ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГЕОФИЗИКИ
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

ГРЕНЕВА Кристина Валерьевна

Численные стохастические модели поверхности морского волнения и гигантских океанических волн

01.01.07 — Вычислительная математика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор С.М. Пригарин

Новосибирск – 2020

Содержание

Введение **4**

1 Спектральные модели морской поверхности **16**

1.1 Общая информация о спектральных моделях гауссовских полей . 16

1.2 Пространственные спектральные модели морской поверхности . . 20

1.3 Пространственно-временные спектральные модели поверхности морского волнения 26

2 Исследование спектральных моделей морской поверхности **35**

2.1 Влияние размеров спектральной области на точность воспроизведения дисперсии 35

2.2 Изучение корреляционных погрешностей спектральных моделей морской поверхности 39

2.3 Сравнение оценок функционалов для различных спектральных моделей 46

2.4 Сходимость спектральных моделей поверхности морского волнения 50

3 Условные спектральные модели морской поверхности и аномально высоких волн **56**

3.1 Общая информация об условных спектральных моделях гауссовских полей 56

3.2 Условные спектральные модели морской поверхности и аномально высоких волн 59

3.3 Сходимость условных спектральных моделей поверхности морского волнения 63

3.4 Применение моделей морской поверхности для оценки частоты появления аномально высоких волн 68

3.4.1 Оценка частоты появления высоких волн различной высоты 68

3.4.2 Оценка частоты появления высоких волн для моделей, построенных по натурным данным 71

Заключение **76**

Список обозначений **78**

Список литературы **79**

Приложение А. Аппроксимации спектров поверхности морского волнения **92**

А.1 Аппроксимации частотных спектров морской поверхности 92

А.2 Аппроксимации угловых спектров морской поверхности 97

Приложение Б. Информация о волнах-убийцах **100**

Приложение В. Шкала Бофорта **101**

Введение

Актуальность исследования.

Стохастическое моделирование получило широкое распространение при изучении проблем в океанологии, гидрологии, гидромеханике, судостроении и других областях, см., например, [4, 13, 35, 45, 47–49, 76, 103]. При решении многих задач важно учитывать динамику и статистические свойства поверхности морского волнения.

В общем случае морское ветровое волнение является сложным неоднородным процессом. Однако на практике распространение получили линейные модели, поскольку они с достаточной точностью описывают вероятностные свойства волнения, требуя меньшие вычислительные мощности. Наиболее полно изучена модель, представляющая морскую поверхности в виде суперпозиции элементарных гармонических волн случайных амплитуд и фаз. Лонге-Хиггинс показал, что полученная суперпозиция является случайным гауссовским процессом [31]. Такая модель морской поверхности применяется, например, в работе [52] для изучения влияния спектральной плотности волнения на амплитуду колебаний опорных блоков морских стационарных платформ.

При изучении взаимодействия света с водной средой широкое распространение получила «фацетная» модель Кокса-Манка для моделирования поверхности морского волнения [65], в которой граница раздела вода-воздух представляет собой случайную поверхность, составленную из набора элементарных площадок, центры которых лежат в одной плоскости, а нормали к ним распределены в соответствии с заданной функцией распределения. Однако данная модель не учитывает явления затемнения и переотражения излучения элементами поверхности. В работе [74] рассматривается пространственная модель поверхности морского волнения, которая используется для вычисления характеристик поля отраженного оптического излучения с учетом эффектов затемнения и переотражения излучения элементами поверхности. Впоследствии для решения этой

задачи в работе [58] была рассмотрена пространственно-временная модель.

Одной из актуальных проблем является изучение природного явления, получившего название «волны-убийцы». Аномально высокие волны представляют собой серьезную угрозу для судов и морских сооружений. Такие волны могут встречаться как на глубокой, так и на мелкой воде, как при сильном, так и слабом волнении. Основной особенностью данных волн является их внезапное появление «из неоткуда». Все это осложняет изучение описанного явления.

В последние десятилетия идет интенсивное изучение волн-убийц, см., например, [56, 59–62, 66, 67, 69, 71–73, 75, 93, 94, 96, 105]. Большое количество проектов направленно на изучение проблемы аномально высоких волн: «MAXWAVE», «DEROGUE WAVES», «HANDLING WAVES», «EXTREME SEAS» и другие. Однако многие вопросы до сих пор остаются нерешенными и единой теории экстремально высоких волн не существует.

Степень разработанности темы исследования, научная и практическая значимость.

Спектральные модели получили широкое распространение для исследования различных стохастических объектов и явлений, таких как турбулентность, атмосферная облачность, поверхность морского волнения. Подходу, основанному на спектральном разложении, посвящено большое количество публикаций. Отметим наиболее ранние работы [76,88,95,104], работы [33,34], в которых было предложено комбинировать разбиение спектрального пространства с рандомизацией спектра и работы [78, 79], в которых получены интересные результаты о сходимости. При этом проблема погрешности приближенных спектральных моделей остается недостаточно изученной. Часто количество случайных гармоник модели определяется лишь «правдоподобностью» результатов вычислений, либо возможностью вычислительной техники. Поэтому вопрос подбора оптимальной спектральной модели до сих пор остается открытым.

В диссертационной работе показаны и опробованы методики, позволяющие оптимизировать спектральную модель и выбрать наиболее подходящую среди

множества моделей. Отметим, что применение данных методик не ограничивается моделями поверхности морского волнения, и они могу быть использованы при моделировании различных стохастических объектов и явлений.

Для изучения аномально высоких волн-убийц применяются различные подходы, основанные как на линейной теории, так и на нелинейных динамических эффектах. Например, подход, основанный на геометрической фокусировке [59, 73], моделирование нелинейной динамики поверхностных волн на основе нелинейного уравнения Шредингера [71, 72, 94], двумерного уравнения Навье-Стокса [96], уравнения Диста [105], нелинейного уравнения потенциального потока со свободной поверхностью [69] и т.д. Однако, на сегодняшний день нет удовлетворительного инструмента для прогнозирования и изучения механизмов возникновения таких волн.

В диссертационной работе предлагается подход к моделированию морского волнения и гигантских волн-убийц, основанный на условных спектральных моделях. Разработанные модели позволяют воспроизводить поверхность морского волнения с аномально высокой волной. При этом спектры волнения, заложенные в модели, могут быть оценены по натурным данным.

Целью данной работы является разработка и исследование свойств численных моделей морской поверхности и аномально высоких волн-убийц.

Для достижения указанной цели необходимо решить следующие **задачи:**

– Разработать временные, пространственные и пространственно-временные спектральные модели поверхности морского волнения, позволяющие учитывать данные наблюдений.

– Изучить влияние выбора спектральной области модели на точность воспроизведения дисперсии случайной поверхности морского волнения.

– Исследовать погрешность спектральных моделей морской поверхности и точность воспроизведения корреляционных структур случайных полей.

– Исследовать эффективность спектральных моделей морского волнения, проведя сравнение оценок для тестовых функционалов.

– Разработать алгоритм численного моделирования спектральных моделей морской поверхности с аномально высокими волнами.

– Разработать методику оценки частоты появления высоких волн на основе анализа спектра морского волнения.

– Изучить сходимость спектральных моделей поверхности морского волнения и аномально высоких волн в различных функциональных пространствах.

Научная новизна работы определяется совокупностью полученных результатов:

– разработан класс численных стохастических моделей поверхности морского волнения, основанных на спектральном представлении случайных функций и полей;

– изучена точность спектральных моделей поверхности морского волнения, приведены методики вычисления погрешности моделей, основанные на оценке точности воспроизведения корреляционных структур и с использованием функционалов с известными аналитическими выражениями;

– разработаны стохастические модели морского волнения с аномально высокими волнами, основанные на условных спектральных моделях;

– доказана сходимость спектральных и условных спектральных моделей поверхности морского волнения;

– предложен подход к оценке частоты появления высоких волн на основе анализа спектра волнения.

Методология и методы исследования.

В диссертационной работе для решения поставленных задач использовались:

– аппарат теории методов Монте-Карло, математического анализа, теории вероятностей;

– спектральный метод моделирования однородных гауссовских случайных процессов и полей;

– численный алгоритм, позволяющий моделировать гауссовские однородные случайные поля с учетом известных значений поля в фиксированных точках;

– метод Юла-Уокера для оценки параметров авторегрессионной модели случайных процессов;

– алгоритмы оценивания среднего числа выбросов случайного процесса выше заданного уровня и средней длительности интервалов между выбросами случайного процесса;

– языки программирования Pascal и Matlab для написания вычислительных программ.

Основные положения, выносимые на защиту:

– семейство численных алгоритмов моделирования поверхности морского волнения, основанных на спектральном разложении;

– результаты исследований точности спектральных моделей поверхности морского волнения;

– результаты численного стохастического моделирования поверхности морского волнения с аномально высокими волнами;

– результаты исследования сходимости спектральных и условных спектральных моделей морской поверхности.

Личный вклад автора состоит в участии в постановке задач, решаемых в диссертации, исследовании свойств рассматриваемых процессов, разработке комплекса вычислительных программ для проведения численных экспериментов и обсуждении полученных результатов. Автор участвовал в подготовке научных публикаций, выступал на научных семинарах и конкурсах с материалами работы.

Достоверность полученных результатов.

В диссертационной работе использованы научные методы обоснования полученных результатов и выводов. Проведены теоретические исследования и соответствующие численные эксперименты. Результаты прошли научное рецензирование в процессе публикации в ведущих отечественных журналах. Материалы работы докладывались и обсуждались со специалистами в области моделирования стохастических процессов на ведущих российских и международных конференциях.

Апробация результатов.

Полученные результаты исследовательской работы докладывались и обсуждались на:

– Всероссийской конференции «Актуальные проблемы вычислительной математики и математического моделирования» (Новосибирск, 2012 г.),

– 50-ой и 51-ой Международных научных студенческих конференциях «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 2012, 2013 гг.),

– конференциях молодых ученых ИВМиМГ СО РАН (Новосибирск, 2013, 2014 гг.),

– The Seventh International Workshop on Simulation (Римини, 2013 г.),

– The Second International Workshop «Applied Methods of Statistical Analysis. Applications in Survival Analysis, Reliability and Quality Control» (Новосибирск, 2013),

– The Eight International Workshop on Simulation (Вена, 2015 г.)

– The Third International Workshop «Applied Methods of Statistical Analysis. Nonparametric Approach - AMSA'2015» (Белокуриха, 2015),

– Международной научной конференции «Вычислительная и прикладная математика 2017» (Новосибирск, 2017),

– The Ninth International Workshop on Simulation (Барселона, 2018),

– Международной конференции «Вычислительная математика и математическая геофизика», появященной 90-летию со дня рождения академика А. С. Алексеева (Новосибирск, 2018),

– Международной конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики 2019» (Новосибирск, 2019).

По материалам диссертации опубликовано 16 работ [23–25, 27–30, 43, 80–84, 99–101], из них 4 статьи в журналах из списка ВАК, зарегистрирован «Программный комплекс для численного моделирования стохастической структуры морской поверхности» [26] и разработан электронный ресурс [36].

Структура и объем работы.

Диссертационная работа состоит из введения, 3 глав, заключения, списка обозначений, списка использованной литературы и приложений. Объем диссертационной работы – 102 страницы, в том числе 28 рисунков, 9 таблиц. В списке литературы содержится 110 наименований на русском и английском языках.

В первой главе диссертационной работы разрабатываются и изучаются спектральные модели поверхности морского волнения, особое внимание уделено пространственным и пространственно-временным моделям.

В п. 1.1 приводится общая информация о спектральных моделях гауссовских однородных случайных полей и их свойствах, рассматриваются три вида спектральных моделей, которые используются в работе для численного моделирования поверхности морского волнения.

В п. 1.2 предлагается алгоритм моделирования пространственной структуры поверхности морского волнения в фиксированный момент времени, которая может быть описана однородным гауссовским случайным полем возвышений относительно среднего уровня $u(x, y)$, однозначно задаваемым спектральной плотностью

$$f_{\lambda\nu}(\lambda, \nu) = \frac{1}{2\rho}\sqrt{\frac{g}{\rho}}S(\mu)Q(\phi, \mu),$$

где g – ускорение свободного падания, $S(\mu)$ – частотный спектр и $Q(\phi, \mu)$ – угловой спектр волнения,

$$\mu = \sqrt{g\rho}, \qquad \rho{=}\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}, \qquad \phi = \arg(\lambda + i\nu).$$

Будем предполагать, что спектральная плотность поля $u(x, y)$ сосредоточена в области $\Lambda = (0, A) \times (-B, B)$. Пространственную спектральную модель поля $u(x, y)$ вида

$$u_{mn}(x, y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\left[\xi_{ij}\cos(\lambda_{ij}x + \nu_{ij}y) + \eta_{ij}\sin(\lambda_{ij}x + \nu_{ij}y)\right],$$

где ξ_{ij}, η_{ij} – независимые стандартные нормальные случайные величины, со спектральной областью, в которой сосредоточена спектральная плотность поля $u_{mn}(x, y)$,

$$\Lambda^{mn} = (0, A_{mn}) \times (-B_{mn}, B_{mn}) \subseteq \Lambda$$

будем называть пространственной моделью СММП. В диссертационной работе исследуются модели трех видов:

СММП-Н: векторы (λ_{ij}, ν_{ij}), выбираются в центрах прямоугольных областей Λ_{ij}^{mn} и

$$a_{ij}^2 = \iint\limits_{\Lambda_{ij}^{mn}} f_{\lambda\nu}(\lambda, \nu)d\lambda d\nu, \;\; i = 1, .., n, \;\; j = 1, ..., m;$$

СММП-Р$_1$: векторы (λ_{ij}, ν_{ij}) моделируются независимо по распределениям, индуцированным спектральной плотностью $f_{\lambda\nu}(\lambda, \nu)$ в соответствующих множествах Λ_{ij}^{mn} и

$$a_{ij}^2 = \iint\limits_{\Lambda_{ij}^{mn}} f_{\lambda\nu}(\lambda, \nu) d\lambda d\nu, \;\; i = 1, .., n, \;\; j = 1, ..., m;$$

СММП-Р$_2$: векторы (λ_{ij}, ν_{ij}) независимы в совокупности, одинаково распределены в области Λ^{mn} по распределению с плотностью, пропорциональной $f_{\lambda\nu}(\lambda, \nu)$, и

$$a_{ij}^2 = \frac{\iint\limits_{\Lambda^{mn}} f_{\lambda\nu}(\lambda, \nu) d\lambda d\nu}{mn}, \;\; i = 1, .., n, \;\; j = 1, ..., m.$$

В п. 1.3 изучаются пространственно-временные спектральные модели СММП $w_{mn}(x, y, t)$ поля $w(x, y, t)$. Для перехода от пространственной к пространственно-временной модели используется дисперсионное соотношение, которое для глубокой воды имеет вид:

$$\mu^2 = g\sqrt{\lambda^2 + \nu^2},$$

где μ – временная частота, λ, ν – пространственные частоты монохроматической морской волны, g – ускорение свободного падения.

Во второй главе проводится исследование спектральных моделей поверхности морского волнения. В п. 2.1 исследуются свойства спектральных моделей морской поверхности в зависимости от выбранного размера спектральной области.

В п. 2.2 изучается точность спектральных моделей поверхности морского волнения методом, основанным на вычислении погрешности воспроизведения корреляционной функции

$$R(x, y, t) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \cos(\lambda x + \nu y + \sqrt{g\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}t}) f_{\lambda\nu}(\lambda, \nu) d\lambda d\nu$$

для нерандомизированных моделей и оценке «среднего отклонения» корреляционных функций для рандомизированных моделей. В п. 2.3 проводится срав-

нение оценок функционала для моделей поверхности морского волнения. В качестве функционала рассматривается средняя длительность интервалов между выбросами случайного процесса выше заданного уровня.

В п. 2.4 изучается сходимость моделей семейства СММП. Основные результаты представлены в теореме.

Теорема. Предположим, что для спектрального пространства Λ случайного поля $u(x, y)$ и спектральных областей Λ^{mn} пространственных моделей СММП $u_{mn}(x, y)$ выполняется условие: $\Lambda^{mn} = \Lambda$. Тогда для пространственных и соответствующих им пространственно-временных моделей СММП-Н, СММП-P_1 и СММП-P_2 при $n \to \infty$ и $m \to \infty$ справедливо:

1. конечномерные распределения пространственных и пространственно-временных моделей СММП-Н, СММП-P_1 и СММП-P_2 сходятся в смысле сходимости конечномерных распределений;

2. пространственные и пространственно-временные модели СММП-Н, СММП-P_1 и СММП-P_2 слабо сходятся в пространстве $\mathbb{C}^p(K)$, где K – компакт в $\mathbb{R}^2$ и $p \in \{0, 1, ...\}$;

3. пространственные и пространственно-временные модели СММП-Н, СММП-P_1 и СММП-P_2 слабо сходятся в пространстве $\mathbb{L}^p(K)$, где K – компакт в $\mathbb{R}^2$ и $p \geq 1$.

В главе 3 диссертационной работы для моделирования поверхности морского волнения с аномально высокими волнами применяются условные спектральные модели. В п. 3.1 приводятся общие сведения об условных спектральных моделях гауссовских полей и их свойствах.

В п. 3.2. описывается применение условных спектральных моделей для моделирования морской поверхности с гигантскими океаническими волнами. Допустим, что поле $u(x, y)$ проходит через фиксированные точки:

$$u(x_l, y_l) = b_l, \quad l = 1, ..., L.$$

Тогда условная спектральная модель поля $u(x, y)$ принимает вид:

$$u_{mn}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \left[\xi_{ij} \cos(\lambda_{ij} x + \nu_{ij} y) + \eta_{ij} \sin(\lambda_{ij} x + \nu_{ij} y) \right],$$

где величины ξ_j и η_j построены при линейном условии

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \xi_{ij} + q_{ij} \eta_{ij} = b_l^u, \quad l = 1, ..., L^u,$$

$$p_{ij} = a_{ij} \cos(\lambda_{ij} x + \nu_{ij} y), \quad q_{ij} = a_{ij} \sin(\lambda_{ij} x + \nu_{ij} y).$$

По аналогии с моделями СММП в диссертационной работе рассматривается три вида условных спектральных моделей морской поверхности УСММП.

В п. 3.3 изучается сходимость моделей УСММП. Доказана сходимость конечномерных распределений и слабая сходимость рассматриваемых моделей в функциональных пространствах $\mathbb{L}^p$ и $\mathbb{C}^p$.

В п. 3.4. оценивается частота возникновения аномально высоких волн. Применяемый здесь подход основан на анализе спектра волнения и позволяет использовать как теоретические данные, так и данные наблюдений.

Заключение содержит перечень основных результатов диссертационной работы.

В дополнение к основному материалу диссертационная работа содержит приложения. В приложении А приводятся сведения об аппроксимациях частотных и угловых спектров морского волнения, используемых в работе для построения и изучения моделей морской поверхности. В приложении Б приведены краткие сведения о природном явлении, получившем название «волны-убийцы», для моделирования которого в диссертационной работе используются условные спектральные модели. В приложении В приведена шкала Бофорта, которая в диссертационной работе используется для обсуждения адекватности полученных результатов моделирования поверхности морского волнения.

Диссертационная работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 15-01-01458, 18-31-00159.

Автор выражает искреннюю признательность и благодарность научному руководителю д.ф.-м.н. Сергею Михайловичу Пригарину за постоянное внимание к работе и ценные советы, чл.-кор. РАН Геннадию Алексеевичу Михайлову и д.ф.-м.н. Василию Александровичу Огородникову за поддержку и содействие в решении задач, д.ф.-м.н. Пеленовскому Ефиму Наумовичу и д.ф.-м.н. Слюняеву Алексею Викторовичу за предоставленную запись «Новогодней волны», д.ф.-м.н. Шамину Роману Вячеславовичу за полезные обсуждения.

1 Спектральные модели морской поверхности

Экспериментальные данные о статистических свойствах ветрового волнения водной поверхности свидетельствуют о том, что оно с высокой точностью может быть описано однородным гауссовским случайным полем возвышений относительно среднего уровня, см. [12, 17, 46]. В диссертационной работе для построения гауссовских случайных полей используются спектральные модели. Поэтому для начала приведем общие сведения о применении спектрального разложения для моделирования случайных гауссовских полей. А далее продемонстрируем описанный подход в применении к задаче моделирования поверхности морского волнения.

Основные результаты, представленные в этом разделе, опубликованы в [27, 81, 84, 99, 100].

1.1 Общая информация о спектральных моделях гауссовских полей

В этом пункте приведены основные принципы применения спектрального разложения для моделирования случайных гауссовских процессов и полей. Данному подходу посвящено множество публикаций. Отметим некоторые из них [33, 34, 42, 76–79, 88, 95, 98, 104].

Предположим, что $w(x)$, $x \in \mathbb{R}^k$ - вещественное однородное гауссовское случайное поле с нулевым средним, единичной дисперсией и корреляционной функцией $R(x) = \mathbf{M}w(x+y)w(y)$. Тогда спектральные представления случайного поля и корреляционной функции имеют следующий вид [7, 44]:

$$w(x) = \int\limits_{\mathbb{P}} \cos\langle x, \lambda\rangle \xi(d\lambda) + \int\limits_{\mathbb{P}} \sin\langle x, \lambda\rangle \eta(d\lambda), \tag{1}$$

$$R(x) = \int\limits_{\mathbb{P}} \cos\langle x, \lambda\rangle \chi(d\lambda), \tag{2}$$

где $\chi(d\lambda)$ – спектральная мера случайного поля $w(x)$, $\xi(d\lambda)$, $\eta(d\lambda)$ – вещественные ортогональные стохастические гауссовские меры на измеримом множестве $\mathbb{P}$ в $\mathbb{R}^k$ таком, что:

$$\mathbb{P} \cap (-\mathbb{P}) = \{0\}, \qquad \mathbb{P} \cup (-\mathbb{P}) = \mathbb{R}^k.$$

Будем называть $\mathbb{P}$ *спектральным пространством.*

Обозначим через A и B измеримые подмножества множества $\mathbb{P}$. Тогда выполнено:

$$\mathbf{M}\xi^2(A) = \mathbf{M}\eta^2(A) = \chi(A),$$
$$\mathbf{M}\xi(A) = \mathbf{M}\eta(B) = 0,$$
$$\mathbf{M}\xi(A)\eta(B) = 0.$$

Кроме того, если множества A и B не пересекаются, то

$$\mathbf{M}\xi(A)\xi(B) = \mathbf{M}\eta(A)\eta(B) = 0,$$
$$\xi(A+B) = \xi(A) + \xi(B),$$
$$\eta(A+B) = \eta(A) + \eta(B).$$

Отметим, что в этой главе и далее $\langle .,. \rangle$ означает скалярное произведение в рассматриваемом пространстве.

В основе спектрального метода лежит идея использования аппроксимации стохастического интеграла (1). Очевидно, что для каждого случайного поля $w(x)$ можно построить множество спектральных моделей. Для эффективного решения поставленной задачи важно удачно подобрать приближенную модель. Ниже приведены краткие сведения о некоторых спектральных моделях, которые мы будем использовать в работе, и о способах вычисления погрешности этих моделей.

Простейшей спектральной моделью служит аппроксимация интеграла (1) конечной суммой гармоник. Выберем некоторое разбиение спектрального пространства $\mathbb{P}$ множествами Q_j такое, что

$$\mathbb{P} = \sum_{j=1}^{n} Q_j, \quad Q_i \cap Q_j = \emptyset, \quad \text{где } i \neq j.$$

В качестве аппроксимации случайного поля (1) рассмотрим

$$w_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \chi^{1/2}(Q_j)\big[\xi_j \cos\langle\lambda_j, x\rangle + \eta_j \sin\langle\lambda_j, x\rangle\big], \tag{3}$$

где n – число гармоник, ξ_j, η_j – независимые гауссовские величины, для которых выполняются соотношения:

$$\mathbf{M}\xi_j = \mathbf{M}\eta_j = \mathbf{M}\xi_j\eta_k = 0,$$
$$\mathbf{M}\xi_j^2 = \mathbf{M}\eta_j^2 = 1.$$

В случае *нерандомизированной модели* для построения аппроксимации (3) векторы $\lambda_j \in \mathbb{P}$ выбираются в соответствующих множествах Q_j неслучайным образом. Корреляционная функция однородного гауссовского случайного поля (3) имеет следующий вид:

$$R_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \chi(Q_j) \cos\langle\lambda_j, x\rangle. \tag{4}$$

Для оценки «близости» аппроксимации (3) интеграла (1) в нерандомизированном случае можно использовать величину [42]:

$$\Delta(w_n, w) = \|q(x) \cdot [R(x) - R_n(x)]\|_{\mathbb{F}}\,, \tag{5}$$

где $q(x)$ – неотрицательная весовая функция, $\|.\|_{\mathbb{F}}$ – норма в некотором функциональном пространстве $\mathbb{F}$. Величину (5) будем называть *корреляционной погрешностью нерандомизированной модели.*

Перейдем к *рандомизированной схеме* приближенного моделирования. В общем случае рандомизированную спектральную модель можно представить в следующем виде [42]:

$$w_n(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j\big[\xi_j \cos\langle\lambda_j, x\rangle + \eta_j \sin\langle\lambda_j, x\rangle\big], \tag{6}$$

где n – число гармоник, ξ_j, η_j – стандартные нормальные случайные величины, λ_j - случайные векторы, распределенные по вероятностным мерам χ_j таким,

что

$$\chi(d\lambda) = \sum_{j=1}^{n} a_j^2 \chi_j(d\lambda), \qquad \sum_{j=1}^{n} a_j^2 = 1. \tag{7}$$

Отметим, что в случае рандомизированных моделей условие (7) гарантирует совпадение ковариационных функций случайного поля (1) и модели (6). Реализации рандомизированных спектральных моделей можно интерпретировать как однородные случайные поля с дискретным спектром, сосредоточенным в точках λ_j, выбранных случайным образом. Поэтому в качестве *корреляционной погрешности рандомизированной модели* (6) будем рассматривать следующую величину [42]:

$$\mathbf{M}\Delta(w_n, w), \tag{8}$$

где

$$\Delta(w_n, w) = \left\| q(x) \cdot [R(x) - R_n(x)] \right\|_{\mathbb{F}},$$

$$R_n(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j^2 \cos\langle \lambda_j, x \rangle$$

и математическое ожидание берется по совместному распределению векторов λ_j.

Рассмотрим два примера рандомизированных спектральных моделей, которые будем использовать в дальнейшем.

