

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)

На правах рукописи



ЗЯТЬКОВ НИКОЛАЙ ЮРЬЕВИЧ

**РАЗРАБОТКА И ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА
ДЛЯ ДИФРАКЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН
С АДАПТАЦИЕЙ ПОД ГРАФИЧЕСКИЕ УСКОРИТЕЛИ**

Специальность 05.13.18 –
«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:

кандидат физико-математических наук, доцент
Айзенберг Аркадий Маркович

Новосибирск – 2019

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1. АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР МЕТОДОВ СЕЙСМИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ...	19
1.1. Методы физического моделирования	19
1.2. Численные методы	20
1.2.1. Прямые методы (методы конечных разностей)	21
1.2.2. Методы интегральных уравнений	21
1.2.3. Псевдо-спектральные методы и методы конечных объёмов.....	22
1.2.4. Непрерывные или разрывные методы конечных элементов Галёркина	23
1.3. Аналитические методы	23
1.3.1. Строгие аналитические решения (канонические модели)	24
1.3.2. Приближённые аналитические методы	25
1.3.3. Строгие аналитические решения (неканонические модели)	26
1.4. Заключение	27
2. МЕТОД НАЛОЖЕНИЯ КОНЦЕВЫХ ВОЛН	29
2.1. Матрично-векторная аппроксимация операторов и операндов	29
2.1.1. Принципы матричной аппроксимации операторов распространения и дифрагирования	29
2.1.2. Принципы матричной аппроксимации операторов прохождения-распространения... ..	37
2.2. Тестирование пучков концевых волн (ПКВ).....	41
2.3. Краткое описание алгоритма МНКВ.....	47
2.5. Заключение	49
3. РЕАЛИЗАЦИЯ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА МНКВ	51
3.1. Архитектура программного комплекса МНКВ	51
3.2. Особенности и ключевые проблемы реализации алгоритма МНКВ	56
3.3. Поле источника, падающее на границу: векторная реализация	57
3.4. Поле, распространяющееся с предыдущей границы слоя на следующую: матрично- векторная реализация.....	60
3.5. Поле, распространяющееся с границы слоя в приёмники: матрично-векторная реализация	63
3.6. Матрица распространения волнового поля внутри слоя.....	65

3.6.1. Реализация и оптимизация процедуры распространения волнового поля программного комплекса МНКВ.....	65
3.6.2. Адаптация процедуры распространения волнового поля программного комплекса МНКВ для параллельных архитектур и GPU-кластера	71
3.7. Матрица дифрагирования волнового поля границы слоя	77
3.8. Матрица виртуальной тени границы слоя	78
3.8.1. Определение и алгоритм вычисления матрицы виртуальной тени	78
3.8.2. Оптимизация хранения матрицы виртуальной тени	82
3.8.3. Оптимизация вычисления матрицы виртуальной тени.....	85
3.8.4. Адаптация вычисления матрицы виртуальной тени на GPU и GPU-кластер.....	90
3.8.5. Тестирование алгоритма вычисления матрицы виртуальной тени	94
3.9. Эффективные коэффициенты отражения и преломления.....	98
3.10. Анализ производительности программного комплекса МНКВ	99
3.11. Заключение	105
4. ТЕСТИРОВАНИЕ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА МНКВ	107
4.1. Тестирование программного комплекса МНКВ для акустических сред со сложными границами (волновое поле и его дифракционная структура)	108
4.1.1. Модель 1: огибание волновым полем клиновидной границы	108
4.1.2. Модель 2: огибание волновым полем параболической границы	112
4.1.3. Модель 3: огибание волновым полем гиперболической границы	115
4.1.4. Модель 4: огибание волновым полем 2-клинной границы.....	118
4.1.5. Модель 5: огибание волновым полем 2-параболической границы.....	122
4.1.6. Модель 6: преломление волнового поля через клиновидную и параболическую границы	125
4.1.7. Модель 7: преломление волнового поля через 2-клинную границу	132
4.1.8. Модель 8: волновое поле под ангидритовой прослойкой.....	138
4.2. Тестирование программного комплекса МНКВ для акустических сред со сложными границами (волновые амплитуды « a^+ – a^- »).....	143
4.3. Сравнение МНКВ с методом конечных разностей.....	144
4.4. Заключение	147
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	151
СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ	153

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	158
ПРИЛОЖЕНИЕ А. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ	163
А.1. Постановка прямой задачи для слоистой среды	163
А.2. Строгое аналитическое представление решения прямой задачи в терминах ТОПРД	167
ПРИЛОЖЕНИЕ В. БЛОЧНАЯ СТРУКТУРА ОПЕРАТОРОВ ПРОХОЖДЕНИЯ- РАСПРОСТРАНЕНИЯ И ВЕКТОРОВ	172
В.1. Блочная структура матричных операторов и векторов в слоях	172
В.2. Операторы распространения волн в слоях	179
В.3. Операторы прохождения волн на границах	184
ПРИЛОЖЕНИЕ С. ВЕРИФИКАЦИЯ МНКВ ЛАБОРАТОРНЫМИ ДАННЫМИ	187
ПРИЛОЖЕНИЕ D. СВИДЕТЕЛЬСТВО О ГОСУДАРСТВЕННОЙ РЕГИСТРАЦИИ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ ФЕДЕРАЛЬНОЙ СЛУЖБОЙ ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ	192
ПРИЛОЖЕНИЕ Е. СЕРТИФИКАТ ПОБЕДИТЕЛЯ КОНКУРСА «GPU: СЕРЬЕЗНЫЕ УСКОРИТЕЛИ ДЛЯ БОЛЬШИХ ЗАДАЧ»	193
ПРИЛОЖЕНИЕ F. ДОКУМЕНТ, ПОДТВЕРЖДАЮЩИЙ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МНКВ ЛАБОРАТОРИЕЙ МЕХАНИКИ И АКУСТИКИ (Г. МАРСЕЛЬ, ФРАНЦИЯ)	194

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Сейсмический метод исследования недр Земли использует отраженные и преломленные волны для послойного восстановления материальных параметров блоков реальной среды и геометрической структуры границ между ними по наблюдаемым данным.

Среди множества обратных задач сеймики, известных в современной математической физике, наибольшее распространение получили обратные задачи, использующие оптимизационный подход [1, 2]. Оптимизационный подход использует в моделирующем ядре различные методы решения прямой задачи сеймики и сводится к многократному перебору решения прямой задачи для вектора искомым геометрических и материальных параметров модели среды. Чтобы избежать многократного перебора с искомым вектором в многомерном параметрическом пространстве, модель среды разбивается на покрывающую среду известного строения, описываемую постоянным параметрическим вектором большой длины, и локальную целевую область неизвестного строения, описываемую искомым параметрическим вектором малой длины [1, 3]. В настоящее время наибольшее внимание исследователей привлечено к методам, понижающим размерность многомерного параметрического пространства в оптимизационном подходе, за счёт введения модели среды типа «покрывающая среда-целевая область». Эти методы базируются на одноразовом математическом моделировании волновых полей в покрывающей среде известного строения и многократном математическом моделировании волновых полей в целевой области искомого строения [1, 2, 4, 5, 6].

Для случая слабой латеральной неоднородности покрывающей среды возможно применять всё многообразие методов моделирования сейсмических волновых полей [7, 8, 9]. Большинство из них будут давать достаточно точное решение. Для случая покрывающей среды с сильной латеральной неоднородностью (соляные тела, рифовые структуры, базальтовые слои и т.д.) построение качественного сейсмического изображения – требующая затрат задача, которая привлекает огромное внимание при поисках нефтяных месторождений. Наличие больших скоростных контрастов, неоднородностей, анизотропии и затухания вкупе со сложными формами геологических границ, порождающими многократную дифракцию и ползущие волны, понижает разрешающую способность сеймики. Современные методы построения изображения среды развиваются с учетом все более сложных моделей и с применением более прецизионных алгоритмов [8]. Точность схемы построения изображения в большинстве случаев определяется ограничениями метода моделирования.

В последние десятилетия развивалась строгая теория решения прямой задачи для акустических и сейсмических волновых полей в моделях с сильной латеральной неоднородностью – теория операторов прохождения-распространения-дифрагирования (ТОПРД) [12, 13], [12]. Аналитическая форма решения в рамках ТОПРД позволяет в дополнение к классической проблеме синтеза интерференционного волнового поля решать неклассическую проблему анализа волновой структуры такого поля. В частности, имеется возможность вычисления актов каскадной дифракции на вогнутых элементах криволинейных границ. Однако практическое применение ТОПРД сдерживается высокой сложностью её аналитических формул. Для сейсмических приложений была разработана матрично-векторная аппроксимация ТОПРД – метод наложения концевых волн (МНКВ) [14, 15, 16]. Данная диссертация посвящена исследованию точности элементов этой аппроксимации и разработке программного комплекса, реализующего МНКВ для случая акустических сред с однородными слоями и произвольными криволинейными и кусочно-криволинейными границами.

Степень разработанности темы исследования. Состояние исследований по теории сейсмических волновых полей, их мировой уровень и актуальные направления их развития подробно описаны в обзорах [8, 9, 10, 11]. В этих обзорах все существующие методы математического моделирования сейсмического волнового поля разделены на три категории:

- 1) численные методы для трёхмерных сред (метод конечных разностей, метод интегральных представлений, метод конечных элементов, метод конечных объёмов, граничные интегральные уравнения и т.п.),
- 2) строгие аналитические методы для одномерных сред (пространственно-спектральные методы, метод разложения на плоские волны, обобщённый лучевой метод, «рефлективити» метод и т.п.).
- 3) приближённые аналитические методы для трёхмерных сред (методы лучевого трассирования, геометрическая теория дифракции, физическая теория дифракции и т.п.),

Численные методы составляют основу численного моделирования полного волнового поля. Эти методы позволяют строить сейсмические изображения для сложных трёхмерных слоисто-блоковых сред. Однако данные подходы обладают рядом проблем: затраченное время для вычисления в сложных моделях является неприемлемым; имеются проблемы с устойчивостью этих методов; существуют затруднения в декомпозиции полного волнового поля на элементарные волны, что важно для эффективного решения обратной задачи. Строгие аналитические методы развиты только для одномерно-неоднородных сред. Только в последние десятилетия появились попытки создания строгих аналитических методов для трёхмерных неоднородных сред. Приближённые аналитические методы дают возможность вычислять

отдельные элементы структуры полного сейсмического волнового поля, но они являются приближенными. В частности, эти методы используют грубое приближение для описания явления отражения-преломления: коэффициенты отражения и преломления плоских волн, которые не учитывают частоту колебаний, кривизну границы и локальную неоднородность среды.

Известно, что каждый из методов сейсмического моделирования имеет свои преимущества и недостатки. При этом нужно справедливо отметить, что на данный момент не существует единого подхода, который бы мог учесть все преимущества и устранить недостатки указанных методов. На практике, нефтегазодобывающие компании вынуждены использовать комбинацию различных методов, пытаясь найти компромисс между скоростью вычислений алгоритма и точностью его решения.

Методология и методы исследования.

В диссертационной работе используется методология, которая комбинирует методы, развитые в математической физике, теории аппроксимации функций, линейной алгебре и информационных технологиях, для численно-аналитического исследования нового алгоритма и его численной реализации в математическом моделировании линейных волновых процессов в акустических средах со сложными границами.

В диссертационной работе использованы следующие методы исследования: 1) строгая теория операторов прохождения-распространения-дифрагирования (ТОПРД) [12, 13], [12], 2) метод наложения концевых волн (МНКВ), являющийся аппроксимацией ТОПРД для средних частот [14, 15, 16], 3) современные информационные технологии для реализации МНКВ в виде программного комплекса.

ТОПРД дает точное аналитическое решение прямой задачи для неоднородной среды с гладкими и кусочно-гладкими границами в специфических терминах математической теории волн (например, в акустике: пара продольных волновых амплитуд, распространяющихся во взаимно противоположных направлениях). Каждая волновая амплитуда представляется в форме суперпозиции волновых сигналов многократно отраженных и преломленных волн согласно их волновому коду (последовательности проходимых слоев). Каждый отдельный сигнал описывается композицией операторов распространения в неоднородных слоях и операторов прохождения (отражения и преломления) конволюционного типа на гладких границах.

МНКВ является аппроксимацией ТОПРД в диапазоне сейсмических частот и позволяет имитировать как каждую волновую амплитуду, так и их отдельные волновые составляющие, приходящие от различных частей покрывающей среды и целевой области. Было показано многими тестами [17, 18], что МНКВ способен учитывать нерегулярности в волновом поле, например, каустики, и порождать дифрагированные, головные и ползущие волны. Матрично-

векторная структура алгоритма МНКВ дает возможность его использования как моделирующего ядра в целе-ориентированных процедурах инверсии материальных параметров и построения изображения границ [19].

При реализации МНКВ в виде программного комплекса были использованы современные информационные технологии в виде параллельных вычислений с использованием кластера из графических ускорителей. В отдельных специфических процедурах программного комплекса МНКВ использованы, предложенные автором, методы программной оптимизации, которые ускоряют вычисления и оптимизируют хранение данных в памяти ЭВМ.

Цель исследования – разработка программного комплекса для кластера из графических ускорителей, реализующего алгоритм МНКВ для вычисления интерференционного волнового поля и его отдельных волновых компонент в акустических средах с границами сложной геометрической формы. Для достижения данной цели были решены следующие **задачи**:

- 1) Найдена оптимальная аппроксимация оператора распространения акустического волнового поля в виде четырёх пучков концевых волн (ПКВ).
- 2) Произведена численная реализация МНКВ в виде программного комплекса.
- 3) Построены алгоритмы, оптимизирующие вычисление МНКВ, а также, позволяющие запускать программу МНКВ при заданном объёме оперативной памяти ЭВМ.
- 4) Произведена адаптация МНКВ для кластера из графических ускорителей, позволившая ускорить вычисление алгоритма в $\sim 10^3$ и более раз.
- 5) Произведено тестирование реализованного алгоритма на точность и устойчивость численными экспериментами для моделей со сложными границами, которые порождают многократную дифракцию.
- 6) Произведено сравнение МНКВ с численным методом конечных разностей.

Научная новизна. Научную новизну работы можно охарактеризовать следующими пунктами:

- 1) Существующие методы моделирования акустических и сейсмических волновых полей реализуют решение прямой задачи путём дискретной аппроксимации системой линейных алгебраических уравнений и её численного решения. Это приводит к повышенным требованиям к численной реализации метода, например, требуются сходимость и устойчивость метода. В выбранном автором подходе – комбинирование ТОПРД и МНКВ – решение прямой задачи и его вычисление являются независимыми процессами: строгое решение прямой задачи получается в рамках ТОПРД, а вычисление готового решения или его отдельных волновых составляющих производится с помощью МНКВ. Отделение процесса вычисления от процесса решения приводит к существенному ослаблению требований к численной реализации МНКВ, например, не

- требуется сходимость алгоритма МНКВ, устойчивость алгоритма МНКВ обеспечивается аналитическими критериями, которые следуют из типа аппроксимацией формул ТОПРД.
- 2) ТОПРД представляет строгое решение прямой задачи в виде пары новых независимых операндов: волновой амплитуды a^+ и волновой амплитуды a^- , распространяющихся во взаимно-встречных направлениях. При этом остаётся возможность получить классическую сейсмограмму для полного поля давления, просуммировав волновые амплитуды a^+ и a^- . МНКВ и программный комплекс МНКВ, разработанный автором, позволяют вычислять не только эту пару волновых амплитуд, но и их элементарные составляющие, которые находятся во взаимно-однозначном соответствии с порождающими их элементами неоднородной модели среды (отдельные границы, локальные области и т.п.). Свойство программного комплекса МНКВ вычислять набор отдельных волновых компонент заменяет эвристическую процедуру интерпретации полного волнового поля (интерференция этих компонент), которая необходима для существенного повышения разрешающей способности обратной сейсмической задачи.
 - 3) МНКВ аппроксимирует строгие операторы ТОПРД в виде матриц прохождения-распространения волнового поля внутри слоёв сложной формы, которые умножаются на вектор, составленный из волновых амплитуд a^+ и a^- . Матричный подход программного комплекса МНКВ позволяет вычислять передаточные волновые характеристики слоисто-блоковой среды и её отдельных блоков без задания источников и приемников, что недостижимо при использовании других существующих методов линейной теории волн. В частности, раздельное вычисление гиперразмерной передаточной волновой характеристики покрывающей среды с заданным строением и малоразмерной передаточной волновой характеристики локальной области, строение и материальные параметры которой подлежат восстановлению, оптимально подходит для существенного ускорения вычисления и повышения разрешающей способности в целе-ориентированной версии метода оптимизации.
 - 4) Программный комплекс МНКВ позволяет вычислять волновые амплитуды a^+ и a^- в средах с границами сложной геометрической формы, например, соляные купола, базальтовые траппы, рифовые структуры и т.д. Приходящая к каждой такой границе волна огибает её вогнутые части в виде дифрагированной волны (в том числе волны, огибающие гладкие части границ), которая попадает в зону геометрической тени. При этом возникает эффект каскадной дифракции, при котором каждая предыдущая дифрагированная волна порождает дифрагированную волну следующего порядка. Каскадная дифракция реализована в комплексе программ МНКВ в виде процедуры

быстросходящегося матрично-степенного ряда, каждый следующий член которого является поправкой к предыдущему.

Теоретическая и практическая значимость работы.

Теоретическая значимость диссертационной работы обусловлена следующими особенностями теоретических и алгоритмических концепций, реализованных в программном комплексе МНКВ:

- 1) строгое аналитическое решение прямой задачи акустики вычисляется в неклассическом виде пары волновых амплитуд, распространяющихся во взаимно-встречных направлениях, и элементарных составляющих амплитуд, которые находятся во взаимно-однозначном соответствии с порождающими их криволинейными границами неоднородной модели среды;
- 2) универсальность записи математического аппарата ТОПРД и алгоритмической структуры МНКВ позволяет сделать обобщение на линейные гиперболические задачи математической физики для более сложных сред: 1) упругость, 2) пористо-упругие среды, 3) пористо-упругие среды с флюидо-газо-насыщением и т.п.

Практическая значимость диссертационной работы обусловлена следующими особенностями применения программного комплекса МНКВ:

- 1) может быть использован при решении прямой задачи для вычисления независимых волновых амплитуд и волновых полей в акустических моделях с произвольными криволинейными и кусочно-криволинейными границами (соляные тела, базальтовые слои, рифовые структуры и пр.);
- 2) может быть применён в качестве моделирующего ядра в оптимизационном подходе для решения обратной задачи сейсмологии с помощью послойного восстановления границ и материальных свойств;
- 3) может быть применён не только для сейсмических задач (декагерцовый диапазон), но и для других задач, использующих акустические волны: 1) акустическое моделирование (килогерцовый и мегагерцовый диапазоны), 2) сейсмология и ГСЗ (герцевый и децигерцовый диапазоны), 3) методы неразрушающего контроля ультразвуком (килогерцовый и мегагерцовый диапазоны), 4) ультразвук в медицине (мегагерцовый диапазон) и т.п.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие результаты, соответствующие пунктам 2, 3, 4 паспорта специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» по техническим наукам:

- 1) Развитие аналитического метода исследования математической модели распространения акустических волновых полей в слоисто-блоковых средах со сложными границами (*пункт 2 паспорта*) в виде следующего результата:
 - i. Построена аппроксимация матричного интегрального оператора распространения волнового поля четырьмя матрицами, оптимально соединяющая аналитическое описание их элементов в виде элементарных функций с устойчивостью и точностью их численной реализации.
- 2) Разработка, обоснование и тестирование следующих эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий (*пункт 3 паспорта*):
 - i. Разработаны, оптимизированы и адаптированы для кластера из графических ускорителей алгоритмы вычисления и хранения данных программного комплекса МНКВ,
 - ii. Произведено тестирование алгоритма метода наложения концевых волн (МНКВ) и показана его точность и устойчивость на примерах численных экспериментов для моделей со сложными криволинейными и кусочно-криволинейными границами, порождающими каскадную дифракцию.
- 3) Реализация алгоритма метода наложения концевых волн (МНКВ) в виде комплекса программ МНКВ для вычисления отдельных волн интерференционного акустического волнового поля (*пункт 4 паспорта*).

Степень достоверности. Достоверность результатов диссертационной работы подтверждается следующими фактами:

- 1) Упрощённая версия программного комплекса МНКВ, не учитывающая каскадную дифракцию, используется Лабораторией механики и акустики Университета Экс-Марсель (г. Марсель, Франция) в рамках международного проекта BENCHIE с 2012 года. Сравнения волновых полей, вычисленных программным комплексом МНКВ, с волновыми полями, измеренными в лабораторной трёхмерной трёхслойной модели среды, показывают высокую степень соответствия вычисленных полей натурным экспериментам [18, 20]. Более ранние сравнения волновых полей, вычисленных методом МНКВ, с волновыми полями, измеренными в лабораторной двумерной двуслойной модели среды, также показывали достаточно высокую точность вычисления [21].
- 2) Высокая степень соответствия волновых полей, вычисленных программным комплексом МНКВ, наблюдается при сравнении с результатами математического моделирования аналитическим методом [15] и методом конечных разностей [22], [30].
- 3) Программный комплекс МНКВ был представлен на конкурс «GPU: серьёзные ускорители для больших задач», организованный компанией NVIDIA и Московским

государственным университетом им. М.И. Ломоносова и был отмечен первым местом в номинации «Эффективное приложение». Автор диссертации выступил с докладом об основных концепциях программного комплекса МНКВ на семинаре в Научно-исследовательском вычислительном центре МГУ им. М.И. Ломоносова (декабрь 2013 г., г. Москва), где подводились итоги конкурса.

Апробация результатов. Результаты исследований, представленных в диссертации, докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

- На трёх ежегодных международных конференциях и выставках «European Association of Geoscientists & Engineers (EAGE)» в г. Копенгаген (Дания, 2012), г. Лондон (Великобритания, 2013) и г. Амстердам (Нидерланды, 2014) [6, 8, 12].
- На двух международных конференциях «The Joint International Conference on Human-Centered Computer Environments (HCCE-2012)» и «International Conference on Applications in Information Technology (ICAIT-2016)» в г. Айзу-Вакаматсу (Япония) [5, 17].
- На ежегодной международной конференции и выставке «European Geosciences Union (EGU)» в г. Вена (Австрия, 2015) [29].
- На международном семинаре «Active and passive seismics in laterally inhomogeneous media (APSLIM)» в г. Прага (Чехия, 2015) [31].
- На международном коллоквиуме 584 «Multi-uncertainty and Multi-scale Methods and Related Applications» в г. Порто (Португалия, 2016) [33].
- На двух международных семинарах в рамках проекта шведского фонда по международному сотрудничеству в науке и высшем образовании (куратор проекта: доктор Ф. Андерссон) в Университете Лунда (г. Лунд, Швеция, сентябрь 2011 года и март 2013 года).
- На Девятой международной азиатской школе-семинаре «Проблемы оптимизации сложных систем» в г. Алматы (Казахстан, 2013) [22].
- На Третьей, Четвёртой, Пятой, Шестой и Седьмой международных молодёжных научных школах-конференциях «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» в г. Новосибирск (Россия, 2011, 2012, 2013, 2015) и в г. Алматы (Казахстан, 2014) [18, 20, 23, 28, 32].
- На международной конференции «Advanced Mathematics, Computations & Applications (AMCA)» в г. Новосибирск (Россия, 2014) [25].
- На всероссийской конференции молодых учёных и студентов, посвящённой 80-летию академика А.Э. Конторовича, в г. Новосибирск (Россия, 2014) [24].

- На «VII Сибирской научно-практической конференции молодых ученых по наукам о Земле (с участием иностранных специалистов)» в г. Новосибирск (Россия, 2014) [26].
- На всероссийской конференции «Геофизические методы исследования земной коры», посвященной 100-летию со дня рождения академика Н.Н. Пузырева в г. Новосибирск (Россия, 2014) [27].
- На 50-ой и 51-ой Международных научных студенческих конференциях «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 2012 и 2013). В 2012 году доклад получил диплом первой степени в секции Информационные технологии (подсекция Инструментальные и прикладные программные системы) [19]. В 2013 году доклад получил диплом второй степени в секции Информационные технологии (подсекция Наукоёмкое программное обеспечение) [21].

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 31 печатном издании, 1 свидетельстве о регистрации программного комплекса МНКВ и 1 учебном пособии:

- 2 публикации изданы в журнале из списка ВАК [1, 2],
- 1 программа для ЭВМ (программный комплекс МНКВ) зарегистрирована в Федеральной службе по интеллектуальной собственности (Роспатент) [3],
- 1 публикация издана в виде главы в учебном пособии [4],
- 10 публикаций изданы в трудах международных конференций, которые индексируются базой данных Scopus [5-14],
- 1 публикация издана в трудах международной конференции, которая цитируется базой данных РИНЦ [16],
- 2 публикации изданы в трудах международных конференций [15, 17],
- 16 публикаций изданы в тезисах международных и российских конференций [18-33].

Личный вклад автора. Основные результаты диссертационной работы получены автором лично и отражены в положениях 1, 2 и 3, выносимых на защиту, 31 публикации в печатных изданиях и 1 свидетельстве о регистрации программы для ЭВМ. Поскольку все работы автора диссертации опубликованы в соавторстве с коллегами по исследовательскому проекту, то автор считает необходимым выделить его личный вклад из совместных результатов:

- 1) аналитико-численные исследования при поиске оптимальной аналитической аппроксимации композитного интегрального оператора распространения волнового поля (в соавторстве с коллегами по исследовательскому проекту),
- 2) разработка численных и оптимизационных алгоритмов,
- 3) составление и отладка компьютерных программ,

4) проведение вычислительных экспериментов.

Объём и структура работы. Диссертация состоит из введения, 4 разделов, заключения, 6 приложений и списка литературы, опубликованной автором по теме диссертации и цитированной. Каждый раздел (подраздел) начинается с краткого содержания этого раздела (подраздела). В конце каждого раздела даётся заключение с результатами данного раздела, вкладом автора, ссылками на публикации, в которых опубликованы результаты раздела, а также даются выводы, сделанные автором. Полный объём диссертации составляет 194 страниц текста со 144 рисунками и 9 таблицами. Список цитированной литературы включает 64 наименований.

Краткое содержание работы.

В разделе 1 приведён краткий аналитический обзор методов моделирования сейсмических (в том числе и акустических) волновых полей. В подразделе 1.1 описываются методы физического (натурного) моделирования. В подразделе 1.2 описываются численные методы математического моделирования. В подразделе 1.3 описываются аналитические методы математического моделирования. Приведены особенности отдельных методов, существенные для темы исследования диссертации.

В разделе 2 описан метод наложения концевых волн (МНКВ) для акустических сред, который является аппроксимацией в конечном диапазоне временных частот теории операторов прохождения-распространения-дифрагирования (ТОПРД), которая приведена в объёме, необходимом для данного раздела, в приложениях А и В. В подразделе 2.1 описаны принципы матричной аппроксимации интегральных операторов распространения и дифрагирования и композитного интегрального оператора прохождения-распространения в конечном диапазоне временных частот в форме суммы пучков концевых волн (ПКВ), которые основаны на формулах из приложения В. В подразделе 2.2 приведён тест, подтверждающий корректность выбранной матричной аппроксимации интегральных операторов. В подразделе 2.3 приводится краткое описание алгоритма МНКВ: общая структура матриц среды и всех слоёв, схема пошагового умножения матриц на входные дискретные векторы, а также схема вычисления наборов векторов волновых амплитуд. Намечен способ локализации пошагового умножения матриц при использовании алгоритма МНКВ в моделирующем ядре оптимизационного алгоритма обратной задачи.

Раздел 3 посвящён описанию программного комплекса, реализующего метод наложения концевых волн, и разработке его вычислительных процедур. В подразделе 3.1 показана общая архитектура программного комплекса МНКВ, описаны его компоненты и показан пример задания геологической модели с помощью данного программного комплекса. В подразделе 3.2 описаны основные проблемы реализации программного комплекса МНКВ, возникающие на уровне требуемых вычислительных ресурсов и объёмов оперативной памяти для хранения

данных алгоритма. Подраздел 3.3 содержит описание реализации компоненты программного комплекса ИсточникГраница, которая вычисляет волновое поле, распространяющееся от источника на границу модели, и представляет его в векторной форме. Подраздел 3.4 содержит описание реализации компоненты программного комплекса ГраницаГраница, которая вычисляет волновое поле, распространяющееся от предыдущей границы слоя на следующую в соответствии с заданным волновым кодом. Подраздел 3.5 содержит описание реализации компоненты программного комплекса ГраницаПриёмники, которая вычисляет волновое поле, распространяющееся от границы слоя в приёмники. В подразделе 3.6 рассмотрена реализация компоненты программного комплекса МатрицаРаспространения, которая представляет собой перемножение набора матриц распространения крупных размерностей на набор векторов. Эта процедура является составной частью программного комплекса МНКВ и используется при вычислении физически реализуемых волновых полей, распространяющихся внутри слоёв модели. В подразделе 3.7 описана реализация компоненты МатрицаДифракции, которая представляет собой перемножение набора матриц дифрагирования крупных размерностей на набор векторов. В подразделе 3.8 описаны принципы построения и оптимизации, а также тестирование матрицы виртуальной тени границы слоя, позволяющая геометрически определять освещённые и затенённые относительно друг друга элементы триангулированной границы слоя. Результаты исследований, описанные в данном подразделе, реализованы в компоненте МатрицаТени программного комплекса МНКВ. Также, в подразделах 3.6 и 3.8, представлены разработанные автором оптимизационные и адаптированные для параллельных архитектур алгоритмы (в том числе для GPU-кластера), позволяющие производить вычисления с помощью программного комплекса МНКВ в 1000 и более раз быстрее, по сравнению с неоптимизированной версией алгоритма МНКВ. Представлены алгоритмы хранения данных программного комплекса МНКВ при наличии ограниченных ресурсов оперативной памяти ЭВМ. В подразделе 3.9 кратко освещена схема вычисления преломления/отражения волнового поля на криволинейной границе. В подразделе 3.10 представлены расчётные формулы для оценки времени вычисления волновых полей для заданной модели среды с помощью программного комплекса МНКВ, которые используются в разделе 4 для оценки времени вычисления волнового поля для тестируемых моделей.

Раздел 4 посвящён тестированию программного комплекса МНКВ. В подразделе 4.1 описываются результаты вычисления волнового поля в трёхмерных акустических блоковых и слоистых моделях среды с криволинейными и кусочно-криволинейными границами. Для всех моделей среды произведён анализ полученных сейсмограмм и приведены оценки времени вычисления с помощью программного комплекса МНКВ. В пунктах 4.1.1-4.1.7

рассматриваются модели двублоковой среды, которая имитирует соляное тело различной формы, контактирующее на границе с полупространством, заполненным песчаником. Части границы между соляным телом и песчаником, вогнутые в соляное тело или песчаник, порождали интерференцию (наложение) волновых полей различного типа: отражённые и преломленные волны, однократные и многократные краевые волны от рёбер, каскадная дифракция на гладких частях границы, включая ползущие волны. В пункте 4.1.8 рассматривается трёхмерная акустическая трёхслойная модель среды с включением диска высокоскоростного ангидрита в среднем слое галита. Высокоскоростное дисковое включение позволяет исследовать зоны дифракционной тени в преломленной волне под этим включением. Присутствие зон тени в наблюдаемых сейсмических данных резко понижает разрешающую способность алгоритмов решения обратной задачи сейсмологии. В подразделе 4.2 описываются результаты вычисления волновых амплитуд a^+ и a^- для модели из подраздела 4.1.7. В подразделе 4.3 описано сравнение сейсмограмм волнового поля, вычисленных программным комплексом МНКВ, и смоделированных численным методом конечных разностей (МКР). Сравнение проведено на примере модели, которая имитирует соляной выступ клиновидной формы, окружённый песчаником (модель среды из подраздела 4.1.1 диссертации). Качественное сравнение интерференционного поля первых вступлений, вычисленного МНКВ и полного волнового поля, смоделированного МКР, проведено вычислением разности сейсмограмм. Количественное сравнение произведено наложением пары трасс МНКВ и МКР для отдельных приёмников и пары кривых коэффициентов дифракционного ослабления (КДО) амплитуды волны первого вступления, а также вычислением относительного отклонения КДО МНКВ от КДО МКР.

В заключении изложены основные итоги исследования по теме диссертации, полученные автором лично, даны некоторые рекомендации, вытекающие из полученных результатов, и намечены перспективы дальнейшей разработки темы.

Приложение А имеет реферативный характер. В нём описана постановка прямой задачи для акустической среды с однородными слоями и кусочно-криволинейными границами сначала в терминах механики сплошной среды, а затем в терминах теории операторов прохождения-распространения-дифрагирования (ТОПРД). Также кратко описано преобразование постановки прямой задачи в терминах ТОПРД в её аналитическое решение. Приложение В имеет реферативный характер. В нём описана волновая структура матричных операторов и векторных операндов ТОПРД. Их волновая структура взаимно-однозначно отображает полный набор границ слоистой среды. Приложение С имеет реферативный характер. В нём приведены сведения о верификации упрощённой (без учёта каскадной дифракции) версии МНКВ в сравнении с лабораторным физическим (натурным) моделированием на искусственной модели

трёхслойной среды «Марсель». В приложении D представлено свидетельство о регистрации программного комплекса МНКВ в виде программы для ЭВМ в Федеральной службе по интеллектуальной собственности РФ (Роспатент). В приложении E представлен сертификат победителя конкурса «GPU: серьёзные ускорители для больших задач» в номинации «Эффективное приложение», проведённого совместно компанией NVIDIA и Московским государственным университетом им. М.И. Ломоносова (г. Москва, декабрь 2013 года).

В приложении F представлен документ, подтверждающий использование (документ, аналогичный акту о внедрении) программного комплекса МНКВ Лабораторией механики и акустики Университета Экс-Марсель (г. Марсель, Франция) и его перевод на русский язык.

Благодарности. Автор диссертационной работы выражает искреннюю благодарность научному руководителю кандидату физико-математических наук, доценту Айзенбергу Аркадию Марковичу за постановку интересной задачи, а также за поддержку в её выполнении и непрерывное сотрудничество в течение последних семи лет. Также выражаю благодарность научному руководителю аспирантуры член-корреспонденту РАН, доктору физико-математических наук Кабанихину Сергею Игоревичу за консультации и полезные обсуждения по теме диссертационной работы, а также за возможность участия в российских и международных проектах под его руководством.

Автор выражает благодарность коллегам по научно-исследовательскому проекту: доктору физико-математических наук, профессору Клем-Мусатову Камиллу Давыдовичу (Институт нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН, г. Новосибирск, Россия), ушедшему из жизни в 2015 году, за совместное сотрудничество и помощь в выполнении работы, доктору философии (PhD) Айзенберг Алёне Аркадьевне (Университет Бергена, г. Берген, Норвегия) и инженеру Ракшаевой Екатерине Жимбеевне (Институт нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН, г. Новосибирск, Россия) за совместное сотрудничество и помощь в выполнении работы.

Выражаю благодарность коллегам из институтов СО РАН и НГУ: доктору физико-математических наук, профессору Лаврентьеву Михаилу Михайловичу за поддержку в развитии исследований по теме диссертации, кандидату технических наук, доценту Романенко Алексею Анатольевичу (Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск, Россия) за помощь в освоении и использовании высокопроизводительных технологий, кандидату физико-математических наук, доценту Дучкову Антону Альбертовичу (Институт нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН, г. Новосибирск, Россия) за частичную материальную поддержку работы и консультации в ходе её выполнения, кандидату физико-математических наук Криворотько Ольге Игоревне (Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, г. Новосибирск, Россия) за полезные советы по созданию алгоритмов и компьютерных программ.

Выражаю благодарность зарубежным коллегам: доктору философии (PhD), доценту (Associate Professor) Фредрику Андерссону (Университет Лунда, г. Лунд, Швеция) за частичную материальную поддержку и возможность командирования за границу для работы по теме диссертационной работы, доктору философии (PhD) Никитину Виктору Валерьевичу (Аргоннская национальная лаборатория, г. Чикаго, США) за полезные советы по созданию алгоритмов и компьютерных программ, доктору философии (PhD) Айзенберг Милане Аркадьевне (АО Статойл, г. Берген, Норвегия), доктору философии (PhD) Фавретто-Кристини Натали (Лаборатория механики и акустики Университета Экс-Марсель, г. Марсель, Франция), доктору философии (PhD), профессору (Professor) Стовасу Алексею (Норвежский университет естественных и технических наук, г. Тронхейм, Норвегия) за поддержку исследования по теме диссертации.

1. АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР МЕТОДОВ СЕЙСМИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В данном разделе приведён краткий аналитический обзор методов моделирования акустических и сейсмических волновых полей. В первом подразделе описываются методы физического (натурного, лабораторного) моделирования. Во втором подразделе описываются численные методы математического моделирования. В третьем подразделе описываются аналитические методы математического моделирования. Приведены особенности отдельных методов, существенные для темы исследования диссертации.

1.1. Методы физического моделирования

В данном подразделе кратко описываются методы физического (натурного, лабораторного) моделирования. Приведены особенности отдельных методов физического моделирования, существенные для темы исследования диссертации. Ссылки на публикации, упомянутые в этом подразделе, можно найти в [18].

Физическое моделирование – один из важнейших подходов в геофизическом исследовании. Распространение волнового поля в сложных средах, содержащих искривлённые границы, дополнительно порождает различные дифракционные эффекты. Корректное физическое моделирование используется для тестирования различных численных и аналитических методов моделирования сейсмических волновых полей. В проекте SEAM (Fehler, 2011) было произведено сравнение нескольких реализаций численных методов с эталонным численным методом. Такой подход имеет ограничения, особенно когда имеет место распространение волнового поля в сложных средах с высококонтрастными границами и с границами сложной геометрической формы, поскольку все численные методы, включая эталонный численный метод, основаны на различных допущениях. Физический (лабораторный) метод часто использовался в прошлом в качестве эталонного метода в исследованиях распространения и дифракции волн. В отличие от натуральных экспериментов в реальных полевых условиях, высокоточные данные физического моделирования наблюдаются в контролируемой модели среды на системе наблюдений заданной конфигурации. Более того, в отличие от эталонных численных методов, в физическом (лабораторном) моделировании реальное волновое поле распространяется через модель без какой-либо субъективного вмешательства. Howes и др. (1953) использовали модели, уменьшенные по сравнению с реальным объектом с

применением коэффициента подобия, для исследования и демонстрации геометрии распространения, отражения, преломления и дифракции звуковых импульсов, излучаемые точечным источником. Grannemann (1956) сравнил теоретические (аналитические) результаты с экспериментальными данными физического моделирования для анализа амплитуд и форм импульсов волн, дифрагированных от клина в твёрдом теле. Angona (1960) продемонстрировал механизм двукратной дифракции и различие между отражением и дифракцией в поведении годографов (времен вступления волн) и ослаблении дифракционных амплитуд вдоль фронта дифракционных волн для модели слоистой среды, в которой одна из границ имела Z-образную форму. Hilterman (1970) провёл большое количество наблюдений физическим моделированием сейсмограмм для моделей типичных геологических структур (синклинали, антиклинали и сбросы) для того, чтобы наблюдать дифракцию, которая не может быть предсказана лучевой теорией. Pant и др. (1992) комбинировали двумерное масштабируемое физическое моделирование и синтетические сейсмограммы, вычисленные численным методом, для исследования дифракционных артефактов на сейсмических профилях для вертикальной модели разлома и прямоугольной модели насыпи. Jocke и др. (2006) [23] проверяли теорию рассеяния волн первого порядка на ультразвуковом физическом моделировании акустических волновых полей, которые рассеиваются в однородной среде на изолированных сферических объектах с диаметром порядка длины волны. При сравнительном анализе физических (лабораторных) и синтетических (численных) данных может наблюдаться их несоответствие из-за техногенных воздействий на физический метод моделирования и различных аппроксимаций в численных методах моделирования.

1.2. Численные методы

В данном подразделе кратко описываются численные методы математического моделирования. Приведены особенности отдельных численных методов математического моделирования, существенные для темы исследования диссертации. Ссылки на публикации, упомянутые в этом подразделе, можно найти в обзорах [8, 9, 10, 11].

Численные методы в сейсмике – это второй общий подход к моделированию сейсмических волн. Задача состоит в том, чтобы предсказать волновое поле, которое будет регистрировать набор датчиков, учитывая материальные и геометрические параметры среды и характеристики источника в рассматриваемой модели. Этот подход широко используется в качестве моделирующего ядра для сейсмической интерпретации и инверсии. Другим важным применением численного метода моделирования является проектирование предстоящих

сейсмических наблюдений. Авторы обзоров [8, 10] разделяют методы численного моделирования сейсмических волновых полей на четыре основные группы:

- 1) прямые методы (методы конечных разностей);
- 2) методы интегральных уравнений;
- 3) псевдо-спектральные методы и методы конечных объёмов;
- 4) непрерывные или разрывные методы конечных элементов Галёркина.

В данном подразделе кратко будут описаны особенности каждой группы методов из перечисленного списка. Выбор между методами численного моделирования зависит от конкретной задачи моделирования.

1.2.1. Прямые методы (методы конечных разностей)

Для решения системы уравнений, описывающих колебания среды, методом конечных разностей объёмная модель среды представляется в виде конечного набора элементарных объёмных элементов, с узлами аппроксимаций внутри которых связывается дискретная аппроксимация материальных параметров и искомого решения системы уравнений. Эти методы также называются сеточными и методами «полно-волнового» уравнения, так как решение представляет полное волновое поле. Эти методы имеют слабые ограничения на изменчивость материальных параметров модели и очень точны при условии, что используется достаточно мелкая сетка дискретизации модели. Эти методы могут обрабатывать геологические среды различной сложности и хорошо подходят для локализованных фрагментов среды, которые имеют важное значение для интерпретации. Недостаток методов конечных разностей, особенно для трёхмерных моделей сред, состоит в том, что они требуют большие вычислительные затраты в отличие от приближенных аналитических методов. Подробный обзор современных версий метода конечных разностей можно найти в статье [24].

1.2.2. Методы интегральных уравнений

Методы интегральных уравнений основаны на интегральных представлениях волнового поля в терминах волн точечных источников. Эти методы основаны на эвристическом принципе, предложенном Гюйгенсом в 1690 году. Принцип Гюйгенса позволяет рассматривать волновое поле в двух формах суперпозиции волновых полей: 1) объёмных точечных источников; 2) поверхностных точечных источников. Используются обе формы принципа Гюйгенса, которые соответствуют объёмным интегральным уравнениям и граничным интегральным уравнениям, соответственно. Эти методы имеют более сильные ограничения в применении, чем методы

конечных разностей. Однако, для специфических геометрий, таких как ограниченные объекты в однородном вложении, скважины или геометрии, содержащие много мелких трещин или включений, методы интегральных уравнений являются очень эффективными и дают точные решения. Из-за более аналитического характера методы интегральных уравнений оказались полезными при выводе методов визуализации, основанных на приближении Борна (Cohen и др. (1986); Bleistein и др. (2001)). Методы объёмных интегральных уравнений в форме приближения Борна также эффективно используется для моделирования волнового поля (Moser, 2012).

1.2.3. Псевдо-спектральные методы и методы конечных объёмов

Псевдо-спектральные методы и методы конечных объёмов основаны на строгой формулировке систем уравнений, описывающих колебания среды, которую легко реализовать численно и получить хороший компромисс между точностью и скоростью вычислений. Строгая формулировка в этих методах заключается в том, что системы уравнений, описывающих колебания среды, строго удовлетворяются в дискретных узлах, в которых непрерывная среда задана точно. Пример псевдо-спектрального метода описан в работе Tessmer & Kosloff (1994). Применяются два типа пространственной дискретизации. Глобальная пространственная дискретизация (которая часто представляется, как модальный подход) применяется в псевдо-спектральных методах, где частные производные оцениваются методом прогонки вперед и назад в дуальном пространстве образов (например, Фурье, Лежандра или Чебышева), что приводит к специфической регулярной или нерегулярной сетке дискретизации (подробнее см. в работах Kosloff & Baysal (1982), Druskin & Knizhnerman (1988), Seriani & Priolo (1994), Priolo, Carcione & Seriani (1994)). Пространственная дискретизация с локальным носителем, и более конкретно, метод конечных разностей, широко используется во многих случаях (Levander (1988), Mackie et al. (1993), Robertsson, Blanch & Symes (1994), Newman & Alumbaugh (1999), Pitarka (1999), Taflove & Hagness (2000), Moczo, Robertsson & Eisner (2007)).

Идея методов конечных объёмов состоит в перезаписи систем уравнений, описывающих колебания среды, в (псевдо)консервативную форму первого порядка и вычислении интегрального аналога системы по расчетной области. В некоторых случаях такой интегральный аналог системы может быть получен непосредственно из физических законов сохранения. Локальная интерполяция полей колебаний среды низкого порядка позволяет интуитивное конструирование, которое приводит к корректной формулировке. Такой приём допускает простую геометрическую интерпретацию, в отличие от вариационного подхода.

Метод конечных объёмов обладает гибкостью для описания среды с использованием сложных сеток, сохраняя при этом простоту метода конечных разностей.

1.2.4. Непрерывные или разрывные методы конечных элементов Галёркина

Непрерывные или разрывные методы конечных элементов Галёркина (Zienkiewicz & Morgan (1983)) основаны на слабой формулировке, что позволяет ослабить требования к гладкости задаваемых материальных параметров среды за счёт введения тестовых функций и применения дополнительного объёмного интегрирования. В результате, такие методы позволяют моделировать поле колебаний в среде, хотя и с более высокими вычислительными затратами. Тестовые функции идентичны базисным функциям, на которые ожидаемое решение расширяется. Слабая формулировка заключается в следующем: системы уравнений, описывающих колебания среды, удовлетворяются глобально по всем элементам с использованием дискретной нормы для решения. Рассматриваемые методы носят общий характер и включают в себя строгую формулировку, которая использует специфическую норму, выраженную через функцию Дирака, и операторы в качестве распределений. Слабая формулировка получается в два шага: 1) умножение системы уравнений, описывающих колебания среды, на тестовые функции, которые подбираются для полной компенсации всех особенностей рассматриваемой системы уравнений; 2) интегрирование по частям в заданной области, которое сглаживает все особенности в коэффициентах уравнений и их решениях. Классический непрерывный метод конечных элементов Галёркина предполагает решения системы уравнений, описывающих колебания среды, непрерывными во всей расчетной области. Решения системы уравнений разлагаются в локальном кусочно-функциональном базисе, который также используется для тестовых функций. Разрывный метод конечных элементов Галёркина снимает некоторые из ограничений непрерывного метода конечных элементов Галёркина, даже в случае, если некоторые из составляющих решения являются разрывными вблизи границ сред, например, тестовые функции (вместе с решениями) априори не являются непрерывными на границах элемента.

1.3. Аналитические методы

В данном подразделе описываются аналитические методы математического моделирования. Приведены особенности отдельных аналитических методов математического моделирования, существенные для темы исследования диссертации.

1.3.1. Строгие аналитические решения (канонические модели)

Строгие аналитические решения известны только для канонических (вырожденных) моделей. Вырожденной моделью принято называть такую модель среды, в которой применимо полное разделение переменных как в системе уравнений колебаний среды, так и в граничных условиях. Примерами канонических моделей среды являются:

- 1) класс слоистых моделей с плоскопараллельными горизонтальными границами и материальными параметрами слоёв, зависящими только от глубины,
- 2) класс секторальных сред с плоскими границами, выходящими из общего ребра, и однородными клиньями,
- 3) некоторые другие модели сред, обладающими высокими симметриями.

Строгие аналитические методы известны как достаточно эффективные и точные для моделирования волнового поля в слоистых средах с плоско-параллельными границами. Слои могут быть однородными или неоднородными, когда материальные параметры слоя зависят только от одной координаты, ортогональной границам. Спектральная формулировка строгих аналитических методов звучит следующим образом: системы уравнений, описывающих колебания среды, рассматриваются в пространствах образов, таких как пространство Фурье, где частные производные представляются в алгебраических формах. Основная сложность спектральной формулировки заключается в выражении граничных условий, где это требуется, а также условий существования образа решения в новом пространстве. Представление образа источника возбуждения, например, на основе разложения волнового поля на плоские волны может облегчить реализацию таких методов. Эти методы широко используются для моделирования отраженных волновых полей в средах, где скорость изменяется только по вертикальной оси. Горизонтально-слоистые структуры, в отсутствие горизонтальных изменений материальных параметров слоёв, являются примером слоистой среды, в которой спектральные методы нашли широкое применение (см., например, в обзорах Ursin (1983) и Tsvankin (1995)). Эти методы широко используются в таких методах обработки как: прогнозирование и удаление многократных отражений/преломлений от морского дна и внутренних геологических границ, детерминированная оценка формы импульса, декомпозиция полного волнового поля на приходящие и отходящие волны (Ikelle & Amundsen (2005)). Разложение на плоские волны является теоретической основой для строгих методов, применяемых в сейсморазведке, таких как «рефлективити» метод [25], обобщенный лучевой метод (Kennett (1983)) и $(\tau - p)$ -преобразование Радона (Gazdag (1978), Stolt (1978)). Такое разложение также является теоретической основой для эвристических методов сейсморазведки,

например, экстраполяция фазового сдвига и метода экранных пропагаторов (Wu (1994), de Hoop & Bleistein (1997)).

Детальный обзор первых строгих решений прямых задач о дифракции волновых полей в секториальных (с одним ребром) канонических моделях оптических и акустических сред был опубликован в монографии [26]. Джонс [27] расширил методы решения прямых задач о дифракции на случай дифракции на паре идеальных полукранов с прямолинейным ребром, когда возникает двукратная дифракция. Краткий обзор теоретических исследований прямых задач о дифракции с 1973 года приводится в [28]. Несмотря на обширные теоретические исследования по аналитическим решениям для канонических задач дифракции, переход к более сложным моделям среды не простая задача [29]. К.Д. Клем-Мусатов [30] предложил новый теоретический метод решения прямых задач о дифракции, в котором решения для секториальных моделей среды получаются с использованием итерационного подхода Неймана в форме повторения процедуры двойной подстановки:

- шаг 1 – подстановка решения волнового уравнения в граничные условия,
- шаг 2 – подстановка результата шага 1 в волновое уравнение.

Метод К.Д. Клем-Мусатова не ограничивается секториальными моделями и может быть обобщён на более реалистичные модели, если это необходимо.

Бреннэн и др. [31] изучали многократно рассеянные волновые поля для упрощенной модели. Использование аналитических решений в методе граничных интегральных уравнений для сред с кусочно-гладкими границами описано в обзоре [7].

1.3.2. Приближённые аналитические методы

Так как в общем случае сред с криволинейными границами и неоднородными слоями (областями) существующие строгие аналитические методы оказываются неприменимы, то основное внимание исследователей было направлено на развитие приближённых аналитических методов. Среди них наибольшее распространение в научных исследованиях и инженерной практике имеют асимптотические высокочастотные методы. Среди асимптотических высокочастотных методов наиболее широкое распространение получили: асимптотическая лучевая теория [32], геометрическая теория дифракции [33], физическая теория дифракции [34], и равномерная теория дифракции [35]. К.Д. Клем-Мусатов с соавторами [36] обобщили результаты, полученные в работе [30], на случай неканонических кусочно-гладких границ для однократно рассеянных волновых полей и сформулировали приближённую (высокочастотную) теорию дифракции краевых и концевых волн. Эта теория, основанная на классическом и обобщённом интегралах Френеля, хорошо работает в присутствии каустик.

Теория дифракции краевых и концевых волн была усовершенствована в виде метода наложения краевых волн для двумерных задач и метода наложения концевых волн (МНКВ) для вычисления однократно рассеянных волновых полей в пространственных средах с кусочно-гладкими границами [36]. Метод простой итерации в модификации К.Д. Клем-Мусатова [30] был обобщён на случай многократно рассеянных волновых полей в слоистых и блоковых средах в [37].

Высокочастотные асимптотические методы часто используются в сейсмическом моделировании и визуализации. Эти методы являются очень удобными для инженеров, так как сложность и время математического моделирования на ЭВМ растут только с увеличением размера трёхмерных моделей. Однако эти методы являются приближёнными, так как они не могут воспроизводить полную структуру волнового поля. Эти методы рассматривают волновое поле как совокупность определенных волновых событий, каждое из которых прибывает в определенное время и имеет определенную амплитуду. Асимптотические методы, благодаря их эффективности, сыграли очень важную роль в сейсмической томографии на основе приближённого интеграла Борна для моделей с малыми градиентами скоростей волн. Другим применением этих методов является моделирование и идентификация конкретных волновых событий на сейсмических записях.

1.3.3. Строгие аналитические решения (неканонические модели)

За последние 40 лет было предпринято несколько попыток создать гибридный метод аналитического решения для общих (неканонических) моделей сред с помощью комбинации поверхностных интегральных представлений типа Кирхгофа (сумма потенциалов простого и двойного слоя) и обобщённых операторов отражения и преломления в случае слоистых сред с неплоскими границами. Для разработки таких операторов желательно получить строгое описание процедуры отражения и преломления на криволинейных границах в терминах интегральных операторов. Были предприняты многочисленные попытки использовать строгие постановки начально-краевых задач математической теории волн с целью построения операторов такого рода. К настоящему времени достигнуты следующие результаты. В работе [38] получены дифференциальные уравнения типа Риккати для нахождения оператора отражения. В работе [39] получены интегральные уравнения для нахождения операторов отражения и преломления на неплоском контакте однородных акустических полупространств, а в частном случае плоского контакта однородных полупространств получен их явный вид. В работе [40] получены аналогичные интегральные уравнения для нахождения операторов отражения и преломления для упругих волн. Для однородной среды в работах [41, 42],

предложен эвристический подход к построению таких операторов, который основан на разложении фундаментальных решений в интегралах типа Кирхгофа по плоским волнам. В работе [43] для плоского контакта между двумя однородными акустическими средами был получен явный вид оператора отражения в виде двойной свёртки с ядром, спектр которого содержит плоско-волновой коэффициент отражения. Однако все перечисленные методы не позволяют получить искомые операторы отражения и преломления в явном виде для криволинейных границ.

Впервые строгие операторы прохождения (отражения/преломления) в явном виде для криволинейных границ в акустической среде были получены в работах К.Д. Клем-Мусатова с коллегами (детальное изложение и ссылки в [12]). Позже было получено обобщение фундаментального решения на случай области (слой, блок, линза и т.п.) с границей, имеющей вогнутые внутрь области части (детальное изложение и ссылки в [13]). Использование этих двух теоретических результатов позволило сформулировать строгую аналитическую теорию решения прямой задачи сейсмологии в слоисто-блоковых средах с криволинейными и кусочно-криволинейными границами [12]. Данная теория была названа теорией операторов прохождения-распространения-дифрагирования (ТОПРД). Эта теория является гибридом двух методов:

- 1) поверхностные интегральные операторы типа Кирхгофа с физически реализуемым фундаментальным решением в их ядре, описывающие распространение волн в областях;
- 2) конволюционные поверхностные операторы прохождения (отражения/преломления), описывающие прохождение волн на криволинейных границах, с ядрами, спектр которых содержит плоско-волновые коэффициенты отражения/преломления.

Для вычисления волновых полей был разработан метод наложения концевых волн (МНКВ), который аппроксимирует ТОПРД в диапазоне конечных частот [15, 16]. Более подробное изложение ТОПРД приводится в приложениях А и В. Более подробное изложение МНКВ приводится в разделе 2.

1.4. Заключение

В данном разделе были кратко рассмотрены три группы существующих методов сейсмического моделирования волновых полей: 1) методы физического моделирования, 2) численные методы, 3) аналитические методы.

Наибольшая ценность методов физического (натурного) моделирования заключена в тестировании различных математических (численных и аналитических) методов моделирования сейсмических волновых полей.

Наибольшая ценность численных методов математического моделирования заключена в следующих аспектах: 1) широкое применение в существующих пакетах программ восстановления материальных и геометрических параметров сред в промышленной сейсморазведке; 2) возможность моделировать полное волновое поле в таких моделях сред, для которых аналитические методы не развиты в настоящее время; 3) возможность тестирования новых аналитических методов вычисления сейсмических волновых полей.

Наибольшая ценность аналитических методов математического моделирования заключена в следующих аспектах: 1) широкое применение строгих (одномерные среды) и приближённых аналитических методов в разработке эвристических процедур восстановления материальных и геометрических параметров сред в промышленной сейсморазведке; 2) широкое применение приближённых аналитических методов для моделирования отдельных фрагментов полного волнового поля в латерально-однородных моделях сред; 3) возможность применения строгих (одномерные среды) аналитических методов для тестирования новых аналитических методов вычисления сейсмических волновых полей.

В Таблице 1.1 показано сравнение численных и аналитических методов математического моделирования сейсмических волновых полей по пяти параметрам, которые представляют интерес для инженеров-сейсмиков:

- 1) скорость вычислений,
- 2) сложность среды (количество блоков и/или слоёв в модели среды, сложность геометрической формы границ),
- 3) расщепление на волны (расщепление полного волнового поля на совокупность волновых событий),
- 4) сейсмические частоты (возможность моделирования в среднечастотном диапазоне),
- 5) передаточные характеристики среды (вычисления без задания источника и приёмников).

Таблица 1.1. Сравнение численных и аналитических методов математического моделирования.

Метод	Скорость вычислений	Сложные среды	Расщепление на волны	Сейсмические частоты	Передаточные характеристики среды
<i>Строгие аналитические 1D методы</i>	Быстро	–	+	+	–
<i>Приближённые аналитические 3D методы</i>	Очень быстро	–	+	–	–
<i>Численные методы</i>	Медленно	+	–	+	–

2. МЕТОД НАЛОЖЕНИЯ КОНЦЕВЫХ ВОЛН

В данном разделе приведено описание акустической версии метода наложения концевых волн (МНКВ), который является аппроксимацией в конечном диапазоне временных частот строгой теории операторов прохождения-распространения-дифрагирования (ТОПРД). ТОПРД для акустических сред приведена в приложении А в объёме, необходимом для приложения В. Структура матричных операторов и векторных операндов этой теории приведена в приложении В в объёме, необходимом для данного раздела. В подразделе 2.1 описаны принципы матричной аппроксимации операторов распространения, дифрагирования и композитного оператора прохождения-распространения в конечном диапазоне временных частот в форме суммы пучков концевых волн (ПКВ), которые основаны на формулах из Приложения В. В подразделе 2.2 приведён тест, подтверждающий корректность выбранной матричной аппроксимации. В подразделе 2.3 приводится краткое описание алгоритма МНКВ.

2.1. Матрично-векторная аппроксимация операторов и операндов

В данном подразделе описаны принципы матричной аппроксимации операторов распространения, дифрагирования и композитного оператора прохождения-распространения в конечном диапазоне временных частот в форме суммы пучков концевых волн (ПКВ). Корректность приближённых формул ПКВ подтверждается при численном решении строгого уравнения, которое является известным свойством интегрального оператора ортогональной проекции.

2.1.1. Принципы матричной аппроксимации операторов распространения и дифрагирования

Выпишем четыре скалярных оператора распространения для слоя \mathbb{D}_m из (В.30) в общем виде:

$$K^{vv}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l, \omega), K^{vp}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l, \omega), K^{pv}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l, \omega), K^{pp}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l, \omega) . \quad (2.1)$$

При численной реализации повторного вычисления операторов (2.1) ожидается экспоненциальный рост числа операций. Чтобы перейти от экспоненциального роста к линейному, в работах [36] предложено применять матричную аппроксимацию этих операторов. В результате такой аппроксимации повторное действие операторов (2.1) принимает вид матричного произведения. Возможность независимого вычисления матриц слоёв, составляющих матрицу среды, даёт возможность использовать матричную аппроксимацию, как при вычислении волновых полей и векторов волновых амплитуд, так и в различных обратных задачах сейсмологии.

