\sigma : [0,\infty) \times \mathbf{R}^d \times U \to \mathbf{R}^{d\times d}$ — измеримые функции.

Предполагается, что коэффициенты СДУ (1) удовлетворяют условию

А) существует константа $\mathcal{K}$ такая, что для всех $\theta \in U$, $v \geq 0$, $x, y \in \mathbf{R}^d$, $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ выполняются неравенства

$$a_i(v,x,\theta)^2 + \sigma_{ij}(v,x,\theta)^2 \leq \mathcal{K}^2(1+|x|^2),$$

$$|a_i(v,x,\theta) - a_i(v,y,\theta)| + |\sigma_{ij}(v,x,\theta) - \sigma_{ij}(v,y,\theta)| \leq \mathcal{K}|x-y|.$$

В главе 1 решается задача определения производных по θ математических ожиданий вида

$$u(t,x,\theta) = \mathrm{E}_{t,x}\big[\varphi(X_T(\theta),\theta)\chi_{\tau>T} + \psi(\tau, X_\tau, \theta)\chi_{\tau<T} + \int\limits_t^{T\wedge\tau} f(v, X_v(\theta),\theta)dv\big], \tag{2}$$

где $\tau = \inf\{v|\ \ v > t,\ \ X_v \notin G\}$ – время первого выхода $X_{\boldsymbol{\cdot}}$ из области, χ_A – индикаторная функция множества A.

При некотором фиксированном $\theta \in U$ значение математического ожидания в (2) совпадает с решением в точке $(t,x) \in Q_T$ следующей краевой задачи для параболического уравнения

$$Lu + f(t,x,\theta) = 0, \quad t \in (0,T), \quad (t,x) \in Q_T, \tag{3}$$

$$u(T,x,\theta) = \varphi(x,\theta), \quad x \in G, \tag{4}$$

$$u(t,x,\theta) = \psi(t,x,\theta), \ \ (t,x) \in S_T, \tag{5}$$

где L — оператор

$$L \equiv \partial_t + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} b_{ij}(t,x,\theta)\partial^2_{x_i,x_j} + \sum_{i=1}^{d} a_i(t,x,\theta)\partial_{x_i}, \tag{6}$$

b_{ij} – элементы матрицы $B \equiv \sigma\sigma^{\mathrm{T}}$.

Дополнительно к условию **А** вводятся следующие предположения:

Б) матричная функция $B(t,x,\theta) = (b_{ij}(t,x,\theta))$ в рассматриваемом параболическом операторе удовлетворяет при всех $(t,x) \in Q_T$, $\theta \in U$ условию:

$$B(t,x,\theta) > \alpha_0 I \tag{7}$$

для некоторого $\alpha_0 > 0$;

В) существуют непрерывные производные $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}$ при любых $(x,\theta) \in Q \times U$;

Г) функция f непрерывна на $[0,T] \times \overline{Q}_T$ при любом $\theta \in U$ и существуют непрерывные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial\theta}$ при любых $(t,x,\theta) \in Q_T \times U$.

Д) производные

$$\frac{\partial a}{\partial x},\ \frac{\partial a}{\partial\theta_i},\ \frac{\partial\sigma}{\partial x},\ \frac{\partial\sigma}{\partial\theta_i},\ \frac{\partial a}{\partial t},\ \frac{\partial\sigma}{\partial t}$$

непрерывны и ограниченны в $[0,\infty) \times \mathbf{R}^d \times U$;

Е) граница ∂G класса $\mathbf{C}^3$.

В **п. 1.2** рассмотрено применение метода Эйлера для получения оценок математических ожиданий типа (2).

В **п. 1.3** рассматривается задача дифференцирования по скалярному параметру θ математического ожидания типа (2). Основная проблема при вычислении производных (2) связана с необходимостью учитывать зависимость τ от θ и доказательством существования предела

$$\Phi(\theta) := \lim_{\Delta\theta\to 0} \mathrm{E}_{t,x}\Big(\frac{\tau(\theta+\Delta\theta)-\tau(\theta)}{\Delta\theta}\big(f(\tau,X_\tau,\theta) + \frac{\partial\psi}{\partial t}(\tau,X_\tau\theta)\big)\chi_{\tau<T}\Big). \qquad (8)$$

В **п. 1.4** изложен метод FBVP1[1] для определения оценок производных вида $\partial u/\partial\theta$. Метод FBVP1 основан на применении формулы Ито к некоторой достаточно гладкой функции $g(x)$ и последующему дифференцированию по θ получающегося равенства.

Поскольку формула Ито содержит недифференцируемый интеграл Ито по верхнему пределу, то предлагается аппроксимировать приращения винеровского процесса с помощью стационарного гауссовского процесса λ с экспоненциальной корреляционной функцией

$$R_\lambda(t_1,t_2) = D\cdot\exp(-\beta|t_2-t_1|). \qquad (9)$$

Процесс λ с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функ-

[1] FPVP – first boundary value problem

цией (9) является решением СДУ

$$d\lambda = -\beta\lambda dv + \vartheta dW(v) \quad , \tag{10}$$

где $\lambda(0) = \lambda_0$ – случайная величина из $\mathbf{N}(0, \frac{\vartheta}{\sqrt{2\beta}})$. При таком выборе λ_0 процесс λ имеет постоянную дисперсию $D = \frac{\vartheta^2}{2\beta}$. Точное решение СДУ (10) записывается в виде

$$\lambda(t) = e^{-\beta t}\lambda_0 + e^{-\beta t}\int\limits_0^t e^{\beta s}\vartheta dW(s). \tag{11}$$

Пусть для случайной функции f определен стохастический интеграл Ито. При этом либо $f(t_0)$ – детерминированная величина, либо случайная величина, не зависящая от λ_0. Обозначим $I_W^h(f) \equiv \sum\limits_{n=0}^{N-1} f(t_n)\Delta W_{t_n}$, где $\Delta W_{t_n} = W(t_{n+1}) - W(t_n)$, и $I_\lambda^h(f) \equiv h\sum\limits_{n=0}^{N-1} f(t_n)\lambda(t_{n+1})$ — интегральные суммы на равномерной сетке с шагом $h = \frac{T}{N}$.

Теорема 1 *Пусть процесс λ является решением СДУ*

$$d\lambda = -\beta\lambda dv + \sqrt{\frac{2\beta}{h(1-e^{-2\beta h})}}dW(v). \tag{12}$$

Тогда при фиксированном $h > 0$ для значений процесса λ в узлах сетки справедливо представление

$$\lambda(t_{n+1}) = \varepsilon_n + \frac{1}{\sqrt{h}}\xi_n, \quad n = 0, \dots, N,$$

где ε_n – нормально распределенные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\frac{\exp(-2\beta h)}{h\left(1-\exp(-2\beta h)\right)}$; ξ_n – взаимно независимые нормально распределенные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Пусть f – случайная функция такая, что при каждом $v \in [0,T]$ она $\mathcal{F}_v$-измерима, и в каждой точке отрезка $[0,T]$ функция f с.к. непрерывна. Тогда имеет место сходимость по распределению $I_\lambda^h(f) \to I_w^h(f)$ при $\beta \to \infty$.