Первая модель была предложена в работе [33] и объединяет в себе принцип рандомизации спектра и принцип разбиения спектрального пространства. Моделирующая формула в этом случае будет аналогична формуле (3), однако векторы λ_j выбираются в соответствующих множествах Q_j случайным образом согласно распределениям, порожденным спектральной мерой χ.

Вторая модель была рассмотрена в работе [55]:

$$w_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \left[\xi_j \cos\langle \lambda_j, x \rangle + \eta_j \sin\langle \lambda_j, x \rangle \right], \tag{9}$$

где n – число гармоник, ξ_j, η_j - независимые стандартные гауссовские случайные величины. Отличие этой модели от предыдущей в том, что спектральное

пространство не разбивается на подмножества, а случайные векторы λ_j распределены по мере χ.

В общем случае для спектральных моделей (3) и (6) векторы λ_j принадлежат спектральному пространству $\mathbb{P}$. Более эффективной может оказаться спектральная модель $w_n(x)$ для которой векторы λ_j принадлежат меньшему множеству $\Lambda_n \subset \mathbb{P}$, содержащему основную «массу» спектральной меры. Это множество Λ_n далее будем называть *спектральной областью.*

Замечание 1. Запись формул (3), (6), (9) является в некотором смысле упрощенной, так как формально значения a_j, ξ_j, η_j, λ_j и множества Q_j в этих формулах зависят от n. Далее в работе мы также будем опускать этот индекс для краткости записи.

Замечание 2. В литературе можно встретить различные определения ковариационной и корреляционной функций. В данной работе ковариационной функцией будем называть функцию вида:

$$B(s_1, s_2) = \mathbf{M}x(s_1)x(s_2),$$

корреляционной будем называть функцию

$$R(s_1, s_2) = \mathbf{M}\big[x(s_1) - \mathbf{M}x(s_1)\big]\big[x(s_2) - \mathbf{M}x(s_2)\big],$$

а под нормированной корреляционной будем понимать функцию

$$\frac{R(s_1, s_2)}{\sqrt{R(s_1, s_1)R(s_2, s_2)}}.$$

1.2 Пространственные спектральные модели морской поверхности

Морская поверхность может быть описана однородным гауссовским случайным полем возвышений относительно среднего уровня $w(x, y, t)$, которое однозначно задается спектральной мерой

$$F(d\lambda, d\nu, d\mu) = f(\lambda, \nu, \mu)d\lambda d\nu d\mu$$

с плотностью $f(\lambda, \nu, \mu)$ и корреляционной функцией

$$R(x, y, t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \cos(\lambda x + \nu y + \mu t) f(\lambda, \nu, \mu) d\lambda d\nu d\mu.$$

Далее будет показано, что плотность $f(\lambda, \nu, \mu)$ является обобщенной и сосредоточена на некоторой поверхности.

Рассмотрим поверхность морского волнения $w(x, y, t)$ в фиксированный момент времени t_0:

$$u(x, y) = w(x, y, t)|_{t=t_0}. \tag{10}$$

Тогда $u(x, y)$ - однородное гауссовское случайное поле со спектральной плотностью

$$f_{\lambda\nu}(\lambda, \nu) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\lambda, \nu, \mu) d\mu \tag{11}$$

и корреляционной функцией

$$R_{xy}(x, y) = \int\limits_{0}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos(\lambda x + \nu y) f_{\lambda\nu}(\lambda, \nu) d\nu d\lambda.$$

Наряду с параметрами λ и ν часто удобно рассматривать полярные координаты ρ и ϕ:

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \lambda^2 + \nu^2, \qquad \phi = \arg(\lambda + i\nu); \\ \lambda &= \rho \sin(\phi), \qquad \nu = \rho \cos(\phi). \end{aligned} \tag{12}$$

При этом спектральные плотности связаны соотношениями [58]:

$$\begin{aligned} f_{\lambda\nu}(\lambda, \nu) &= \frac{f_{\rho\phi}(\rho, \phi)}{\rho}, \\ f_{\rho\phi}(\rho, \phi) &= \rho f_{\lambda\nu}(\lambda, \nu). \end{aligned}$$

Спектральную плотность поля $u(x, y)$ можно представить следующим образом [42]:

$$f_{\lambda\nu}(\lambda, \nu) = \frac{f_{\rho\phi}(\rho, \phi)}{\rho} = \frac{1}{2\rho}\sqrt{\frac{g}{\rho}} S(\mu) Q(\phi, \mu), \quad \mu = \sqrt{g\rho}, \tag{13}$$

где g – ускорение свободного падания, ρ и ϕ определяются выражениями (12), $S(\mu)$ – частотный спектр и $Q(\phi,\mu)$ – угловой спектр волнения. Для аппроксимации частотных и угловых спектров морского волнения используются различные выражения, см. приложения А.1 и А.2.

Далее в работе мы будем использовать аппроксимацию частотного спектра, предложенную в работе [9]:

$$S(\mu)=\begin{cases} 6m_0\left(\frac{\mu_{\max}}{\mu}\right)^5\mu^{-1}\exp\left\{-1.2\left[\left(\frac{\mu_{\max}}{\mu}\right)^5-\left(\frac{\mu_{\max}}{\mu_1}\right)^5\right]\right\}, & \mu\in(0,\mu_1],\\ S(\mu_1)+(S(\mu_2)-S(\mu_1))\cdot\frac{\mu-\mu_1}{\mu_2-\mu_1}, & \mu\in(\mu_1,\mu_2),\\ 0.0078g^2\mu^{-5}, & \mu\in[\mu_2,\mu_3), \end{cases} \tag{14}$$

где

$$\mu_1=1.8\mu_{\max}\widetilde{\mu}^{-0.7},\quad \mu_2=2.0\mu_{\max}\widetilde{\mu}^{-0.7},\quad \mu_3\approx 30\ \text{с}^{-1},$$
$$m_0=0.00127g^{-2}v^4\widetilde{\mu}^{-3.19},\quad \widetilde{\mu}=v\mu_{\max}g^{-1},$$

v – это скорость ветра на высоте 10 м над уровнем моря, $\mu_{\max}$ – частота спектрального максимума спектра, и аппроксимацию углового спектра, представленную в работе [41], которая предполагает независимость углового распределения энергии от частоты μ:

$$Q(\phi)=\frac{2}{\pi}\cdot\cos^2(\phi),\quad \phi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]. \tag{15}$$

В приведенных выше формулах предполагается, что направление ветра совпадает с осью OX.

Замечание. В работе [9] приведены данные наблюдений за поверхностью морского волнения более чем за 5 лет. В приведенных данных скорость ветра v принимает значения от 5 м/с и превышает 25 м/с. Частота спектрального максимума $\mu_{\max}$ колеблется от 0,4 с$^{-1}$ до 4 с$^{-1}$. В диссертационной работе при выборе параметров морского волнения для проведения вычислительных экспериментов мы опираемся на эти данные.

Рассмотрим пространственную спектральную модель поля $u(x,y)$, имею-

щую следующий вид:

$$u_{mn}(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\left[\xi_{ij}\cos(\lambda_{ij}x+\nu_{ij}y)+\eta_{ij}\sin(\lambda_{ij}x+\nu_{ij}y)\right], \qquad (16)$$

где ξ_{ij}, η_{ij} – независимые стандартные нормальные случайные величины, a_{ij} определяются далее конкретным численным алгоритмом построения спектральной модели.

Будем предполагать, что спектральная плотность поля $u(x,y)$ сосредоточена в области $\Lambda = (0,A)\times(-B,B)$. В качестве спектральной области модели $u_{mn}(x,y)$ рассмотрим прямоугольную область $\Lambda^{mn} = (0,A_{mn})\times(-B_{mn},B_{mn}) \subseteq \Lambda$.

Пространственную спектральную модель вида (16) со спектральной областью Λ^{mn} будем называть *пространственной моделью СММП* (спектральная модель морской поверхности).

Если при построении модели СММП используется принцип разбиения спектрального пространства, то область Λ^{mn} будем разбивать на подобласти Λ_{ij}^{mn}, размером $\dfrac{A_{mn}}{n}$ на $\dfrac{2B_{mn}}{m}$, где $i=1,...,n$, $j=1,...,m$, m – четное число, $n\times m = N$ – число гармоник, см. рисунок 1.

Точность моделей СММП зависит от размеров спектральной области A_{mn}, B_{mn} и от количества используемых гармоник N. Отметим, что выбор оптимальных параметров модели определяется как структурой моделируемого случайного поля, так и задачей, которую нужно решить. Далее в главе 2 мы рассмотрим некоторые подходы к определению параметров модели.

Введем некоторые виды спектральных моделей морской поверхности. Рассмотрим нерандомизированную спектральную модель (16), где

$$a_{ij}^2 = \iint\limits_{\Lambda_{ij}^{mn}} f_{\lambda\nu}(\lambda,\nu)d\lambda d\nu, \qquad i=1,..,n,\ \ j=1,...,m. \qquad (17)$$

Спектр модели сосредоточен в точках (λ_{ij},ν_{ij}), которые мы будем выбирать в центрах прямоугольных областей Λ_{ij}^{mn}. Такую модель будем называть пространственной моделью СММП-Н.

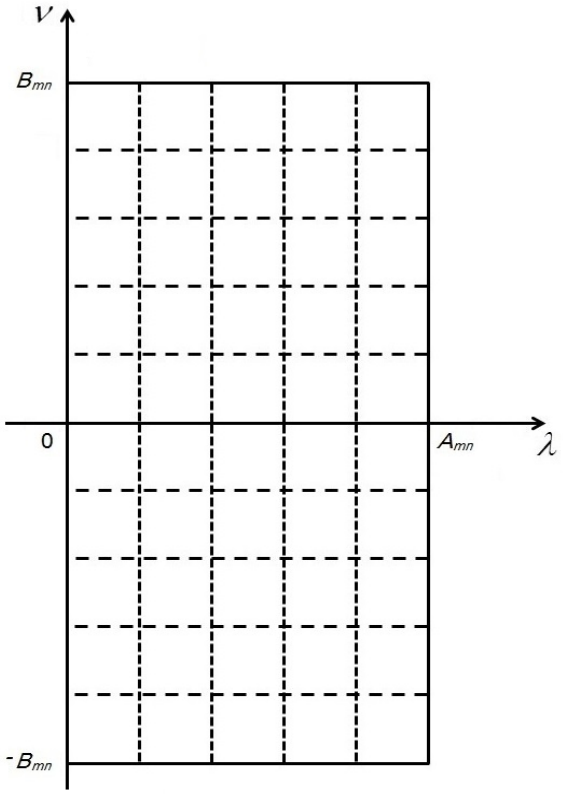

Рис. 1: Спектральная область $\Lambda^{mn} = (0, A_{mn}) \times (-B_{mn}, B_{mn})$ модели (16) поля $u(x, y)$ и ее разбиение на подобласти.

Рандомизированную спектральную модель (16), в которой векторы (λ_{ij}, ν_{ij}), в отличие от пространственной СММП-Н, моделируются независимо по распределениям, индуцированным спектральной плотностью $f_{\lambda\nu}(\lambda, \nu)$ в соответствующих множествах Λ_{ij}^{mn}, будем называть пространственной моделью СММП-Р$_1$. Как и в случае пространственной модели СММП-Н, для модели СММП-Р$_1$ имеет место (17).

И, наконец, рассмотрим рандомизированную спектральную модель без разбиения спектральной области. В этом случае векторы (λ_{ij}, ν_{ij}) независимы в совокупности, одинаково распределены в области Λ^{mn} по распределению с плотностью, пропорциональной $f_{\lambda\nu}(\lambda, \nu)$, и

$$a_{ij}^2 = \frac{\iint\limits_{\Lambda^{mn}} f_{\lambda\nu}(\lambda, \nu) d\lambda d\nu}{mn}, \qquad i = 1, .., n, \;\; j = 1, ..., m. \tag{18}$$

Обозначим такую модель как пространственную модель СММП-Р$_2$.

Сходимость каждой из рассмотренных моделей будет подробно рассмотрена в пункте 2.4.

Отметим, что каждая из рассматриваемых моделей показывает себя наилучшим образом в своем классе задач. Так далее будет показано, что рандомизированные модели, построенные с применением принципа разбиения спектральной области, могут быть точнее, например, в задачах оценки значений функционалов. Однако рандомизированые модели без разбиения спектра проще и поэтому приоритетнее в ряде задач. Нерандомизированные же модели хорошо себя проявляют при построении небольшого числа реализаций случайных полей.

Предположим, что волнение морской поверхности описывается частотным спектром (14) и угловым спектром (15) с параметрами:

$$v = 15 \text{ м/с}, \quad \mu_{\max} = 0.5 \text{ с}^{-1}. \tag{19}$$

Рассмотрим пример реализации пространственной модели СММП-Н. Выберем следующие параметры модели:

$$A_{mn} = 0.1 \text{ м}^{-1}, \quad B_{mn} = 0.07 \text{ м}^{-1}, \quad n = 100, \quad m = 150. \tag{20}$$

Для вычисления интегралов (17) использовался метод прямоугольников. Каждая область Λ_{ij}^{mn}, $i = 1, .., n$, $j = 1, ..., m$ разбивалась на 100 прямоугольных подобластей.

На рисунке 2 представлена спектральная плотность (13) с параметрами (19). Соответствующее гауссовское однородное случайное поле $u(x, y)$ имеет дисперсию 1.55 м^2. Реализация пространственной модели СММП-Н, соответствующая указанным параметрам, представлена на рисунке 3.

В работе [10] приведены данные, согласно которым, средняя высота волн полностью развитого волнения при скорости ветра 15 м/с составляет 3.1 м. Согласно шкале Бофорта скорость $v = 15$ м/с соответствует крепкому ветру, а высота волн может превышать 5 м, см. приложение В. Приведенные описания волнения хорошо согласуются друг с другом и с представленными результатами моделирования.

1.3 Пространственно-временные спектральные модели поверхности морского волнения

Для морского волнения выполняется соотношение, называемое дисперсионным, см., например, [14]:

$$\mu^2 = g\sqrt{\lambda^2 + \nu^2} \cdot \mathrm{th}(H\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}), \tag{21}$$

где μ – временная частота и λ, ν – пространственные частоты монохроматической морской волны, g – ускорение свободного падения, H – глубина водоёма. Из дисперсионного соотношения следует, что спектральная мера поля $w(x, y, t)$ сосредоточена на поверхности, описываемой уравнением:

$$g\sqrt{\lambda^2 + \nu^2} \cdot \mathrm{th}(H\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}) - \mu^2 = 0. \tag{22}$$

На рисунке 4 приведены изображения поверхности (22) при различных значениях параметра H:

$$H = 0.5 \text{ м} \quad \text{и} \quad H = 15 \text{ м}.$$

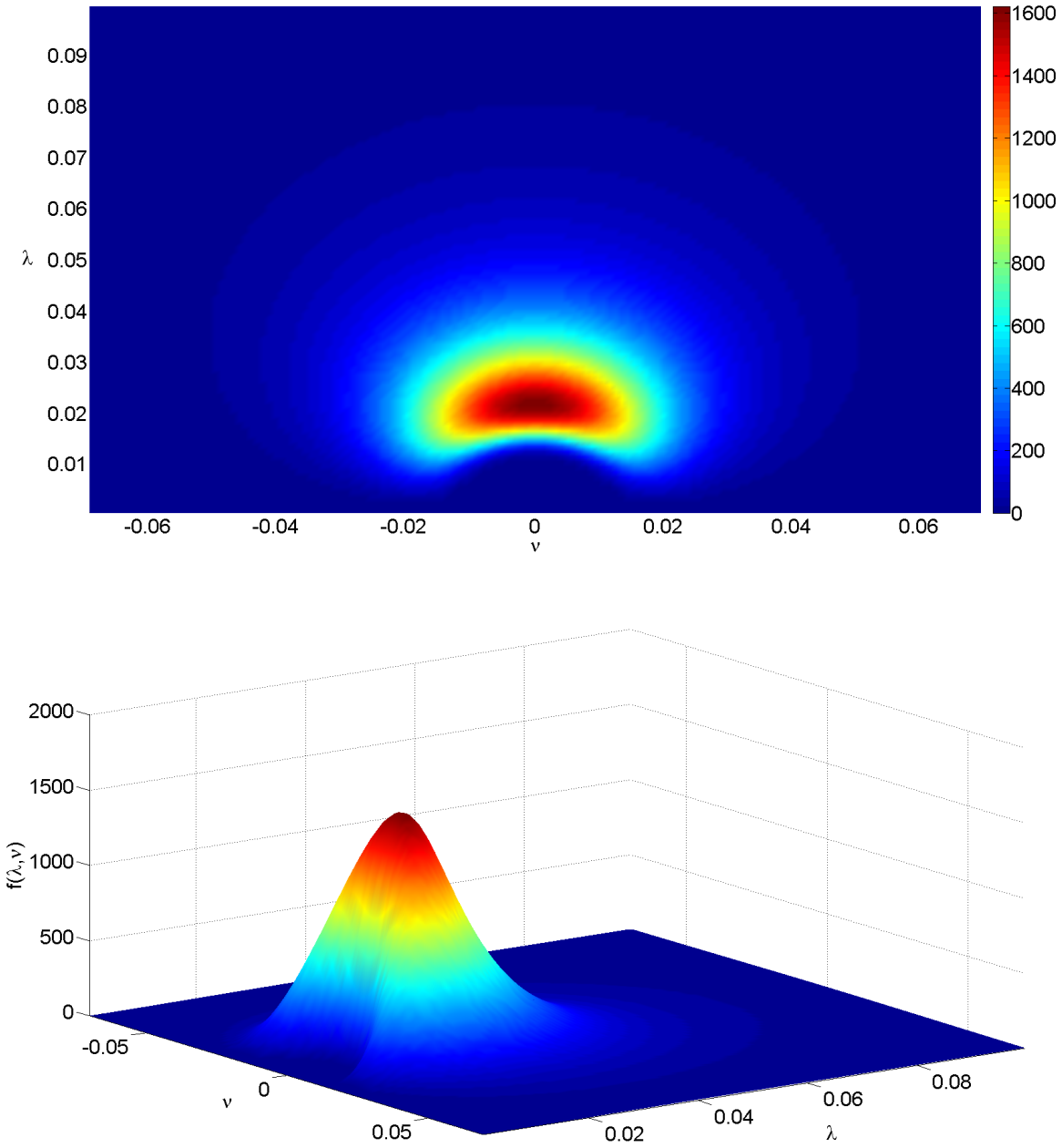

Рис. 2: Спектральная плотность (13) поля $u_{mn}(x, y)$, построенная с использованием аппроксимаций (14), (15) с параметрами (19).

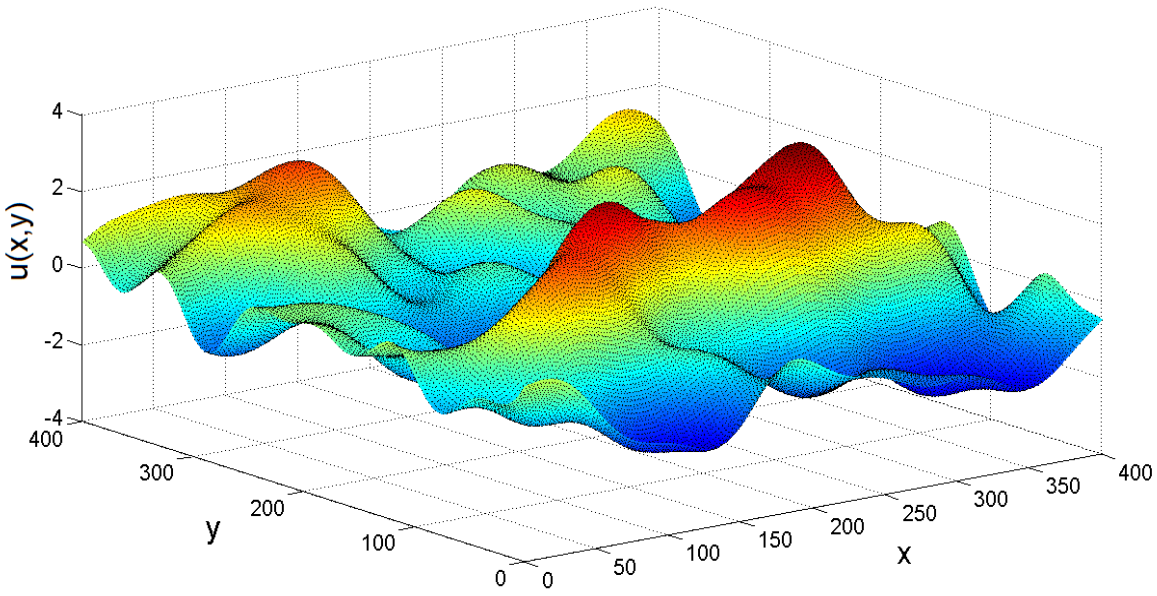

Рис. 3: Реализация пространственной модели СММП-Н. Параметры волнения указаны в тексте. Значения по всем трем осям приведены в метрах.

Физический смысл соотношения (21) состоит в следующем: волна длиной $L = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\lambda^2+\nu^2}}$ на водной поверхности распространяется с фиксированной скоростью

$$V = \sqrt{\frac{gL \cdot \mathrm{th}(\sqrt{\lambda^2+\nu^2}H)}{2\pi}}.$$

В случае глубокой воды, то есть $\sqrt{\lambda^2+\nu^2} \cdot H >> 1$, дисперсионное соотношение (21) упрощается, принимая вид [14]

$$\mu^2 = g\sqrt{\lambda^2+\nu^2} \tag{23}$$

и спектральная мера поля $w(x, y, t)$ сосредоточена на поверхности

$$g\sqrt{\lambda^2+\nu^2} - \mu^2 = 0, \tag{24}$$

изображение которой приведено на рисунке 5.

В случае глубокой воды волна длинной $L = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\lambda^2+\nu^2}}$ на водной поверхности бежит с фиксированной скоростью $V = \sqrt{\dfrac{gL}{2\pi}}$.

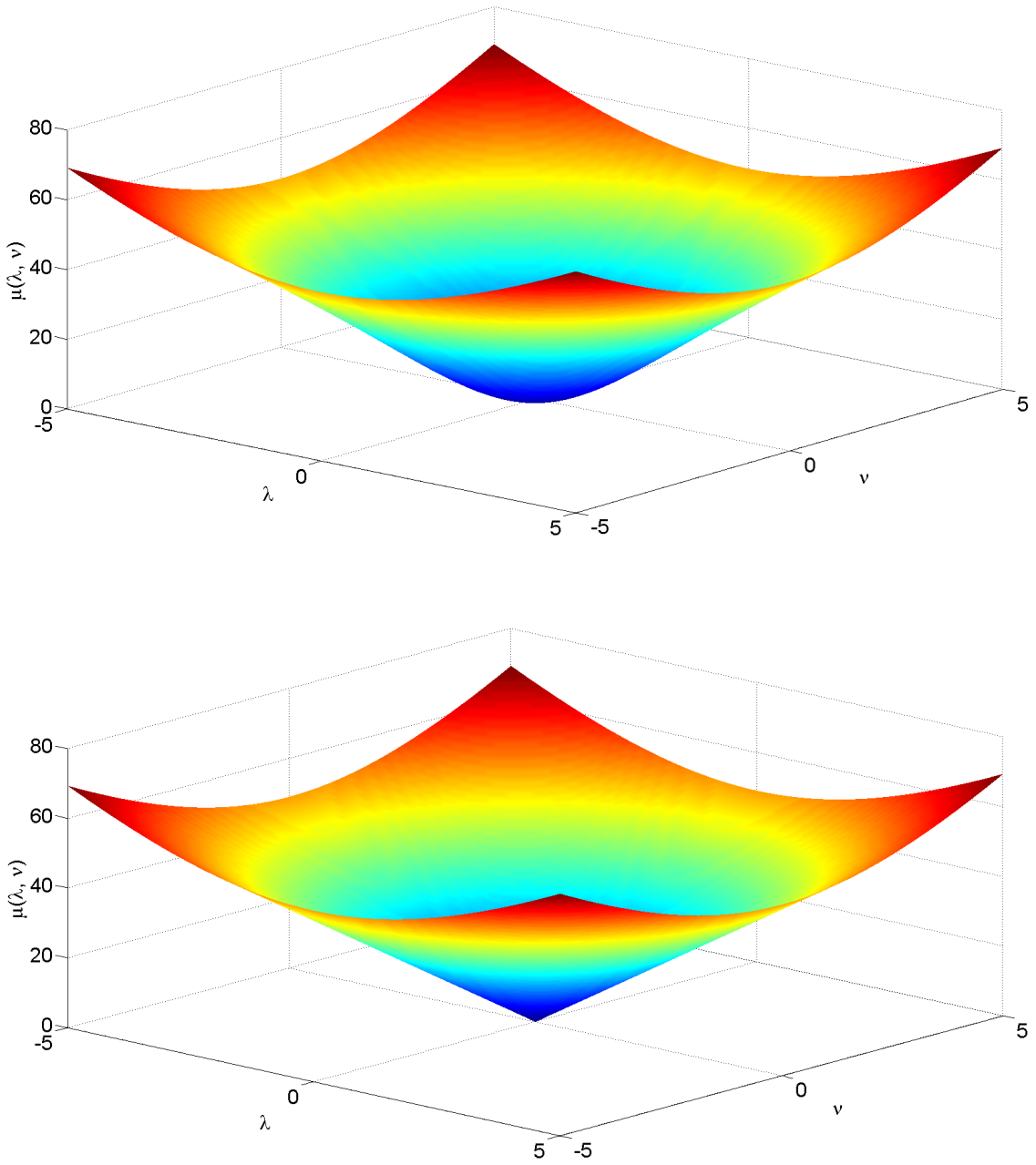

Рис. 4: Поверхность $g\sqrt{\lambda^2+\nu^2}\cdot \mathrm{th}(\sqrt{\lambda^2+\nu^2}\cdot H)-\mu^2=0$, на которой сосредоточена спектральная мера поля $w(x,y,t)$ пространственно-временной модели поверхности морского волнения. На верхнем рисунке представлено изображение поверхности при $H=0.5$ м, на нижнем рисунке - при $H=15$ м.