Рассмотрим операторы распространения (2.1), явный вид которых приведён в формуле (B.31). Эти операторы заданы на двух сетках конформно-евклидовых координат: одна сетка на грани S_m^l , по которой идёт интегрирование в операторах типа Кирхгофа (B.31), а другая сетка на грани S_m^j , на которой расположены точки вычисления оператора. Произведём триангуляцию грани S_m^l с помощью разбиения на малые криволинейные квадраты, используя конформно-евклидовую сетку координат, и вводя дополнительное разбиение каждого такого квадрата диагональю на два малых криволинейных треугольника. Обозначим произвольный треугольник за $\Delta_n S_m^l$. Размер малого треугольника должен быть порядка или меньше четверти доминантной длины волны. Повторим процесс триангуляции, описанный выше, для грани S_m^j . Предположим, что получено то же количество малых криволинейных треугольников, что и на грани S_m^l .

С учётом процесса триангуляции выпишем первый из четырёх операторов в (2.1) в виде матрицы элементарных операторов размерности $N \times N$:

$$K^{vv}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l, \omega) \cong \left[\Delta_n K^{vv}(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l, \omega) \right], \quad (2.2)$$

$$n, n' \in [1, N], \quad \text{если } \mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l \in \Delta_n S_m^j, \mathbf{s}_{m n}^l \in \Delta_n S_m^l,$$

где n' – индекс строки, а n – индекс столбца, N – общее количество криволинейных треугольников. Элементарный оператор $\Delta_n K^{vv}(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l, \omega)$ описывает распространение волн от одного малого криволинейного треугольника с номером n на грани S_m^l в произвольную точку \mathbf{s}_m^j малого криволинейного треугольника с номером n' грани S_m^j (Рисунок 2.1).

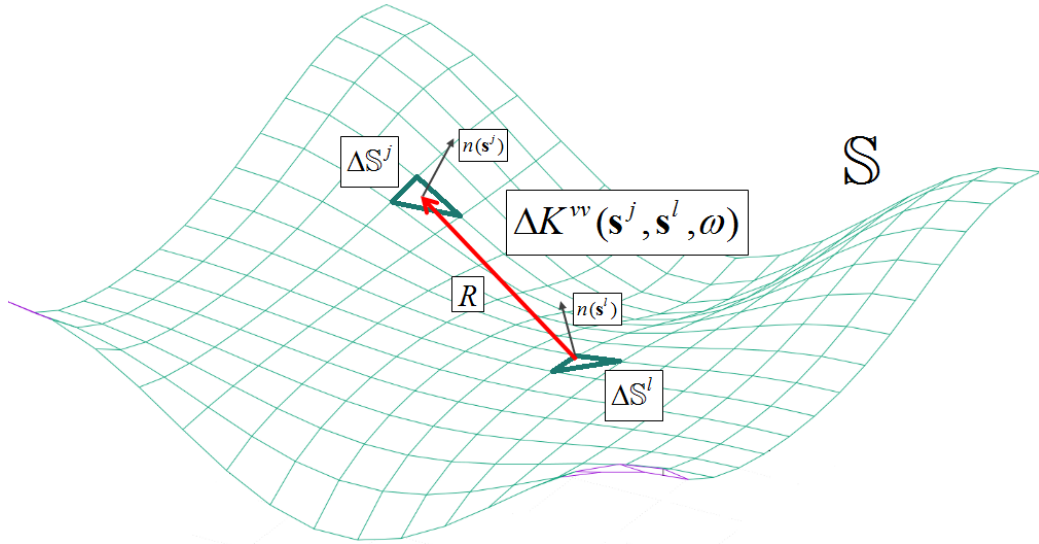


Рисунок 2.1. Пример действия элементарного оператора $\Delta_n K^{vv}(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l, \omega)$ для пары элементов триангулированной границы.

Дискретизация остальных трёх операторов в (2.1) производится аналогичным образом, что позволяет выписать явный вид элементарных поверхностных интегральных операторов:

$$\begin{aligned}
 \Delta_n K^{vv}(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l, \omega) \langle \dots \rangle &= - \iint_{\Delta_n \mathbb{S}_m^l} \mathbf{n}(\mathbf{s}_{m n'}^j) \cdot \nabla g(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l, \omega) \langle \dots \rangle dS(\mathbf{s}_{m n}^l), \\
 \Delta_n K^{vp}(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l, \omega) \langle \dots \rangle &= - \frac{1}{\alpha_m} \iint_{\Delta_n \mathbb{S}_m^l} \mathbf{n}(\mathbf{s}_{m n'}^j) \cdot \nabla [\mathbf{n}(\mathbf{s}_{m n}^l) \cdot \nabla g(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l, \omega)] \langle \dots \rangle dS(\mathbf{s}_{m n}^l), \\
 \Delta_n K^{pv}(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l, \omega) \langle \dots \rangle &= - \alpha_m \iint_{\Delta_n \mathbb{S}_m^l} g(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l, \omega) \langle \dots \rangle dS(\mathbf{s}_{m n}^l), \\
 \Delta_n K^{pp}(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l, \omega) \langle \dots \rangle &= \iint_{\Delta_n \mathbb{S}_m^l} \mathbf{n}(\mathbf{s}_{m n}^l) \cdot \nabla g(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l, \omega) \langle \dots \rangle dS(\mathbf{s}_{m n}^l).
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Ранее в работе [51] была предложена аппроксимация элементарных поверхностных интегральных операторов (2.3), которая сводит интегрирование четырёх поверхностных интегралов типа Кирхгофа по малому треугольному элементу поверхности интегрирования к вычислению по элементарным формулам четырёх пучков концевых волн (ПКВ), распространяющихся от шести концов трёх коротких рёбер элемента. Аппроксимация из [51] выполняется в виде четырёх преобразований:

- 1) поверхностные интегральные операторы (2.3) на элементе $\Delta_n \mathbb{S}_m^l$ с помощью теорем о дивергенции и роторе преобразованы в сумму контурных интегральных операторов,

действующих вдоль ломаного контура $\bigcup_{k=1}^{k=3} \Delta_{nk} \mathbb{E}_m^l$ из трёх криволинейных отрезков (рёбер) $\Delta_{nk} \mathbb{E}_m^l$;

- 2) с помощью теоремы об аналитическом продолжении интеграла контурный интегральный оператор, действующий на отдельном конечном ребре $\Delta_{nk} \mathbb{E}_m^l$, представлен контурным интегральным оператором типа Магги-Рубиновича, действующим на отдельном бесконечном продолжении конечного ребра $\Delta_{nk} \mathbb{E}_m^l$ и описывающим динамику отдельной краевой волны, расходящейся от бесконечного ребра, и пары контурных интегральных операторов типа Магги-Рубиновича, действующих на двух полубесконечных продолжениях конечного ребра $\Delta_{nk} \mathbb{E}_m^l$ и описывающих динамику двух концевых волн, расходящихся от концов конечного ребра;
- 3) с помощью аппроксимации типа пограничного слоя контурный интегральный оператор для отдельного конечного ребра $\Delta_{nk} \mathbb{E}_m^l$ аппроксимирован оператором типа классического интеграла Френеля, а пара контурных интегральных операторов для двух полубесконечных продолжений конечного ребра $\Delta_{nk} \mathbb{E}_m^l$ аппроксимирована парой операторов типа обобщённых интегралов Френеля;

- 4) действие всех операторов типа классических и обобщённых интегралов Френеля для всех треугольных элементов с тремя конечными рёбрами $\sum_{n=1}^N \bigcup_{k=1}^3 \Delta_{nk} \mathbb{E}_m^l$

аппроксимировано действием только операторов типа обобщённых интегралов Френеля (из теории дифракции [36] известно, что суммарный вклад всех малых элементов, чьи краевые волны приходят в приёмник, пренебрежимо мал).

Описанная выше аппроксимация пучками концевых волн (ПКВ) дала название методу, исследуемому в данной диссертации – метод наложения концевых волн (МНКВ).

Опыт вычислений автора диссертации показал, что аппроксимация, использующая обобщённые интегралы Френеля, является неравномерной по параметру «удаление от излучающего элемента $\Delta_n \mathbb{S}_m^l$ » (Рисунок 2.1). Когда удаление $R = \left| \mathbf{s}_{m n'}^j - \mathbf{s}_{m n}^l \right|$, которое определено в (В.32), становится менее трёх доминантных длин волн, то недопустимо нарастает погрешность неравномерной аппроксимации. По этой причине автором диссертации (совместно с А.А. Айзенберг и А.М. Айзенберг) было проведено исследование по поиску равномерной аппроксимации по параметру «удаление $R = \left| \mathbf{s}_{m n'}^j - \mathbf{s}_{m n}^l \right|$ от элемента $\Delta_n \mathbb{S}_m^l$ ».

Была найдена равномерная аппроксимация элементарных поверхностных интегральных операторов (2.3), которая модифицирует неравномерную аппроксимацию, изложенную в пунктах 1-4 выше, с помощью редукции этих операторов к быстро осциллирующим интегральным операторам с регулярной подынтегральной функцией, которые вычисляются аналитически. Однако ядра операторов изначально являются сингулярными функциями. Третий интегральный оператор из (2.3) имеет слабо-сингулярное ядро с особенностью вида $1/R(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l)$. Первый и четвертый интегральные операторы из (2.3) имеют сильно-сингулярное ядро с особенностью вида $1/R^2(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l)$. Второй интегральный оператор из (2.3) имеет гипер-сингулярное ядро с особенностью вида $1/R^3(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l)$. Для учёта этих особенностей в высокоточных методах (ГИУ и их различных модификации) применяется метод дискретных особенностей (МДО). В частном случае акустики этот метод подробно изложен в статье [64].

Однако для сохранения матрично-векторной технологии MNKV необходимо применить аппроксимации операторов (2.3), основанные на строгих математических теоремах и методах специальной регуляризации. Эти аппроксимации реализуются в виде следующих трёх шагов.

Шаг 1. На этом шаге используются простейшие аппроксимации граничных значений, на которые действуют элементарные операторы (2.3). Граничные значения давления и нормальной скорости в силу малого размера треугольных элементов поверхности интегрирования представлены формулами Тейлора нулевого порядка в окрестности центральной точки треугольного элемента. Пренебрегая остаточными членами первого порядка, можно переписать эти интегральные операторы в виде интегралов от ядер операторов

$$\begin{aligned}
\Delta_n K^{vv}(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l, \omega) &= - \iint_{\Delta_n \mathbb{S}_m^l} \mathbf{n}(\mathbf{s}_{m n'}^j) \cdot \nabla g(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l, \omega) dS(\mathbf{s}_{m n}^l), \\
\Delta_n K^{vp}(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l, \omega) &= - \frac{1}{\alpha_m} \iint_{\Delta_n \mathbb{S}_m^l} \mathbf{n}(\mathbf{s}_{m n'}^j) \cdot \nabla \left\{ \mathbf{n}(\mathbf{s}_{m n}^l) \cdot \nabla [g(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l, \omega) - g(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l, 0)] \right\} dS(\mathbf{s}_{m n}^l) \\
&\quad - \frac{1}{\alpha_m} \iint_{\Delta_n \mathbb{S}_m^l} \mathbf{n}(\mathbf{s}_{m n'}^j) \cdot \nabla \left[\mathbf{n}(\mathbf{s}_{m n}^l) \cdot \nabla g(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l, 0) \right] dS(\mathbf{s}_{m n}^l), \\
\Delta_n K^{pv}(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l, \omega) &= - \alpha_m \iint_{\Delta_n \mathbb{S}_m^l} g(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l, \omega) dS(\mathbf{s}_{m n}^l), \\
\Delta_n K^{pp}(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l, \omega) &= \iint_{\Delta_n \mathbb{S}_m^l} \mathbf{n}(\mathbf{s}_{m n}^l) \cdot \nabla g(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l, \omega) dS(\mathbf{s}_{m n}^l).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Заметим, что во втором операторе (2.4) произведена тождественная перезапись с помощью фундаментального решения для нулевой частоты $g(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l, 0) = \frac{1}{4\pi R(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l)}$.

Шаг 2. На этом шаге рассматривается случай, когда точка вычисления $\mathbf{s}_{m n'}^j$ не сближается с элементом $\Delta_n \mathbb{S}_m^l$. В этом случае все интегралы вида (2.4) не содержат сингулярных точек и вычисляются с помощью теоремы о среднем значении интеграла (следствие теоремы Лагранжа). Первый, третий и четвёртый интегралы и первое слагаемое второго интеграла можно вычислить с достаточной точностью, фиксируя подынтегральное выражение в центральной точке треугольного элемента. Применение центральной точки можно рассматривать, как эквивалент метода ячеек (двумерный аналог метода прямоугольников). Второе слагаемое второго интеграла необходимо вычислять, фиксируя подынтегральное выражение в виртуальной точке треугольного элемента, чтобы обеспечить достаточную точность. Определение координат виртуальной точки осуществляется по явным приближённым формулам, выведенным автором диссертации совместно с Айзенбергом А.М., для специально подобранной эталонной задачи «точка $\mathbf{s}_{m n'}^j$ принадлежит плоскости треугольного элемента». Применение виртуальной точки вместо центральной можно рассматривать, как уточнение метода ячеек. Фиксируя подынтегральные выражения в (2.4) в соответствующих точках и вынося их за знак интеграла, получим равномерные аппроксимации ПКВ в явном аналитическом виде:

$$\begin{aligned} \Delta_n B^{vv}(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l, \omega) &\cong \frac{1}{2} \left[1 - \frac{i\omega}{v_{pm}} R \right] \cos(\theta_{s_{m n'}^j}) \frac{\Delta S}{2\pi R^2} e^{i\frac{\omega}{v_{pm}} R}, \\ \Delta_n B^{vp}(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l, \omega) &\cong -\frac{1}{2\rho_m v_{pm}} \left\{ \begin{aligned} & i \left(\frac{\omega}{v_{pm}} R \right) \cos(\theta_{s_{m n'}^j}) \cos(\theta_{s_{m n}^l}) + \\ & \left(1 + \frac{i}{\left(\frac{\omega}{v_{pm}} R \right)} \right) \varphi(\theta_{s_{m n'}^j}, \theta_{s_{m n}^l}) \end{aligned} \right\} \frac{\Delta S}{2\pi R^2} e^{i\frac{\omega}{v_{pm}} R} \\ &+ \frac{1}{2\rho_m v_{pm}} \frac{i}{\left(\frac{\omega}{v_{pm}} \right)} \varphi(\theta_{s_{m n'}^j}, \theta_{s_{m n}^l}) \frac{\Delta S}{2\pi} \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{R_v^3} \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\Delta_n B^{pv}(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l, \omega) \cong -\frac{\rho_m v_{pm}}{2} i \left(\frac{\omega}{v_{pm}} R \right) \frac{\Delta S}{2\pi R^2} e^{i\frac{\omega}{v_{pm}} R},$$

$$\Delta_n B^{pp}(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l, \omega) \cong \frac{1}{2} \left[1 - \frac{i\omega}{v_{pm}} R \right] \cos(\theta_{s_{m n}^l}) \frac{\Delta S}{2\pi R^2} e^{i\frac{\omega}{v_{pm}} R}.$$

В формуле (2.5) введены следующие обозначения:

$R = |\mathbf{s}_{m n'}^j - \mathbf{s}_{m n}^l|$ – расстояние между точкой приёма $\mathbf{s}_{m n'}^j$ и точкой излучения $\mathbf{s}_{m n}^l$,

$R_V = |\mathbf{s}_{m n'}^j - \mathbf{s}_{m n V}^l|$ – расстояние между точкой приёма $\mathbf{s}_{m n'}^j$ и виртуальной точкой излучения $\mathbf{s}_{m n V}^l$,

$\theta_{s_{m n}^l}$ – угол между лучом $\mathbf{s}_{m n'}^j - \mathbf{s}_{m n}^l$ и нормалью $\mathbf{n}(\mathbf{s}_{m n'}^l)$ в точке $\mathbf{s}_{m n}^l$, $0 \leq \theta_{s_{m n}^l} \leq \pi$,

$\theta_{s_{m n'}^j}$ – угол между лучом $\mathbf{s}_{m n'}^j - \mathbf{s}_{m n}^l$ и нормалью $\mathbf{n}(\mathbf{s}_{m n'}^j)$ в точке $\mathbf{s}_{m n'}^j$, $0 \leq \theta_{s_{m n'}^j} \leq \pi$,

$p(\mathbf{s}_{m n'}^l)$ – граничное значение давления в точке $\mathbf{s}_{m n'}^l$,

$p(\mathbf{s}_{m n'}^j)$ – граничное значение давления в точке $\mathbf{s}_{m n'}^j$,

вспомогательная функция

$$\varphi(\theta_{s_{m n'}^j}, \theta_{s_{m n}^l}) = \mathbf{n}(\mathbf{s}_{m n'}^j) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{s}_{m n}^l) - 3 \cos(\theta_{s_{m n'}^j}) \cos(\theta_{s_{m n}^l}) \quad . \quad (2.6)$$

Шаг 3. На этом шаге рассматривается особый случай, когда точка вычисления $\mathbf{s}_{m n'}^j$ сближается с элементом $\Delta_n \mathbb{S}_m^l$. В особом случае для первого, третьего и четвёртого интегралов и первого слагаемого второго интеграла применяется метод эквивалентного контурного интеграла. Параметризация поверхности каждого малого элемента $\Delta_n \mathbb{S}_m^l$ сферическими координатами с центром в точке $\mathbf{s}_{m n'}^j$ позволяет представить дифференциал площади

$dS = R^2 \frac{d\Omega}{\left| \cos(\theta_{s_{m n}^l}) \right|}$ через дифференциал телесного угла $d\Omega = \sin(\theta) d\theta d\varphi$, удаление R , синус

полярного угла $\sin(\theta)$ и косинус угла между лучом и нормалью в точке $\mathbf{s}_{m n}^l$ элемента. После упрощения подынтегральные выражения во всех операторах становятся регулярными функциями от радиальной и угловой переменных. Интегрирование по радиальной переменной выполняется в аналитической форме, а поверхностные интегралы сводятся к контурным интегралам по трём рёбрам, ограничивающим малый элемент $\Delta_n \mathbb{S}_m^l$. Каждый такой контурный интеграл вычисляется с помощью замены треугольного элемента на круглый элемент при условии, что их площади равны. В особом случае второе слагаемое второго интеграла обозначено величиной $\Delta_n \Psi^{vp}(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l, \omega)$, которая является неизвестной переменной в

линейном алгебраическом уравнении. Это уравнение имеет вид дискретного аналога нижней строки в формуле (2.22) (свойство ортогональной проекции оператора распространения для уравнений акустики). Величина $\Delta_n \Psi^{vp}(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l, \omega)$ определяется решением этого уравнения. В итоге получим равномерные аппроксимации ПКВ в явном аналитическом виде:

$$\begin{aligned} \Delta_n B^{vv}(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l, \omega) &\cong \frac{1}{2}, \\ \Delta_n B^{vp}(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l, \omega) &\cong \frac{1}{2 \rho_m v_{Pm}} \left\{ \left(\frac{\omega}{v_{Pm}} \right)^2 \frac{\Delta S}{\pi} / 6 - i \frac{\omega}{v_{Pm}} \sqrt{\frac{\Delta S}{\pi}} / 2 \right\} + \Delta_n \Psi^{vp}(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l, \omega), \\ \Delta_n B^{pv}(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l, \omega) &\cong \frac{\rho_m v_{Pm}}{2} \left\{ \left(\frac{\omega}{v_{Pm}} \right)^2 \frac{\Delta S}{\pi} / 2 - i \frac{\omega}{v_{Pm}} \sqrt{\frac{\Delta S}{\pi}} \right\}, \\ \Delta_n B^{pp}(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l, \omega) &\cong \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Аналитические оценки и численные тесты показали достаточную точность аппроксимаций (2.5) и (2.7) (см. подраздел 2.2). Далее полученные равномерные аппроксимации (2.5) и (2.7) элементарных поверхностных интегральных операторов можно продолжать называть пучками концевых волн (ПКВ), подчёркивая физический смысл этих аппроксимаций.

Для случая приёмников, расположенных в слое \mathbb{D}_m , с учётом процесса триангуляции, выпишем первый из четырёх операторов в (2.1) в виде матрицы элементарных операторов $N_R \times N$:

$$K^{vv}(\mathbf{x}_{m n'_R}^j, \mathbf{s}_m^l, \omega) \cong \left[\Delta_n K^{vv}(\mathbf{x}_{m n'_R}^j, \mathbf{s}_{m n}^l, \omega) \right], \quad \text{если } \mathbf{s}_{m n}^l \in \Delta_n \mathbb{S}_m^l, \quad (2.8)$$

где $n'_R = 1, \dots, N_R$ – индекс строки, N_R – общее количество приёмников, $\mathbf{x}_{m n'_R}^j$ – дискретные точки, в которых расположены приёмники, $n = 1, \dots, N$ – индекс столбца, N – общее количество криволинейных треугольников. Элементарный оператор $\Delta_n K^{vv}(\mathbf{x}_{m n'_R}^j, \mathbf{s}_{m n}^l, \omega)$ описывает распространение волн от одного малого криволинейного треугольника с номером n на грани \mathbb{S}_m^l в произвольные точки $\mathbf{x}_{m n'_R}^j$, в которых расположены приёмники. Дискретизация остальных трёх операторов в (2.1) для приёмников, расположенных в слое \mathbb{D}_m , производится аналогичным

образом. Аналитическая аппроксимация элементарных поверхностных интегральных операторов для приёмников соответствует формулам (2.5) и (2.7), где произвольная точка $\mathbf{s}_{m n'}^j$ заменяется на координату приёмника $\mathbf{x}_{m n'_k}^j$.

Далее рассмотрим дискретизацию операторов дифрагирования

$$D^{vv}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l, \omega), D^{vp}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l, \omega), D^{pv}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l, \omega), D^{pp}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l, \omega), \quad (2.9)$$

используя готовые формулы дискретизации операторов распространения (2.5) и (2.7). Опуская выкладки, подобные формулам (2.2)-(2.7), запишем аппроксимации элементарных операторов дифрагирования в виде:

$$\begin{aligned} \Delta_n D^{vv}(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l, \omega) &\cong h(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l) \Delta_n B^{vv}(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l, \omega), \\ \Delta_n D^{vp}(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l, \omega) &\cong h(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l) \Delta_n B^{vp}(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l, \omega), \\ \Delta_n D^{pv}(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l, \omega) &\cong h(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l) \Delta_n B^{pv}(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l, \omega), \\ \Delta_n D^{pp}(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l, \omega) &\cong h(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l) \Delta_n B^{pp}(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l, \omega), \end{aligned} \quad (2.10)$$

где целочисленная функция $h(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l)$ определена в формуле (B.34).

Аппроксимации (2.5)-(2.7) и (2.10) применяются при вычислении отдельных вкладов каскадной дифракции в (B.29) в виде их произведения. Например, одно из возможных произведений матрицы ПКВ и матрицы дифрагирования ПКВ имеет вид:

$$\left[\Delta_n B^{vv}(\mathbf{s}_{m n'}^k, \mathbf{s}_{m n'}^j, \omega) \right] \left[h(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l) \Delta_n B^{vv}(\mathbf{s}_{m n'}^j, \mathbf{s}_{m n}^l, \omega) \right]. \quad (2.11)$$

2.1.2. Принципы матричной аппроксимации операторов прохождения-распространения

Подставив (B.29) в (B.4), получим матричный оператор прохождения-распространения в произвольном слое (сначала распространение в слое с номером m , а затем прохождение из слоя с номером m в слой с номером m') в виде:

$$\mathbf{L}_{m'm} = \mathbf{T}_{m'm} \left\{ \mathbf{K}_{mm} + \sum_{i=1}^{\infty} [\mathbf{K}_{mm} \mathbf{D}_{mm}]^i \mathbf{K}_{mm} \right\}. \quad (2.12)$$

Из формулы (2.12) с учётом матричных формул (В.41) следует, что операторы прохождения участвуют только при вычислении произведений

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{(m-1)m} &= \mathbf{T}_{(m-1)m} \mathbf{K}_{mm} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{T}_{(m-1)m}^{21} \mathbf{K}_{mm}^{11} & \mathbf{T}_{(m-1)m}^{21} \mathbf{K}_{mm}^{12} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{L}_{mm} &= \mathbf{T}_{mm} \mathbf{K}_{mm} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{mm}^{11} \mathbf{K}_{mm}^{11} & \mathbf{T}_{mm}^{11} \mathbf{K}_{mm}^{12} \\ \mathbf{T}_{mm}^{22} \mathbf{K}_{mm}^{21} & \mathbf{T}_{mm}^{22} \mathbf{K}_{mm}^{22} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{L}_{(m+1)m} &= \mathbf{T}_{(m+1)m} \mathbf{K}_{mm} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{(m+1)m}^{12} \mathbf{K}_{mm}^{21} & \mathbf{T}_{(m+1)m}^{12} \mathbf{K}_{mm}^{22} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Из формулы (2.13) следует, что достаточно найти допустимую аппроксимацию одного матричного композитного оператора прохождения-распространения для произвольной пары граней, а для остальных таких операторов применить эту аппроксимацию. Поэтому выберем матричный композитный оператор прохождения-распространения на паре граней \mathbb{S}_m^l и \mathbb{S}_m^j , с которой контактирует грань $\mathbb{S}_{m'}^{j'}$, и запишем его с учётом правила для индексов m' и j' из (В.41) в явном виде:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{m'm}^{j'j} \mathbf{K}_{mm}^{jl} &= \begin{bmatrix} T_{m'm}^{j'j\,vv}(\mathbf{s}_{m'}^{j'}, \mathbf{s}_m^j, \omega) K^{vv}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_{m'}^l, \omega) & T_{m'm}^{j'j\,vv}(\mathbf{s}_{m'}^{j'}, \mathbf{s}_m^j, \omega) K^{vp}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_{m'}^l, \omega) \\ T_{m'm}^{j'j\,pp}(\mathbf{s}_{m'}^{j'}, \mathbf{s}_m^j, \omega) K^{pv}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_{m'}^l, \omega) & T_{m'm}^{j'j\,pp}(\mathbf{s}_{m'}^{j'}, \mathbf{s}_m^j, \omega) K^{pp}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_{m'}^l, \omega) \end{bmatrix}, \\
m &\in [1; M], \quad 1 \leq m' = m-1, m, m+1 \leq M, \quad j' = j + (m - m').
\end{aligned} \tag{2.14}$$

При численной реализации многократного интегрирования в скалярных композитных операторах в матрице (2.14) ожидается экспоненциальный рост числа операций. Чтобы перейти от экспоненциального роста к линейному, в работах [15] предложено применить аналитическую аппроксимацию для операторов свёрток вида (В.43), которая основана на том, что основное значение таких операторов свёртки формируется за счёт интегрирования по очень малой окрестности точки вычисления. Поэтому процесс интегрирования достаточно гладкой входной функции может быть сведён к интегрированию формулы Тейлора второго порядка для входной функции. Применение этой формулы позволяет с достаточной точностью аппроксимировать действие всех свёрток из (2.14) умножением на функциональный коэффициент, зависящий от локальных свойств ядра свёртки и входной функции. Функциональный (интегральный) коэффициент имеет явный аналитический вид:

$$\begin{aligned}
T_{m'm}^{j'j\,vv}(\mathbf{s}_{m'}, \mathbf{s}_m^j, \omega) &\approx \chi_{m'm}^{j'j\,vv}(\mathbf{s}_{m'}, \omega), \\
T_{m'm}^{j'j\,pp}(\mathbf{s}_{m'}, \mathbf{s}_m^j, \omega) &\approx \chi_{m'm}^{j'j\,pp}(\mathbf{s}_{m'}, \omega), \\
m \in [1; M], \quad 1 \leq m' = m-1, m, m+1 \leq M, \quad j' = j + (m - m'),
\end{aligned} \tag{2.15}$$

где $\chi_{m'm}^{j'j\,vv}(\mathbf{s}_{m'}, \omega)$ и $\chi_{m'm}^{j'j\,pp}(\mathbf{s}_{m'}, \omega)$ – это эффективные коэффициенты прохождения (ЭКО для отражения или ЭКП для преломления) в точке вычисления свёртки для нормальной скорости частиц и давления, соответственно [15].

В работе [15] показано, что действие конволюционных операторов прохождения на входные данные (след волнового поля на грани) эквивалентно умножению соответствующего ЭКО или ЭКП на значение волнового поля в точке вычисления. Эффективные коэффициенты обобщают соответствующие коэффициенты плоских волн на плоских границах на случай криволинейных границ, неплоских волновых фронтов и конечных частот [15]. Такое обобщение обеспечивается зависимостью эффективных коэффициентов не только от материальных параметров контактирующих сред и угла падения волнового фронта, как в коэффициентах плоских волн, но и от дополнительного безразмерного параметра. Этот параметр зависит от разницы кривизн границы и фронта падающей волны в точке падения и частоты колебаний.

С учётом аппроксимаций (2.15) строгий матричный оператор прохождения-распространения (2.14) может быть приближённо заменён матричным оператором распространения с дополнительными эффективными коэффициентами отражения и преломления:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{m'm}^{j'j} \mathbf{K}_{mm}^{jl} &\cong \begin{bmatrix} \chi_{m'm}^{j'j\,vv}(\mathbf{s}_{m'}, \omega) K^{vv}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l, \omega) & \chi_{m'm}^{j'j\,vv}(\mathbf{s}_{m'}, \omega) K^{vp}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l, \omega) \\ \chi_{m'm}^{j'j\,pp}(\mathbf{s}_{m'}, \omega) K^{pv}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l, \omega) & \chi_{m'm}^{j'j\,pp}(\mathbf{s}_{m'}, \omega) K^{pp}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l, \omega) \end{bmatrix}, \\
m \in [1; M], \quad 1 \leq m' = m-1, m, m+1 \leq M, \quad j' = j + (m - m').
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Применив в матричном операторе (2.16) аппроксимации операторов распространения (2.1), выраженные формулами (2.2)-(2.7), получим аппроксимации операторов прохождения-распространения в виде матриц ПКВ с соответствующими эффективными коэффициентами прохождения:

$$\begin{aligned}
\chi_{m'n'}^{j'j'vv}(\mathbf{s}_{m'}^j, \omega) K^{vv}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l, \omega) &\cong \left[\chi_{m'n'}^{j'j'vv}(\mathbf{s}_{m'n'}^j, \omega) \Delta_n B^{vv}(\mathbf{s}_{m'n'}^j, \mathbf{s}_{m'n}^l, \omega) \right], \\
\chi_{m'n'}^{j'j'vp}(\mathbf{s}_{m'}^j, \omega) K^{vp}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l, \omega) &\cong \left[\chi_{m'n'}^{j'j'vp}(\mathbf{s}_{m'n'}^j, \omega) \Delta_n B^{vp}(\mathbf{s}_{m'n'}^j, \mathbf{s}_{m'n}^l, \omega) \right], \\
\chi_{m'n'}^{j'j'pp}(\mathbf{s}_{m'}^j, \omega) K^{pv}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l, \omega) &\cong \left[\chi_{m'n'}^{j'j'pp}(\mathbf{s}_{m'n'}^j, \omega) \Delta_n B^{pv}(\mathbf{s}_{m'n'}^j, \mathbf{s}_{m'n}^l, \omega) \right], \\
\chi_{m'n'}^{j'j'pp}(\mathbf{s}_{m'}^j, \omega) K^{pp}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l, \omega) &\cong \left[\chi_{m'n'}^{j'j'pp}(\mathbf{s}_{m'n'}^j, \omega) \Delta_n B^{pp}(\mathbf{s}_{m'n'}^j, \mathbf{s}_{m'n}^l, \omega) \right], \\
n, n' \in [1, N], \quad \text{если } \mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_{m'n'}^j &\in \Delta_n \mathbb{S}_m^j, \mathbf{s}_{m'}^{j''}, \mathbf{s}_{m'n'}^{j''} \in \Delta_n \mathbb{S}_{m'}^{j''}.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Подставив (2.17) в (2.16) с учётом правила индексов, получим три матрицы прохождения-распространения из (2.13) для произвольного слоя \mathbb{D}_m , состоящие из матриц ПКВ, распространяющихся между парой граней, в виде:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{L}_{(m-1)m}] &= \begin{bmatrix} [O] & [O] \\ [\mathbf{L}_{(m-1)m}^{2\ 1}] & [\mathbf{L}_{(m-1)m}^{2\ 2}] \end{bmatrix}, \\
[\mathbf{L}_{(m-1)m}^{2\ 1}] &= \begin{bmatrix} \left[\chi_{(m-1)m}^{2\ 1vv}(\mathbf{s}_{m'n'}^1, \omega) \Delta_n B^{vv}(\mathbf{s}_{m'n'}^1, \mathbf{s}_{m'n}^1, \omega) \right] & \left[\chi_{(m-1)m}^{2\ 1vp}(\mathbf{s}_{m'n'}^1, \omega) \Delta_n B^{vp}(\mathbf{s}_{m'n'}^1, \mathbf{s}_{m'n}^1, \omega) \right] \\ \left[\chi_{(m-1)m}^{2\ 1pp}(\mathbf{s}_{m'n'}^1, \omega) \Delta_n B^{pv}(\mathbf{s}_{m'n'}^1, \mathbf{s}_{m'n}^1, \omega) \right] & \left[\chi_{(m-1)m}^{2\ 1pp}(\mathbf{s}_{m'n'}^1, \omega) \Delta_n B^{pp}(\mathbf{s}_{m'n'}^1, \mathbf{s}_{m'n}^1, \omega) \right] \end{bmatrix}, \\
[\mathbf{L}_{(m-1)m}^{2\ 2}] &= \begin{bmatrix} \left[\chi_{(m-1)m}^{2\ 1vv}(\mathbf{s}_{m'n'}^1, \omega) \Delta_n B^{vv}(\mathbf{s}_{m'n'}^1, \mathbf{s}_{m'n}^2, \omega) \right] & \left[\chi_{(m-1)m}^{2\ 1vp}(\mathbf{s}_{m'n'}^1, \omega) \Delta_n B^{vp}(\mathbf{s}_{m'n'}^1, \mathbf{s}_{m'n}^2, \omega) \right] \\ \left[\chi_{(m-1)m}^{2\ 1pp}(\mathbf{s}_{m'n'}^1, \omega) \Delta_n B^{pv}(\mathbf{s}_{m'n'}^1, \mathbf{s}_{m'n}^2, \omega) \right] & \left[\chi_{(m-1)m}^{2\ 1pp}(\mathbf{s}_{m'n'}^1, \omega) \Delta_n B^{pp}(\mathbf{s}_{m'n'}^1, \mathbf{s}_{m'n}^2, \omega) \right] \end{bmatrix}, \\
[\mathbf{L}_{mm}] &= \begin{bmatrix} [\mathbf{L}_{mm}^{11}] & [\mathbf{L}_{mm}^{12}] \\ [\mathbf{L}_{mm}^{21}] & [\mathbf{L}_{mm}^{22}] \end{bmatrix}, \\
[\mathbf{L}_{mm}^{11}] &= \begin{bmatrix} \left[\chi_{mm}^{11vv}(\mathbf{s}_{m'n'}^1, \omega) \Delta_n B^{vv}(\mathbf{s}_{m'n'}^1, \mathbf{s}_{m'n}^1, \omega) \right] & \left[\chi_{mm}^{11vp}(\mathbf{s}_{m'n'}^1, \omega) \Delta_n B^{vp}(\mathbf{s}_{m'n'}^1, \mathbf{s}_{m'n}^1, \omega) \right] \\ \left[\chi_{mm}^{11pp}(\mathbf{s}_{m'n'}^1, \omega) \Delta_n B^{pv}(\mathbf{s}_{m'n'}^1, \mathbf{s}_{m'n}^1, \omega) \right] & \left[\chi_{mm}^{11pp}(\mathbf{s}_{m'n'}^1, \omega) \Delta_n B^{pp}(\mathbf{s}_{m'n'}^1, \mathbf{s}_{m'n}^1, \omega) \right] \end{bmatrix}, \\
[\mathbf{L}_{mm}^{12}] &= \begin{bmatrix} \left[\chi_{mm}^{11vv}(\mathbf{s}_{m'n'}^1, \omega) \Delta_n B^{vv}(\mathbf{s}_{m'n'}^1, \mathbf{s}_{m'n}^2, \omega) \right] & \left[\chi_{mm}^{11vp}(\mathbf{s}_{m'n'}^1, \omega) \Delta_n B^{vp}(\mathbf{s}_{m'n'}^1, \mathbf{s}_{m'n}^2, \omega) \right] \\ \left[\chi_{mm}^{11pp}(\mathbf{s}_{m'n'}^1, \omega) \Delta_n B^{pv}(\mathbf{s}_{m'n'}^1, \mathbf{s}_{m'n}^2, \omega) \right] & \left[\chi_{mm}^{11pp}(\mathbf{s}_{m'n'}^1, \omega) \Delta_n B^{pp}(\mathbf{s}_{m'n'}^1, \mathbf{s}_{m'n}^2, \omega) \right] \end{bmatrix}, \\
[\mathbf{L}_{mm}^{21}] &= \begin{bmatrix} \left[\chi_{mm}^{22vv}(\mathbf{s}_{m'n'}^2, \omega) \Delta_n B^{vv}(\mathbf{s}_{m'n'}^2, \mathbf{s}_{m'n}^1, \omega) \right] & \left[\chi_{mm}^{22vp}(\mathbf{s}_{m'n'}^2, \omega) \Delta_n B^{vp}(\mathbf{s}_{m'n'}^2, \mathbf{s}_{m'n}^1, \omega) \right] \\ \left[\chi_{mm}^{22pp}(\mathbf{s}_{m'n'}^2, \omega) \Delta_n B^{pv}(\mathbf{s}_{m'n'}^2, \mathbf{s}_{m'n}^1, \omega) \right] & \left[\chi_{mm}^{22pp}(\mathbf{s}_{m'n'}^2, \omega) \Delta_n B^{pp}(\mathbf{s}_{m'n'}^2, \mathbf{s}_{m'n}^1, \omega) \right] \end{bmatrix}, \\
[\mathbf{L}_{mm}^{22}] &= \begin{bmatrix} \left[\chi_{mm}^{22vv}(\mathbf{s}_{m'n'}^2, \omega) \Delta_n B^{vv}(\mathbf{s}_{m'n'}^2, \mathbf{s}_{m'n}^2, \omega) \right] & \left[\chi_{mm}^{22vp}(\mathbf{s}_{m'n'}^2, \omega) \Delta_n B^{vp}(\mathbf{s}_{m'n'}^2, \mathbf{s}_{m'n}^2, \omega) \right] \\ \left[\chi_{mm}^{22pp}(\mathbf{s}_{m'n'}^2, \omega) \Delta_n B^{pv}(\mathbf{s}_{m'n'}^2, \mathbf{s}_{m'n}^2, \omega) \right] & \left[\chi_{mm}^{22pp}(\mathbf{s}_{m'n'}^2, \omega) \Delta_n B^{pp}(\mathbf{s}_{m'n'}^2, \mathbf{s}_{m'n}^2, \omega) \right] \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}
\left[\mathbf{L}_{(m+1)m} \right] &= \begin{bmatrix} \left[\mathbf{L}_{(m+1)m}^{1\ 1} \right] & \left[\mathbf{L}_{(m+1)m}^{1\ 2} \right] \\ \left[\mathbf{O} \right] & \left[\mathbf{O} \right] \end{bmatrix}, \\
\left[\mathbf{L}_{(m+1)m}^{1\ 1} \right] &= \begin{bmatrix} \left[\chi_{(m+1)m}^{1\ 2\ vv}(\mathbf{s}_{m n'}^2, \omega) \Delta_n B^{vv}(\mathbf{s}_{m n'}^2, \mathbf{s}_{m n}^1, \omega) \right] & \left[\chi_{(m+1)m}^{1\ 2\ vv}(\mathbf{s}_{m n'}^2, \omega) \Delta_n B^{vp}(\mathbf{s}_{m n'}^2, \mathbf{s}_{m n}^1, \omega) \right] \\ \left[\chi_{(m+1)m}^{1\ 2\ pp}(\mathbf{s}_{m n'}^2, \omega) \Delta_n B^{pv}(\mathbf{s}_{m n'}^2, \mathbf{s}_{m n}^1, \omega) \right] & \left[\chi_{(m+1)m}^{1\ 2\ pp}(\mathbf{s}_{m n'}^2, \omega) \Delta_n B^{pp}(\mathbf{s}_{m n'}^2, \mathbf{s}_{m n}^1, \omega) \right] \end{bmatrix}, \\
\left[\mathbf{L}_{(m+1)m}^{1\ 2} \right] &= \begin{bmatrix} \left[\chi_{(m+1)m}^{1\ 2\ vv}(\mathbf{s}_{m n'}^2, \omega) \Delta_n B^{vv}(\mathbf{s}_{m n'}^2, \mathbf{s}_{m n}^2, \omega) \right] & \left[\chi_{(m+1)m}^{1\ 2\ vv}(\mathbf{s}_{m n'}^2, \omega) \Delta_n B^{vp}(\mathbf{s}_{m n'}^2, \mathbf{s}_{m n}^2, \omega) \right] \\ \left[\chi_{(m+1)m}^{1\ 2\ pp}(\mathbf{s}_{m n'}^2, \omega) \Delta_n B^{pv}(\mathbf{s}_{m n'}^2, \mathbf{s}_{m n}^2, \omega) \right] & \left[\chi_{(m+1)m}^{1\ 2\ pp}(\mathbf{s}_{m n'}^2, \omega) \Delta_n B^{pp}(\mathbf{s}_{m n'}^2, \mathbf{s}_{m n}^2, \omega) \right] \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

2.2. Тестирование пучков концевых волн (ПКВ).

В данном подразделе приведён тест, подтверждающий корректность выбранной в подразделе 2.1.1 матричной аппроксимации интегральных операторов распространения (2.1). Выписана пара строгих равенств для интегрального оператора ортогональной проекции в канонической модели среды при заданной конфигурации источника и приёмников. Произведено сравнение левых частей равенств, вычисленных с помощью полученной матричной аппроксимации, с их правыми частями, вычисленными по элементарным аналитическим формулам. Получены качественные (видимые на сейсмограммах) и количественные (относительные амплитудные погрешности) оценки корректности времён вступления и амплитуд волн.

Постановка задачи для тестов. Для тестирования матричной аппроксимации скалярных интегральных операторов (2.1), которая основана на приближённых формулах (2.5)-(2.7), можно использовать свойство матричного оператора вида (B.30): он является оператором ортогональной проекции. Для такого оператора выполняется строгое равенство [49, 52]:

$$\mathbf{K}_{mm}^l(\mathbf{x}_m, \mathbf{s}_m^l, \omega) \mathbf{b}_m^{(0)l}(\mathbf{s}_m^l, \mathbf{y}_m, \omega) = \begin{cases} -\mathbf{b}_m^{(0)}(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m, \omega), & \mathbf{x}_m \notin \mathbb{D}_{y_m}, \\ \mathbf{0}, & \mathbf{x}_m \in \mathbb{D}_{y_m}, \end{cases} \tag{2.21}$$

где $\mathbf{b}_m^{(0)l}(\mathbf{s}_m^l, \mathbf{y}_m, \omega)$ – вектор поля точечного источника, расположенного в точке \mathbf{y}_m полупространства \mathbb{D}_{y_m} , $\mathbf{K}_{mm}^l(\mathbf{x}_m, \mathbf{s}_m^l, \omega)$ – оператор распространения, действующий из точки \mathbf{s}_m^l грани S_m^l во внутреннюю точку \mathbf{x}_m , которая может быть в области \mathbb{D}_{y_m} ($\mathbf{x}_m \in \mathbb{D}_{y_m}$) или вне её ($\mathbf{x}_m \notin \mathbb{D}_{y_m}$). Материальные параметры полупространства \mathbb{D}_{y_m} и его дополнения до полного

пространства равны материальным параметрам области \mathbb{D}_m . Вектор поля точечного источника $\mathbf{b}_m^{(0)l}(\mathbf{s}_m^l, \mathbf{y}_m, \omega)$ вычисляется в точках \mathbf{s}_m^l грани \mathbb{S}_m^l и во внутренних точках \mathbf{x}_m по аналитическим формулам. Используя тот факт, что матричный оператор вида (B.30) состоит из четырёх скалярных операторов (2.1), равенство (2.21) можно представить в виде двух скалярных формул:

$$K^{vv}(\mathbf{x}_m, \mathbf{s}_m^l, \omega) v_m^{(0)l}(\mathbf{s}_m^l, \mathbf{y}_m, \omega) + K^{vp}(\mathbf{x}_m, \mathbf{s}_m^l, \omega) p_m^{(0)l}(\mathbf{s}_m^l, \mathbf{y}_m, \omega) = \begin{cases} -v_m^{(0)}(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m, \omega), & \mathbf{x}_m \notin \mathbb{D}_{y_m}, \\ 0, & \mathbf{x}_m \in \mathbb{D}_{y_m}, \end{cases} \quad (2.22)$$

$$K^{pv}(\mathbf{x}_m, \mathbf{s}_m^l, \omega) v_m^{(0)l}(\mathbf{s}_m^l, \mathbf{y}_m, \omega) + K^{pp}(\mathbf{x}_m, \mathbf{s}_m^l, \omega) p_m^{(0)l}(\mathbf{s}_m^l, \mathbf{y}_m, \omega) = \begin{cases} -p_m^{(0)}(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m, \omega), & \mathbf{x}_m \notin \mathbb{D}_{y_m}, \\ 0, & \mathbf{x}_m \in \mathbb{D}_{y_m}. \end{cases} \quad (2.23)$$

Тестирование матричной аппроксимации интегральных операторов (2.1) выполнялось вычислением левых частей формул (2.22) и (2.23) с помощью формул ПКВ (2.5) и (2.7) и их сравнением с аналитическими формулами вида (B.36) для сферической волны (скорость частиц $v_m^{(0)}(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m, \omega)$ и давление $p_m^{(0)}(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m, \omega)$ в правых частях формул (2.22) и (2.23)). Поскольку нижнее равенство в (2.22) использовалось для вычисления слагаемого $\Delta_n \Psi^{vp}(\mathbf{s}_{m'n'}^j, \mathbf{s}_{m'n}^l, \omega)$ в формуле (2.7), для тестирования можно использовать только верхнее равенство в (2.22) и оба равенства в (2.23).

Тестовая модель. Двумерное сечение тестируемой модели плоскостью $y=0$ показано на Рисунке 2.2. В тестах грань \mathbb{S}_m^l задана в виде бесконечной поверхности параболического цилиндра $z(x, y) = \pm\sqrt{4-x}$, которая разделяет трёхмерное пространство на полупространство \mathbb{D}_{y_m} , в котором расположен источник, и полупространство $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{D}_{y_m}$, дополняющее его до полного пространства.

Полупространство \mathbb{D}_{y_m} описывается плотностью $\rho_m = 2.0$ г/см³ и скоростью распространения продольной волны $v_{pm} = 2.0$ км/с. Полупространство $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{D}_{y_m}$ является математическим и в нём материальные параметры среды отсутствуют. Однако для задания пары граничных данных $v_m^{(0)l}(\mathbf{s}_m^l, \mathbf{y}_m, \omega)$ и $p_m^{(0)l}(\mathbf{s}_m^l, \mathbf{y}_m, \omega)$ и вычисления ядер интегральных операторов, использующих фундаментальное решение для безграничной однородной акустической среды (B.32), необходимо математическое полупространство доопределить

материальными параметрами физического полупространства \mathbb{D}_{y_m} : плотностью $\rho_m = 2.0$ г/см³ и скоростью распространения продольной волны $v_{Pm} = 2.0$ км/с.

Точечный источник расположен в точке $(x = 4$ км, $y = 0$ км, $z = 1$ км) полупространства \mathbb{D}_{y_m} . Этот источник излучает сферическую продольную волну, которая порождает пару граничных данных $v_m^{(0)l}(\mathbf{s}_m^l, \mathbf{y}_m, \omega)$ и $p_m^{(0)l}(\mathbf{s}_m^l, \mathbf{y}_m, \omega)$ на грани S_m^l . Форма импульса (вейвлет) этой волны представляется в виде $e^{-(2\tau)^2} \cos(2\pi\tau)$, где $\tau = t/T - 2$, $T = 0.032$ с. Этому импульсу соответствуют доминантный период волны $T_{dom} \cong 0.026$ с, доминантная длина волны $\lambda_{dom} \cong 0.052$ км и доминантная частота $f_{dom} \cong 38.25$ Гц.

Профиль из 101 приёмника расположен вдоль прямой линии от точки с координатами $(x = 3.25$ км, $y = 0$ км, $z = 0$ км) до точки с координатами $(x = 4.75$ км, $y = 0$ км, $z = 0$ км). Шаг между приёмниками $\Delta x = 0.015$ км. Приёмники для $x > 4.0$ км расположены в полупространстве \mathbb{D}_{y_m} , а приёмники для $x < 4.0$ км расположены в дополняющем его полупространстве $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{D}_{y_m}$. Будем считать, что приёмники регистрируют давление и нормальную скорость частиц. Под нормальной скоростью частиц в приёмниках понимается компонента вектора скорости, направленная вдоль оси Oz .

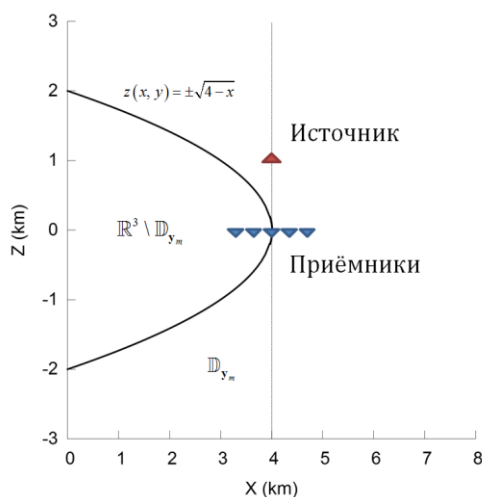


Рисунок 2.2. Двумерное сечение тестируемой модели.

Сравнение сейсмограмм МНКВ с аналитическими формулами. Первый тест выполнен для матричной аппроксимации левой части формулы (2.22) с помощью формул ПКВ (2.5)-(2.7). На Рисунке 2.3 приведена соответствующая синтетическая сейсмограмма. На этом рисунке видно, что на приёмниках при $x > 4.0$ км отсутствуют колебания, а на приёмниках при $x < 4.0$ км прослеживается регулярная волна, которая по времени вступления может представлять

собой сферическую волну в приёмниках. Существенно, что на приёмнике в точке $x = 4.0$ км наблюдается скачок амплитуды волнового поля, что соответствует правой части формулы (2.22). Отметим, что точность вычисления этого скачка можно оценивать только по верхнему равенству в правой части формулы (2.22) (см. комментарий к формуле (2.22)).

Второй тест выполнен для матричной аппроксимации левой части формулы (2.23) с помощью формул ПКВ (2.5) и (2.7). На Рисунке 2.4 приведена соответствующая синтетическая сейсмограмма. На этом рисунке видно, что на приёмниках при $x > 4.0$ км отсутствуют колебания, а на приёмниках при $x < 4.0$ км прослеживается регулярная волна, которая по времени вступления может представлять собой сферическую волну в приёмниках. Существенно, что на приёмнике в точке $x = 4.0$ км наблюдается скачок амплитуды волнового поля, что соответствует правой части формулы (2.23).

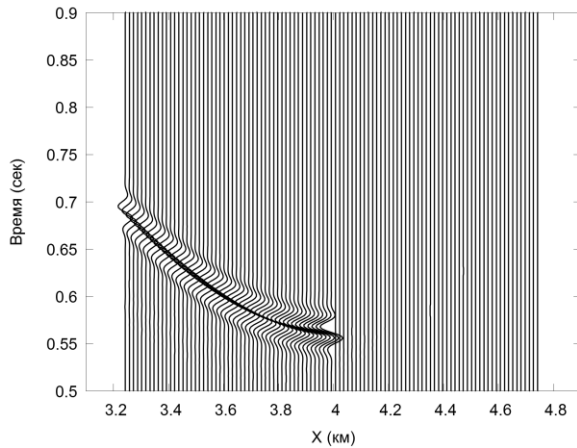


Рисунок 2.3. Результат вычислений по формуле (2.22) с аппроксимацией операторов распространения с помощью ПКВ.

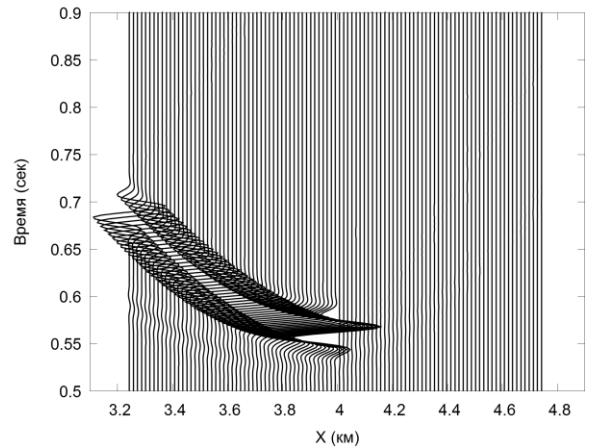


Рисунок 2.4. Результат вычислений по формуле (2.23) с аппроксимацией операторов распространения с помощью ПКВ.

Необходимо доказать, что на Рисунках 2.3 и 2.4 на приёмниках при $x < 4.0$ км представлена сферическая волна с отрицательным знаком согласно формулам (2.22) и (2.23). Для этого сначала были вычислены по аналитическим формулам (В.36) сейсмограммы для скорости частиц $v_m^{(0)}(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m, \omega)$ (Рисунок 2.5) и для давления $p_m^{(0)}(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m, \omega)$ (Рисунок 2.6) в приёмниках.

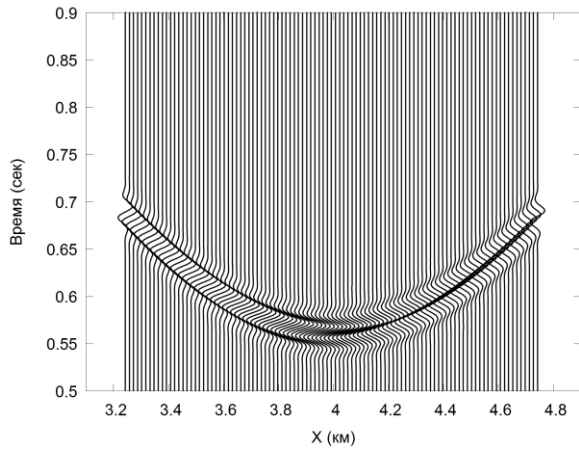


Рисунок 2.5. Результат вычислений $v_m^{(0)}$ по первой аналитической формуле из (В.36).

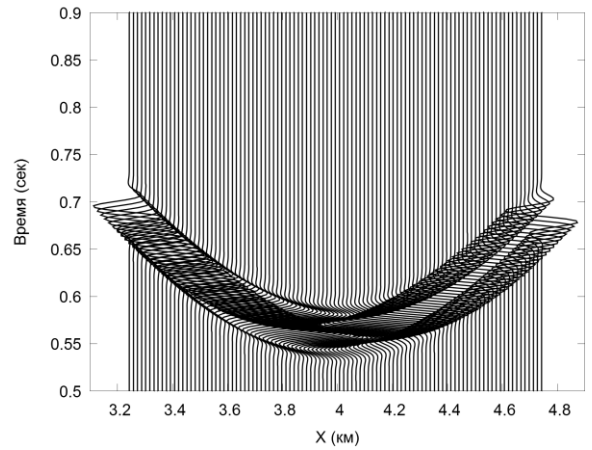


Рисунок 2.6. Результат вычислений $p_m^{(0)}$ по второй аналитической формуле из (В.36).

После суммирования сейсмограмм на Рисунках 2.3 и 2.5 была получена суммарная сейсмограмма для скорости частиц (Рисунок 2.7), а после суммирования сейсмограмм на Рисунках 2.4 и 2.6 была получена суммарная сейсмограмма для давления (Рисунок 2.8).

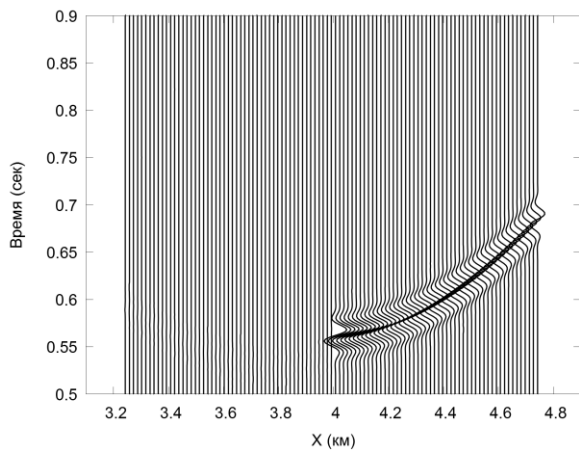


Рисунок 2.7. Суммарная сейсмограмма для скорости частиц.

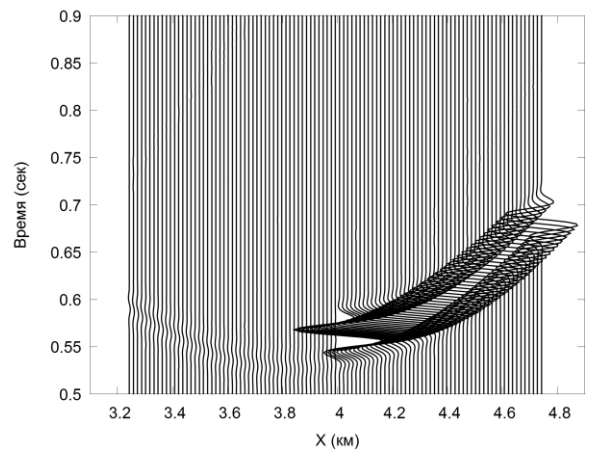


Рисунок 2.8. Суммарная сейсмограмма для давления.

На суммарных сейсмограммах (Рисунки 2.7 и 2.8) на всех приёмниках при $x < 4.0$ км визуально наблюдается зануление волнового поля. Точность зануления амплитуд волнового поля оценивается относительной ошибкой по сравнению с амплитудой сферической волны перед приёмником, на котором происходит разрыв. Анализ абсолютных значений амплитудных погрешностей для занулённых временных трасс показывает относительную ошибку менее 1% . Из описанного выше анализа амплитуд волнового поля следует вывод: на Рисунках 2.3 и 2.4 на приёмниках при $x < 4.0$ км действительно представлена сферическая волна, подобная

сферической волне источника, но с отрицательной амплитудой согласно формулам (2.22) и (2.23).

Используя свойство матричной аппроксимации (2.2)-(2.7), можно вычислить отдельные слагаемые в левых частях формул (2.22) и (2.23). Первое и второе слагаемое для нормальной скорости частиц в левой части формулы (2.22) показаны на Рисунках 2.9 и 2.10, соответственно. Первое и второе слагаемое для давления в левой части формулы (2.23) показаны на Рисунках 2.11 и 2.12, соответственно.

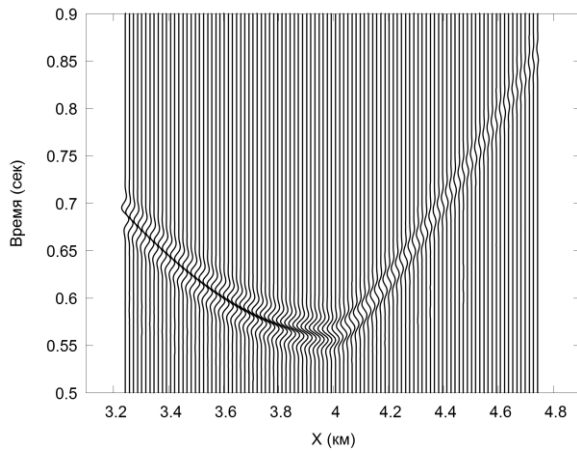


Рисунок 2.9. Первое слагаемое для нормальной скорости частиц $K^{vv}v_m^{(0)}$ в левой части формулы (2.22).