В доказательстве теоремы 1 используется разложение

$$\lambda((n+1)h) = \varepsilon_n + \gamma_n, \text{ где} \tag{13}$$

$$\varepsilon_n = e^{-\beta(n+1)h}\lambda_0 + e^{-\beta(n+1)h}\int\limits_0^{nh} e^{\beta s}\vartheta dW(s),\ \ \gamma_n = e^{-\beta(n+1)h}\int\limits_{nh}^{(n+1)h} e^{\beta s}\vartheta dW(s),$$

$\vartheta = \left(\frac{2\beta}{h\left(1-e^{-2\beta h}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}$. Причем случайные величины ε_n коррелированы, нормально распределены и имеют нулевое математическое ожидание и дисперсию $D_{\varepsilon_n} = \frac{e^{-2\beta h}}{h(1-e^{-2\beta h})}$, а случайные величины γ_n взаимно независимы и нормально распределены с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $D_{\gamma_n} = \frac{1}{h}$. Случайные величины $h\gamma_n$ имеют такое же распределение, как и приращения на отрезке длиной h винеровского процесса, который обозначается W^γ.

Из доказательства теоремы 1 следует, что определенный в ней процесс λ может быть использован для аппроксимации приращений винеровского процесса на равномерной сетке с длиной шага h. При этом из формулы (11) точного решения СДУ (10) получается уравнение, связывающее значения процесса λ в двух последующих узлах

$$\lambda(t_{n+1}) = e^{-\beta h}\lambda(t_n) + \vartheta_h e^{-\beta t_{n+1}}\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} e^{\beta s} dW_s, \tag{14}$$

где $\vartheta_h = \sqrt{\frac{2\beta}{h(1-e^{-2\beta h})}}$, $\lambda(t_n) \in \mathrm{N}(0, \frac{\vartheta_h}{\sqrt{2\beta}})$.

По имеющейся последовательности ступенчатых функций $\{f_m\}$, заданных на равномерных сетках с последовательностью длин шага $\{h_m\}$, в работе строится последовательность функций, заданных на этой же сетке

$$f_m^\lambda(t,\omega) = \sum_{n=0}^{n_t-1} f(t_n,\omega)\lambda^{h_m}(t_n,\omega)\chi_{t\in[t_n,t_{n+1})} + f(t_{n_t},\omega)\lambda^{h_m}(t_{n_t},\omega)\chi_{t\geq t_{n_t}}, \tag{15}$$

где $n_t = [\frac{t}{h_m}]$.

Для аппроксимации интегралов Ито по процессу W^γ с.к. интегралами, содержащими процесс λ в работе используется оператор сдвига Θ_h в пространстве элементарных событий Ω (Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. М.: Наука, 1996. 400с.). Предполагается, что для любого $\omega \in \Omega$ и любого $h \in \mathbf{R}^1$ существует единственное элементарное событие $\omega_h^+ \in \Omega$ такое, что $\omega_h^+ = \Theta_h(\omega)$. При этом для всех $v \in [0,T]$ выполняется равенство

$\lambda(v,\omega_h^+) = \lambda(v+h,\omega)$. Применение оператора сдвига в работе сопровождается обозначением $\lambda^h(v,\omega) \equiv \lambda(v,\omega_h^+)$.

Теорема 2 *Пусть f – с.к. непрерывная случайная функция на $[0,T]$, и λ – случайный процесс, который является решением СДУ*

$$d\lambda = -\beta\lambda dv + \sqrt{\frac{2\beta}{h(1-e^{-2\beta h})}}dW(v).$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно задать параметры h, β и функцию f_m^λ вида (15) такие, что равномерно по $t \in [0,T]$ будет выполняться неравенство

$$\mathrm{E}\Big|\int\limits_0^t f(v)dW^\gamma(v) - \int\limits_0^t f_m^\lambda(v)dv\Big| \le \varepsilon. \tag{16}$$

Лемма 1. *Для любого целого $p \ge 1$ имеет место сходимость*

$$\mathrm{E}_{t,x}|\tau(\theta+\Delta\theta) - \tau(\theta)|^p \to 0 \text{ при } \Delta\theta \to 0 \ . \tag{17}$$

Лемма 2. *Существует постоянная $K > 0$, такая, что при $\Delta\theta > 0$*

$$\mathrm{E}_{t,x}\Big|\tau(\theta+\Delta\theta) - \tau(\theta)\Big| < K\Delta\theta. \tag{18}$$

Лемма 3. *Пусть $f(t,x)$ функция, определенная на Q_T, дважды непрерывно дифференцируемая по x и один раз непрерывно дифференцируемая по t. Тогда можно задать ступенчатую функцию f_m^λ вида (15) и значение параметра β такое, что равномерно по $t \in [0,T]$ будет выполняться неравенство*

$$\Bigg|\mathrm{E}\Big[\int\limits_0^t f(v,X_v)\lambda^{h_m}(v)dv - \int\limits_0^t f_m^\lambda(v,X_v)dv\Big]\Bigg| \le Ch_m^{\frac{1}{2}} \ . \tag{19}$$

для некоторого $C > 0$.

Теорема 3 *Пусть заданы случайные процессы $\lambda_j(v)$, $j = 1,\dots,d$ ($v \ge t$), являющиеся решениями СДУ*

$$d\lambda_j = -\beta\lambda_j dv + \sqrt{\frac{2\beta}{h(1-e^{-2\beta h})}}dW_j(v), \quad \lambda_j(t) \in \mathrm{N}\Big(0, \frac{\vartheta}{\sqrt{2\beta}}\Big), \tag{20}$$

где W_j – взаимно независимые винеровские процессы.

Пусть существует дважды непрерывно дифференцируемая по x и непрерывно дифференцируемая по t, функция $g(t,x)$, которая равна нулю на границе ∂G, а функции Lg и $\sum\limits_{ij} \frac{\partial g}{\partial x_i}\sigma_{ij}$ не равны нулю одновременно при *любых* $(t,x,\theta)\in S_T\times U$. *Пусть коэффициенты уравнения (1) и функции* φ, f *удовлетворяют условиям* $\mathbf{A}$ – $\mathbf{E}$. *Тогда для заданного* $\varepsilon>0$ *найдутся такие значения параметров* β, h *СДУ (20), что для* $\frac{\partial u}{\partial\theta}$ *при* $(t,x)\in Q_T$ *справедливо неравенство*

$$\Bigg|\frac{\partial u}{\partial\theta}(t,x)-\mathrm{E}_{t,x}\Big[\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(X_T,\theta)Z_T+\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(X_T,\theta)\Big)\chi_{\tau>T}$$

$$+\Big(\frac{\partial\psi}{\partial x}(\tau,X_\tau,\theta)Z_\tau+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}(\tau,X_\tau,\theta)\Big)\chi_{\tau<T}$$
$$+\int\limits_t^{T\wedge\tau}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(v,X_v,\theta)Z_v+\frac{\partial f}{\partial\theta}(v,X_v,\theta)\Big)dv$$
$$-\Big(\frac{f(\tau,X_\tau,\theta)+\frac{\partial\psi}{\partial t}(\tau,X_\tau,\theta)}{R(\tau,X_\tau,\theta)}\int\limits_t^{\tau}\frac{d}{d\theta}R(v,X(v),\theta)dv\Big)\chi_{\tau<T}\Big]\Bigg|\le\varepsilon,\quad(21)$$

где

$$R(v,X(v),\theta)=\Big(Lg+\sum_{ij}\frac{\partial g}{\partial x_i}\sigma_{ij}\lambda_j^h\Big)\Big|_{(v,X(v),\theta),}.\qquad(22)$$

В **п. 1.5** даны формулы для моделирования траекторий случайных процессов X, λ_j

$$\overline{X}_{t_{n+1}}=\overline{X}_{t_n}+ha^n+\sum_{j=1}^{d}\sigma_j^n\Delta_nW_j^\gamma,\quad\Delta_nW_j^\gamma=\sqrt{h}\xi_j^n,\qquad(23)$$

где $\xi_j^n\in\mathrm{N}(0,1)$ – взаимно независимые;

$$\overline{\lambda}_{j,t_{n+1}}=e^{-\beta h}\overline{\lambda}_{j,t_n}+\frac{\Delta_nW_j^\gamma}{h},\quad\overline{\lambda}_{j,t_0}\in\mathrm{N}\left(0,\frac{\vartheta}{\sqrt{2\beta}}\right),\vartheta=\sqrt{\frac{2\beta}{h(1-e^{-2\beta h})}}\ .\qquad(24)$$

В **п. 1.6** представлены результаты численного эксперимента, в котором определены с помощью метода FBVP1 оценки решения и его производных по параметрам краевой задачи для параболического уравнения с известным точным решением.