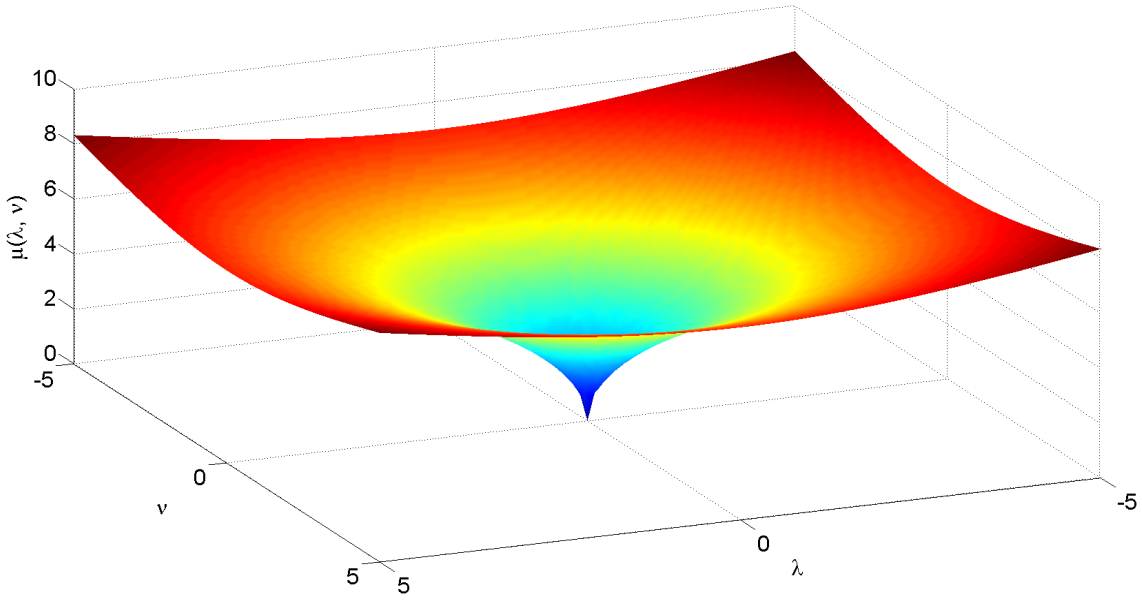

Рис. 5: Поверхность $g\sqrt{\lambda^2+\nu^2}-\mu^2=0$, на которой сосредоточена спектральная мера поля $w(x,y,t)$ пространственно-временной модели поверхности морского волнения в случае глубокой воды.

В данной работе рассматриваются задачи, связанные с моделированием морской поверхности вдалеке от берега, поэтому далее все результаты приведены для случая глубокой воды.

Дисперсионное соотношение обеспечивает относительно простой переход от пространственной спектральной модели к пространственно-временной, поскольку λ, ν и μ связаны соотношением (23). Пространственно-временная модель морской поверхности, соответствующая пространственной модели (16), принимает вид:

$$\begin{gathered} w_{mn}(x,y,t)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\left[\xi_{ij}\cos(\theta_{ij})+\eta_{ij}\sin(\theta_{ij})\right], \\ \theta_{ij}=\lambda_{ij}x+\nu_{ij}y+\mu_{ij}t, \quad \mu_{ij}^2=g\sqrt{\lambda_{ij}^2+\nu_{ij}^2}, \end{gathered} \tag{25}$$

где ξ_{ij}, η_{ij} – независимые стандартные нормальные случайные величины.

Пространственно-временную модель (25), полученную из пространственной СММП (16), будем называть *пространственно-временной СММП*.

Корреляционную функцию поля $w(x,y,t)$ в случае глубокой воды можно

представить в виде

$$R(x,y,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \cos(\lambda x + \nu y + \mu(\lambda,\nu)t) f_{\lambda\nu}(\lambda,\nu) d\lambda d\nu, \tag{26}$$

где

$$f_{\lambda\nu}(\lambda,\nu) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda^2+\nu^2}} \sqrt{\frac{g}{\sqrt{\lambda^2+\nu^2}}} S(\mu) Q(\phi), \quad \mu = \sqrt{g\sqrt{\lambda^2+\nu^2}}, \tag{27}$$

g – ускорение свободного падения, $S(\mu)$ – частотный спектр, $Q(\phi)$ – угловой спектр морского волнения.

Таким образом, для описания пространственно-временной СММП, также как и для пространственных моделей, достаточно задать частотный $S(\mu)$ и угловой $Q(\phi)$ спектры.

По аналогии с пространственными моделями СММП в работе рассматривается три пространственно-временных модели. Модели, полученные из пространственных СММП-Н, СММП-Р_1 и СММП-Р_2 будем называть пространственно-временными моделями СММП-Н, СММП-Р_1 и СММП-Р_2 соответственно. Для пространственно-временных моделей СММП-Н и СММП-Р_1 имеет место (17), а для пространственно-временной СММП-Р_2 - (18).

Рассмотрим пространственно-временную модель СММП-Н. Предположим, что морская поверхность описывается гауссовским однородным случайным полем со спектральной плотностью, которая определяется аппроксимацией (14) частотного спектра $S(\mu)$ с параметрами

$$v = 7 \text{ м/с}, \quad \mu_{\max} = 0.4 \text{ с}^{-1} \tag{28}$$

и аппроксимацией (15) углового спектра $Q(\phi)$, см. рисунок 6. Возьмем следующие параметры спектральной модели:

$$A_{mn} = 0.08 \text{ м}^{-1} \text{ }, B_{mn} = 0.04 \text{ м}^{-1}, \ n = 50, \ m = 50. \tag{29}$$

На рисунке 7 представлены изображения корреляционной функции (26): на верхнем рисунке изображение корреляционной функции при фиксированном значении $y = 0$ м, на нижнем рисунке - при фиксированном значении $t = 0$ с.

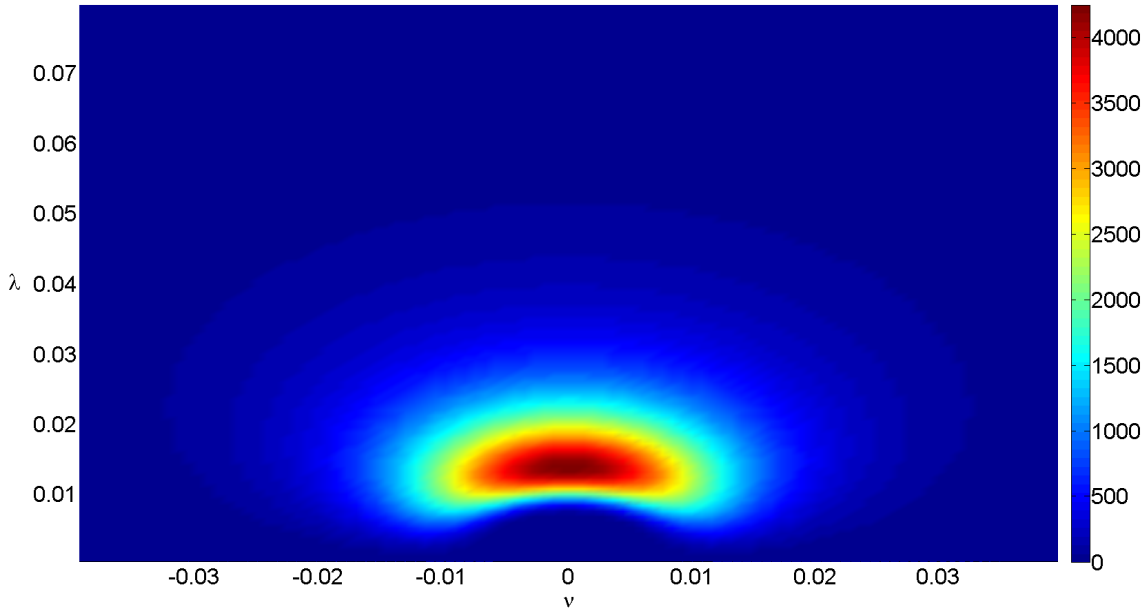

Рис. 6: Спектральная плотность (27), построенная с использованием аппроксимаций (14), (15) с параметрами (28).

На рисунке 8 представлены изображения реализации пространственно- временной модели СММП-Н. Реализация были построены при фиксированном значении $y = 0$ м. Изображения профилей морского волнения по координате x приведены в последовательные моменты времени с интервалом 3 секунды.

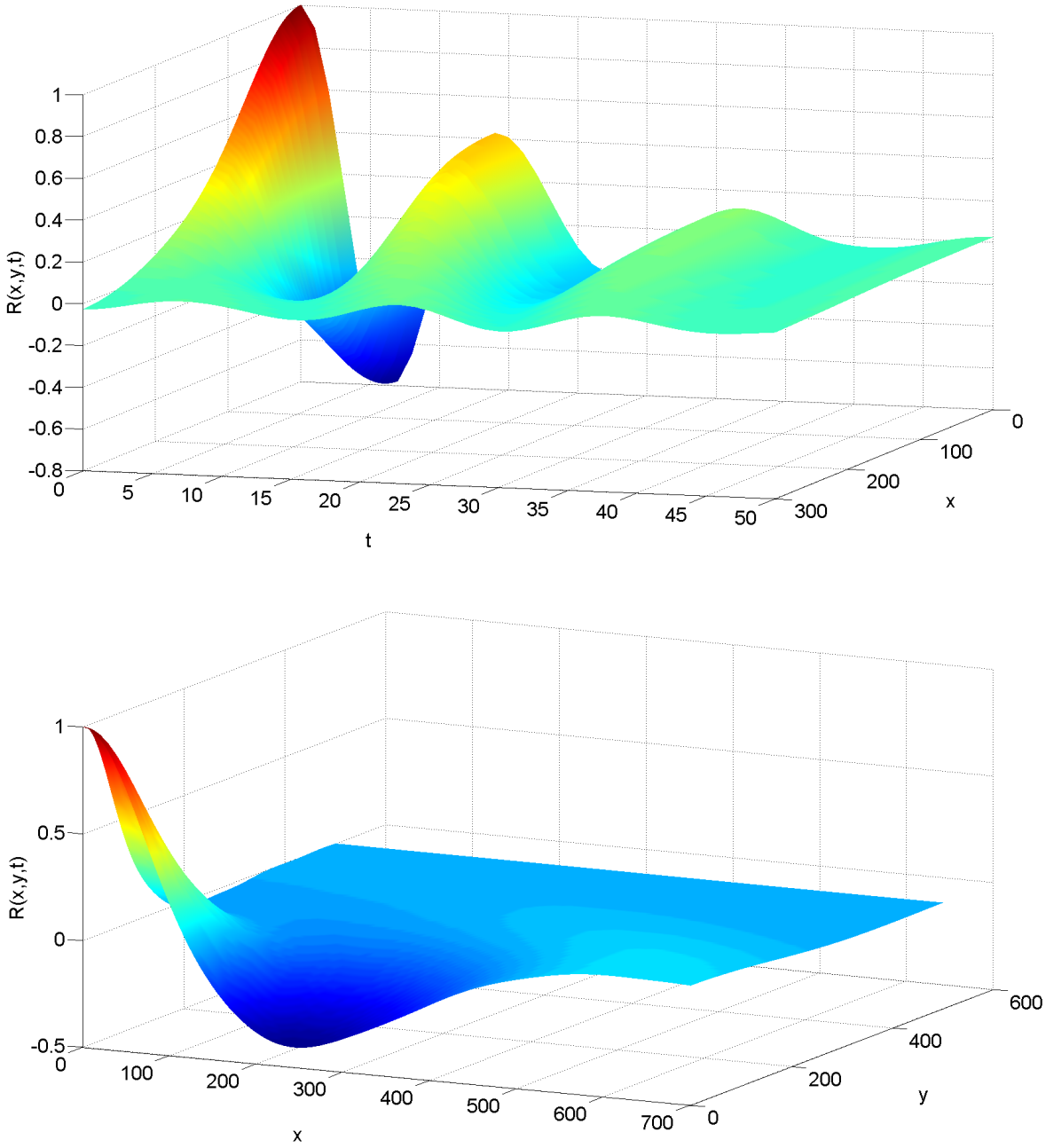

Рис. 7: Корреляционная функция (26) пространственно-временной СММП-Н, параметры волнения приведены в тексте. На верхнем рисунке изображение корреляционной функции при фиксированном значении $y = 0$ м, на нижнем рисунке - при фиксированном значении $t = 0$ с. На верхнем рисунке значения по оси t приведены в секундах, по остальным осям - в метрах. На нижнем рисунке значения по всем трем осям приведены в метрах.

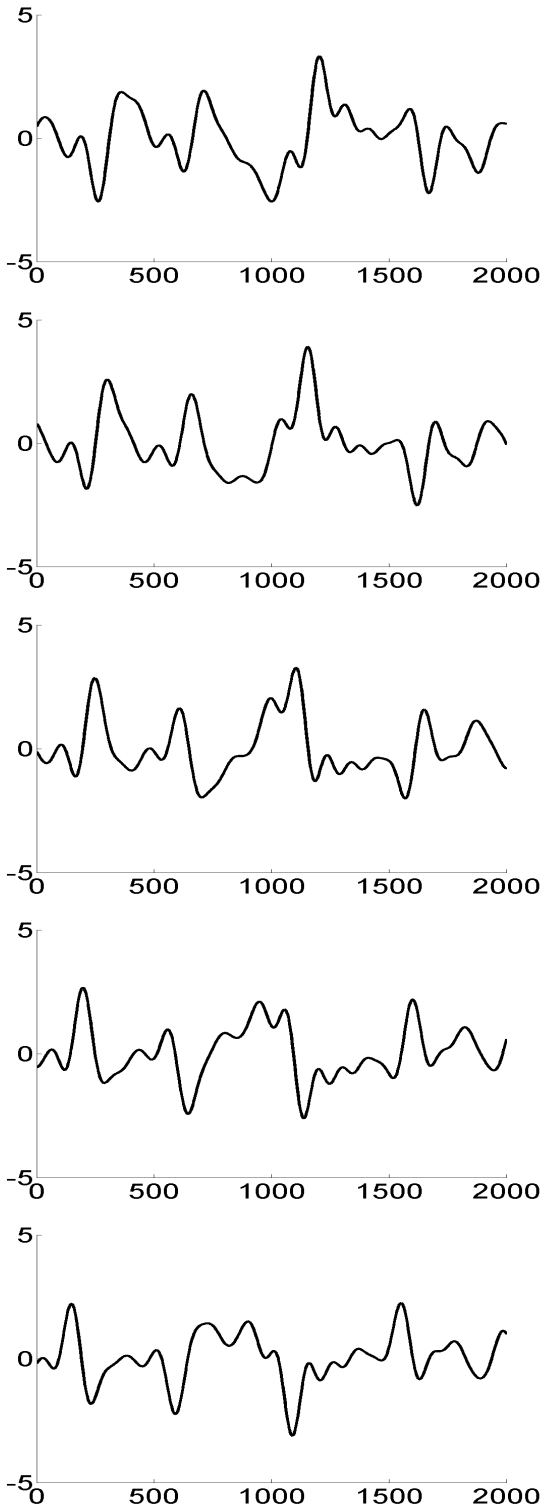

Рис. 8: Реализация пространственно-временной СММП-Н. Профили морской поверхности по координате x представлены с интервалом 3 секунды. Направление движения волн - справа налево. Параметры волнения указаны в тексте. По осям значения приведены в метрах.

2 Исследование спектральных моделей морской поверхности

Для одного и того же случайного поля можно построить множество спектральных моделей, многообразие которых обусловлено, например, размерами спектральной области, способами её разбиения и вариантами выбора частот в соответствующих множествах. Проблема выбора оптимальной модели часто оказывается сложно формализуемой весьма трудоемкой задачей. В этой главе мы изучим влияние размеров спектральной области на точность воспроизведения дисперсии поля возвышений морского волнения, рассмотрим два подхода к сравнению эффективности спектральных моделей и исследуем функциональную сходимость пространственных и пространственно-временных спектральных моделей морской поверхности.

Основные результаты, представленные в этом разделе, опубликованы в [28, 30, 81–84].

2.1 Влияние размеров спектральной области на точность воспроизведения дисперсии

При построении спектральных моделей значительную роль играет выбранная спектральная область. Рассмотрим влияние размеров спектральной области моделей семейства СММП (16), (17), (18) на точность воспроизведения дисперсии поля.

Рассмотрим вещественное однородное гауссовское случайное поле $u(x, y)$ с нулевым средним. Будем предполагать, что спектральная плотность $f_{\lambda\nu}(\lambda, \nu)$ поля $u(x, y)$,

$$f_{\lambda\nu}(\lambda, \nu) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}} \sqrt{\frac{g}{\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}}} S(\mu) Q(\phi), \quad \mu = \sqrt{g\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}}, \tag{30}$$

сосредоточена в ограниченной области $\Lambda = (0, A) \times (-B, B)$ и описывается

аппроксимацией частотного спектра (14):

$$S(\mu)=\begin{cases} 6m_0\left(\mu_{\max}/\mu\right)^5\mu^{-1}\exp\left\{-1.2\left[\left(\mu_{\max}/\mu\right)^5-\left(\mu_{\max}/\mu_1\right)^5\right]\right\}, & \mu\in(0,\mu_1], \\ S(\mu_1)+\left(S(\mu_2)-S(\mu_1)\right)(\mu-\mu_1)/(\mu_2-\mu_1), & \mu\in(\mu_1,\mu_2), \\ 0.0078g^2\mu^{-5}, & \mu\in[\mu_2,\mu_3); \end{cases}$$

где

$$\mu_1=1.8\mu_{\max}\widetilde{\mu}^{-0.7},\quad \mu_2=2.0\mu_{\max}\widetilde{\mu}^{-0.7},\quad \mu_3\approx 30\ \text{с}^{-1},$$
$$m_0=0.00127g^{-2}v^4\widetilde{\mu}^{-3.19},\quad \widetilde{\mu}=v\mu_{\max}g^{-1},$$

с параметрами

$$v=5\ \text{м/с},\quad \mu_{\max}=0.4\ \text{с}^{-1}$$

и аппроксимацией углового спектра (15):

$$Q(\phi)=\frac{2}{\pi}\cdot\cos^2(\phi),\quad \phi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

В качестве спектральной модели поля $u(x,y)$ рассмотрим модель СММП со спектральной областью $\Lambda^{mn}=(0,A_{mn})\times(-B_{mn},B_{mn})\subset\Lambda$. Обозначим модель СММП поля $u(x,y)$ через $u_{mn}(x,y)$. Напомним, что $m\times n$ – число гармоник.

Рассмотрим, насколько существенно отличается дисперсия D_{mn} спектральной модели $u_{mn}(x,y)$,

$$D_{mn}=\int\limits_{\Lambda^{mn}} f_{\lambda\nu}(\lambda,\nu)d\lambda d\nu, \tag{31}$$

от дисперсии D случайного поля $u(x,y)$,

$$D=\int\limits_{\Lambda} f_{\lambda\nu}(\lambda,\nu)d\lambda d\nu, \tag{32}$$

в зависимости от выбранной спектральной области.

Предположим, что спектральное пространство Λ случайного поля $u(x,y)$ имеет размеры:

$$A=0.6\ \text{м}^{-1},\quad B=0.3\ \text{м}^{-1}. \tag{33}$$

Такое спектральное пространство охватывает диапазон волн длиной более 9.4 м (которые распространяются со скоростью более 4.7 м/с). Значение частоты

спектрального максимума $\mu_{max} = 0.4$ с$^{-1}$ соответствует волнению с наиболее вероятной длиной волн, равной 384.8 м. Поэтому мы можем пренебречь волнами длиной менее 9.4 м.

Вычислив значение интеграла (32), получим:

$$D = 1.316 \text{ м}^2.$$

Теперь, постепенно уменьшая размеры A_{mn} и B_{mn} спектральной области Λ^{mn}, вычислим значения дисперсий модели (31). Полученные результаты приведены в таблице 1.

Таблица 1: Значения дисперсии D_{mn} поля $u_{mn}(x, y)$, вычисленные при различных размерах A_{mn} и B_{mn} спектральной области Λ^{mn}.

A_{mn}, м$^{-1}$	B_{mn}, м$^{-1}$	D_{mn}, м^2	D / D_{mn}, %
0.6	0.3	1.316	100
0.3	0.15	1.314	99.85
0.15	0.075	1.306	99.24
0.1	0.05	1.290	98.02
0.075	0.0375	1.263	95.97
0.05	0.025	1.178	89.51

На рисунке 9 приведены изображения спектральных плотностей модели СММП с различными значениями параметров A_{mn} и B_{mn}.

Из таблицы 1 видно, что при выборе спектральной области достаточного размера, то есть содержащего основную «массу» спектральной плотности, дисперсия ненамного изменяет свое значение (менее, чем на 5%). Однако, в конкретной ситуации выбор размеров спектральной области определяется решаемой задачей и требуемой точностью.

Замечание 3. При проведении расчетов значения интегралов (31) и (32) вычислялись методом прямоугольников. Значения дисперсий (31) для различных

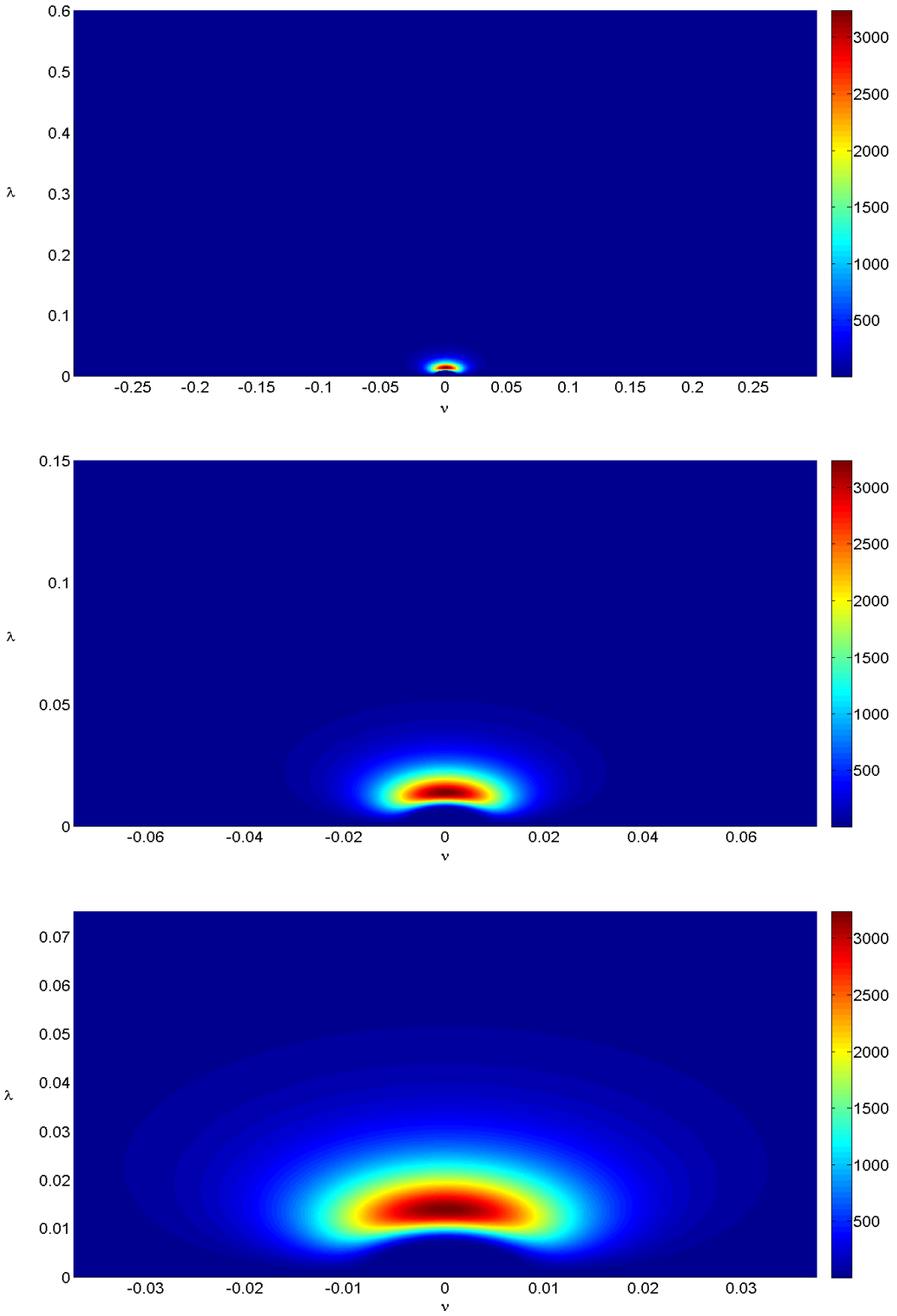

Рис. 9: Спектральные области модели $u_{mn}(x, y)$ для различных размеров: на верхнем рисунке $A_{mn} = 0.6$ м$^{-1}$, $B_{mn} = 0.3$ м$^{-1}$; на среднем рисунке $A_{mn} = 0.15$ м$^{-1}$, $B_{mn} = 0.075$ м$^{-1}$; на нижнем рисунке $A_{mn} = 0.075$ м$^{-1}$, $B_{mn} = 0.0375$ м$^{-1}$. Параметры спектральной плотности указаны в тексте.

размеров спектральных областей вычислялись с одинаковым фиксированным шагом $h = 0.0001$. Это обеспечивает хорошую точность вычислений. Действительно, приведем оценку погрешности δ вычисления интеграла (32) по правилу Рунге:

$$\delta = \frac{|D(h) - D(h/2)|}{2^p - 1},$$

где $p = 2$ – порядок точности метода, $D(h)$ – численная аппроксимация интеграла (32) методом прямоугольников с шагом сетки h. Вычислим значения интеграла (32) с шагом $h = 0.0001$ и шагом $h/2 = 0.00005$:

$$D(h) = 1,315949297, \quad D(h/2) = 1,315950023.$$

Тогда

$$\delta = 2,42 \cdot 10^{-7}.$$

Такой точности для нашей задачи вполне достаточно.

2.2 Изучение корреляционных погрешностей спектральных моделей морской поверхности

Предположим, что поле возвышения морского волнения относительно среднего уровня описывается гауссовским однородным по пространству и стационарным по времени случайным полем $w(x, y, t)$ с нулевым средним и корреляционной функцией (26):

$$R(x, y, t) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \cos(\lambda x + \nu y + \mu t) f_{\lambda\nu}(\lambda, \nu) d\lambda d\nu,$$

$$\mu^2 = g\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}, \tag{34}$$

где $f_{\lambda\nu}(\lambda, \nu)$ – спектральная плотность случайного поля $u(x, y) = w(x, y, 0)$, которая описывается частотным спектром (14) с параметрами

$$v = 5 \text{ м/с}, \quad \mu_{\max} = 0.4 \text{ с}^{-1}, \tag{35}$$

угловым спектром (15) и сосредоточена на множестве $\Lambda = (0, A) \times (-A, A)$, то есть $B = A$, где

$$A = 0.1 \text{ м}^{-1}. \tag{36}$$

Рассмотрим пространственно-временные модели СММП (17), (18), (25) поля $w(x, y, t)$ со спектральной областью $\Lambda^{mn} = (0, A) \times (-A, A)$, представимые в виде суммы $2n^2$ гармоник, то есть $m = 2n$.