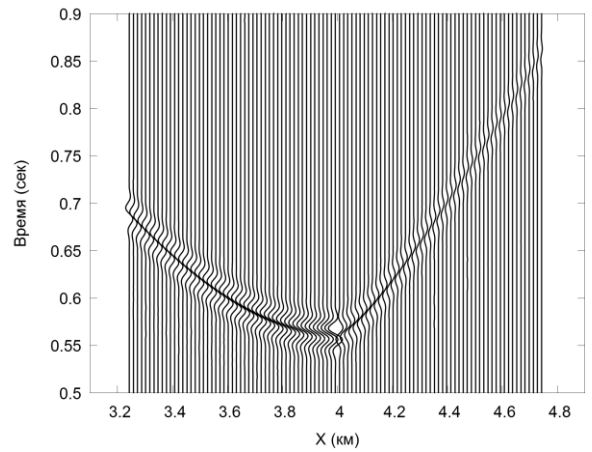


Рисунок 2.10. Второе слагаемое для нормальной скорости частиц $K^{vp}p_m^{(0)}$ в левой части формулы (2.22).

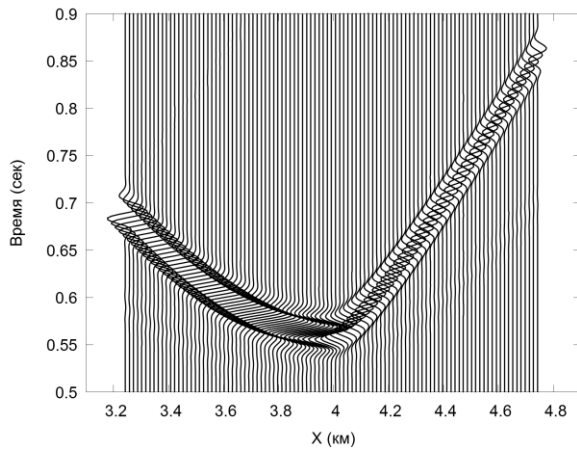


Рисунок 2.11. Первое слагаемое для давления $K^{pv}v_m^{(0)}$ в левой части формулы (2.23).

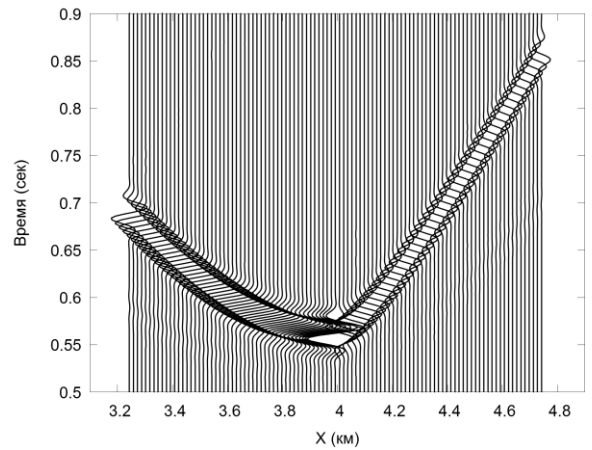


Рисунок 2.12. Второе слагаемое для давления $K^{pp}p_m^{(0)}$ в левой части формулы (2.23).

Поскольку визуальный анализ скалярных составляющих давления проще, чем анализ составляющих нормальной компоненты вектора скорости частиц, то начнём с рассмотрения пары сейсмограмм для давления на Рисунках 2.11-2.12. Амплитуда первого слагаемого для

давления на Рисунке 2.11 в окрестности точки пересечения профиля и параболической границы выглядит как гладкая функция от координат приёмников. Гладкость амплитуды первого слагаемого находится в соответствии с известной теоремой о предельных значениях поверхностного потенциала простого слоя в акустическом случае (раздел 3.1 в [52]). Амплитуда второго слагаемого для давления на Рисунке 2.12 в окрестности точки пересечения профиля и параболической границы выглядит как разрывная функция от координат приёмников. Скачок амплитуды второго слагаемого находится в соответствии с известной теоремой о предельных значениях поверхностного потенциала двойного слоя в акустическом случае (раздел 3.1 в [52]).

Теперь рассмотрим пары сейсмограмм для нормальной скорости частиц на Рисунках 2.9-2.10. Амплитуда первого слагаемого для нормальной скорости частиц на Рисунке 2.9 в окрестности точки пересечения профиля и параболической границы выглядит как гладкая функция от координат приёмников. Гладкость амплитуды первого слагаемого находится в визуальном противоречии с известной теоремой о предельных значениях градиента поверхностного потенциала простого слоя в акустическом случае, которая требует разрыва предельных значений компоненты градиента, нормальной к поверхности интегрирования (раздел 3.1 в [52]). На самом деле противоречие отсутствует, так как на сейсмограмме показана компонента скорости частиц, которая является нормальной для профиля приёмников и касательной относительно поверхности интегрирования. Поэтому имеются объективные основания полагать сейсмограмму на Рисунке 2.9 соответствующей теории потенциалов. Амплитуда второго слагаемого для нормальной скорости частиц на Рисунке 2.10 в окрестности точки пересечения профиля и параболической границы выглядит как разрывная функция от координат приёмников. Скачок амплитуды второго слагаемого находится в визуальном противоречии с известной теоремой о предельных значениях градиента поверхностного потенциала простого слоя в акустическом случае (раздел 3.1 в [52]). Поскольку визуальное противоречие для второго слагаемого объясняется теми же аргументами, что и для первого слагаемого, то имеются объективные основания полагать сейсмограмму на Рисунке 2.10 соответствующей теории потенциалов.

2.3. Краткое описание алгоритма МНКВ

В данном подразделе приводится краткое описание алгоритма МНКВ: общая структура матриц среды и всех слоёв, схема пошагового умножения матриц на входные дискретные векторы, а также схема вычисления наборов векторов волновых амплитуд. Кратко намечен способ локализации пошагового умножения матриц при использовании алгоритма МНКВ в моделирующем ядре оптимизационного алгоритма обратной задачи.

Матричный оператор среды (В.3) может быть аппроксимирован матрицей среды $[\mathbf{L}]$, содержащей по три матрицы $[\mathbf{L}_{(m-1)m}]$ из (2.18), $[\mathbf{L}_{mm}]$ из (2.19), $[\mathbf{L}_{(m+1)m}]$ из (2.20) в каждом слое, и имеющей вид, подобный блочной структуре этого оператора. Матрица среды $[\mathbf{L}]$ является волновой передаточной характеристикой слоистой среды и не зависит от системы наблюдений, т.е. от параметров источников и приёмников. По этой причине три матрицы всех слоёв могут быть предварительно вычислены и помещены в память до начала вычисления волновых полей.

Рассмотрим три матрицы (2.18), (2.19) и (2.20) некоторого слоя. Матрица $[\mathbf{L}_{mm}]$ из (2.19) содержит шестнадцать матриц, составленных из пучков концевых волн (ПКВ). Матрицы $[\mathbf{L}_{(m-1)m}]$ из (2.18) и $[\mathbf{L}_{(m+1)m}]$ из (2.20) содержат по восемь матриц, составленных из пучков концевых волн (ПКВ). Количество матриц ПКВ определяется количеством пар индексов jl для слоя и существованием в нём четырёх ПКВ типа $\nu\nu, \nu\rho, \rho\nu, \rho\rho$, распространяющихся от каждой грани слоя. Шестнадцать матриц ПКВ с индексом $j \neq l = 1, 2$ содержат все пучки концевых волн, распространяющиеся между верхней и нижней гранями слоя с преломлением или отражением на той грани, на которую падает ПКВ. Шестнадцать матриц ПКВ с индексом $j = l = 1, 2$ содержат все пучки концевых волн, распространяющиеся вдоль одной грани с преломлением или отражением на такой грани.

Рассмотрим вычисление волнового поля с заданным волновым кодом (см. формулу (В.13) и поясняющий абзац после неё) с помощью алгоритма МНКВ на примере модели среды и формул (В.1)-(В.13) для неё. Вначале по формулам (В.10) вычисляются входные данные: три дискретных вектора отражённого/преломленного поля источника $\mathbf{b}_1^{(1)} \cong \left(\left(v_{1n}^{2(1)} \right)^T \quad \left(p_{1n}^{2(1)} \right)^T \right)^T$, $\mathbf{b}_2^{(1)} \cong \left(\left(v_{2n}^{1(1)} \right)^T \quad \left(p_{2n}^{1(1)} \right)^T \quad \left(v_{2n}^{2(1)} \right)^T \quad \left(p_{2n}^{2(1)} \right)^T \right)^T$ и $\mathbf{b}_3^{(1)} \cong \left(\left(v_{3n}^{1(1)} \right)^T \quad \left(p_{3n}^{1(1)} \right)^T \quad 0 \quad 0 \right)^T$, где индекс $n \in [1, N]$ соответствует количеству треугольных элементов на грани. Далее запускается цикл по шагам волнового кода. Внутри цикла для выбранного шага в слое, который определяется шагом волнового кода, вычисляются все необходимые матрицы ПКВ по формулам (2.18)-(2.20). Затем вычисляются выходные векторы путём умножения этих матриц на входные векторы. Далее выходные векторы рассматриваются, как входные для следующей итерации цикла. После окончания цикла по формулам (2.18)-(2.20) вычисляются все необходимые матрицы ПКВ, распространяющихся от элементов двух граней слоя \mathbb{D}_2 к приёмникам. Затем путём умножения

этих матриц на входные векторы, полученные в конце цикла, получаем для приёмников вектор дискретных значений волнового поля вида (В.8).

При необходимости, используя формулу (В.22) с учётом (В.23) и (В.24), можно получить для всех слоёв, граней и приёмников набор векторов волновых амплитуд вида $\mathbf{a}_m^j \cong \left((a_{mn}^{j+})^T \quad (a_{mn}^{j-})^T \right)^T$. Поскольку дискретизация операторных коэффициентов $H_m^{v_n^\pm}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}'_m, \omega)$ и их вычисление представляют сложность, в алгоритме МНКВ вместо формул (В.22)-(В.24) применяется поточечная операция по формулам (В.39)-(В.40).

Если необходимо изменить материальные параметры какого-то слоя, то только тридцать две матрицы ПКВ этого слоя должны быть повторно вычислены. Если необходимо изменить геометрию отдельной грани слоя, то необходимо одновременно изменить геометрию контактирующей грани соседнего слоя. В этом случае наборы из тридцати двух матриц обоих соседних слоёв, контактирующих на этой границе, должны быть повторно вычислены. Поэтому при возмущении материальных и геометрических параметров локализованной части среды должны быть обновлены матрицы ПКВ только тех слоёв, которые относятся к возмущённой части среды, а матрицы ПКВ в остальных слоях остаются неизменными, что сокращает время вычисления при использовании алгоритма МНКВ в моделирующем ядре оптимизационного алгоритма в обратных задачах сейсмологии.

2.5. Заключение

В данном разделе были рассмотрены принципы матричной аппроксимации операторов распространения и дифрагирования, композитного оператора прохождения-распространения и оператора прохождения, а также численные тесты, подтверждающие её корректность, и краткое описание алгоритма МНКВ.

Главная особенность матричной аппроксимации интегральных операторов распространения, дифрагирования и прохождения-распространения заключена в том, что эта аппроксимация является равномерной по трём пространственным координатам и частоте: элементарные интегралы с сингулярными и гиперсингулярными ядрами по малым криволинейным элементам поверхности интегрирования редуцированы к пучкам концевых волн (ПКВ), которые являются регулярными функциями. Численные тесты, приведённые в подразделе 2.2, подтверждают корректность выбранной равномерной матричной аппроксимации этих операторов. Можно отметить желательность проведения подобных тестов для более широкого набора геометрических форм поверхности интегрирования.

Основная специфика алгоритма МНКВ заключена в следующих аспектах: 1) матрицы всех слоёв или блоков образуют волновую передаточную характеристику всей среды, которая не зависит от параметров источников и приёмников; 2) алгоритм вычисляет часть волнового поля, интересующую инженера-сейсмика, в виде суммы матрично-векторных произведений в соответствии заданными волновыми кодами; 3) представление каждого волнового события в двух формах: в механических терминах (скорость частиц и давление) или в волновых терминах (пара амплитуд волн, отходящих и приходящих к границе или профилю приёмников); 4) возможность обновления матриц ПКВ только для тех слоёв или блоков, материальные и геометрические параметры которых необходимо изменить. В Таблице 2.2 показано сравнение МНКВ с численными и аналитическими методами математического моделирования сейсмических волновых полей по пяти параметрам, которые использованы в Таблице 1.1.

Таблица 2.2. Сравнение МНКВ с численными и аналитическими методами математического моделирования.

Метод	Скорость вычислений	Сложные среды	Расщепление на волны	Сейсмические частоты	Передаточные характеристики среды
<i>Строгие аналитические 1D методы</i>	Быстро	–	+	+	–
<i>Приближённые аналитические 3D методы</i>	Очень быстро	–	+	–	–
<i>Численные 3D методы</i>	Медленно	+	–	+	–
МНКВ (аналитический 3D метод)	Зависит от модели (линейная зависимость от количества слоёв модели)	+	+	+	+

3. РЕАЛИЗАЦИЯ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА МНКВ

Данный раздел состоит из десяти подразделов и посвящён описанию архитектуры программного комплекса МНКВ, его отдельных алгоритмов и проблем их численной реализации, а также анализу производительности программного комплекса. Предлагаемая версия позволяет вычислять сейсмическое полное волновое поле и его отдельные фрагменты по аналитическим формулам в трёхмерных акустических средах с границами произвольной формы.

В подразделе 3.1 показана общая архитектура программного комплекса МНКВ, описаны его компоненты и показан пример задания геологической модели с помощью данного комплекса. В подразделе 3.2 описаны основные проблемы реализации программного комплекса МНКВ, возникающие на уровне требуемых вычислительных ресурсов и объёмов оперативной памяти для хранения данных алгоритма. Подразделы 3.3-3.9 описывают реализацию каждой из компонент программного комплекса МНКВ, указанных в подразделе 3.1. Помимо этого, в данных подразделах представлены, разработанные автором, оптимизационные и адаптированные для параллельных архитектур алгоритмы (в том числе для GPU-кластера), позволяющие производить вычисления с помощью программного комплекса МНКВ в 1000 и более раз быстрее, по сравнению с неоптимизированной версией. Также представлены алгоритмы хранения данных МНКВ при наличии ограниченных ресурсов оперативной памяти ЭВМ. В подразделе 3.10 выводятся формулы, которые можно использовать для оценки времени вычисления волнового поля для заданной модели до запуска программы. В частности, эти формулы используются в разделе 4 для оценки времени вычисления волнового поля для тестируемых моделей.

3.1. Архитектура программного комплекса МНКВ

Данный подраздел содержит описание архитектуры программного комплекса МНКВ, а также пример задания слоистой модели среды с помощью данного комплекса.

Программный комплекс МНКВ представляет собой численную реализацию теории операторов прохождения-распространения-дифрагирования (ТОПРД) для случая трёхмерных акустических сред (слоистых или блоковых) с произвольными границами и состоит из следующих компонент:

input.ini
 ВходныеДанные
 ОбщиеДанные
 ИсточникГраница
 ГраницаГраница
 ГраницаПриёмники
 МатрицаРаспространения
 МатрицаТени
 МатрицаДифракции
 КоэффициентыПрохождения

В файле *input.ini* задаётся описание модели слоистой среды в следующем формате:

```

[Количество слоёв модели]
NL = 3

[Данные об источнике]
// координаты источника (x, y, z)
x = 3.00
y = 0.00
z = 4.00

[Данные о приёмниках]
// количество приёмников
M = 101
// координаты первого приёмника (x, y, z)
x = 3.25
y = 0.00
z = 4.00
// интервал между приёмниками
dx = 0.015

[Данные о триангулированных границах сред]
// путь до файла с первой границей модели
bound1 = Boundary1.txt
// путь до файла со второй границей модели
bound2 = Boundary2.txt

[Параметры среды (скорость и плотность)]
// параметры для первого слоя среды
v1 = 2.0
rho1 = 2.0
// параметры для второго слоя среды
v2 = 4.0
rho2 = 4.0

```

```

// параметры для третьего слоя среды
v3 = 2.0
rho3 = 2.5

[Количество актов дифракции, учитываемые для каждой границы]
// количество актов дифракции, учитываемые на 1-ой границе
D1 = 1
// количество актов дифракции, учитываемые на 2-ой границе
D2 = 4

[Волновой код распространения волнового поля в модели от источника в приёмники]
*-1-t-2-r-1-r-2-r-1-t-*

```

Описанному выше формату может соответствовать следующая трёхслойная акустическая модель, указанная на Рисунке 3.1.

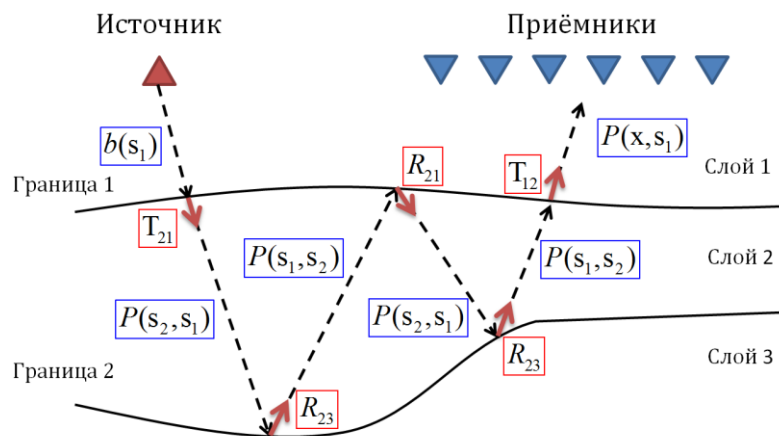


Рисунок 3.1. Пример модели, сгенерированной с помощью файла входных данных *input.ini* программным комплексом МНКВ.

В файле входных данных пользователю необходимо указать количество акустических слоёв исследуемой модели, положение источника и приёмников в трёхмерном пространстве, путь до файлов с данными о триангулированных границах, акустические параметры слоёв (скорость и плотность). Для каждой границы модели пользователь имеет возможность явно задать параметр – количество актов каскадной дифракции на данной границе, которое достаточно учитывать при вычислении с выбранной пользователем погрешностью. Сумма учитываемых актов каскадной дифракции далее называется многократной дифракции. Это необходимо для экономии времени вычислений – в случае слабо-искривлённой границы параметр задаётся равным нулю, поскольку не имеет смысла тратить временные и вычислительные ресурсы для генерирования каскадной дифракции, которая близка нулю. Если

же исследователь работает с сильно-искривлённой границей, то для корректного учёта многократной дифракции значение этого параметра должно быть больше нуля. Также для вычисления фрагмента полного волнового поля пользователю необходимо указать в файле настроек *input.ini* траекторию его распространения от источника в приёмники внутри слоистой среды – волновой код данного фрагмента. Для модели, показанной на Рисунке 3.1, волновой код представляет собой последовательность вида:

-1-t-2-r-1-r-2-r-1-t-

Первым символом «*» обозначается источник волнового поля, последним – приёмники. Цифрами обозначается номер границы, на которое происходит распространение волнового поля, в соответствии с волновым кодом. Между цифрами указывается либо символ «t», либо «r». Символ «t» обозначает дальнейшее преломление волнового поля через границу, символ «r» – отражение от этой границы. Символы «*», «t», «r» и цифры соединяются друг с другом знаком «-», образуя цепочку волнового кода.

На Рисунке 3.2 показана архитектура программного комплекса МНКВ.

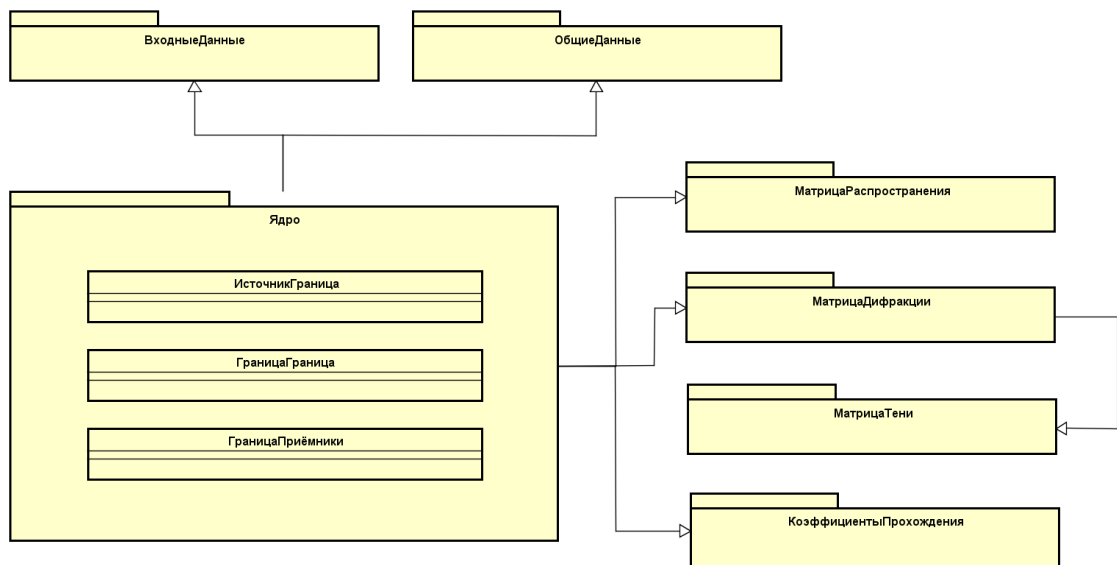


Рисунок 3.2. Архитектура программного комплекса МНКВ.

Компонента программного комплекса МНКВ *ВходныеДанные* считывает параметры модели из конфигурационного файла *input.ini* и представляет их в программном виде (Рисунок 3.2).

Компонента *ОбщиеДанные* содержит общие данные и процедуры программного комплекса МНКВ. Это могут быть константы, определение структур, процедуры, имеющие общее назначение для остальных компонент комплекса.

Компонента *ИсточникГраница* вычисляет волновое поле, распространяющееся от источника на границу, в соответствии с указанным пользователем волновым кодом в конфигурационном файле *input.ini*. При этом учитывается многократная дифракция, порождающаяся на этой границе. Подробности реализации данного алгоритма будут даны в подразделе 3.3.

Компонента *ГраницаГраница* вычисляет волновое поле, распространяющееся с одной границы слоя на другую, в соответствии с указанным пользователем волновым кодом в конфигурационном файле *input.ini*. При этом учитывается многократная дифракция, порождающаяся на этих границах. Подробности реализации данного алгоритма будут даны в подразделе 3.4.

Компонента *ГраницаПриёмники* вычисляет волновое поле, распространяющееся от границы слоя в приёмники, в соответствии с указанным пользователем волновым кодом в конфигурационном файле *input.ini*. При этом учитывается многократная дифракция, порождающаяся на этой границе. Подробности реализации данного алгоритма будут даны в подразделе 3.5.

Компонента *КоэффициентыПрохождения* вычисляет эффективные коэффициенты отражения (ЭКО) и преломления (ЭКП) на криволинейных границах, разделяющие две среды. Краткое описание данного алгоритма будет дано в подразделе 3.9.

Компонента *МатрицаТени* реализуют, выносимый на защиту, высокооптимизированный алгоритм построения матрицы виртуальной тени для произвольной искривлённой границы модели. Матрица виртуальной тени определяет семейство освещённых и затенённых зон границы относительно каждой точки этой границы. Подробности реализации данного алгоритма будут даны в подразделе 3.8.

Компонента *МатрицаРаспространения* реализуют, выносимый на защиту, высокооптимизированный алгоритм вычисления матрицы распространения волнового поля. Подробности реализации данного алгоритма будут даны в подразделе 3.6.

Компонента *МатрицаДифракции* реализуют высокооптимизированный алгоритм вычисления матрицы дифрагирования волнового поля. Матрица дифрагирования вычисляется путём поэлементного умножения матрицы распространения и матрицы виртуальной тени для заданной границы. Подробности реализации алгоритма будут даны в подразделе 3.7.

Необходимо отметить, что компоненты ИсточникГраница, ГраницаГраница и ГраницаПриёмники реализуются с использованием компонент МатрицаРаспространения, МатрицаДифракции и КоэффициентыПрохождения.

Результаты работы программного комплекса МНКВ представляются в виде файлов с данными, которые могут быть отображены исследователем с помощью любой программы построения графиков (например, gnuplot) в виде сейсмограмм.

Программный комплекс МНКВ написан на языке С с использованием технологии NVIDIA CUDA и программного интерфейса MPI. Этот комплекс может быть запущен, как на GPU-кластере, так и на персональном компьютере, который оснащён графической картой, поддерживающей вычисления CUDA.

3.2. Особенности и ключевые проблемы реализации алгоритма МНКВ

Данный подраздел содержит описание основных особенностей и проблем реализации алгоритма МНКВ.

Сначала рассмотрим основные особенности реализации алгоритма МНКВ. При реализации данного алгоритма каждая граница слоистой среды триангулируется на N треугольников. Граничные значения каждой скалярной функции давления и нормальной компоненты вектора скорости частиц представляются в виде вектора размерности N . Скалярные слоевые операторы распространения и дифрагирования аппроксимируются в виде матриц размерности $N \times N$. Скалярный оператор распространения, переносящий волновое поле с границы в приёмники – в виде матрицы размерности $M \times N$, где M – количество приёмников модели. Оператор прохождения (отражения/преломления) через границу раздела сред аппроксимируется в виде матрицы эффективных коэффициентов отражения/преломления (ЭКО/ЭКП) размерности $N \times N$ и поэлементно умножается на соответствующую ему матрицу распространения волнового поля.

Теперь рассмотрим основные проблемы реализации алгоритма МНКВ. Вычисление волновых полей с помощью алгоритма МНКВ сводится к многократным перемножениям матриц распространения и дифрагирования на векторы волнового поля. Поэтому реализация алгоритма МНКВ имеет следующие сложности:

- 1) Алгоритм МНКВ реализует вычисление волнового поля в частотной области. Поэтому для вычисления решения необходимо все матрично-векторные операции производить для каждой дискретной частоты ω_k из некоторого частотного набора $\omega_1 \dots \omega_K$.

- 2) Из-за мелкого размера элементов дискретизации границ моделей среды размерность матриц алгоритма МНКВ становится неприемлемо большой даже для современных вычислительных машин.
- 3) Все матрицы алгоритма МНКВ являются плотными. Это свойство не позволяет использовать для их обработки готовые высокооптимизированные процедуры работы с разреженными матрицами сторонних библиотек.

Рассмотрим следующий пример. Путем численных исследований было показано, что использование одинарной точности при вычислении алгоритмом МНКВ не ухудшает выходную сейсмограмму. Поэтому все элементы матрицы являются комплексными и заполняются числами с плавающей запятой одинарной точности. Пусть количество элементов на границе $N = 150000$. Тогда объем необходимой оперативной памяти для хранения одной матрицы размерности $N \times N$ составляет $N * N * 4 * 2 = 150000 * 150000 * 4 * 2 = 168$ Гб.

Из приведённого примера понятно, что требуется разработать алгоритм обработки массивов большой размерности при наличии ограниченных вычислительных ресурсов и ресурсов оперативной памяти. При этом для стандартных операций линейной алгебры было решено использовать готовые высокооптимизированные решения сторонних библиотек. Обработка большого количества крупных массивов данных естественным образом отрицательно влияет на общее время вычислений. Для ускорения вычислений и возможности применения алгоритма МНКВ в реалистических (прямых и обратных) задачах сейсмологии данный алгоритм был оптимизирован и адаптирован для параллельных архитектур и GPU-кластера. Разработанные алгоритмы и результаты работы процедур будут описаны в подразделах 3.6 и 3.8.

3.3. Поле источника, падающее на границу: векторная реализация

Данный подраздел содержит описание реализации компоненты ИсточникГраница программного комплекса МНКВ (см. подраздел 3.1), которая вычисляет волновое поле, распространяющееся от источника на границу модели, и представляет его в векторной форме.

Рассмотрим процедуру программного комплекса МНКВ переноса волнового поля источника u на поверхность дискретизированной границы \mathcal{S} (Рисунок 3.3).

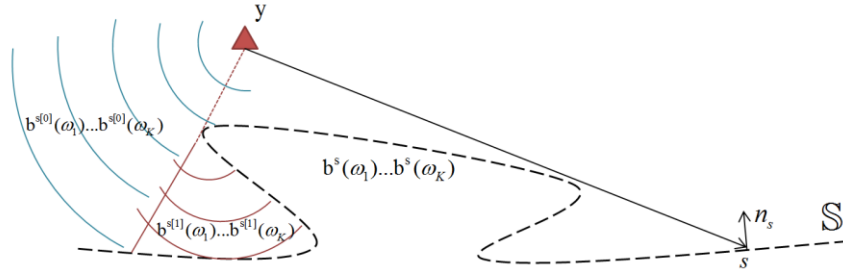


Рисунок 3.3. Процесс распространения волнового поля источника на искривлённую границу.

Как уже было отмечено в подразделе 3.2, алгоритм МНКВ реализует вычисление волнового поля в заданном наборе временных частот, поэтому необходимо получить решение задачи для каждой частоты ω_k из некоторого частотного интервала $\omega_1... \omega_k$. Ввиду этого, в программном комплексе МНКВ волновое поле источника на поверхности границы представляется в виде набора вектор-столбцов $b^s(\omega_1)...b^s(\omega_k)$. Каждый такой ω_k -ый вектор является физически-реализуемым, то есть при его вычислении учитывается каскадная дифракция, порождаемая на вогнутых частях границы S . Каждый ω_k -ый вектор волнового поля, в соответствии с формулой (В.35), представляется в виде суммы ω_k -го вектора прямой волны источника на элементах дискретной границы S , которая не учитывает каскадную дифракцию, и бесконечной суммы векторов, описывающей каскадную дифракцию:

$$b^s(\omega_k) = b^{s[0]}(\omega_k) + \sum_{i=1}^{\infty} b^{s[i]}(\omega_k) \quad , \quad (3.1)$$

где вектор $b^{s[i]}(\omega_k)$ содержит данные, описывающие i -ый акт каскадной дифракции и, в соответствии с (В.35), представляется в виде:

$$b^{s[i]}(\omega_k) = \left[\left(K^{ss} D^{ss} \right)^i b^{s[0]} \right] (\omega_k) = \underbrace{\left[\left(K^{ss} D^{ss} \right) \cdot \left(K^{ss} D^{ss} \right) \cdot \dots \cdot \left(K^{ss} D^{ss} \right) \right]}_{i \text{ раз}} \cdot b^{s[0]} (\omega_k) \quad . \quad (3.2)$$

Каждый из векторов в (3.1) состоит из двух векторов – «нормальная скорость частиц» и «давление»:

$$\begin{Bmatrix} v^s(\omega_k) \\ p^s(\omega_k) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v^{s[0]}(\omega_k) \\ p^{s[0]}(\omega_k) \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} v^{s[i]}(\omega_k) \\ p^{s[i]}(\omega_k) \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

Размерность каждого вектора «нормальная скорость частиц» и «давление» из (3.3) составляет N , где N – количество малых треугольников на которые разбита граница. Таким образом, размерность каждого вектора $b^s(\omega_1) \dots b^s(\omega_k)$ равна $2N$. В случае плоской или слабо-искривлённой границы среды второе слагаемое из (3.3) будет равно или близко нулю.

Рассмотрим структуру вектора прямой волны источника $b^{s[0]}(\omega_k) = \begin{Bmatrix} v^{s[0]}(\omega_k) \\ p^{s[0]}(\omega_k) \end{Bmatrix}$ из (3.3).

Элементы вектора $p^{s[0]}(\omega_k)$, в соответствии с формулой (В.36), заполняются, используя следующую формулу:

$$p^{s[0]}(s, y, \omega_k) = \alpha g(s, y, \omega_k), \quad g(s, y, \omega_k) = \frac{1}{4\pi R(s, y)} \exp\left[\frac{i\omega_k R(s, y)}{v}\right],$$

где $\alpha = (-i\omega)\rho$, $g(s, y, \omega_k)$ – значение сферической волны, распространяющейся от точечного источника y , на центральной точке элемента s границы \mathbb{S} , $R = |s - y|$ – расстояние между источником y и центральной точкой элемента s границы \mathbb{S} , ρ и v – акустические параметры области (плотность и скорость), в которой распространяется волновое поле. Элементы вектора $v^{s[0]}(\omega_k)$, в соответствии с (В.36), заполняются, используя следующую формулу:

$$v^{s[0]}(s, y, \omega_k) = -\frac{1}{\alpha} \frac{\partial p^{s[0]}(s, y, \omega_k)}{\partial n(s)} = -\frac{1}{\alpha} \left[i \frac{\omega_k}{v} - \frac{1}{R(s, y)} \right] \cos[\theta(s)] p^{s[0]}(s, y, \omega_k),$$

где $\cos[\theta(s)] = n_s \cdot l(s, y) = \frac{\partial R(s, y)}{\partial n(s)}$. Единичный вектор $l(s, y) = \frac{s - y}{|s - y|}$ направлен из источника y в центральную точку элемента s границы \mathbb{S} . n_s – нормаль к элементу s , направленная внутрь области, где расположен источник.

Теперь рассмотрим структуру вектора дифракционной поправки i -го порядка $b^{s[i]}(\omega_k) = \begin{Bmatrix} v^{s[i]}(\omega_k) \\ p^{s[i]}(\omega_k) \end{Bmatrix}$ из (3.3) с учётом (3.2). Матрица $K^{ss}(\omega_k) = \begin{bmatrix} K_{ss}^{vv} & K_{ss}^{vp} \\ K_{ss}^{pv} & K_{ss}^{pp} \end{bmatrix}(\omega_k)$ из (3.2) представляет собой блочную матрицу, составленную из четырёх матриц распространения $K_{ss}^{vv}(\omega_k)$, $K_{ss}^{vp}(\omega_k)$, $K_{ss}^{pv}(\omega_k)$ и $K_{ss}^{pp}(\omega_k)$ типа Кирхгофа, действия которых распространяют

волновое поле с элементов границы \mathbb{S} на эти же элементы. Матрица $D^{ss}(\omega_k) = \begin{bmatrix} D_{ss}^{vv} & D_{ss}^{vp} \\ D_{ss}^{pv} & D_{ss}^{pp} \end{bmatrix}(\omega_k)$

из (3.2) представляет собой блочную матрицу, составленную из четырёх матриц дифрагирования $D_{ss}^{vv}(\omega_k)$, $D_{ss}^{vp}(\omega_k)$, $D_{ss}^{pv}(\omega_k)$ и $D_{ss}^{pp}(\omega_k)$, действия которых распространяют только нефизическое волновое поле между зонами геометрических теней с элементов границы \mathbb{S} на эти же элементы. Каждая из этих матриц ($K^{ss}(\omega_k)$ и $D^{ss}(\omega_k)$) имеет размерность $2N \times 2N$ и подробное их описание будет дано в подразделе 3.4.

Таким образом, формула (3.1) может быть переписана в терминах векторов «нормальная скорость частиц» и «давление»:

$$\begin{Bmatrix} v^s(\omega_k) \\ p^s(\omega_k) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v^{s[0]}(\omega_k) \\ p^{s[0]}(\omega_k) \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\begin{bmatrix} K_{ss}^{vv}(\omega_k) & K_{ss}^{vp}(\omega_k) \\ K_{ss}^{pv}(\omega_k) & K_{ss}^{pp}(\omega_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{ss}^{vv}(\omega_k) & D_{ss}^{vp}(\omega_k) \\ D_{ss}^{pv}(\omega_k) & D_{ss}^{pp}(\omega_k) \end{bmatrix} \right)^i \begin{Bmatrix} v^{s[0]}(\omega_k) \\ p^{s[0]}(\omega_k) \end{Bmatrix}. \quad (3.4)$$

Компонента программного комплекса МНКВ ИсточникГраница реализует распространение физически-реализуемого волнового поля источника на криволинейную границу по формуле (3.4). Реализация данной формулы сводится к многократному умножению матриц типа «граница-граница» размерности $N \times N$ на векторы размерности N . Важно отметить, что все элементы матриц и векторов (3.4) заполняются по заранее известным аналитическим формулам.

3.4. Поле, распространяющееся с предыдущей границы слоя на следующую: матрично-векторная реализация

Данный подраздел содержит описание реализации компоненты ГраницаГраница программного комплекса МНКВ (см. подраздел 3.1), которая вычисляет волновое поле, распространяющееся от предыдущей криволинейной границы слоя на следующую, и представляет его в векторной форме.

Рассмотрим процедуру программного комплекса МНКВ переноса волнового поля с элементов одной дискретизированной границы \mathbb{S}_1 некоторого слоя на элементы другой границы \mathbb{S}_2 этого же слоя (Рисунок 3.4).

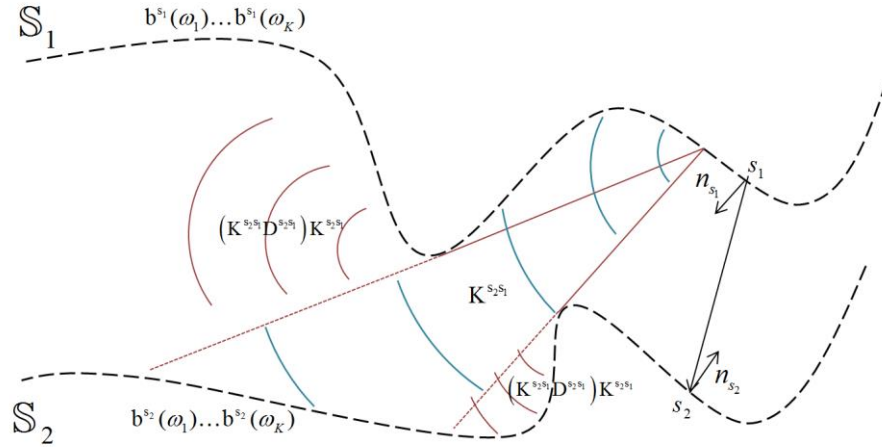


Рисунок 3.4. Процесс распространения волнового поля с одной границы слоя на другую.

Волновое поле на границе \mathbb{S}_2 представляется программным комплексом МНКВ в виде набора векторов $b^{s_2}(\omega_1) \dots b^{s_2}(\omega_k)$. Каждый такой ω_k -ый вектор представляется в виде произведения физически-реализуемой матрицы $P^{s_2s_1}(\omega_k)$ распространения волнового поля с элементов границы \mathbb{S}_1 на элементы границы \mathbb{S}_2 и физически-реализуемого вектора волнового поля $b^{s_1}(\omega_k)$ на границе \mathbb{S}_1 , в соответствии с волновым кодом на предыдущей итерации алгоритма МНКВ:

$$b^{s_2}(\omega_k) = P^{s_2s_1}(\omega_k) b^{s_1}(\omega_k) , \quad (3.5)$$

где матрица $P^{s_2s_1}(\omega_k)$, в соответствии с формулой (В.29), представляется в следующем виде:

$$P^{s_2s_1}(\omega_k) = \left[K^{s_2s_1} + \left[\sum_{i=1}^{\infty} (K^{s_2s_1} D^{s_2s_1})^i \right] K^{s_2s_1} \right] (\omega_k) . \quad (3.6)$$

В формуле (3.6) сумма $\sum_{i=1}^{\infty} (K^{s_2s_1} D^{s_2s_1})^i$ описывает бесконечный ряд дифракционных поправок, порождаемых на выпуклых и вогнутых частях границ \mathbb{S}_1 и \mathbb{S}_2 . Матрица размерности $2N \times 2N$

$K^{s_2s_1}(\omega_k) = \begin{bmatrix} K_{s_2s_1}^{vv} & K_{s_2s_1}^{vp} \\ K_{s_2s_1}^{pv} & K_{s_2s_1}^{pp} \end{bmatrix} (\omega_k)$ представляет собой блочную матрицу распространения, действие

которой распространяет волновое поле с элементов границы \mathbb{S}_1 на элементы границы \mathbb{S}_2 без

учёта каскадной дифракции. Матрица размерности $2N \times 2N$ $D^{s_2 s_1}(\omega_k) = \begin{bmatrix} D_{s_2 s_1}^{vv} & D_{s_2 s_1}^{vp} \\ D_{s_2 s_1}^{pv} & D_{s_2 s_1}^{pp} \end{bmatrix}(\omega_k)$

представляет собой блочную матрицу дифрагирования, которая учитывает существование зон геометрических теней при распространении волнового поля между элементами границ \mathbb{S}_1 и \mathbb{S}_2 . Эта матрица одновременно распространяет два волновых поля: 1) волновое поле отдельного акта каскадной дифракции, 2) нефизическое волновое поле, которое подавляет нефизическое излучение предыдущего акта дифракции. В терминах векторов «нормальная скорость частиц» и «давление» формула (3.6) представляется в следующем матричном виде:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P_{s_2 s_1}^{vv} & P_{s_2 s_1}^{vp} \\ P_{s_2 s_1}^{pv} & P_{s_2 s_1}^{pp} \end{bmatrix}(\omega_k) &= \begin{bmatrix} K_{s_2 s_1}^{vv} & K_{s_2 s_1}^{vp} \\ K_{s_2 s_1}^{pv} & K_{s_2 s_1}^{pp} \end{bmatrix}(\omega_k) + \\ &+ \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left(\begin{bmatrix} K_{s_2 s_1}^{vv} & K_{s_2 s_1}^{vp} \\ K_{s_2 s_1}^{pv} & K_{s_2 s_1}^{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{s_2 s_1}^{vv} & D_{s_2 s_1}^{vp} \\ D_{s_2 s_1}^{pv} & D_{s_2 s_1}^{pp} \end{bmatrix} \right)^i \right](\omega_k) \cdot \begin{bmatrix} K_{s_2 s_1}^{vv} & K_{s_2 s_1}^{vp} \\ K_{s_2 s_1}^{pv} & K_{s_2 s_1}^{pp} \end{bmatrix}(\omega_k), \end{aligned} \quad (3.7)$$

где матрицы $K_{s_2 s_1}^{vv}(\omega_k)$, $K_{s_2 s_1}^{vp}(\omega_k)$, $K_{s_2 s_1}^{pv}(\omega_k)$ и $K_{s_2 s_1}^{pp}(\omega_k)$, каждая размерности $N \times N$, имеют вид:

$$\begin{aligned} K_{s_2 s_1}^{vv}(\omega_k) &= [\Delta_n B^{vv}(s_2, s_1, \omega_k)], & K_{s_2 s_1}^{vp}(\omega_k) &= [\Delta_n B^{vp}(s_2, s_1, \omega_k)], \\ K_{s_2 s_1}^{pv}(\omega_k) &= [\Delta_n B^{pv}(s_2, s_1, \omega_k)], & K_{s_2 s_1}^{pp}(\omega_k) &= [\Delta_n B^{pp}(s_2, s_1, \omega_k)], \end{aligned} \quad (3.8)$$

s_1 – координата центральной точки излучающего элемента поверхности \mathbb{S}_1 , s_2 – координата центральной точки принимающего элемента поверхности \mathbb{S}_2 . Скалярные элементы матриц (3.8) вычисляются по формулам пучков концевых волн (ПКВ) (2.5)-(2.7). Матрицы дифрагирования $D_{s_2 s_1}^{vv}(\omega_k)$, $D_{s_2 s_1}^{vp}(\omega_k)$, $D_{s_2 s_1}^{pv}(\omega_k)$ и $D_{s_2 s_1}^{pp}(\omega_k)$ представляются в виде:

$$\begin{aligned} D_{s_2 s_1}^{vv}(\omega_k) &= H^{s_2 s_1} \cdot K_{s_2 s_1}^{vv}(\omega_k), & D_{s_2 s_1}^{vp}(\omega_k) &= H^{s_2 s_1} \cdot K_{s_2 s_1}^{vp}(\omega_k), \\ D_{s_2 s_1}^{pv}(\omega_k) &= H^{s_2 s_1} \cdot K_{s_2 s_1}^{pv}(\omega_k), & D_{s_2 s_1}^{pp}(\omega_k) &= H^{s_2 s_1} \cdot K_{s_2 s_1}^{pp}(\omega_k), \end{aligned} \quad (3.9)$$

где « \cdot » – операция поэлементного умножения матриц. Матрица $H^{s_2 s_1}$ представляет собой матрицу виртуальной тени размерности $N \times N$, определяющая семейство освещённых и затенённых элементов границ \mathbb{S}_1 и \mathbb{S}_2 относительно друг друга. Подробное описание матрицы виртуальной тени будет изложено в подразделе 3.8.

Компонента программного комплекса МНКВ ГраницаГраница реализует распространение физически реализуемого волнового поля с одной границы слоя на другую по формуле (3.5). Реализация данной формулы сводится к многократному умножению матриц типа «граница-граница» размерности $N \times N$ на векторы размерности N . Важно отметить, что все элементы матриц и векторов (3.5) заполняются по заранее известным аналитическим формулам.

3.5. Поле, распространяющееся с границы слоя в приёмники: матрично-векторная реализация

Данный подраздел содержит описание реализации компоненты ГраницаПриёмники программного комплекса МНКВ (см. подраздел 3.1), которая вычисляет волновое поле, распространяющееся от криволинейной границы слоя в приёмники.

Рассмотрим процедуру программного комплекса МНКВ, которая переносит волновое поле с элементов дискретизированной границы \mathbb{S} в приёмники x (Рисунок 3.5).

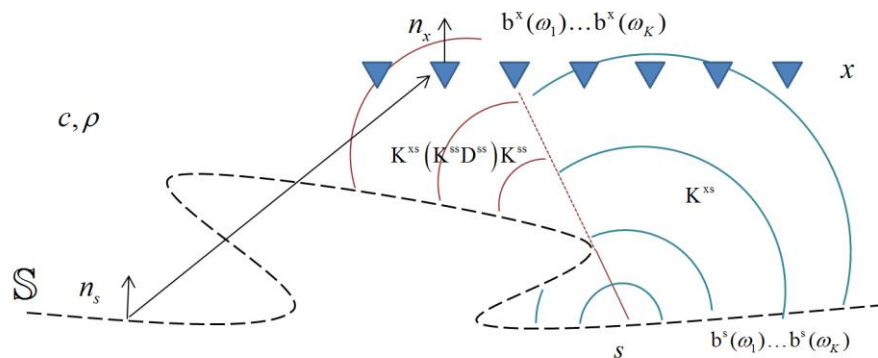


Рисунок 3.5. Процесс распространения волнового поля с границы в приёмники.

Волновое поле в приёмниках представляется программным комплексом МНКВ в виде набора векторов $b^x(\omega_1) \dots b^x(\omega_k)$. Каждый такой ω_k -ый вектор представляется в виде произведения физически реализуемой матрицы $P^{xs}(\omega_k)$ распространения волнового поля с элементов границы в приёмники и физически реализуемого вектора волнового поля $b^s(\omega_k)$ на границе \mathbb{S} , вычисленного в соответствии с волновым кодом на предыдущей итерации алгоритма МНКВ, по формуле:

$$b^x(\omega_k) = P^{xs}(\omega_k) b^s(\omega_k), \quad (3.10)$$

где матрица $P^{xs}(\omega_k)$, в соответствии с формулой (В.29), представляется в следующем виде:

$$P^{xs}(\omega_k) = \left[K^{xs} + K^{xs} \left[\sum_{i=1}^{\infty} (K^{ss} D^{ss})^i \right] K^{ss} \right] (\omega_k). \quad (3.11)$$

В формуле (3.11) сумма $\sum_{i=1}^{\infty} (K^{ss} D^{ss})^i$ описывает бесконечный ряд дифракционных поправок,

порождаемых на выпуклых и вогнутых частях границы \mathbb{S} . Матрица размерности $2N \times 2N$

$K^{ss}(\omega_k) = \begin{bmatrix} K_{ss}^{vv} & K_{ss}^{vp} \\ K_{ss}^{pv} & K_{ss}^{pp} \end{bmatrix}(\omega_k)$ представляет собой блочную матрицу распространения, действие

которой распространяет волновое поле с элементов границы \mathbb{S} на эти же элементы без учёта

каскадной дифракции. Матрица размерности $2N \times 2N$ $D^{ss}(\omega_k) = \begin{bmatrix} D_{ss}^{vv} & D_{ss}^{vp} \\ D_{ss}^{pv} & D_{ss}^{pp} \end{bmatrix}(\omega_k)$ представляет

собой блочную матрицу дифрагирования, которая учитывает существование зон геометрических теней при распространении между элементами границы \mathbb{S} . Эта матрица

одновременно распространяет два волновых поля: 1) волновое поле отдельного акта каскадной дифракции, 2) нефизическое волновое поле, которое подавляет нефизическое излучение

предыдущего акта дифракции. Матрица размерности $2M \times 2N$ (M – количество приёмников

модели) $K^{xs}(\omega_k) = \begin{bmatrix} K_{xs}^{vv} & K_{xs}^{vp} \\ K_{xs}^{pv} & K_{xs}^{pp} \end{bmatrix}(\omega_k)$ из (3.11) представляет собой матрицу, действие которой

распространяет волновое поле с элементов границы \mathbb{S} в приёмники x без учёта каскадной дифракции.

В терминах векторов «нормальная скорость частиц» и «давление» запись (3.11) представляется в следующем матричном виде:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P_{xs}^{vv} & P_{xs}^{vp} \\ P_{xs}^{pv} & P_{xs}^{pp} \end{bmatrix}(\omega_k) &= \begin{bmatrix} K_{xs}^{vv} & K_{xs}^{vp} \\ K_{xs}^{pv} & K_{xs}^{pp} \end{bmatrix}(\omega_k) + \\ &+ \begin{bmatrix} K_{xs}^{vv} & K_{xs}^{vp} \\ K_{xs}^{pv} & K_{xs}^{pp} \end{bmatrix}(\omega_k) \cdot \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left(\begin{bmatrix} K_{ss}^{vv} & K_{ss}^{vp} \\ K_{ss}^{pv} & K_{ss}^{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{ss}^{vv} & D_{ss}^{vp} \\ D_{ss}^{pv} & D_{ss}^{pp} \end{bmatrix} \right)^i \right] (\omega_k) \cdot \begin{bmatrix} K_{ss}^{vv} & K_{ss}^{vp} \\ K_{ss}^{pv} & K_{ss}^{pp} \end{bmatrix}(\omega_k), \end{aligned} \quad (3.12)$$

где матрицы $K_{xs}^{vv}(\omega_k)$, $K_{xs}^{vp}(\omega_k)$, $K_{xs}^{pv}(\omega_k)$ и $K_{xs}^{pp}(\omega_k)$, каждая размерности $M \times N$, имеет вид:

$$\begin{aligned} K_{xs}^{vv}(\omega_k) &= [\Delta_n B^{vv}(x, s, \omega_k)], & K_{xs}^{vp}(\omega_k) &= [\Delta_n B^{vp}(x, s, \omega_k)], \\ K_{xs}^{pv}(\omega_k) &= [\Delta_n B^{pv}(x, s, \omega_k)], & K_{xs}^{pp}(\omega_k) &= [\Delta_n B^{pp}(x, s, \omega_k)], \end{aligned} \quad (3.13)$$

x – координата приёмника, s – координата центральной точки элемента поверхности \mathbb{S} . Скалярные элементы матриц (3.13) вычисляются по формулам пучков концевых волн (ПКВ) (2.5)-(2.7). Скалярные элементы матриц в (3.12) заполняются в соответствии с формулами (3.8), (3.9) и (3.13).

Компонента программного комплекса МНКВ ГраницаПриёмники реализует распространение физически реализуемого волнового поля с криволинейной границы в приёмники по формуле (3.10). Реализация данной формулы сводится к многократному умножению матриц типа «граница-граница» размерности $N \times N$ на векторы размерности N , а также к многократному умножению матриц типа «граница-приёмники» размерности $M \times N$ на векторы размерности N . Важно отметить, что все элементы матриц и векторов (3.10) вычисляются по заранее известным аналитическим формулам.

3.6. Матрица распространения волнового поля внутри слоя

В данном подразделе будет рассмотрена реализация компоненты МатрицаРаспространения программного комплекса МНКВ (см. подраздел 3.1), представляющая собой перемножение набора матриц распространения крупных размерностей на набор векторов. Эта процедура является составной частью программного комплекса МНКВ и используется при вычислении физически реализуемых волновых полей, распространяющихся внутри слоёв модели (см. подразделы 3.3-3.5).

3.6.1. Реализация и оптимизация процедуры распространения волнового поля программного комплекса МНКВ

Как уже было отмечено в предыдущих подразделах, теория операторов прохождения-распространения-дифрагирования была построена в частотной области. Поэтому для получения решения все вычисления требуется проводить для каждой дискретной частоты ω_k из набора $\omega_1 \dots \omega_K$. Опишем здесь процедуру программного комплекса МНКВ (компонента МатрицаРаспространения), которая перемножает элементарную матрицу распространения P^{ω_k} размерности $N \times N$ на соответствующий вектор волнового поля a^{ω_k} для каждой частоты

ω_k из набора $\omega_1 \dots \omega_K$. Процедура получает на вход K векторов волнового поля $a^{\omega_1} \dots a^{\omega_K}$ и возвращает K преобразованных векторов $a'^{\omega_1} \dots a'^{\omega_K}$ (Рисунок 3.6).

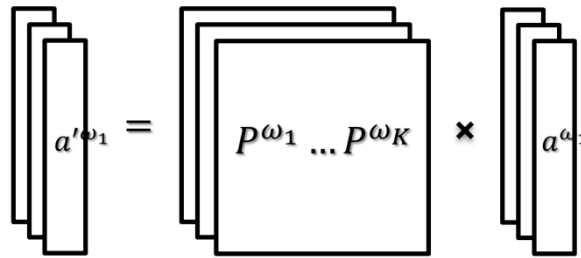


Рисунок 3.6. Общая схема преобразования векторов волнового поля программным комплексом МНКВ.

Для определённости под матрицами $P^{\omega_1} \dots P^{\omega_K}$ будем понимать матрицы распространения типа «давление – нормальная скорость частиц» $K_{s_2 s_1}^{pv}(\omega_1) \dots K_{s_2 s_1}^{pv}(\omega_K)$, скалярные элементы которых вычисляются по третьей аналитической формуле ПКВ из (3.8). Под векторами $a^{\omega_1} \dots a^{\omega_K}$ будем понимать входные векторы граничных значений типа «нормальная скорость частиц» $v^{s_1}(\omega_1) \dots v^{s_1}(\omega_K)$. А под векторами $a'^{\omega_1} \dots a'^{\omega_K}$ будем понимать выходные (преобразованные) векторы граничных значений типа «давление» $p^{s_2}(\omega_1) \dots p^{s_2}(\omega_K)$. Реализация и оптимизация перемножения остальных матриц распространения на векторы волнового поля ($K_{s_2 s_1}^{vv}(\omega_k) v^{s_1}(\omega_k)$, $K_{s_2 s_1}^{vp}(\omega_k) p^{s_1}(\omega_k)$, $K_{s_2 s_1}^{pp}(\omega_k) p^{s_1}(\omega_k)$, $k = 1 \dots K$) производятся аналогичным образом.

Пусть мы имеем в распоряжении оперативную память для хранения набора векторов $a^{\omega_1} \dots a^{\omega_K}$, каждый размерности N и блок памяти P размера $N * N * 4 * 2$ байт, в котором можно хранить одну комплексную матрицу P^{ω_k} размерности $N \times N$, используя одинарную точность. Тогда алгоритм реализации данной процедуры может выглядеть следующим образом:

```
// Цикл по номерам дискретных частот
for (k = 1...K)
{
    // Вычисляем частоту  $\omega_k$ 
     $\omega_k = k * d\omega$ ;
    // Заполняем каждый элемент блока памяти  $P$  по формуле ПКВ,
    // зависящий от частоты  $\omega_k$ . Блок  $P$  на каждой итерации
    // по частоте  $k$  повторно используется.
     $[P_{ij}] = [TWB_{ij}](\omega_k)$ ;
    // Вычисляем преобразованный вектор  $a'^{\omega_k}$ 
     $a'^{\omega_k} = P \times a^{\omega_k}$ ;
}
```

}

Для хранения результирующих векторов $a^{\omega_1} \dots a^{\omega_K}$ можно повторно использовать оперативную память, в которой хранятся векторы $a^{\omega_1} \dots a^{\omega_K}$. Но даже при такой экономии памяти для хранения одной матрицы P^{ω_k} потребуется $N * N * 4 * 2$ байт памяти. Только при $N \approx 10^5$ требуется ≈ 100 Гб оперативной памяти. Даже для современных вычислительных систем этот объём является большим.

Проблема хранения большеразмерных матриц в оперативной памяти решена в программном комплексе МНКВ с помощью разбиения исходной задачи на подзадачи и последовательного их решения. В данном случае каждая матрица P^{ω_k} разбивалась на виртуальные полосы размерности $M \times N$, где $M \leq N$ (Рисунок 3.7). Размерность M пользователь выбирает таким образом, что полосу размерности $M \times N$ есть возможность хранить в оперативной памяти вычислительной машины, которую он использует. Например, если $M \approx 10^3$, а $N \approx 10^5$, то для хранения полосы размерности $M \times N$ потребуется $10^3 \times 10^5 \times 4 \times 2 \approx 1$ Гб оперативной памяти, что уже приемлемо для современных вычислительных систем. Если пользователь не обладает подобными ресурсами, то он может принять M за 10^2 . Тогда объём требуемой памяти для хранения такой полосы составит $10^2 \times 10^5 \times 4 \times 2 \approx 100$ Мб.

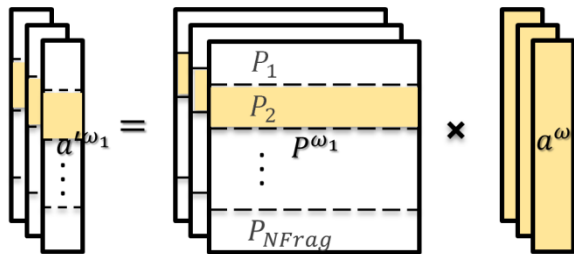


Рисунок 3.7. Схема преобразования векторов волнового поля с разбиением матриц распространения на виртуальные полосы.

Теперь задачу перемножения K матриц большой размерности на K векторов можно сформулировать следующим образом. Пусть мы имеем в распоряжении оперативную память для хранения K комплексных векторов размерности N и оперативную память для хранения прямоугольной матрицы размерности $M \times N$. Необходимо реализовать процедуру, принимающую на входе K векторов размерности N и возвращающую K преобразованных векторов размерности N путём перемножения K матриц размерности $N \times N$ на K векторов размерности N , соответственно. Выделим два алгоритма реализации подобной процедуры, которые учитывают наличие циклов по дискретным частотам и по полосам матриц. Наиболее

подходящий алгоритм для рассматриваемой процедуры будет выбран по результатам анализа количества вычислительных операций.