В **п. 1.7** дано описание метода FBVP2 для определения оценок производных вида $\partial u/\partial\theta$

Метод FBVP2 так же как и метод FBVP1 основан на применении формулы Ито к функции g, равной нулю на границе. При этом дополнительно требуется, чтобы были равны нулю на границе первые производные функции g по пространственным переменным. Для оценки производных $\partial u/\partial\theta$ методом FBVP2 требуется выполнение условий $\mathbf{Д}'$, $\mathbf{E}'$

$\mathbf{Д}'$) производные

$$\frac{\partial a}{\partial x},\ \frac{\partial^2 a}{\partial x^2},\ \frac{\partial a}{\partial\theta_i},\ \frac{\partial^2 a}{\partial x\partial\theta_i},\ \frac{\partial\sigma}{\partial x},\ \frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2},\ \frac{\partial\sigma}{\partial\theta_i},\ \frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial\theta_i},\ \frac{\partial a}{\partial t},\ \frac{\partial\sigma}{\partial t}\ ;$$

непрерывны и ограниченны в $[0,\infty)\times\mathbf{R}^d\times U$;

$\mathbf{E}'$) граница ∂G класса $\mathbf{C}^4$.

Теорема 4. *Пусть коэффициенты уравнения (1) и функции φ, ψ, f удовлетворяют условиям $\mathbf{A}-\mathbf{Г}$, $\mathbf{Д}'$, $\mathbf{E}'$. Тогда для $\frac{\partial u}{\partial\theta}$ справедливо равенство*

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial\theta}(t,x)=\mathrm{E}_{t,x}\Big[&\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(X_T,\theta)Z_T+\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(X_T,\theta)\Big)\chi_{\tau>T}\\&+\Big(\frac{\partial\psi}{\partial x}(\tau,X_\tau,\theta)Z_\tau+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}(\tau,X_\tau,\theta)\Big)\chi_{\tau<T}\\&+\int\limits_t^{T\wedge\tau}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(v,X_v,\theta)Z_v+\frac{\partial f}{\partial\theta}(v,X_v,\theta)\Big)dv\Big]+\Phi(\theta)\ ,\end{aligned}\tag{25}$$

где $\Phi(\theta)$ есть предел в (8) и он определяется из равенства

$$\begin{aligned}\Phi(\theta)=-\mathrm{E}_{t,x}\Big[\chi_{\tau<T}&\frac{f(\tau,X_\tau,\theta)+\frac{\partial\psi}{\partial t}(\tau,X_\tau,\theta)}{(Lg)_\tau}\Big(\int\limits_t^\tau\frac{d}{d\theta}\Big(Lg\Big)_v dv\\&+\int\limits_t^\tau\frac{d}{d\theta}\Big(\sum_{l,j}\frac{\partial g}{\partial x_l}\sigma_{lj}\Big)_v dW_j(v)\Big)\Big],\end{aligned}\tag{26}$$

в котором в качестве g можно выбрать любую функцию класса $\mathbf{C}^4(\mathbf{R}^d)$, равную нулю на ∂G вместе со своими первыми производными, но при этом значения Lg не обращаются в ноль на ∂G для всех $\theta\in U$.

Предложенные в диссертации методы FBVP1 и FBVP2 различаются указанными в теоремах 3 и 4 способами определения предела (8). В **п. 1.8** дан анализ погрешности при вычислениях методом Эйлера значения $\frac{\partial u}{\partial\theta}$, которое получается по формулам (25), (26) в теореме 4.

В **главе 2** рассматриваются вопросы численного моделирования и оценок производных по параметрам функционалов от диффузионных процессов в областях с отражающими границами. Результаты второй главы опубликованы и использованы в работах автора 4, 5, 9, 12, 17, 18, 20. Предполагается, что G – выпуклая область в $\mathbf{R}^d$, в которой задан зависящий от параметра $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ диффузионный процесс $X_{\boldsymbol{.}}$ с условием отражения на границе ∂G в направлении внутренней нормали. Процесс $X_{\boldsymbol{.}}$ описывается системой СДУ

$$X_s = x + \int\limits_t^s a(v, X_v, \theta) dv + \int\limits_t^s \sigma(v, X_v, \theta) dW_v + k_s, \tag{27}$$

$$k_s = \int\limits_t^s n(X_v) d|k_v|, \quad |k_s| = \int\limits_t^s \chi_{\partial G}(X_v) d|k_v|, \tag{28}$$

где $n(y)$ – единичный вектор внутренней нормали в точке $y \in \partial G$; $|k_{\boldsymbol{.}}|$ – локальное время процесса $X_{\boldsymbol{.}}$ на ∂G. Во второй главе решается задача получения оценок математических ожиданий и их производных по параметрам вида

$$u(t, x, \theta) = \mathrm{E}_{t,x}\big(\varphi(X_T, \theta) Y_T(\theta) + Z_T(\theta)\big), \tag{29}$$

где $Y_T(\theta)$, $Z_T(\theta)$ — значения при $s = T$ функций

$$Y_s(\theta) = \exp(\int\limits_t^s c(v, X_v, \theta) dv + \int\limits_t^s \eta(v, X_v, \theta) d|k_v|), \tag{30}$$

$$Z_s(\theta) = \int\limits_t^s f(v, X_v, \theta) Y_v dv + \int\limits_t^s \gamma(v, X_v, \theta) Y_v d|k_v|. \tag{31}$$

Значение $u(t, x, \theta)$ при любом $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ совпадает с решением следующей краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d b_{ij}(t, x, \theta) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d a_i(t, x, \theta) \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

$$+ c(t, x, \theta) u + f(t, x, \theta) = 0, \quad t \in [0, T], \quad x \in G, \tag{32}$$

$$u(T, x, \theta) = \varphi(x, \theta), \qquad x \in G, \tag{33}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \eta(t, x, \theta) u + \gamma(t, x, \theta) = 0, \qquad x \in \partial G. \tag{34}$$

Во второй главе делаются следующие предположения:

А2) область G выпуклая, ограниченная класса $\mathbf{C}^3$. При этом существует функция $\Gamma(x) \in \mathbf{C}^3$ такая, что $\Gamma(x) > 0$ при $x \in G$, $\Gamma(x) = 0$ при $x \in \partial G$ и $\inf\limits_{x\in\partial G} | \bigtriangledown \Gamma| > 0$ (здесь $|\cdot|$ – евклидова норма в $\mathbf{R}^d$);

Б2) при всех рассматриваемых значениях θ матричная функция $B(t,x,\theta) = (b_{ij}(t,x,\theta))$ удовлетворяет равномерно по всем своим аргументам *условию регулярности*:

$$B(t,x,\theta) \geq \alpha_0 I$$

для некоторого $\alpha_0 > 0$;

В2) функции a, σ ограниченные и существует константа $\mathcal{K}$ такая, что для всех $\theta \in (\theta_1,\theta_2)$, $v \geq 0$, $x,y \in \mathbf{R}^d$, $i,j \in \{1,\dots,d\}$ выполняется неравенство

$$|a_i(v,x,\theta) - a_i(v,y,\theta)| + |\sigma_{ij}(v,x,\theta) - \sigma_{ij}(v,y,\theta)| \leq \mathcal{K}|x-y|.$$

Г2) производные $\partial a_i/\partial x_k$, $\partial\sigma_{ij}/\partial x_k$, $\partial a_i/\partial\theta$, $\partial\sigma_{ij}/\partial\theta$ $(i,j,k = 1,\dots,d)$ ограничены на $[0,T] \times \bar{G} \times (\theta_1,\theta_2)$.