Корреляционные функции рандомизированных моделей СММП-Р$_1$ и СММП-Р$_2$ совпадают с корреляционной функцией поля $w(x, y, t)$. Спектральное представление корреляционной функции нерандомизированной модели СММП-Н имеет вид:

$$R_n(x, y, t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{2n} a_{ij}^2 \cos(\lambda_{ij} x + \nu_{ij} y + \mu_{ij} t),$$

где

$$\mu_{ij}^2 = g\sqrt{\lambda_{ij}^2 + \nu_{ij}^2},$$

$$a_{ij}^2 = \iint\limits_{\Lambda_{ij}^{mn}} f_{\lambda\nu}(\lambda, \nu) d\lambda d\nu, \qquad i = 1, .., n, \;\; j = 1, ..., 2n.$$

Введем обозначения:

$$R^T(t) = R(0, 0, t), \quad R^X(x) = R(x, 0, 0), \quad R^Y(y) = R(0, y, 0),$$
$$R_n^T(t) = R_n(0, 0, t), \quad R_n^X(x) = R_n(x, 0, 0), \quad R_n^Y(y) = R_n(0, y, 0).$$

На рисунке 10 представлены одномерные нормированные корреляционные функции по времени R_n^T и по пространственным координатам R_n^X и R_n^Y пространственно-временной СММП-Н при $n = 25$. Корреляционные функции СММП-Н хорошо аппроксимируют корреляционные функции поля морского волнения только на начальных участках. С увеличением расстояния, там где корреляционные функции поля морского волнения близки к нулю, корреляционные функции спектральной модели существенно отклоняются от нулевых значений. Для увеличения расстояния, на котором сохраняется воспроизводимость корреляционных функций, необходимо увеличивать число гармоник. В таблице 2 приведены расстояния, на которых нормированные корреляционные

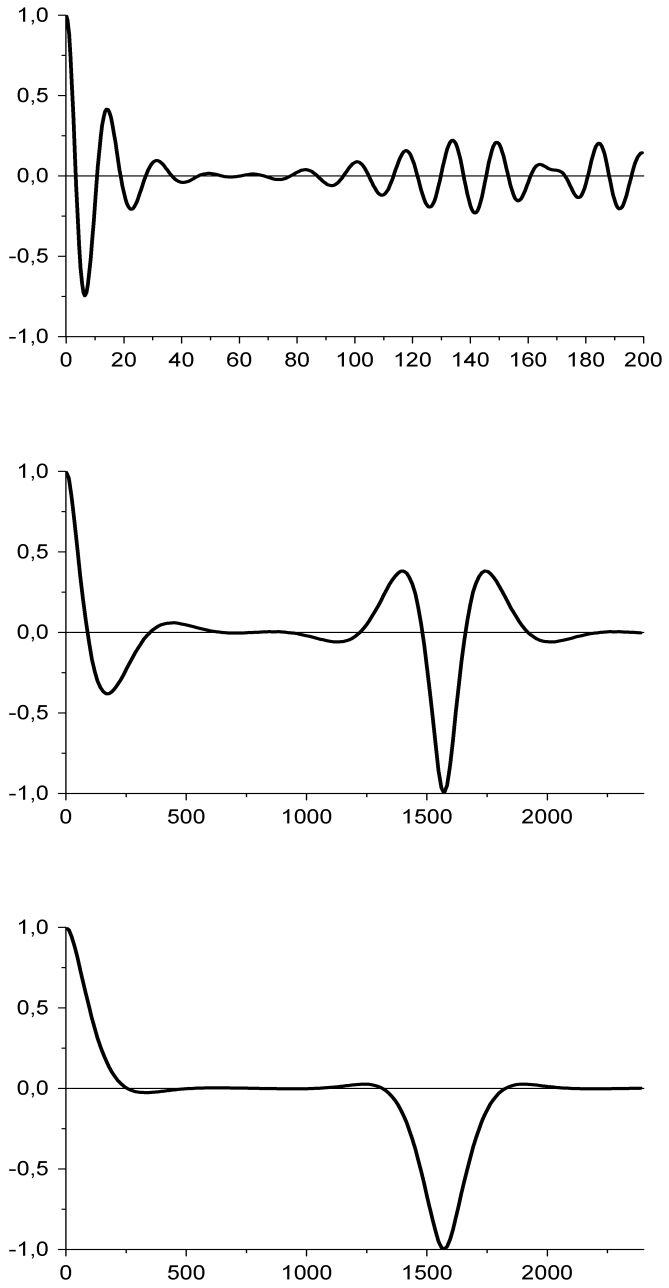

Рис. 10: Нормированные корреляционные функции нерандомизированной пространственно-временной СММП-Н поля $w(x, y, t)$ при $n = 25$. Верхний рисунок – нормированная корреляционная функция по времени R_n^T (по горизонтальной оси значения даны в секундах), средний рисунок – нормированная корреляционная функция R_n^X (по горизонтальной оси значения даны в метрах), нижний рисунок – нормированная корреляционная функция R_n^Y (по горизонтальной оси значения даны в метрах). Направление ветра совпадает с осью OX.

функции моделей СММП-Н адекватно (с абсолютной погрешностью не более 0.02) передают корреляционные функции случайного поля, в зависимости от n.

Таблица 2: Расстояния D^T, D^X, D^Y, на которых пространственно-временные СММП-Н воспроизводят нормированные корреляционные функции случайного поля $w(x, y, t)$ с абсолютной погрешностью не боле 0.02, в зависимости от параметра n.

n	D^T, с	D^X, м	D^Y, м
25	90	1000	1300
50	180	2550	2750
100	420	5750	6000

Описанное поведение корреляционных функций объясняется тем, что корреляционные функции R_n^X и R_n^Y модели СММП-Н представляются в виде суммы гармоник и являются почти периодическими функциями (о почти периодических функциях см., например, [20, 40]). В таблице 3 представлены значения полупериодов P^X и P^Y спектральных моделей СММП-Н, то есть расстояния до ближайших отрицательных пиков нормированных корреляционных функций R_n^X и R_n^Y, приближающихся к значению -1 (см. рисунок 10).

Таблица 3: Значения полупериодов P^X и P^Y пространственно-временной модели СММП-Н поля $w(x, y, t)$ в зависимости от параметра n.

n	P^X, м	P^Y, м
25	1570	1510
50	3150	3150
100	6300	6300

Что касается временной корреляционной функции R_n^T, то с увеличением числа гармоник увеличивается расстояние до участка со значительными откло-

нениями от нулевых величин, а сами отклонения уменьшаются по абсолютному значению, см. рисунки 10 (верхний) и 11. Отметим, что в случае пространствен-

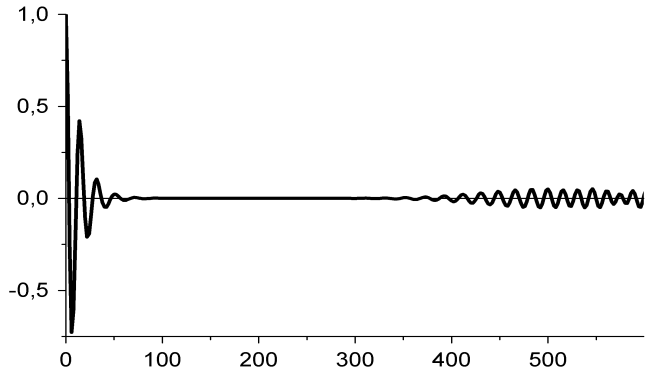

Рис. 11: Нормированная корреляционная функция нерандомизированной пространственно-временной модели СММП-Н поля $w(x, y, t)$ при $n = 100$ (по горизонтальной оси значения даны в секундах).

ных корреляционных функций R_x^n и R_y^n сетки для λ и ν задаются равномерно. Сетка же для μ получается автоматически, и равномерность пропадает. На рисунке 12 изображена гистограмма значений $\mu_{ij} = \sqrt{g\sqrt{\lambda_i^2 + \nu_j^2}}$, полученных из $\lambda_i = 0 : 0.0042 : 0.1$ и $\nu_j = 0 : 0.0042 : 0.1$ при $n = 25$. При построении гистограмма разбивалась на 60 интервалов.

В пункте 1.1 были введены понятия корреляционной погрешности для нерандомизированных и рандомизированных спектральных моделей. Рассмотрим корреляционную погрешность (5) нерандомизированной пространственно-временной СММП-Н в виде:

$$\Delta_N^T = \sup_{t \in (0, T_{max})} |R^T(t) - R_n^T(t)|,$$
$$\Delta_N^X = \sup_{x \in (0, X_{max})} |R^X(x) - R_n^X(x)|,$$
$$\Delta_N^Y = \sup_{y \in (0, Y_{max})} |R^Y(y) - R_n^Y(y)|.$$

Корреляционные погрешности рандомизированных моделей (8) примут вид:

$$\Delta_j^T = \mathbf{M} \sup_{t \in (0, T_{max})} |R^T(t) - R_n^T(t)|,$$

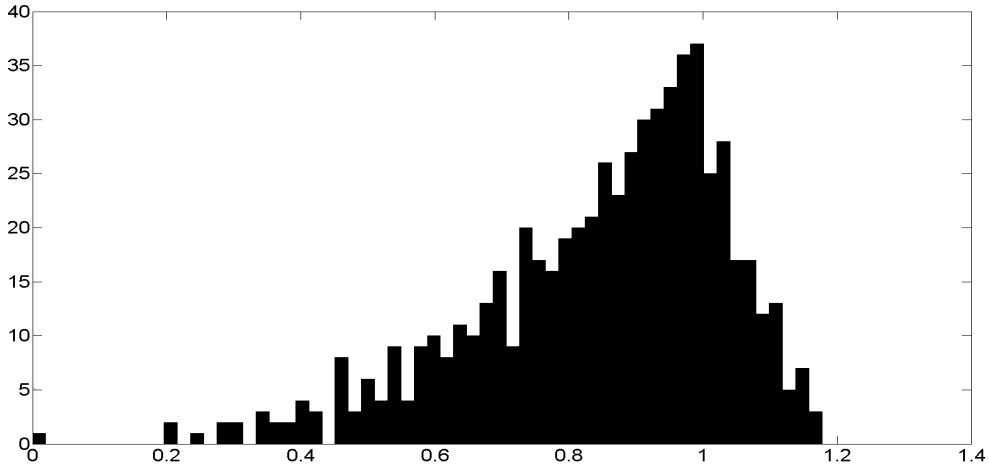

Рис. 12: Гистограмма значений μ_{ij}, полученных из $\lambda_i = 0 : 0.0042 : 0.1$ и $\nu_j = 0 : 0.0042 : 0.1$ с помощью дисперсионного соотношения (23) для глубокой воды при $n = 25$. Гистограмма разбита на 60 интервалов. По оси абсцисс значения приведены в с^{-1}.

$$\Delta_j^X = \mathbf{M} \sup_{x \in (0, X_{max})} |R^X(x) - R_n^X(x)|,$$
$$\Delta_j^Y = \mathbf{M} \sup_{y \in (0, Y_{max})} |R^Y(y) - R_n^Y(y)|,$$

где индекс j принимает значение $R1$, если мы рассматриваем погрешность модели СММП-Р$_1$, и значение $R2$ для модели СММП-Р$_2$.

В таблице 4 приведены значения корреляционных погрешностей пространственно - временных моделей СММП-Н, СММП-Р$_1$ и СММП-Р$_2$ для различных значений T_{max}, X_{max}, Y_{max}. Для рандомизированных моделей каждое значение вычислялось методом Монте-Карло с использованием 100 000 независимых реализаций спектральной модели.

Нетрудно заметить, что отклонения корреляционных функций для нерандомизированной модели СММП-Н существенно меньше соответствующих усредненных отклонений рандомизированных моделей. Однако, рандомизированные модели позволяют точно воспроизводить спектр и корреляционную структуру моделируемого поля «по ансамблю реализаций», что при решении прикладных

Таблица 4: Корреляционные погрешности пространственно-временных спектральных моделей СММП-Р$_1$, СММП-Р$_2$ и СММП-Н поверхности морского волнения $w(x, y, t)$ по времени и пространственным переменным в зависимости от n при $A_{mn} = 0.1$ м$^{-1}$.

n	T_{max}, с	$\Delta^T_{R1}(T_{max})$, м^2	$\Delta^T_{R2}(T_{max})$, м^2	$\Delta^T_N(T_{max})$, м^2
25	60	0.082	0.174	0.016
50	120	0.049	0.103	0.016
100	240	0.028	0.058	0.015
n	X_{max}, м	$\Delta^X_{R1}(X_{max})$, м^2	$\Delta^X_{R2}(X_{max})$, м^2	$\Delta^X_N(X_{max})$, м^2
1250	750	0.081	0.170	0.017
5000	1500	0.048	0.102	0.017
20000	3000	0.029	0.058	0.016
n	Y_{max}, м	$\Delta^Y_{R1}(Y_{max})$, м^2	$\Delta^Y_{R2}(Y_{max})$, м^2	$\Delta^Y_N(Y_{max})$, м^2
1250	750	0.081	0.156	0.011
5000	1500	0.046	0.094	0.011
20000	3000	0.026	0.054	0.011

задач часто оказывается полезным.

Что касается рандомизированных моделей, из таблицы видно, что рандомизированная модель СММП-Р$_1$ с разбиением спектра «в среднем» воспроизводит корреляционную структуру моделируемого поля более точно, чем модель СММП-Р$_2$.

2.3 Сравнение оценок функционалов для различных спектральных моделей

Проведем сравнение спектральных моделей поверхности морского волнения на тестовой задаче. Рассмотрим задачу оценки функционала от случайного процесса. Нам понадобится точное значение функционала, поэтому будем использовать функционал с известным аналитическим выражением.

Рассмотрим $w^t(t)$ – вещественный стационарный гауссовский дифференцируемый процесс с нулевым средним и дисперсией σ_0^2, который описывает морское волнение в фиксированной точке пространства. Обозначим через σ_1^2 дисперсию производной процесса $w^t(t)$. Будем предполагать, что спектральная плотность процесса сосредоточена на отрезке $M = (0, L)$, где

$$L = 2 \text{ с}^{-1},$$

и описывается аппроксимацией (14) частотного спектра $S(\mu)$ с параметрами

$$v = 10 \text{ м/с}, \quad \mu_{\max} = 0.3 \text{ с}^{-1}. \tag{37}$$

На рисунке 13 представлено изображение спектральной плотности $S(\mu)$.

Будем рассматривать временные спектральные модели процесса $w^t(t)$ в виде:

$$w_n^t(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j \left[\xi_j \cos(\mu_j t) + \eta_j \sin(\mu_j t)\right], \tag{38}$$

где ξ_j, η_j – независимые стандартные нормальные случайные величины. В качестве спектральной области модели возьмем отрезок $M^n = M$. При использовании принципа разбиения спектрального пространства спектральная область M^n разбивается на отрезки M_j^n равной длины $\dfrac{L}{n}$, $j = 1, ..., n$. В случае нерандомизированной спектральной модели частоты μ_j выбираются как центры отрезков M_j^n и

$$a_j^2 = \int\limits_{M_j^n} S(\mu) d\mu, \qquad j = 1, .., n.$$

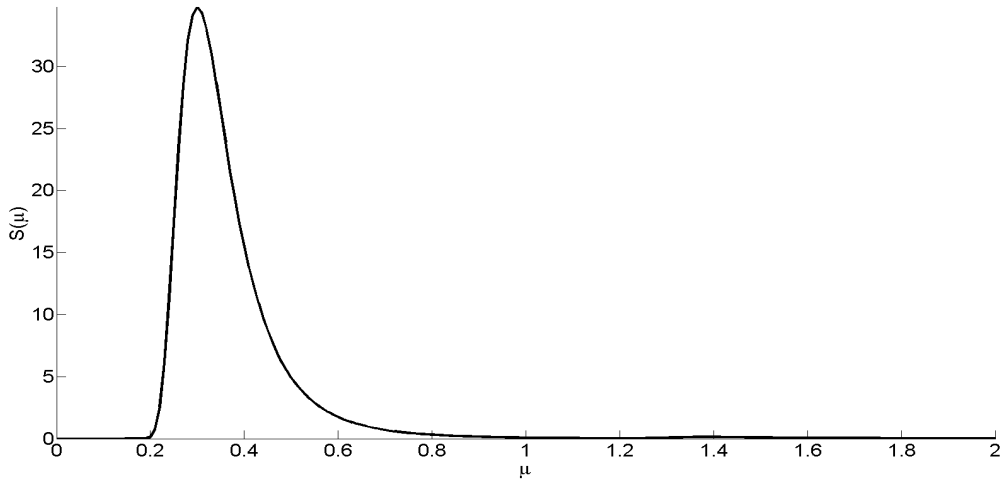

Рис. 13: Спектральная плотность $S(\mu)$ процесса ветрового волнения $w^t(t)$. Параметры спектральной плотности указаны в тексте.

Обозначим описанную нерандомизированную модель как модель N. В случае рандомизированной спектральной модели a_j вычисляются также как и для модели N, а частоты μ_j выбираются в подобластях M_j^n случайно, согласно распределениям, индуцированным плотностью $S(\mu)$ в соответствующих множествах M_j^n. Такую модель обозначим через R_1. А рандомизированню модель построенную без разбиения спектрального пространства обозначим через R_2. В этом случае частоты μ_j распределены во всей области M^n с плотностью, пропорциональной $S(\mu)$, независимы в совокупности и

$$a_j^2 = \frac{\int\limits_{M^n} S(\mu)d\mu}{n}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Будем говорить, что имеет место выброс процесса $w^t(t)$ за уровень C, если случайный процесс пересек уровень C снизу вверх. На рисунке 14 представлена траектория случайного процесса. Серым цветом закрашены области, соответствующие выбросам выше уровня C, $\Theta(C)$ – длительность интервала между выбросами.

В работе [37] представлено аналитическое выражение для средней длитель-

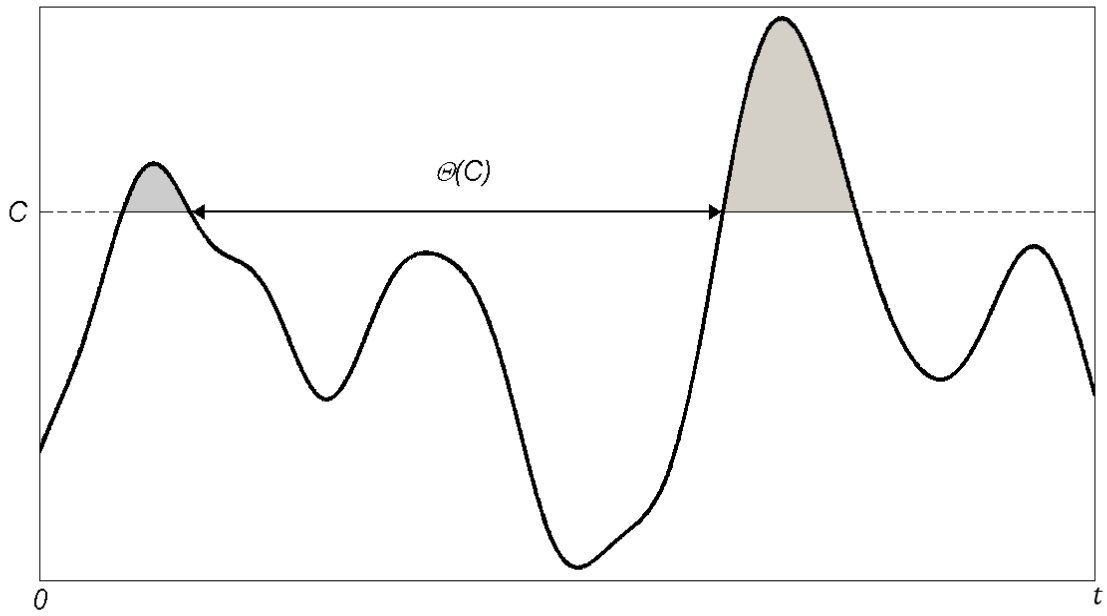

Рис. 14: Траектория случайного процесса. Серым цветом отмечены выбросы случайного процесса выше уровня C, $\Theta(C)$ – длительность интервала между выбросами за уровень C.

ности интервалов $\Theta(C)$ между выбросами процесса за уровень C:

$$\Theta(C) = 2\pi \cdot \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \cdot \Phi\left(\frac{C}{\sigma_0}\right) \cdot \exp\left(\frac{C^2}{2\sigma_0^2}\right), \tag{39}$$

где Φ – функция стандартного нормального распределения.

Для волнения, которое описывается спектральной плотностью (14) с параметрами (37), мы можем вычислить теоретическое значение функционала $\Theta(C)$ по формуле (39). Возьмем $C = 1$ м и получим следующее значение функционала (39):

$$\Theta(C) = 11.6806 \text{ с.}$$

Обозначим через $\Theta_n(C)$ среднюю длительность интервалов между выбросами процесса за уровень C, вычисленную для спектральных моделей $w_n^t(t)$ морской поверхности.

Для стационарного гауссовского процесса справедливо [42]:

$$\sigma_0^2 = R(0) = \int\limits_0^\infty S(\mu)d\mu,$$
$$\sigma_1^2 = -R''(0) = \int\limits_0^\infty \mu^2 S(\mu)d\mu.$$

Поэтому для нерандомизированной модели мы можем вычислить значения σ_0^2 и σ_1^2 для различного числа гармоник и, подставив их в формулу (39), получим значения $\Theta_n(C)$ для модели N.

В случае рандомизированных моделей R_1 и R_2 значения $\Theta_n(C)$ оценивались методом Монте-Карло по 100 000 реализаций длиной 1000 с.

В таблице 5 представлены значения $\Theta_n(C)$, вычисленные для моделей N, R_1 и R_2 для $C = 1$ м при различном числе гармоник n. Отметим, что малое число гармоник было выбрано намеренно: при этом более ощутима разница между точностью моделей. Из результатов вычислений видно, что среди рандомизированных модель R_1 с разбиением спектральной области дает более точные результаты.

Замечание 4. В данном пункте для сравнения спектральных моделей был использован функционал с известным аналитическим выражением. В общем слу-

Таблица 5: Оценки $\Theta_n(C)$ функционала $\Theta(C)$, вычисленные для моделей N, R_1 и R_2, и их абсолютные погрешности для заданного числа гармоник n.

$n = 4$	N	R_1	R_2
$\Theta_n(C)$, с	13.6927	10.6711	10.2013
$\lvert\Theta(C) - \Theta_n(C)\rvert$, с	2.0121	1.0094	1.4793
$n = 8$	N	R_1	R_2
$\Theta_n(C)$, с	12.1867	11.3017	10.7361
$\lvert\Theta(C) - \Theta_n(C)\rvert$, с	0.5061	0.3789	0.9445
$n = 16$	N	R_1	R_2
$\Theta_n(C)$, с	11.6299	11.5129	10.8987
$\lvert\Theta(C) - \Theta_n(C)\rvert$, с	0.0507	0.1677	0.7819

чае точное значение функционала не известно. В такой ситуации можно взять заведомо большое число гармоник и вычислить «точное» значение функционала. Число гармоник будет определяться размером спектрального пространства и точностью решаемой задачи. После вычисления «точного» значения функционала для анализа эффективности спектральных моделей можно использовать описанный выше подход.

2.4 Сходимость спектральных моделей поверхности морского волнения

Далее мы будем предполагать, что спектральное пространство случайного поля ограничено. Для моделей поверхности морского волнения это означает, что нас интересуют достаточно крупные волны, например, волны, которые оказывают заметное влияние на морские сооружения или движение морских судов, и можно игнорировать наличие волн пренебрежимо малой длины.

Пусть поверхность морского волнения описывается гауссовским однородным случайным полем $u(x,y)$ с нулевым средним и со спектральной плотностью, сосредоточенной в области $\Lambda = (0,A) \times (-B,B)$. Обозначим через $u_{mn}(x,y)$ пространственную модель СММП поля $u(x,y)$, рассмотренную в главе 1, где $\Lambda \supset \Lambda^{mn} = (0,A_{mn}) \times (-B_{mn},B_{mn})$ – спектральная область модели и $n \times m$ – число гармоник.

Ниже получены достаточные условия сходимости моделей СММП (16), (17), (18), (25). Изучена сходимость конечномерных распределений, а также слабая сходимость в пространствах $\mathbb{C}^p$ и $\mathbb{L}^p$.

Отметим, что слабая сходимость приближенных случайных моделей (в функциональном пространстве $\mathbb{F}$) представляет особый интерес при решении задач методом Монте-Карло, так как она означает сходимость средних

$$\mathbf{M}f(w_{mn}) \to \mathbf{M}f(w) \text{ при } mn \to \infty \tag{40}$$

для любого измеримого (на $\mathbb{F}$) функционала f такого, что случайные величины $f(w_{mn})$ равномерно интегрируемы и $\mathbf{P}(w \in D_f) = 0$, где D_f – множество точек разрыва функционала f [3].

Теорема 1. Рассмотрим пространственные спектральные модели СММП-Н, СММП-P_1 (16), (17) и СММП-P_2 (16), (18). Предположим, что для спектрального пространства Λ случайного поля $u(x,y)$ и спектральных областей Λ^{mn} пространственных моделей СММП $u_{mn}(x,y)$ выполняется условие:

$$\Lambda^{mn} = \Lambda \tag{41}$$

Тогда при $n \to \infty$ и $m \to \infty$ справедливо:

1. конечномерные распределения пространственных моделей СММП-Н, СММП-P_1 и СММП-P_2 сходятся к конечномерным распределениям поля $u(x,y)$;

2. пространственные модели СММП-Н, СММП-P_1 и СММП-P_2 слабо сходятся к $u(x,y)$ в пространстве $\mathbb{C}^p(K)$, где K – компакт в $\mathbb{R}^2$ и $p \in \{0,1,...\}$;

3. пространственные модели СММП-Н, СММП-P_1 и СММП-P_2 слабо сходятся к $u(x,y)$ в пространстве $\mathbb{L}^p(K)$, где K – компакт в $\mathbb{R}^2$ и $p \geq 1$.

Доказательство. Доказательство следует из общих результатов сходимости спектральных моделей случайных полей [42]. Приведем необходимые формулировки.