Алгоритм 1.

```
// Вычисляем количество полос разбиения матрицы
Nfrag = N / M ;
// Цикл по номерам дискретных частот
for ( k = 1...K )
{
    // Вычисляем частоту  $\omega_k$ 
     $\omega_k = k * d\omega$  ;
    // Цикл по полосам матрицы  $P^{\omega_k}$ 
    for ( frag = 1...Nfrag )
    {
        // Заполняем frag -ю часть матрицы  $P^{\omega_k}$ 
         $[P_{frag\_ij}] = [TWB_{ij}](\omega_k)$  ;
        // Вычисляем frag -ю часть вектора  $a^{\omega_k}$ 
         $a_{frag}^{\omega_k} = P_{frag} \times a^{\omega_k}$  ;
    }
}
```

Алгоритм 2.

```
// Вычисляем количество полос разбиения матрицы
Nfrag = N / M ;
// Цикл по полосам матрицы  $P^{\omega_k}$ 
for ( frag = 1...Nfrag )
{
    // Цикл по номерам дискретных частот
    for ( k = 1...K )
    {
        // Вычисляем частоту  $\omega_k$ 
         $\omega_k = k * d\omega$  ;
        // Заполняем frag -ю часть матрицы  $P^{\omega_k}$ 
         $[P_{frag\_ij}] = [TWB_{ij}](\omega_k)$  ;
        // Вычисляем frag -ю часть вектора  $a^{\omega_k}$ 
         $a_{frag}^{\omega_k} = P_{frag} \times a^{\omega_k}$  ;
    }
}
```

В описанных выше *Алгоритме 1* и *Алгоритме 2* на каждой итерации внутреннего цикла используется полоса памяти размером $M \times N$ для хранения части матрицы P^{ω_k} , зависящей от частоты ω_k . В случае численного задания скалярных элементов матрицы P^{ω_k} время исполнения *Алгоритма 1* и *Алгоритма 2* будет одинаковым: на каждой итерации цикла происходит

заполнения полосы памяти P_{frag} размерности $M \times N$ и умножение её на вектор волнового поля a^{ω_k} размерности N . Однако обратим внимание, что формулы для всех четырёх ПКВ из (2.5), по которым вычисляются скалярные элементы матрицы P^{ω_k} , заданы в элементарных функциях. Поэтому реализацию процедуры можно организовать таким образом, что *Алгоритм 2* окажется эффективнее *Алгоритма 1*.

Рассмотрим структуру аналитических формул на примере формулы ПКВ типа «давление – нормальная скорость частиц» $\Delta_n B^{pv}(\mathbf{s}_{mn}^j, \mathbf{s}_{mn}^l, \omega)$ из формулы (2.5):

$$TWB_{ij}(\omega_k) = -i \frac{\omega_k \rho \Delta S}{4\pi |s_j - s_i|} e^{i \frac{\omega_k}{v_{pm}} |s_j - s_i|}. \quad (3.14)$$

Формула (3.14) содержит в себе тяжёлые, с вычислительной точки зрения, операции вычисления экспонент. Введём частотно независимые выражения:

$$Amp_{ij} = -i \frac{\omega_k \rho \Delta S}{4\pi |s_j - s_i|}, \quad Pha_{ij} = e^{i \frac{d\omega}{v_{pm}} |s_j - s_i|}, \quad (3.15)$$

где $d\omega = \frac{\omega_k - \omega_1}{K-1}$ – шаг разбиения частотного отрезка $[\omega_1; \omega_k]$, являющийся константой.

Нетрудно заметить, что формулу (3.14), используя выражения из (3.15), можно представить в виде:

$$TWB_{ij}(\omega_k) = Amp_{ij} * k * Pha_{ij}^k, \quad (3.16)$$

где $k \in [1; K]$ – целочисленный порядковый номер дискретной частоты $\omega_k = k d\omega$. Из формулы (3.16) следует её матричное рекуррентное выражение:

$$\begin{aligned} [TWB_{ij}](\omega_1) &= [Amp_{ij}] \cdot [Pha_{ij}], \\ [TWB_{ij}](\omega_k) &= [TWB_{ij}](\omega_{k-1}) \cdot [Pha_{ij}] \frac{k}{k-1}, \quad k \in [2; K], \end{aligned} \quad (3.17)$$

где за знак « \cdot » принята операция поэлементного умножения двух матриц одинаковых размерностей. Первая формула из (3.17) вычисляет все скалярные элементы первой матрицы P^{ω_1} по формуле (3.14) для случая $k=1$. Вторая формула из (3.17) заменяет тяжёлые, с вычислительной точки зрения, операции вычисления экспонент (см. формулу (3.14)) ПКВ для

всех скалярных элементов матриц $P^{\omega_2} \dots P^{\omega_k}$ на операцию поэлементного умножения двух матриц одинаковой размерности. Таким образом, используя *Алгоритм 2*, для каждой *frag*-ой части матрицы P^{ω_k} , перед циклом по частотам можно заполнить массив P_{frag} значениями Amp_{ij} по первой формуле из (3.15) и, предварительно заведя дополнительный массив Pha размерности $M \times N$, заполнить его значениями Pha_{ij} по второй формуле из (3.15). Используя формулу (3.17) в цикле по частотам, можно вычислить значения элементов массива P_{frag} для каждой следующей k -ой (начиная со 2-ой) частоты по формуле:

$$[P_{frag_ij}] = [P_{frag_ij}] \cdot [Pha_{ij}] * \frac{k}{k-1} .$$

Далее приведён *Модифицированный алгоритм 2*.

Модифицированный алгоритм 2.

// Вычисляем количество полос разбиения матрицы

$NFrag = N / M ;$

// Цикл по полосам матрицы P^{ω_k}

for ($frag = 1 \dots NFrag$)

{

// Заполняем матрицы $[P_{frag_ij}] = [Amp_{ij}]$ и $[Pha_{ij}]$ по формулам (3.15)

$[P_{frag_ij}] = [Amp_{ij}]$ из (3.15);

$[Pha_{ij}] = [Pha_{ij}]$ из (3.15);

// Заполняем полосу P_{frag} в соответствии с номером частоты $k = 1$

$[P_{frag_ij}] = [P_{frag_ij}] \cdot [Pha_{ij}] ;$

// Вычисляем *frag*-ю часть вектора a^{ω_1}

$a_{frag}^{\omega_1} = P_{frag} \times a^{\omega_1} ;$

// Цикл по номерам дискретных частот

for ($k = 2 \dots K$)

{

// Вычисляем частоту ω_k

$\omega_k = k * d\omega ;$

// Перезаполняем полосу P_{frag} в соответствии с номером частоты k

$[P_{frag_ij}] = [P_{frag_ij}] \cdot [Pha_{ij}] * \frac{k}{k-1} ;$

// Вычисляем *frag*-ю часть вектора a^{ω_k}

$a_{frag}^{\omega_k} = P_{frag} \times a^{\omega_k} ;$

}

}

Алгоритм 1, *Алгоритм 2* и *Модифицированный алгоритм 2* были протестированы на 1 ядре процессора Intel(R) Xeon(R) CPU E5630 @2.53GHz для случая $N=112000$ элементов дискретизированной границы, ширины полос разбиения матриц $M=512$ элементов и $K=128$ дискретных частот. Время исполнения *Алгоритма 1* и *Алгоритма 2* составило примерно 27 часов. Время исполнения *Модифицированного алгоритма 2* составило примерно 16 часов. Ускорение в 1.7 раз при однопроцессорном исполнении получено только за счёт изменения алгоритма реализации процедуры перемножения K матриц на K векторов. Это оказалось возможным за счёт двух факторов: 1) мультипликативная структура формулы ПКВ типа «давление – нормальная скорость частиц», 2) использование двух дополнительных массивов памяти размерности $M \times N$, размер которых контролируется путём изменения числа M в меньшую или большую сторону. В следующем подразделе будет описан алгоритм адаптации процедуры *Модифицированный алгоритм 2* для параллельных архитектур и GPU-кластера.

3.6.2. Адаптация процедуры распространения волнового поля программного комплекса МНКВ для параллельных архитектур и GPU-кластера

В этом подразделе будут описаны алгоритмы адаптации процедуры перемножения матриц распространения $P^{\omega_1} \dots P^{\omega_K}$ на набор векторов волнового поля $a^{\omega_1} \dots a^{\omega_K}$ для параллельных архитектур и, в частности, для GPU-кластера.

Как было описано в подразделе 3.2, вычисление волновых полей с помощью алгоритма МНКВ сводится к многократным матрично-векторным произведениям. Как известно, эти операции наиболее удобны для переключивания на параллельные архитектуры. Заметим, что *Модифицированный алгоритм 2*, полученный в подразделе 3.6.1, допускает два уровня распараллеливания:

- 1) Возможность обработки полос матрицы в параллельном режиме – каждой полосе назначается одно вычислительное устройство.
- 2) Возможность параллельного заполнения элементов полосы матрицы по формулам ПКВ и параллельного умножения матрицы на вектор – полосы обрабатываются последовательно, каждой полосе назначается несколько вычислительных устройств.

Автором были проведены тесты для случая распараллеливания процедуры перемножения матриц распространения на векторы волнового поля в соответствии с уровнем 2 на 8 ядрах процессора Intel(R) Xeon(R) CPU E5630 @2.53GHz. В тестах использованы параметр дискретизации границы $N=112000$, размер полос матриц $M=512$ и количество дискретных частот $K=128$. Заметим, что только при однократном вызове процедуры с такими параметрами,

машине приходится обрабатывать $N * N * 4 * 2 * K \approx 12$ Тб данных. В результате удалось ускорить процедуру в 8 раз – время её исполнения сократилось с 16 часов на одноядерной машине до 2 часов на восьмиядерной. Такое линейное увеличение производительности связано с поддающимися эффективно распараллеливанию большими данными, которые обрабатывает процедура и относительно небольшим числом ядер процессора, используемые для тестирования её параллельной версии.

Всё большей популярностью на сегодняшний день пользуются графические процессоры (GPU) для параллельной обработки больших данных. Особенность архитектуры GPU состоит в том, что, в отличие от центрального процессора (CPU), он может содержать сотни вычислительных блоков, способных в параллельном режиме решать небольшие задачи (Рисунок 3.8). Исторически GPU предназначался для обработки 3D-графики, когда необходимо одновременно производить несложные операции над большим количеством треугольников, на которые разбита 3D-сцена (поворот, параллельный перенос и т.д.). Такая работа под силу и центральному процессору, но GPU со своей массивно-параллельной архитектурой делает это намного эффективнее. В 2007 году компания Nvidia представила свою программно-аппаратную архитектуру параллельных вычислений CUDA (Compute Unified Device Architecture). Эта архитектура изначально являлась надстройкой над языком C и позволяет программистам реализовывать их алгоритмы с передачей управления исполнению программы графическому процессору. Если алгоритм имеет высокую степень параллелизма, то есть, существует возможность разбить алгоритм на большое количество небольших подзадач, которые можно исполнить параллельно, то использование GPU позволит существенно увеличить производительность программы.

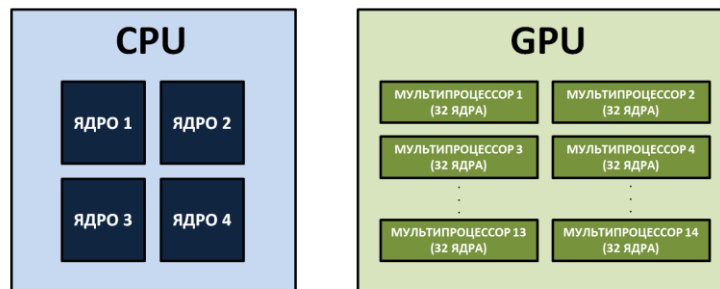


Рисунок 3.8. Схематичное сравнение архитектуры CPU и GPU.

Для задачи параллельного умножения набора крупных матриц на набор векторов можно было бы исполнить в параллельном режиме заполнение матриц по формулам ПКВ (каждый GPU-поток (нить) заполнял бы соответствующий элемент матрицы), и затем параллельно

умножать матрицу на вектор. Для последней процедуры в CUDA имеется специальная высокооптимизированная библиотека линейной алгебры для GPU cuBLAS.

Для реализации заполнения матрицы в параллельном режиме на GPU автором была реализована функция (ядро), при вызове которой исполнение программы передавалось графическому процессору, создавалось столько нитей, сколько элементов содержит матрица, каждая из которых заполняла соответствующий элемент матрицы по формуле ПКВ в параллельном режиме (Листинг 3.1).

Листинг 3.1. Ядро, заполняющее в параллельном режиме элементы матрицы распространения, для дискретной частоты ω_1 .

```
__global__ void PropagationMatrixPart_kernel(int lnum, int istrnsm, Triangle *tr_g,
      int N, int M, float *v_g, float *rho_g, cuComplex *P_g, cuComplex *PhaP_g)
{
    int i = threadIdx.y + blockIdx.y * blockDim.y;
    int j = threadIdx.x + blockIdx.x * blockDim.x;

    if (i < M && j < N)
    {
        // заполняем мнимую и действительную часть матрицы P_g
        P_g[i + M * j].x = TWB_amp_x;
        P_g[i + M * j].y = TWB_amp_y;

        // заполняем мнимую и действительную часть матрицы PhaP_g
        PhaP_g[i + M * j].x = TWB_pha_x;
        PhaP_g[i + M * j].y = TWB_pha_y;

        // поэлементно умножаем матрицу P_g на PhaP_g и сохраняем в P_g
        // в P_g будет храниться теперь формула TWB для частоты с номером 1
        P_g[i + M * j].x = -P_g[i + M * j].y * PhaP_g[i + M * j].y;
        P_g[i + M * j].y = P_g[i + M * j].y * PhaP_g[i + M * j].x;
    }
}
```

В Листинге 3.1 переменные M и N хранят размерность полос матриц, переменная tr_g содержит адрес массива треугольных элементов, на которые разбита граница, для которой исполняется процедура. TWB_amp_x , TWB_amp_y , TWB_pha_x , TWB_pha_y – формулы ПКВ, по которым происходят преобразования. Данное ядро реализует заполнение полосы P_g матрицы распространения для первой частоты ω_1 . В следующем Листинге 3.2 показано ядро, реализующее перезаполнение матрицы P_g для последующих частот по формуле (3.17), полученной в подразделе 3.6.1.

Листинг 3.2. Ядро, заполняющее в параллельном режиме элементы матрицы распространения, для дискретной частоты ω_k , $k = 2 \dots K$.

```
__global__ void PropagationMatrixPart_JF_kernel(cuComplex *P_g, cuComplex *PhaP_g,
      float JF, int N, int M)
```

```

{
    int j = threadIdx.x + blockIdx.x * blockDim.x;

    float a, b, c, d;
    while (j < M * N)
    {
        a = P_g[j].x;
        b = P_g[j].y;
        c = PhaP_g[j].x;
        d = PhaP_g[j].y;

        // поэлементно умножаем матрицу P_g на PhaP_g и константу JF/(JF-1)
        // и сохраняем в P_g
        P_g[j].x = (a * c - b * d) * JF / (JF - 1);
        P_g[j].y = (a * d + c * b) * JF / (JF - 1);

        j += blockDim.x * gridDim.x;
    }
}

```

Здесь переменная JF выступает в роли номера k дискретной частоты, $k = 2 \dots K$.

Для перемножения матрицы на вектор была использована высокооптимизированная функция `cublasCgemv` из библиотеки `cuBLAS` (NVIDIA CUDA Basic Linear Algebra Subroutines), реализующая умножение матрицы на вектор в параллельном режиме с использованием GPU:

```

cublasCgemv(handle, CUBLAS_OP_N, M, N, &alpha, P_g, M, u_g, 1, &beta, y_g + k*M11, 1);

```

Здесь, полоса P_g размерности $M \times N$ умножается на вектор волнового поля u_g размерности N на GPU. Результат перемножения (блок памяти размерности M) сохраняется в вектор y_g размерности N по адресу $y_g + k*M11$, где k в программе – номер обрабатываемой полосы матрицы распространения.

На Рисунке 3.9 показан результат профилирования описанной процедуры, реализованной на GPU.

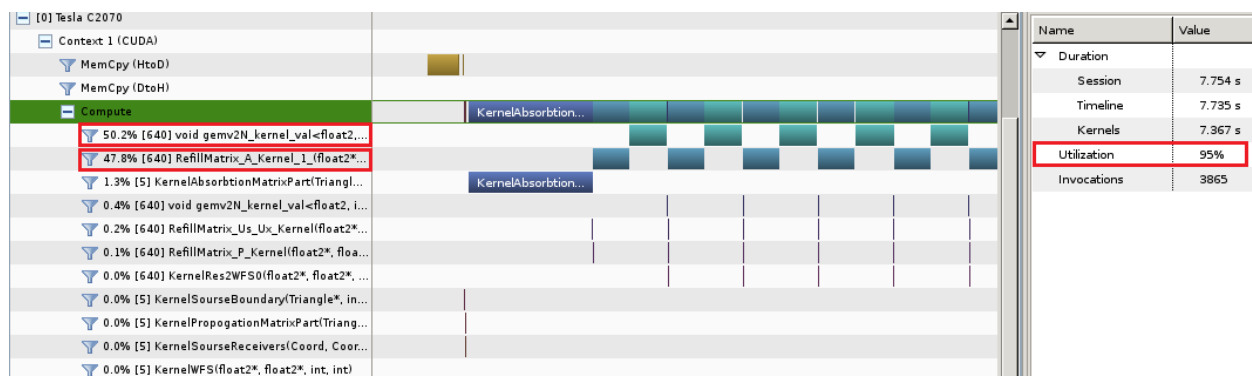


Рисунок 3.9. Профилирование процедуры *Модифицированный алгоритм 2*, реализованной на GPU.

Из рисунка видно, что ядро, реализующее повторное заполнение матриц, составляет 48% времени работы всего алгоритма, а ядро, реализующее умножение матрицы на вектор – 50%. Также из рисунка видно, что загруженность графических процессоров составляет 95%, что говорит о высокой эффективности использования GPU алгоритмом. Это связано с отсутствием передачи данных между GPU и CPU во время работы алгоритма: перед запуском программы все данные копируются в память GPU, затем после вычислений результат копируется обратно на CPU. При $N=112000$ и $K=128$ время исполнения процедуры перемножения K матриц размерности $N \times N$ на K векторов размерности N на видеокарте NVIDIA Tesla C2070 составило 10 минут, что почти в 162 раза быстрее времени работы первоначальной версии последовательной процедуры.

Далее опишем алгоритм реализации данной процедуры для GPU-кластера. При реализации процедуры на GPU, как и в случае с многоядерным процессором, использовался лишь второй уровень распараллеливания, описанный в начале подраздела: повторное заполнение и умножение матриц на GPU происходит в параллельном режиме, но не использовался первый уровень распараллеливания – алгоритм по-прежнему обрабатывает последовательно полосы матрицы. Для того чтобы максимально воспользоваться высокой степенью параллелизма процедуры была произведена её реализация с использованием GPU-кластера. Под GPU-кластером понимается набор GPUs, способные производить вычисления одновременно и связанные между собой с целью обмена данными. Теперь каждый GPU может заниматься обработкой назначенных ему полос матрицы распространения. На Рисунке 3.10 показана схема реализации процедуры перемножения K матриц распространения на K векторов волнового поля для GPU-кластера.

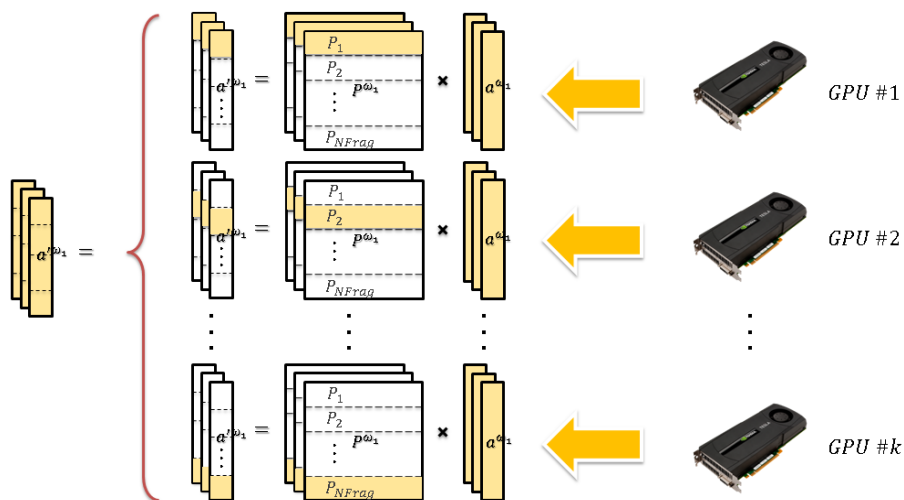


Рисунок 3.10. Схема реализации процедуры Модифицированный алгоритм 2 для GPUs.

Каждый GPU вычисляет K частей результирующих векторов. Затем все GPUs обмениваются друг с другом посчитанными результатами и формируют K преобразованных процедурой векторов волнового поля. На Рисунке 3.11 показан график зависимости производительности программы от числа задействованных GPUs в сравнении с идеальным случаем (линейная масштабируемость).

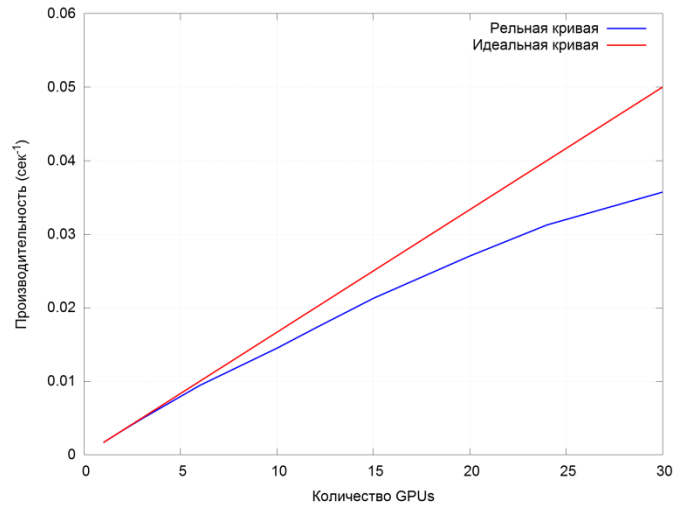


Рисунок 3.11. График масштабируемости процедуры *Модифицированный алгоритм 2* при её реализации для GPU-кластера.

В Таблице 3.1 показано время исполнения процедуры (реальный и идеальный случаи) в зависимости от числа задействованных GPUs для случая перемножения K матриц распространения размерности $N \times N$ на K векторов волнового поля размерности N , где $N = 112000$ и $K = 128$.

Таблица 3.1. Анализ масштабируемости процедуры *Модифицированный алгоритм 2*.

Количество задействованных GPU	Время работы программы (сек)	Ожидаемое время работы программы в идеальном случае (сек)
1	600.00	600.00
2	302.00	300.00
3	204.00	200.00
6	106.00	100.00
10	69.00	60.00
12	58.00	50.00
15	47.00	40.00

20	37.00	30.00
24	32.00	25.00
30	28.00	20.00

Отличие реального времени счёта от идеала возникает в результате того, что после вычисления каждым GPU назначенных ему K частей векторов волнового поля (Рисунок 3.10), видеокарты должны обмениваться друг с другом посчитанными результатами. Это необходимо, поскольку в памяти каждого GPU должен быть собран результирующий набор векторов волнового поля размерности N . Обмен данными между GPUs порождают временные издержки, но, тем не менее, видно, что при использовании 30 GPUs время исполнения процедуры стало составлять 28 секунд, вместо 27 часов первоначальной последовательной версии. Получено ускорение процедуры в 3471 раз. Важное свойство алгоритма состоит в том, что оно способно захватить любое доступное количество GPUs меньше числа N – количества треугольников дискретизованной границы. Как уже было сказано, в алгоритме МНКВ число N имеет порядок $10^5 - 10^6$. Это значит, что приложение способно максимально и эффективно (ввиду достаточно высокой масштабируемости) использовать доступные ресурсы GPU-кластера.

3.7. Матрица дифрагирования волнового поля границы слоя

Данный подраздел представляет собой краткое описание реализации компоненты Матрица Дифракции программного комплекса МНКВ (см. подраздел 3.1). Эта процедура является составной частью программного комплекса МНКВ и используется при вычислении физически реализуемых волновых полей, распространяющихся внутри слоёв модели (см. подразделы 3.3-3.5).

Матрица дифрагирования волнового поля $D^{ss} = \begin{bmatrix} D_{ss}^{vv} & D_{ss}^{vp} \\ D_{ss}^{pv} & D_{ss}^{pp} \end{bmatrix}$ из (2.9) используется при

расчёте дифракционных поправок, которые порождаются на выпуклых частях криволинейной границы слоя. Действие такой матрицы на вектор волнового поля граничных значений вычисляет одновременно два волновых поля: 1) волновое поле отдельного акта каскадной дифракции, 2) нефизическое волновое поле, которое подавляет нефизическое излучение предыдущего акта дифракции. Данная матрица состоит из четырёх подматриц. Каждая такая подматрица имеет размерность $N \times N$, где N – число треугольников, на которые разбивается граница, и вычисляется посредством поэлементного произведения соответствующей матрицы

распространения (реализация описана в подразделе 3.6) и матрицы виртуальной тени (реализация будет описана в подразделе 3.8), в соответствии с формулой (2.10):

$$\mathbf{D}^{s_2 s_1}(\omega_k) = \begin{bmatrix} H_{s_2 s_1} \cdot K_{s_2 s_1}^{vv}(\omega_k) & H_{s_2 s_1} \cdot K_{s_2 s_1}^{vp}(\omega_k) \\ H_{s_2 s_1} \cdot K_{s_2 s_1}^{pv}(\omega_k) & H_{s_2 s_1} \cdot K_{s_2 s_1}^{pp}(\omega_k) \end{bmatrix}, \quad k \in [1; K].$$

Определение, реализация и оптимизация вычисления матрицы виртуальной тени для границы слоя описано в следующем подразделе.

3.8. Матрица виртуальной тени границы слоя

В данном подразделе описаны принципы построения и оптимизации матрицы виртуальной тени для границы слоя, а также её тестирование. Результаты исследований, описанные в данном подразделе, реализованы в компоненте МатрицаТени программного комплекса МНКВ (см. подраздел 3.1). Матрица виртуальной тени позволяет геометрически определять освещённые и затенённые относительно друг друга элементы криволинейной дискретизированной границы слоя. Как было описано в подразделе 3.7, матрица виртуальной тени используется при вычислении матрицы дифрагирования.

3.8.1. Определение и алгоритм вычисления матрицы виртуальной тени

Рассмотрим Рисунок 3.12, на котором изображена однородная область \mathbb{D} в форме безграничного полупространства, ограниченного криволинейной границей \mathbb{S} и бесконечно удаленной сферической поверхностью $\mathbb{S}^{+\infty}$. Для границы \mathbb{S} определим двумерную функцию виртуальной тени $h(s, s')$ следующей формулой:

$$h(s, s') = \begin{cases} 0, & \mathbb{L}(s, s') \cap \mathbb{S} = \emptyset, \\ 1, & \mathbb{L}(s, s') \cap \mathbb{S} \neq \emptyset. \end{cases} \quad (3.18)$$

Здесь, $\mathbb{L}(s, s')$ – отрезок, который соединяет две внутренние точки s и s' , предельные к границе \mathbb{S} . Если полагать отрезок $\mathbb{L}(s, s')$ оптическим лучом, то формуле (3.18) можно придать следующую «оптическую» интерпретацию. Если из точки s «оптически видна» точка s' , то отрезок $\mathbb{L}(s, s')$ лежит полностью в области \mathbb{D} . Тогда отрезок $\mathbb{L}(s, s')$ будем считать физически

реализуемым лучом и $h(s, s') = 0$. Если из точки s «оптически не видна» точка s' , то отрезок $\mathbb{L}(s, s')$ лежит не полностью в области \mathbb{D} . Тогда отрезок $\mathbb{L}(s, s')$ будем считать физически нереализуемым лучом и $h(s, s') = 1$. Описанная интерпретация соответствует Рисунку 3.12.

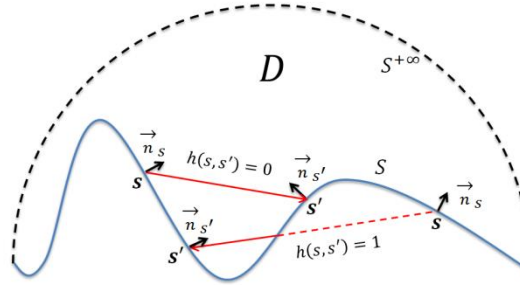


Рисунок 3.12. Определение функции виртуальной тени для криволинейной границы: «оптической видимости» точки s' точкой s и «оптической невидимости» точки s' точкой s .

Используя описанную функцию, можно определять так называемые освещённые и затенённые зоны на границе для вычисления каскадной дифракции внутри заданного полупространства.

Если границу \mathbb{S} дискретизировать на N треугольников, то функцию $h(s, s')$ можно представить в виде квадратной матрицы $[H_{kq}]$ размерности $N \times N$. Отметим основные свойства матрицы виртуальной тени $[H_{kq}]$. Во-первых, матрица $[H_{kq}]$ – симметричная относительно главной диагонали, что следует из определения функции виртуальной тени (3.18). Так как транспонирование симметричной матрицы не меняет ее, то выполняется равенство

$$H_{kq} = H_{qk} \quad (3.19)$$

для любого номера столбца k и строки q . Симметрия матрицы виртуальной тени $[H_{kq}]$ позволяет вычислять лишь её верхне-треугольную часть, а ее нижне-треугольную часть получать из вычисленной верхне-треугольной по формуле (3.19). Отметим, что матрица $[H_{kq}]$ заполняется только нулями и единицами.

Рассмотрим возможные ситуации при вычислении отдельного элемента матрицы виртуальной тени $[H_{kq}]$. Выделим пару произвольных малых треугольных элементов ΔS_k и ΔS_q . Эта пара соответствует элементу матрицы H_{kq} с двойным индексом kq . Пусть на

элементе границы ΔS_k задана внутренняя нормаль \vec{n}_k и на элементе границы ΔS_q задана внутренняя нормаль \vec{n}_q . Соединим центр s_k элемента границы ΔS_k и центр s_q элемента границы ΔS_q отрезком $\mathbb{L}(s_k, s_q)$. Для пары элементов границы ΔS_k и ΔS_q в зависимости от расположения их нормалей относительно луча, соединяющего центральные точки элементов, существуют четыре различные ситуации:

- 1) если углы между обоими нормальями \vec{n}_k и \vec{n}_q и отрезком $\mathbb{L}(s_k, s_q)$ являются тупыми, то элементы ΔS_k и ΔS_q «не видят» друг друга и скалярный элемент матрицы виртуальной тени $H_{kq} = 1$ (Рисунок 3.13а);
- 2) если угол между нормалью \vec{n}_k и отрезком $\mathbb{L}(s_k, s_q)$ является тупым, а между другой нормалью \vec{n}_q и отрезком $\mathbb{L}(s_k, s_q)$ является острым, то элементы ΔS_k и ΔS_q «не видят» друг друга и скалярный элемент матрицы виртуальной тени $H_{kq} = 1$ (Рисунок 3.13б);
- 3) если угол между нормалью \vec{n}_k и отрезком $\mathbb{L}(s_k, s_q)$ является острым, а между другой нормалью \vec{n}_q и отрезком $\mathbb{L}(s_k, s_q)$ является тупым, то элементы ΔS_k и ΔS_q «не видят» друг друга и скалярный элемент матрицы виртуальной тени $H_{kq} = 1$ (Рисунок 3.13с);

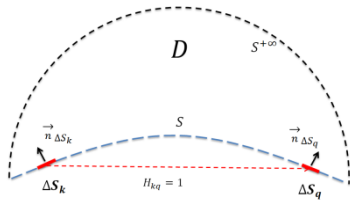


Рисунок 3.13а. Элементы ΔS_k и ΔS_q «не видят» друг друга.

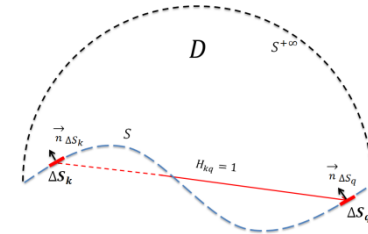


Рисунок 3.13б. Элементы ΔS_k и ΔS_q «не видят» друг друга.

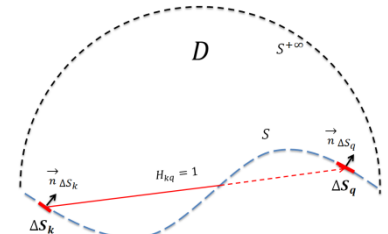


Рисунок 3.13с. Элементы ΔS_k и ΔS_q «не видят» друг друга.

- 4) если углы между обоими нормальями \vec{n}_k и \vec{n}_q и отрезком $\mathbb{L}(s_k, s_q)$ являются острыми, то элементы ΔS_k и ΔS_q могут как «видеть», так и «не видеть» друг друга, а значение скалярного элемента матрицы виртуальной тени H_{kq} зависит от того, есть пересечение отрезка $\mathbb{L}(s_k, s_q)$ с хотя бы одним третьим элементом границы ΔS_n или нет такого пересечения.

Поэтому в ситуации 4) возможны два варианта:

- 4а) если отрезок $\mathbb{L}(s_k, s_q)$ между элементами ΔS_k и ΔS_q пересекает какой-то промежуточный элемент ΔS_n , то элементы границы «не видят» друг друга и скалярный элемент матрицы виртуальной тени $H_{kq} = 1$ (Рисунок 3.13д);
- 4б) если отрезок $\mathbb{L}(s_k, s_q)$ между элементами ΔS_k и ΔS_q не пересекает ни один промежуточный элемент ΔS_n , то элементы границы «видят» друг друга и скалярный элемент матрицы виртуальной тени $H_{kq} = 0$ (Рисунок 3.13е).

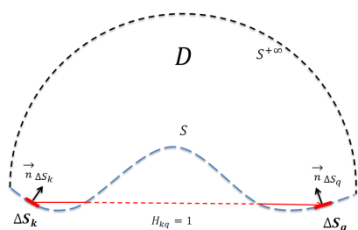


Рисунок 3.13д. Элементы ΔS_k и

ΔS_q «не видят» друг друга.

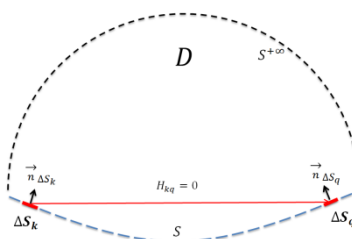


Рисунок 3.13е. Элементы ΔS_k

и ΔS_q «видят» друг друга.

Используя приведенный выше логический анализ, опишем возможный алгоритм вычисления матрицы тени:

// Изначально массив $[H_{kq}]$ должен быть заполнен нулями, т.е.

$$H_{kq} = 0, \quad k, q \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

// Двойной цикл по элементам границы (заполняем только верхне-треугольную часть матрицы;

// нижне-треугольную часть получаем из верхне-треугольной из условия симметрии матрицы).

Цикл $k = 1, 2, \dots, N$

{

Цикл $q = 1, 2, \dots, N$

{

1. Вычислить вектор $\mathbb{L}(s_k, s_q)$;

2. Вычислить косинус угла $\cos(\vec{n}_k, \vec{\mathbb{L}})$ между нормалью элемента ΔS_k и вектором $\mathbb{L}(s_k, s_q)$;

3. Вычислить косинус угла $\cos(\vec{n}_q, -\vec{\mathbb{L}})$ между нормалью элемента ΔS_q и вектором $-\mathbb{L}(s_k, s_q)$;

Если $\cos(\vec{n}_k, \vec{\mathbb{L}}) < 0$ или $\cos(\vec{n}_q, -\vec{\mathbb{L}}) < 0$

```

{
    1.  $H_{kq} = 1$ ;
    2. Перейти к выполнению новой итерации цикла по  $q$ .
}
Иначе
{
    // Новый цикл по элементам границы, с целью определить пересекает
    // ли вектор  $\mathbb{L}(s_k, s_q)$  границу хотя бы в одной точке. Если пересекает,
    // то элемент с номером  $k$  «не видит» элемент с номером  $q$  и  $H_{kq} = 1$ ,
    // иначе  $k$  «видит»  $q$  и  $H_{kq} = 0$ .
    Цикл  $n = 1, 2, \dots, N$ 
    {
        1. Находим точку пересечения  $O$  вектора  $\mathbb{L}(s_k, s_q)$  с
        плоскостью, которую образует элемент границы с
        номером  $n$ ;
        2. Определяем, принадлежит ли точка  $O$  элементу с
        номером  $n$ . Если да, то найдена точка пересечения
        вектора  $\mathbb{L}(s_k, s_q)$  с границей, элемент с номером  $k$  «не
        видит» элемент с номером  $q$  и  $H_{kq} = 1$ . Переход к
        выполнению новой итерации цикла по  $q$ .
    }
}
}
}
}

```

Отметим основные проблемы реализации приведённого алгоритма.

- Матрица виртуальной тени имеет размерность $N \times N$, где N – количество треугольных элементов границы. Например, объём необходимой памяти для хранения одной такой матрицы для одной границы слоистой среды при $N = 100\,000$ составляет $100\,000 \times 100\,000 = 9.3$ Гб, а при $N = 150\,000$ – уже 21 Гб, что неприемлемо много.
- Из алгоритма, приведённого выше, видно, что его трудоёмкость составляет $O(N^3)$, что при больших размерностях матрицы виртуальной тени также неприемлемо.

Для нормальной работы алгоритма необходима оптимизация вычисления матрицы виртуальной тени как по производительности, так и по требуемой памяти.

3.8.2. Оптимизация хранения матрицы виртуальной тени

При реализации алгоритма МНКВ оптимальным подходом является заполнение всех матриц виртуальных теней для каждой границы среды до запуска основного алгоритма и хранение их в сжатом состоянии, поскольку одна такая матрица зависит только от формы границы – контакта двух сред. Также было бы идеальным хранить матрицу виртуальной тени для данной границы в виде набора сжатых по определённому алгоритму полос, на которые бы разрезалась матрица. Это необходимо для удобства использования матрица тени в алгоритме МНКВ, поскольку, как было показано в подразделе 3.6, технология реализации МНКВ построена на разрезании всех матриц алгоритма на полосы и последовательной их обработке.

Так как матрица виртуальной тени симметричная, то запускать алгоритм для заполнения её нижне-треугольной части не оптимально. Выгодно нижне-треугольную часть заполнять из вычисленной ранее верхне-треугольной. Но поскольку алгоритм выделяет память только для одной полосы матрицы и после её заполнения эта полоса будет сжиматься и храниться в сжатом состоянии, то возникает проблема выбора способа заполнения части полосы, принадлежащей нижнему треугольнику матрицы (Рисунок 3.14). Для оптимального выбора необходимо знать информацию о столбцах всех полос, заполненных на предыдущих итерациях, которые хранятся в сжатом состоянии.

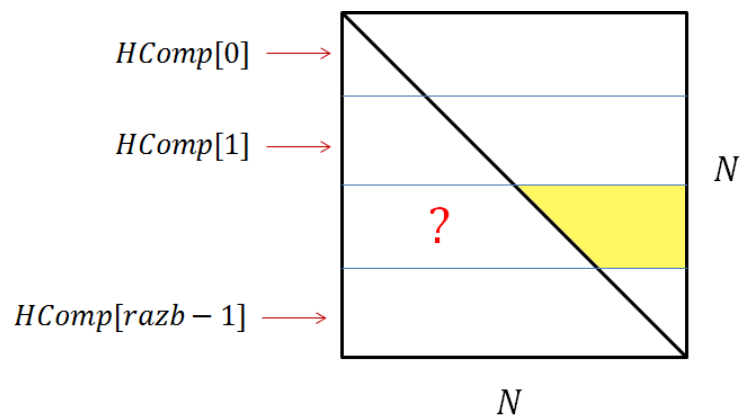


Рисунок 3.14. Проблема, возникающая при заполнении матрицы тени, в случае её хранения в виде набора сжатых полос.

Поэтому, чтобы заполнить часть полосы из нижнего треугольника матрицы, необходимо разжимать все полосы, заполненные на предыдущих шагах и извлекать из них соответствующие столбцы. Из рассуждений нетрудно понять, что этот подход не оптимален.

Было решено разрезать матрицу виртуальной тени на полосы, а каждую полосу на квадраты (Рисунок 3.15). Все квадраты, принадлежащие верхнему треугольнику матрицы, заполняются по алгоритму расчёта матрицы виртуальной тени, который приведён выше, а все

квадраты, принадлежащие нижнему треугольнику матрицы, заполняются путём транспонирования соответствующих квадратов из верхнего треугольника.

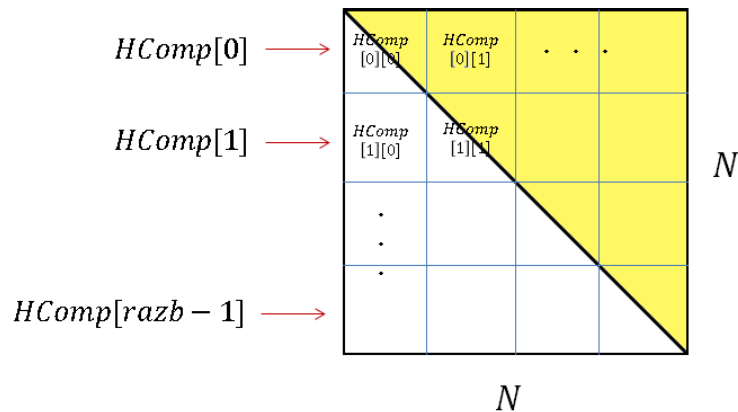


Рисунок 3.15. Алгоритм хранения матрицы тени.

Далее приведён модифицированный алгоритм расчёта и хранения матрицы виртуальной тени.

// Цикл по квадратным подматрицам из верхне-треугольной части матрицы тени

Цикл ($i = 1, 2, \dots, razb$)

{

Цикл ($j = i, i + 1, \dots, razb$)

 {

 // Если квадратная подматрица диагональная.

Если ($i = j$)

 {

1. Заполнить верхне-треугольную часть квадратной подматрицы по алгоритму расчёта матрицы тени;
2. Получить нижне-треугольную часть квадратной подматрицы из верхне-треугольной, используя свойство симметричности матрицы тени;
3. Сжать заполненную квадратную подматрицу и добавить в полосу i (Рисунок 3.16, слева).

 }

иначе

 {

1. Заполнить квадратную подматрицу (i, j) по алгоритму расчёта матрицы тени;
2. Заполнить квадратную подматрицу (j, i) путём транспонирования подматрицы (i, j);
3. Сжать заполненные подматрицы и добавить в полосы i и j соответственно (Рисунок 3.16, справа).

 }

 }

}

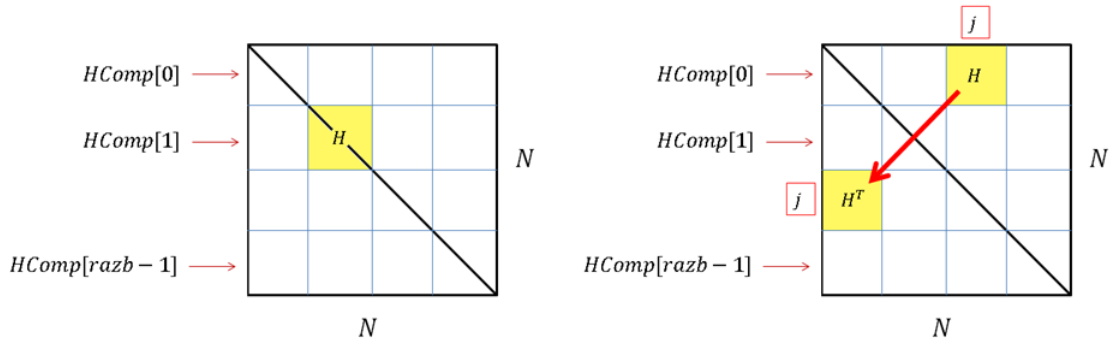


Рисунок 3.16. Алгоритм заполнения матрицы виртуальной тени. Слева: случай диагональной подматрицы, справа: случай не диагональной подматрицы.

Сжатие подматриц выполнялось в следующем виде. Считалось количество нулей матрицы, идущих подряд до первой единицы, и это количество сохранялось в виде целого числа. Затем считалось количество подряд идущих единиц до первого нуля и сохранялось в виде целого числа (Рисунок 3.17). Далее процесс повторялся.

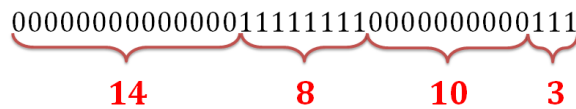


Рисунок 3.17. Алгоритм сжатия матрицы виртуальной тени.

Этот алгоритм сжатия является вариацией известного алгоритма Run-length encoding (RLE) [53]. Таким способом удалось достигнуть сжатия матрицы виртуальной тени более чем в 100 раз.

3.8.3. Оптимизация вычисления матрицы виртуальной тени

Обратимся к алгоритму вычисления матрицы виртуальной тени, описанному в подразделе 3.8.1. Трудоёмкость данного алгоритма, как уже было сказано, составляет $O(N^3)$. Реализация алгоритма представляет собой двойной цикл по парам элементов границы и третьего внутреннего цикла опять же по элементам границы. Причём количество запусков третьего цикла зависит от формы границы, для которой вычисляется матрица виртуальной тени. Чем больше пар элементов границы окажется такими, что оба угла, образуемые линией соединяющей центры элементов и нормальными элементами, будут являться острыми, тем чаще будет запускаться внутренний цикл и тем более трудоёмким станет алгоритм вычисления. Например, для любых границ, выпуклых внутрь области среды, внутренний цикл не запустится ни одного раза, так как нормали каждой пары элементов не будут направлены друг на друга и

производительность алгоритма для таких типов границ окажется максимальной (Рисунок 3.18), а трудоёмкость составит $O(N^2)$.

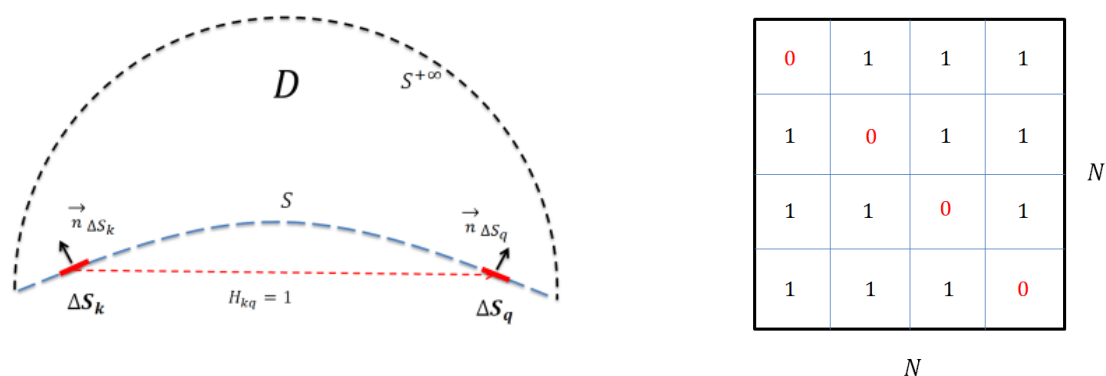


Рисунок 3.18. Пример предельного случая типа границы и её матрицы виртуальной тени, для которой производительность вычисления матрицы будет максимальной.

Матрицей тени в данном случае окажется единичная матрица с нулевыми диагональными элементами (каждый элемент границы сам себя «видит», т.к. $H_{kk} = 0, \forall k = 1 \dots N$ по определению).

Другой предельный случай алгоритма вычисления матрицы виртуальной тени – если нормали всех пар элементов границы направлены друг на друга. В качестве подобной границы могут выступать любые границы, выпуклые в область вне среды (Рисунок 3.19).

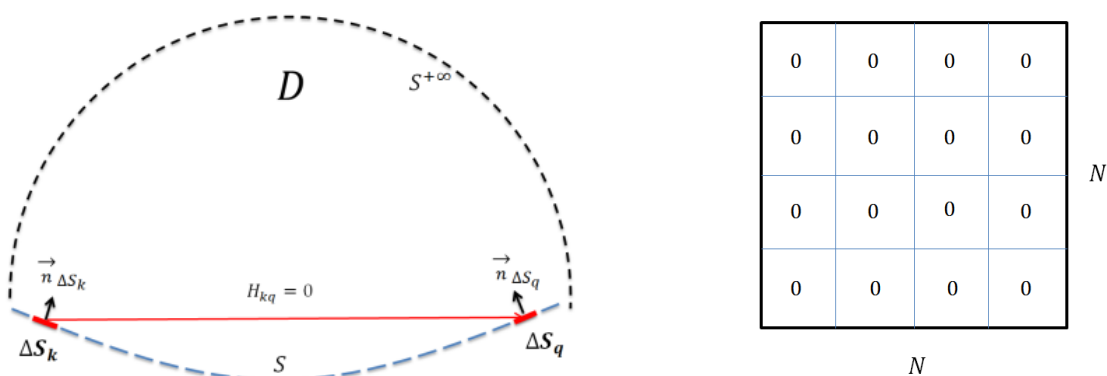


Рисунок 3.19. Пример предельного случая типа границы и её матрицы виртуальной тени, для которой производительность вычисления матрицы будет минимальной.

Производительность алгоритма для таких типов границ окажется минимальной, а трудоёмкость составит $O(N^3)$. Матрицей виртуальной тени в данном случае окажется нулевая матрица (зон геометрической тени для таких границ нет).

Видно, что при такой трудоёмкости $O(N^2)$ - $O(N^3)$ для приемлемого по времени вычисления матрицы виртуальной тени для заданной границы требуются большие вычислительные ресурсы. Для их уменьшения алгоритм, описанный в подразделе 3.8.1, был оптимизирован. В качестве объекта оптимизации наиболее интересен третий внутренний цикл построения теневой матрицы, так как основные трудоёмкие вычисления производятся именно в нём. В этом цикле для заданной пары элементов проверяется, не пересекает ли отрезок, соединяющий центры этих элементов, границу хотя бы в одной точке. Если такая точка найдётся, то заданная пара элементов друг друга «не видит» и элемент матрицы виртуальной тени для этой пары заполняется единицей. Заметим, что реализация третьего внутреннего цикла частично пересекается с известным алгоритмом трассировки лучей [54]. В алгоритме трассировки лучей, как и в предлагаемом алгоритме построения участков тени, самой трудоёмкой частью является поиск пересечения луча с примитивами 3D сцены. В нашем случае в качестве примитивов сцены выступает граница, состоящая из N треугольников. Было принято решение оптимизировать работу внутреннего цикла вычисления матрицы виртуальной тени по аналогии с алгоритмом трассировки лучей.

Проверка пересечения луча с треугольником.

В качестве алгоритма проверки пересечения луча с треугольником рассматривалось 2 варианта. Первый вариант проверки – это, так называемый, «барицентрический тест» [55]. Суть его состоит в том, что, имея три точки на плоскости, можно выразить любую другую точку через её три барицентрические координаты. Если каждая из этих координат будет больше или равна нулю, то искомая точка принадлежит треугольнику. В противном случае – не принадлежит. По определению, каждая барицентрическая координата представляет собой отношение площади малых треугольников, на которые делит искомый треугольник рассматриваемая точка, к площади этого треугольника (Рисунок 3.20).

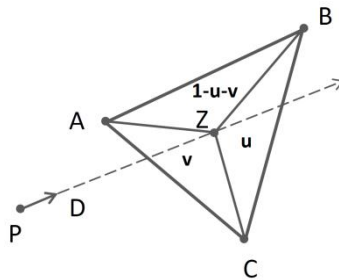


Рисунок 3.20. Схема алгоритма «барицентрический тест».

Второй вариант проверки – это, так называемый, «единичный тест Вупа» (англ. Woop's unit test) [56]. Основная идея данного алгоритма заключается в том, чтобы вычислить такую матрицу аффинных преобразований рассматриваемого треугольника, что после применения этого преобразования (поворот и параллельный перенос в пространстве) он преобразуется в некоторый единичный треугольник с вершинами $(1,0,0)$; $(0,1,0)$; $(0,0,0)$ и нормалью $(0,0,1)$ (Рисунок 3.21).

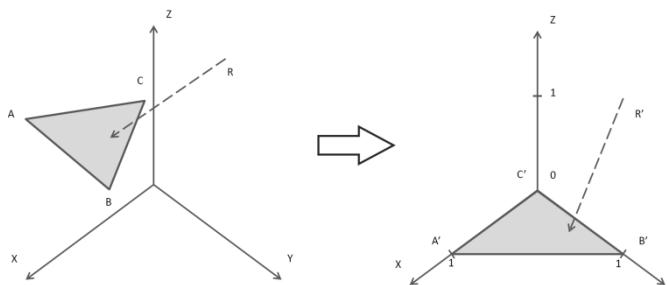


Рисунок 3.21. Схема алгоритма «единичный тест Вупа».

После вычисления матрицы преобразования рассматриваемый луч преобразовывается по этим правилам с последующей проверкой: принадлежит ли точка пересечения луча и единичного треугольника этому треугольнику. Для единичного треугольника сделать подобную проверку проще, чем для произвольного треугольника.

Проанализировав производительность двух описанных алгоритмов для задачи определения освещённых и затенённых участков триангулированной границы, было решено остановиться на первом алгоритме. Этот алгоритм оказался более производительным при его реализации на GPU, чем второй.

Исследование ускоряющих структур для метода трассировки лучей.

В алгоритме трассировки лучей, с целью ускорения поиска точек пересечения луча с примитивами сцены, как правило, используются ускоряющие структуры. Это нужно для того чтобы не перебирать все примитивы, а делать проверку только в некоторой окрестности луча. В методе трассировки лучей выделяют два основных типа ускоряющих структур:

- 1) Разбиение сцены на регулярную сетку;
- 2) Иерархические представления, разбиение сцены на нерегулярную сетку.

Смысл обеих структур в том, что 3D сцена разбивается на равномерную или неравномерную сетку и затем рассматриваются только те кубы сетки (воксели), через которые прошёл луч. Если все примитивы сцены имеют примерно одинаковый размер, то логично разбивать трёхмерное

пространство на равномерную сетку. Это можно сделать трёхмерным алгоритмом Брезенхема [57] или алгоритмом Фуджимото [58] (Рисунок 3.22).

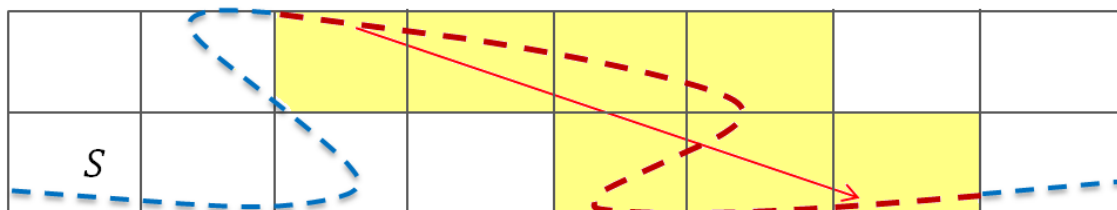


Рисунок 3.22. Процесс «траверса» луча в регулярной сетке. Красным отмечены примитивы (треугольники), для которых осуществляется проверка пересечения их с лучом.

В случае, когда примитивы сцены друг с другом имеют большую разницу в размерах (например, сцена «чайник на стадионе») равномерное разбиение сцены работает неэффективно, так как один примитив (треугольник) может попасть сразу в несколько вокселей и алгоритм будет вынужден проверять пересечение его с лучом несколько раз. С целью уменьшить подобные повторные вычисления, используются иерархические представления или неравномерные сетки. Одним из таких алгоритмов разбиения является структура бинарного пространственного разбиения, называемая kd-дерево [59]. Структура представляет собой бинарное дерево ограничивающих примитивы сцены параллелепипедов или боксов, вложенных друг в друга. Каждый такой бокс может быть разбит плоскостью на два дочерних бокса. Вся сцена целиком содержится внутри корневого бокса, но продолжая рекурсивное разбиение сцены на боксы, можно прийти к тому, что листовые узлы такого бинарного дерева будут содержать лишь небольшое количество примитивов. Этот подход позволяет использовать алгоритм бинарного поиска для нахождения примитивов, пересекаемые лучом, и решает проблему разномасштабных примитивов сцены (Рисунок 3.23).

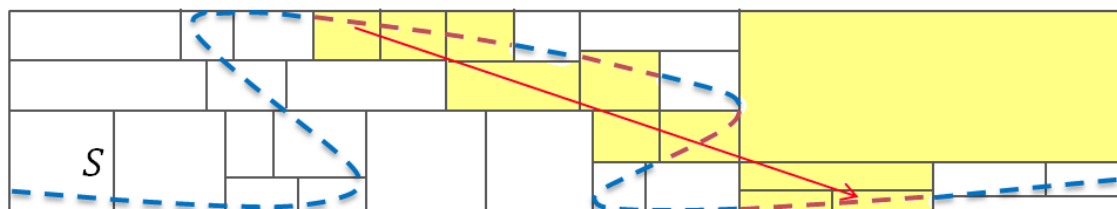


Рисунок 3.23. Процесс «траверса» луча в иерархической сетке. Красным отмечены примитивы (треугольники), для которых осуществляется проверка пересечения их с лучом.

Несмотря на то, что 3D сцену (в нашем случае триангулированную границу) можно разбить на равномерную или неравномерную сетку и хранить её в таком виде до запуска основного алгоритма, у описанных ускоряющих структур существует следующая проблема. В ходе выполнения поиска пересечения луча с треугольником приходится выполнять «траверс» или по-другому – определять воксели, через которые прошёл луч. И на это также требуется время и ресурсы вычислительной машины.

Изучив оба типа ускоряющих структур, используемых при реализации метода трассировки лучей, автор использовал для вычисления матрицы виртуальной тени более простую ускоряющую структуру, учитывающую особенности программного комплекса МНКВ: 1) специфику задания границы (разбивается на маленькие треугольники примерно одинакового размера), 2) использование GPU-кластера для вычисления матрицы виртуальной тени. Реализованный подход описан в следующем подразделе.

3.8.4. Адаптация вычисления матрицы виртуальной тени на GPU и GPU-кластер

Адаптация вычисления матрицы виртуальной тени на GPU.

Автор исходил из того, что вычисление матрицы виртуальной тени будет осуществляться с использованием GPU-ускорителей, матрица будет вычисляться один раз до запуска основного алгоритма МНКВ и результат будет сохраняться на жёсткий диск, который затем можно повторно использовать. Как известно, при расчётах на GPU часто выгодны избыточные операции, если они позволяют выполнить меньше запросов в память, а ядро (функция, исполняемая GPU) имеет достаточно простую структуру. Было принято решение реализовать третий внутренний цикл алгоритма построения теневой матрицы методом «грубой силы» на GPU, тем самым избегая «траверса», ветвлений и возможных сложностей, возникающих при программировании подобной задачи с использованием GPU. При этом трудоёмкую проверку пересечения луча с треугольником необходимо делать как можно реже. Для этого каждый отрезок, соединяющий пару элементов границы, которые «смотрят» друг на друга, обрамляется боксом – таким, что отрезок является диагональю этого бокса, а ребра бокса параллельны осям x , y и z (Рисунок 3.24).

Каждой GPU-нити назначался соответствующий элемент триангулированной границы. Если этот элемент не лежал хотя бы частично внутри бокса, то дальнейшая его обработка GPU-нитью прекращалась. Если элемент полностью или частично лежал внутри бокса, то вычислялся тест, на проверку принадлежности точки пересечения луча с плоскостью треугольника этому треугольнику. Таким образом, количество операций поиска пересечения луча с треугольниками было значительно уменьшено.