В **п. 2.1** рассмотрено применение метода Эйлера для получения оценок математического ожидания (29). Для моделирования процесса $X_{\boldsymbol{.}}$ численная схема метода Эйлера записывается следующим образом

$$X^{\Delta}_{i+1} = \overline{X}_i + ha_i + \sqrt{h}\sigma_i\xi_i, \tag{35}$$

$$\overline{X}_{i+1} = X^{\Delta}_{i+1} + (\Delta_{i+1}K)n_i, \tag{36}$$

$$\overline{k}_{i+1} = \overline{k}_i + \Delta_{i+1}K, \tag{37}$$

где ξ_i – нормальные $\mathbf{N}(0,1)$ случайные величины; $\Delta_{i+1}K = [d(X^{\Delta}_{i+1})]^-$. Функциям (30), (31) ставятся в соответствие их сеточные аналоги $\overline{Y}_i$, $\overline{Z}_i$

$$\overline{Y}_i = \begin{cases} 1, \quad i=0, \\ \exp(\sum\limits_{k=0}^{i-1}(hc_k + \eta_k\chi_{\partial G}(\overline{X}_k)\Delta_{k+1}K)), \quad i=1,\dots,N, \end{cases} \tag{38}$$

$$\overline{Z}_i = \begin{cases} 0, \quad i=0, \\ \sum\limits_{k=0}^{i-1}(hf_k + \gamma_k\chi_{\partial G}(\overline{X}_k)\Delta_{k+1}K)\overline{Y}_k, \quad i=1,\dots,N. \end{cases} \tag{39}$$

В качестве приближенного значения (29) принимается значение

$$u^h(t,x) = \mathbf{E}_{t,x}(\varphi(\overline{X}_N)\overline{Y}_N + \overline{Z}_N), \tag{40}$$

Показано, что погрешность приближенного решения (40) есть величина порядка $O(\sqrt{h})$.

В **п. 2.2** рассмотрено дифференцирование по параметру уравнения Скорохода (27). Задача дифференцирования по параметру сначала рассматривается для детерминированного случая. Пусть дана неслучайная функция $r: \ [0,T] \times [\theta_1, \theta_2] \to \mathbf{R}^d$. Предполагается, что для r выполнено условие:
Д2) функция r непрерывна по t на $[0,T]$ и имеет производную по θ в каждой точке интервала (θ_1, θ_2), непрерывную по t и по θ.

Решение уравнения Скорохода состоит в нахождении непрерывной функции $\mu : [0,T] \times [\theta_1, \theta_2] \to \bar{G}$ и функции ограниченной вариации $k : [0,T] \times [\theta_1,\theta_2] \to \mathbf{R}^d$ таких, что $k_i(0,\theta) = 0$ $(i = 1,\dots,d)$ при всех $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, и k изменяется только когда $\mu \in \partial G$. При этом для всех $(t,\theta) \in [0,T] \times [\theta_1,\theta_2]$ должны выполняться равенства:

$$\mu = r + k, \tag{41}$$

$$|k(t,\theta)| = \int\limits_0^t \chi_{\partial G}(\mu(s,\theta)) d|k(s,\theta)|, \quad k(t,\theta) = \int\limits_0^t n(\mu(s,\theta)) d|k(s,\theta)|, \tag{42}$$

где $|k(t,\theta)|$ при фиксированном θ есть полная вариация функции $k(t,\theta)$ на отрезке $[0,t]$.

Обоснование дифференцируемости по параметру решения уравнения (41) сначала рассматривается для ступенчатых функций. Задается равномерное разбиение $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ отрезка $[0,T]$ с шагом $h = t_i - t_{i-1} = 1/2^m$, $(i = 1,\dots,N-1)$, где число узлов разбиения $N = [2^m T]$, если $2^m T - [2^m T] = 0$ и $N = [2^m T] + 1$ в противном случае. Непрерывная функция $r(t,\theta)$ на отрезке $[0,T]$ равномерно по $\theta \in [\theta_1,\theta_2]$ может быть аппроксимирована ступенчатыми функциями, которые определяются по правилу: $r_m(t,\theta) = r(k2^{-m},\theta)$ при $k2^{-m} \le t < (k+1)2^{-m}$, $k = 0,\dots,N-1$.

Для уравнения Скорохода $\mu_m = r_m + k_m$ решение записывается явно

$$\mu_m(t,\theta) = \begin{cases} r_m(0,\theta), \quad 0 \le t < \frac{1}{2^m}, \\ \rho\big(\mu_m(\frac{i-1}{2^m},\theta) + \Delta r_m(\frac{i}{2^m})\big), \quad \frac{i}{2^m} \le t < \frac{i+1}{2^m}, \end{cases} \tag{43}$$

$$k_m(t,\theta) = \begin{cases} 0, \qquad 0 \le t < \frac{1}{2^m}, \\ k_m(\frac{i-1}{2^m},\theta) + \rho\big(\mu_m(\frac{i-1}{2^m},\theta) + \Delta r_m(\frac{i}{2^m},\theta)\big) \\ \qquad -\mu_m(\frac{i-1}{2^m},\theta) - \Delta r_m(\frac{i}{2^m},\theta), \quad \frac{i}{2^m} \le t < \frac{i+1}{2^m}, \end{cases} \tag{44}$$

где $\Delta r_m(\frac{i}{2^m},\theta) = r_m(\frac{i}{2^m}) - r_m(\frac{i}{2^m} - 0)$.