Пусть $U(z)$, $z \in \mathbb{R}^k$ – гауссовское однородное поле с нулевым средним и спектральной мерой χ. Обозначим через $U_N(z)$ спектральную модель поля $U(z)$:

$$U_N(z) = \sum_{j=1}^{N} a_j \big[\xi_j \cos\langle \lambda_j, z\rangle + \eta_j \sin\langle \lambda_j, z\rangle\big]. \tag{42}$$

Рассмотрим разбиение спектральной области Λ^U модели $U_N(z)$:

$$\Lambda^U = \sum_{j=1}^{N} \Lambda_j^U, \qquad \Lambda_i^U \cap \Lambda_j^U = \emptyset \ \text{ где } \ i \neq j.$$

Введем обозначения:

1. модель M_1: $a_j^2 = \chi(\Lambda_j^U)$, $\lambda_j \in \Lambda_j^U$, λ_j - неслучайные;

2. модель M_2: $a_j^2 = \chi(\Lambda_j^U)$, λ_j - случайные векторы, распределения которых сосредоточенны в соответствующих областях Λ_j^U и индуцированы спектральной мерой χ;

3. модель M_3: $a_j^2 = \dfrac{\chi(\Lambda^U)}{N}$, λ_j - независимые случайные векторы, распределенные по спектральной мере χ.

Сформулируем ряд утверждений для моделей M_1, M_2 и M_3, доказательства которых можно найти в работах [18, 42].

Утверждение 1. Для сходимости конечномерных распределений модели M_1 к гауссовским распределениям предельного поля $U(z)$ достаточны следующие условия:

$$\begin{aligned} &\Lambda_N^U \subset \{|\lambda| \geq c_N\}, \quad c_N \to \infty, \\ &\max_{j<N} \operatorname{diam}(\Lambda_j^U) \to 0, \ \text{ при } \ N \to \infty. \end{aligned} \tag{43}$$

Для сходимости конечномерных распределений модели M_2 достаточно выполнение условия

$$\max_{j<N} \chi(\Lambda_j^U) \to 0 \text{ при } N \to \infty. \tag{44}$$

Для модели M_3 имеет место сходимость конечномерных распределений к гауссовским распределениям.

Утверждение 2. Для модели M_3 слабая сходимость спектральной модели $U_N(z)$ к однородному гауссовскому полю $U(z)$ в $\mathbb{C}^p(X)$ следует из условия

$$\int\limits_{\Lambda^U} |\lambda|^{\beta+2p} \chi(d\lambda) < \infty, \tag{45}$$

где $\beta > 0$. Для модели M_1 дополнительно требуются условие (43) и ограничение на рост λ_N, например, $|\lambda_N| = c_N$. Для модели M_2 кроме (45) требуются условия (43) и (44).

Утверждение 3. Если спектральная модель $U_N(z)$ сходится к гауссовскому полю $U(z)$ в смысле сходимости конечномерных распределений, то она сходится и в смысле слабой сходимости в $\mathbb{L}^p(K)$, где K – компакт в $\mathbb{R}^k$ и $p \geq 1$.

Продолжим доказательство теоремы. Пространственные СММП-Н, СММП-P_1 и СММП-P_2 являются частными случаями моделей M_1, M_2 и M_3 соответственно. Поэтому для них справедливы все сформулированные выше утверждения. Нетрудно заметить, что ограниченность спектрального пространства Λ и способы построения пространственных моделей СММП-Н, СММП-P_1, СММП-P_2 и условие (41) обеспечивают выполнение (43), (44) и условия (45).

1. Согласно утверждению 1 конечномерные распределения пространственной модели СММП-P_2 сходятся. Сходимость конечномерных распределений пространственных моделей СММП-Н, СММП-P_1 следует из утверждения 1 и выполнения условий (43) и (44).

2. Из утверждения 2 следует слабая сходимость в пространстве $\mathbb{C}^p(K)$ пространственной модели СММП-P_2 . Также из утверждения 2 с учетом вы-

полнения условий (43) и (44) следует слабая сходимость пространственных моделей СММП-Н и СММП-P_1 в пространстве $\mathbb{C}^p(K)$, K – компакт в $\mathbb{R}^2$ и $p \in \{0, 1, ...\}$.

3. Согласно утверждению 3 из слабой сходимости в пространстве $\mathbb{C}^p(K)$ пространственных моделей СММП-Н, СММП-P_1 и СММП-P_2 следует слабая сходимость этих моделей в пространстве $\mathbb{L}^p(K)$, где K – компакт в $\mathbb{R}^2$ и $p \geq 1$.

Теорема доказана.

Замечание 5. Нетрудно заметить, что рассуждения в доказательстве теоремы 1 справедливы и в случае, когда $\Lambda^{mn} \subset \Lambda$, если выполнено условие

$$A_{mn} \to A \text{ и } B_{mn} \to B \text{ при } n \to \infty \text{ и } m \to \infty. \tag{46}$$

Перейдем к рассмотрению пространственно-временных моделей СММП. Напомним, в пункте 1.3 было показано, что переход от пространственной модели к пространственно-временной обеспечивает дисперсионное соотношение (21):

$$\mu^2 = g\sqrt{\lambda^2 + \nu^2} \cdot \mathrm{th}(H\sqrt{\lambda^2 + \nu^2})$$

или соотношение (23) для случая глубокой воды:

$$\mu^2 = g\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}.$$

Предположим, что для описания пространственно-временного поля возвышений поверхности морского волнения относительно среднего уровня используется гауссовское вещественное однородное случайное поле $w(x, y, t)$ с нулевым средним и спектральной мерой, сосредоточенной на поверхности (21) или (23). Кроме того, считаем, что спектральная плотность однородного гауссовского случайного поля $u(x, y) = w(x, y, 0)$ равна нулю вне ограниченного множества $\Lambda = (0, A) \times (-B, B)$. Обозначим через $u_{mn}(x, y)$ пространственную модель СММП (16) поля $u(x, y)$ со спектральной областью $\Lambda_{mn} = (0, A_{mn}) \times$

$(-B_{mn}, B_{mn}) \subset \Lambda$, а через $w_{mn}(x, y, t)$ соответствующую пространственно-временную модель СММП (25) поля $w(x, y, t)$.

Теорема 2. Предположим, что для спектрального пространства Λ случайного поля $u(x, y)$ и спектральной области Λ^{mn} пространственной модели СММП $u_{mn}(x, y)$ выполняется условие:

$$A_{mn} \to A \text{ и } B_{mn} \to B \text{ при } n \to \infty \text{ и } m \to \infty.$$

Тогда для пространственно-временных моделей СММП-Н, СММП-Р$_1$ и СММП-Р$_2$ поля $w(x, y, t)$, соответствующих пространственным моделям $u_{mn}(x, y)$, при $n \to \infty$ и $m \to \infty$ справедливо:

1. конечномерные распределения пространственно-временных моделей СММП-Н, СММП-Р$_1$ и СММП-Р$_2$ сходятся к конечномерным распределениям поля $w(x, y, t)$;

2. пространственно-временные модели СММП-Н, СММП-Р$_1$ и СММП-Р$_2$ слабо сходятся к $w(x, y, t)$ в пространстве $\mathbb{C}^p(K)$, где K – компакт в $\mathbb{R}^3$ и $p \in \{0, 1, ...\}$;

3. пространственно-временные модели СММП-Н, СММП-Р$_1$ и СММП-Р$_2$ слабо сходятся к $w(x, y, t)$ в пространстве $\mathbb{L}^p(K)$, где K – компакт в $\mathbb{R}^3$ и $p \geq 1$.

Доказательство. Поскольку спектр гауссовского случайного поля $w(x, y, t)$ сосредоточен на поверхности (21) или (23), то из ограниченности спектрального пространства поля $u(x, y)$ следует ограниченность спектрального пространства поля $w(x, y, t)$. Таким образом, для доказательства теоремы в случае, когда $\Lambda^{mn} = \Lambda$, применимы утверждения 1-3. В случае же, когда $\Lambda^{mn} \subset \Lambda$, выполнение утверждений теоремы обеспечивает условие (46). Теорема доказана.

3 Условные спектральные модели морской поверхности и аномально высоких волн

Основные результаты, представленные в этом разделе, опубликованы в работах [23–25, 27–30, 43, 80, 83, 101].

3.1 Общая информация об условных спектральных моделях гауссовских полей

В работе [42] представлен алгоритм, позволяющий при моделировании гауссовского однородного случайного поля учитывать известные значения поля в фиксированных точках. Вкратце рассмотрим данный алгоритм.

Пусть $w(x)$, $x \in \mathbb{R}^k$ – однородное вещественное гауссовское случайное поле с известным математическим ожиданием и заданной спектральной мерой. Не уменьшая общности, будем считать, что среднее значение поля $w(x)$ равно нулю. Предположим, что нам известны значения случайного поля $w(x)$ в фиксированных точках $x_l \in \mathbb{R}^k$, где $l = 1, ...L$:

$$w(x_l) = b_l, \quad l = 1, ...L. \tag{47}$$

Обозначим поле $w(x)$, проходящее через фиксированные точки (47), через $w^b(x)$.

Спектральная модель поля $w^b(x)$ строится поэтапно. На первом этапе определяются значения a_j и моделируются векторы λ_j согласно выбранной спектральной модели случайного поля $w(x)$:

$$w_n(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \left[\xi_j \cos\langle\lambda_j, x\rangle + \eta_j \sin\langle\lambda_j, x\rangle\right],$$

где $a_j > 0$ и ξ_j, η_j - стандартные нормальные случайные величины. На втором этапе гауссовские случайные величины ξ_j и η_j моделируются при линейном условии

$$\sum_{j=1}^{n} p_{lj}\xi_j + q_{lj}\eta_j = b_l, \quad l = 1, ..., L, \tag{48}$$

где

$$p_{lj} = a_j \cos\langle \lambda_j, x_l \rangle, \quad q_{lj} = a_j \sin\langle \lambda_j, x_l \rangle.$$

Отметим, что условное распределение вектора $\zeta = \left(\xi^T, \eta^T\right)^T$, где $\xi^T = [\xi_1, ..., \xi_n]$ и $\eta^T = [\eta_1, ..., \eta_n]$, при ограничении (48) будет гауссовским с математическим ожиданием

$$\mu = A^+ b \tag{49}$$

и корреляционной матрицей

$$K = I - A^+ A, \tag{50}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} p_{11}, \ldots, p_{1n}, & q_{11}, \ldots, q_{1n} \\ & \vdots & \\ p_{L1}, \ldots, p_{Ln}, & q_{L1}, \ldots, q_{Ln} \end{bmatrix},$$

A^+ – псевдообратная матрица к матрице A, I – единичная матрица.

Таким образом, условная спектральная модель поля $w^b(x)$ имеет вид

$$w_n^b(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \left[\xi_j \cos\langle \lambda_j, x \rangle + \eta_j \sin\langle \lambda_j, x \rangle\right], \tag{51}$$

где вектор $\zeta = \left(\xi^T, \eta^T\right)^T$ является гауссовским с математическим ожиданием (49) и корреляционной матрицей (50).

Описанный алгоритм построения условной спектральной модели минимизирует функционал

$$||A\zeta - b||^2 = \sum_{l=1}^{L} (w(x_l) - b_l)^2, \tag{52}$$

гарантируя, что полученное поле $w_n^b(x)$ пройдет через заданные значения b_l, $l = 1, ..., L$, если существует решение системы линейных уравнений $A\zeta = b$.

Спектральную модель (51) при условии (48) будем называть *условной спектральной моделью.*

Отметим, что в работе [42] описано несколько способов моделирования вектора ζ: «прямой» метод моделирования, ускоренный вариант алгоритма, учитывающий, что корреляционная матрица является проектором, а также алгоритм итерационного моделирования вектора, что позволяет эффективно строить модели для большого числа гармоник.

В диссертационной работе при проведении вычислительных экспериментов используется следующий алгоритм: вектор ζ моделируется по формуле

$$\zeta = \mu + G\epsilon,$$

где ϵ – вектор независимых стандартных нормальных случайных величин и $GG^T = K$. Так как K является протектором, то есть $K^T = K$ и $K^2 = K$, то при моделировании мы выбираем $G = K$.

Для «поэтапного» моделирования представим вектор ζ в виде

$$\zeta = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix},$$

где ζ_1 и ζ_2 – стандартные нормальные векторы меньшей размерности. На первом этапе моделируется гауссовский вектор ζ_1 при условии

$$A\zeta = A_1\zeta_1 + A_2\zeta_2 = b, \quad A = [A_1|A_2].$$

Вектор ζ_1 имеет гауссовское распределение с математическим ожиданием μ_1 и корреляционной матрицей K_1:

$$\mu_1 = A_1^T(AA^T)^+b, \quad K_1 = I - A_1^T(AA^T)^+A_1.$$

Далее моделируется вектор ζ_2 при условии

$$A_2\zeta_2 = b - A_1\zeta_1.$$

Для того, чтобы избежать трудоемкой процедуры факторизации на каждом шаге, целесообразно брать вектор ζ_1 размерностью, равной единице. Тогда ал-

горитм моделирования вектора

$$\zeta = \begin{bmatrix} \zeta^1 \\ \vdots \\ \zeta^{2n} \end{bmatrix},$$

при условии $A\zeta = b$ представим в виде:

$$\begin{aligned}
&\zeta^i = \mu_i + K_i^{1/2}\epsilon_i, \\
&\mu_1 = a_1^T(AA^T)^+ b, \\
&\mu_i = a_i^T(A_iA_i^T)^+[b - a_1\zeta^1 - ... - a_{i-1}\zeta^{i-1}], \quad i > 1, \\
&K_i = 1 - a_i^T(A_iA_i^T)^+ a_i,
\end{aligned}$$

где a_i – i-ый столбец матрицы A, A_i – матрица, полученная из матрицы A удалением первых $i-1$ столбцов, ϵ_i – независимые стандартные нормальные случайные величины.

3.2 Условные спектральные модели морской поверхности и аномально высоких волн

Рассмотрим применение условных спектральных моделей к моделированию морской поверхности с экстремально высокими волнами (подробнее про аномально высокие волны или волны-убийцы см. приложение Б).

Предположим, что отклонение поверхности морского волнения от среднего уровня в фиксированный момент времени описывается вещественным однородным гауссовским случайным полем $u(x, y)$ с нулевым средним и спектральной плотностью $f_{\lambda\nu}(\lambda, \nu)$,

$$f_{\lambda\nu}(\lambda, \nu) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}}\sqrt{\frac{g}{\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}}}S(\mu)Q(\phi), \quad \mu = \sqrt{g\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}},$$

которая сосредоточена в ограниченной области $\Lambda = (0, A) \times (-B, B)$ и описы-

вается аппроксимацией частотного спектра (14):

$$S(\mu)=\begin{cases} 6m_0\left(\mu_{\max}/\mu\right)^5\mu^{-1}\exp\left\{-1.2\left[\left(\mu_{\max}/\mu\right)^5-\left(\mu_{\max}/\mu_1\right)^5\right]\right\}, & \mu\in(0,\mu_1], \\ S(\mu_1)+\left(S(\mu_2)-S(\mu_1)\right)(\mu-\mu_1)/(\mu_2-\mu_1), & \mu\in(\mu_1,\mu_2), \\ 0.0078g^2\mu^{-5}, & \mu\in[\mu_2,\mu_3); \end{cases}$$

где

$$\mu_1=1.8\mu_{\max}\widetilde{\mu}^{-0.7},\quad \mu_2=2.0\mu_{\max}\widetilde{\mu}^{-0.7},\quad \mu_3\approx 30\ \text{с}^{-1},$$
$$m_0=0.00127g^{-2}v^4\widetilde{\mu}^{-3.19},\quad \widetilde{\mu}=v\mu_{\max}g^{-1},$$

с параметрами

$$v=7\ \text{м/с},\quad \mu_{\max}=0.4\ \text{с}^{-1} \tag{53}$$

и аппроксимацией углового спектра (15):

$$Q(\phi)=\frac{2}{\pi}\cdot\cos^2(\phi),\quad \phi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

Допустим, что поле $u(x,y)$ проходит через фиксированные точки:

$$u(x_l,y_l)=b_l^u,\quad l=1,...,L^u. \tag{54}$$

Условную спектральную модель поля $u(x,y)$ при условии (54), назовем *пространственной моделью УСММП* (условная спектральная модель морской поверхности) и обозначим через $u_{mn}^b(x,y)$:

$$u_{mn}^b(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\left[\xi_{ij}\cos(\lambda_{ij}x+\nu_{ij}y)+\eta_{ij}\sin(\lambda_{ij}x+\nu_{ij}y)\right], \tag{55}$$

где величины ξ_j и η_j построены при линейном условии

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p_{ij}\xi_{ij}+q_{ij}\eta_{ij}=b_l^u,\quad l=1,...,L^u,$$
$$p_{ij}=a_{ij}\cos(\lambda_{ij}x+\nu_{ij}y),\quad q_{ij}=a_{ij}\sin(\lambda_{ij}x+\nu_{ij}y).$$

В качестве спектральной области модели УСММП будем рассматривать прямоугольную область $\Lambda^{mn}=(0,A_{mn})\times(-B_{mn},B_{mn})\subset\Lambda$. По аналогии с моделями семейства СММП, при использовании принципа разбиения спектрального пространства, область Λ^{mn} разбивается на равные подобласти размером $\dfrac{A_{mn}}{n}$ на $\dfrac{2B_{mn}}{m}$, $i=1,...,n$, $j=1,...,m$, m – четное число.

Предположим, что поле $u(x, y)$ в фиксированной точке пространства достигает значения 10 метров:

$$u(x_0, y_0) = 10 \text{ м}, \quad x_0 = 1000 \text{ м}, \ y_0 = 1000 \text{ м}. \tag{56}$$

Рассмотрим нерандомизированную модель УСММП. В этом случае точки (λ_{ij}, ν_{ij}) выбираются в центрах прямоугольных областей Λ_{ij}^{mn} и имеет место

$$a_{ij}^2 = \iint\limits_{\Lambda_{ij}^{mn}} f_{\lambda\nu}(\lambda, \nu) d\lambda d\nu, \qquad i = 1, .., n, \ \ j = 1, ..., m.$$

Выберем

$$A_{mn} = 0.1, \ \ B_{mn} = 0.05, \ \ n = 100, \ \ m = 100. \tag{57}$$

На рисунке 15 представлена реализация пространственной нерандомизированной модели УСММП поля $u(x, y)$, проходящего через фиксированную точку (56).

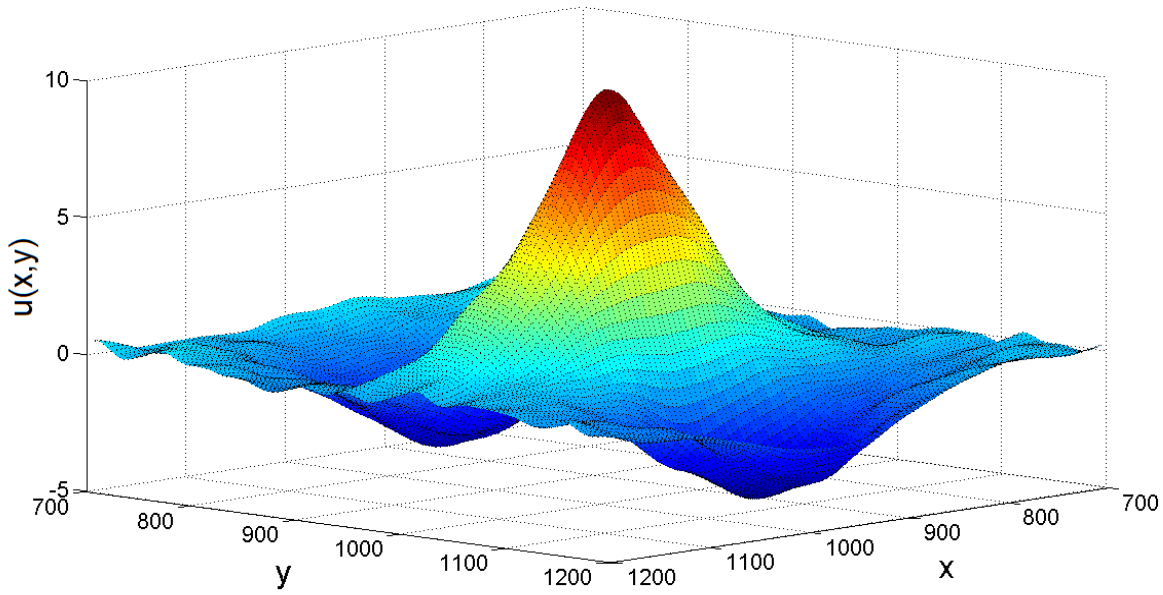

Рис. 15: Реализация нерандомизированой модели УСММП поля $u(x, y)$, проходящего через фиксированную точку (56). Параметры волнения и модели указаны в тексте. Значения по всем трем осям приведены в метрах.

Как и в случае моделей СММП переход от пространственной к пространственно-временной модели обеспечивает дисперсионное соотношение (21) или (23). Рассмотрим морское волнение, которое описывается вещественным однородным гауссовским случайным полем $w(x, y, t)$ с частотным спектром (14) с параметрами (53) и угловым спектром (15). Предположим, нам известно, что поле $w(x, y, t)$ проходит через некоторые фиксированные точки:

$$w(x_l, y_l, t_l) = b_l^w, \quad l = 1, ..., L^w.$$

Пространственно-временная модель УСММП поля $w(x, y, t)$ принимает вид:

$$\begin{gathered} w_{mn}^b(x, y, t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \left[\xi_{ij} \cos(\theta_{ij}) + \eta_{ij} \sin(\theta_{ij}) \right], \\ \theta_{ij} = \lambda_{ij} x + \nu_{ij} y + \mu_{ij} t, \quad \mu_{ij}^2 = g\sqrt{\lambda_{ij}^2 + \nu_{ij}^2}, \end{gathered} \tag{58}$$

где величины ξ_j и η_j строятся при линейном условии

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \xi_{ij} + q_{ij} \eta_{ij} = b_l^w, \quad l = 1, ..., L^w, \\ p_{ij} = a_{ij} \cos(\lambda_{ij} x + \nu_{ij} y + \mu_{ij} t), \\ q_{ij} = a_{ij} \sin(\lambda_{ij} x + \nu_{ij} y + \mu_{ij} t). \end{gathered}$$

Рассмотрим пространственно-временную модель СММП-Н (17), (25) $w_{mn}(x, y, t)$ поля $w(x, y, t)$ с параметрами (57). На рисунке 16 слева представлены профили морской поверхности модели $w_{mn}(x, y, t)$ в последовательные моменты времени с интервалом 5 секунд.

Предположим, в фиксированной точке пространства (x_0, y_0) в момент времени t_0 поле $w(x, y, t)$ достигает значения 10 метров:

$$w(x_0, y_0, t_0) = 10 \text{ м}, \quad x_0 = 1000 \text{ м}, \ y_0 = 1000 \text{ м}, \ t_0 = 0 \text{ с}. \tag{59}$$

Построим пространственно-временную модель УСММП. На рисунке 16 справа представлены профили поля $w_{mn}^b(x, y, t)$ в последовательные моменты времени с интервалом 5 секунд. Верхнее изображение соответствует начальному моменту времени -10 секунд. На 3-ем изображении сверху представлен профиль

морской поверхности в момент времени $t_0 = 0$ с. Видно, что волна достигает пикового значения 10 метров. Отметим, что на изображениях рисунка 16 отчетливо видны две «впадины»: до и после гигантской волны. Такое описание волнения совпадает с показаниями очевидцев, наблюдающих аномально высокие волны.

Несмотря на то, что при построение пространственно-временной модели УСММП было зафиксировано лишь одно значение на высоте 10 метров в точке (x_0, y_0, t_0), кроме основной гигантской волны возникают еще две экстремально высоких волны чуть меньшего размера до и после основной с промежутком примерно 20 секунд, см. рисунок 17. Такое поведение волнения соответствует природному явлению, известному как «три сестры».

3.3 Сходимость условных спектральных моделей поверхности морского волнения

Рассмотрим сходимость условных спектральных моделей морской поверхности.

Теорема 3. Пусть $u(x, y)$ – однородное вещественное гауссовское случайное поле с нулевым средним и с ограниченным спектральным пространством $\Lambda = (0, A) \times (-B, B)$, $u_{mn}(x, y)$ – модель семейства СММП поля $u(x, y)$ со спектральной областью $\Lambda_{mn} = (0, A_{mn}) \times (-B_{mn}, B_{mn})$. Предположим, что

$$A_{mn} \to A \text{ и } B_{mn} \to B \text{ при } n \to \infty \text{ и } m \to \infty,$$

где $n \times m$ – число гармоник. Обозначим через $u^b(x, y)$ поле $u(x, y)$ при условии, что оно проходит через фиксированные точки $(x_l, y_l) \in \mathbb{R}^2$:

$$u(x_l, y_l) = b_l, \quad l = 1, ...L,$$

причем корреляционная матрица случайного вектора $(u(x_1, y_1), ..., u(x_L, y_L))$ является невырожденной. Через $u^b_{mn}(x, y)$ обозначим пространственную модель УСММП поля $u^b(x, y)$. Тогда

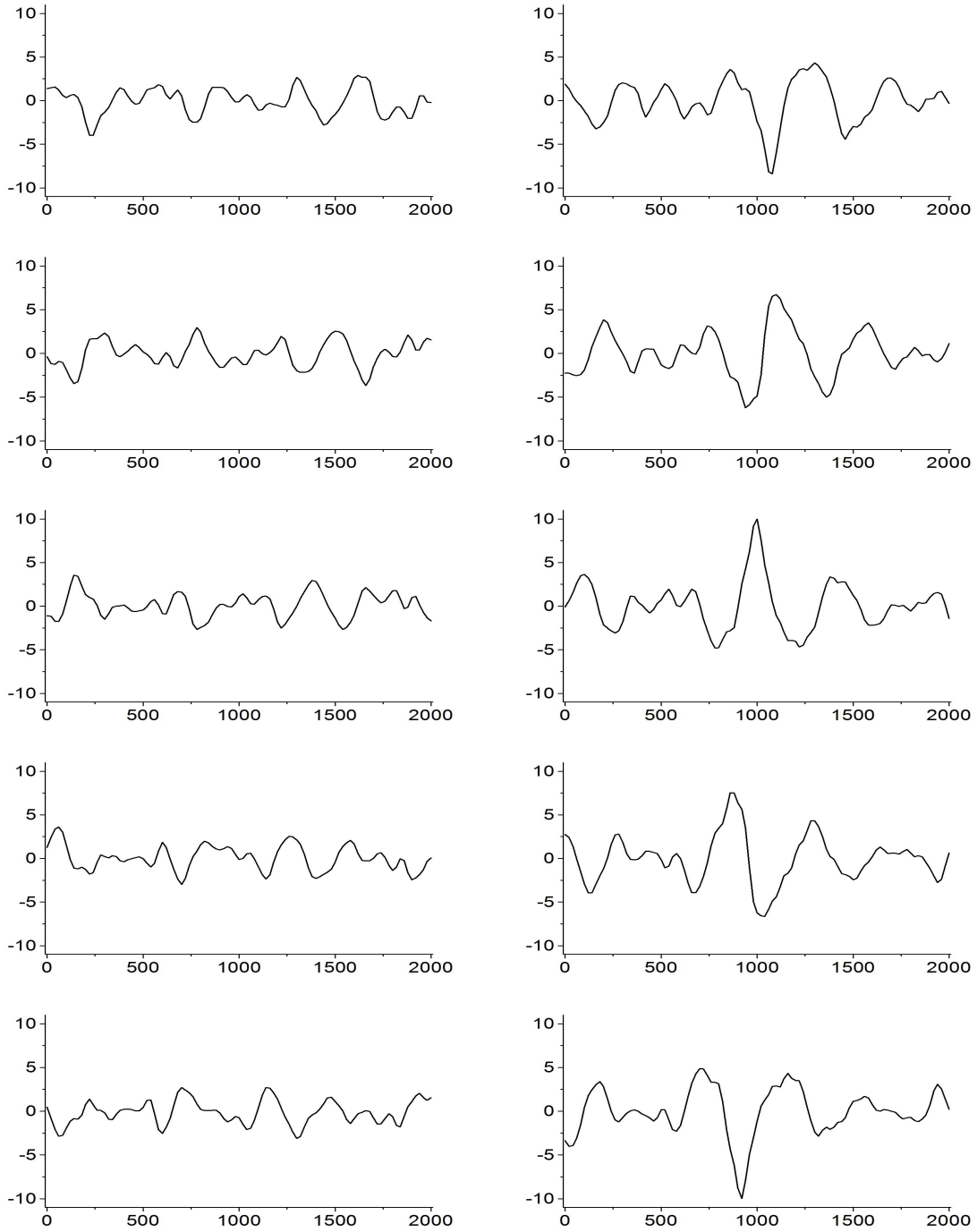

Рис. 16: Слева представлены реализации модели СММП с параметрами спектра (14): $v = 7$ м/с, $\mu_{\max} = 0.4$ и параметрами модели: $A_{mn} = 0.1$, $B_{mn} = 0.05$, $n = 100$, $m = 100$. Справа - реализации модели УСММП с аналогичными параметрами и дополнительным условием: $w(x_0, y_0, t_0) = 10$м, подробности см. в тексте. Профили морской поверхности с интервалом 5 секунд. Направление движения волн - справа налево. По осям значения приведены в метрах.