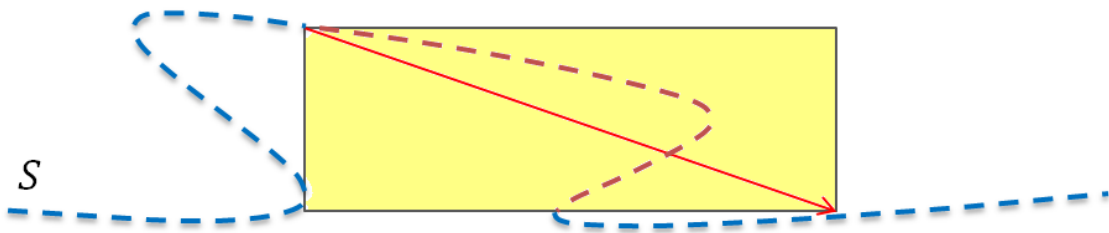


Рисунок 3.24. Схема ускоряющей структуры для алгоритма построения матрицы виртуальной тени. Красным отмечены примитивы (треугольники), для которых осуществляется проверка пересечения их с лучом.

В Листинге 3.3 показано ядро, реализованное на языке CUDA C, которое реализует третий внутренний цикл алгоритма поиска освещённых и затенённых зон на GPU. В этом ядре происходит проверка принадлежности треугольника боксу. Если результат отрицателен, то запускается алгоритм «барицентрический тест» проверки пересечения луча и треугольника. После того, как найден хотя бы один элемент, с которым пересекается луч, дальнейшие вычисления не продолжаются.

Листинг 3.3. Ядро на языке CUDA C, реализующее «барицентрический тест» для определения затенённых и освещённых зон.

```
__global__ void ShadowMatrixLoop_kernel (Triangle *tr_g, int N, Coord a, Coord b,
                                         Coord r_dir, Coord r_o, char *h_g, int idx)
{
    int n = threadIdx.x + blockIdx.x * blockDim.x;

    Coord p, t, q;
    double bary_x, bary_y;
    double det;
    Coord e1, e2;

    if (n < N)
    {
        // если треугольник не попал в обрамляющий бокс, то прекращаем
        // дальнейшую проверку
        if (tr_g[n].center.x < a.x || tr_g[n].center.x > b.x)
            return;

        if (tr_g[n].center.y < a.y || tr_g[n].center.y > b.y)
            return;

        if (tr_g[n].center.z < a.z || tr_g[n].center.z > b.z)
            return;

        // e1 = v1 - v0 - вектор-сторона треугольника
        e1.x = tr_g[n].p2.x - tr_g[n].p1.x;
        e1.y = tr_g[n].p2.y - tr_g[n].p1.y;
        e1.z = tr_g[n].p2.z - tr_g[n].p1.z;
    }
}
```

```

// e2 = v2 - v0 - вектор-сторона треугольника
e2.x = tr_g[n].p3.x - tr_g[n].p1.x;
e2.y = tr_g[n].p3.y - tr_g[n].p1.y;
e2.z = tr_g[n].p3.z - tr_g[n].p1.z;

// t = r_o - v0 - ray origine минус вершина треугольника v0
t.x = r_o.x - tr_g[n].p1.x;
t.y = r_o.y - tr_g[n].p1.y;
t.z = r_o.z - tr_g[n].p1.z;

// p = cross(r_dir, e2) - векторное произведение ray direction и e2
p.x = r_dir.y * e2.z - r_dir.z * e2.y;
p.y = r_dir.z * e2.x - r_dir.x * e2.z;
p.z = r_dir.x * e2.y - r_dir.y * e2.x;

// q = cross(t, e1) - векторное произведение t и e1
q.x = t.y * e1.z - t.z * e1.y;
q.y = t.z * e1.x - t.x * e1.z;
q.z = t.x * e1.y - t.y * e1.x;

// bary_x = dot(t, p) - первая барицентрическая координата. Равна
// скалярному произведению t и p
bary_x = t.x*p.x + t.y*p.y + t.z*p.z;

// bary_y = dot(r_dir, q) - вторая барицентрическая координата. Равна
// скалярному произведению ray direction и q
bary_y = r_dir.x*q.x + r_dir.y*q.y + r_dir.z*q.z;

// det = dot(e1, p) - детерминант. Равен скалярному произведению e1 и p
det = e1.x*p.x + e1.y*p.y + e1.z*p.z;

// барицентрический тест - проверка, пересекает ли луч треугольник
if ( bary_x < 0 || bary_y < 0 || (bary_x + bary_y > det) )
    return;

// если пересекает, то элемент матрицы виртуальной тени равен 1
h_g[idx] = 1;
}
}

```

Адаптация вычисления матрицы виртуальной тени на GPU-кластер.

В подразделе 3.8.2 была описана оптимизация хранения теневой матрицы. Напомним, что в ходе оптимизации эта матрица разбивается на квадратные подматрицы. Каждая подматрица может вычисляться независимо от других подматриц. Поэтому, располагая GPU-кластером (набором GPUs), было решено воспользоваться именно этим свойством: каждому GPU-назначался соответствующий набор подматриц, которые он заполнял, используя описанный выше параллельный алгоритм построения матрицы виртуальной тени. На Рисунке 3.25 схематично показано разбиение матрицы виртуальной тени на квадратные подматрицы и алгоритм назначения подматриц каждому GPU. Видно, что вычисления проводятся только для квадратов из верхнетреугольной части матрицы.

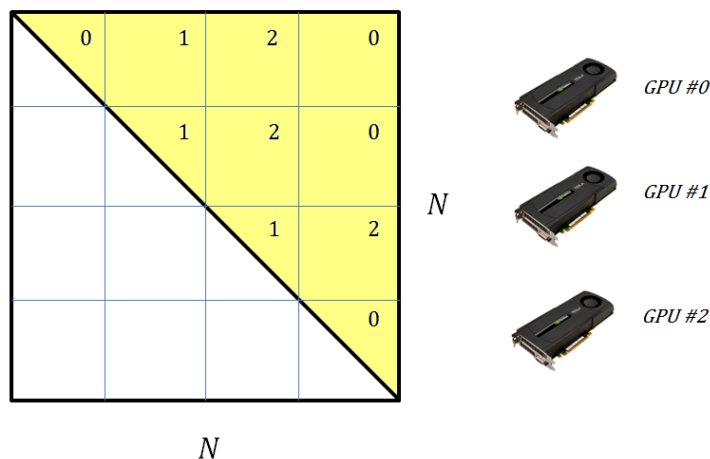


Рисунок 3.25. Схема распределения вычислений матрицы виртуальной тени на примере трёх GPU-ускорителей.

Схема реализации заполнения матрицы виртуальной тени для GPU-кластера выглядит следующим образом:

- 1) Если заданному GPU назначена диагональная подматрица, то:
 - a. Её верхнетреугольная часть заполняется алгоритмом построения матрицы виртуальной тени, а нижнетреугольная получается из верхнетреугольной из свойства симметрии матрицы виртуальной тени.
 - b. Подматрица сжимается по алгоритму сжатия матрицы виртуальной тени.
 - c. Сжатая подматрица отправляется процессу с рангом 0.
- 2) Если заданному GPU назначена не диагональная подматрица, то:
 - a. Подматрица вычисляется по алгоритму построения матрицы виртуальной тени.
 - b. Подматрица транспонируется, результат сохраняется в виде новой матрицы.
 - c. Обе подматрицы сжимаются по алгоритму сжатия матрицы виртуальной тени.
 - d. Обе сжатые подматрицы отправляется процессу с рангом 0.
- 3) Если процесс имеет ранг 0, то:
 - a. Такой процесс занимается аналогичными вычислениями, как и остальные процессы, но при этом является приёмником сжатых подматриц получаемые от остальных процессов.
 - b. Такой процесс формирует сжатую результирующую матрицу виртуальной тени заданной границы в виде трёхмерного массива $HComp[k][i][j]$, где k – номер полосы разбиения матрицы, i – номер квадратной подматрицы внутри заданной полосы, j – номер элемента подматрицы $HComp[k][i]$.

с. Сжатая матрица $HComp$ сохраняется на жёсткий диск.

Алгоритм построения матрицы виртуальной тени был реализован на GPU-кластере с использованием связки MPI и CUDA.

3.8.5. Тестирование алгоритма вычисления матрицы виртуальной тени

Первый тест вычисления матрицы виртуальной тени был запущен на границе с небольшим числом элементов для анализа и демонстрации качества вычислений. В качестве тестовой границы была использована аналитическая функция $f(x, y) = e^{-x^2} e^{-y^2}$, $x \in [-2; 2]$, $y \in [-2; 2]$, которая показана на Рисунке 3.26. Данная граница была дискретизирована на 2048 треугольников.

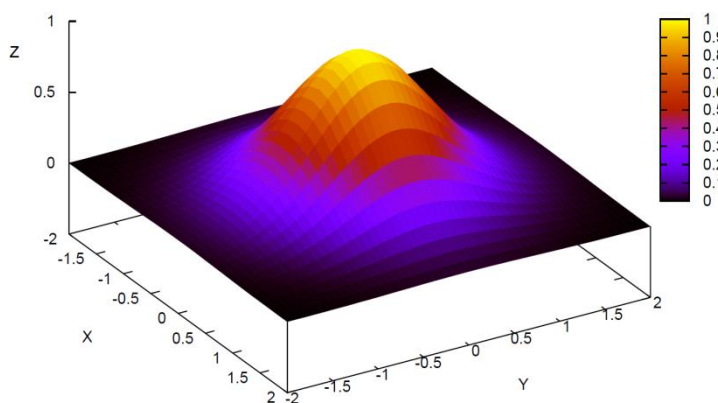


Рисунок 3.26. Вид поверхности, выбранной для тестирования алгоритма построения матрицы виртуальной тени.

На Рисунке 3.27 показаны 4 строки матрицы виртуальной тени, как результат тестирования реализованного алгоритма. Каждую строку матрицы, изображённую на Рисунке 3.27, можно интерпретировать, как проекцию функции $f(x, y)$ на плоскость xu . Красными точками отмечены точки на границе, с которых ведётся наблюдение на всю поверхность. Нулями отмечены освещённые, относительно этих точек, зоны, а единицами – затенённые. Последняя строка изображает ситуацию, когда ведётся наблюдение с точки максимума функции $f(x, y)$ на всю поверхность. В этом случае, при данной границе, указанная точка не может «видеть» ни одну другую точку на поверхности, кроме себя. Визуальная оценка результатов вычисления

матрицы виртуальной тени для приведённой границы указывает на достаточную точность реализации процедуры построения матрицы виртуальной тени.

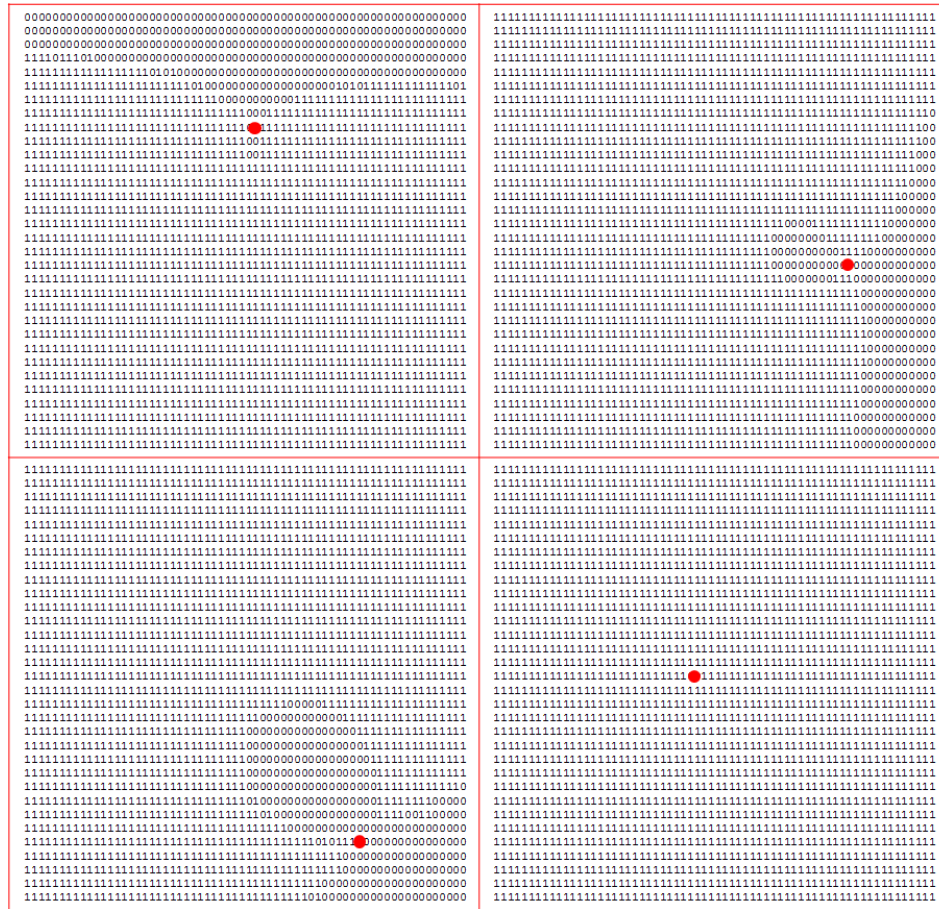


Рисунок 3.27. Результат работы заполнения матрицы виртуальной тени на примере её четырёх строк.

Следующие три теста были запущены для двух границ с ребром типа «диск» (Рисунок 3.28) и «катушка» (Рисунок 3.30) и одной границы с конической вершиной типа «вулкан» (Рисунок 3.32) с реалистичным числом покрывающих элементов. Данные тесты нацелены на анализ производительности вычислений и степени сжатия матрицы виртуальной тени.

Каждая из этих границ образуется в результате различных способов поворота дугапараболической кривой, показанной на Рисунке 3.34, в трёхмерном пространстве. Эта кривая представляется следующей аналитической формулой:

$$x(z + 0.5) = 4 - 4 \left[\sqrt{(z + 0.5)^2 - 0.5} \right]^2. \quad (3.20)$$

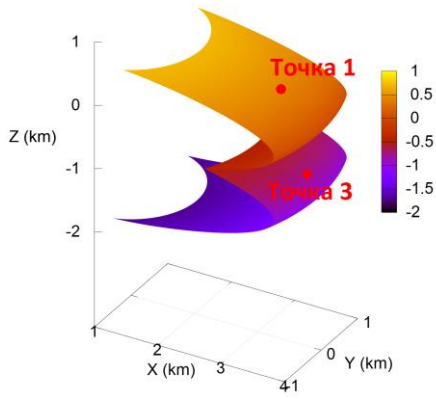


Рисунок 3.28. Граница типа «диск».



Рисунок 3.29. Три строки матрицы виртуальной тени для границы типа «диск».

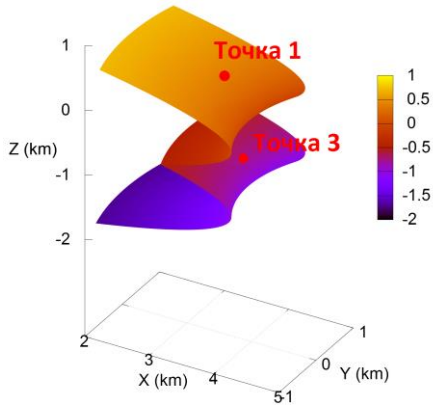


Рисунок 3.30. Граница типа «катушка».



Рисунок 3.31. Три строки матрицы виртуальной тени для границы типа «катушка».

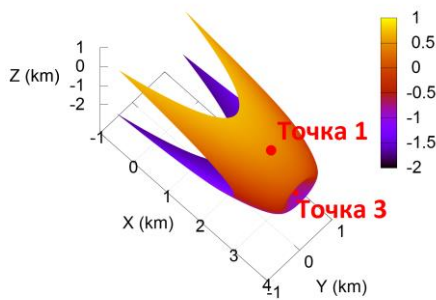


Рисунок 3.32. Граница типа «вулкан».



Рисунок 3.33. Три строки матрицы виртуальной тени для границы типа «вулкан».

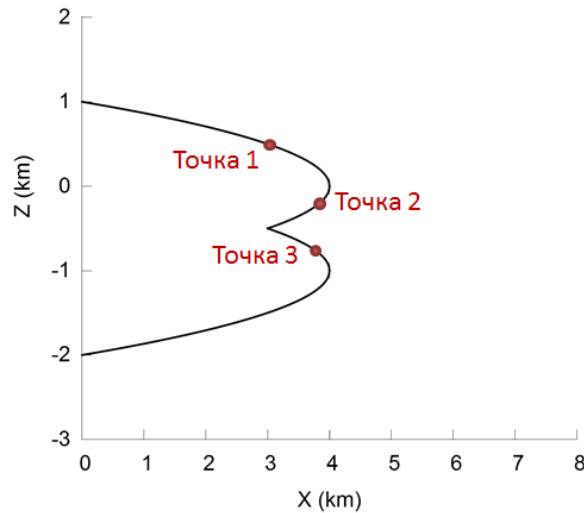


Рисунок 3.34. Двумерное сечение границ 3.28, 3.30 и 3.32 плоскостью $y = 0$.

Граница типа «диск» на Рисунке 3.28 представляется в виде формулы:

$$x(y, z+0.5) = 1 + \sqrt{\left\{ 3 - 4 \left[\sqrt{(z+0.5)^2 - 0.5} \right]^2 \right\} - y^2}, \quad -1.7 < z < +0.7, -1.0 < y < +1.0$$

и получена путём поворота кривой (3.20) вокруг вертикальной оси $x=1, y=0$. Граница типа «катушка» на Рисунке 3.30 представляется в виде формулы:

$$x(y, z+0.5) = 6 + \sqrt{\left\{ 2 + 4 \left[\sqrt{(z+0.5)^2 - 0.5} \right]^2 \right\} - y^2}, \quad -1.7 < z < +0.7, -1.0 < y < +1.0$$

и получена путём поворота кривой (3.20) вокруг вертикальной оси $x=6, y=0$. Граница типа «вулкан» на Рисунке 3.32 представляется в виде формулы:

$$x(y, z) = 4 - 4 \left[\sqrt{(z+0.5)^2 + y^2} - 0.5 \right]^2, \quad -1.7 < z < +0.7, -1.0 < y < +1.0$$

и получена путём поворота кривой (3.20) вокруг горизонтальной оси $z = -0.5, y = 0.0$.

На Рисунках 3.29, 3.31, 3.33 показаны по три строки матриц виртуальных теней для соответствующих границ. Каждую из строк, изображённую на этих рисунках, можно интерпретировать, как проекцию функции $x(y, z)$ на плоскость yz . Красными точками

отмечены точки на границе, с которых ведётся наблюдение на всю поверхность. Данные точки были выбраны на кривой, которая образуется в результате пересечения тестируемых границ плоскостью $y=0$. Положение точек схематично указано на Рисунке 3.34. Точка 1 имеет координаты $(x=3.0; y=0.0; z=0.5)$, точка 2 имеет координаты $(x=3.84; y=0.0; z=-0.2)$, точка 3 имеет координаты $(x=3.75; y=0.0; z=-0.75)$. Более тёмные пятна соответствуют освещённым, относительно этих точек, зонам, а более светлые – затенённым.

В Таблице 3.2 указаны параметры границ и результаты тестирования алгоритма построения матриц виртуальных теней, реализованного для GPU-кластера. Показана зависимость времени вычисления матриц от количества задействованных GPU. Также показана степень сжатия данных матриц. По таблице видно, что матрицы виртуальных теней удаётся сжимать более чем в 100 раз, а в некоторых случаях и более чем в 500 раз. Объёмы сжатых матриц составляют порядка сотни Мб, что является приемлемым результатом для решения практических задач.

Таблица 3.2. Результаты тестирования алгоритма построения матрицы виртуальной тени для разных типов границ.

Тип границы	Количество элементов	Размер матрицы до сжатия	Размер матрицы после сжатия	Коэффициент сжатия	Время счёта	Время счёта	Время счёта	Время счёта
					(мин) 2 GPU	(мин) 4 GPU	(мин) 6 GPU	(мин) 12 GPU
<i>Диск</i>	240 000	53,6 Гб	132 Мб	416	30	15	10	5
<i>Катушка</i>	240 000	53,6 Гб	419 Мб	131	28	15	10	5
<i>Вулкан</i>	252 000	59,1 Гб	90 Мб	673	31,3	15,8	10,5	5,5

3.9. Эффективные коэффициенты отражения и преломления

Данный подраздел представляет собой краткое описание реализации компоненты КоэффициентыПрохождения программного комплекса МНКВ.

Падение волнового поля источника или любого ПКВ на элементы дискретизированной границы сопровождается его дальнейшим отражением или преломлением. Компонента КоэффициентыПрохождения программного комплекса МНКВ, в соответствии с формулой (2.15), вычисляет эффективные коэффициенты отражения (ЭКО) и преломления (ЭКП) для нормальной скорости частиц $\chi_s^{vv}(\omega_k)$ и для давления $\chi_s^{pp}(\omega_k)$ на каждом элементе триангулированной границы слоя \mathbb{S} . При прохождении (отражении или преломлении) волнового поля через треугольный элемент границы каждый такой коэффициент вычисляется посредством реализации двукратного пространственного преобразования Фурье от

произведения двух спектров: 1) спектральная функция, учитывающая обе кривизны границы, а также частотный состав и кривизну фронта падающей сферической волны от источника или падающего ПКВ, 2) спектральная функция, совпадающая с коэффициентами отражения/преломления плоских акустических волн.

В случае падения физически реализуемого волнового поля источника на границу S учёт эффекта отражения или преломления реализуется в два шага: 1) вектор граничных значений прямой волны источника $b^{s^{10}}(\omega_k)$ из формулы (3.4) поэлементно умножается на вектор ЭКО/П $T^s(\omega_k)$ по схеме (2.16), 2) матрица $K^{ss}(\omega_k)$ из формулы (3.4) поэлементно умножается на матрицу ЭКО/П $T^{ss}(\omega_k)$ по схеме (2.16). В случае падения физически реализуемого волнового поля с предыдущей границы S_1 на следующую S_2 учёт эффекта отражения или преломления реализуется в виде поэлементного умножения всех левых матриц $K^{s_2s_1}(\omega_k)$ из формулы (3.7) на матрицу ЭКО/П $T^{s_2s_1}(\omega_k)$ по схеме из (2.16).

Программная реализация вычисления ЭКО и ЭКП была выполнена Е.Ж. Ракшаевой [16], [22] и включена в программный комплекс МНКВ автором диссертации. В силу значительной реферативности этого раздела, автор опускает детальное описание данной процедуры.

3.10. Анализ производительности программного комплекса МНКВ

В данном подразделе представлены расчётные формулы для оценки времени вычисления волновых полей для заданной модели геологической среды с помощью программного комплекса МНКВ.

Проведём анализ производительности программного комплекса МНКВ и оценим потенциальное время построения сейсмограмм волновых фрагментов для заданной акустической модели среды в трёхмерном пространстве. Как уже было сказано в подразделах 3.3-3.5, вычисление волнового поля источника в приёмниках для модели среды сводится к многократным матрично-векторным операциям. При этом данный процесс может быть скомбинирован из следующих расчётных блоков:

- 1) Вычисление волнового поля источника на границе, в соответствии с формулой (3.4).
- 2) Вычисление волнового поля на следующей границе слоя, распространяющееся с предыдущей, в соответствии с формулой (3.5).
- 3) Вычисление волнового поля в приёмниках, распространяющееся с границы слоя, в соответствии с формулой (3.10).

Для оценки времени вычисления каждого из этих блоков введём обозначения:

1. t_p – время перемножения набора элементарных матриц распространения (например, $K_{ss}^{vv}(\omega_1)...K_{ss}^{vv}(\omega_K)$) на набор элементарных векторов волнового поля (например, $v^s(\omega_1)...v^s(\omega_K)$) (см. подразделы 3.3-3.5);
2. t_D – время перемножения набора элементарных матриц дифрагирования (например, $D_{ss}^{vv}(\omega_1)...D_{ss}^{vv}(\omega_K)$) на набор элементарных векторов волнового поля (например, $v^s(\omega_1)...v^s(\omega_K)$) (см. подразделы 3.3-3.5);
3. t_T – время вычисления коэффициентов преломления/отражения на границе двух сред (см. подраздел 3.9).

Автор опускает расчётный блок времени вычисления матрицы тени (см. подраздел 3.8), поскольку выбранный алгоритм вычисляет эту матрицу для всех границ среды один раз до запуска основного алгоритма и хранит её на жёстком диске в сжатом состоянии. Если необходимо изменить форму одной или группы границ, матрицы тени необходимо вычислить заново только для тех слоёв, которые ограничены изменяемыми границами. Матрицы тени для неизменяемых границ не нуждаются в повторном вычислении.

Волновое поле источника (3.4) на границе с учётом n – кратной дифракционной поправки для каждой дискретной частоты имеет вид:

$$\mathbf{b}^s = \mathbf{b}^{s[0]} + \left[\sum_{i=1}^n (\mathbf{K}^{ss} \mathbf{D}^{ss})^i \right] \mathbf{b}^{s[0]} . \quad (3.21)$$

Пренебрежём временем заполнения вектора $\mathbf{b}^{s[0]}$, поскольку оно имеет несущественное значение. Так как в соответствии с подразделом 3.3 каждая матрица $\mathbf{K}^{ss}(\omega_k)$ и $\mathbf{D}^{ss}(\omega_k)$ состоит из четырёх элементарных подматриц, то время вычисления перемножения набора матриц распространения $\mathbf{K}^{ss}(\omega_1)...K^{ss}(\omega_K)$ на векторы волнового поля будут составлять $4t_p$, а матриц дифрагирования $\mathbf{D}^{ss}(\omega_1)...D^{ss}(\omega_K) - 4t_D$. В результате получаем время вычисления по формуле (3.21):

$$\begin{aligned} t_1 &= 4(t_p + t_D) + 8(t_p + t_D) + 12(t_p + t_D) + \dots + 4n(t_p + t_D) = \\ &= 4(t_p + t_D)(1 + 2 + 3 + \dots + n) = \\ &= 4(t_p + t_D) \frac{1+n}{2} n = \\ &= 2(t_p + t_D)(n+1)n . \end{aligned}$$

С учётом того, что $t_p \approx t_D$, получаем оценочную формулу времени вычисления волнового поля источника на границе сложной формы с учётом n – кратной дифракции:

$$t_1 = 4(n+1)n \cdot t_p . \quad (3.22)$$

Проанализируем формулу (3.22) для двух частных случаев: 1) 1-кратная дифракция при $n=1$, 2) 2-кратная дифракция при $n=2$. Если пользователь программного комплекса МНКВ учитывает лишь однократную дифракцию при вычислении волнового поля на криволинейной границе, то время вычисления такого поля будет эквивалентно времени умножения $8K$ матриц размерности $N \times N$ на $8K$ векторов размерности N , где N – количество треугольников, на которые разбита граница, K – количество дискретных частот. В первом случае оценочное время имеет значение $t_1 = 4(1+1)1 \cdot t_p = 8 \cdot t_p$. При учёте 2-кратной дифракции время вычисления такого волнового поля будет эквивалентно времени умножения уже $24K$ матриц размерности $N \times N$ на $24K$ векторов размерности N . Во втором случае оценочное время имеет значение $t_1 = 4(2+1)2 \cdot t_p = 24 \cdot t_p$. По аналогии из формулы (3.22) можно получить оценочное время при $n > 2$.

В соответствии с формулой (3.5) волновое поле, распространяющееся с предыдущей границы \mathbb{S}_1 через слой на следующую его границу \mathbb{S}_2 с учётом n – кратной дифракционной поправки, порождённой этими границами, вычисляется как:

$$\mathbf{b}^{s_2} = \mathbf{K}^{s_2 s_1} \mathbf{b}^{s_1} + \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left(\mathbf{K}^{s_2 s_1} \mathbf{D}^{s_2 s_1} \right)^i \right] \mathbf{K}^{s_2 s_1} \mathbf{b}^{s_1} . \quad (3.23)$$

С учётом того, что время вычисления перемножения набора матриц распространения $\mathbf{K}^{s_2 s_1}(\omega_1) \dots \mathbf{K}^{s_2 s_1}(\omega_K)$ на векторы волнового поля будут составлять $4t_p$, а для матриц дифрагирования $\mathbf{D}^{s_2 s_1}(\omega_1) \dots \mathbf{D}^{s_2 s_1}(\omega_K) - 4t_D$, получаем время вычисления по формуле (3.23) при $n > 0$:

$$\begin{aligned} t_2 &= 4t_p + 4(t_p + t_D) + 8(t_p + t_D) + 12(t_p + t_D) + \dots + 4n(t_p + t_D) + 4t_p = \\ &= 8t_p + 4(t_p + t_D)(1 + 2 + 3 + \dots + n) = \\ &= 8t_p + 4(t_p + t_D) \frac{1+n}{2} n = \\ &= 8t_p + 2(t_p + t_D)(n+1)n . \end{aligned}$$

С учётом приближённого равенства $t_p \approx t_D$ получаем оценочную формулу времени вычисления волнового поля при его распространении с предыдущей границы слоя на следующую с учётом n -кратной дифракции:

$$t_2 = \begin{cases} 4t_p, & n = 0, \\ [8 + 4(n+1)n] \cdot t_p, & n > 0. \end{cases} \quad (3.24)$$

Проанализируем формулу (3.24) для двух частных случаев: 1) 1-кратная дифракция при $n = 1$, 2) 2-кратная дифракция при $n = 2$. Если пользователь программного комплекса МНКВ учитывает лишь 1-кратную дифракцию при вычислении волнового поля, распространяющегося с предыдущей границы слоя на следующую, то время его вычисления будет эквивалентно времени умножения $16K$ матриц размерности $N \times N$ на $16K$ векторов размерности N , где N – количество треугольников, на которые разбита каждая граница, K – количество дискретных частот. В первом случае оценочное время имеет значение $t_2 = 8 + 4(1+1)1 \cdot t_p = 16 \cdot t_p$. При учёте 2-кратной дифракции время вычисления такого волнового поля будет эквивалентно времени умножения уже $32K$ матриц размерности $N \times N$ на $32K$ векторов размерности N . Во втором случае оценочное время имеет значение $t_2 = 8 + 4(2+1)2 \cdot t_p = 32 \cdot t_p$. По аналогии из формулы (3.24) можно получить оценочное время при $n > 2$.

В соответствии с формулой (3.10) волновое поле, распространяющееся с границы слоя \mathbb{S} в приёмники с учётом n -кратной дифракционной поправки, порождённой этой границей, вычисляется как:

$$\mathbf{b}^x = \mathbf{K}^{xs} \mathbf{b}^s + \mathbf{K}^{xs} \left[\sum_{i=1}^{\infty} (\mathbf{K}^{ss} \mathbf{D}^{ss})^i \right] \mathbf{K}^{ss} \mathbf{b}^s. \quad (3.25)$$

Пренебрежём временем заполнения вектора \mathbf{b}^s и временем умножения набора матриц распространения типа «граница-приёмники» \mathbf{K}^{xs} на векторы типа «граница» \mathbf{b}^s , поскольку они имеют несущественные значения. Так как время вычисления перемножения набора матриц распространения $\mathbf{K}^{ss}(\omega_1) \dots \mathbf{K}^{ss}(\omega_k)$ на векторы волнового поля будут составлять $4t_p$, а для матриц дифрагирования $\mathbf{D}^{ss}(\omega_1) \dots \mathbf{D}^{ss}(\omega_k) - 4t_D$, получаем время вычисления по формуле (3.25):

$$\begin{aligned}
t_3 &= 4t_p + 4(t_p + t_D) + 8(t_p + t_D) + 12(t_p + t_D) + \dots + 4n(t_p + t_D) = \\
&= 4t_p + 4(t_p + t_D)(1 + 2 + 3 + \dots + n) = \\
&= 4t_p + 4(t_p + t_D) \frac{1+n}{2} n = \\
&= 4t_p + 2(t_p + t_D)(n+1)n.
\end{aligned}$$

С учётом приближённого равенства $t_p \approx t_D$ получаем оценочную формулу времени вычисления волнового поля, распространяющегося в приёмники от границы, в приближении n – кратной дифракции:

$$t_3 = [4 + 4(n+1)n] \cdot t_p. \quad (3.26)$$

Проанализируем формулу (3.26) для двух частных случаев: 1) 1-кратная дифракция при $n=1$, 2) 2-кратная дифракция при $n=2$. Если пользователь программного комплекса МНКВ учитывает лишь 1-кратную дифракцию при вычислении волнового поля в приёмниках, распространяющееся с искривлённой границы, то время его вычисления будет эквивалентно времени умножения $12K$ матриц размерности $N \times N$ на $12K$ векторов размерности N , где N – количество треугольников, на которые разбита граница, K – количество дискретных частот. В первом случае оценочное время имеет значение $t_3 = [4 + 4(1+1)1] \cdot t_p = 12 \cdot t_p$. При учёте двукратной дифракции время вычисления такого волнового поля будет эквивалентно времени умножения уже $28K$ матриц размерности $N \times N$ на $28K$ векторов размерности N . Во втором случае оценочное время имеет значение $t_3 = [4 + 4(2+1)2] \cdot t_p = 28 \cdot t_p$. По аналогии из формулы (3.26) можно получить оценочное время при $n > 2$.

В качестве примера, оценим время вычисления сейсмограммы фрагмента волнового поля для слоистой модели среды, которая представлена на Рисунке 3.1 в подразделе 3.1. В соответствии с волновым кодом (ломаная штриховая линия) этого фрагмента необходимо провести следующую цепочку вычислений оценочных времён:

- 1) Оценочное время t_1 для шага 1 волнового кода – распространение от источника на Границу 1.
- 2) Оценочное время t_T для шага 2 волнового кода – преломление из Слоя 1 через Границу 1 в Слой 2.
- 3) Оценочное время t_2 для шага 3 волнового кода – распространение от Границы 1 на Границу 2.

- 4) Оценочное время t_T для шага 4 волнового кода – отражение от Границы 2 в Слой 2.
- 5) Оценочное время t_2 для шага 5 волнового кода – распространение от Границы 2 на Границу 1.
- 6) Оценочное время t_T для шага 6 волнового кода – отражение от Границы 1 в Слой 2.
- 7) Оценочное время t_2 для шага 7 волнового кода – распространение от Границы 1 на Границу 2.
- 8) Оценочное время t_T для шага 8 волнового кода – отражение от Границы 2 в Слой 2.
- 9) Оценочное время t_2 для шага 9 волнового кода – распространение от Границы 2 на Границу 1.
- 10) Оценочное время t_T для шага 10 волнового кода – преломление из Слая 2 через Границу 1 в Слой 1.
- 11) Оценочное время t_3 для шага 11 волнового кода – распространение от Границы 1 в приёмники.

После суммирования всех 11 оценочных времён из приведённой выше цепочки вычислений, получаем время вычисления волнового поля в приёмниках, в зависимости от кратностей дифракционных поправок, которые указывает пользователь программного комплекса для каждой границы, а также t_p и t_T :

$$t = t_1(n_1, t_p) + t_T + t_2(n_2, t_p) + t_T + t_2(n_3, t_p) + t_T + t_2(n_4, t_p) + \\ + t_T + t_2(n_5, t_p) + t_T + t_3(n_6, t_p).$$

В Таблице 3.3 показано время t_p заполнения и перемножения набора элементарных квадратных матриц распространения (например, $K_{ss}^{vv}(\omega_1) \dots K_{ss}^{vv}(\omega_K)$) на набор элементарных векторов граничных значений волнового поля (например, $v^s(\omega_1) \dots v^s(\omega_K)$) в зависимости от количества треугольных элементов, на которые разбиты границы модели – N .

Таблица 3.3. Время заполнения и перемножения набора квадратных матриц на векторы в зависимости от их размерностей.

Высота квадратной матрицы (N)	Время вычислений (сек.)
10 000	1
50 000	9
100 000	38
150 000	83
200 000	148

250 000	229
---------	-----

В Таблице 3.4 показана зависимость времени t_T вычисления коэффициентов отражения/преломления на границе от количества треугольных элементов, на которые разбиты границы модели – N .

Таблица 3.4. Время вычисления коэффициентов отражения/преломления волнового поля на границе в зависимости от её дискретизации.

Число элементов границы (N)	Время вычислений (сек.)
10 000	1
50 000	5
100 000	10
150 000	15
200 000	20
250 000	25

При вычислении Таблиц 3.3 и 3.4 использовано количество дискретных частот $K = 128$, что соответствует временному окну на сейсмограмме [0.000 сек; 0.512 сек]. Все вычисления проводились с использованием GPU-кластера из 12 GPUs.

3.11. Заключение

В данном разделе описана реализация и оптимизация программного комплекса МНКВ, позволяющая вычислять сложные (дифракционные, огибающие, головные и т.д.) волновые поля в слоистых и блоковых акустических средах с границами сложной формы с использованием среднечастотных аппроксимаций аналитических формул ТОПРД. Представлена архитектура программного комплекса МНКВ, проанализированы особенности и основные проблемы реализации алгоритма МНКВ. Также подробно описаны реализации каждой из компонент архитектуры программного комплекса МНКВ: 1) вычисление волнового поля источника, падающего на границу; 2) вычисление волнового поля, распространяющегося внутри слоя модели – с одной границы на другую; 3) вычисление волнового поля, распространяющегося с границы в приёмники. Кратко освещены особенности вычисления преломления и отражения волнового поля на криволинейной границе. В последнем подразделе приведены формулы оценки времени вычислений волновых полей для заданной модели с помощью алгоритма МНКВ.

Вычисления волновых полей с помощью программного комплекса МНКВ сводятся к многократным матрично-векторным операциям больших размерностей. При реализации таких

операций становится существенным рациональное использование ограниченных ресурсов ЭВМ (центральных процессоров и оперативной памяти). Поэтому в подразделе 3.6 автором были предложены, выносимые на защиту, оптимизированные алгоритмы перемножения набора большеразмерных матриц распространения на набор векторов волнового поля, их обработки, в условиях ограниченного размера доступной оперативной памяти ЭВМ, и адаптации для GPU-кластера. Данные алгоритмы позволили ускорить работу программного комплекса МНКВ более чем в 1000 раз, по сравнению с неоптимизированной версией. Полученные результаты опубликованы в работе [1].

В подразделе 3.8 подробно описаны результаты исследования алгоритма построения матрицы виртуальной тени. Построение данной матрицы является важным алгоритмом программного комплекса МНКВ, так как он используется при вычислении дифракционных волновых полей, порождаемых на криволинейных частях границы слоя. Каждая такая матрица имеет большую размерность, заполняется только нулями и единицами и описывает участки триангулированной границы, затенённые и освещённые относительно каждого треугольного элемента этой границы. Поскольку скалярные элементы матрицы виртуальной тени содержат сложные логические операции в отличие от остальных матриц программного комплекса МНКВ, то автором были предложены, выносимые на защиту, алгоритмы построения матрицы виртуальной тени, её хранения, использования в программном комплексе МНКВ и адаптации для GPU-кластера. Часть применённых идей заимствована из метода трассировки лучей, известного в области компьютерной графики, поскольку задача построения зон виртуальных теней границы слоя частично пересекается с этим методом. Предложенные алгоритмы существенно ускорили заполнение матрицы тени, позволили сжимать её в 100 и более раз, хранить на жёстком диске ЭВМ и, при необходимости, подгружать программным комплексом МНКВ. Полученные результаты реализации данной процедуры опубликованы автором в работе [2].

Программный комплекс МНКВ был зарегистрирован в виде комплекса программ в Федеральной службе по интеллектуальной собственности РФ (Роспатент) [3] (см. приложение D) и является результатом диссертации, выносимым на защиту. Также разработанный программный комплекс МНКВ, адаптированный для GPU-кластера, был представлен автором на конкурс, организованный компанией NVIDIA и МГУ «GPU: серьёзные ускорители для больших задач», где занял 1-е место в номинации «Эффективное приложение» (Москва, Россия, декабрь, 2013 г.) (см. приложение E).

4. ТЕСТИРОВАНИЕ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА МНКВ

Данный раздел состоит из двух подразделов и посвящён тестированию программного комплекса МНКВ.

В подразделе 4.1 описываются результаты вычисления волнового поля и его фрагментов в восьми трёхмерных акустических моделях сред:

- в моделях 1-7 среда состоит из двух однородных областей, разделённых границей сложной геометрической формы;
- в модели 8 трёхслойная среда состоит из однородных слоёв с двумя плоскими границами и тонкой дисковой высокоскоростной прослойки.

В моделях 1-7 одна однородная область имитирует песчаник, а вторая однородная область имитирует соляное тело различной формы, окружённое песчаником. Такие модели, с одной стороны, удобны для теоретического анализа результатов тестирования, с другой – содержат криволинейные, кусочно-криволинейные и кусочно-плоские границы, порождающие сложные волновые явления: дифракционные и ползущие волны, которые не могут быть учтены существующими аналитическими методами сейсмического моделирования. В модели 8 тонкая дисковая прослойка имитирует высокоскоростную линзу ангидрита, зажатую внутри слоя галита.

Хотя программный комплекс МНКВ позволяет вычислять вектор скорости частиц и давление, в данном разделе приведены сейсмограммы только для давления.

С целью удобства восприятия для описания процесса тестирования каждой модели автором использовался следующий блочный формат:

- 1) **Описание модели.** Данный блок предназначен для непосредственного описания параметров тестируемой модели: материальные параметры слоёв, геометрические параметры границ, геометрические и физические параметры источника и приёмников, параметры волновых кодов для вычисляемых фрагментов полного волнового поля;
- 2) **Построение решения с помощью МНКВ.** Блок предназначен для описания волновых кодов в программном комплексе МНКВ на основе матрично-векторных формул ТОПРД, в соответствии с которыми происходит вычисление фрагментов полного волнового поля в тестируемой модели;
- 3) **Результаты тестирования.** Данный блок необходим для описания и демонстрации вычисленных сейсмограмм, а также для их анализа (аналитические выкладки,

вспомогательные графики, численный анализ амплитудно-временных характеристик трасс на сейсмограммах и т.д.);

- 4) **Анализ времени вычислений.** Этот блок предназначен для оценки прогнозируемого времени вычисления программным комплексом МНКВ волновых фрагментов с учётом выбираемой кратности дифракционной поправки для тестируемой модели.

В подразделе 4.2 описываются результаты вычисления волновых амплитуд a^+ и a^- для модели 7.

В подразделе 4.3 описано сравнение синтетических сейсмограмм, вычисленных программным комплексом МНКВ, с синтетическими сейсмограммами метода конечных разностей (МКР) на примере модели 6: высокоскоростной акустический клин с раствором угла 45° , имитирующий соляной выступ, внутри низкоскоростного акустического полупространства, имитирующего песчаник.

4.1. Тестирование программного комплекса МНКВ для акустических сред со сложными границами (волновое поле и его дифракционная структура)

В данном подразделе описан процесс вычисления волнового поля с помощью программного комплекса МНКВ для трёхмерных акустических моделей сред двух типов. В подразделах 4.1.1-4.1.7 описаны тесты для моделей 1-7: две однородных области, разделённые границей сложной геометрической формы, которая порождает каскадную дифракцию. В подразделе 4.1.8 описан тест для модели 8: трёхслойная среда, состоящая из однородных слоёв с двумя плоскими границами и тонкой дисковой высокоскоростной прослойки.

4.1.1. Модель 1: огибание волновым полем клиновидной границы

Описание модели. Модель 1 представляет собой имитацию трёхмерного клиновидного соляного выступа, окружённого песчаником (Рисунок 4.1). Двумерное сечение тестируемой модели в плоскости $y = 0$ км и система наблюдений, находящаяся в нём, показаны на Рисунке 4.2.

В данном тесте волновое поле вычислялось только в полупространстве, имитирующем песчаник, который описывается плотностью 2.0 г/см^3 и скоростью распространения продольной волны 2.0 км/с . Материальные параметры полупространства, имитирующего соляной клин, не существенны для данной модели.

Граница полупространства, имитирующего песчаник, задана в виде трёхмерного клина, ребро которого расположено на линии $x = 4$ км, а его грани задаются в виде аналитической формулы $z(x, y) = \pm 0.41(4 - x)$.

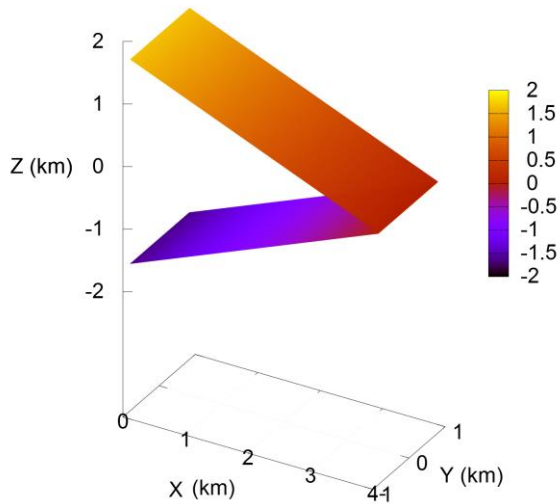


Рисунок 4.1. Клиновидная граница.

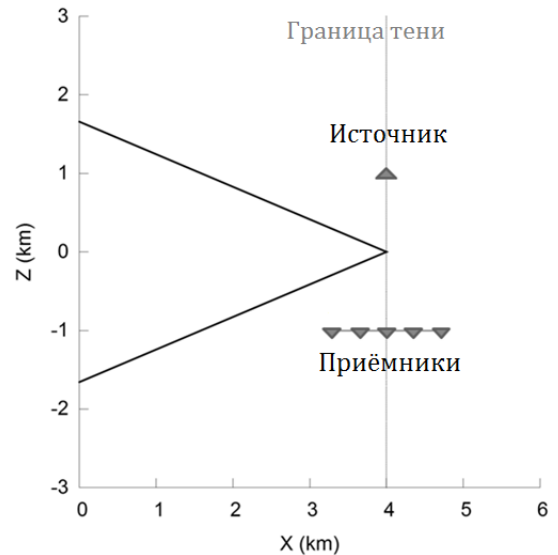


Рисунок 4.2. Двумерное сечение модели среды и система наблюдений.

Точечный источник расположен в точке $(x = 4$ км, $y = 0$ км, $z = 1$ км) полупространства, имитирующего песчаник, и излучает сферическую продольную волну. У этой волны имеется граница тени в форме полуплоскости $x = 4.0$ км, выходящей из ребра границы в направлении к профилю. Форма импульса этой волны представляется в виде $e^{-(2\tau)^2} \cos(2\pi\tau)$, где $\tau = t/T - 2$, $T = 0.032$ с. Этому импульсу соответствуют доминантный период волны $T_{dom} \cong 0.026$ с, доминантная длина волны $\lambda_{dom} \cong 0.052$ км и доминантная частота $f_{dom} \cong 38.25$ Гц.

Профиль из 101 приёмника расположен в полупространстве, имитирующем песчаник, вдоль прямой линии от точки с координатами $(x = 3.25$ км, $y = 0$ км, $z = -1$ км) до точки с координатами $(x = 4.75$ км, $y = 0$ км, $z = -1$ км). Шаг между приёмниками $\Delta x = 0.015$ км. Приёмники для $x < 4.0$ км расположены в зоне тени относительно границы тени, а приёмники для $x > 4.0$ км – в освещённой зоне относительно границы тени.

Построение решения с помощью МНКВ. Физически реализуемое волновое поле источника b^x , распространяющееся из источника по песчанику в приёмники и огибающее клиновидное соляное тело, в соответствии с (3.4) представляется в виде суммы актов каскадной дифракции по следующей матрично-векторной формуле:

$$\mathbf{b}^x = \mathbf{b}^{x[0]} + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{b}^{x[i]}, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{b}^{x[i]} = \mathbf{K}^{xs} (\mathbf{K}^{ss} \mathbf{D}^{ss})^i \mathbf{b}^{s[0]} = \mathbf{K}^{xs} \underbrace{(\mathbf{K}^{ss} \mathbf{D}^{ss}) \cdot (\mathbf{K}^{ss} \mathbf{D}^{ss}) \cdot \dots \cdot (\mathbf{K}^{ss} \mathbf{D}^{ss})}_{i \text{ раз}} \mathbf{b}^{s[0]}.$$

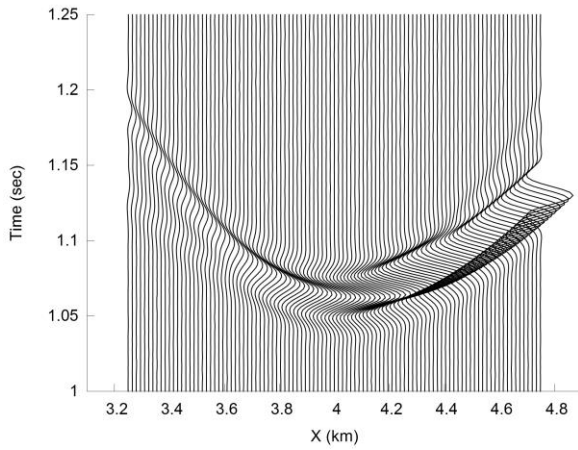
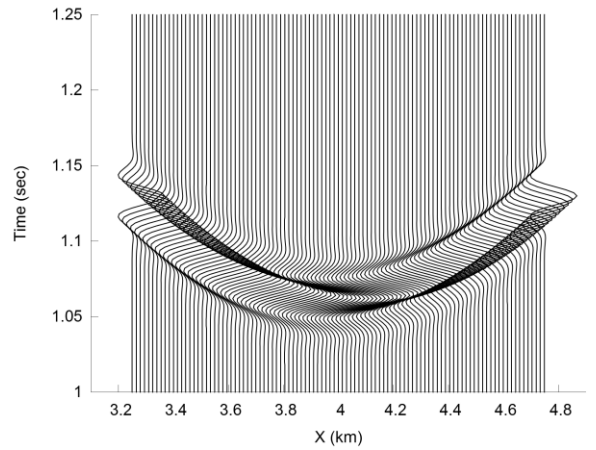
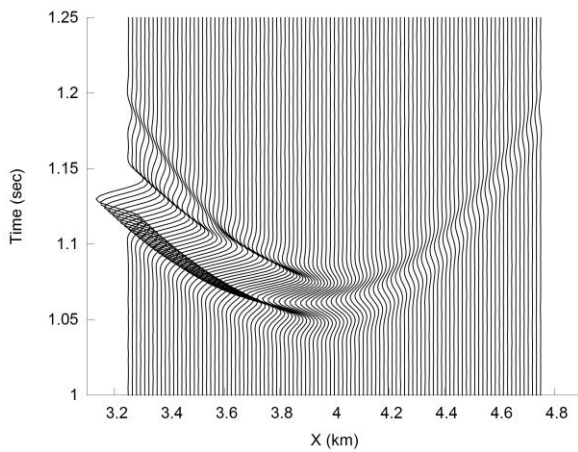
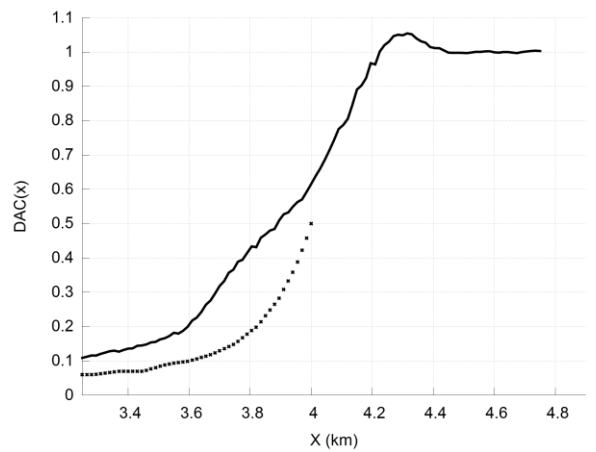
В формуле (4.1) $\mathbf{b}^{x[0]}$ представляет собой вектор сферической волны, распространяемой из источника в приёмники в безграничном пространстве песчаника. Вектор $\mathbf{b}^{x[i]}$ – i -ый акт каскадной дифракции, порождаемый на ребре клиновидной границы. Он представляется в виде произведения матрицы распространения типа «граница-приёмники», матриц распространения и дифрагирования типа «граница-граница» и вектора сферической волны источника $\mathbf{b}^{s[0]}$ на элементах клиновидной границы. Хотя формула (4.1) вычисляет нормальную скорость частиц и давление, далее показаны только сейсмограммы для давления.

Результаты тестирования. На Рисунке 4.3 показано давление в полном волновом поле \mathbf{b}^x , вычисленное в соответствии с формулой (4.1). Ввиду того, что алгоритм МНКВ позволяет вычислять отдельные фрагменты полного волнового поля, данное волновое представление можно разбить на части. Волновое поле \mathbf{b}^x равно сумме сферической волны источника $\mathbf{b}^{x[0]}$ в песчанике, которая не зависит от формы границы (на Рисунке 4.4 показано давление в сферической волне), и дифракционной поправки $\mathbf{b}^{x[1]}$ (на Рисунке 4.5 показано давление в этой поправке), которая демонстрирует разницу между физически реализуемым волновым полем внутри полупространства песчаника \mathbf{b}^x и обычным волновым полем источника $\mathbf{b}^{x[0]}$. Следует отметить, что для данной модели среды $\mathbf{b}^{x[i]} = 0, \forall i \geq 2$. То есть 1-ый член бесконечного ряда (4.1) полностью описывает каскадную дифракцию, порождаемую на ребре клина.

Дифракционный член $\mathbf{b}^{x[1]}$ в зоне тени состоит из сферической волны источника $\mathbf{b}^{x[0]}$ с отрицательными амплитудами и однократных и двукратных краевых волн. Их времена прихода очень близки к эйконалу краевой волны. Дифракционный член $\mathbf{b}^{x[1]}$ в освещённой зоне состоит только из однократных и двукратных краевых волн. Амплитуды дифракционной волны положительны в зоне тени ($x < 4$ км) и отрицательны в освещённой зоне ($x > 4$ км). Слабая асимметрия амплитуд дифракционной волны заметна в приёмниках $x = 3.25$ км и $x = 4.75$ км. Также отметим, что амплитуда дифракционной волны на границе тени (приёмник $x = 4.0$ км) не равна половине амплитуды сферической волны, которая предсказывается из теории

однократной дифракции. Проведённая оценка времён прихода волн в приёмники показывает, что их абсолютная ошибка составляет приблизительно 0.002 сек.

Для анализа волновой структуры сейсмограмм, был вычислен, так называемый, коэффициент дифракционного ослабления (КДО), введённый в работе [8, 9], как отношение максимального значения амплитуды волнового импульса на трассе к амплитуде обычной сферической волны при отсутствии зоны тени. На Рисунке 4.6 показано распределение кривой КДО $DAC(x)$ для компоненты b^x , зависящей от координаты приёмника x . Видно, что на границе тени значение КДО равно +0.617. Это значение отлично от значения аналитического КДО $DAC^{(1)}(4) = +1/2 = +0.5$ для амплитуды краевого волнового поля $DAC^{(1)}(x) \cdot b^{x^{[0]}}(x)$, расходящегося от ребра клиновидной границы. Аналитическая кривая $DAC^{(1)}(x)$ (Рисунок 4.6, пунктирная кривая), вычисленная по формулам из [36], соответствует обыкновенному интегралу Френеля. Ярко выраженная разница между вычисленной (Рисунок 4.6, сплошная кривая) и аналитической (Рисунок 4.6, пунктирная кривая) кривыми КДО подтверждает значимость первого акта каскадной дифракции, который не присутствует в однократной краевой волне. Стабильная разница значений в 25% между вычисленным КДО и аналитическим КДО краевой волны показывает, что 1-ый акт каскадной дифракции не может быть представлен только однократной краевой волной. Для того чтобы подтвердить корректность вычисленного КДО, необходимо рассмотреть клин в виде двух полубесконечных плоских граней, рёбра которых расположены очень близко друг к другу. После принятия этого допущения можно воспользоваться формулами двукратной дифракции, описанными с помощью комбинации обыкновенных и обобщённых интегралов Френеля в работе [27], для получения аналитического описания КДО. Данная теория представляет волновое поле b^x в зоне тени, как сумму однократной краевой волны с амплитудами $DAC^{(1)}(x) \cdot b^{x^{[0]}}(x)$ и двукратной краевой волны с амплитудами $DAC^{(2)}(x) \cdot b^{x^{[0]}}(x)$. Используя аппроксимацию этой теории в непосредственной близости к границе тени и формулы (15) и (17) из [37], можно получить амплитуды однократной краевой волны $DAC^{(1)}(4) = +1/2$ и двукратной краевой волны $DAC^{(2)}(4) = +1/8$ на границе тени $x = 4.0$ км. Таким образом, аналитическое значение КДО на границе тени представляется в виде: $DAC(4) \cong DAC^{(1)}(4) + DAC^{(2)}(4) = +5/8 = +0.625$. Видно, что разница между вычисленным значением КДО и аналитическим составляет менее 1.5%. Аналитическая кривая КДО, основанная на двукратной краевой дифракции описывает вычисленную кривую КДО с высокой точностью. Поэтому вблизи границы тени кроме обыкновенного интеграла Френеля необходимо учитывать обобщённые интегралы Френеля.

Рисунок 4.3. Волновое поле b^x .Рисунок 4.4. Волновое поле $b^{x[0]}$.Рисунок 4.5. Дифракционная поправка $b^{x[1]}$.Рисунок 4.6. Кривые КДО. Сплошная линия – $DAC(x)$, пунктирная – $DAC^{(1)}(x)$.

Анализ времени вычислений. Используя оценки из подраздела 3.10 и формулу (4.1), можно оценить прогнозируемое время вычисления полного волнового поля b^x , огибающего трёхмерный клин в песчанике. Поскольку 0-й и 1-ый члены бесконечного ряда (4.1) полностью описывают огибание волновым полем клиновидной границы, то его вычисление, в соответствии с формулой (3.22), эквивалентно 8-кратному умножению матрицы размерности $N \times N$ на вектор размерности N , где N – количество треугольников, на которые разбивается клиновидная граница. В соответствии с Таблицей 3.3 для $N=112000$ (в данном тесте) оценочное время вычисления волнового поля источника составляет примерно $8 \cdot 38 \text{ сек} = 5$ минут на 12 GPUs.

4.1.2. Модель 2: огибание волновым полем параболической границы

Описание модели. Модель 2 представляет собой имитацию трёхмерного параболического соляного выступа, окружённого песчаником (Рисунок 4.7). Двумерное сечение тестируемой модели в плоскости $y = 0$ км и система наблюдений, находящаяся в нём, показаны на Рисунке 4.8. Материальные параметры полупространства, имитирующего песчаник, и параметры системы наблюдений аналогичны соответствующим параметрам модели 1, которые описаны в подразделе 4.1.1.

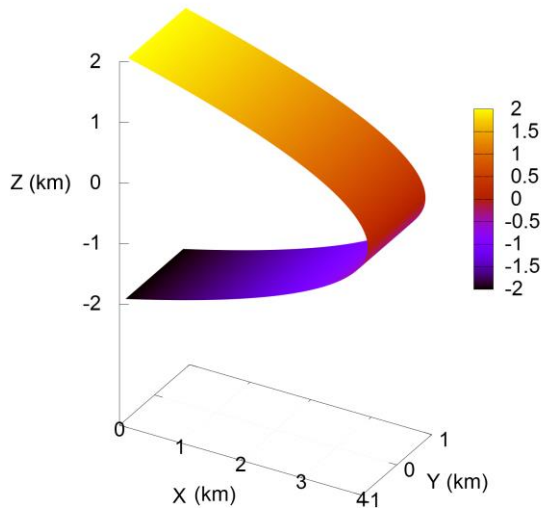


Рисунок 4.7. Параболическая граница.

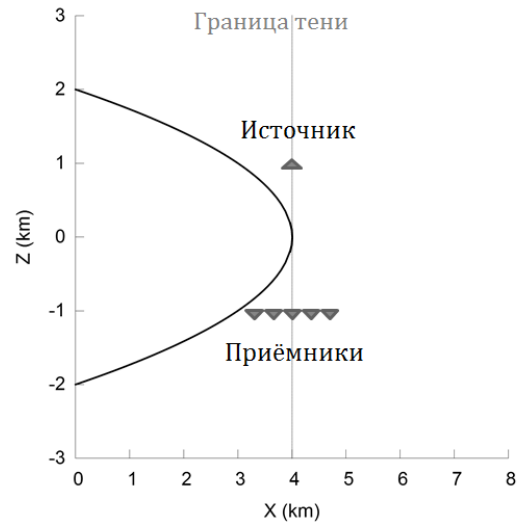


Рисунок 4.8. Двумерное сечение модели среды и система наблюдений.