В работе показано, что функции r_m, k_m дифференцируются по параметру и эти производные имеют вид

$$\partial_\theta\mu_m(t,\theta) = \begin{cases} \partial_\theta r_m(0,\theta), \quad 0 \le t < \frac{1}{2^m}, \\ \frac{\partial\rho}{\partial x}\Big|_{\mu_m(\frac{i-1}{2^m},\theta)+\Delta r_m(\frac{i}{2^m},\theta)} \cdot \big[\partial_\theta\mu_m(\frac{i-1}{2^m},\theta) \\ \qquad +\partial_\theta\Delta r_m(\frac{i}{2^m},\theta)\big], \quad \frac{i}{2^m} \le t < \frac{i+1}{2^m}, \end{cases} \tag{45}$$

$$\partial_\theta k_m(t,\theta) = \begin{cases} 0, \qquad 0 \le t < \frac{1}{2^m}, \\ \partial_\theta k_m(\frac{i-1}{2^m},\theta) + \left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\Big|_{\mu_m(\frac{i-1}{2^m},\theta)+\Delta r_m(\frac{i}{2^m},\theta)} - I\right) \\ \qquad \cdot\big[\partial_p\mu_m(\frac{i-1}{2^m},\theta) + \partial_\theta\Delta r_m(\frac{i}{2^m},\theta)\big], \quad \frac{i}{2^m} \le t < \frac{i+1}{2^m}, \end{cases} \tag{46}$$

где I – единичная матрица. Функции (45), (46) удовлетворяют уравнению

$$\partial_\theta\mu_m = \partial_\theta r_m + \partial_\theta k_m. \tag{47}$$

Введем обозначения:

$$dk_m\Big(\frac{i}{2^m},\theta\Big) = \rho\Big(\mu_m(\frac{i-1}{2^m},\theta) + \Delta r_m(\frac{i}{2^m},\theta)\Big) - \mu_m\Big(\frac{i-1}{2^m},\theta\Big) - \Delta r_m\Big(\frac{i}{2^m},\theta\Big),$$
$$d\Big|k_m(\frac{i}{2^m},\theta)\Big| = \Big|\rho\Big(\mu_m(\frac{i-1}{2^m},\theta) + \Delta r_m(\frac{i}{2^m},\theta)\Big) - \mu_m\Big(\frac{i-1}{2^m},\theta\Big) - \Delta r_m\Big(\frac{i}{2^m},\theta\Big)\Big|,$$

где ρ – проекция точки на границу вдоль нормали. Тогда уравнения (42) принимают соответственно вид:

$$\big|k_m(t,\theta)\big| = \sum_{i=1}^{j_m} \chi_{\partial G}\left(\mu_m\Big(\frac{i}{2^m},\theta\Big)\right) d\left|k_m\Big(\frac{i}{2^m},\theta\Big)\right|, \tag{48}$$

$$k_m(t,\theta) = \sum_{i=1}^{j_m} dk_m\left(\frac{i}{2^m},\theta\right) = \sum_{i=1}^{j_m} n\left(\mu_m\Big(\frac{i}{2^m},\theta\Big)\right) d\Big|k_m\Big(\frac{i}{2^m},\theta\Big)\Big|, \tag{49}$$

где j_m – номер узла такой, что $\frac{j_m}{2^m} \le t < \frac{j_m+1}{2^m}$.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия* **А2**, **Д2**, *тогда последовательности $\partial_p\mu_m$, $\partial_p k_m$ сходятся равномерно при $m\to\infty$ к функциям $\partial_\theta\mu$, $\partial_\theta k$ соответственно, для которых выполнены следующие равенства:*

$$\partial_\theta\mu = \partial_\theta r + \partial_\theta k, \tag{50}$$

$$\partial_p k(t,\theta) = \int\limits_0^t \frac{\partial n}{\partial x}(\mu(s,\theta))\partial_\theta\mu(s,\theta)d|k(s,\theta)| + \int\limits_0^t \chi_{\partial G}(\mu(s,\theta))n(\mu(s,\theta))d(\partial_\theta|k(s,\theta)|).$$

Теорема 8. *Пусть выполнены условия* **А2**, **Б2** ,**В2**, **Г2**. *Тогда существует производная по параметру решения уравнения (27), которая определена однозначно и удовлетворяет системе уравнений*

$$\partial_\theta X_t = \int\limits_0^t \Big(\frac{\partial a}{\partial x}(s,X_s,\theta)\partial_\theta X_s + \frac{\partial a}{\partial\theta}(s,X_s,\theta)\Big)ds + \int\limits_0^t \Big(\frac{\partial\sigma}{\partial x}(s,X_s,\theta)\partial_\theta X_s$$
$$+\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}(s,X_s,\theta)\Big)dW_s + \int\limits_0^t \frac{\partial n}{\partial x}(X_s)\partial_\theta X_s d|k(s,\theta)|$$
$$+\int\limits_0^t \chi_{\partial G}(X_s)n(X_s)d|\partial_\theta k(s,\theta)|,$$

$$d|\partial_\theta k(s,\theta)| = \frac{dk(s,\theta)\partial_\theta(dk(s,\theta))}{d|k(s,\theta)|}, \quad |\partial_\theta k(t,\theta)| = \int\limits_0^t \chi_{\partial G}(X_s)d|\partial_\theta k(s,\theta)|.$$

В **п. 2.3** рассмотрено определение оценки производных по параметрам решения задачи (32) — (34), которая есть результат приближенного определения значения математического ожидания

$$\frac{\partial u}{\partial\theta}(t,x) = \mathrm{E}_{t,x}\Big(\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(X_T)\partial_\theta X_T + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(X_T)\Big)Y_T + \varphi(X_T)\partial_\theta Y_T + \partial_\theta Z_T\Big), \tag{51}$$

где $\partial_\theta X_\cdot$, $\partial_\theta Y_\cdot$, $\partial_\theta Z_\cdot$ — производные по параметру от $X_\cdot$, $Y_\cdot$, $Z_\cdot$, которые находятся из уравнений

$$\partial_\theta X_s = \int\limits_t^s \Big(\frac{\partial a_v}{\partial x}\partial_\theta X_v + \frac{\partial a_v}{\partial \theta}\Big) dv + \int\limits_t^s \Big(\frac{\partial \sigma_v}{\partial x}\partial_\theta X_v + \frac{\partial \sigma_v}{\partial \theta}\Big) dW_v$$

$$+ \int\limits_t^s \frac{\partial n(X_v)}{\partial x}\partial_\theta X_v d|k_v| + \int\limits_t^s n(X_v) d|\partial_\theta k_v|,$$

$$\partial_\theta Y_s = Y_s \Big[\int\limits_t^s \left(\frac{\partial c_v}{\partial x}\partial_\theta X_v + \frac{\partial c_v}{\partial \theta}\right) dv$$

$$+ \int\limits_t^s \left(\frac{\partial \eta_v}{\partial x}\partial_\theta X_v + \frac{\partial \eta_v}{\partial \theta}\right) d|k_v|\Big) + \int\limits_t^s \eta_v d|\partial_\theta k_v|\Big],$$

$$\partial_\theta Z_s = \int\limits_t^s \left[\left(\frac{\partial f_v}{\partial x}\partial_\theta X_v + \frac{\partial f_v}{\partial \theta}\right) Y_v + f_v \partial_\theta Y_v\right] dv + \int\limits_t^s \Big[\Big(\frac{\partial \gamma_v}{\partial x}\partial_\theta X_v$$

$$+\frac{\partial \gamma_v}{\partial \theta}\Big) Y_v + \gamma_v \partial_\theta Y_v\Big] d|k_v| + \int\limits_t^s \gamma_v Y_v d|\partial_\theta k_v|,$$

$$|\partial_\theta k_s| = \int\limits_t^s \chi_{\partial G}(X_v) d|\partial_\theta k_v|.$$

Доказано, что при выполнении условий **А2**, **Б2**, **В2**, **Г2** погрешность метода Эйлера при вычислении производных $\frac{\partial u^h}{\partial \theta}$ есть величина порядка $O(\sqrt{h})$.

В **п. 2.4** представлены результаты численного эксперимента, в котором получены оценки решения и его производных по параметрам, двумерной краевой задачи для параболического уравнения с известным точным решением.