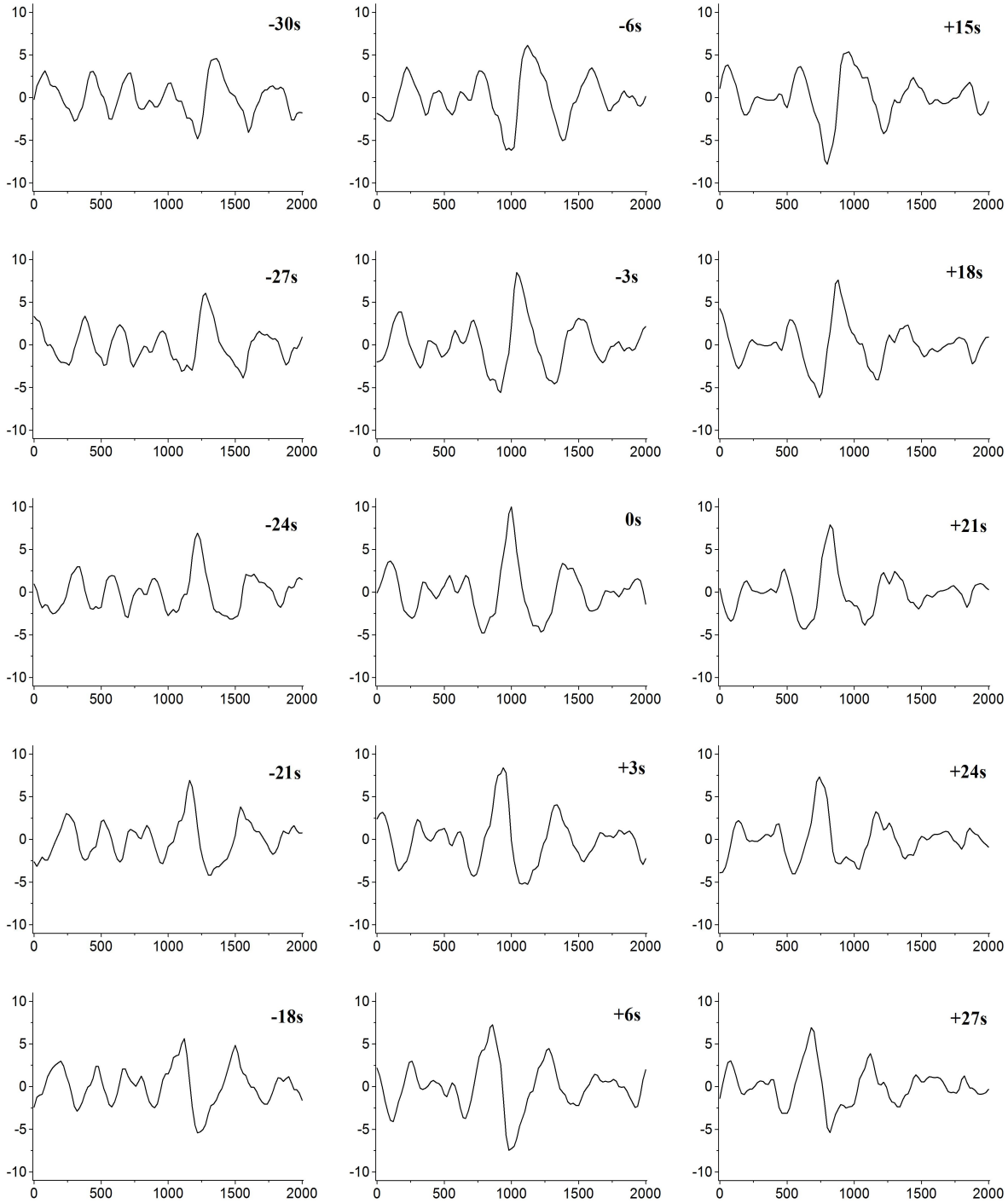

Рис. 17: Гигантская волна «три сестры». Пространственно-временная условная спектральная модель использовалась для моделирования волны с возвышением 10 м над средним уровнем (центральный рисунок в 3-ем ряду). Кроме основной гигантской волны наблюдаются две другие: до и после основной. В правом верхнем углу для каждого профиля морской поверхности дано его смещение по времени. Параметры модели указаны в тексте. Направление движения волн - справа налево. По осям значения приведены в метрах.

1. конечномерные распределения пространственной модели УСММП $u^b_{mn}(x,y)$ сходятся к конечномерным распределениям случайного поля $u^b(x,y)$ при $n \to \infty$ и $m \to \infty$;

2. пространственная модель УСММП $u^b_{mn}(x,y)$ сходится к гауссовскому полю $u^b(x,y)$ в смысле слабой сходимости в $\mathbb{L}^p(K)$ при $n \to \infty$ и $m \to \infty$, где K – компакт в $\mathbb{R}^2$ и $p = 0, 1, ...$;

3. пространственная модель УСММП $u^b_{mn}(x,y)$ слабо сходится в $\mathbb{C}^p(K)$ к гауссовскому полю $u^b(x,y)$ при $n \to \infty$ и $m \to \infty$, где K – компакт в $\mathbb{R}^2$ и $p \geq 1$.

Доказательство. В начале рассмотрим ряд вспомогательных утверждений, доказательства которых можно найти в работе [42]. Пусть $U(z)$, $z \in \mathbb{R}^k$ – гауссовское однородное поле с нулевым средним и спектральной мерой χ. Обозначим через $U_N(z)$ спектральную модель поля $U(z)$:

$$U_N(z) = \sum_{j=1}^{N-1} a_j \left[\xi_j \cos\langle \lambda_j, z\rangle + \eta_j \sin\langle \lambda_j, z\rangle\right]. \tag{60}$$

Рассмотрим разбиение спектрального пространства Λ^U модели $U_N(z)$:

$$\Lambda^U = \sum_{j=1}^{N} \Lambda^U_j, \qquad \Lambda^U_i \cap \Lambda^U_j = \emptyset \ \text{ где } \ i \neq j, \tag{61}$$

где

$$a_N^2 = \chi(\Lambda^U_j), \quad \lambda_j \in \Lambda^U_j. \tag{62}$$

Зададим дополнительные условия:

$$\begin{aligned} &\Lambda^U_N \subset \{|\lambda| \geq c_N\}, \quad c_N \to \infty, \\ &\max_{j<N} \operatorname{diam}(\Lambda^U_j) \to 0, \ \text{ при } \ N \to \infty. \end{aligned} \tag{63}$$

Поле $U(z)$ при условии, что оно проходит через фиксированные точки $\widetilde{b_l}$:

$$U(z_l) = \widetilde{b_l}, \ \ l = 1, ..., \widetilde{L}, \tag{64}$$

будем обозначать через $U^b(z)$. А условную спектральную модель поля $U^b(z)$ обозначим через $U^b_N(z)$.

Справедливы следующие утверждения.

Утверждение 4. Конечномерные распределения условной спектральной модели $U^b_N(z)$ сходятся к конечномерным распределениям случайного поля $U^b(z)$.

Утверждение 5. Если конечномерные распределения условной спектральной модели $U^b_N(z)$ сходится к конечномерным распределениям гауссовского поля $U^b(z)$, то модель $U^b_N(z)$ сходится и в смысле слабой сходимости в $\mathbb{L}^p(K)$, где K – компакт в $\mathbb{R}^k$ и $p \geq 1$.

Утверждение 6. Условная спектральная модель $U^b_N(z)$ сходится к гауссовскому полю $U^b(z)$ в смысле слабой сходимости в $\mathbb{C}^p(K)$, если

$$\int\limits_{\Lambda^u} |\lambda|^{\beta+2p}\chi(d\lambda) < \infty,$$

для некоторого $\beta > 0$, где K – компакт в $\mathbb{R}^k$ и $p \in \{0, 1, ...\}$.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Заметим, что модель $u^b_{mn}(x, y)$ является частным случаем условной спектральной модели $U^b_N(z)$. А выполнение условий теоремы 2 обеспечивает выполнение условий (61)–(63). Поэтому справедливо утверждение 4, т.е. конечномерные распределения модели $u^b_{mn}(x, y)$ сходится к конечномерным распределениям поля $u^b(x, y)$ в $\mathbb{R}^3$. Тогда, согласно утверждению 5, модель $u^b_{mn}(x, y)$ сходится к гауссовскому полю $u^b(x, y)$ в смысле слабой сходимости в $\mathbb{L}^p(K)$, где K – компакт в $\mathbb{R}^2$ и $p \geq 1$;

И, наконец, условия теоремы 2 обеспечивают выполнение условий утверждения 6, поэтому модель $u^b_{mn}(x, y, t)$ сходится к гауссовскому полю $u^b(x, y)$ в смысле слабой сходимости в $\mathbb{C}^p(K)$, где K – компакт в $\mathbb{R}^2$ и $p \in \{0, 1, ...\}$. Теорема доказана.

Замечание. Предположение в условиях теоремы о том, что корреляционная матрица случайного вектора $(u(x_1, y_1), ..., u(x_L, y_L))$ является невырожденной вполне естественно для моделей морской поверхности. Это предположение

означает, что нет каких-либо «жестких» ограничений на возможные значения поля возвышений $b_1, ..., b_L$ морского волнения в точках $(x_1, y_1), ..., (x_L, y_L)$.

Следствие. Нетрудно заметить, что к пространственно-временной модели УСММП $w^b_{mn}(x, y, t)$ однородного вещественного гауссовского случайного поля $w^b(x, y, t)$ применимы выкладки, приведенные в теореме 3. Таким образом, справедливы следующие утверждения:

1. конечномерные распределения пространственно-временной модели УСММП $w^b_{mn}(x, y, t)$ сходятся к конечномерным распределениям случайного поля $w^b(x, y, t)$ при $n \to \infty$ и $m \to \infty$;

2. пространственно-временная модель УСММП $w^b_{mn}(x, y, t)$ сходится к гауссовскому полю $w^b(x, y, t)$ в смысле слабой сходимости в $\mathbb{L}^p(K)$ при $n \to \infty$ и $m \to \infty$, где K – компакт в $\mathbb{R}^3$ и $p = 0, 1, ...$;

3. пространственно-временная модель УСММП $w^b_{mn}(x, y, t)$ слабо сходится в $\mathbb{C}^p(K)$ к гауссовскому полю $w^b(x, y, t)$ при $n \to \infty$ и $m \to \infty$, где K – компакт в $\mathbb{R}^3$ и $p \geq 1$.

3.4 Применение моделей морской поверхности для оценки частоты появления аномально высоких волн

3.4.1 Оценка частоты появления высоких волн различной высоты

Результаты теории выбросов гауссовских случайных процессов и полей позволяют вычислять среднее число выбросов за заданный уровень на определенном участке или за фиксированный промежуток времени. В нашей работе мы будем использовать эти результаты для оценки появления аномально высоких волн.

Рассмотрим поверхность морского волнения, построенную по модели СММП. Пусть $w_{mn}(x, y, t)$ – пространственно-временная спектральная модель поля

$w(x, y, t)$ с нулевым средним. В качестве частотного спектра выберем аппроксимацию (14) с параметрами

$$v = 7 \text{ м/с}, \quad \mu_{\max} = 0.4. \tag{65}$$

В качестве углового спектра используем аппроксимацию (15). Соответствующее поле $w(x, y, t)$ имеет дисперсию σ_0, равную 1.74 м^2.

Среднее число волн выше $N_t(C)$ заданного уровня C в фиксированной точке (x, y) за интервал времени ΔT можно вычислить по формуле [51]:

$$N_t(C) = \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \cdot \frac{\exp\big(-C^2/(2\sigma_0^2)\big)}{2\pi} \cdot \Delta T, \tag{66}$$

где σ_0^2 – дисперсия случайного поля $w(x, y, t)$, σ_1^2 – дисперсия производной случайного поля $w(x, y, t)$ по t и $C > 0$. В нашем случае

$$\sigma_1^2 = 0.53 \text{ м}^2/\text{с}^2. \tag{67}$$

Среднее число волн $N_{xy}(C)$ выше уровня C на фиксированном участке пространства ΔS определяется соотношением [37]:

$$N_{xy}(C) = \frac{C}{2\pi\sqrt{2\pi}K_{11}}\sqrt{\frac{K_{22}K_{33} - K_{23}^2}{K_{11}}} \cdot \exp\Big(-\frac{C^2}{2K_{11}}\Big) \cdot \Delta S, \tag{68}$$

где $C > 0$,

$$K_{11} = \sigma_0^2 = 1.74 \text{ м}^2,$$

$$K_{22} = \int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty \lambda^2 f_{\lambda\nu}(\lambda, \nu) d\lambda d\nu = 8.40 \cdot 10^{-4},$$

$$K_{33} = \int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty \nu^2 f_{\lambda\nu}(\lambda, \nu) d\lambda d\nu = 2.27 \cdot 10^{-4},$$

$$K_{23} = \int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty \lambda\nu f_{\lambda\nu}(\lambda, \nu) d\lambda d\nu = 1.17 \cdot 10^{-20}.$$

В таблице 6 приведены значения $N_t(C)$ и $N_{xy}(C)$ для модели морского волнения СММП со спектром (14), (15), (65).

Таблица 6: Среднее число волн $N_t(C)$ выше уровня C за год и среднее число волн $N_{xy}(C)$ выше уровня C на площади 100 км^2 в фиксированный момент времени для модели СММП с параметрами частотного спектра (65).

C, м	$N_t(C)$	$N_{xy}(C)$
5.0	2.162×10^3	1.306×10^1
5.5	4.799×10^2	3.162×10^0
6.0	9.230×10^1	6.571×10^{-1}
6.5	1.538×10^1	1.174×10^{-1}
7.0	2.221×10^0	1.805×10^{-2}
7.5	2.778×10^{-1}	2.391×10^{-3}
8.0	3.011×10^{-2}	2.730×10^{-4}
8.5	2.828×10^{-3}	2.687×10^{-5}
9.0	2.301×10^{-4}	2.282×10^{-6}
9.5	1.622×10^{-5}	1.673×10^{-7}
10.0	9.911×10^{-7}	1.058×10^{-8}

В таблице 7 приведены значения $N_t(C)$ и $N_{xy}(C)$ для более сильного волнения с параметрами

$$v = 10 \text{ м/с}, \quad \mu_{\max} = 0.3. \tag{69}$$

Дисперсия соответствующего поля в этом случае равна 5.84 м^2.

Будем предполагать, что высота волны h соответствует уровню $C = h\big/2$. Можно дать следующую интерпретацию результатам, представленным в таблице 7. Предположим, что 100 морских судов находятся в плавании на достаточно большом расстоянии друг от друга в условиях морского волнения со спектром (14), (15), (69). Тогда в среднем за год произойдет примерно одна встреча с гигантской волной выше 30 м, что соответствует уровню $C = 15$ м, 11 встреч с волнами выше 28 м и 109 встреч с волнами высотой выше 26 м, что соответ-

Таблица 7: Среднее число волн $N_t(C)$ выше уровня C за год и среднее число волн $N_{xy}(C)$ выше уровня C на площади 100 км^2 в фиксированный момент времени для модели СММП с параметрами частотного спектра (69).

C, м	$N_t(C)$	$N_{xy}(C)$
5.0	2.484×10^5	7.439×10^2
6.0	9.681×10^4	3.475×10^2
7.0	3.179×10^4	1.330×10^2
8.0	8.795×10^3	4.200×10^1
9.0	2.050×10^3	1.099×10^1
10.0	4.027×10^2	2.395×10^0
11.0	6.663×10^1	4.351×10^{-1}
12.0	9.291×10^0	6.604×10^{-2}
13.0	1.091×10^0	8.385×10^{-3}
14.0	1.081×10^{-1}	8.915×10^{-4}
15.0	9.009×10^{-3}	7.944×10^{-5}
16.0	6.329×10^{-4}	5.936×10^{-6}

ствует уровням $C = 14$ м и $C = 13$ м соответственно.

3.4.2 Оценка частоты появления высоких волн для моделей, построенных по натурным данным

Одной из наиболее известных аномально высоких волн-убийц, зафиксированной приборами, является «Новогодняя волна», чья высота достигла 25.6 м, подробнее см. приложение Б. На рисунке 18 представлена волнограмма «Новогодней волны». Наибольший уровень волнения - 18.5 м зафиксирован в момент времени 265 с. Мы оценили характеристики волнения по участку записи, начиная с момента времени 270 с, предполагая, что он является стационарным.

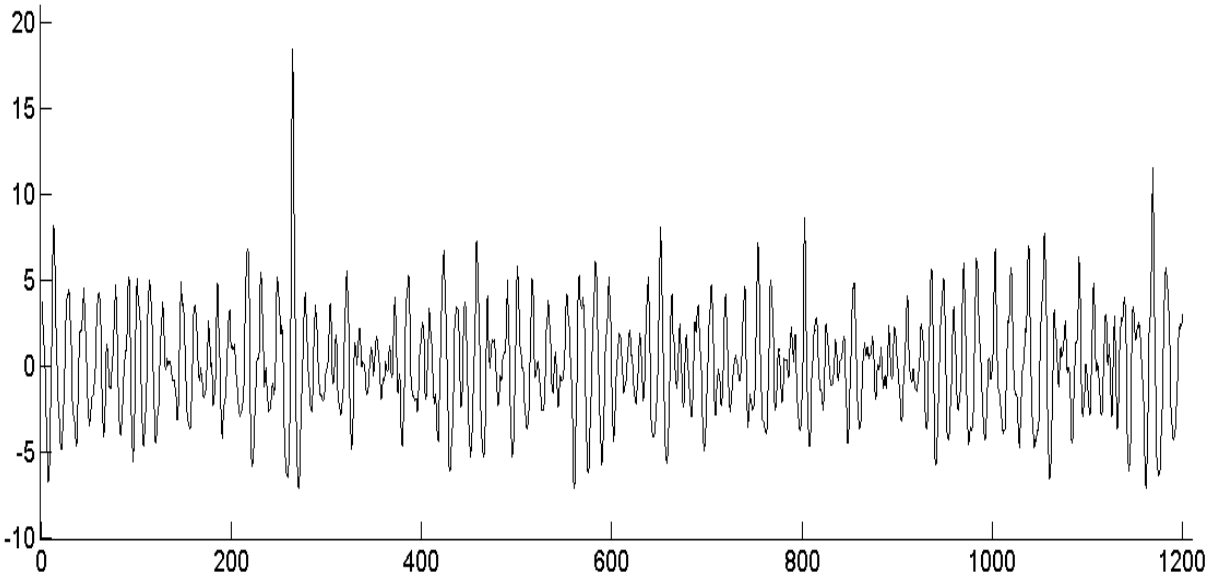

Рис. 18: Волнограмма «Новогодней волны». По оси абсцисс значения приведены в секундах, по оси ординат - в метрах.

Обозначим этот участок записи через $w^t(n)$, $n = 0, ..., N$. Дисперсия процесса $w^t(n)$ равна 8.1678 м^2, а дисперсия производной процесса - 2.6985 м^2/с^2. Для оценки автокорреляционной функции и спектральной плотности мы использовали следующие соотношения:

$$\begin{gathered} R_n^t = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-k} w_t(k+n)w_t(k), \quad R_n^t = R_{-n}^t, \quad n = 0, ..., N, \\ S^t(\mu) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=-N}^{N} \exp(-i\mu n)R_n^t, \quad \mu \in [0, \pi). \end{gathered} \tag{70}$$

На рисунках 19 и 20 приведены автокорреляционная функция и спектральная плотность соответственно.

Отметим, что при построении численных моделей предполагается, что волнение морской поверхности описывается гауссовским распределением. На рисунке 21 представлена гистограмма участка «Новогодней волны», не содержащего аномально высокую волну. Видно, что экспериментальная гистограмма хорошо согласуется с теоретическим гауссовским распределением.

Для моделирования случайных процессов хорошо себя зарекомендовала ав-

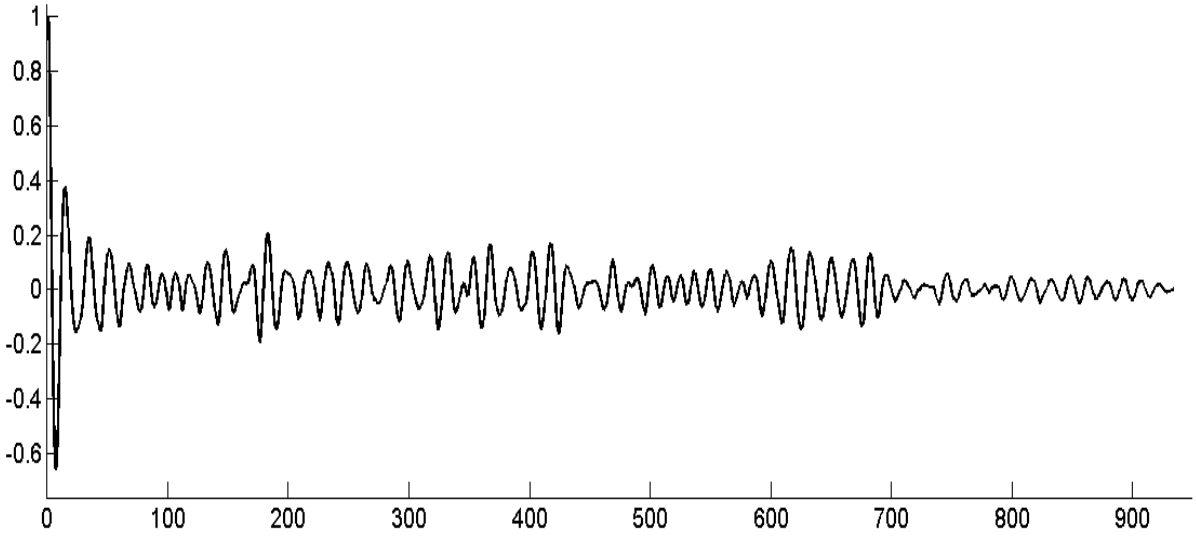

Рис. 19: Автокорреляционная функция «Новогодней волны».

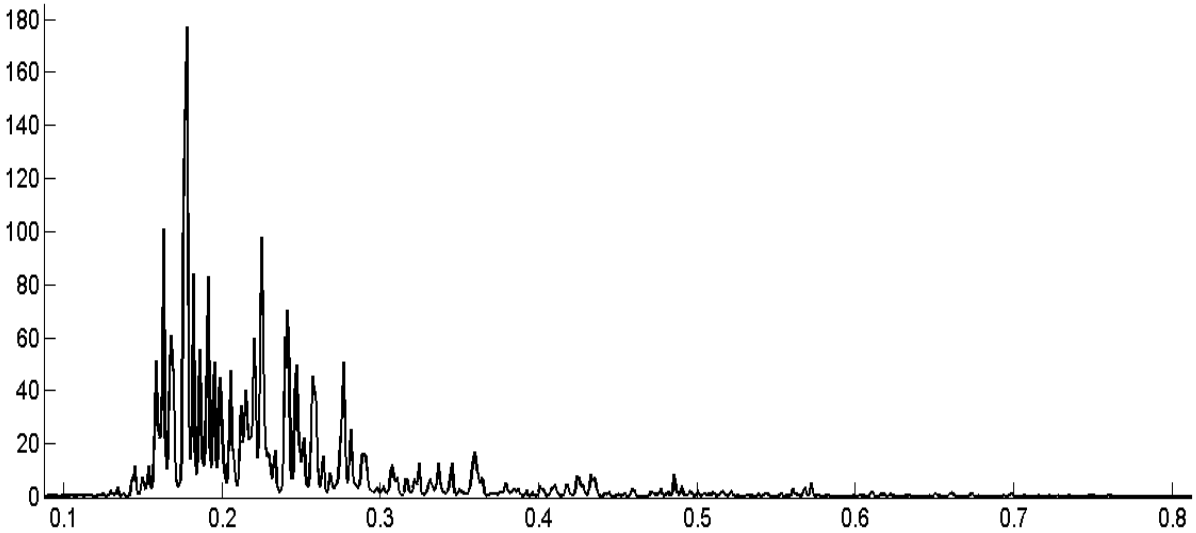

Рис. 20: Спектральная плотность «Новогодней волны».