Граница полупространства, имитирующего песчаник, задана в виде трёхмерного параболического цилиндра, состоящего из верхней $z(x, y) = +\sqrt{4-x}$ и нижней $z(x, y) = -\sqrt{4-x}$ граней, соединённых общей прямой, которая расположена на линии $x = 4$ км. Поскольку вдоль этой прямой нет излома границы, то будем эту прямую формально называть ребром. Радиус кривизны параболической границы в точках «формального» ребра составляет 0.5 км.

Построение решения с помощью МНКВ. Волновое поле b^x в приёмниках для модели огибания параболического соляного тела в песчанике, как и для модели 1, вычисляется по матрично-векторной формуле (4.1). Хотя формула (4.1) вычисляет нормальную скорость частиц и давление, далее показаны только сейсмограммы для давления.

Результаты тестирования. На Рисунке 4.9 показано волновое поле b^x , вычисленное по формуле (4.1). Рисунок 4.10 изображает компоненту $b^{x[0]}$ формулы (4.1), которая представляет собой сферическую волну в приёмниках. Эта волна не зависит от формы границы, поэтому

совпадает с волной, изображённой на Рисунке 4.4. На Рисунке 4.11 показана компонента $b^{x[1]}$ формулы (4.1). Данная компонента представляет собой дифракционную поправку 1-го порядка. На Рисунке 4.9 видна сильная асимметрия дифракционных амплитуд относительно границы тени $x = 4$ км. Этот эффект объясняется наличием в зоне тени $x = 4$ км ползущей вдоль границы волны, а также однократных и двукратных краевых волн, распространяющихся от ребра параболической границы. В работе [7] было показано, что в зоне тени дифрагированная волна может быть представлена в виде суммы волн, дифрагированных на клине, ребро которого совпадает с ребром параболического цилиндра, и дополнительной ползущей волны. На Рисунке 4.12 показана сейсмограмма, полученная путём вычитания сейсмограммы, показанной на Рисунке 4.3 для модели 1, из сейсмограммы, показанной на Рисунке 4.9 для текущей модели 2. В зоне тени полученной сейсмограммы видна ползущая волна, амплитуды которой возрастают в направлении к глубокой тени (от $x = 4$ км к $x = 3.25$ км). На Рисунке 4.13 показана кривая КДО $DAC(x)$ для волнового поля b^x как функция от координат приёмников. Значение этого КДО на границе тени (приёмник $x = 4$ км) равно $DAC(4) = 0.56$. Кривая на Рисунке 4.14 иллюстрирует кривую КДО $DAC(x)$ для ползущей волны. Значение этого КДО на границе тени (приёмник $x = 4$ км) равно $DAC(4) = 0.058$.

Анализ времени вычислений. Волновое поле b^x в приёмниках для модели огибания параболического соляного тела в песчанике, как и для модели 1, вычислялось по матрично-векторной формуле (4.1). Параболическая граница, как и в случае модели 1, была дискретизирована $N = 112000$ треугольниками. Поэтому прогнозируемое время вычисления волнового поля b^x в приёмниках, как и в случае модели 1, составило около 5 минут на 12 GPUs.

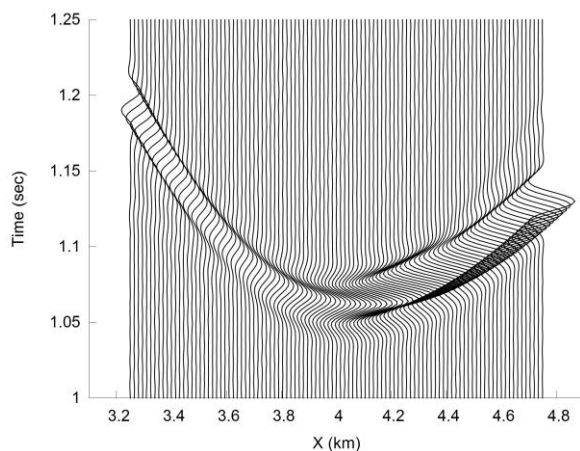


Рисунок 4.9. Волновое поле b^x .

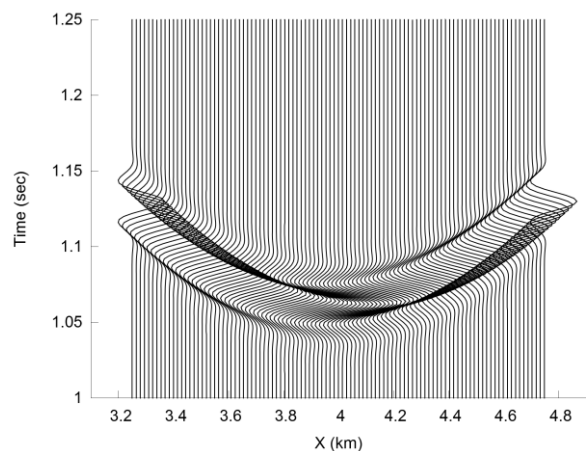


Рисунок 4.10. Волновое поле $b^{x[0]}$.

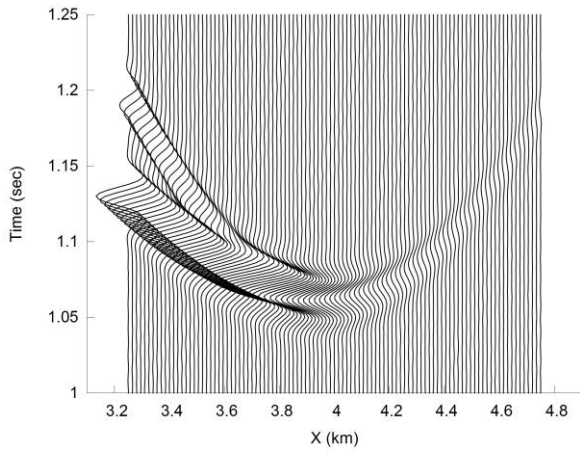


Рисунок 4.11. Дифракционная поправка $b^{x[1]}$.

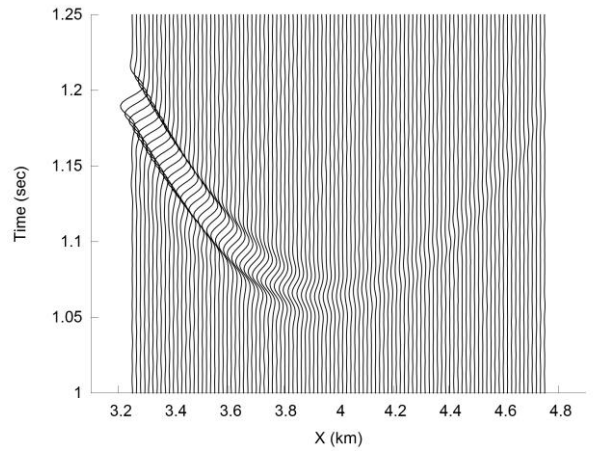


Рисунок 4.12. Ползущая волна для параболической границы.

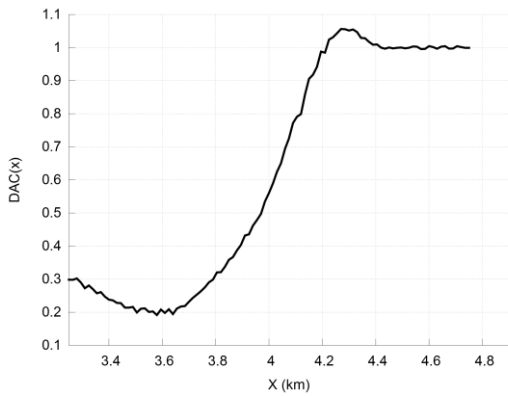


Рисунок 4.13. Кривая КДО для волнового поля b^x .

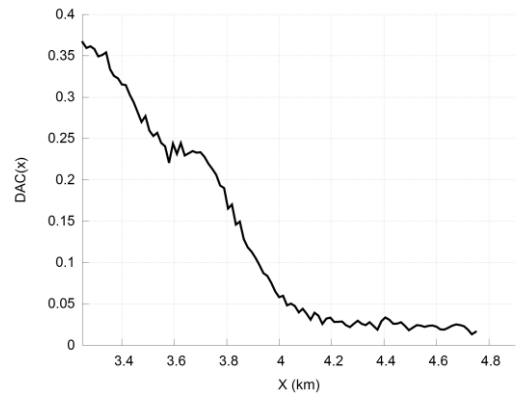


Рисунок 4.14. Кривая КДО для ползущей волны.

4.1.3. Модель 3: огибание волновым полем гиперболической границы

Описание модели. Модель 3 представляет собой имитацию трёхмерного гиперболического соляного выступа, окружённого песчаником (Рисунок 4.15). Двумерное сечение тестируемой модели в плоскости $y = 0$ км и система наблюдений, находящаяся в нём, показаны на Рисунке 4.16. Материальные параметры полупространства, имитирующего песчаник, и параметры системы наблюдений аналогичны соответствующим параметрам модели 1, которые описаны в подразделе 4.1.1.

Граница полупространства, имитирующего песчаник, задана в виде трёхмерного гиперболического цилиндра, состоящего из верхней $z(x, y) = +0.4\sqrt{(5.25-x)^2 - 1.25^2}$ и нижней $z(x, y) = -0.4\sqrt{(5.25-x)^2 - 1.25^2}$ граней, соединённых общим «формальным» ребром, которое

расположено на линии $x = 4$ км. Радиус кривизны гиперболической границы в точках «формального» ребра составляет 0.2 км.

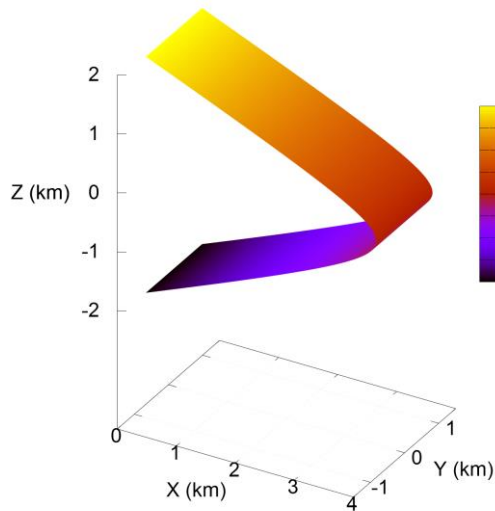


Рисунок 4.15. Гиперболическая граница.

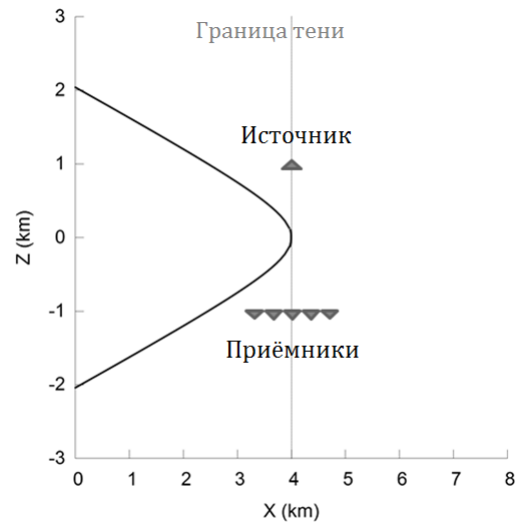


Рисунок 4.16. Двумерное сечение модели среды и система наблюдений.

Построение решения с помощью МНКВ. Волновое поле b^x в приёмниках для модели огибания гиперболического соляного тела в песчанике, как и для модели 1, вычисляется по матрично-векторной формуле (4.1). Хотя формула (4.1) вычисляет нормальную скорость частиц и давление, далее показаны только сейсмограммы для давления.

Результаты тестирования. На Рисунке 4.17 показано полное волновое поле b^x в приёмниках, вычисленное по формуле (4.1). Рисунок 4.18 изображает компоненту $b^{x[0]}$ формулы (4.1), которая представляет собой сферическую волну в приёмниках. Эта волна не зависит от формы границы, поэтому совпадает с волной, изображённой на Рисунке 4.4. На Рисунке 4.19 показана компонента $b^{x[1]}$ формулы (4.1). Данная компонента представляет собой дифракционную поправку 1-го порядка. На Рисунке 4.24 показана ползущая волна, полученная путём вычитания сейсмограммы, показанной на Рисунке 4.3, из сейсмограммы, показанной на Рисунке 4.17. На Рисунке 4.24 видна ползущая волна, амплитуды которой возрастают в направлении к глубокой тени. Заметим, что амплитуды ползущей волны для гиперболической границы слабее, чем для параболической. Этот эффект объясняется зависимостью амплитуд от кривизны границы в окрестности её ребра: чем ближе абсолютное значение этого радиуса к нулю, тем слабее ползущая волна в зоне тени и тем ближе форма границы приближается к форме клина. На Рисунке 4.21 показана кривая КДО $DAC(x)$ для волнового поля b^x , огибающего гиперболическую границу, в зависимости от координаты приёмников. Значение

этого КДО на границе тени (приёмник $x = 4$ км) равно $DAC(4) = 0.551$. Кривая на Рисунке 4.22 иллюстрирует КДО $DAC(x)$ для ползущей волны. Значение этого КДО на границе тени равно $DAC(4) = 0.069$.

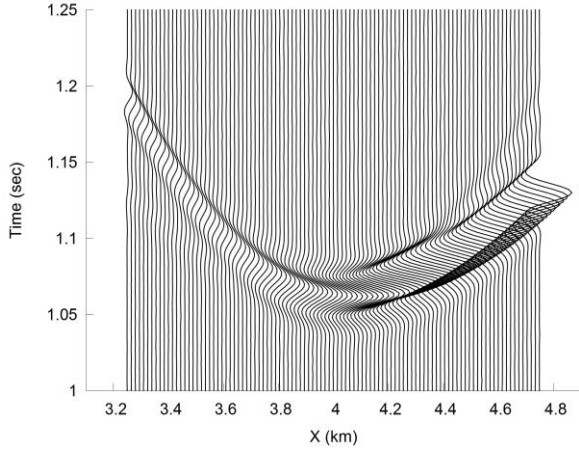


Рисунок 4.17. Волновое поле b^x .

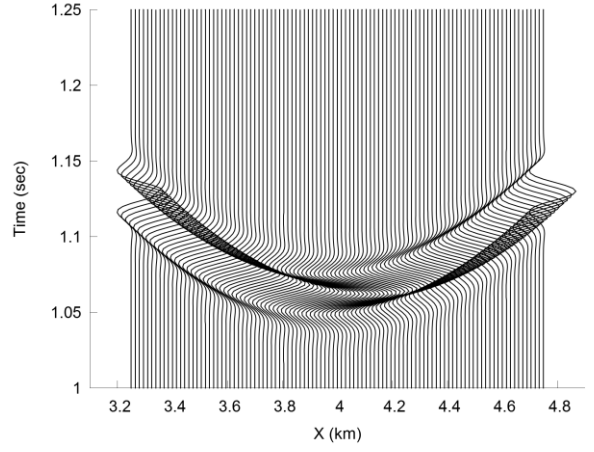


Рисунок 4.18. Волновое поле $b^{x[0]}$.

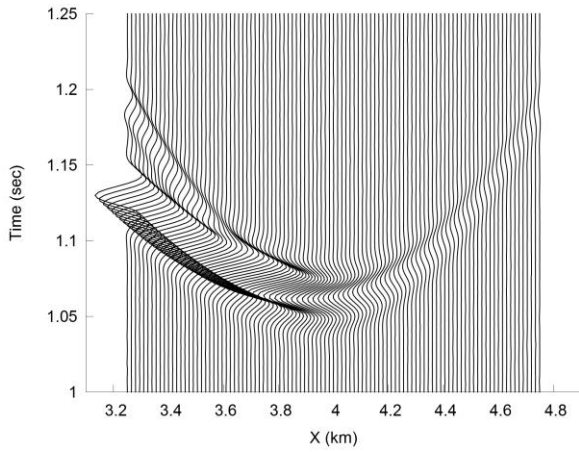


Рисунок 4.19. Дифракционная поправка $b^{x[1]}$.

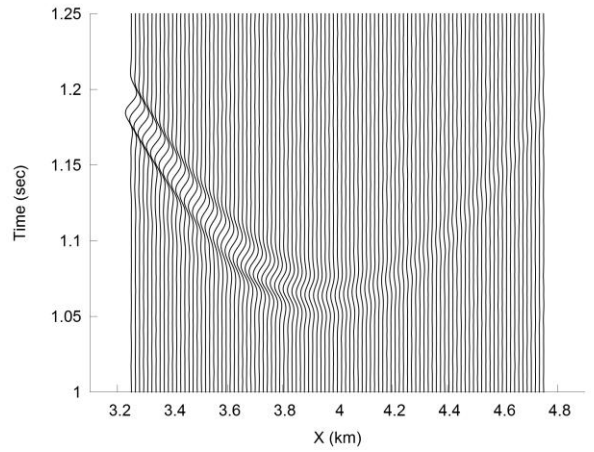


Рисунок 4.20. Ползущая волна для гиперболической границы.

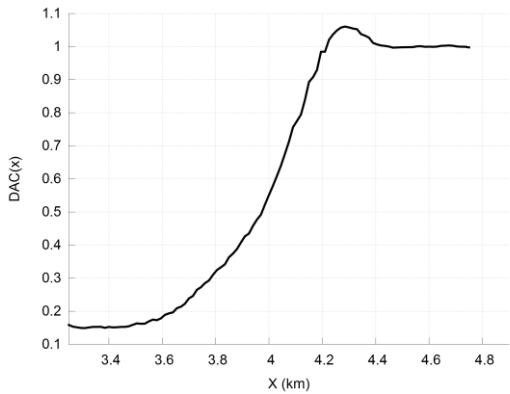


Рисунок 4.21. Кривая КДО для волнового поля b^x .

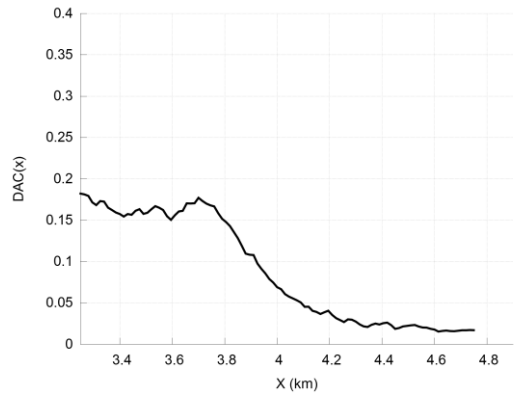


Рисунок 4.22. Кривая КДО для ползущей волны.

Анализ времени вычислений. Волновое поле b^x в приёмниках для модели огибания гиперболического соляного тела в песчанике, как и для модели 1, вычислялось по матрично-векторной формуле (4.1). Гиперболическая граница, как и в случае модели 1, была дискретизирована $N = 112000$ треугольниками. Поэтому прогнозируемое время вычисления волнового поля b^x в приёмниках, как и в случае модели 1, составило около 5 минут на 12 GPUs.

4.1.4. Модель 4: огибание волновым полем 2-клинной границы

Описание модели. Модель 4 представляет собой имитацию трёхмерного 2-клинного соляного выступа, окружённого песчаником (Рисунок 4.23). Двумерное сечение тестируемой модели в плоскости $y = 0$ км и система наблюдений, находящаяся в нём, показаны на Рисунке 4.24. Материальные параметры полупространства, имитирующего песчаник, и параметры системы наблюдений аналогичны соответствующим параметрам модели 1, которые описаны в подразделе 4.1.1. На сейсмограммах показана только одна компонента волнового поля – давление.

Граница полупространства, имитирующего песчаник, задана в виде трёхмерного 2-клина, состоящего из четырёх граней, соединённых тремя рёбрами. Верхняя грань S_1 2-клина задаётся в виде аналитической формулы $z(x, y) = 0.41(4 - x)$, вторая грань S_2 2-клина задаётся формулой $z(x, y) = -0.41(4 - x)$. Эти грани образуют клин V_1 с ребром на линии ($x = 4$ км, $z = 0$ км). Третья грань S_3 2-клина задаётся в виде аналитической формулы $z(x, y) = 0.41(4 - x) - 1$, нижняя грань S_4 2-клина задаётся формулой $z(x, y) = -0.41(4 - x) - 1$. Эти грани образуют клин V_2 с ребром на линии ($x = 4$ км, $z = -1$ км).

Построение решения с помощью МНКВ. Волновое поле b^x в приёмниках для модели огибания 2-клинного соляного тела в песчанике, как и для модели 1, вычисляется по матрично-векторной формуле (4.1). Хотя формула (4.1) вычисляет нормальную скорость частиц и давление, далее показаны только сейсмограммы для давления.

Результаты тестирования. На Рисунке 4.25 показано полное волновое поле b^x в приёмниках, вычисленное по формуле (4.1). На сейсмограмме видны две волны в зоне тени для приёмников $x < 4$ км и одна волна в освещённой зоне для приёмников $x > 4$ км. Времена прихода дифракционных волновых полей соответствует эйконалам краевых волн от рёбер клиньев V_1 и V_2 . Рисунок 4.26 изображает компоненту $b^{x(0)}$ формулы (4.1), которая представляет собой сферическую волну в приёмниках. Эта волна не зависит от формы границы.

На Рисунке 4.27 показана компонента $b^{x[1]}$ формулы (4.1), которая представляет собой дифракционную поправку 1-го порядка.

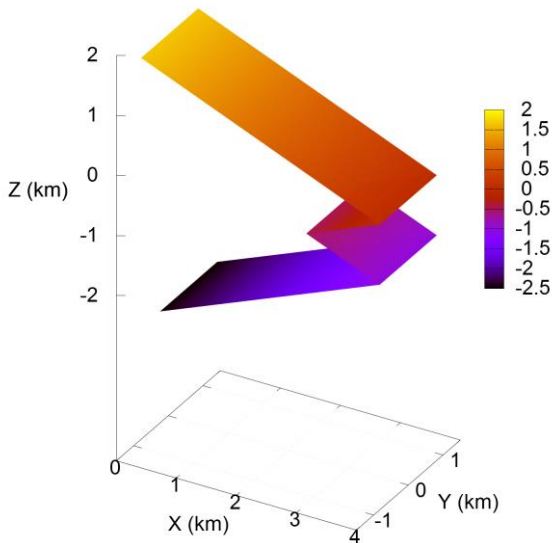


Рисунок 4.23. 2-клинная граница.

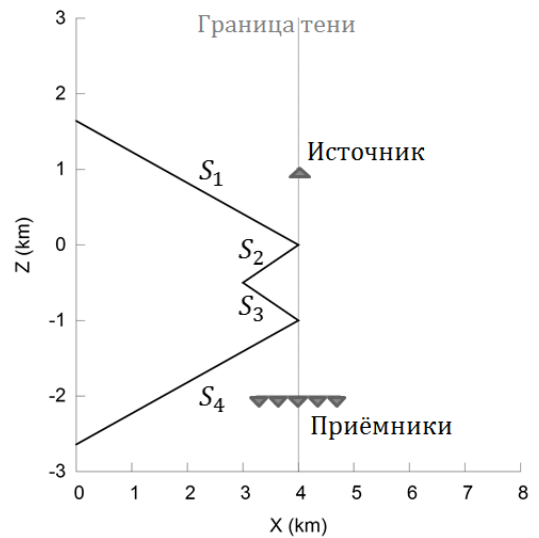


Рисунок 4.24. Двумерное сечение модели среды и система наблюдений.

Следует отметить, что для данной модели среды $b^{x[i]} = 0, \forall i \geq 2$, т.е. 1-ый член бесконечного ряда (4.1) описывает каскадную дифракцию для 2-клинной модели. На Рисунке 4.28 показана кривая КДО $DAC(x)$ как функция от координаты приёмников для компоненты полного волнового поля b^x , огибающего 2-клинную границу. Значение КДО на границе тени (приёмник $x = 4$ км) равно $DAC(4) = 0.533$.

Волновая структура компоненты b^x и $b^{x[1]}$ является сложной и представляет собой интерференцию нескольких волн. В работе [8] было показано, что дифракционная поправка $b^{x[1]}$ может быть представлена, как сумма дифракционной поправки для клина V_1 , дифракционной поправки для клина V_2 и дифракционной поправки, порождаемой на полуэкранах S_2S_4 :

$$b^{x[1]} = b_{V_1}^{x[1]} + b_{V_2}^{x[1]} + b_{S_2S_4}^{x[1]} .$$

Следующие тесты показывают более детальную структуру компоненты $b^{x[1]}$.

На Рисунке 4.29 показана компонента $b_{V_1}^{x[1]}$. Эта компонента представляет собой двукратную дифракцию на близко расположенных друг к другу рёбрах граней S_1 и S_2 .

Рисунок 4.30 показывает кривую КДО для $b_{V_1}^{x[1]}$. Значение КДО на границе тени (приёмник $x = 4$ км) равно $DAC(4) = 0.38$.

На Рисунке 4.31 показана компонента $b_{V_2}^{x[1]}$. Эта компонента представляет собой двукратную дифракцию на близко расположенных друг к другу рёбрах граней S_3 и S_4 . Рисунок 4.32 показывает кривую КДО для $b_{V_2}^{x[1]}$. Значение КДО на границе тени (приёмник $x = 4$ км) равно $DAC(4) = 0.39$.

На Рисунке 4.33 показана компонента $b_{S_4S_2}^{x[1]}$. Эта компонента представляет собой двукратную дифракцию на удалённых друг от друга рёбрах граней S_2 и S_4 . Рисунок 4.34 показывает кривую КДО для $b_{S_4S_2}^{x[1]}$. Значение КДО на границе тени (приёмник $x = 4$ км) равно $DAC(4) = 0.333$.

Для описания дифракционных амплитуд в окрестности границы тени была использована малоугловая аппроксимация двойного контурного интеграла Джонса [27], представленного обобщённым интегралом типа Рубиновича $Ru(p, \theta, \zeta)$, который был введён в работе [37]. Для верхнего и нижнего клиньев V_1 и V_2 совпадение рёбер граней $S_1 S_2$ и $S_3 S_4$, которые их образуют, ведёт к значениям аргументов $p \rightarrow 0$ и $\theta \rightarrow \pi/2$. Близость приёмника к границе тени соответствует значению аргумента $\zeta \rightarrow 0$. Поэтому вблизи границы тени $x \rightarrow 4.0$ КДО имеет предельные значения $DAC(4) \cong 1 - [W_1(0) + H_{12}^1(0, 0) - Ru_{12}^2(0, \pi/2, 0)]$. Применение формул (15) и (17) из работы [37] позволяет получить предельные значения амплитуд краевой волны $W_1(0) = 1/2$, первой двукратной краевой волны $H_{12}^1(0, 0) = 1/4$ и второй двукратной краевой волны $Ru_{12}^2(0, \pi/2, 0) = 1/8$. В итоге для дифракционных компонент $b_{V_1}^{x[1]}$ и $b_{V_2}^{x[1]}$ можно получить аналитическое значение КДО на границе тени, которое оказалось равно $DAC(4) \cong 3/8 = 0.375$. Предельное значение для дифракционной компоненты $b_{S_4S_2}^{x[1]}$ оказалось равно $DAC(4) \cong 1 - [W_1(0) + H_{12}^1(0, 0) - H_{12}^2(0, \pi/3)]$. Применение формул (15) и (17) из работы [37] позволяет получить предельные значения амплитуд краевой волны $W_1(0) = 1/2$, первой двукратной краевой волны $H_{12}^1(0, 0) = 1/4$ и второй двукратной краевой волны $H_{12}^2(0, \pi/3) = 1/12$. В итоге, для дифракционной компоненты $b_{S_4S_2}^{x[1]}$ можно получить аналитическое значение КДО на границе тени, которое оказалось равно $DAC(4) = 1/3 = 0.333$. Численные значения КДО отличаются от соответствующих аналитических значений с относительной погрешностью между 2% и 4%.

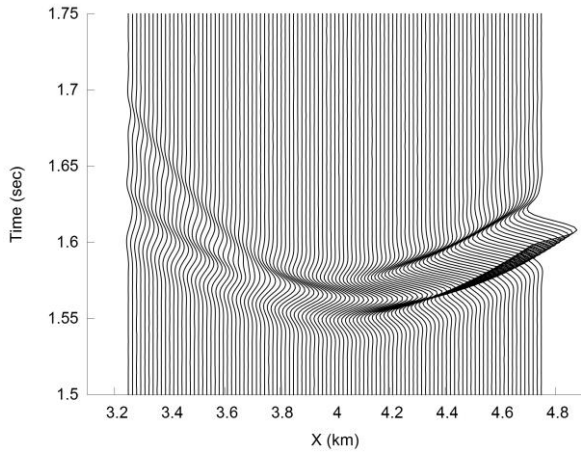


Рисунок 4.25. Волновое поле b^x .

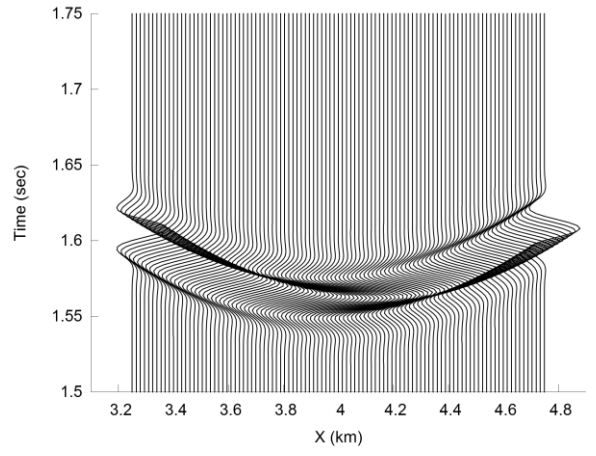


Рисунок 4.26. Волновое поле $b^{x[0]}$.

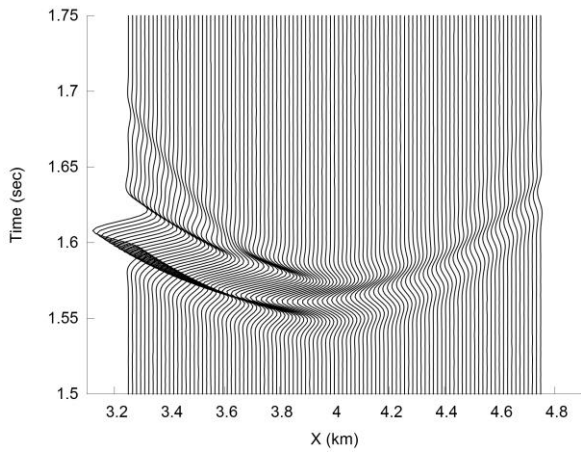


Рисунок 4.27. Дифракционная поправка $b^{x[1]}$.

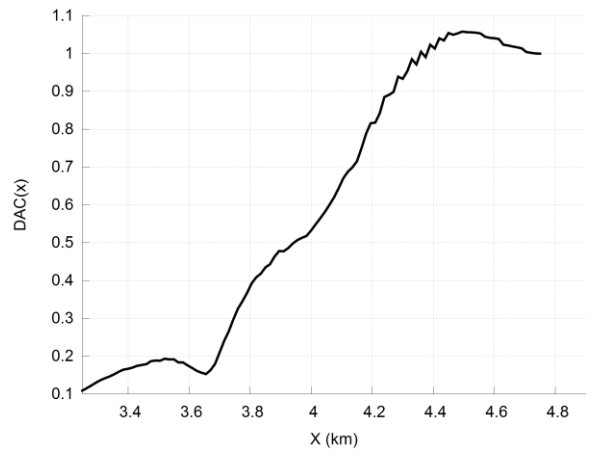


Рисунок 4.28. Кривая КДО для волнового поля b^x .

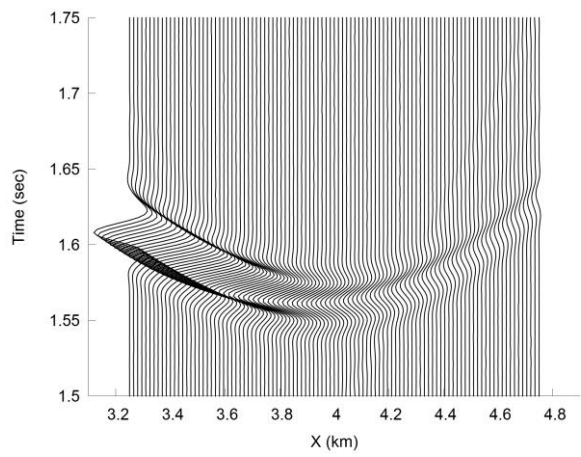


Рисунок 4.29. Волновое поле $b_{V_1}^{x[1]}$.

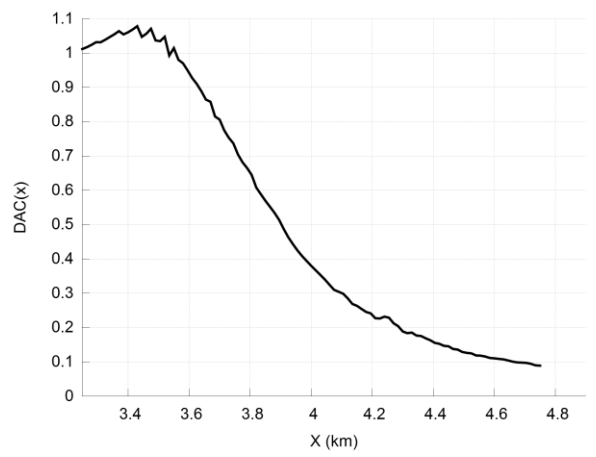


Рисунок 4.30. Кривая КДО для волнового поля $b_{V_1}^{x[1]}$.

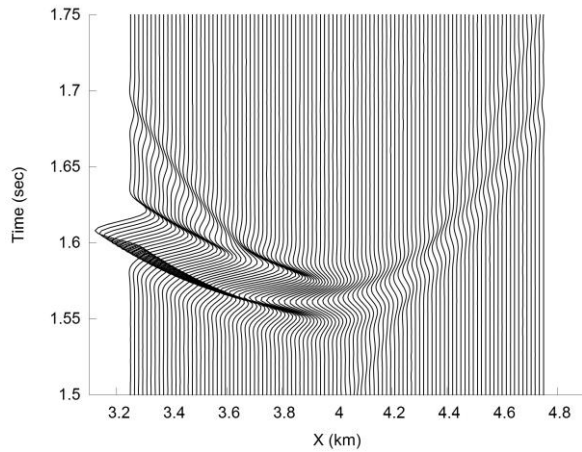


Рисунок 4.31. Волновое поле $b_{V_2}^{x[1]}$.

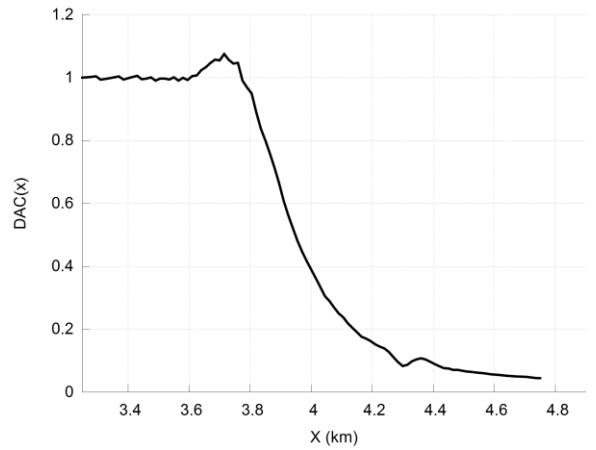


Рисунок 4.32. Кривая КДО для волнового поля $b_{V_2}^{x[1]}$.

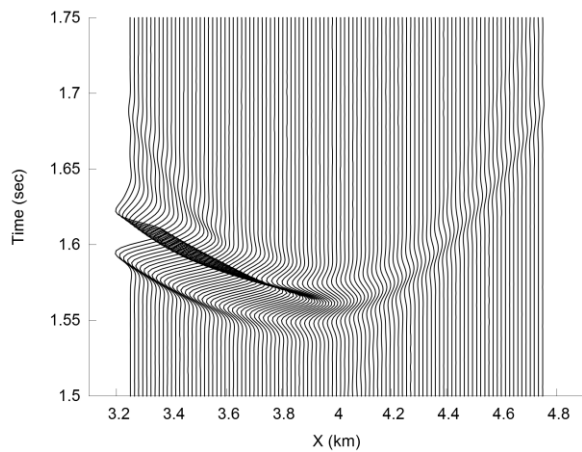


Рисунок 4.33. Волновое поле $b_{S_4 S_2}^{x[1]}$.

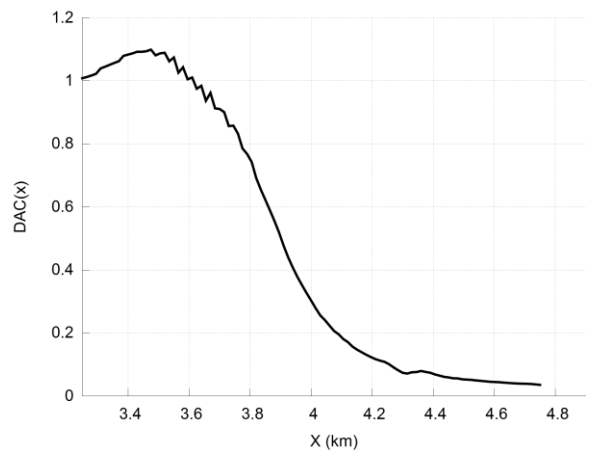


Рисунок 4.34. Кривая КДО для волнового поля $b_{S_4 S_2}^{x[1]}$.

Анализ времени вычислений. Волновое поле b^x в приёмниках для модели огибания 2-клинного соляного тела в песчанике, как и для модели 1, вычислялось по матрично-векторной формуле (4.1). 2-клинная граница была дискретизирована $N = 150000$ треугольниками. Поэтому в соответствии с формулой (4.1) и Таблицей 3.3 для $N = 150000$ прогнозируемое время составляет примерно $8 \cdot 83$ сек = 11 минут на 12 GPUs. Для ускорения вычислений возможно увеличение количества вычислительных устройств.

4.1.5. Модель 5: огибание волновым полем 2-параболической границы

Описание модели. Модель 5 представляет собой имитацию трёхмерного 2-параболического соляного выступа, окружённого песчаником (Рисунок 4.35). Двумерное сечение тестируемой модели в плоскости $y = 0$ км и система наблюдений, находящаяся в нём,

показаны на Рисунке 4.36. Материальные параметры полупространства, имитирующего песчаник, и параметры системы наблюдений аналогичны соответствующим параметрам модели 1, которые описаны в подразделе 4.1.1.

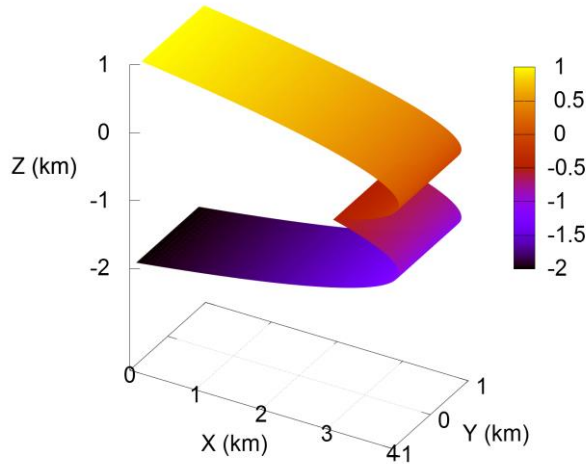


Рисунок 4.35. 2-параболическая граница.

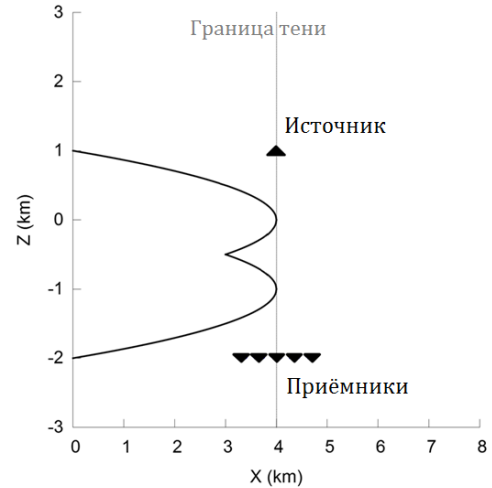


Рисунок 4.36. Двумерное сечение модели среды и система наблюдений.

Граница полупространства, имитирующего песчаник, задана в виде трёхмерного 2-параболического цилиндра, состоящего из четырёх граней, соединённых тремя рёбрами. Верхняя грань 2-параболы задаётся аналитической формулой $z(x, y) = \sqrt{1 - x/4}$, вторая грань 2-параболы – формулой $z(x, y) = -\sqrt{1 - x/4}$, третья грань – формулой $z(x, y) = -1 + \sqrt{1 - x/4}$, нижняя грань – формулой $z(x, y) = -1 - \sqrt{1 - x/4}$. Верхняя и вторая грани 2-параболы соединены общим формальным ребром, расположенным на линии ($x = 4$ км, $z = 0$ км), вторая и третья грани – ребром, расположенным на линии ($x = 4$ км, $z = -0.5$ км), третья и нижняя грани – формальным ребром, расположенным на линии ($x = 4$ км, $z = -1$ км).

Построение решения с помощью МНКВ. Волновое поле b^x в приёмниках для модели огибания 2-клинного соляного тела в песчанике, как и для модели 1, вычисляется по матрично-векторной формуле (4.1). Хотя формула (4.1) вычисляет нормальную скорость частиц и давление, далее показаны только сейсмограммы для давления.

Результаты тестирования. На Рисунке 4.37 показано волновое поле источника в приёмниках $b^{x[0]}$, которая представляет собой сферическую волну, т.к. не учитывается дифракция, порождаемая ребром и вогнутыми частями 2-параболической границы. Рисунок 4.38 демонстрирует дифракционную поправку первого порядка $b^{x[1]}$ к волновому полю $b^{x[0]}$. Видно, что эта поправка корректирует не только дифракционные волны, но и саму

сферическую волну. То же самое можно видеть на сейсмограмме $b^{x[2]}$, представляющую собой дифракционную поправку второго порядка к волновому полю $b^{x[0]}$ (Рисунок 4.39). Рисунки 4.40 и 4.41 демонстрируют дифракционные поправки $b^{x[3]}$ и $b^{x[4]}$ третьего и четвёртого порядков, соответственно. Эти волны достаточно малы. Последующие члены бесконечного ряда (4.1) оказались равны нулю: $b^{x[i]} = 0, \forall i \geq 5$. На Рисунке 4.42 показано физически реализуемое волновое поле, огибающее 2-параболическую границу $b^x = b^{x[0]} + b^{x[1]} + b^{x[2]} + b^{x[3]} + b^{x[4]}$.

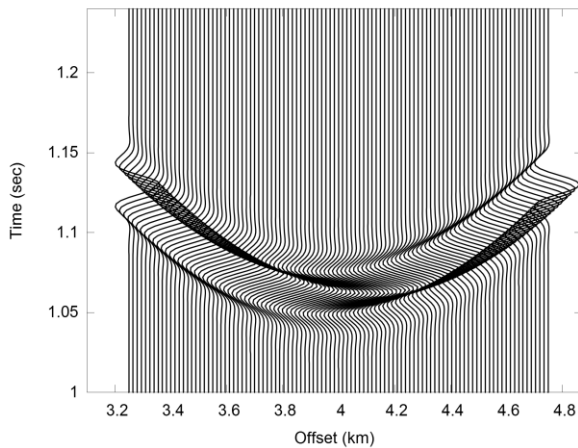


Рисунок 4.37. Волновое поле $b^{x[0]}$.

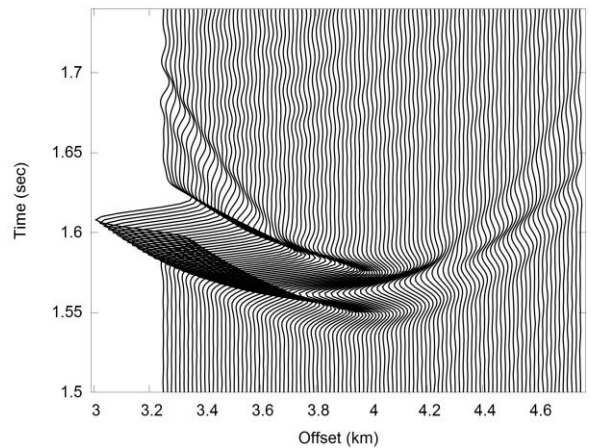


Рисунок 4.38. Дифракционная поправка $b^{x[1]}$.

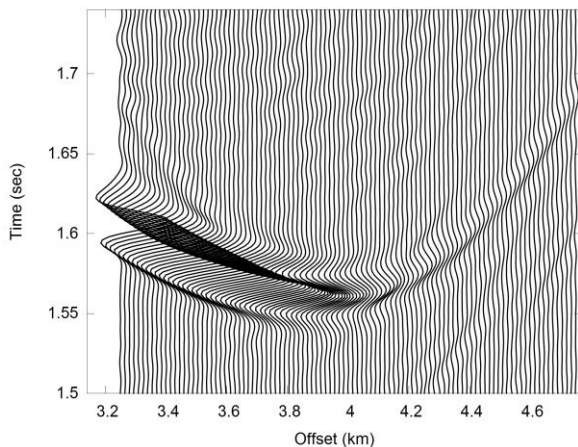


Рисунок 4.39. Дифракционная поправка $b^{x[2]}$.

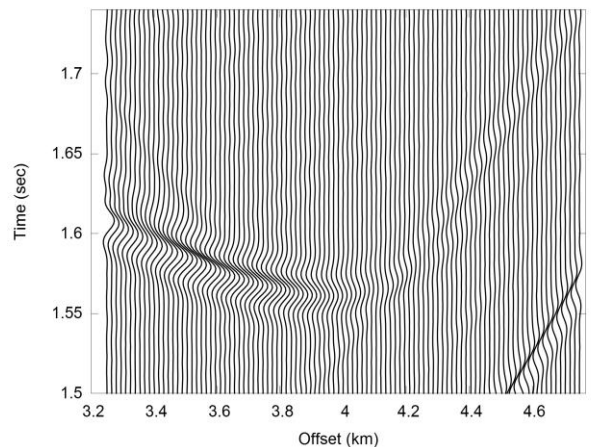


Рисунок 4.40. Дифракционная поправка $b^{x[3]}$.

Анализ времени вычислений. Используя оценки из подраздела 3.10 и формулу (4.1), можно оценить прогнозируемое время вычисления физически реализуемого волнового поля источника b^x , огибающего трёхмерную 2-параболическую границу в песчанике. Основные трудоёмкие вычисления приходятся на вычисление дифракционных поправок $b^{x[i]}$, $i = 1 \dots 4$. Используя формулу (3.22), получаем, что время вычисления огибания волновым полем 2-

параболической границы эквивалентно $4 \cdot (4 + 1) \cdot 4 = 80$ -кратному умножению матрицы размерности $N \times N$ на вектор размерности N , где N – количество треугольников, на которые разбивается 2-параболическая граница. В соответствии с Таблицей 3.3 для $N = 200000$ (в данном тесте) прогнозируемое время составляет примерно $80 \cdot 148$ сек = 3 ч. 18 мин. на 12 GPUs. Для ускорения вычислений возможно увеличение количества вычислительных устройств.

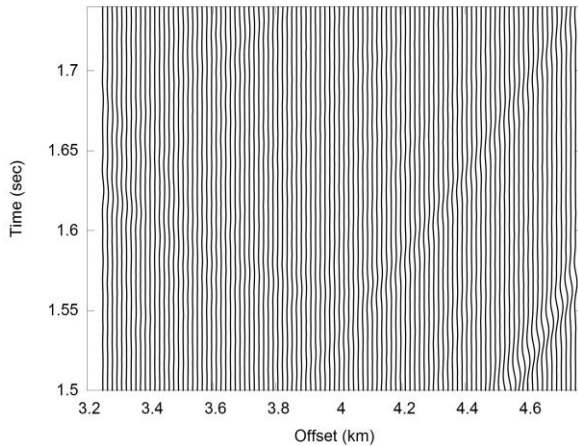


Рисунок 4.41. Дифракционная поправка $b^{x[4]}$.

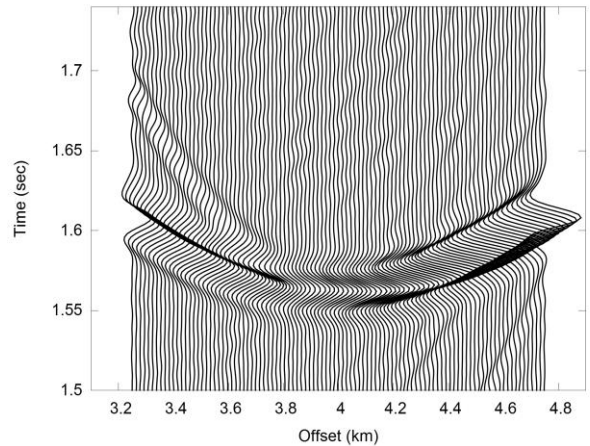


Рисунок 4.42. Волновое поле

$$b^x = b^{x[0]} + b^{x[1]} + b^{x[2]} + b^{x[3]} + b^{x[4]}.$$

4.1.6. Модель 6: преломление волнового поля через клиновидную и параболическую границы

Описание модели. В тестах на преломление волнового поля рассматриваются две двухблочные модели, аналогичные моделям из подразделов 4.1.1 и 4.1.2 – с клиновидной (V-образной) и параболической (U-образной) границами.

На Рисунках 4.43 и 4.44 показаны двумерные сечения V- и U-моделей, соответственно, в плоскости $y = 0$ км и система наблюдений, находящаяся в нём. Граница каждой модели делит пространство на две области: \mathbb{D}_1 (имитирует песчаник) и \mathbb{D}_2 (имитирует соляной выступ).

Материальные параметры области \mathbb{D}_1 описываются плотностью 2.0 г/см³ и скоростью распространения продольной волны 2.0 км/с. Материальные параметры области \mathbb{D}_2 описываются плотностью 3.0 г/см³ и скоростью распространения продольной волны 4.0 км/с.

Параметры источника и линии приёмников «линия 1» для V- и U-моделей аналогичны соответствующим параметрам для модели 1 из подраздела 4.1.1. В данных тестах дополнительно используется профиль из 101 приёмника «линия 2», расположенный в области

\mathbb{D}_2 вдоль прямой линии от точки с координатами $(x=2\text{ км}, y=0\text{ км}, z=0\text{ км})$ до точки с координатами $(x=3.5\text{ км}, y=0\text{ км}, z=0\text{ км})$. Шаг между приёмниками $\Delta x=0.015\text{ км}$.

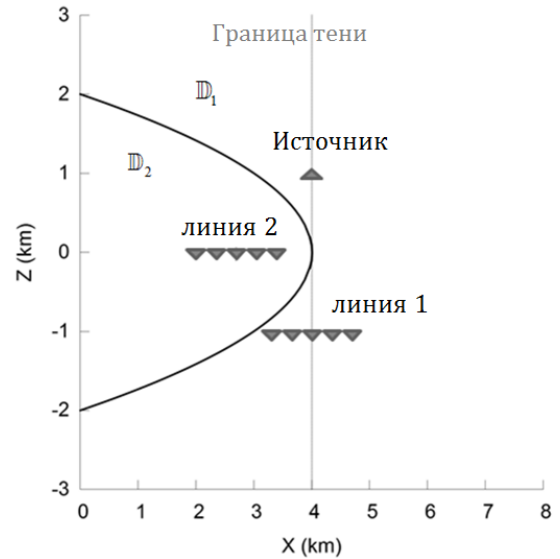
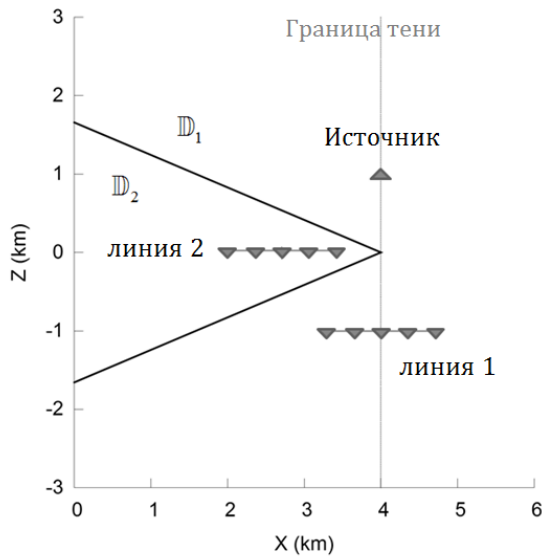


Рисунок 4.43. Двумерное сечение V-модели и система наблюдений.

Рисунок 4.44. Двумерное сечение U-модели и система наблюдений.

Для каждой модели вычисляются два волновых фрагмента: 1) однократно-преломленное волновое поле через V- или U-образную границу из среды, имитирующей песчаник (область \mathbb{D}_1), в среду, имитирующей соль (область \mathbb{D}_2), в приёмниках «линия 2»; 2) двукратно-преломленное волновое поле через V- или U-образную границу (из области \mathbb{D}_1 в область \mathbb{D}_2 с прохождением волнового поля по \mathbb{D}_2 и преломлением в область \mathbb{D}_1) на профиле приёмников «линия 1».

Построение решения с помощью МНКВ. Для обеих моделей траектория распространения волнового поля источника в приёмники «линия 1» соответствует следующему волновому коду:

- 1) распространение волнового поля по песчанику от источника на границу;
- 2) преломление волнового поля через границу из песчаника в соль;
- 3) распространение волнового поля по соли с границы на самую себя;
- 4) преломление волнового поля через границу из соли в песчаник;
- 5) распространение волнового поля от границы в приёмники по песчанику.

Применяя формулу (В.11), двукратно-преломленное волновое поле можно записать в виде следующей аналитической матрично-векторной формулы:

$$\mathbf{b}^x = \mathbf{P}^{xs} \cdot \mathbf{T}_{12} \cdot \mathbf{P}^{ss} \cdot \mathbf{T}_{21} \cdot \mathbf{b}^s. \quad (4.2)$$

Здесь, \mathbf{b}^s – вектор граничных значений физически реализуемого волнового поля источника, представляемый как $\mathbf{b}^s = \mathbf{b}^{s[0]} + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{b}^{s[i]}$ в соответствии с формулой (3.4); \mathbf{T}_{21} – матрица коэффициентов преломления волнового поля через границу из области \mathbb{D}_1 в область \mathbb{D}_2 ; \mathbf{P}^{ss} – физически реализуемая матрица распространения волнового поля с границы на саму себя внутри области \mathbb{D}_2 , представляемая как $\mathbf{P}^{ss} = \mathbf{K}^{ss} + \left[\sum_{i=1}^{\infty} (\mathbf{K}^{ss} \mathbf{D}^{ss})^i \right] \mathbf{K}^{ss}$ в соответствии с формулой (3.6); \mathbf{T}_{12} – матрица коэффициентов преломления волнового поля через границу из области \mathbb{D}_2 в область \mathbb{D}_1 ; \mathbf{P}^{xs} – физически реализуемая матрица распространения волнового поля с границы в приёмники внутри области \mathbb{D}_1 , представляемая как $\mathbf{P}^{xs} = \mathbf{K}^{xs} + \mathbf{K}^{xs} \sum_{i=1}^{\infty} (\mathbf{K}^{ss} \mathbf{D}^{ss})^i \mathbf{K}^{ss}$ в соответствии с формулой (3.11).

Для обеих моделей траектория распространения волнового поля источника в приёмники «линия 2» соответствует следующему волновому коду:

- 1) Распространение волнового поля от источника на границу по песчанику;
- 2) Преломление волнового поля через границу из песчаника в соль;
- 3) Распространение волнового поля от границы в приёмники по соли.

Применяя формулу (В.10), однократно-преломленное волновое поле можно записать в виде следующей аналитической матрично-векторной формулы:

$$\mathbf{b}^x = \mathbf{P}^{xs} \cdot \mathbf{T}_{21} \cdot \mathbf{b}^s. \quad (4.3)$$

Хотя формулы (4.2) и (4.3) вычисляют нормальную скорость частиц и давление, далее показаны только сейсмограммы для давления.

Результаты тестирования.

На Рисунке 4.45 показано однократно преломленное волновое поле в приёмниках «линия 2», соответствующее формуле (4.3), которое представляет собой суперпозицию преломленной волны через V-образную границу из области \mathbb{D}_1 (песчаник) в область \mathbb{D}_2 (соль) и краевой волны, дифрагированной от внутреннего ребра V-образной границы. Краевая волна имеет линейный годограф (времена вступления волны) и слабые амплитуды, в сравнении с однократно преломленной волной. Все дифракционные компоненты формулы (4.3) для V-

образной границы оказались равны нулю: $b^{s[i]} = 0, \forall i \geq 1$ для вектора волнового поля источника, падающего на границу, и $(K^{ss}D^{ss})^i = 0, \forall i \geq 1$ для физически реализуемой матрицы распространения P^{xs} типа «граница-приёмники».

На Рисунке 4.46 показано двукратно преломленное волновое поле в приёмниках «линия 1», вычисленное в соответствии с формулой (4.2). Все дифракционные компоненты формулы (4.2) для V-образной границы оказались равны нулю: $b^{s[i]} = 0, \forall i \geq 1$ для вектора волнового поля источника, падающего на границу, и $(K^{ss}D^{ss})^i = 0, \forall i \geq 1$ для физически реализуемых матриц распространения P^{ss} типа «граница-граница» и P^{xs} типа «граница-приёмники». Граница тени двукратно преломленного волнового поля пересекает приёмник линии «линия 1» приблизительно в точке $x = 4.466$ км. Для приёмников $x > 4.466$ км на сейсмограмме видна только дифракционная волна. Для приёмников $x < 4.466$ км на сейсмограмме видна суперпозиция преломленной и дифракционной волн. На Рисунке 4.47 показано полное волновое поле в приёмниках для V-модели. Это поле представляет суперпозицию волнового поля, огибающего V-образную границу в песчанике (Рисунок 4.3 из теста 4.1.1), и волнового поля, двукратно преломленного через V-образную границу (Рисунок 4.46).

На Рисунке 4.48 показано однократно преломленное волновое поле в приёмниках «линия 2», соответствующее формуле (4.3). Оно представляет собой суперпозицию преломленной волны через U-образную границу из области \mathbb{D}_1 (песчаник) в область \mathbb{D}_1 (соль) и краевой волны, дифрагированной от внутреннего ребра U-образной границы. Отметим, что дифракция возникает из-за разрыва амплитуды на ребре (4.0 км, 0.0 км). Она имеет более слабые амплитуды, чем однократно преломленная волна. Все дифракционные компоненты формулы (4.3) для U-образной границы оказались равны нулю: $b^{s[i]} = 0, \forall i \geq 1$ для вектора волнового поля источника, падающего на границу, и $(K^{ss}D^{ss})^i = 0, \forall i \geq 1$ для физически реализуемой матрицы распространения P^{xs} типа «граница-приёмники».