Глава 3 посвящена решению обратной задачи для уравнения теплопроводности с использованием оценок $\frac{\partial u}{\partial \theta}$, получаемых на основе численного решения СДУ. Результаты главы 3 опубликованы в работах автора 3, 5.

В **п. 3.1** сформулирована постановка обратной задачи и дано описание метода ее решения.

Рассматривается краевая задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} b_{ij}(t,x,\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} a_i(t,x,\theta)\frac{\partial u}{\partial f x_i}$$
$$+c(t,x,\theta)u + f(t,x,\theta) = 0, \quad t \in [0,T], \quad x \in G, \tag{52}$$
$$u(T,x,\theta) = \varphi(x,\theta), \qquad x \in G, \tag{53}$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} + \eta(t,x,\theta)u + \gamma(t,x,\theta) = 0, \qquad x \in \partial G, \tag{54}$$

где G – область в $\mathbf{R}^d$ с границей ∂G; n - единичный вектор внутренней нормали в точке $x \in \partial G$; $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$ – вектор параметров.

Задачу (52) – (54) путем замены переменной времени легко можно преобразовать к задаче с начальным условием. Можно считать, что эта задача описывает некоторый физический процесс, например, процесс передачи тепла в твердом однородном теле, а функция u — температура.

Обратная задача формулируется как задача определения неизвестных параметров θ по имеющимся измерениям u в заданных точках области. Вычисление решения задачи (52) – (54) и его производных по параметрам предлагается осуществлять на основе численного решения СДУ.

В **п. 3.2** на примере краевой задачи с известным точным решением численно продемонстрирована сходимость решения обратной задачи к ее точному решению при уменьшении ошибок в исходных данных.

Глава 4 посвящена разработанному в диссертации методу минимизации дисперсии функционала от диффузионного процесса на основе преобразования параболической краевой задачи. Результаты четвертой главы опубликованы в работах автора 7, 8, 17. Предлагаемый метод минимизации дисперсии основан на параметризованном преобразовании соответствующей случайному процессу краевой задачи для параболического уравнения. Минимизация дисперсии функционала сводится к минимизации абсолютной величины коэффициента вариации значений функционала, соответствующего преобразованной краевой задаче. При этом для вычисления градиента целевой функции используются производные функционала диффузионного процесса по параметрам.

В **п. 4.1** представлен вариант метода для случая поглощающей границы.

Предполагается, что в ограниченной области $G \subset \mathbf{R}^d$ с регулярной границей ∂G задан диффузионный процесс $X_{\boldsymbol{.}}$ с условием поглощения на ∂G, и он является решением СДУ

$$X_s = x + \int\limits_t^s a(v, X_v)dv + \int\limits_t^s \sigma(v, X_v)dW_v. \tag{55}$$

При некоторых заданных $c, f : [0, \infty) \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ расматривается функционал

$$\vartheta \equiv \varphi(X_T)Y_T\chi_{\tau>T} + Z_{T\wedge\tau}, \tag{56}$$

где

$$Y_s = \exp\Big(\int\limits_t^s c(v, X_v)dv\Big), \quad Z_s = \int\limits_t^s f(v, X_v)Y_v dv \ . \tag{57}$$

Для $(t, x) \in Q_T$ определяется функция

$$u(t, x) \equiv \mathrm{E}_{t,x}\Big(\varphi(X_T)Y_T\chi_{\tau>T} + Z_{T\wedge\tau}\Big). \tag{58}$$

Известно, что значение $u(t, x)$ при $(t, x) \in Q_T$ совпадает с решением краевой задачи

$$Lu + f(t, x) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (t, x) \in Q_T, \tag{59}$$

$$u(T, x) = \varphi(x), \qquad x \in G, \tag{60}$$

$$u(t, x) = 0, \qquad x \in \partial G, \tag{61}$$

где $Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{d} b_{ij}(t, x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{d} a_i(t, x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(t, x)u$; b_{ij} – элементы матрицы $B \equiv \sigma\sigma^{\mathrm{T}}$. Относительно матричной функции $B(t, x) = (b_{ij}(t, x))$ предполагается, что она удовлетворяет равномерно по всем своим аргументам при некотором $\alpha_0 > 0$ условию

$$y^{\mathrm{T}}B(t, x)y > \alpha_0|y|^2 \tag{62}$$

для любого $y \in \mathbf{R}^d$. Предлагаемый способ уменьшения дисперсии функционала основан на представлении решения в краевой задаче (59)—(61) в виде произведения

$$u = \tilde{u}V \ . \tag{63}$$

В (63) $V(x)$ – некоторая функция, которую требуется определить. Функция $\tilde{u}$ является решением краевой задачи

$$\tilde{L}\tilde{u} + \tilde{f}(t,x) = 0, \quad (t,x) \in Q_T, \tag{64}$$

$$\tilde{u}(T,x) = \tilde{\varphi}(x), \qquad x \in G, \tag{65}$$

$$\tilde{u}(t,x) = 0, \qquad x \in \partial G. \tag{66}$$

В (64) – (66) используются следующие обозначения:

$$\tilde{L}\tilde{u} \equiv \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} b_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} \tilde{a}_i(t,x)\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} + \tilde{c}(t,x)\tilde{u} \ , \tag{67}$$

$$\tilde{a}_i \equiv a_i + \frac{1}{2V}\Big(2b_{ii}\frac{\partial V}{\partial x_i} + \sum_{i \neq j}(b_{ij} + b_{ji})\frac{\partial V}{\partial x_j}\Big) \ , \tag{68}$$

$$\tilde{c} \equiv c + \frac{1}{V}\Big(\sum_{i} a_i \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j} b_{ij}\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\Big) \ , \tag{69}$$

$$\tilde{f}(t,x) \equiv \frac{f(t,x)}{V(x)}, \quad \tilde{\varphi}(x) \equiv \frac{\varphi(x)}{V(x)} \ . \tag{70}$$

В работе оценка $\tilde{u}$ определяется путем численного решения соответствующей задаче (64) – (66) системы СДУ. При этом вместо ϑ рассматривается случайная величина $\tilde{\vartheta} = \tilde{\varphi}(\tilde{X}_T)\tilde{Y}_T + \tilde{Z}_T$, где знак " ~ "указывает на соответствие $\tilde{u}$. Преобразования краевой задачи должны быть такими, чтобы они приводили к уменьшению по модулю коэффициента вариации[1] $|R_{\tilde{\vartheta}}| < |R_{\vartheta}|$. После того, как получена оценка для $\tilde{u}$ с меньшей дисперсией, оценка для исходной задачи определяется по формуле (63).

В диссертации предлагается задавать функцию V, зависящую от некоторого набора параметров и затем минимизировать выборочное значение квадрата коэффициента вариации $\tilde{\vartheta}$.

Для дисперсии случайной величины ϑ^N, которая является аппроксимацией ϑ, полученной методом Эйлера, доказана теорема.