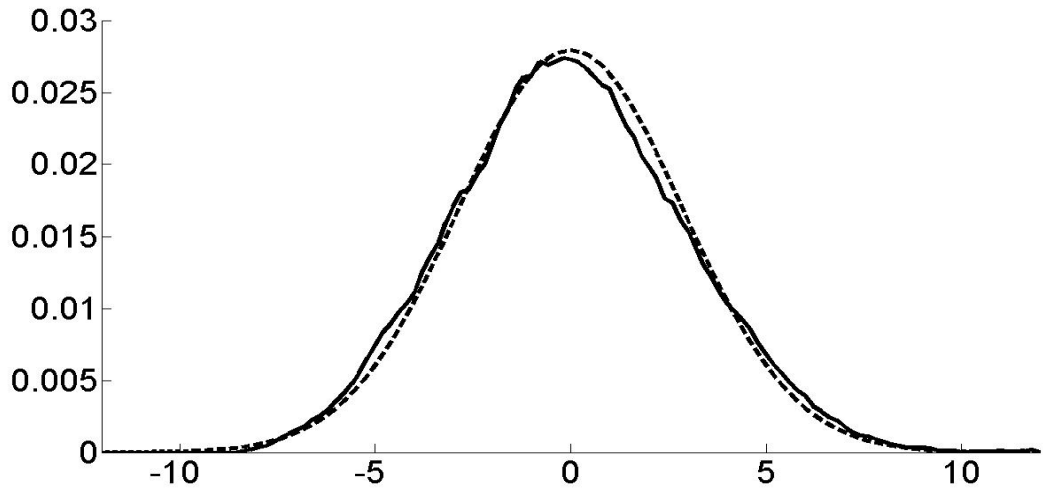

Рис. 21: Гистограмма возвышений, построенная по записи «Новогодней волны» (сплошная линия) и её аппроксимация гауссовским распределением (штриховая линия).

торегрессионная модель:

$$w(t_n) = \sum_{j=1}^{P} a_j w(t_{n-j}) + \varepsilon_n, \tag{71}$$

где P – порядок авторегрессии, a_j – коэффициенты авторегресии, $j = 1, ..., P$, ε_n – белый шум. Мы оценивали коэффициенты авторегрессии, используя метод Юла-Уокера, по участку записи Новогодней волны, не содержащей аномально высокой волны, порядок авторегресии выбрали равным

$$P = 1990. \tag{72}$$

На рисунке 22 представлены примеры морского волнения с аномально высокими волнами, полученными по модели (70)-(72).

В таблице 8 представлено среднее число волн (66), превышающих заданный уровень, для морского волнения, соответствующего модели (71)-(72). Предположим, что нефтяная платформа расположена в фиксированной точке океана с постоянным волнением, соответствующим модели (70)-(72), в течение одного года. Тогда в среднем на платформу обрушится 93 волны, превышающие 26 м, 18 волн, превышающих 28 м, и 3 волны высотой 30 м и выше.

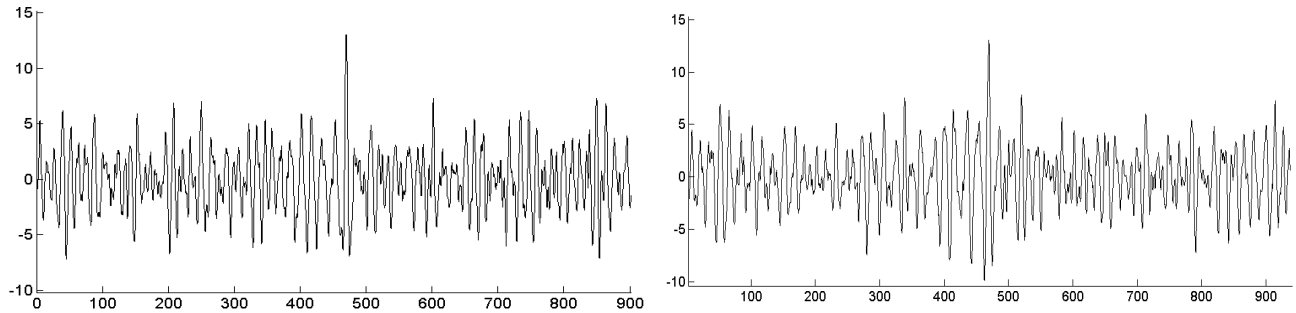

Рис. 22: Примеры морского волнения с аномально высокими волнами, полученными по модели авторегрессии (71)-(72). Коэффициенты авторегрессии оценены по участку волнограммы «Новогодней волны» методом Юла-Уокера. По оси абсцисс значения приведены в секундах, по оси ординат - в метрах.

Таблица 8: Среднее число волн $N_t(C)$ выше уровня C за год для морского волнения, соответствующего авторегрессионной модели (70)-(72). Коэффициенты авторегрессии оценены по участку волнограммы «Новогодней волны» методом Юла-Уокера.

C (м)	$N_t(C)$
5.0	6.2479×10^5
6.0	3.1865×10^5
7.0	1.4379×10^5
8.0	5.7407×10^4
9.0	2.0278×10^4
10.0	6.3378×10^3
11.0	1.7526×10^3
12.0	4.2879×10^2
13.0	9.2810×10^1
14.0	1.777×10^1
15.0	3.0126×10^0

Заключение

Ниже приведены основные результаты, представленные в диссертационной работе.

1. Разработаны пространственные, пространственно-временные модели поверхности морского волнения и соответствующие алгоритмы численного моделирования, основанные на спектральном разложении случайных функций и полей. Разработан и зарегистрирован «Программный комплекс для численного моделирования стохастической структуры морской поверхности». Спектры моделей могут быть оценены по натурным записям волнений, либо могут быть использованы известные теоретические аппроксимации.

2. Изучено влияние размеров выбираемой спектральной области на точность воспроизведения дисперсии моделируемых случайных полей. Исследованы погрешности спектральных моделей, основанные на оценке точности воспроизведения корреляционных структур для нерандомизированных моделей и среднего отклонения корреляционных функций в рандомизированном случае. Проведено сравнение оценок изучаемых функционалов для различных спектральных моделей морской поверхности.

3. Предложены алгоритмы численного моделирования случайной поверхности с аномально высокими волнами на основе условных спектральных моделей. Изучены подходы к оценке частоты появления выбросов случайных полей различной высоты, в том числе и аномально высоких, на основе изучения свойств спектра моделей. Разработана методика оценки частоты возникновения высоких волн на заданном участке или за фиксированный промежуток времени.

4. Изучена сходимость рассматриваемых вычислительных моделей случайной поверхности, в том числе и моделей с аномально высокими волнами.

Доказана сходимость конечномерных распределений для соответствующих спектральных моделей и условных спектральных моделей. Доказаны слабая сходимость рассматриваемых моделей в функциональных пространствах $\mathbb{L}^p$ и $\mathbb{C}^p$.

Список обозначений

СММП	спектральная модель морской поверхности;
СММП-Н	нерандомизированная спектральная модель морской поверхности;
СММП-Р$_1$	рандомизированная спектральная модель морской поверхности с разбиением спектрального пространства;
СММП-Р$_2$	рандомизированная спектральная модель морской поверхности без разбиения спектрального пространства;
УСММП	условная спектральная модель морской поверхности;
A^+	псевдообратная матрица;
A^T	транспонированная матрица;
$\mathrm{diam}(A)$	диаметр множества A;
$\mathbf{M}\xi$	математическое ожидание случайной величины ξ;
$\mathbf{P}(A)$	вероятность события A;
$\langle a, b\rangle$	скалярное произведение векторов a и b;

Список литературы

[1] Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. - М.: Мир, 1976.

[2] Артур Р. Различие в направлении распространения волн, вызванных постоянным ветром. - В сб.: Основы предсказания ветровых волн, зыби и прибоя. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1951, С. 139-150.

[3] Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. - М.: Наука, 1977.

[4] Боков В.Н., Лопатухин Л.И., Микулинская С.М., Рожков В.А., Румянцева С.А. О межгодовой изменчивости волнения, Проблемы исследования и математического моделирования ветрового волнения. - Санкт-Петербург: Гирометеоиздат, 1995. с. 446-454.

[5] Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. - М.: Мир, 1974.

[6] Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды - М.: Наука, 1965., 608 с.

[7] Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов - М.: Наука, 1975.

[8] Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977.

[9] Давидан И.М., Лопатухин Л.И., Рожков В.А. Ветровое волнение как вероятностный гидродинамический процесс. Л.: Гидрометиздат, 1978, 287 с.

[10] Давидан И.М., Лопатухин Л.И. На встречу со штормами. - Л.: Гидрометеоиздат, 1982.

[11] Давидан И.М., Лопатухин Л.И., Рожков В.А. Ветровое волнение в мировом океане. - Л.: Гидрометиздат, 1985.

[12] Давидан И.Н., Рожков В.А., Андреев Б.М, Лопатухин Л.И., Трапезников Ю.А. Вероятностные характеристики волнения, методы их анализа и расчета. - «Труды ГОИН», 1971, вып. 97, 187 с.

[13] Драган Я.П., Рожков В.А., Яворский И.Н. Методы вероятностного анализа ритмики океанологических процессов.- Л.: Гидрометеоиздат, 1987., 320 с.

[14] Кантер Р.Р., Пригарин С.М. Численное моделирование морского ветрового волнения для исследования поля отраженного оптического излучения.- Новосибирск, 1989., 25 с. (Препринт/ АН СССР. Сибирское отделение, ВЦ; N 829).

[15] Кендалл М., Стюарт А. Многомерный статистический анализ и временные ряды. - М.: Наука, 1976.

[16] Кононкова Г.Е., Показеев К.В. Динамика морских волн - М.: Изд-во МГУ, 1985., 298 с.

[17] Крылов Ю.М. Спектральные методы исследования и расчета ветровых волн. - Л.: Гидрометиздат, 1966.

[18] Курбанмурадов О.А. Функциональная сходимость монте-карловских аппроксимаций однородных гауссовских случайных полей. - Новосибирск, 1993., 30 с. (Препринт / РАН Сиб. отд-ние. ВЦ; 999).

[19] Куркин А.А., Пелиновский Е.Н. Волны-убийцы: факты, теория и моделирование: Монография Нижнегородский государственный технический университет. Н.Новгород, 2004, 158 с.

[20] Левитан Б.М. Почти-периодические функции. - М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953.

[21] Лейкин И.А., Розенберг А.Д. Исследование высокочастотной части спектра морского волнения. - «Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана», 1970, т.6, №12, С. 1328-1332.

[22] Литбеттер М., Ротсен Х.,Линдгрен Г. Экстремумы случайных последовательностей и процессов - М.: Мир, 1989.

[23] Литвенко К.В. Вычисление среднего числа гигантских океанических волн. Материалы юбилейной 50-й международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс» (13-19 апреля 2012 г.).

[24] Литвенко К.В. Моделирование гигантских океанических волн с помощью схем авторегрессии. Материалы 51-й международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс» (12-18 апреля 2013г.) - Новосибирск, редакционно-издательский центр НГУ, 2013, С. 171.

[25] Литвенко К.В. Исследование спектральной методики оценки частоты появления аномально высоких океанических волн. Тезисы Международной конференции "Вычислительная математика и математическая геофизика"посвященной 90-летию со дня рождения академика А. С. Алексеева (1–5 июля 2019 г.) - Новосибирск : ИПЦ НГУ, 2019, С. 71.

[26] Литвенко К.В., Пригарин С.М. «Программный комплекс для численного моделирования стохастической структуры морской поверхности» // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2013660327 от 30 октября 2013 г. Правообладатель ИВМиМГ СО РАН (RU).

[27] Литвенко К.В., Пригарин С.М. Численные стохастические модели поверхности морского волнения и гигантских океанических волн, Сибирский журнал вычислительной математики, 2014, Т.17, № 4, С. 349-361.

[28] Литвенко К.В., Пригарин С.М. Сходимость спектральных моделей морской поверхности и волн-убийц. Тезисы международной научной конференции «Вычислительная и прикладная математика 2017 (ВПМ 2017)» (25 июня-14 июля 2017 г.). Новосибирск: Омега Принт, 2017. С. 77-78.

[29] Литвенко К.В., Пригарин С.М. Численные условные спектральные модели океанических волн-убийц: примеры и сходимость. Марчуковские Научные Чтения – 2018. Тезисы Международной конференции "Вычислительная математика и математическая геофизика"посвященной 90-летию со дня рождения академика А. С. Алексеева (8-12 октября 2018 г.), г.Новосибирск: Академиздат, 2018, С. 34.

[30] Литвенко К.В., Пригарин С.М. Сходимость численных спектральных моделей поверхности морского волнения, Сибирский журнал вычислительной математики, 2020, Т.23, № 1, С. 53-67.

[31] Лопатухин Л.И. Анализ распределений элементов волн. - «Труды ВНИИГМИ МЦД», 1974, вып. 1, С. 116-142

[32] Марпл С.Л. мл. Цифровой спектральный анализ и его приложения. - М.: Мир, 1990.

[33] Михайлов Г.А. Численное построение случайного поля с заданной спектральной плотностью. Докл. АН СССР. – Т. 238, № 4. – С. 793-795, 1978.

[34] Михайлов Г.А. Приближенные модели случайных процессов и полей. Журн. Вычисл. Математики и мат. Физики. – Т. 23, № 3. – С. 558-566, 1983.

[35] Михайлов Г.А., Сабельфельд К.К. О численном моделировании диффузии примеси в стохастических полях скоростей. - Изв.АН СССР. Сер. ФАО. - 1980 - Т. 16, № 3 - С. 229-235.

[36] Моделирование морского волнения и гигантских волн-убийц, [Электронный ресурс]. URL: https://smprigarin.ucoz.net/RogueWavesICMMG.pdf (дата обращения 30 ноября 2020 г.).

[37] Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных процессов - М.: Наука, 1968.

[38] Словарь терминов МЧС. - Министерство РФ по делам гражданской обороны, чрезвычайным ситуациям и ликвидачии последствий стихийных бедствий, [Электронный ресурс]. URL: http://www.mchs.gov.ru/dop/terms/item/88704/ (дата обращения 28 февраля 2019 г.).

[39] Справочные данные по режиму ветров и волнения в океанах. Регистр СССР – Л.: Транспорт, 1965 - 235 с.

[40] Осипов В.Ф. Почти периодические функции Бора-Френеля. - СПб.: Издательство С.-Петербургского университета, 1992, 312 с.

[41] Пирсон В., Нейман. Г., Джеймс Р. Развитие и прогнозветровых волн. - В сб.: Ветровые волны. М., Изд-во иностр. лит-ры, 1962, С. 42-124.

[42] Пригарин С.М. Методы численного моделирования случайных процессов и полей. - Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2005.

[43] Пригарин С.М., Литвенко К.В. Численное моделирование и оценка частоты появления аномально высоких океанических волн. Труды всероссийской конференции «Актуальные проблемы вычислительной математики и математического моделирования» (12-15 июня 2012 г.).

[44] Прохоров Ю.В., Розанов. Ю.А. Теория вероятностей. Основные понятия, предельные теоремы, случайные процессы. - М.: Наука, 1973.

[45] Рожков В.А. Методы вероятностного анализа океанологических процессов. - Л.: Гидрометеоиздат, 1979 – 280 с.

[46] Рожков В.А., Трапезников Ю.А. Методические рекомендации, алгоритмы и программы расчета вероятностных характеристик ветрового волнения на ЭЦВМ. Обнинск, 1969, 397 с.

[47] Рожков В.А., Трапезников Ю.А. «К вопросу о построении моделей океанологических процессов», Труды ГОИН, 1983, Выпуск 169, стр. 46-59.

[48] Рожков В.А., Трапезников Ю.А. Вероятностные модели океанологических процессов. - Л.: Гидрометеоиздат, 1990 – 272 с.

[49] Сванидзе Г.Г. Математическое моделирование гидрологических рядов. - Л.: Гидрометеоиздат, 1977. –296 с.

[50] Тихонов В.И. Выбросы случайных процессов - М.: Наука, 1970.

[51] Тихонов В.И., Хименко В.И. Выбросы траекторий случайных процессов - М.: Наука, 1987.

[52] Товстик П.Е., Товстик Т.М., Шеховцов В.А. О влиянии формы спектральной плотности случайного волнения на колебания морской стационарной платформы // Вестник СПбГУ. - 2012. - Сер. 1, Вып. 2 - С. 61-68.

[53] Фомин Я.А. Теория выбросов случайных процессов - М.: Связь, 1980.

[54] Хусу А.П., Витенберг Ю.Р., Пальмов В.А. Шероховатость поверхностей. Теоретико-вероятностный подход - М.: Наука, 1975.

[55] Шалыгин А.С., Палагин Ю.И. Прикладные методы статистического моделирования - Л.: Машиностроение, 1986.

[56] Шамин Р.В. Математические вопросы волн-убийц. М.: Ленанд/URSS, 2016.

[57] Чижиумов С.Д. Основы динамики судов на волнении: учебное пособие - Комсомольск-на-Амуре: ГОУВПО "КнАГТН 2010, 110 с.

[58] Anvarov S.R., Prigarin S.M. Numerical simulation of the spatio-temporal structure of the sea swell surface in optical problems. Atmospheric and Oceanic Optics. V. 7, N. 5, 1994, P. 361-364.

[59] Brown M.G., Jensen A. Experiments on focusing unidirectional water waves. J.Geophys. Research. 2001, V. 106, N. C6, P. 16917-16928.

[60] Buchner, B., Van Dijk, R. Voogt, A. The spatial analysis of an extreme wave in a model Basin. Proceedings of the International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering - OMAE. V. 2, 2007, P. 267-275.

[61] Cherneva, Z., Guedes Soares, C. Non-linearity and non-stationarity of the New Year abnormal wave. Applied Ocean Research. V. 30, Issue 3, P. 215-220.

[62] Clauss, G.F., Klein, M. The new year wave: Spatial evolution of an extreme sea state. Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering. V. 131, Issue 4, 2009, P. 1-9.

[63] Cote L.J. et al. The directional spectrum of a wind generated sea as determined from data obtained by the Stereo Wave Observation Project.— «Meteorological Papers», 1960, V. 2, N 6. 88 p.

[64] Cox C. Measurements of slopes of high frecuency wind waves.— «J. Marine Res.», 1958, V. 16, P. 199-225.

[65] Cox C, Munk W. Measurement of the roughness of the sea surface from photographs of the sun glitter // J. Optical. Soc. America.- 1954.-v.44, № 11.- P.838-850

[66] Cui, C., Zhang, N., Kang, H., Yu, Y. An experimental and numerical study of the freak wave speed. Acta Oceanologica Sinica. V. 32, Issue 5, 2013, P. 51-56.

[67] Didenkulova, I.I., Nikolkina, I.F., Pelinovsky, E.N. Rogue waves in the basin of intermediate depth and the possibility of their formation due to the modulational instability. JETP Letters. V. 97, Issue 4, 2013, P. 194-198.

[68] Ewing J.A. Some measurements of the directional wave spectrum., «J. Marine Res.», 1969, V. 27, P. 163—171.

[69] Fochesato, C., Grilli, S., Dias, F. Numerical modeling of extreme rogue waves generated by directional energy focusing. Wave Motion. V. 44, Issue 5, 2007, P. 395-416.

[70] Hasselmann K., Olbers D. Measurements of wind-wave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP). Ergänzung zur Deut. Hydrogr. Z., Reihe A (8), 12 , P. 1-95.

[71] He, J.S., Zhang, H.R., Wang, L.H., Porsezian, K., Fokas, A.S. Generating mechanism for higher-order rogue waves. Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. V. 87, Issue 5, 24 May 2013, article number 052914.

[72] Hu, Z., Tang, W., Xue, H., Zhang, X. Numerical study of rogue waves as nonlinear schrödinger breather solutions under finite water depth. Wave Motion. V. 52, 2015, P. 81-90.

[73] Johannessen T.B., Swan C. A laboratory study of the focusing of transient and directionally spread surface water waves. - Proc. Royal Soc. London, 2001, V. A457, P. 971-1006.

[74] Kargin B.A., Prigarin S.M. Simulation of the sea undulation surface and study of its optical properties by Monte Carlo method. Atmospheric and Oceanic Optics. V. 5, N. 3, 1992, P. 186-190.

[75] Kjeldsen, S.P. Measurements of freak waves in norway and related

ship accidents. RINA, Royal Institution of Naval Architects International Conference - Design and Operation for Abnormal Conditions III. 2005, P. 31-38.

[76] Kraichnan R.H. Diffusion by a random velocity field // Phys. Fluids. — 1970., V. 13, N. 1., P. 22–31.

[77] Kramer P., Kurbanmuradov O., Sabelfeld K. Comparative analysis of multiscale Gaussian random field simulation algorithms, J. Comp. Phys., 226, 2007, P. 897-924.

[78] Kurbanmuradov O. Convergence of numerical models for the Gaussian fields, Russ. J. Num. Anal. and Math. Modell., 10, No 4, 1995, P. 311-324.

[79] Kurbanmuradov O. Weak convergence of approximate models of random fields, Russ. J. Num. Anal. and Math. Modell., 10, No 6, 1995, P. 500-517.

[80] Litvenko K.V. Observations-based stochastic simulation of the sea surface undulation and extreme ocean waves. Applied Methods of Statistical Analysis. Applications in survival analysis, reliability and quality control – AMSA'2013, Novosibirsk, Russia, 25-27 September, 2013: Proceedings of the international workshop. – Novosibirsk: NSTU publisher, 2013, P.145-153

[81] Litvenko K.V., Prigarin S.M. The error analysis for spectral models of the sea surface undulation. Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling, 2014, V.29, No.4, P.239-250 DOI: 10.1515/rnam-2014-0019.

[82] Litvenko K.V., Prigarin S.M. Numerical models of the sea surface: applications and accuracy. Eighth International Workshop on Simulation in Vienna. Book of Abstracts. Rasch D., Melas V., Pilz J., Moder K., Spangl B. Institute of Applied Statistics and Computing, University of Natural Resources and Life Science, 2015, P. 127-128

[83] Litvenko K.V., Prigarin S.M. The accuracy and convergence of spectral models for the sea surface and rogue waves simulation. 9th International Workshop on Simulation in Barcelona. Book of Abstracts. Universitat Polit‘ecnica de Catalunya - UPC, 2018, P. 65.

[84] Litvenko K.V., Prigarin S.M., Sagoyakova E.R. The accuracy of spectral models for the sea surface simulation, "Applied methods of statistical analysis. Nonparametric approach". Proceedings of the international workshop (14-19 September 2015, Novosibirsk Belokurikha). Издательство: Новосибирский государственный технический университет, 2015. С. 400-408.

[85] Liu P. A chronology of freaque wave encounters. Geofizika V.24, No 1, P. 57-70.

[86] Longuet-Higgins M.S., Cartwright D.E., Smith N.D. Observations of the directional spectrum of sea waves using the motions of a floating buoy.— «Proc. Conf. Ocean Wave Spectra», Easton USA, Nat. Acad. Sci., N.Y., 1963, P. 111—136.

[87] Magnusson A.K., Jenkins A., Niedermeier A. et. al. Extreme wave statistics from time-series data. Rogue Waves: Forecast and Impact on Marine Structures. - Geesthacht: GKSS Research Center, 2003. Paper WP2.

[88] Mathero G. The intrinsic random functions and their applications // Advances in Applied Probability., 1973., No 5., P. 439–468.

[89] Mitsuyasu H., Honda T. The high frecuency spectrum od wind-generated waves. // «J. Oceanogr. Soc. Japan». — 1974, vol. 30, No 4, P. 185-198.

[90] Monbaliu J., Toffoli A. Regional distribution of extreme waves. Rogue Waves: Forecast and Impact on Marine Structures. – Geesthacht: GKSS Research Center, 2003. Paper WP5.

[91] Nikolkina I., Didenkulova I. Rogue waves in 2006-2010. Natural Hazadrs and Earth System Sciences, 11, 2011, P. 2913-2924.

[92] Ogorodnikov V.A., Prigarin S.M. Numerical Modelling of Random Process and Fields: Algorithms and Applications. - Utrecht: VSP, 1966.

[93] Onorato, M., Osborne, A.R., Serio, M., Cavaleri, L. Modulational instability and non-Gaussian statistics in experimental random water-wave trains. Physics of Fluids. V. 17, Issue 7, 2005, P. 1-4.

[94] Onorato, M., Proment, D., Clauss, G., Klein, M. Rogue Waves: From Nonlinear Schrödinger Breather Solutions to Sea-Keeping Test. PLoS ONE. V. 8, Issue 2, 2013, No e54629.

[95] Orfeuil J.P. Simulation du Wiener-Levi et de ses integrales. Internal report, Centre de Morphologie Mathematique, Fontaineblau, 1972.

[96] Perić, R., Hoffmann, N., Chabchoub, A. Initial wave breaking dynamics of Peregrine-type rogue waves: A numerical and experimental study. European Journal of Mechanics, B/Fluids, V. 49, Issue PART A, January/February 2015, P. 71-76.

[97] Pierson W.J., Stacy R.A. (1973). The elevations, slope and curvature spectra of wind rouhened sea surface. NASA Contract. Rep. CR 2247, 1973, 128 p.

[98] Prigarin S.M. Spectral Models of Random Fields in Monte Carlo Methods. VSP, Utrecht, 2001, 198 p.

[99] Prigarin S.M., Litvenko K.V. Numerical simulation of the sea surface and extreme ocean waves with stochastic spectral models, Proceedings of the AMSA-2011 International Workshop "Applied Methods of Statistical Analysis. Simulations and Statistical Inference"(20-22 September, 2011, Novosibirsk, Russia), Novosibirsk: Publishing house of NSTU, 2011, P.394-402.

[100] Prigarin S.M., Litvenko K.V. Conditional spectral models of extreme ocean waves, Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling, 2012, V. 27, No. 3, P. 289-302.

[101] Prigarin S.M., Litvenko K.V. Simulation of extreme ocean waves by peaks of random functions. Seventh International Workshop on Simulation (21-25 May, 2013, Department of Statistical Sciences, Unit of Rimini University of Bologna, Italy). Book of Abstracts, 2013, P. 300-301 //ISSN 1973-9346.

[102] Rosenthal W., Lehner S. Rogue Waves: Results of the MaxWave Project. - Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering, 2008.

[103] Sabelfeld K.K., Kurbanmuradov O.A. Numerical statistical model of classical incompressible isotropic turbulence. - Soviet Jour. of Numer. Analysis and Mathematical Modelling. - 1990. - Vol.5, No.3 - P. 251-263.