На Рисунке 4.49 показано двукратно преломленное волновое поле в приёмниках «линия 1», вычисленное в соответствии с формулой (4.2). В случае U-образной границы приёмники на «линия 1» при $x > 4.8$ км попадают в зону тени. Все дифракционные компоненты формулы (4.2) для U-образной границы для физически реализуемых матриц распространения P^{ss} типа «граница-граница» и P^{xs} типа «граница-приёмники» оказались равны нулю, т.е. $(K^{ss}D^{ss})^i = 0, \forall i \geq 1$. Для вектора волнового поля источника, падающего на границу, первая дифракционная компонента $b^{s[1]}$ оказалась не равна нулю. Для демонстрации её вклада в

двукратно преломленное волновое поле на Рисунке 4.50 показана сейсмограмма, построенная по формуле $P^{xs} \cdot T_{12} \cdot P^{ss} \cdot T_{21} \cdot b^{s[1]} = P^{xs} \cdot T_{12} \cdot P^{ss} \cdot T_{21} \cdot (K^{ss} D^{ss} b^{s[0]})$. На Рисунке 4.51 показана сейсмограмма, не учитывающая дифракционные поправки и вычисленная по формуле $K^{xs} \cdot T_{12} \cdot K^{ss} \cdot T_{21} \cdot b^{s[0]}$. На Рисунке 4.52 показано полное волновое поле в приёмниках для U-модели. Оно представляет суперпозицию волнового поля, огибающего U-образную границу в песчанике (Рисунок 4.9 из теста 4.1.2), и волнового поля, двукратно преломленного через U-образную границу (Рисунок 4.49).

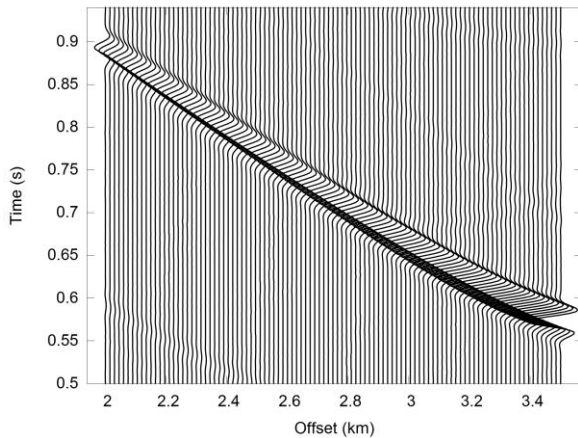


Рисунок 4.45. V-модель, 1-кратное преломление в «линия 2».

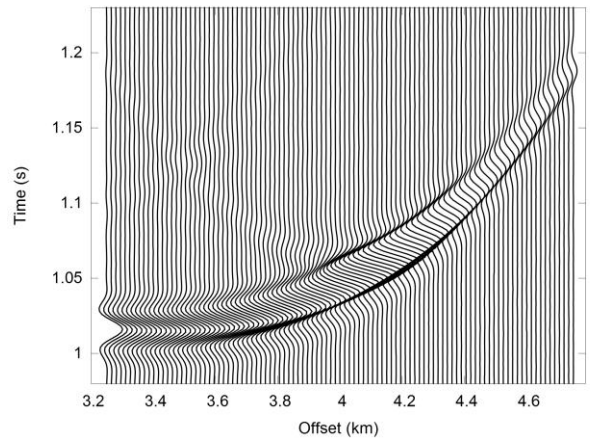


Рисунок 4.46. V-модель, 2-кратное преломление в «линия 1».

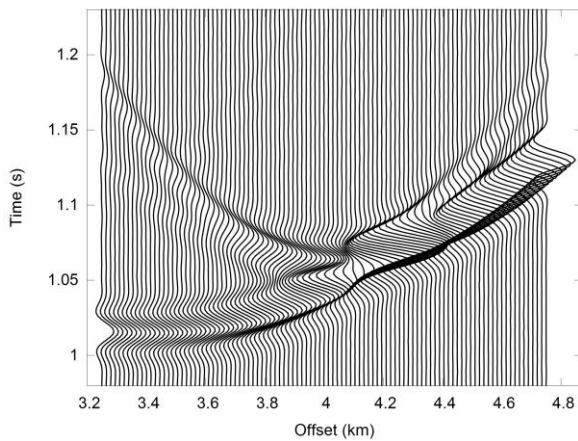


Рисунок 4.47. V-модель, 2-кратное преломление и огибание в «линия 1».

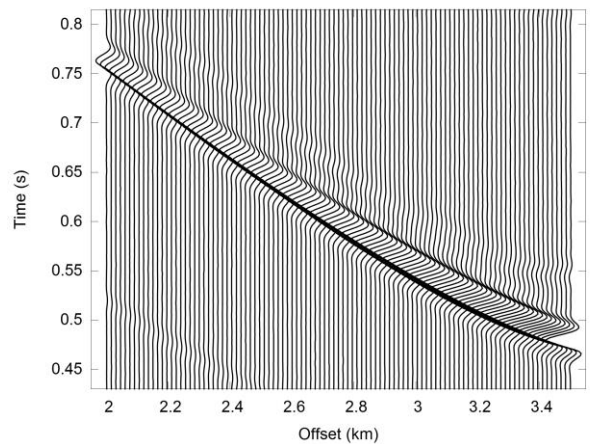


Рисунок 4.48. U-модель, 1-кратное преломление в «линия 2».

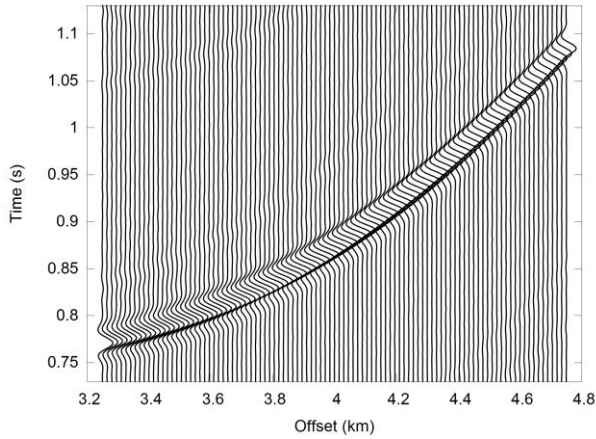


Рисунок 4.49. U-модель, полное 2-кратное преломление в «линия 1».

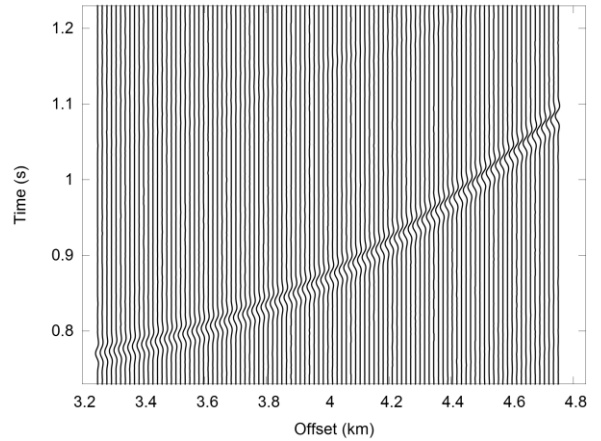


Рисунок 4.50. U-модель, 2-кратное преломление в «линия 1», дифракционная поправка $b^{s[1]}$.

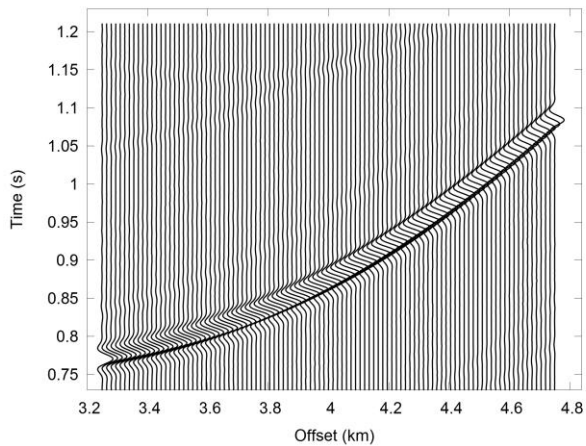


Рисунок 4.51. U-модель, 2-кратное преломление в «линия 1», без дифракционных поправок.

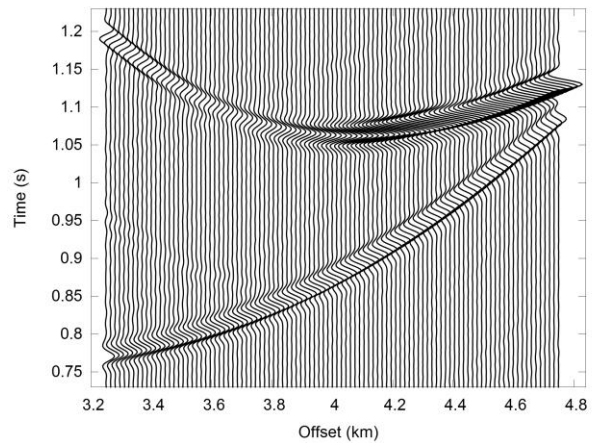


Рисунок 4.52. U-модель, 2-кратное преломление и огибание в «линия 1».

Анализ времени вычислений. Для оценки прогнозируемого времени вычисления преломленного волнового поля через V- и U-образные границы применим полученные формулы (3.22), (3.24) и (3.26) из подраздела 3.10. Для случая однократного преломления через V- и U-образные границы общее время вычислений складывается из времён вычисления волнового поля источника на элементах границы, преломления волнового поля через границу, распространения волнового поля от элементов границы в приёмники и представляется в виде следующей формулы:

$$t = t_1 + t_T + t_3 .$$

Поскольку при вычислении волнового поля источника на элементах V- и U-образных границ и матрицы распространения волнового поля от элементов границ в приёмники все дифракционные члены оказались равны нулю, то получаем итоговую оценочную формулу прогнозируемого времени вычисления однократного преломления:

$$\begin{aligned}
 t &= t_1 + t_T + t_3 = \\
 &= 4(0+1)0 \cdot t_p + t_T + [4 + 4(0+1)0] \cdot t_p = \\
 &= 0 + t_T + 4 \cdot t_p = \\
 &= t_T + 4 \cdot t_p .
 \end{aligned}$$

V- и U-образные границы разбивались приблизительно на $N = 112000$ элементов. Используя Таблицы 3.3 и 3.4, получаем прогнозируемое время вычисления однократно-преломленного волнового поля через эти границы: $t = 10 + 38 \cdot 4 = 162$ сек = 3 мин.

Для случая двукратного преломления через V- и U-образные границы прогнозируемое время вычислений складывается из времён вычисления волнового поля источника на элементах границы, преломления волнового поля через границу из песчаника в соль, распространения волнового поля от элементов границы на эти же элементы внутри соли, преломления из соли в песчаник, распространения волнового поля от элементов границы в приёмники и представляется в виде следующей формулы:

$$t = t_1 + t_T + t_2 + t_T + t_3 .$$

Так как для V-образной границы все дифракционные члены оказались равны нулю, то получаем итоговую оценочную формулу прогнозируемого времени вычисления двукратного преломления для этого типа границы:

$$\begin{aligned}
 t &= t_1 + t_T + t_2 + t_T + t_3 = \\
 &= 4(0+1)0 \cdot t_p + t_T + 4t_p + t_T + [4 + 4(0+1)0] \cdot t_p = \\
 &= 8t_p + 2t_T .
 \end{aligned}$$

Используя Таблицы 3.3 и 3.4, получаем прогнозируемое время $t = 8 \cdot 38 + 2 \cdot 10 = 324$ сек = 6 мин на 12 GPUs.

Для U-образной границы все дифракционные члены оказались равны нулю, кроме первого члена волнового поля источника, падающего на границу, поэтому получаем итоговую

оценочную формулу прогнозируемого времени вычисления двукратного преломления для этого типа границы:

$$\begin{aligned}
 t &= t_1 + t_T + t_2 + t_T + t_3 = \\
 &= 4(1+1)1 \cdot t_p + t_T + 4t_p + t_T + [4 + 4(0+1)0] \cdot t_p = \\
 &= 16t_p + 2t_T .
 \end{aligned}$$

Используя Таблицы 3.3 и 3.4, получаем прогнозируемое время $t = 16 \cdot 38 + 2 \cdot 10 = 628$ сек = 11 мин на 12 GPUs.

4.1.7. Модель 7: преломление волнового поля через 2-клинную границу

Описание модели. В данном тесте рассматривается двухблочная модель с 2-клинной (W-образной) границей, которая подобна модели 4 из подраздела 4.1.4. На Рисунке 4.53 показано двумерное сечение W-модели плоскостью $y = 0$ км и система наблюдений, находящаяся в нём. W-образная граница этой модели делит пространство на две области: \mathbb{D}_1 (имитирует песчаник) и \mathbb{D}_2 (имитирует соляной выступ).

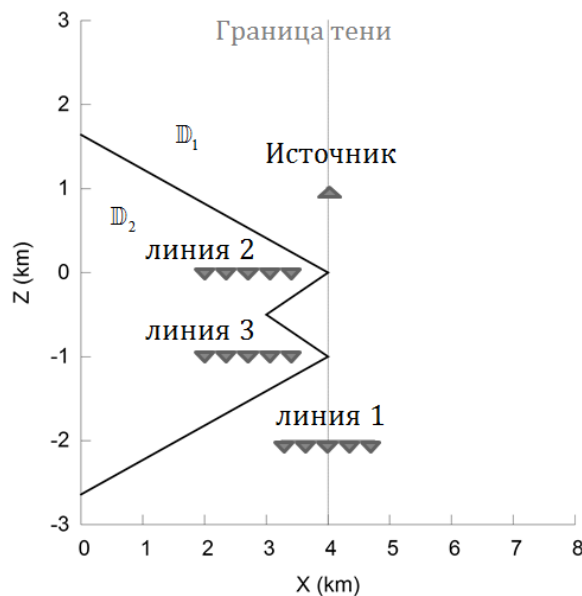


Рисунок 4.53. Двумерное сечение W-модели и система наблюдений.

Материальные параметры области \mathbb{D}_1 описываются плотностью 2.0 г/см^3 и скоростью распространения продольной волны 2.0 км/с . Материальные параметры области \mathbb{D}_2 описываются плотностью 3.0 г/см^3 и скоростью распространения продольной волны 4.0 км/с .

Параметры источника и приёмников на «линия 1» для W-модели аналогичны соответствующим параметрам модели 4 из подраздела 4.1.4. В данных тестах дополнительно используются два профиля. Профиль «линия 2» из 101 приёмника расположен в области \mathbb{D}_2 вдоль прямой линии от точки с координатами $(x=2\text{км}, y=0\text{км}, z=0\text{км})$ до точки с координатами $(x=3.5\text{км}, y=0\text{км}, z=0\text{км})$. Профиль «линия 3» из 101 приёмника расположен в области \mathbb{D}_2 вдоль прямой линии от точки с координатами $(x=2\text{км}, y=0\text{км}, z=-1\text{км})$ до точки с координатами $(x=3.5\text{км}, y=0\text{км}, z=-1\text{км})$. Шаг между приёмниками $\Delta x = 0.015 \text{ км}$.

В приёмниках профиля «линия 1» вычислялось волновое поле, двукратно преломленное через W-образную границу, а также дифракционные волновые поля в окрестности границ тени этой преломленной волны, порождённых рёбрами W-образной границы. Также в приёмниках на дополнительных профилях «линия 2» и «линия 3» вычислялось волновое поле, однократно преломленное через W-образную границу с учётом однократной дифракции.

Построение решения с помощью МНКВ.

Распространение волнового поля источника в приёмники «линия 1» соответствует волновому коду, описанному для модели 6 (подраздел 4.1.6) для линии приёмников «линия 1». В терминах МНКВ данный волновой код соответствует матрично-векторной формуле (4.2).

Распространение волнового поля источника в приёмники «линия 2» и «линия 3» также соответствует волновому коду, описанному для модели 6 (подраздел 4.1.6) для линии приёмников «линия 2». В терминах МНКВ данный волновой код соответствует матрично-векторной формуле (4.3).

Хотя формулы (4.2) и (4.3) вычисляют нормальную скорость частиц и давление, далее показаны только сейсмограммы для давления.

Результаты тестирования. На Рисунке 4.54 представлена суперпозиция двух физически реализуемых волновых полей: волновое поле источника, распространяющееся по песчанику, и волновое поле, дважды преломленное через верхнюю и нижнюю грани W-границы разделов песчаник-соль-песчаник в приёмниках «линия 1». Эти волны представлены отдельно на Рисунках 4.55 и 4.56. На Рисунке 4.55 представлено волновое поле источника, распространяющееся по песчанику в приёмники «линия 1» с учётом дифракции от рёбер W-образной границы. Данный тест подробно описан в подразделе 4.1.4. На Рисунке 4.56 представлено волновое поле в приёмниках «линия 1», которое дважды преломлялось через верхнюю и нижнюю грани W-границы разделов песчаник-соль-песчаник. Это поле вычислено в

соответствии с формулой (4.2). На сейсмограмме видно две волны. Первая волна, пришедшая по времени раньше, преломилась, пройдя от источника по песчанику, через верхнюю грань W-образной границы, прошла по соли и затем преломилась через нижнюю грань, далее распространяясь по песчанику в приёмники «линия 1». Вторая волна, пришедшая по времени позднее, преломилась, пройдя от источника по песчанику, через верхнюю грань W-образной границы, прошла по соли и затем преломилась через вторую грань, распространяясь далее по песчанику в приёмники «линия 1», порождая дифракцию на ребре ($x = 4 \text{ км}$, $z = 0 \text{ км}$).

Для вектора волнового поля источника b^s из (4.2), падающего на границу, первая дифракционная компонента $b^{s[1]}$ оказалась не равна нулю. Для физически реализуемых матриц распространения P^{ss} типа «граница-граница» и P^{xs} типа «граница-приёмники» из (4.2) первые дифракционные компоненты $K^{ss}D^{ss}$ оказались не равны нулю. Рисунки 4.57-4.61 демонстрируют вклады ненулевых составляющих в двукратно преломленное волновое поле. На Рисунке 4.57 показана сейсмограмма волнового фрагмента $b_0^x = K^{xs} \cdot T_{12} \cdot K^{ss} \cdot T_{21} \cdot b^{s[0]}$, который не учитывает дифракционные поправки. На Рисунке 4.59 показана сейсмограмма волнового фрагмента $d_{001} = K^{xs} \cdot T_{12} \cdot K^{ss} \cdot T_{21} \cdot b_d^s = K^{xs} \cdot T_{12} \cdot K^{ss} \cdot T_{21} \cdot (K^{ss}D^{ss}b^{s[0]})$, который соответствует учёту первого члена каскадной дифракции только в поле источника, падающего на W-образную границу. На Рисунке 4.60 показана сейсмограмма волнового фрагмента $d_{010} = K^{xs} \cdot T_{12} \cdot P_d^{ss} \cdot T_{21} \cdot b^{s[0]} = K^{xs} \cdot T_{12} \cdot (K^{ss}D^{ss}K^{ss}) \cdot T_{21} \cdot b^{s[0]}$, который соответствует учёту первого члена каскадной дифракции только в поле, распространяющемся с границы на саму себя по соляной области. На Рисунке 4.61 показана сейсмограмма волнового фрагмента $d_{100} = P_d^{xs} \cdot T_{12} \cdot K^{ss} \cdot T_{21} \cdot b^{s[0]} = (K^{xs}K^{ss}D^{ss}K^{ss}) \cdot T_{12} \cdot K^{ss} \cdot T_{21} \cdot b^{s[0]}$, который соответствует учёту первого члена каскадной дифракции только в поле, распространяющемся по песчанику с границы в приёмники «линия 1». На Рисунке 4.58 показана сейсмограмма полного дифракционного поля $d = d_{001} + d_{010} + d_{100} = P_d^{xs} \cdot T_{12} \cdot P_d^{ss} \cdot T_{21} \cdot b_d^s = (K^{xs}K^{ss}D^{ss}K^{ss}) \cdot T_{12} \cdot (K^{ss}D^{ss}K^{ss}) \cdot T_{21} \cdot (K^{ss}D^{ss}b^{s[0]})$ в приёмниках «линия 1».

На Рисунке 4.62 показано волновое поле в приёмниках «линия 2», которое однократно преломлено из песчаника в соль через верхнюю грань W-образной границы с учётом дифракции на ребре этой грани. Данное поле вычислено по формуле (4.3) и состоит из наложения двух волн. Первая волна с почти линейным годографом и сильными амплитудами представляет собой преломленную волну. Вторая волна с гиперболическим годографом, имеющим минимум времени при $x = 2.85 \text{ км}$, и более слабыми амплитудами – краевая, распространяющаяся от верхнего ребра W-образной границы вдоль приёмников «линия 2». На

Рисунке 4.63 показано волновое поле в приёмниках «линия 3», которое однократно преломлено из песчаника в соль через верхнюю грань W-образной границы с учётом дифракции. Данное поле также вычислено по формуле (4.3). Волновое поле на сейсмограмме представляет собой суперпозицию преломленной волны и дифрагированных волн различной кратности. Для вектора волнового поля источника \mathbf{b}^s , падающего на границу, все дифракционные компоненты $\mathbf{b}^{s[i]}$, $\forall i \geq 1$ из (4.3) оказались равны нулю. Для физически реализуемой матрицы распространения типа «граница-приёмники» \mathbf{P}^{xs} все дифракционные компоненты $(\mathbf{K}^{ss} \mathbf{D}^{ss})^i$, $\forall i \geq 1$ из (4.3) также оказались равны нулю.

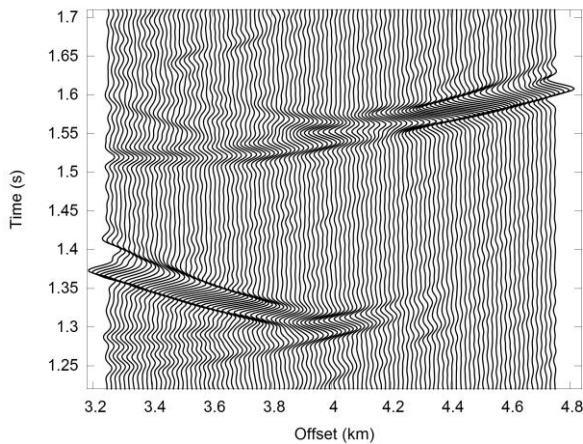


Рисунок 4.54. Суперпозиция волн на «линия 1».

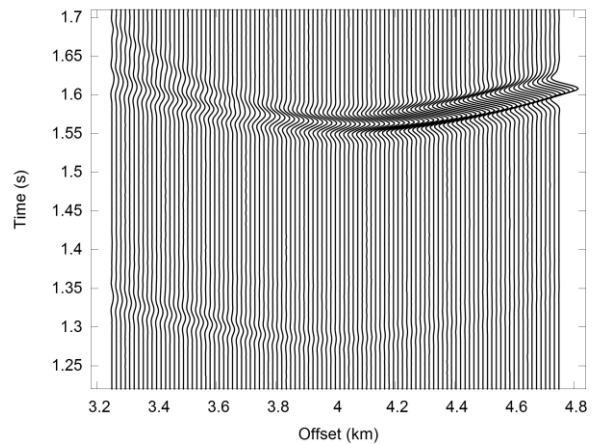


Рисунок 4.55. Волновое поле источника на «линия 1».

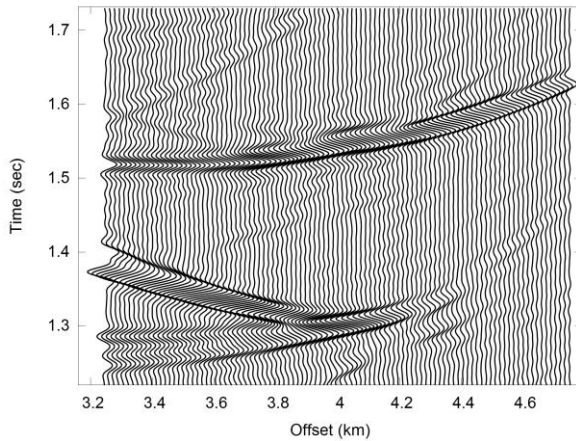


Рисунок 4.56. 2-кратное преломление $\mathbf{b}^x = \mathbf{b}^{[0]} + d$ на «линия 1».

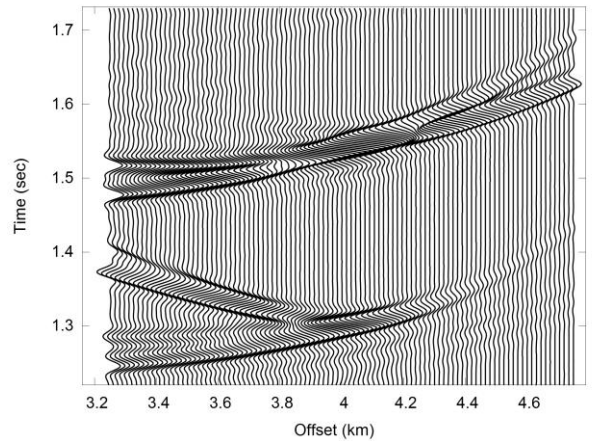


Рисунок 4.57. 2-кратное преломление $\mathbf{b}^{[0]}$ без учёта дифракции на «линия 1».

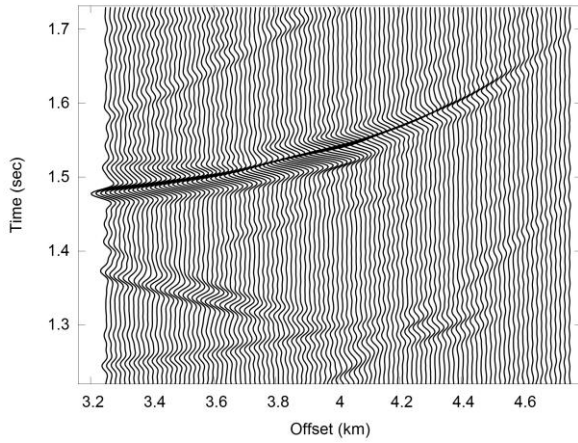


Рисунок 4.58. Дифракционная поправка $d = d_{001} + d_{010} + d_{100}$ на «линия 1».

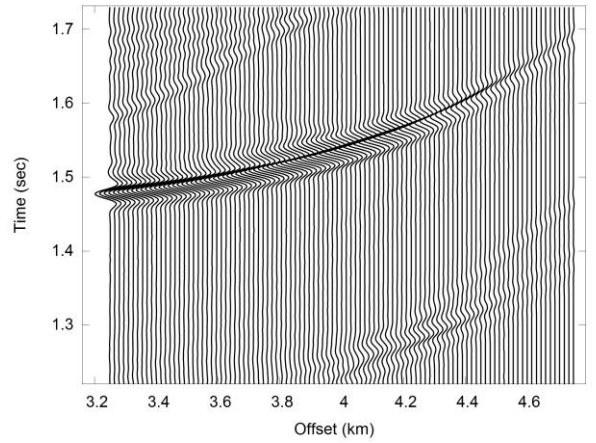


Рисунок 4.59. Дифракционная поправка d_{001} на «линия 1».

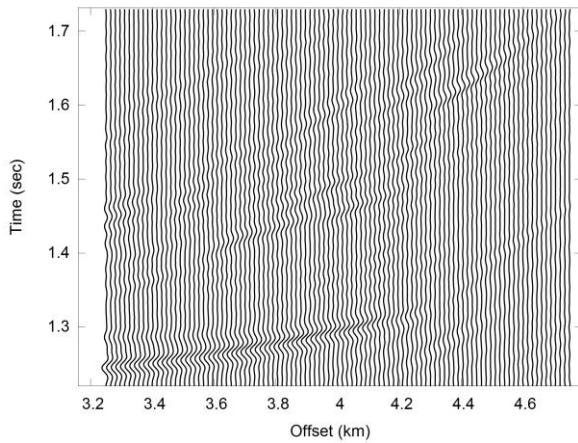


Рисунок 4.60. Дифракционная поправка d_{010} на «линия 1».

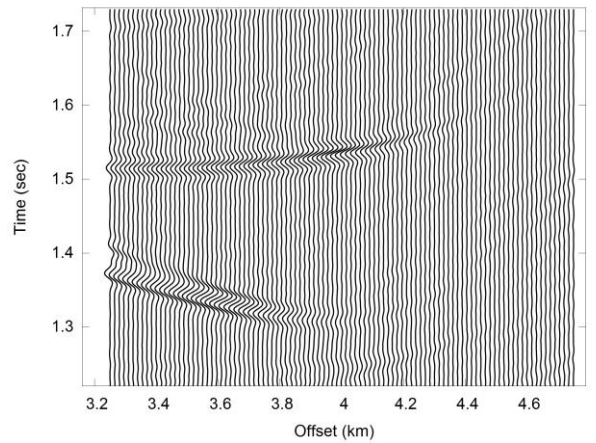


Рисунок 4.61. Дифракционная поправка d_{100} на «линия 1».

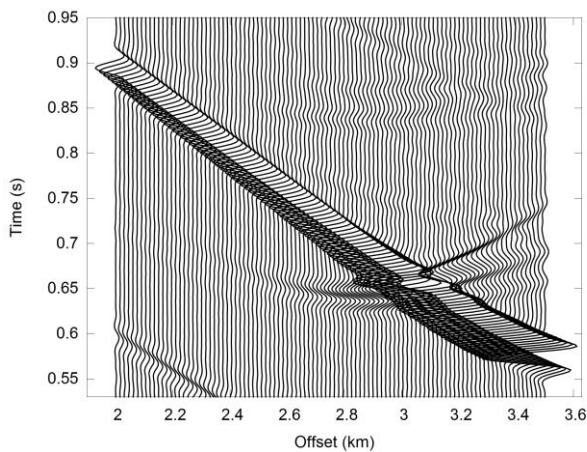


Рисунок 4.62. 1-кратное преломление на «линия 2».

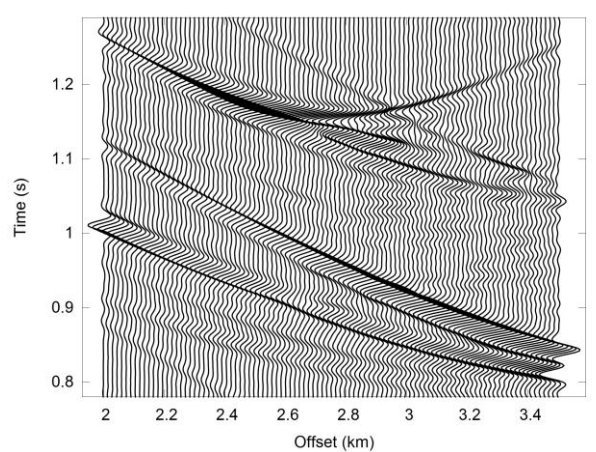


Рисунок 4.63. 1-кратное преломление на «линия 3».

Анализ времени вычислений. Для оценки прогнозируемого времени вычисления волновых полей, однократно и двукратно преломленных через W-образную границу, применим

полученные формулы (3.22), (3.24) и (3.26) из подраздела 3.10. Для случая однократного преломления через W-образную границу прогнозируемое время вычислений складывается из времён вычисления волнового поля источника на элементах границы, преломления волнового поля через границу, распространения волнового поля от элементов границы в приёмники и представляется в виде следующей формулы:

$$t = t_1 + t_T + t_3 .$$

Поскольку при вычислении волнового поля источника на элементах W-образной границы, а также при вычислении матрицы распространения волнового поля от элементов границы в приёмники все дифракционные члены оказались равны нулю, то получаем итоговую оценочную формулу прогнозируемого времени вычисления однократного преломления:

$$\begin{aligned} t &= t_1 + t_T + t_3 = \\ &= 4(0+1)0 \cdot t_p + t_T + [4 + 4(0+1)0] \cdot t_p = \\ &= 0 + t_T + 4 \cdot t_p = \\ &= 4t_p + t_T . \end{aligned}$$

W-образная граница разбивалась на $N = 150000$ элементов. Используя Таблицы 3.3 и 3.4, получаем оценочное время вычисления однократно-преломленного волнового поля через эту границу: $t = 48 \cdot 3 + 15 = 159$ сек = 3 мин.

Для случая двукратного преломления через W-образную границу прогнозируемое время вычислений складывается из времён вычисления волнового поля источника на элементах границы, преломления волнового поля через границу из песчаника в соль, распространения волнового поля от элементов границы на эти же элементы по соли, преломления из соли в песчаник, распространения волнового поля от элементов границы в приёмники и представляется в виде следующей формулы:

$$t = t_1 + t_T + t_2 + t_T + t_3 .$$

Для W-образной границы все дифракционные члены оказались равны нулю, кроме первого члена волнового поля источника, падающего на границу, первого члена физически реализуемой матрицы распространения типа «граница-граница» и первого члена физически реализуемой матрицы распространения типа «граница-приёмники». Поэтому получаем итоговую оценочную

формулу прогнозируемого времени вычисления двукратного преломления для этого типа границы:

$$\begin{aligned} t &= t_1 + t_T + t_2 + t_T + t_3 = \\ &= 4(1+1)1 \cdot t_p + t_T + (8 + 4(1+1)1) \cdot t_p + t_T + [4 + 4(1+1)1] \cdot t_p = \\ &= 36t_p + 2t_T . \end{aligned}$$

Используя Таблицы 3.3 и 3.4, получаем прогнозируемое время $t = 36 \cdot 83 + 2 \cdot 15 = 3018$ сек = 51 мин. на 12 GPUs. Для увеличения скорости вычислений возможно увеличение количества GPUs.

4.1.8. Модель 8: волновое поле под ангидритовой прослойкой

Описание модели. Данный тест проведён для анализа возможности использования программного комплекса МНКВ для вычисления волнового поля под, так называемыми, ангидритовыми прослойками. Высокоскоростные ангидритовые прослойки представляют собой почти плоские дискообразные включения относительно небольшого радиуса в соляной (типа галита и т.п.) слой. Такие прослойки имеют резкий контраст по материальным параметрам по сравнению с окружающим их слоем. Под высокоскоростными прослойками образуются зоны тени, в которых преломленное волновое поле существенно ослабляется многократной дифракцией. Существенное ослабление интерференционного волнового поля не позволяет качественно восстанавливать материальные и геометрические параметры геологических слоёв, находящихся под этими прослойками.

На Рисунке 4.64 показан пример сейсмического изображения реальной геологической среды (Норвежское море), на котором видны короткие окна сильных сигналов (положительные и отрицательные амплитуды покрашены красным и синим цветом, соответственно), отражённых от высокоскоростных прослоек. В частности, чёрным эллипсом оконтурены одно из таких окон над прослойкой и зона тени под ним в виде белой полосы без сигналов.

На Рисунке 4.65 показана тестируемая модель ангидритового диска (прослойки) внутри слоя галита. Эта модель состоит из трёх слоёв, отделённых друг от друга двумя плоскими границами. Верхний и нижний слои имитируют песчаник, средний слой – галит (соль). Внутри галита встроен тонкий ангидридный диск. Верхняя граница имеет координату $z = -3.3$ км, нижняя – $z = -4.6$ км. Ангидридный диск имеет толщину ~ 0.042 км и радиус 0.5 км, а его центральная плоскость задана координатой $z = -4.0$. Скорости продольной волны и плотности в слоях имеют значения: в песчанике 2.5 км/с и 2.5 г/см³, в галите 4.5 км/с и 2.2 г/см³. В

прослойке ангидрита – 6.5 км/с и 2.9 г/см^3 . Источник, излучающий сферическую продольную волну, расположен в верхнем слое песчаника в точке $(x = 0 \text{ км}; y = 0 \text{ км}; z = 0 \text{ км})$. Форма импульса этой волны аналогична форме импульса, описанного в подразделе 4.1.1. Профиль из 20 приёмников был расположен в верхнем слое песчаника вдоль прямой линии $(x \in [-1.0; 0.9] \text{ км}; y = 0 \text{ км}; z = 0 \text{ км})$ с шагом $\Delta x = 0.1 \text{ км}$.

В данном тесте с помощью программного комплекса МНКВ вычислены два волновых фрагмента (Рисунок 4.65):

- 1) однократное отражение от ангидридного диска (волновой код С1),
- 2) однократное отражение от границы нижнего слоя песчаника (волновой код С2).

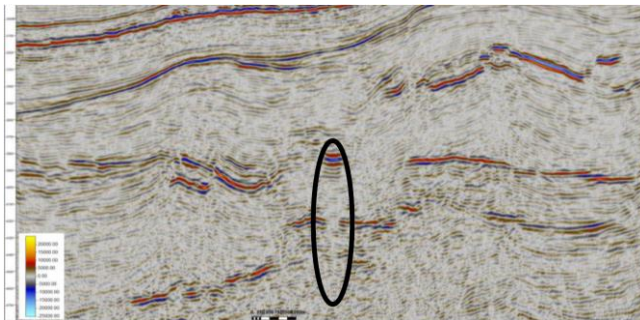


Рисунок 4.64. Зона ослабления сигнала (оконтурено эллипсом) под ангидритовой прослойкой.

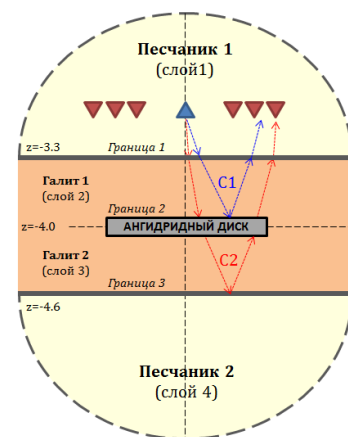


Рисунок 4.65. Схема модели ангидритового диска (прослойки) внутри слоя галита.

Построение решения с помощью МНКВ.

Распространение волнового поля из источника в приёмники для волнового кода С1 соответствует следующей последовательности прохождения слоёв модели:

- 1) распространение волнового поля по песчанику от источника на границу;
- 2) преломление волнового поля через границу из песчаника в галит;
- 3) распространение волнового поля по галиту с границы на ангидридный диск;
- 4) отражение волнового поля от ангидридного диска;
- 5) распространение волнового поля по галиту с ангидридного диска на границу песчаника;
- 6) преломление волнового поля через границу из галита в песчаник;
- 7) распространение волнового поля по песчанику от границы в приёмники.

Применяя формулу (В.12) для волнового кода С1, соответствующее ему волновое поле можно записать в виде следующей аналитической матрично-векторной формулы:

$$\mathbf{b}^x = \mathbf{P}^{xs_1} \cdot \mathbf{T}_{12} \cdot \mathbf{P}^{s_1s_2} \cdot \mathbf{R}_{23} \cdot \mathbf{P}^{s_2s_1} \cdot \mathbf{T}_{21} \cdot \mathbf{b}^{s_1} . \quad (4.4)$$

Поскольку все границы модели являются плоскими, то все дифракционные члены физически реализуемых матриц распространения $\mathbf{P}^{s_2s_1}$ и $\mathbf{P}^{s_1s_2}$ типа «граница-граница» и \mathbf{P}^{xs_1} типа «граница-приёмники», а также вектора \mathbf{b}^{s_1} волнового поля источника на элементах границы песчаника равны нулю. Поэтому формула (4.4) может быть записана в упрощённом виде:

$$\mathbf{b}^x = \mathbf{K}^{xs_1} \cdot \mathbf{T}_{12} \cdot \mathbf{K}^{s_1s_2} \cdot \mathbf{R}_{23} \cdot \mathbf{K}^{s_2s_1} \cdot \mathbf{T}_{21} \cdot \mathbf{b}^{s_1[0]} . \quad (4.5)$$

Распространение волнового поля из источника в приёмники для волнового кода C2 соответствует следующей последовательности прохождения слоёв модели:

- 1) распространение волнового поля по песчанику от источника на границу;
- 2) преломление волнового поля через границу из песчаника в галит;
- 3) распространение волнового поля по галиту с границы песчаника на ангидридный диск;
- 4) преломление волнового поля через ангидридный диск в галит;
- 5) распространение волнового поля по галиту с ангидридного диска на границу нижнего слоя песчаника;
- 6) отражение волнового поля от границы нижнего слоя песчаника;
- 7) распространение волнового поля по галиту с нижнего слоя песчаника на ангидридный диск;
- 8) преломление волнового поля через ангидридный диск в галит;
- 9) распространение волнового поля по галиту с ангидридного диска на границу верхнего слоя песчаника;
- 10) преломление волнового поля через границу из галита в песчаник;
- 11) распространение волнового поля по песчанику от границы в приёмники.

Применяя формулу (B.13) в случае 4-го акта отражения-преломления ($n = 4$) для волнового кода C2, соответствующее ему волновое поле можно записать в виде следующей аналитической матрично-векторной формулы:

$$\mathbf{b}^x = \mathbf{P}^{xs_1} \cdot \mathbf{T}_{12} \cdot \mathbf{P}^{s_1s_2} \cdot \mathbf{T}_{23} \cdot \mathbf{P}^{s_2s_3} \cdot \mathbf{R}_{34} \cdot \mathbf{P}^{s_3s_2} \cdot \mathbf{T}_{32} \cdot \mathbf{P}^{s_2s_1} \cdot \mathbf{T}_{21} \cdot \mathbf{b}^{s_1} . \quad (4.6)$$

Поскольку все границы модели являются плоскими, то все дифракционные члены физически реализуемых матриц распространения $P^{s_2s_1}$, $P^{s_3s_2}$, $P^{s_2s_3}$, $P^{s_1s_2}$ типа «граница-граница» и P^{xs_1} типа «граница-приёмники», а также вектора b^{s_1} волнового поля источника на элементах границы песчаника равны нулю. Поэтому формула (4.6) может быть записана в упрощённом виде:

$$b^x = K^{xs_1} \cdot T_{12} \cdot K^{s_1s_2} \cdot T_{23} \cdot K^{s_2s_3} \cdot R_{34} \cdot K^{s_3s_2} \cdot T_{32} \cdot K^{s_2s_1} \cdot T_{21} \cdot b^{s_1[0]}. \quad (4.7)$$

Хотя формулы (4.5) и (4.7) вычисляют нормальную скорость частиц и давление, далее показаны только сейсмограммы для давления.

Результаты тестирования. Результаты вычисления отражённых волновых полей показаны на Рисунке 4.66. Волновое поле, однократно отражённое от ангидридного диска (код С1 – верхняя волна на сейсмограмме), имеет стабильную и сильную форму импульса. Волновое поле, однократно отражённое от границы нижнего слоя песчаника (код С2 – нижняя волна на сейсмограмме), имеет нестабильную и слабую форму импульса. Изменение формы импульса волны С2 объясняется интерференцией преломленной и дифрагированной волн. Из-за высокого контраста упругих параметров ангидрида и окружающего его галита, ангидридный диск воздействует на проходящее через него волновое поле, как тонкий преломляющий слой, образуя непосредственно под собой преломленную волну с ослабленной амплитудой и границей тени в форме конической поверхности. Круглый край тонкого диска при этом порождает дифрагированную волну с тороидальным фронтом, которая имеет отрицательную амплитуду непосредственно под диском. В результате интерференционное волновое поле имеет нестабильную и слабую форму импульса. Для детального анализа интерференционного волнового поля С2 непосредственно под ангидридным диском это поле представлено на отдельной сейсмограмме (Рисунок 4.67), а также вычислена волновое поле с кодом С2 в трёхслойной модели среды, но после удаления ангидридного диска из галитового слоя (Рисунок 4.68). Разница между сейсмограммами на Рисунке 4.67 и Рисунке 4.68 показана на Рисунке 4.69. Разностная сейсмограмма даёт дифракционное волновое поле от ангидридного диска, которое мы хотели бы удалить из интерференционного волнового поля для получения качественного сейсмического изображения под ангидридным диском при решении обратной задачи.

Анализ времени вычислений. Для оценки прогнозируемого времени вычисления волновых полей с кодами С1 и С2 применим формулы (3.22), (3.24) и (3.26) из подраздела 3.10.

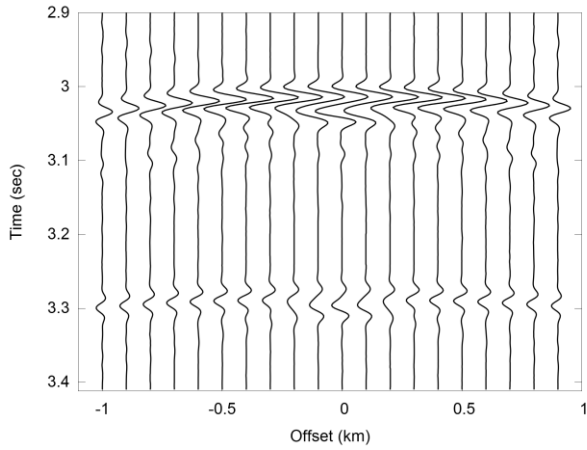


Рисунок 4.66. Волны с кодами C1 и C2.

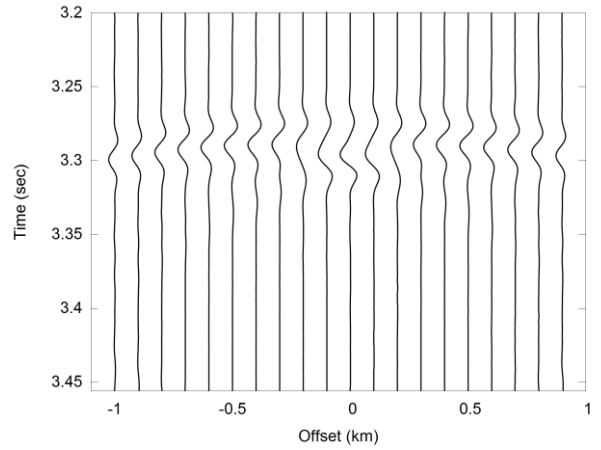


Рисунок 4.67. Волна с кодом C2.

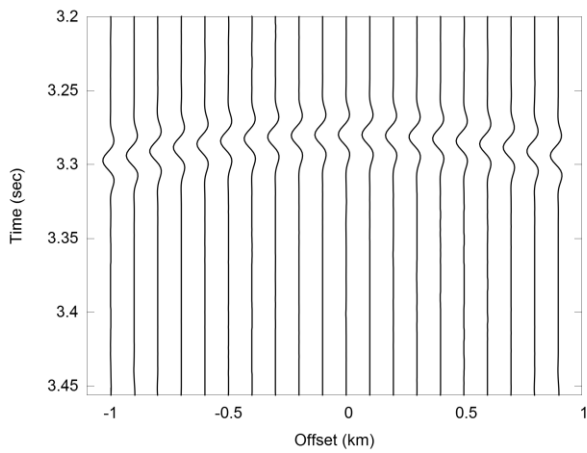


Рисунок 4.68. Волна с кодом C2 в отсутствие ангидридного диска.

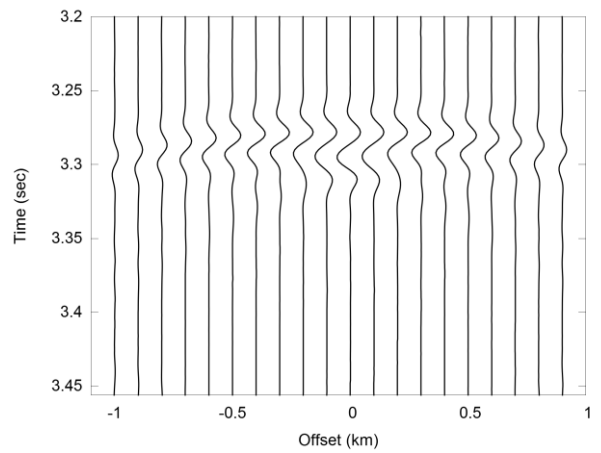


Рисунок 4.69. Разница волн с кодом C2 с ангидридным диском и в его отсутствие.

Для случая волнового кода C1 (см. формулу (4.5)) общее время вычисления волнового поля в приёмниках можно представить в следующем виде:

$$t = t_1 + t_T + t_2 + t_R + t_2 + t_T + t_3 .$$

Как было отмечено выше, все дифракционные члены для матриц типа «граница-граница» и «граница-приёмники» и вектора волнового поля источника на элементах границы равны нулю. Поэтому получаем итоговую оценочную формулу прогнозируемого времени вычисления кода C1:

$$\begin{aligned} t &= t_1 + t_T + t_2 + t_R + t_2 + t_T + t_3 = \\ &= 4(0+0)0 \cdot t_p + t_T + 4 \cdot t_p + t_R + 4 \cdot t_p + t_T + 0 = \\ &= 8 \cdot t_p + 3 \cdot t_T . \end{aligned}$$

Все границы тестируемой модели разбивались на $N = 100000$ элементов. Используя Таблицы 3.3 и 3.4, получаем прогнозируемое время $t = 8 \cdot t_p + 3 \cdot t_T = 8 \cdot 38 + 3 \cdot 10 = 334$ сек = 6 мин на 12 GPUs.

Для случая волнового кода C2 (см. формулу (4.7)) общее время вычисления волнового поля в приёмниках можно представить в следующем виде:

$$t = t_1 + t_T + t_2 + t_T + t_2 + t_R + t_2 + t_T + t_2 + t_T + t_3 .$$

Учитывая, что все дифракционные члены для матриц типа «граница-граница» и «граница-приёмники» и вектора волнового поля источника на элементах границы равны нулю, получаем итоговую оценочную формулу прогнозируемого времени вычисления кода C2:

$$\begin{aligned} t &= t_1 + t_T + t_2 + t_T + t_2 + t_R + t_2 + t_T + t_2 + t_T + t_3 = \\ &= t_1 + 4t_2 + 5t_T + t_3 = \\ &= 4(0+0)0 \cdot t_p + 4 \cdot 4 \cdot t_p + 5t_T + 0 = \\ &= 16 \cdot t_p + 5 \cdot t_T . \end{aligned}$$

Так как все границы тестируемой модели разбивались на $N = 100000$ элементов, с помощью Таблиц 3.3 и 3.4 получаем прогнозируемое время $t = 16 \cdot t_p + 3 \cdot t_T = 16 \cdot 38 + 3 \cdot 10 = 638$ сек = 11 мин на 12 GPUs.

4.2. Тестирование программного комплекса МНКВ для акустических сред со сложными границами (волновые амплитуды « a^+ – a^- »)

В данном подразделе приведены результаты вычисления волновых амплитуд с помощью программного комплекса МНКВ для трёхмерных акустических моделей сред со сложными границами.

Для моделей 1-6 подраздела 4.1 вычисление волновых амплитуд приводило к тривиальному результату. Одна из волновых амплитуд a^+ или a^- совпадала с соответствующим волновым полем давления. Другая волновая амплитуда была равна нулю, но на сейсмограмме могли наблюдаться слабые дифракционные волны, порождённые технологическими краями границы. Для модели 8 подраздела 4.1 вычисление волновых амплитуд не проводилось, так как времена прихода a^+ и a^- значительно отличаются друг от

друга. Только для модели 7 подраздела 4.1 вычисление волновых амплитуд приводило к разложению интерференционного волнового поля на встречные волны.

Модель 7. Для анализа структуры интерференционного волнового поля на сейсмограмме 1-кратного преломления (Рисунок 4.62) вычислялись его отдельные волновые фрагменты: сейсмограмма волновой амплитуды a^+ (Рисунок 4.70) и сейсмограмма волновой амплитуды a^- (Рисунок 4.71). Сейсмограмма волновой амплитуды a^+ (Рисунок 4.70) содержит краевую волну на «линия 2», порождённую внутренним ребром 2-клинной границы. Сейсмограмма волновой амплитуды a^- (Рисунок 4.71) содержит волну, преломленную из песчаника через верхнюю грань 2-клинной границы в соль на «линия 2».

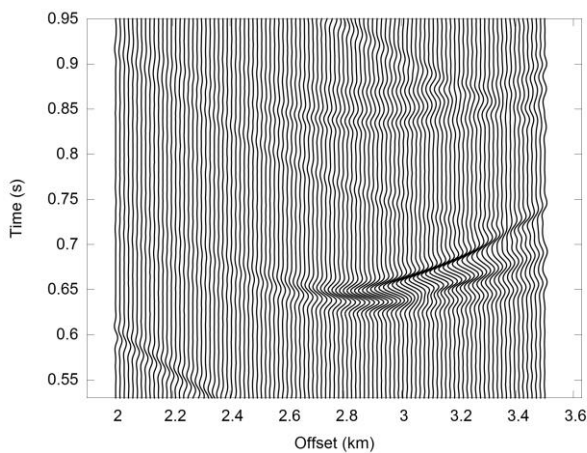


Рисунок 4.70. Волновая амплитуда a^+ на «линия 2».

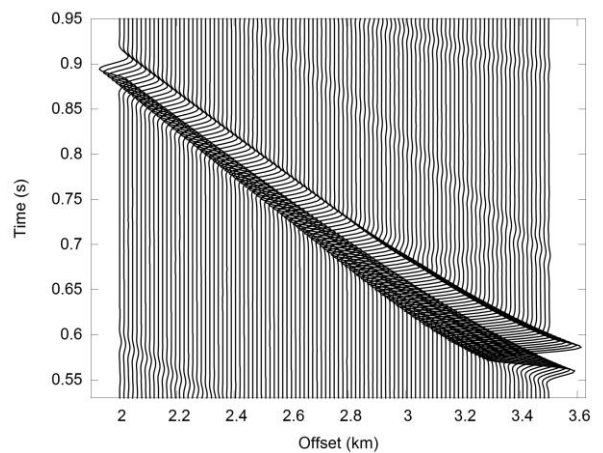


Рисунок 4.71. Волновая амплитуда a^- на «линия 2».

Сейсмограммы на Рисунках 4.70 и 4.71 демонстрируют возможность программного комплекса МНКВ представлять волновое поле не только в терминах механики сплошной среды, как пара «нормальная скорость частиц – давление», но и в терминах ТОПРД, как пара волновых амплитуд « $a^+ - a^-$ », распространяющихся во взаимно встречных направлениях.

4.3. Сравнение МНКВ с методом конечных разностей

В данном подразделе описано сравнение синтетических сейсмограмм, вычисленных программным комплексом МНКВ, с синтетическими сейсмограммами метода конечных разностей (МКР) на примере модели б: высокоскоростной акустический клин с раствором угла 45^0 , имитирующий соляной выступ, внутри низкоскоростного акустического полупространства, имитирующего песчаник.

На Рисунке 4.72 показана сейсмограмма полного волнового поля для модели 6 (V-модель), полученного с помощью независимого численного метода – метода конечных разностей (МКР) [30]. На Рисунке 4.73 показана сейсмограмма суммы двух волновых фрагментов, вычисленных с помощью программного комплекса МНКВ. Эта сейсмограмма совпадает с сейсмограммой на Рисунке 4.47. Первый волновой фрагмент представляет собой волновое поле источника, огибающее клиновидный выступ соли (тест 4.1.1, Рисунок 4.3). Вторым волновым фрагментом представляет собой волновое поле, двукратно преломленное через клиновидный выступ соли (тест 4.1.6, Рисунок 4.46). На Рисунке 4.74 показано наложение сейсмограммы программного комплекса МНКВ (красные трассы) на сейсмограмму МКР (чёрные трассы). На Рисунке 4.75 показана разница этих сейсмограмм. Для более детального анализа приводится сравнение трасс сейсмограмм, полученных программным комплексом МНКВ и МКР, на Рисунке 4.76 для приёмника 3.75 км и на Рисунке 4.77 для приёмника 4.45 км. Красная кривая представляет собой трассу, вычисленную с помощью программного комплекса МНКВ, чёрная – с помощью МКР. На Рисунке 4.78 показано сравнение кривых КДО, построенных для сейсмограммы МНКВ (красная кривая) и сейсмограммы МКР (чёрная кривая). На Рисунке 4.79 показана кривая относительного отклонения кривой КДО МНКВ от кривой КДО МКР, вычисленного по формуле: $|КДО_{МКР} - КДО_{МНКВ}| / |КДО_{МНКВ}|$. Относительное отклонение пропорционально разнице между полным волновым полем, вычисленным с помощью МКР, и суммой двух его фрагментов, вычисленных с помощью программного комплекса МНКВ. Видно, что для большинства приёмников относительное отклонение колеблется в диапазоне от 0 до 4%. Для небольшого количества приёмников в малой окрестности $x \in [4 \text{ км}; 4.1 \text{ км}]$ границы тени относительное отклонение колеблется в диапазоне от 4 до 11%.

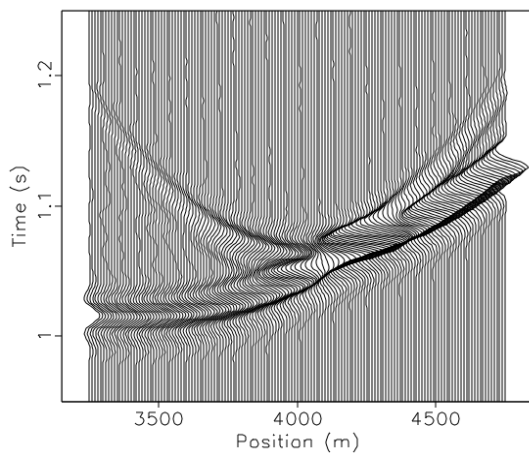


Рисунок 4.72. Полное волновое поле (МКР).

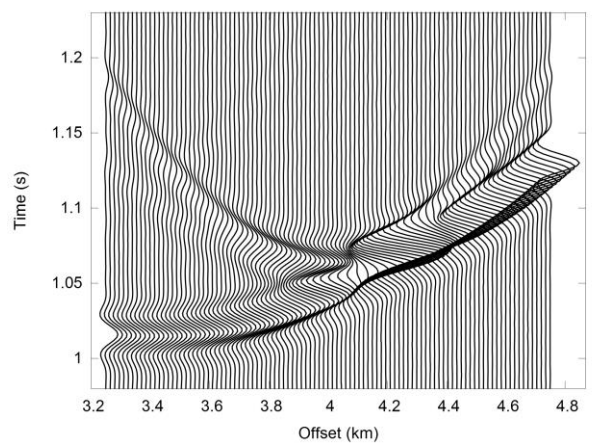


Рисунок 4.73. Суперпозиция волновых фрагментов (МНКВ).

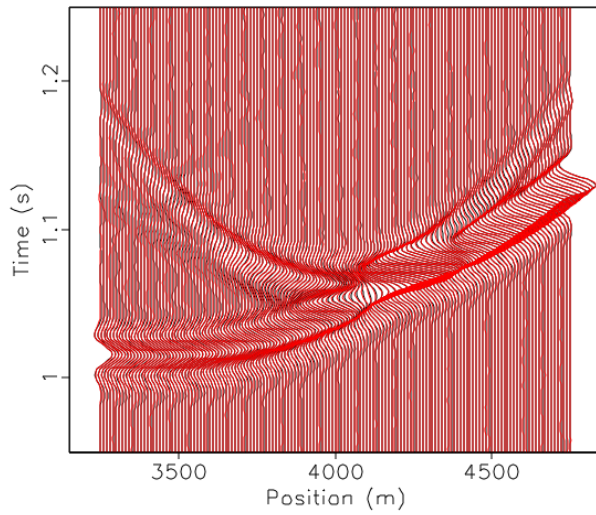


Рисунок 4.74. Наложение сейсмограмм МНКВ (красный цвет) на МКР (чёрный цвет).

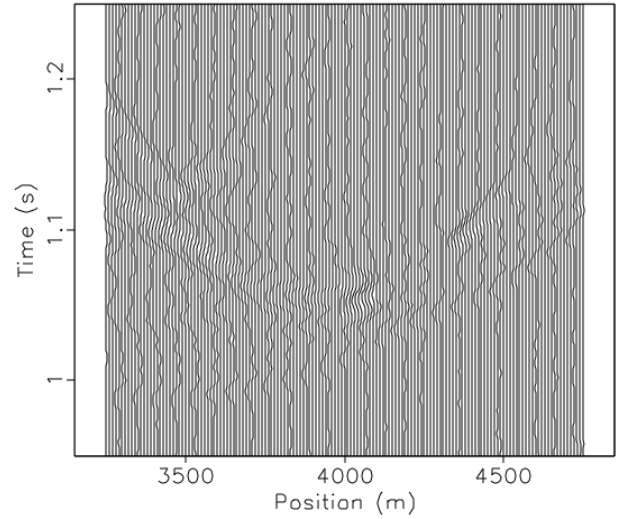


Рисунок 4.75. Разница сейсмограмм МНКВ и МКР.