Теорема 10. *При выполнении условий существования и единственности решения СДУ (55) и существования единственного решения краевой задачи (59) – (61) в классе $\mathbf{H}^{\frac{3+\alpha}{2},3+\alpha}(\bar{Q}_T)$ дисперсия случайной величины ϑ^N*

[1]Для случайной величины ξ с математическим ожиданием $\mu_\xi \neq 0$ и стандартным отклонением σ_ξ коэффициент вариации R_ξ, определяется как $R_\xi = \frac{\sigma_\xi}{\mu_\xi}$

сходится при $N \to \infty$ с порядком $O(\sqrt{h})$ к значению величины

$$\mathrm{D}_{t,x}\vartheta = \mathrm{E}_{t,x}\left[\int\limits_t^{T\wedge\tau}\left(\frac{\partial u_v}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}(\sigma_v\sigma_v^{\mathrm{T}})\frac{\partial u_v}{\partial x}Y_v^2 dv\right]. \tag{71}$$

В (71) $u_v = u(v, X_v)$, $\sigma_v = \sigma(v, X_v)$. Функция V должна быть такой, чтобы при выполнении равенства (63) было справедливо неравенство

$$\frac{1}{\tilde{u}(t,x)^2}\mathrm{E}_{t,x}\left[\int\limits_t^{T\wedge\tilde{\tau}}\Big(\frac{\partial\tilde{u}(v,\tilde{X}_v)}{\partial x}\Big)^{\mathrm{T}}B\frac{\partial\tilde{u}(v,\tilde{X}_v)}{\partial x}\tilde{Y}_v^2 dv\right]$$

$$< \frac{1}{u(t,x)^2}\mathrm{E}_{t,x}\left[\int\limits_t^{T\wedge\tau}\Big(\frac{\partial u_v}{\partial x}\Big)^{\mathrm{T}}B\frac{\partial u_v}{\partial x}Y_v^2 dv\right]. \tag{72}$$

В качестве одного из вариантов параметризации V предлагается задавать ее в виде линейной комбинации некоторой системы базисных функций

$$V_\alpha(x) = \sum_{i=1}^{l}\alpha_i S_i(x),\ \ \alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_l)\ . \tag{73}$$

При таком задании функции V решение краевой задачи (64)–(66) зависит от параметров $\alpha_1,\ldots,\alpha_l$ и задачу уменьшения квадрата коэффициента вариации можно сформулировать как задачу определения

$$\min_{\alpha_1,\ldots,\alpha_l}\frac{1}{\tilde{u}(t,x)^2}E_{t,x}\left[\int\limits_t^{T\wedge\tilde{\tau}}\Big(\frac{\partial\tilde{u}(v,\tilde{X}_v)}{\partial x}\Big)^{\mathrm{T}}B(v,\tilde{X}_v)\frac{\partial\tilde{u}(v,\tilde{X}_v)}{\partial x})\tilde{Y}_v^2 dv\right]. \tag{74}$$

Поскольку функция $\tilde{u}$ не известна, то рассматривается минимизация функции

$$\Phi(\alpha_1,\ldots,\alpha_l) \equiv \frac{E_{t,x}(\tilde{\vartheta})^2 - (E_{t,x}\tilde{\vartheta})^2}{(E_{t,x}\tilde{\vartheta})^2}\ , \tag{75}$$

значения которой совпадают с значениями целевой функции в (74). При этом компоненты градиента функции (75) определяются из равенства

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_i} = 2\frac{E_{t,x}\big(\tilde{\vartheta}\tilde{\vartheta}_{\alpha_i}\big)E_{t,x}\tilde{\vartheta} - E_{t,x}\tilde{\vartheta}^2 E_{t,x}\tilde{\vartheta}_{\alpha_i}}{(E_{t,x}\tilde{\vartheta})^3}\ , \tag{76}$$

где используется обозначение $\tilde{\vartheta}_{\alpha_i} = \frac{\partial\tilde{\vartheta}}{\partial\alpha_i}$.

В **п.4.2** представлен вариант метода минимизации дисперсии функционала для случая, когда на границе задано условие отражения в направлении внутренней нормали.

Глава 5 посвящена определению оценок решения линейного уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами с использованием численного решения СДУ. Результаты пятой главы опубликованы и использовались в работах автора 11, 12, 18, 20. Решение уравнения с разрывными коэффициентами может быть аппроксимировано решением уравнения со сглаженными коэффициентами. Поэтому предлагается с помощью численного решения СДУ находить оценки решения уравнения теплопроводности, которое получается из исходного уравнения в результате сглаживания разрывных коэффициентов с использованием интегрального усреднения.

В **п. 5.1** дана постановка краевой задачи для уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами и определена общая схема ее решения. Предполагается, что задана связная ограниченная область $G \subset \mathbf{R}^d$ границей ∂G. Основным объектом рассмотрения является уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{d}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(b_{i,j}(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)+\sum_{i=1}^{d}a_i(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+f(t,x)=0, \quad (t,x)\in Q_T. \quad (77)$$

Область G представляет собой объединение конечного числа непересекающихся подобластей $G=\bigcup\limits_{i=1}^{M}G_i$ в каждой из которых коэффициенты b_{ij}, a_i удовлетворяют условию Липшица равномерно по t, но при переходе из одной подобласти в другую эти коэффициенты могут терпеть разрыв первого рода. Также предполагается, что поверхности раздела подобластей G_i не зависят от переменной t и отстоят от границы ∂G на некотором положительном расстоянии, и выполнено условие равномерной параболичности

$$\alpha_0\sum_{i=1}^{d}\xi_i^2 \le \sum_{i,j=1}^{d}b_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \le \alpha_1\sum_{i=1}^{d}\xi_i^2, \quad (78)$$

где $\alpha_0,\alpha_1>0$ — константы.

В рассматриваемой задаче при $t=0$ задано начальное условие

$$u(0,x)=\varphi(x), \quad (79)$$

а на ∂G первое краевое условие

$$u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in (0,T) \times \partial G. \tag{80}$$

Известно (О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736с.), что обобщенное решение задачи (77), (79), (80) в норме пространства $\mathbf{V}_2^{1,0}(Q_T)$ устойчиво относительно вариаций коэффициентов и свободных членов уравнения (77). При этом, если при $m \to \infty$ равномерно ограниченная последовательность $b_{ij}^{(m)}$ сходится почти всюду к b_{ij}, а функции $a_i^{(m)}$, $f^{(m)}$ сходятся к a_i, f в нормах пространств, в которых они определены по условиям теоремы существования, тогда обобщенные решения задач с коэффициентами $b_{ij}^{(m)}$, $a_i^{(m)}$ и правыми частями $f^{(m)}$ сходятся сильно в норме $\mathbf{V}_2^{1,0}(Q_T)$ к обобщенному решению задачи (77), (79), (80). Таким образом, при достаточно больших значениях m приближенное решение $u^{(m)}$ задачи (77), (79), (80) можно получить, если решать задачу, в которой в уравнении (77) разрывные функции заменены на их гладкие аппроксимации.

В **п. 5.2** рассматриваются вопросы сходимости приближенного решения краевой задачи и получения его статистической оценки. Функция $v^{(m)} \equiv u^{(m)} - u$ представляет собой погрешность приближенного решения, и она является решением краевой задачи

$$\frac{\partial v^{(m)}}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(b_{ij}^{(m)} \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_j}\Big) + \sum_{i=1}^{d} a_i^{(m)} \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_i} + f_0^{(m)} + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f_i^{(m)}}{\partial x_i} = 0, \tag{81}$$

$$v^{(m)}(0,x) = 0, \quad x \in G \tag{82}$$

$$v^{(m)}(t,x) = 0, \quad (t,x) \in (0,T) \times \partial G, \tag{83}$$

где $f_i^{(m)} \equiv \sum\limits_{j=1}^{d} (b_{ij} - b_{ij}^{(m)}) \frac{\partial u}{\partial x_j}$, $f_0^{(m)} \equiv f^{(m)} - f$.

Задача (81), (82), (83) удовлетворяет всем условиям существования обобщенного решения.