[104] Shinozuka M. Simulation of multivariate and multidimensional random processes // J. of Acoust. Soc. Am. — Vol. 49. — P. 357–368.

[105] Slunyaev, A., Pelinovsky, E., Guedes Soares, C. Modeling freak waves from the North Sea. Applied Ocean Research. V. 27, Issue 1, 2005, P. 12-22.

[106] Soares C.G., Fonseca N., Pascoal R. An approach for the structural design of ships and offshore platforms in abnormal waves. Rogue Waves: Forecastand Impact on Marine Structures. – Geesthacht: GKSS Research Center, 2003. Paper WP6.

[107] Stewart R.H. Introduction To Physical Oceanography. Univ Pr of Florida, 2008.

[108] Stokes G.G. On the theory of oscillatory waves. Cambridge Transactions 8: 441–473.

[109] Valenzuela G.R., Laing M.B. Non-linear energy transfer in gravity capillary wave spectra, with application. – «J. Fluid Mech.» 1972, V. 54, No. 1, P. 507-520.

[110] Yasuda T., Mori N. Occurrence properties of giant freak waves in the sea area around Japan. J. Waterway, Port, Coastal Ocean Eng. 1997, V. 123, N. 4, P. 209-213.

Приложение А. Аппроксимации спектров поверхности морского волнения

Определяющую роль в исследованиях поверхности морского волнения играют экспериментальные данные и способы их интерпретации.

Большое количество экспериментальных записей морского волнения получено с помощью волнографов, которые регистрируют во времени изменение морской поверхности в фиксированной точке. Статистической характеристикой такого волнения является частотный спектр, который характеризует распределение дисперсий волновых аппликат по частотам колебаний [9, 10].

Другим распространенным способом записи волнения являются планшеты аэрофотосъемки волн, которые дают нам представление о поверхности морского волнения в фиксированный момент времени. В этом случае волнение характеризуется функцией углового распределения энергии, которая определяет распространение волновой энергии по направлениям [9, 10]. Функцию углового распределения энергии будем называть угловым спектром.

В данном пункте мы рассмотрим наиболее распространенные аппроксимации частотного и углового спектров волнения, большинство из которых были реализованы в «Программном комплексе для численного моделирования стохастической структуры морской поверхности» [26].

А.1 Аппроксимации частотных спектров морской поверхности

Ветровое волнение морской поверхности образуется под действием сил тяжести и поверхностного натяжения. Если в образовании волн основную роль играют силы поверхностного натяжения, то такие волны называются капиллярными. Если же определяющей силой является сила тяжести - гравитационными волнами. С уменьшением длины волны силы поверхностного натяжения оказы-

вают все большее влияние. Интервал длин волн, в котором сила тяжести и сила поверхностного натяжения – величины примерно одного порядка, называется гравитационно-капиллярным [16].

Частотный спектр ветровых волн можно разделить на ряд областей с различными свойствами [11]. К основным областям относят:

1. гравитационную область, на которую падает преобладающая часть волновой энергии,

2. гравитационно-капиллярную область,

3. капиллярную область,

4. вязкий интервал.

Отметим, что последние три интервала играют большую роль, например, в задачах рассеяния и отражения электромагнитных волн. В данной работе нас интересуют волны со значительной длиной волны, поэтому сосредоточимся на гравитационной части спектра. Высокочастотные области спектра рассматриваются, например, в работах [21, 64, 89, 97, 109]. Далее под частотным спектром понимается именно гравитационная область.

По приборным записям волн получено большое количество аппроксимаций частотных спектров морского волнения. Хорошо согласуются с экспериментальными данными спектры экспоненциального вида. Для моделирования частотного спектра ветровых волн часто используется аппроксимация, называемая в судостроении формулой Барлинга [9, 11, 39]:

$$S(\mu) = A\mu^{-k} \exp(-B\mu^{-n}). \tag{73}$$

Значения параметров A, B, k, n зависят от условий волнообразования. Кроме того, на параметры накладываются определенные условия, связывающие частоту спектрального максимума и дисперсию волнового процесса.

По своей сути морское волнение является сложным нестационарным процессом. Однако, если рассматривать большую акваторию с постоянно дующим ветром в течение продолжительного времени, то для простоты можно говорить

о полностью развитом волнении - некое равновесное состояние, при котором энергия, передаваемая ветром волнам, равна энергии, теряемой при разрушении волн.

Для полностью развитого волнения наибольшее распространение получила модификация спектра (73), известная как спектр Пирсона-Московица [107]:

$$S(\mu) = \frac{\alpha g^2}{\mu^5} \exp\left(-0.6768\left(\frac{g}{v\mu}\right)^4 \right), \tag{74}$$

где $\alpha = 8.1 \cdot 10^{-3}$, g – ускорение свободного падения, v – скорость ветра (в м/с) на высоте 10 м над уровнем моря. На рисунке 23 представлена динамика аппроксимации спектра Пирсона-Московица при изменяющемся параметре v.

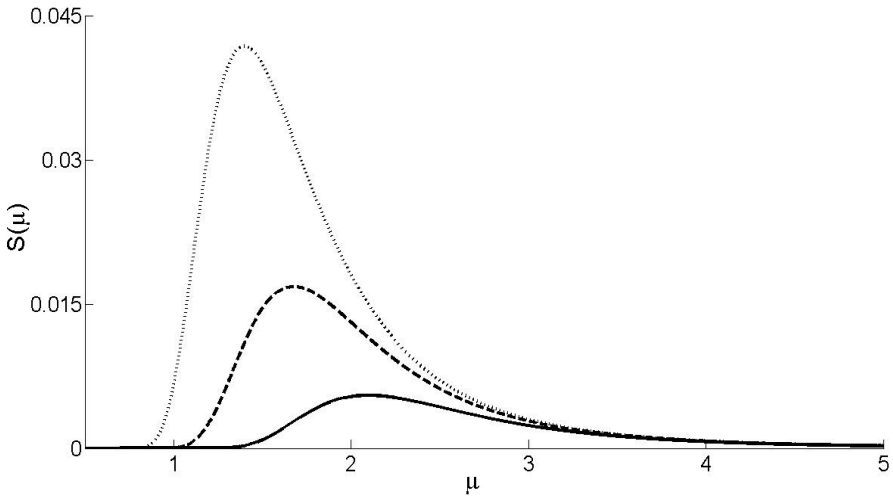

Рис. 23: Аппроксимация частотного спектра Пирсона-Московица (74) с параметром v, равным 4 м/с, 5 м/с и 6 м/с (сплошная линия, штриховой пунктир и точечный пунктир, соответственно). По горизонтальной оси значения даны в $с^{-1}$.

Анализ данных в рамках международного эксперимента JONSWAP (Joint North Sea Wave Observation Project) показал, что в действительности волнение не может достигнуть состояния полностью развитого [70]. Причинами этого являются непостоянство ветрового потока над обширной акваторией, сложность процессов образования и распространения волн и прочее. В результате, для

учета этого факта Хассельман с соавторами предложили дополнить аппроксимацию (74) «искусственным» множителем $\gamma^{\beta(\mu)}$ [70, 107]:

$$S(\mu) = \frac{\alpha g^2}{\mu^5} \exp\left(-\frac{5\mu_0^4}{4\mu^4} \right) \gamma^{\beta(\mu)}, \tag{75}$$

где

$$\alpha = 0.076 \left(\frac{v^2}{Fg} \right)^{0.22}, \quad \beta(\mu) = \exp\left(-\frac{(\mu - \mu_0)^2}{2\sigma^2(\mu)\mu_0^2} \right), \quad \mu_0 = 22 \left(\frac{g^2}{vF} \right)^{\frac{1}{3}},$$

γ – отношение основного спектрального максимума к его значению по аппроксимации (74), F – расстояние, над которым ветер дует с постоянной скоростью, σ – параметр формы, принимающий следующие значения:

$$\sigma(\mu) = \begin{cases} 0.07, & \mu \leq \mu_0, \\ 0.09, & \mu > \mu_0. \end{cases}$$

Параметр γ зависит от скорости ветра и его разгона. С увеличением скорости ветра параметр γ уменьшается, что объясняется приближением спектра штормового волнения к спектру полностью развитого волнения. Среднее значение γ, полученное в эксперименте JONSWAP, оказалось равным 3.3 [11].

На рисунках 24 и 25 представлена зависимость аппроксимации спектра JONSWAP от изменения параметров скорости ветра на высоте 10 м над уровнем моря v и длины разгона F соответственно. Параметр γ был выбран постоянным со значением равным 3.3.

Рассмотрим еще один спектр, применяемый для моделирования волнения, близкого к полностью развитому. В работе [9] рассматривается аппроксимация частотного спектра, учитывающая разделение гравитационной области на три интервала: область основного максимума спектра, переходный и равновесный интервалы спектра.

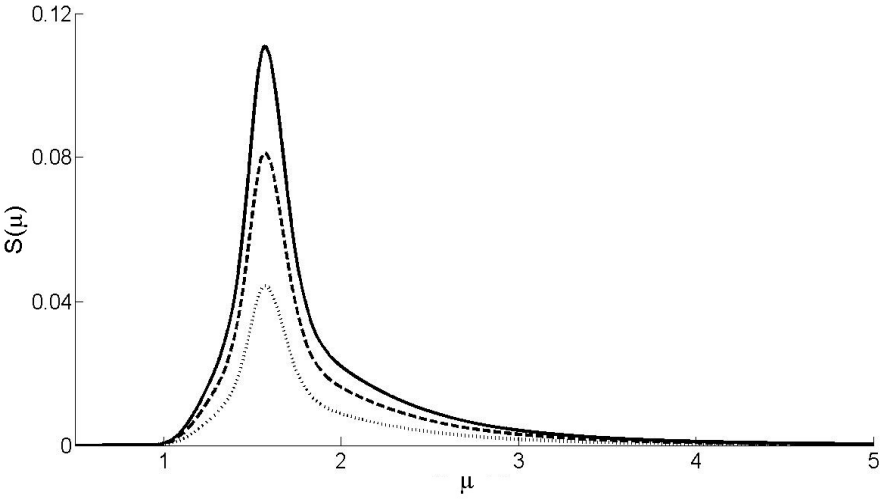

Рис. 24: Аппроксимация частотного спектра JONSWAP (75) при фиксированных параметрах $\gamma = 3.3$, $F = 37,8 \cdot 10^3$ м и различном параметре v: $v = 8$ м/с (сплошная линия), $v = 5$ м/с (штриховой пунктир), $v = 2$ м/с (точечный пунктир). По горизонтальной оси значения даны в с^{-1}.

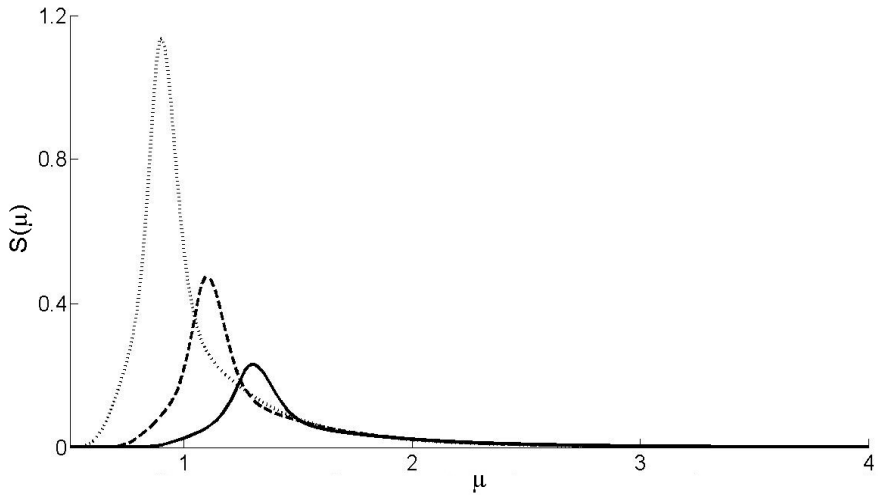

Рис. 25: Аппроксимация частотного спектра JONSWAP (75) при фиксированных параметрах $\gamma = 3.3$, $v = 7$ м/с и различным параметром F: $F = 66.5 \cdot 10^3$ м (сплошная линия), $F = 109.8 \cdot 10^3$ м (штриховой пунктир), $F = 21.3 \cdot 10^3$ м (точечный пунктир). По горизонтальной оси значения даны в с^{-1}.

Запишем аналитический вид спектра:

$$S(\mu)=\begin{cases} 6m_0\left(\frac{\mu_{\max}}{\mu}\right)^5\mu^{-1}\exp\left\{-1.2\left[\left(\frac{\mu_{\max}}{\mu}\right)^5-\left(\frac{\mu_{\max}}{\mu_1}\right)^5\right]\right\}, \ \ \mu\in(0,\mu_1], \\ S(\mu_1)+(S(\mu_2)-S(\mu_1))\cdot\frac{\mu-\mu_1}{\mu_2-\mu_1}, \quad \mu\in(\mu_1,\mu_2), \\ 0.0078g^2\mu^{-5}, \ \ \mu\in[\mu_2,\mu_3), \end{cases} \tag{76}$$

$$\mu_1=1.8\mu_{\max}\widetilde{\mu}^{(-0.7)}, \quad \mu_2=2.0\mu_{\max}\widetilde{\mu}^{(-0.7)},$$

$$\widetilde{\mu}=v\mu_{\max}/g, \quad m_0=0.00127g^{-2}v^4\widetilde{\mu}^{(-3.19)}.$$

Здесь $\mu_3\approx 30$ sec^{-1} – верхняя граница частотного спектра гравитационных волн, $\mu_{\max}$ – частота спектрального максимума частотного спектра $S(\mu)$, v – скорость ветра (в м/с) на высоте 10 м над уровнем моря, g – ускорение свободного падения.

Статистические свойства морского волнения, описанного спектром (76), определяются двумя параметрами: скоростью ветра на высоте 10 м над уровнем моря v и частотой спектрального максимума $\mu_{\max}$.

Рассмотрим динамику вида спектра в зависимости от изменения параметров. На рисунке 26 представлены виды спектра при фиксированной скорости ветра и различном параметре $\mu_{\max}$. А на рисунке 27 представлены спектры при фиксированном значении $\mu_{\max}$ и изменяемой скорости ветра.

A.2 Аппроксимации угловых спектров морской поверхности

Изучению аппроксимации функции углового распределения энергии посвящено большое количество исследований, см., например, [2,63,68,86]. Рассмотрим некоторые из них.

В 1971 году проводилось исследование, в ходе которого было изучено шестьдесят шесть планшетов стереофотосъемки волнения. Выявленные особенности

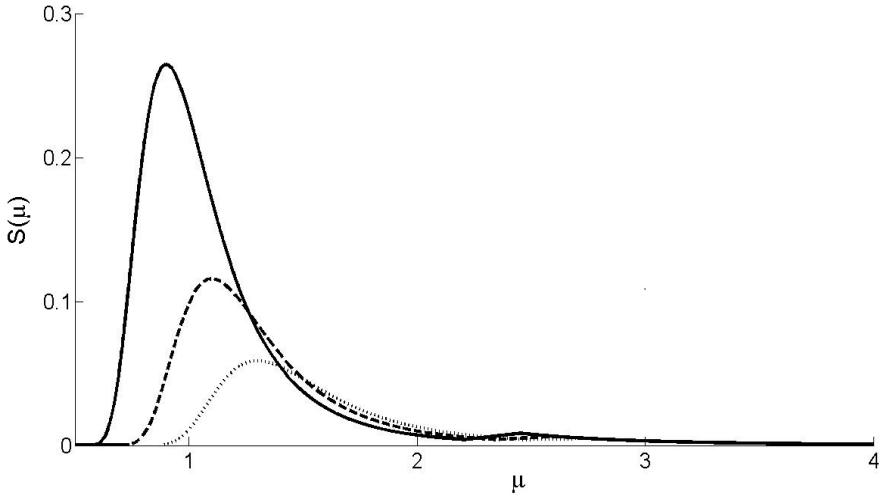

Рис. 26: Аппроксимация частотного спектра, учитывающего разделение гравитационной области на три интервала, (76) при фиксированном параметре $v = 7$ м/с и различным параметром $\mu_{\max}$: $\mu_{\max} = 0.9\ c^{-1}$ (сплошная линия), $\mu_{\max} = 1.1\ c^{-1}$ (штриховой пунктир) и $\mu_{\max} = 1.3\ c^{-1}$ (точечный пунктир). По горизонтальной оси значения даны в с$^{-1}$.

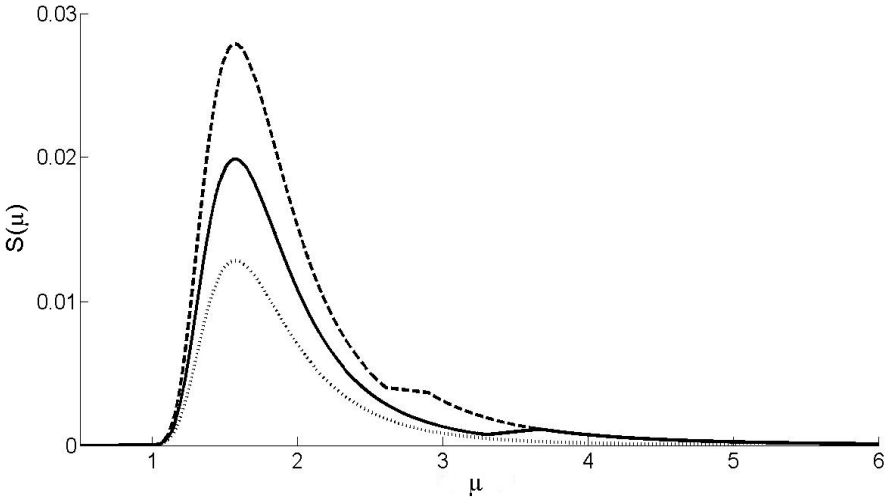

Рис. 27: Аппроксимация частотного спектра (76) с фиксированным значением параметра $\mu_{\max} = 1.1\ c^{-1}$ и различным параметром v: $v = 5$ м/с (сплошная линия), $v = 7$ м/с (штриховой пунктир), $v = 3$ м/с (точечный пунктир). По горизонтальной оси значения даны в с$^{-1}$.

углового распределения энергии были учтены в аппроксимации, представленной в работе [12]:

$$Q(\mu,\phi) = \frac{0.5k \cdot \dfrac{\widetilde{\mu}}{(\widetilde{\mu}+1)^2}}{1-\exp\left(-\dfrac{k\pi}{2}\cdot\dfrac{\widetilde{\mu}}{(\widetilde{\mu}+1)^2}\right)} \cdot \exp\left(-k|\phi|\frac{\widetilde{\mu}}{(\widetilde{\mu}+1)^2}\right), \tag{77}$$

где параметр k изменяется от 3 до 8 в зависимости от волнения, $\widetilde{\mu} = \dfrac{\mu}{\mu_{max}}$, μ_{max} - частота спектрального максимума.

Исследования показывают, что аппроксимация (77) дает результаты, хорошо согласующиеся с натурными данными, по крайней мере в пределах углов $\pm 35^\circ$ [9].

Позднее в работе [9] представлена аппроксимация, которую можно использовать во всем диапазоне углов ϕ:

$$Q(\mu,\phi) = 2^k \cdot \frac{\Gamma^2\left(\dfrac{k+1}{2}\right)}{\Gamma(k+1)} \cdot \cos^k(\phi), \tag{78}$$

где параметр k зависит от μ, Γ – гамма-функция Эйлера.

Однако для простоты часто переходят к упрощенному виду углового спектра, предложенному Пирсоном, Нейманом и Джеймсом [41]. В этой аппроксимации спектра не учитывается зависимость углового распределения энергии от частоты:

$$Q(\phi) = \frac{2}{\pi} \cdot \cos^2(\phi), \tag{79}$$

где $\phi \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Отметим, что об угловом спектре значительно меньше сведений, чем о частотном. Это связано со сложностью получения натурных данных для изучения углового спектра.

Приложение Б. Информация о волнах-убийцах

За тысячи лет мореплавания люди научились бороться с различными опасностями водной стихии. Но до сих пор некоторые явления остаются малоизученными. Одно из таких – «волны-убийцы» (в англоязычной литературе встречаются названия «rogue waves» и «freak waves»). С незапамятных времен моряки рассказывали истории о «девятом вале» – огромной волне, разрушающей суда и несущей гибель. Но всерьез такое явление стали воспринимать только в конце XX века. В 2000-2003 годах в рамках проекта «MaxWave» проводилось наблюдение за поверхностью Мирового океана с помощью методов дистанционного зондирования. Было показано, что аномально высокие волны возникают чаще, чем это предсказано классической теорией Релея, [102]. В работе [85] в хронологическом порядке описаны наиболее известные случаи встреч с волнами-убийцами вплоть до 2007 года, а в работе [91] можно найти данные за период с 2006 по 2010 гг.

В настоящее время не существует единого мнения относительно природы возникновения и механизма действия таких волн. Не существует и единого определения волн-убийц. Обычно под волной-убийцей понимают волну, которая в два и более раз превышает основное волнение, точнее «значительную» высоту волн, то есть среднюю высоту одной трети наибольших волн.

По внешнему виду выделяют три типа волн-убийц: одиночная гигантская волна, «белая стена» и «три сестры». В частности, одна из самых известных фотографий волны «белая стена» была опубликована в журнале «Mariners Weather Log» в 1993 году [102].

Из-за внезапности этого явления существует достаточно мало натурных записей волн-убийц. Самая известная из них - «Новогодняя волна». 1 января 1995 года на нефтяную платформу «Draupner» в Северном море обрушилась 26-метровая волна, в то время как значительная высота волн была менее 12 метров. Приборы, установленные на нефтяной платформе, смогли зафиксиро-

вать волнение. На рисунке 28 представлена волнограмма «Новогодней волны».

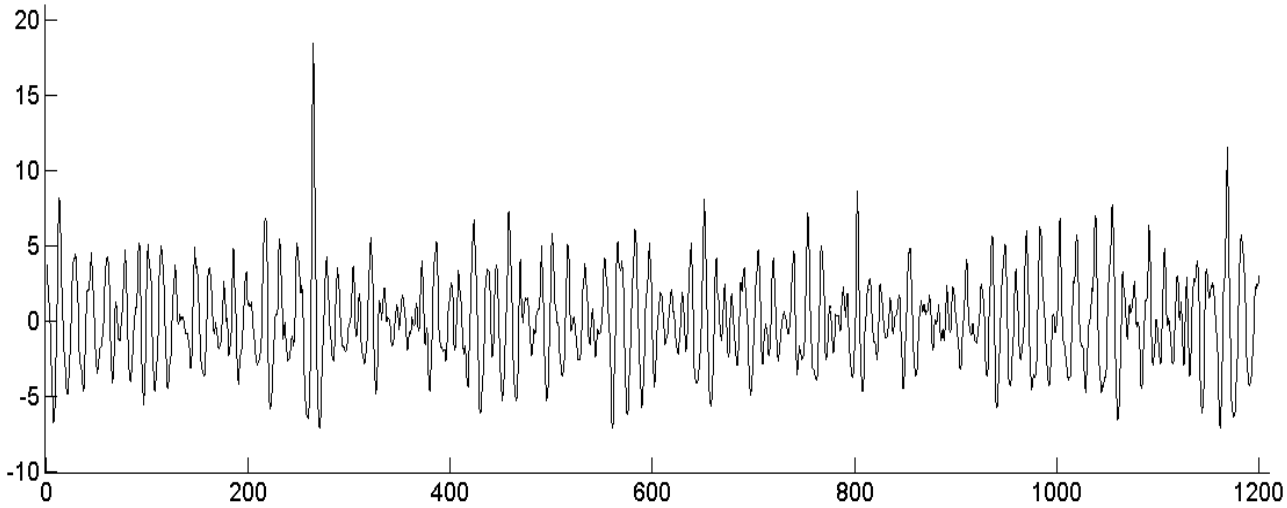

Рис. 28: Волнограмма «Новогодней волны». По оси абсцисс значения приведены в секундах, по оси ординат - в метрах.

Аномально высокие волны-убийцы представляют серьезную угрозу морским судам и сооружениям, поскольку современные конструкции не предполагают встреч с такими волнами. На сегодняшний день к основным можно отнести задачи прогнозирования волн-убийц и задачи внедрения и использования знаний о механизмах возникновения и развития гигантских волн при конструировании морских единиц.

Приложение В. Шкала Бофорта

Для приближенной оценки скорости ветра по его воздействию на наземные предметы или по волнению в открытом море используется шкала Бофорта, разработанная английским адмиралом Фрэнсисом Бофортом в 1806 году [38]. С 1874 года принята для использования в международной синоптической практике. Средняя скорость ветра указывается на стандартной высоте 10 м над открытой ровной поверхностью. В таблице 9 приведена шкала Бофорта и соответствующее описание поведения водной поверхности.

Таблица 9: Шкала Бофорта.

Балл	Скорость (м/с) и характеристика силы ветра	Состояние водной поверхности	Высота волн, м
0	0-0.2 штиль	зеркально-гладкая	0
1	0.3-1.5 тихий	заметная рябь, но без образования гребней	0.25
2	1.6-3.3 легкий	небольшая рябь с ровными, не разорванными гребнями	0.25-0.75
3	3.4-5.4 слабый	крупная рябь, гребни начинают разрываться, появляются редкие барашки	0.75-1.25
4	5.5-7.9 умеренный	небольшие волны с довольно частыми барашками	1.25-2
5	8.0-10.7 свежий	протяженные волны среднего размера с многочисленными барашками и мелкими брызгами	1.25-2.1
6	10.8-13.8 сильный	начинают образовываться крупные волны, барашки везде, брызги	2-3.5
7	13.9-17.1 крепкий	белая пена срывается ветром с гребней волн	3.5-6
8	17.2-20.7 очень крепкий	волны средней высоты, но большой длины, гребни разбиваются в брызги, пена сдувается хорошо заметными полосами	6-8.5
9	20.8-24.4 шторм	высокие волны, начинающие закручиваться, плотные потоки пены, брызги ухудшают видимость	8.5-11
10	24.5-28.4 сильный шторм	очень высокие волны с нависающими гребнями, вода белая из-за мощных потоков пены, видимость уменьшена	8.5-11
11	28.5-32.6 жестокий шторм	исключительно высокие волны, вода покрыта клочьями белой пены, видимость плохая	больше 11
12	32.7-36.9 ураган	воздух насыщен водными брызгами, вода белая из-за потоков пены, видимость очень плохая	больше 11