Для функций $v^{(m)}$ и $v^{(m,k)} = \max\{0; v^{(m)} - k\}$ доказаны два следующих утверждения

Лемма 6. *Пусть выполнены условия существования обобщенного решения* *задачи (77), (79), (80) в пространстве* $\mathbf{V}_2^{1,0}(Q_T)$*;* $\varphi \in \mathbf{L}_2(G)$*. Тогда имеет место сходимость* $\|v^{(m,k)}\|_{\mathbf{V}_2^{1,0}(Q_T)} \to 0$ *при* $m \to \infty$*.*

Теорема 12. *Пусть выполнены условия леммы 6. Тогда для заданного уровня погрешности приближенного решения* ε *существует такое значение параметра* m_ε*, что при всех* $m \geq m_\varepsilon$

$$\operatorname{vrai}\max_{Q_T} |v^{(m)}| < \varepsilon.$$

В этом разделе дано описание численной процедуры, использующей численное решение СДУ методом Эйлера для определения оценки решения краевой задачи для уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами.

В **п. 5.3** рассмотрено применение метода оценки решения уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами к расчету теплового состояния телозащитного покрытия фюзеляжа самолета, содержащего сотовые теплозащитные панели.

В **приложении** находится копия акта о внедрении результатов диссертации.

В **заключении** перечислены основные результаты диссертации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Получены две формулы для определения производных по параметрам математических ожиданий функционалов от диффузионных процессов в областях с условиями поглощения на границе. На основе этих формул построены два метода оценки производных по параметрам математических ожиданий функционалов от диффузионных процессов.

2. Обоснована возможность дифференцирования по параметрам локального времени пребывания диффузионного процесса на границе. Построен метод оценки производных по параметрам математических ожиданий функционалов от диффузионных процессов в областях с условием отражения на границе.

3. Получена формула для предельного значения дисперсии оценки математического ожидания функционала от диффузионного процесса при убывании длины шага в методе Эйлера.

4. Разработан метод минимизации дисперсии оценки математического ожидания функционала от диффузионного процесса, основанный на преобразовании краевой задачи для параболического уравнения.

5. Разработан метод оценки решений краевых задач для уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами. Решена задача оценки теплового состояния сотовых конструкций фюзеляжа самолета на основе численного решения стохастических дифференциальных уравнений.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:

1. Gusev S.A. Numerical estimation of the coefficients of the parabolic equation by solving stochastic differential equations// Rus. J. Numer. Anal. Math. Modeling.- 2000.- Vol. 15, No.5.- P.397-404.

2. Gusev S. A. Estimation of the coefficients in the parabolic equation by the statistical simulation of diffusion trajectories // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling.- 2003, Vol.18, No 4.- P. 297-306.

3. Гусев С.А. Оценки методом Монте-Карло производных по параметрам решения параболического уравнения на основе численного решения СДУ // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.- Новосибирск 2005.- Т.8, №4.- 2005.- С. 297-306.

4. Гусев С.А. Использование численного решения СДУ для оценки производных по параметрам решения параболической краевой задачи с граничным условием Неймана // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.- Новосибирск, 2007.- Т.10, №3.-С. 237-246.

5. Gusev S.A. Using SDE for solving inverse parabolic boundary value problem with a Neumann boundary condition // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling.- 2007.- Vol. 22, No 5, P. 449-470.

6. Гусев С.А. Оценка производных по параметрам функционалов диффузионного процесса, движущегося в области с поглощающей границей // Сиб. журн. вычисл. математики, 2008, т.11, № 4, с. 385-404.

7. Гусев С.А. Минимизация дисперсии оценки математического ожидания функционала диффузионного процесса на основе параметрического

преобразования параболической краевой задачи // Сибирский журнал вычислительной математики.- 2011.- Т.14, №2, С141-153.

8. Gusev S.A. Variances of estimates of a diffusion process functional and its derivatives with respect to parameters // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling.-2009.- Vol. 24, No 5, pp. 439-454.

9. Николаев В.Н., Гусев С.А. Определение оптимальных значений толщины теплоизоляции кабины экипажа и салонов пассажиров магистрального самолета // Авиакосмическое приборостроение.-2013.-№7, С. 46-55.

10. Гусев С.А., Докучаев Н.Г. О дифференцировании функционалов, содержащих время первого выхода диффузионного процесса из области // Теория вероятностей и ее применения.- 2014.- Т.59,№1.- С. 159-168.

11. Гусев С.А. Применение СДУ к оценке решения уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами// Сибирский журнал вычислительной математики.- 2015.- Т.18,№2.- С. 147-161.

12. Гусев С.А., Николаев В.Н. Метод определения теплового состояния сотовых конструкций фюзеляжа самолета на основе численного решения стохастических дифференциальных уравнений // Научный вестник НГТУ.- №2(59).-2015.- С. 20-31.

Другие публикации по теме диссертации:

13. Gusev S.A., Monakhov O.G. Use of Parallel Computation for Estimation of Coefficients of Heat Equation by Monte Carlo Method // Bulletin of the Novosibirsk Computing Center.-Series: Computer Science.-Issue 10.- NCC Publisher.- Novosibirsk, 1999, P.15-23.

14. Gusev S. A. Monte Carlo estimates of the solution of a parabolic equation and its derivatives made by solving stochastic differential equations // Proceedings of the CMMSE-2002, Conference, Alicante, Spain, 20-25 September.- 2002.- Vol.I.- P.159-166.

15. Gusev S.A. Monte Carlo estimates of the solution of a parabolic equation and its derivatives made by solving stochastic differential equations// Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Elsevier, Vol.9, Issue 2, 2003, pp. 177-185.

16. Gusev S.A. Monte Carlo estimation of the solution of the parabolic equation and its parametric derivatives by solving SDE's // Proceedings of the

5th St. Petersburg Workshop on Simulation.- St. Petersburg, Russia, June 26 - July 2, 2005.-NII Chemistry St. Petersburg Univ. Publ.- 2005, P. 299-304.

17. Gusev S.A. Monte Carlo estimation of a functional of a diffusion process with variance reduction by transformation of the corresponding boundary value problem // Proceedings of the 6th St. Petersburg Workshop on Simulation.- St. Petersburg, Russia, June 28 - July 4, 2009.-Volume I.- P.128-132.

18. Gusev S.A., Nikolaev V.N. Calculation of heat transfer in heterogeneous structures such as honeycomb by using numerical solution of stochastic differential equations // Advanced Materials Research.- 2014.- Vol. 1016.- pp 758-763.

19. Gusev S.A. Estimating Parametric Derivatives of First Exit Times of Diffusions by Approximation of Wiener Processes // Iternational Journal of Pure Mathematics.- 2015.- Vol. 2.- P. 55-63.

20. Gusev S.A., Nikolaev V.N. Numerical Statistical Modeling of the Thermal State of Aircraft Honeycomb Coatings // Applied Methods of Statistical Analysis. Nonparametric Approach. AMSA'15. Proceedings of the International Workshop, Novosibirsk, 14-19 September, 2015.- P.416-423.

21. Гусев С.А. Построение оценок математических ожиданий выражений, содержащих производные по параметрам времени первого выхода диффузионного процесса из области.- Труды Международной конференции "Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики-2015", посвященной 90-летию со дня рождения академика Г.И. Марчука. ИВМиМГ СО РАН. Новосибирск. 19-23 октября 2015 г.[Электрон. ресурс]. Новосибирск: Абвей, 2015. - С. 203-209. ISBN 978-5-9905347-2-8 .