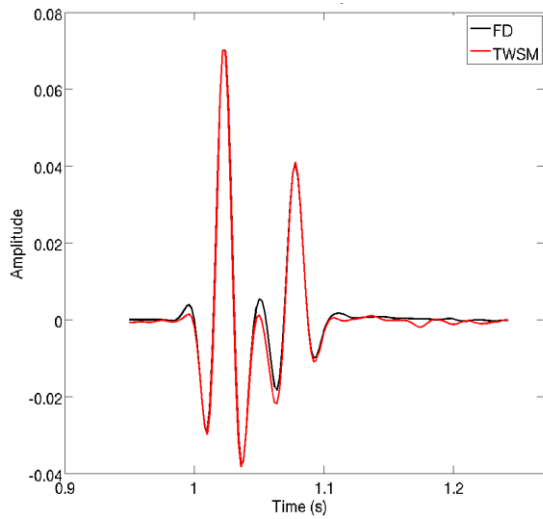


Рисунок 4.76. Наложение трассы МНКВ (красная кривая) на трассу МКР (чёрная кривая) для приёмника 3.75 км.

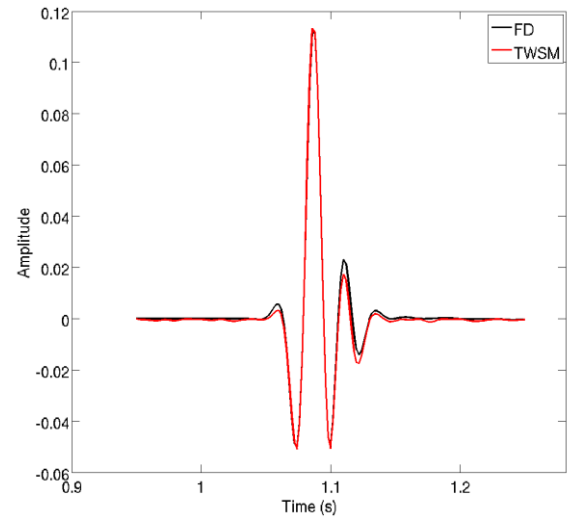


Рисунок 4.77. Наложение трассы МНКВ (красная кривая) на трассу МКР (чёрная кривая) для приёмника 4.45 км.

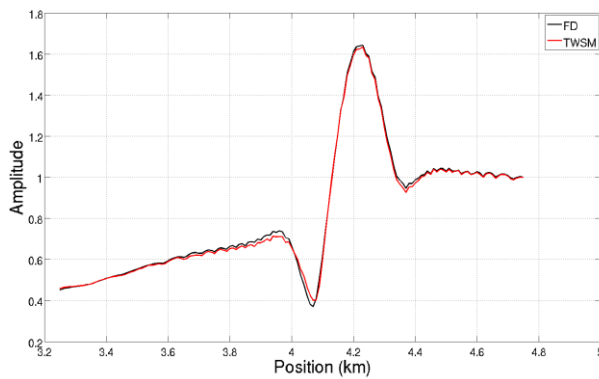


Рисунок 4.78. Наложение кривых КДО МНКВ (красная) и МКР (чёрная).

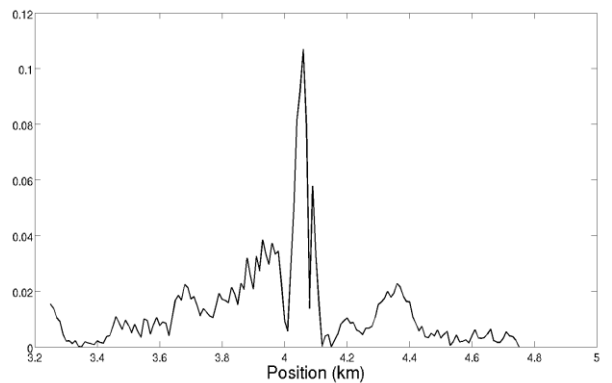


Рисунок 4.79. Относительное отклонение кривых КДО МНКВ и МКР.

4.4. Заключение

В данном разделе приведены результаты тестирования программного комплекса МНКВ для акустических моделей сред, составленными из однородных областей (блоки, слои, прослойки) с криволинейными и кусочно-криволинейными границами. Также даны количественные оценки точности вычисления волнового поля программным комплексом МНКВ в сравнении с методом конечных разностей (МКР).

В качестве тестируемых моделей сред использовались модели, имитирующие соляной выступ, окружённый песчаником. Выпуклые части границы, вдоль которой контактируют соляное тело и песчаник, порождают сложные волновые поля: дифракционные и ползущие волны. Показаны результаты вычисления волновых полей, как огибающих соляной выступ различной геометрической формы по песчанику, так и преломленных через соляной выступ. Также показаны результаты тестирования программного комплекса МНКВ при вычислении отражённо-преломленных волновых полей в слоистой среде, содержащей ангидридную прослойку в форме диска.

Результаты тестирования программного комплекса МНКВ имеют также практическое значение при решении существующей проблемы повышения разрешающей способности сейсморазведки для сложных геологических сред, содержащих включения сложной формы: соляные купола, рифовые структуры, базальтовые траппы и т.д. Как правило, большой объём современных нефтяных и газовых месторождений располагается в подобных средах, т.к. углеводороды скапливаются в слоях, примыкающих к таким включениям. Естественным образом, повышение разрешающей способности сейсморазведки для таких сред является приоритетной задачей для геофизиков и нефтегазовых компаний.

Ниже показана Таблица 4.1, в которой обобщены результаты подраздела 4.1. Таблица состоит из колонок: наименование модели; количество слоёв модели; количество границ модели; количество элементов, на которое была разбита каждая граница; формула МНКВ, с помощью которой вычислялось волновое поле; количество дифракционных поправок, которые необходимо было учесть в формуле МНКВ для вычисления полного дифракционного поля; время вычисления волнового поля с помощью программного комплекса МНКВ (на 12 графических ускорителях NVIDIA Tesla C2070 в минутах).

Таблица 4.1. Результаты тестирования программного комплекса МНКВ.

Название модели	Ко-во слоёв	Ко-во границ	Дискретизация границ	Формула МНКВ	Ко-во дифракционных членов	Время вычисления на 12 GPUs (мин)
1. Огибание клиновидного соляного тела	1	1	112000	$b^x = b^{x[0]} + \sum_{i=1}^{\infty} b^{x[i]}$	1	5
2. Огибание параболического соляного тела	1	1	112000	$b^x = b^{x[0]} + \sum_{i=1}^{\infty} b^{x[i]}$	1	5
3. Огибание гиперболического соляного тела	1	1	112000	$b^x = b^{x[0]} + \sum_{i=1}^{\infty} b^{x[i]}$	1	5
4. Огибание 2-клинного соляного тела	1	1	150000	$b^x = b^{x[0]} + \sum_{i=1}^{\infty} b^{x[i]}$	1	11
5. Огибание 2-параболического соляного тела	1	1	200000	$b^x = b^{x[0]} + \sum_{i=1}^{\infty} b^{x[i]}$	4	11840
6. 1-кратное преломление через клиновидное соляное тело	2	1	112000	$b^x = P^{xs} \cdot T_{21} \cdot b^s$	0	3
7. 2-кратное преломление через клиновидное соляное тело	2	1	112000	$b^x = P^{xs} \cdot T_{12} \cdot P^{ss} \cdot T_{21} \cdot b^s$	0	6
8. 1-кратное преломление через параболическое соляное тело	2	1	112000	$b^x = P^{xs} \cdot T_{21} \cdot b^s$	0	3
9. 2-кратное преломление через параболическое	2	1	112000	$b^x = P^{xs} \cdot T_{12} \cdot P^{ss} \cdot T_{21} \cdot b^s$	1	11

<i>соляное тело</i>						
<i>10. 1-кратное преломление через 2-клинное соляное тело</i>	2	1	150000	$b^x = P^{xs} \cdot T_{21} \cdot b^s$	0	3
<i>11. 2-кратное преломление через 2-клинное соляное тело</i>	2	1	150000	$b^x = P^{xs} \cdot T_{12} \cdot P^{ss} \cdot T_{21} \cdot b^s$	3	51
<i>12. Отражение от ангидритового диска</i>	3	2	100000	$b^x = K^{xs_1} \cdot T_{12} \cdot K^{s_1s_2} \cdot R_{23} \cdot K^{s_2s_1} \cdot T_{21} \cdot b^{s_1[0]}$	0	6
<i>13. Отражение под ангидритовым диском</i>	4	3	100000	$b^x = P^{xs_1} \cdot T_{12} \cdot P^{s_1s_2} \cdot T_{23} \cdot P^{s_2s_3} \cdot R_{34} \cdot P^{s_3s_2} \cdot T_{32} \cdot P^{s_2s_1} \cdot T_{21} \cdot b^{s_1}$	0	11

В подразделе 4.2 обсуждены сейсмограммы волновых амплитуд a^+ и a^- для моделей 1-8. Свойство программного комплекса МНКВ вычислять набор отдельных волновых амплитуд a^+ и a^- заменяет эвристическую процедуру интерпретации интерференционного волнового поля, которая необходима для существенного повышения разрешающей способности обратной сейсмической задачи.

В подразделе 4.3 получены количественные оценки точности вычисления волнового поля программным комплексом МНКВ в сравнении с методом конечных разностей (МКР) на примере моделирования волнового поля в двуслойной модели, имитирующей трёхмерный соляной клиновидный выступ в песчанике. Оценки получены из сравнения сейсмограмм и отдельных трасс на них, вычисленных с помощью программного комплекса МНКВ, с сейсмограммами и отдельными трассами, смоделированными методом конечных разностей. Показана приемлемая точность сейсмограмм и отдельных трасс МНКВ.

Одно из преимуществ программного комплекса МНКВ состоит в том, что он реализует декомпозицию сейсмограмм и других сечений волнового поля на отдельные физически реализуемые волновые фрагменты (подраздел 4.1) и волновые амплитуды (подраздел 4.2), что недостижимо в методах моделирования полного волнового поля. Это преимущество даёт возможность решать обратную задачу сейсмологии методами расчленённой интерпретации [1, 3],

которые в настоящее время рассматриваются в качестве одного из основных направлений решения задач послойного восстановления структуры и свойств среды.

Результаты тестирования для моделей 1-4 и 6-7 опубликованы в расширенных тезисах крупных международных геофизических конференций, индексируемых базой данных Scopus [5-12]. Результаты тестирования для модели 5 опубликованы в тезисах международной конференции [33]. Результаты тестирования для модели 8 опубликованы в расширенных тезисах международной конференции [17]. Результаты тестирования программного комплекса МНКВ в сравнении с методом конечных разностей опубликованы и обсуждались на международном семинаре [30].

Основным результатом данного раздела, выносимым автором диссертации на защиту, является тестирование программного комплекса МНКВ с применением современных компьютерных технологий и обоснование результатов данного тестирования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные итоги исследования по теме диссертации, полученные автором лично, заключаются в следующих пунктах:

- 1) Построена аналитическая аппроксимация композитного интегрального оператора распространения волнового поля суммой четырёх пучков концевых волн (ПКВ), которая оптимально соединяет элементарные формулы с устойчивостью и точностью численной реализации.
- 2) Произведена реализация и оптимизация программного комплекса МНКВ для случая акустических сред:
 - a. численно реализованы аналитические формулы, описывающие каскадную дифракцию внутри слоёв,
 - b. численно реализована технология вычисления волновых амплитуд входящих и исходящих волн от целевых границ,
 - c. разработаны и численно реализованы оптимизационные алгоритмы, ускоряющие вычисления программного комплекса МНКВ приблизительно в сто раз (по сравнению с исходным прототипом 2011 года), а также, позволяющие запускать этот комплекс при заданном объёме оперативной памяти ЭВМ,
 - d. произведена адаптация программного комплекса МНКВ на кластер из графических ускорителей, позволившая ускорить вычисление алгоритма в тысячи и более раз (в зависимости от числа используемых графических ускорителей) по сравнению с неадаптированной версией.
- 3) Произведена алгоритмическая и численная реализация процедуры построения семейства зон виртуальной тени на границах слоя. Достигнуты приемлемые объёмы памяти, требуемые для хранения матрицы виртуальной тени. Произведена оптимизация алгоритма и его адаптация для кластера из графических ускорителей и достигнуто увеличение производительности процедуры в сто и более раз (в зависимости от числа используемых графических ускорителей).
- 4) Проверена точность, стабильность и эффективность программного комплекса МНКВ численными примерами для моделей акустической среды со сложными границами.

Исходя из полученных результатов, можно дать некоторые рекомендации по использованию существующей акустической версии программного комплекса МНКВ и её

модернизации для решения обратных сейсмических задач. Реализованный программный комплекс МНКВ может быть использован в качестве моделирующего ядра для решения обратной задачи сейсмологии – послойного восстановления материальных параметров и структуры границ геологических сред. Для этого технология типа «матрично-векторное произведение» текущей акустической версии программного комплекса МНКВ должна быть модернизирована до технологии типа «матрично-матричное произведение». Модернизированная технология может повысить эффективность целе-ориентированного решения обратной задачи сейсмологии.

Используя перечисленные выше основные итоги исследования по теме диссертации и рекомендации, вытекающие из них, автор может наметить перспективы дальнейшей разработки темы. Результаты численных тестов программного комплекса МНКВ подтверждают математическую теорию волн и показывают, что алгоритм этого комплекса имеет перспективу развития на блоковые модели сред с границами сложной геометрической формы. Теория, алгоритмы и вычислительная технология акустической версии программного комплекса МНКВ сформулированы в такой форме, которая практически инвариантна по отношению к типу физической модели среды, что позволяет наметить перспективу усовершенствования и доработки акустической версии программного комплекса МНКВ до многофизической версии. Многофизическая версия может быть развита пошагово на случаи: изотропная и анизотропная упругость, упруго-пористость и затем упруго-пористо-флюидонасыщенность и т.д.

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК:

1. Зятьков, Н.Ю., Айзенберг, А.А., Айзенберг, А.М. Высокооптимизированная реализация процедуры распространения волнового поля в трёхмерных геологических средах с адаптацией для GPU-кластера. Вестник НГУ Серия: Информационные технологии, 2016, 14, 2, с. 38-51.
2. Зятьков, Н.Ю., Айзенберг, А.А. Высокооптимизированная реализация вычисления матрицы тени для моделирования каскадной дифракции в геологических слоях. Вестник НГУ Серия: Информационные технологии, 2016, 14, 2, с. 17-37.

Свидетельство о регистрации программ для ЭВМ:

3. Свидетельство № 2015662020. Высокооптимизированный программный комплекс МНКВ для дифракционного моделирования // Зятьков Н.Ю., Айзенберг А.А., Айзенберг А.М.; Федеральная служба по интеллектуальной собственности РФ (Роспатент) – заявка № 2015617805, дата поступления 25 августа 2015, зарегистрирована 16 ноября 2015.

Монографии и учебные пособия:

4. Зятьков, Н.Ю., Айзенберг, А.А., Айзенберг, А.М., Романенко, А.А. Вычисление на GPUs волнового поля в трехмерных геологических средах методом наложения концевых волн, глава 2.2, стр. 66-87 // Математическое моделирование и программная модель CUDA: учебное пособие / А. В. Снытников, А. С. Колганов, Н. Н. Попова. – Москва: МАКС Пресс, 2018. – 176 с. – (Суперкомпьютерное образование). ISBN 978-5-317-05911-8.

Публикации, изданные в трудах международных конференций, индексируемые базой данных Scopus:

5. Zyatkov, N., Romanenko, A., Ayzenberg, A.A., Aizenberg, A.M., and Andersson, F. Modeling of seismic waves in layers with shadow boundaries in terms of unsparse propagation-absorption matrices: realization and optimization. The Join International Conference on Human-Centered Computer Environments, March 8-13, 2012, Aizu-Wakamatsu & Hamamatsu, Japan, 101-105.
6. Zyatkov, N., Ayzenberg, A., Aizenberg, A.M., Romanenko, A., and Andersson, F. Modeling of cascade diffraction in terms of unsparse propagation-absorption matrices – realization and

- optimization for GPU. Extended Abstracts, 74th Conference & Exhibition, European Association of Geoscientists & Engineers, Copenhagen, Denmark, 4-7 June 2012, P288.
7. Ayzenberg, A.A., Aizenberg, A.M., Zyatkov, N.Y., and Andersson, F. Single-diffraction approximation of the feasible Green's function in geometrical shadow zones. Extended Abstracts, 74th Conference & Exhibition, European Association of Geoscientists & Engineers, Copenhagen, Denmark, 4-7 June 2012, P287.
 8. Zyatkov, N., Ayzenberg, A., Aizenberg, A.M., and Romanenko, A. Highly-optimized TWSM Algorithm for Modeling Cascade Diffraction in Terms of Propagation-absorption Matrices. Extended Abstracts, 75th Conference & Exhibition, European Association of Geoscientists & Engineers, London, England, 10-13 June 2013, Th-P02-11.
 9. Ayzenberg, A., Zyatkov, N., Stovas, A., and Aizenberg, A.M. Double-diffraction Approximation of the Feasible Green's Function in Geometrical Shadow Zones. Extended Abstracts, 75th Conference & Exhibition, European Association of Geoscientists & Engineers, London, England, 10-13 June 2013, Th-P02-10.
 10. Ayzenberg, A.A., Zyatkov, N., Stovas, A., and Aizenberg, A.M. Subsalt Illumination by the Feasible Green's Function of Covering Sediments. EAGE/SPE Workshop on Subsalt Imaging. The Challenges of Subsalt Exploration and Imaging in Deep Water of the Middle East and North Africa. Limassol, Cyprus, 16-19 February 2014, SS09.
 11. Ayzenberg, A.A., Zyatkov, N.Y., Stovas, A., and Aizenberg, A.M. The Feasible Near-front Wavefield Below Salt Overhang in Terms of Cascade Diffraction. Extended Abstracts, 76th EAGE Conference & Exhibition, Amsterdam, Netherlands, 16-19 June 2014, We P06 06.
 12. Aizenberg, A.M., Zyatkov, N.Y., Ayzenberg, A.A., and Rakshaeva, E.Z. New concepts of the transmission-propagation operator theory in seismic diffraction modeling and interpretation. Extended Abstracts, 76th EAGE Conference & Exhibition, Amsterdam, Netherlands, 16-19 June 2014, We P06 07.
 13. Rakshaeva, E., Zyatkov, N., and Aizenberg, A.M. Modified effective reflection coefficient adapted for AVO inversion of moderate- and long-offset data. SEG Technical Program Expanded Abstracts, Denver, USA, 26-31 October 2014, 496-500.
 14. Lavrentiev, M., Romanenko, A., Zyatkov, N., Ayzenberg, A., Aizenberg, A. Modern hardware facilities to accelerate seismic data processing. Proceedings of the 18th International Multidisciplinary Scientific GeoConference SGEM 2018, V. 18, Issue 1.5, Vienna, Austria, 2018, pp. 171-178.

Публикации, изданные в трудах конференций:

15. Зятков, Н.Ю., Айзенберг, А.А., Ракшаева, Е.Ж., Айзенберг, А.М. Прототип высокооптимизированного пакета TWSM для дифракционного моделирования сейсмических волновых полей с адаптацией под GPU-кластер. Журнал «Сибирские электронные математические известия» в «Труды V международной молодежной школы-конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач"», 2014, 11, 35-40.
16. Ракшаева, Е.Ж., Зятков, Н.Ю., Нефедкина, Т.В., Айзенберг, А.М. 3D моделирование волновых полей, отраженных от криволинейных границ, методом МНКВ с модифицированным коэффициентом отражения. Интерэкспо ГЕО-Сибирь-2014. X Междунар. науч. конгр., Новосибирск, Россия, 16-18 апреля 2014, 3, 37-42.
17. Zyatkov, N, Auzenberg, A.A., Omosanya, K.O., Romanenko, A., and Aizenberg, A.M. Evaluation of diffracted wavefields below the salt stringer using the transmission-propagation operator theory and TWSM software package. Proceedings of the 2nd International Conference on Applications in Information Technology (ICAIT-2016), October, 6-8, 2016, University of Aizu, Aizu-Wakamatsu, Japan, 21-24.

Тезисы российских и международных конференций:

18. Зятков, Н.Ю., Айзенберг, А.А., Айзенберг, А.М., Романенко, А.А., Андерссон, Ф. Описание сейсмических волн в слоях с «затеняющими» границами в терминах операторов распространения-поглощения. Третья международная молодёжная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач», 10-15 октября 2011, Новосибирск, Россия, 20-22.
19. Зятков, Н. Моделирование сейсмических волн в слоях с затеняющими границами в терминах матричных операторов распространения-поглощения: реализация и оптимизация для GPU. 50-я юбилейная Международная научная конференция «Студент и научно-технический прогресс» 13-19 апреля 2012, Новосибирск, Россия, с. 152. (Диплом 1 степени).
20. Зятков, Н.Ю., Айзенберг, А.А., Айзенберг, А.М., Романенко, А.А., Андерссон, Ф. Моделирование каскадной дифракции в слоях с «затеняющими» границами в терминах матричных операторов распространения-поглощения. Четвёртая международная молодёжная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач», 5-15 августа 2012, Новосибирск, Россия, с. 60.
21. Зятков, Н. Разработка высокооптимизированного пакета программ дифракционного моделирования сейсмических волновых полей. 51-я международная научная студенческая конференция «Студент и научно-технический прогресс» 12-18 апреля 2013, Новосибирск, Россия, с. 134. (Диплом 2 степени)

22. Зятьков, Н.Ю., Айзенберг, А.А., Айзенберг, А.М. Реализация и оптимизация хранения матрицы тени для алгоритма Метода Наложения Концевых Волн. Девятая международная азиатская школа-семинар «Проблемы оптимизации сложных систем», 15-25 августа 2013, Алматы, Республика Казахстан.
23. Зятьков, Н.Ю., Айзенберг, А.А., Айзенберг, А.М. Разработка высокооптимизированного пакета программ дифракционного моделирования сейсмических волновых полей с адаптацией под графические ускорители. Пятая международная молодёжная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач», 8-13 октября 2013, Новосибирск, Россия, с. 39.
24. Зятьков, Н.Ю., Айзенберг, А.А., Айзенберг, А.М. Прототип высокооптимизированного пакета TWSM для дифракционного моделирования сейсмических волновых полей с адаптацией под GPU-кластер. Всероссийская научная конференция молодых учёных и студентов, посвящённая 80-летию академика А.Э. Конторовича, Новосибирск, Россия, 10-15 февраля 2014.
25. Zyatkov, N., Ayzenberg, A., and Aizenberg, A.M. Highly-optimized TWSM algorithm for seismic diffraction modeling adapted for GPU cluster. International conference “Advanced Mathematics, Computations & Applications - 2014”, Novosibirsk, Russia, June 8-11, 2014, p. 37.
26. Зятьков, Н.Ю., Ракшаева, Е.Ж., Айзенберг, А.А., Айзенберг, А.М. Прототип пакета МНКВ дифракционного моделирования сейсмических волновых полей адаптированный для GPU-кластера. VII Сибирская научно-практическая конференция молодых ученых по наукам о Земле (с участием иностранных специалистов), Новосибирск, Россия, 17-21 ноября 2014, 379-380.
27. Зятьков, Н.Ю., Айзенберг, А.А., Ракшаева, Е.Ж., Айзенберг, А.М. Высокооптимизированный пакет МНКВ для моделирования сейсмических и дифракционных волн в слоисто-блоковых средах. Всероссийская конференция «Геофизические методы исследования земной коры», посвященная 100-летию со дня рождения академика Н.Н. Пузырева, Новосибирск, Россия, 8-13 декабря 2014, 36-40.
28. Зятьков, Н.Ю. Пакет МНКВ дифракционного моделирования сейсмических волновых полей, адаптированный для GPU-кластера. Шестая международная молодёжная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач», 8-14 декабря 2014 года, Алматы, Казахстан, с. 14.
29. Zyatkov, N., Ayzenberg, A., and Aizenberg, A. Highly-optimized TWSM software package for seismic diffraction modeling adapted for GPU-cluster. EGU General Assembly, 2015, 17, EGU2015-706.

30. Ayzenberg, A.A., Weibull, W., Zyatkov, N., Aizenberg, A.M., and Stovas, A. Comparison TWSM with FD. Workshop meeting “Active and passive seismics in laterally inhomogeneous media”, Czech Republic, Loucen Castle, June 8-12, 2015, p. 29.
31. Zyatkov, N., Ayzenberg, A., and Aizenberg, A.M. Highly-optimized TWSM algorithm for diffraction modeling below salt overhangs. Workshop meeting “Active and passive seismics in laterally inhomogeneous media”, Czech Republic, Loucen Castle, June 8-12, 2015, p. 30.
32. Зятков, Н.Ю., Айзенберг, А.А., Айзенберг, А.М. Реализация и оптимизация хранения матрицы тени для алгоритма дифракционного моделирования МНКВ. Седьмая международная молодёжная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач», 19-24 октября 2015, Новосибирск, Россия, с. 39.
33. Ayzenberg, A., Zyatkov, N., and Aizenberg, A.M. TPOT&TWSM for 3D multiphysics multi-scale models with complex interfaces. UU-model solution separation. EUROMECH Colloquium 584, Multi-uncertainty and Multi-scale Methods and Related Applications, 13-16 September 2016, Porto, Portugal, 1-2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Goldin, S.V. Seismic travelttime inversion. Investigations in geophysics. Soc. Explor. Geophys., Tulsa, USA, 1986, 1. – 363 p.
2. Tarantola, A. Inverse problem theory and methods for model parameter estimation. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2005. – 342 p.
3. Treitel, S., and Lines, L. Past, present and future of geophysical inversion – A new millennium analysis. *Geophysics*, 2001, 66, 21-24.
4. Weglein, A., Araujo, F., Carvalho, P., Stolt, R., Matson, K, Coates, R., Corrigan, D., Foster, D., Shaw, S and Zhang, H. Inverse scattering series and seismic exploration. *Inverse Problems*, 2003, 19, R27-R83.
5. Moser, T.J. Review of Ray-Born Forward Modeling for Migration and Diffraction Analysis, *Stud. Geophys. Geod.*, 2012, 56, 411-432.
6. Jakobsen, M. and Ursin, B. Full waveform inversion in the frequency domain using direct iterative T-matrix methods. *Journal of Geophysics and Engineering*, 2015, 12, 400-418.
7. Chandler-Wilde, S.N., Graham, I.G., Langdon, S., and Spence, E.A. Numerical-asymptotic boundary integral methods in high-frequency acoustic scattering. *Acta Numerica*, Cambridge University Press, 2012, 89-305.
8. Virieux, J., Calandra, H., and Plessix, R-E. A review of the spectral, pseudo-spectral, finite-difference and finite-elevent modelling techniques for geophysical imaging. *Geophysical Prospecting*, 2011, 59, 794-813.
9. Virieux, J., and Operto, S. An overview of full-waveform inversion in exploration geophysics. *Geophysics*, 2009, 74, 6, WCC127-WCC152.
10. Carcione, J.M., Herman, G.C., and ten Kroode, A.P.E. Seismic modeling. *Geophysics*, 2002, 67, 4, 1304-1325.
11. Carcione, J.M., Morency, C., and Santos, J.E. Computational poroelasticity – A review. *Geophysics*, 2010, 75, 5, 75A229-75A243.
12. Klem-Musatov, K., Aizenberg, A., Helle, H.B., and Pajchel, J. Reflection and transmission in multilayered media in terms of surface integrals. *Wave Motion*, 2005, 41, 4, 293-305.
13. Aizenberg, A.M., and Ayzenberg, A.A. Feasible fundamental solution of the multiphysics wave equation in inhomogeneous domains of complex shape. *Wave Motion*, 2015, 53, 66-79.

14. Ayzenberg, M., Aizenberg, A.M., and Ursin, B. Tip-wave superposition method with effective reflection and transmission coefficients: A new 3D Kirchhoff-based approach to synthetic seismic modelling. *Leading Edge*, 2009, 28, 582-588.
15. Ayzenberg, M.A., Aizenberg, A.M., Helle, H.B., Klem-Musatov, K.D., Pajchel, J., and Ursin, B. 3D diffraction modeling of singly scattered acoustic wavefields based on the combination of surface integral propagators and transmission operators. *Geophysics*, 2007, 72, 5, SM19-SM34.
16. Aizenberg, A.M., Ayzenberg, M.A., and Klem-Musatov, K.D. Seismic diffraction modeling with the tip-wave superposition method. *Extended Abstracts of the 73-th EAGE Conference & Exhibition, Austria, Vienna, 23-26 May 2011*, B018.
17. Ayzenberg, M., Tsvankin, I., Aizenberg, A.M. and Ursin, B. Effective reflection coefficients for curved interfaces in TI media. *Geophysics*, 2009, 74, WB33-WB53.
18. Tantsereva, A., Ursin, B., Favretto-Cristini, N., Cristini, P., and Aizenberg, A.M. Numerical modeling of three-dimensional zero-offset laboratory data by a discretized Kirchhoff integral. *Geophysics*, 2014, 79, 2, T77-T90.
19. Skopintseva, L.V., Aizenberg, A.M., Ayzenberg, M.A., Landrø, M., and Nefedkina, T.V. The effect of interface curvature on AVO inversion of near-critical and postcritical PP-reflections. *Geophysics*, 2012, 77, 1, N1-N16.
20. Favretto-Cristini, N., Tantsereva, A., Cristini, P., Ursin, B., Komatitsch, D., and Aizenberg, A.M. Numerical modeling of zero-offset laboratory data in a strong topographic environment: results for a spectral-element method and a discretized Kirchhoff integral method. *Earthquake Science*, 2014, 27, 4, 391-399.
21. Лунёва, М.Н. Влияние геометрии сейсмической границы на поле проходящей волны (на основе математического моделирования). ДВО АН СССР, Институт тектоники и геофизики, 1992, 161 с. ISBN 5-7442-0307-9.
22. Rakshaeva, E.Z., Nefedkina, T.V., Aizenberg, A.M., Vilegzhanin, R.I., and Lykhin, P.A. AVO inversion of post-critical PP reflections from curved interfaces based on modified effective reflection coefficients. *Extended Abstracts, 77th EAGE Conference & Exhibition, Madrid, Spain, 1-4 June 2015*, We-N110-04.
23. Jocker, J., Spetzler, J., Smeulders, D., and Trampert, J. Validation of fast-order diffraction theory for the traveltimes and amplitudes of propagating waves, *Geophysics*, 2006, 71, 6, T167-T177.
24. Sofronov, I., Zaitsev, N., and Dovgilovich, L. Multi-block finite-difference method for 3D elastodynamic simulations in anisotropic subhorizontally layered media. *Geophysical Prospecting*, 2015, 63, 1142-1160.
25. Chapman, C. *Fundamentals of seismic wave propagation*. Cambridge University Press, 2006.
26. Friedlander, F.G. *Sound Pulses*. Cambridge, the University Press, 1958.

27. Jones, D.S. Double knife-edge diffraction and ray theory, *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 1973, 26, 1, 1-18.
28. Chu, D., Stanton, T.K., and Pierce, A.D. Higher-order acoustic diffraction by edges of finite thickness, *Journal of the Acoustical Society of America*, 2007, 122, 6, 3177-3194.
29. Anokhov, S. On problem of the rigorous diffraction quantitative description. *Semiconductor Physics, Quantum Electronics and Optoelectronics*, 1999, 2, 4, 66-69.
30. Klem-Musatov, K.D. *Theory of seismic diffractions*, SEG, 1994.
31. Brannan, J.R., Ervin, V.J., Duan, J., and Razoumov, L. A Wiener-Hopf approximation technique for a multiple plate diffraction problem, *Mathematical Methods in the Applied Science*, 2004, 27, 19-34.
32. Cerveny, V. *Seismic Ray Theory*, Cambridge University Press, 2005.
33. Keller, J.B. Geometrical theory of diffraction, *Journal of the Optical Society of America*, 1962, 52, 116-130.
34. Ufimtsev, P.Y. *Fundamentals of the physical theory of diffraction*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1981.
35. Capolino, F., and Albani, M. Time domain double diffraction at a pair of coplanar skew edges, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2005, 53, 4, 1455-1469.
36. Klem-Musatov, K.D., Aizenberg, A.M., Pajchel, J., and Helle, H.B. *Edge and Tip Diffractions: Theory and Applications in Seismic Prospecting*, Geophysical Monograph Series, No. 14, SEG, Tulsa, USA, 2008.
37. Aizenberg, A.M. A system of irregular fundamental solutions to wave equation in a three-dimensional inhomogeneous medium, *Russian Geology and Geophysics*, 1993, 34, 4, 105-113.
38. Weston, V.H. Wave splitting and the reflection operator for the wave equation in \mathbb{R}^3 . *J. Math. Phys.*, 1989, 30, 11, 2545-2562.
39. DeSanto, J.A. Scattering of scalar waves from a rough interface using a single integral equation. *Wave Motion*, 1983, 5, 125-135.
40. Kennett, B.L.N. Reflection operator methods for elastic waves. *Wave Motion*, 1984, 6, 407-429.
41. Sen, M.K., and Frazer, L.N. Multifold phase space path integral synthetic seismograms. *Geophys. J. Int.*, 1991, 104, 479-487.
42. Wenzel, F., Stenzel, K.-J., and Zimmermann, U. Wave propagation in laterally heterogeneous layered media. *Geophys. J. Int.*, 1990, 103, 675-684.
43. Berkhout, A.J. *Applied Seismic Wave Theory*, Advances in exploration geophysics, Elsevier, 1987, 1.
44. Burago, Yu.D., Ivanov, S.V., and Malev, S.G. Remarks on Chebyshev coordinates, *J. Math. Sci.*, 2007, 140, 4, 497-501.

45. Koenderink, J., and van Doorn, A. Shape from Chebyshev Nets. Proceedings of the 5th European Conference on Computer Vision, 1998, 2, 215-225.
46. Costabel, M., and Dauge, M. On representation formulas and radiation conditions. *Math. Methods Appl. Sci.*, 1997, 20, 2, 133-150.
47. Roach, G.F. Scattering from unbounded surfaces. Proceedings of Dundee Conference, Pitman Research Notes, Longmans, London, 1993, 248-272.
48. Grisvard, P. *Boundary Value Problems in Non-Smooth Domains*. Pitman, 1985.
49. Colton, D., and Kress, R. A direct boundary integral equation method for transmission problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 1985, 106, 367-413.
50. Benzoni-Gavage, S., and Serre, D. *Multi-dimensional hyperbolic partial differential equations. First order systems and applications*. Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, New York, 2007.
51. Ayzenberg, M.A. *Three-dimensional seismic diffraction modeling*: Ph.D. thesis, Norwegian University of Science and Technology, 2008.
52. Colton, D, and Kress, R. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. Springer Science and Business Media, New York, 2013.
53. Storer, J. A. *Data Compression: methods and theory*. Computer Science Press, 1988.
54. Whitted, T. An improved illumination model for shaded display. *Communications of the ACM*, 1980, 23, 6, 343-349.
55. Möller, T., and Trumbore, B. Fast, minimum storage ray/triangle intersection. *Journal of Graphics Tools*, 1997, 2, 1, 21-28.
56. Woop, S., Benthin, C., and Wald, I. Watertight Ray/Triangle Intersection. *Journal of Computer Graphics Techniques*, 2013, 2, 1.
57. Роджерс, Д. *Алгоритмические основы машинной графики*. – М.: Мир, 1989.
58. Fujimoto, A., Takayuki, T, and Iwata, K. *Tutorial: computer graphics; image synthesis* / Ed. by Kenneth, I.J., Charles, W.G., and Nelson, L.M. Lansing Hatfield. New York, NY, USA: Computer Science Press, Inc., 1988, 148-159.
59. Bentley, J.L. Multidimensional binary search trees used for associative searching. *Communications of the ACM*, 1975, 18, 9, 509-517.
60. Wapenaar, K. General representations for wavefield modeling and inversion in geophysics, *Geophysics*, 2007, 72, 5, SM5-SM17.
61. Wapenaar, K., and Douma, H. A unified optical theorem for scalar and vectorial wave fields, *J. Acoust. Soc. Am.*, 2012, 131, 5, 3611-3626.
62. Asvestas, J.S. Line integrals and physical optics. Part I. The transformation of the solid-angle surface integral to a line integral. *J. Opt. Soc. Am.*, 1985, A 2, No. 6, 891-895.

63. Asvestas, J.S. Line integrals and physical optics. Part II. The conversion of the Kirchhoff surface integral to a line integral. *J. Opt. Soc. Am.*, 1985, A 2, No. 6, 896-902.
64. Matsumoto T., Zheng C., Harada S., Takahashi T. Explicit evaluation of hypersingular boundary integral equation for 3-D Helmholtz equation discretized with constant triangular element. *J Comp Sci and Techn*, 2010, 4, 3, 194-206.

ПРИЛОЖЕНИЕ А. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

В данном приложении описана строгая постановка прямой задачи для акустической слоистой среды сначала в терминах механики сплошной среды, а затем в терминах теории операторов прохождения-распространения-дифрагирования (ТОПРД). Также кратко описано преобразование постановки прямой задачи в терминах ТОПРД в её аналитическое решение.

А.1. Постановка прямой задачи для слоистой среды

Теория операторов прохождения-распространения-дифрагирования (ТОПРД) развита для решения прямых задач в блоково-слоистых средах с неоднородными блоками/слоями различного материального строения и кусочно-гладкими границами. В данной диссертационной работе ограничимся рассмотрением следующей модели среды: 1) трёхмерная акустическая слоистая среда, 2) все слои – однородные, 3) все границы гладкие или кусочно-гладкие. Двумерное сечение слоистой акустической среды схематично показана на Рисунке А.1.

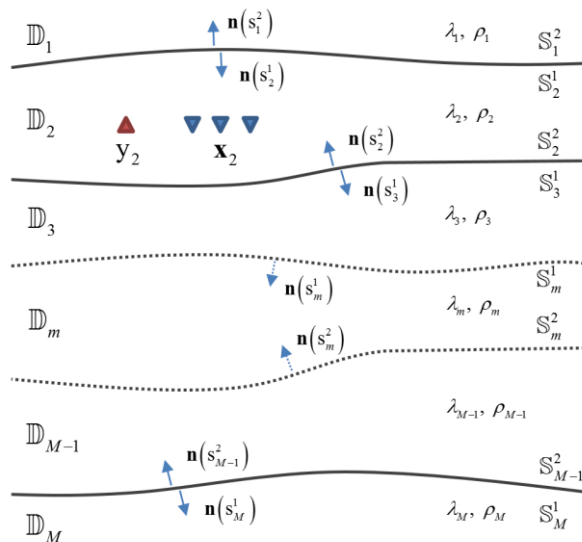


Рисунок А.1. Двумерное вертикальное сечение трёхмерной слоистой среды.

Опишем материальные параметры модели среды. Обозначим однородные слои модели за \mathbb{D}_m , где $m = 1, 2, \dots, M$. Верхний слой \mathbb{D}_1 (воздух) и нижний слой \mathbb{D}_M представляют собой полупространства. Каждый из слоев описывается двумя материальными параметрами: модулем

упругости в жидкости/воздухе λ_m и её плотностью ρ_m . Скорость распространения продольной волны в жидкости/воздухе определена соотношением $v_{pm} = \sqrt{\frac{\lambda_m}{\rho_m}}$.

Опишем геометрические параметры модели среды. Сначала введём обозначение граней всех границ. Слой \mathbb{D}_m ограничен двумя гранями: \mathbb{S}_m^1 сверху и \mathbb{S}_m^2 снизу. Грани границ вне некоторого конечного шара становятся горизонтальными и плоскими, а их форма внутри этого шара достаточно произвольна и принадлежит классу $C^{(2)}$. Верхнее полупространство \mathbb{D}_1 имеет только нижнюю грань \mathbb{S}_1^2 . Нижнее полупространство \mathbb{D}_M имеет только верхнюю грань \mathbb{S}_M^1 . Слои \mathbb{D}_m и \mathbb{D}_{m+1} разделены двусторонней гранью $\mathbb{S}_m^2 \cup \mathbb{S}_{m+1}^1$, где $m = 1, 2, \dots, M-1$. Внутренняя нормаль $\mathbf{n}(s_m^j)$ в точке s_m^j грани \mathbb{S}_m^j направлена внутрь слоя \mathbb{D}_m .

Далее ТОПРД требует введения общих поверхностных (Гауссовых) координат на каждой грани любой границы для аналитического описания двукратного интегрального оператора типа прямого преобразования Фурье и поверхностного интегрального оператора типа Кирхгофа. Поверхностный интегральный оператор типа Кирхгофа осуществляет интегрирование с дифференциалом площади вида $dS = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} d\xi_1 d\xi_2$, где ξ_1 и ξ_2 – поверхностные координаты, а g_{11} , g_{22} и g_{12} – метрические коэффициенты в этих координатах. Двукратный интегральный оператор типа Фурье осуществляет интегрирование с дифференциалом площади вида $ds_1 ds_2 = \sqrt{g_{11}g_{22}} d\xi_1 d\xi_2$. Из очевидного требования $dS = ds_1 ds_2$ следует условие универсальности искомой системы координат $\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \sqrt{g_{11}g_{22}}$. Очевидно, что это условие выполняется только для ортогональных систем координат, когда $g_{12} = 0$.

Чтобы сохранить все необходимые математические свойства двукратного преобразования Фурье, необходимо избежать появления особых точек в универсальной ортогональной системе координат. Если грань границы принадлежит классу поверхностей с ограниченной кривизной (поверхности А.Д. Александрова) [44], то на ней строится сетка Чебышевских координат, которая не имеет особых точек. Если какая-то грань не принадлежит классу поверхностей с ограниченной кривизной, то предварительно она разбивается на сумму вспомогательных граней, каждая из которых принадлежит классу поверхностей с ограниченной кривизной. Затем сетка Чебышевских координат трансформируется в комфорно-евклидовы (CE) координаты по известным формулам (получаем сетку криволинейных квадратов) [45].

Рассмотрим корректную постановку прямой задачи распространения волновых полей в слоистой акустической среде. Вектор скоростей частиц $\mathbf{v}_m(x, t)$ и акустическое давление

$p_m(x, t)$ в точке x слоя \mathbb{D}_m управляются системой уравнений колебания в частных производных первого порядка [28]. Используя временное преобразование Фурье

$F(t, \omega) \langle \dots \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \dots \rangle \exp(-i\omega t) d\omega$, где ω – угловая частота, далее будем рассматривать

стационарный вектор скоростей частиц $v_m(x, \omega)$ и стационарное давление $p_m(x, \omega)$.

Стационарная система уравнений колебания в частных производных первого порядка может быть записана в виде:

$$\begin{cases} \nabla p_m(x, \omega) + (-i\omega) \rho_m v_m(x, \omega) = f_m(x, \omega), \\ \lambda_m \nabla \cdot v_m(x, \omega) + (-i\omega) p_m(x, \omega) = q_m(x, \omega), \end{cases} \quad m = 1, \dots, M, \quad (\text{A.1})$$

где $f_m(x, \omega)$ – объёмная плотность внешней силы, $q_m(x, \omega)$ – объёмная плотность внешней скорости впрыскивания. Система (A.1) описывает колебания частицы (инфинитезимального объёма) вокруг некоторого исходного положения.

Вектор скоростей частиц $v_m(x, \omega)$ и давление $p_m(x, \omega)$ должны обладать дополнительным свойством, которое является аналогом начальных условий в области временных частот:

$$v_m(x, -\omega) = \overline{v_m(x, +\omega)}, \quad p_m(x, -\omega) = \overline{p_m(x, +\omega)}, \quad m = 1, \dots, M. \quad (\text{A.2})$$

Вектор скоростей частиц $v_m(x, \omega)$ и давление $p_m(x, \omega)$ должны удовлетворять условиям излучения, чтобы подавить физически недопустимые волны, приходящие из бесконечных областей слоёв \mathbb{D}_m . Подробный обзор множества форм записи условий излучения для слоистых сред приведён в [46]. Чтобы избежать конкретизации некоторой формы записи из множества возможных форм, запишем условия излучения на бесконечно удалённой поверхности \mathbb{S}_m^∞ , ограничивающей слой \mathbb{D}_m , в формальном виде, который был предложен в работе [47]:

$$\{v_m(x, \omega); p_m(x, \omega)\}_{x \in \mathbb{S}_m^\infty} \in \langle RC \rangle, \quad m = 1, \dots, M. \quad (\text{A.3})$$

Поверхность \mathbb{S}_m^∞ имеет цилиндрическую форму в слоях \mathbb{D}_m и форму полусферы в верхнем полупространстве \mathbb{D}_1 и нижнем полупространстве \mathbb{D}_M .

Если на грани \mathbb{S}_m^j имеется непустое множество рёбер \mathbb{E}_m^j и непустое множество вершин \mathbb{V}_m^j , вектор скоростей частиц $v_m(x, \omega)$ и давление $p_m(x, \omega)$ должны дополнительно удовлетворять условиям на рёбрах и вершинах, чтобы подавить физически недопустимое излучение от рёбер и вершин. Условия на рёбрах ставятся на цилиндрических поверхностях $\mathbb{S}_m^{j\mathbb{E}}$ с инфинитезимально малыми радиусами и центрами кривизны на рёбрах, а условия на вершинах ставятся на сферических поверхностях $\mathbb{S}_m^{j\mathbb{V}}$ с инфинитезимально малыми радиусами и центрами кривизны в вершинах. Подробный анализ условий на рёбрах и вершинах приведён в [48]. Чтобы избежать конкретизации некоторой формы записи из множества возможных форм, запишем условия на рёбрах и вершинах в формальном виде, который был предложен в работе [47]:

$$\begin{aligned} \{v_m(x, \omega); p_m(x, \omega)\}_{x \in \mathbb{S}_m^{j\mathbb{E}}} &\in \langle EC \rangle, \quad m = 1, \dots, M, \\ \{v_m(x, \omega); p_m(x, \omega)\}_{x \in \mathbb{S}_m^{j\mathbb{V}}} &\in \langle VC \rangle, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Вектор скоростей частиц $v_m(x, \omega)$ и давление $p_m(x, \omega)$ на гранях \mathbb{S}_m^1 и \mathbb{S}_m^2 слоя \mathbb{D}_m должны удовлетворять граничным условиям. В данной работе будем рассматривать идеальные граничные условия. Такие условия заключаются в непрерывности давления $p_m(s_m^j + 0, \omega)$ и нормальной компоненты вектора скорости частиц $v_{mn}(s_m^j + 0, \omega) = n(s_m^j) \cdot v_m(s_m^j + 0, \omega)$ в предельных точках $s_m^j + 0$ около грани \mathbb{S}_m^j , которые записываются в виде:

$$\begin{cases} v_{mn}(s_m^2 + 0, \omega) = -v_{(m+1)n}(s_{m+1}^1 + 0, \omega), \\ p_m(s_m^2 + 0, \omega) = p_{m+1}(s_{m+1}^1 + 0, \omega), \end{cases} \quad m = 1, \dots, M - 1 \quad (\text{A.5})$$

Граничные условия (A.5) согласуют колебания двух частиц, принадлежащих разным контактирующим средам. Знак минус в правой части первого граничного условия из (A.5) учитывает тот факт, что нормаль к грани \mathbb{S}_m^j всегда направлена внутрь области \mathbb{D}_m . Существенно отметить, что граничные условия (A.5) не учитывают две касательные компоненты обоих векторов скоростей частиц в контактирующих областях.

Прямая задача (A.1)-(A.5) известна в математической литературе, как начально-краевая задача, проблема прохождения или проблема распространения. Доказательство корректности постановки прямой задачи (A.1)-(A.5), то есть существование, единственность и устойчивость

решения, детально исследовалось многими авторами [47, 49]. Поэтому далее будем полагать, что прямая задача (A.1)-(A.5) корректная.

A.2. Строгое аналитическое представление решения прямой задачи в терминах ТОПРД

Теория операторов прохождения-распространения-дифрагирования (ТОПРД) [12, 13], [12] предлагает аналитическое решение прямой задачи (A.1)-(A.5) для слоистых сред с гладкими криволинейными границами в терминах ТОПРД. Такое решение для M -слойной среды имеет вид интегрального представления

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{s}', \omega) \mathbf{b}(\mathbf{s}', \omega) + \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, \omega) \quad . \quad (\text{A.6})$$

Матричный оператор $\mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{s}', \omega)$ в (A.6) описывает распространение волнового поля от двух граней всех слоёв к приёмнику и имеет размерность $4M \times 2M$. Решение $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$ из (A.6) имеет вид вектора, составленного из M векторов для каждого слоя, а вектор для каждого слоя имеет четыре скалярных компоненты: три компоненты вектора скорости частиц и давление в слое. Вектор $\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, \omega)$ из (A.6) составлен из M векторов заданных полей источников для каждого слоя. Вектор для каждого слоя содержит вектор скорости частиц и давление, порождаемые продольной волной от источника. В случае, если в каком-то слое нет источников, то его вектор принимает нулевое значение.

Вектор неизвестных граничных значений $\mathbf{b}(\mathbf{s}', \omega)$ из (A.6) составлен из M векторов для каждого слоя с двумя скалярными компонентами: нормальная компонента вектора скорости частиц и давление в слое. Так как размерность вектора $\mathbf{b}(\mathbf{s}', \omega)$ меньше размерности вектора $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$, то в общем виде можно записать следующее равенство:

$$\mathbf{b}(\mathbf{s}, \omega) = \mathbf{C} \mathbf{R}(\mathbf{s}) \mathbf{u}(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{s}, \omega) \quad , \quad (\text{A.7})$$

где $\mathbf{R}(\mathbf{s})$ – блочно-диагональная $4M \times 4M$ матрица, которая состоит из матриц поворота от глобальной декартовой системе координат к локальной декартовой системе координат в точках \mathbf{s} , принадлежащих отдельной грани некоторого слоя, \mathbf{C} – блочно-диагональная $2M \times 4M$ матрица, которая состоит из матриц конкатенации (удаление неиспользуемых компонент скоростей частиц, касательных отдельной грани каждого слоя). Явный вид отдельных блоков этих двух матриц для отдельной грани произвольного слоя будет приведён в приложении В.

Для вектора неизвестных граничных значений $\mathbf{b}(\mathbf{s}', \omega)$ из (A.6) возникает проблема граничных значений (определение вектора граничных значений) [50]. ТОПРД позволяет записать строгое аналитическое решение этой проблемы в форме переопределённой системы двух матрично-векторных уравнений [12]:

$$\begin{aligned}\mathbf{b}(\mathbf{s}, \omega) &= \mathbf{P}(\mathbf{s}, \mathbf{s}', \omega) \mathbf{b}(\mathbf{s}', \omega) + \mathbf{b}^{(0)}(\mathbf{s}, \omega), \\ \mathbf{b}(\mathbf{s}, \omega) &= \mathbf{T}(\mathbf{s}, \mathbf{s}', \omega) \mathbf{b}(\mathbf{s}', \omega),\end{aligned}\tag{A.8}$$

где $\mathbf{P}(\mathbf{s}, \mathbf{s}', \omega) = \mathbf{C} \mathbf{R}(\mathbf{s}) \mathbf{P}(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{s}, \mathbf{s}', \omega)$. Подстановка первого уравнения из (A.8) в правую часть второго уравнения сводит переопределённую систему (A.8) к матричному интегральному уравнению второго рода:

$$\mathbf{b}(\mathbf{s}, \omega) = \mathbf{L}(\mathbf{s}, \mathbf{s}', \omega) \mathbf{b}(\mathbf{s}', \omega) + \mathbf{b}^{(1)}(\mathbf{s}, \omega),\tag{A.9}$$

где $\mathbf{b}(\mathbf{s}, \omega)$ – это вектор, содержащий неизвестные граничные значения искомого решения на верхних и нижних границах всех слоёв модели среды, $\mathbf{b}^{(1)}(\mathbf{s}, \omega) = \mathbf{T}(\mathbf{s}, \mathbf{s}', \omega) \mathbf{b}^{(0)}(\mathbf{s}', \omega)$ – вектор, содержащий значения однократно отражённого или преломленного волнового поля на верхних и нижних границах слоёв, $\mathbf{L}(\mathbf{s}, \mathbf{s}', \omega) = \mathbf{T}(\mathbf{s}, \mathbf{s}'', \omega) \mathbf{P}(\mathbf{s}'', \mathbf{s}', \omega)$ – трёхдиагональный блочный матричный интегральный оператор, описывающий распространение волнового поля в слоях и прохождение волнового поля через границы. Блочная структура обоих векторов и матричного оператора рассматривается в приложении В.

Уравнение (A.9) в конечном временном окне $0 \leq t \leq T$ обладает полезным свойством: достаточно рассматривать конечные значения максимального количества отражений и преломлений $N(T)$, поскольку остаточный член в операторном решении (A.9) методом простой итерации (метод Неймана) не вносит вклад в этом окне. Тогда можно рассматривать частичную сумму операторного решения методом простой итерации в виде:

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}^{(0)} + \sum_{n=1}^{N(T)} \mathbf{b}^{(n)},\tag{A.10}$$

где

$$\mathbf{b}^{(n)} = \mathbf{L} \mathbf{b}^{(n-1)} = \mathbf{L}^2 \mathbf{b}^{(n-2)} = \mathbf{L}^{(n-1)} \mathbf{b}^{(1)}.\tag{A.11}$$

Слагаемое $\mathbf{b}^{(n)}$ в сумме (A.10) может быть ассоциировано с соответствующим n -ым актом отражения-преломления. В самом деле, в соответствии с формулой (A.11), любой n -кратный член $\mathbf{b}^{(n)}$ записывается, как однократное действие оператора прохождения-распространения на $(n-1)$ -ый член. Таким образом, каждый член $\mathbf{b}^{(n)}$ представляет собой физическое событие, описывающее n -кратный акт отражения-преломления волнового поля, распространяющийся от конкретных отражающих-преломляющих граней, в соответствии с заданным волновым кодом. Конечный ряд в (A.10) представляет векторы волновых амплитуд из (A.11) как нарастающую последовательность актов отражений и преломлений. Это позволяет описывать и вычислять многократно отражённые и преломленные волны, в соответствии с индексом n . Кроме того, любой набор многократно отражённых и преломленных волновых полей, может быть взаимно однозначно отождествлён с порождающими их гранями. Аналитическое представление (A.10) можно рассматривать как обобщение метода точного лучевого разложения, развитого Кеннеттом [25] для сред с однородными слоями и плоскими границами, на среды с неоднородными слоями и произвольной геометрией границ.

Формулы (A.10) и (A.11) позволяют анализировать полное волновое поле и интерпретировать его отдельные фрагменты, порождённые деталями геологической структуры среды. Однако можно дополнительно расщепить волновые поля в формулах (A.6)-(A.11), которые записаны в терминах механики сплошной среды, если переписать эти формулы в терминах ТОПРД. С учётом формулы (A.7) ТОПРД позволяет записать спектральное представление полного волнового поля в Римановых криволинейных координатах, которые согласованы с формой границ, в виде:

$$\mathbf{R}(\mathbf{s}) \mathbf{u}(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{s}, \omega) = \mathbf{H}(\mathbf{s}, \mathbf{s}', \omega) \mathbf{a}(\mathbf{s}', \omega) \quad , \quad (\text{A.12})$$

где $\mathbf{H}(\mathbf{s}, \mathbf{s}', \omega)$ – блочно-диагональная $4M \times 2M$ матрица, каждый блок которой является матричным конволюционным оператором, действующим в точку \mathbf{s} из всех точек \mathbf{s}' , принадлежащих отдельной грани некоторого слоя, $\mathbf{a}(\mathbf{s}', \omega)$ – $2M \times 1$ вектор, который состоит из 2×1 векторов для отдельной грани каждого слоя. Каждый 2×1 вектор содержит две скалярные волновые амплитуды, распространяющиеся во взаимно-встречных направлениях относительно отдельной криволинейной грани слоя.

Подставив (A.12) в соотношение (A.7), получим тождество:

$$\mathbf{b}(\mathbf{s}, \omega) = \mathbf{Q}(\mathbf{s}, \mathbf{s}', \omega) \mathbf{a}(\mathbf{s}', \omega) \quad , \quad (\text{A.13})$$

где введён блочно-диагональный $2M \times 2M$ матричный оператор, каждый блок которого является матричным конволюционным оператором:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{s}, \mathbf{s}', \omega) = \mathbf{C} \mathbf{H}(\mathbf{s}, \mathbf{s}', \omega) \quad . \quad (\text{A.14})$$

Существует соотношение, обратное к (A.13), с обратным оператором в виде:

$$\mathbf{a}(\mathbf{s}, \omega) = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{s}, \mathbf{s}', \omega) \mathbf{b}(\mathbf{s}', \omega) \quad . \quad (\text{A.15})$$

Явный вид блоков матричных операторов $\mathbf{H}(\mathbf{s}, \mathbf{s}', \omega)$, $\mathbf{Q}(\mathbf{s}, \mathbf{s}', \omega)$ и $\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{s}, \mathbf{s}', \omega)$ и вектора $\mathbf{a}(\mathbf{s}', \omega)$ для отдельной грани произвольного слоя будет приведён в приложении В.

ТОПРД позволяет записать аналитическое решение прямой задачи (A.6) в терминах композитного вектора полного решения $\mathbf{a}(\mathbf{x}, \omega)$, который составлен из волновых амплитуд, распространяющихся во взаимно-встречных направлениях относительно криволинейных граней всех слоёв [12]. Такой вектор может быть записан в виде интегрального представления:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) \mathbf{C} \mathbf{P}(\mathbf{x}', \mathbf{s}', \omega) \mathbf{Q}(\mathbf{s}', \mathbf{s}'', \omega) \mathbf{a}(\mathbf{s}'', \omega) + \mathbf{a}^{(0)}(\mathbf{x}, \omega) \quad , \quad (\text{A.16})$$

где $\mathbf{a}^{(0)}(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) \mathbf{C} \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}', \omega)$. Вектор (A.16) определён во всех внутренних точках среды, которые принадлежат произвольным горизонтальным плоскостям в глобальной декартовой системе координат.

Переопределённая система двух матрично-векторных уравнений (A.8) может быть записана относительно неизвестного вектора волновых амплитуд $\mathbf{a}(\mathbf{s}, \omega)$ на гранях всех слоёв следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{s}, \omega) &= \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{s}, \mathbf{s}', \omega) \mathbf{P}(\mathbf{s}', \mathbf{s}'', \omega) \mathbf{Q}(\mathbf{s}'', \mathbf{s}''', \omega) \mathbf{a}(\mathbf{s}''', \omega) + \mathbf{a}^{(0)}(\mathbf{s}, \omega) \quad , \\ \mathbf{a}(\mathbf{s}, \omega) &= \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{s}, \mathbf{s}', \omega) \mathbf{T}(\mathbf{s}', \mathbf{s}'', \omega) \mathbf{Q}(\mathbf{s}'', \mathbf{s}''', \omega) \mathbf{a}(\mathbf{s}''', \omega) \quad , \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

где $\mathbf{a}^{(0)}(\mathbf{s}, \omega) = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{s}, \mathbf{s}', \omega) \mathbf{C} \mathbf{R}(\mathbf{s}') \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{s}', \omega)$. Подстановка первого уравнения из (A.17) в правую часть второго уравнения сводит переопределённую систему (A.17) к матричному интегральному уравнению второго рода:

$$\mathbf{a}(\mathbf{s}, \omega) = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{s}, \mathbf{s}', \omega) \mathbf{T}(\mathbf{s}', \mathbf{s}'', \omega) \mathbf{P}(\mathbf{s}'', \mathbf{s}''', \omega) \mathbf{Q}(\mathbf{s}''', \mathbf{s}'''' , \omega) \mathbf{a}(\mathbf{s}'''' , \omega) + \mathbf{a}^{(1)}(\mathbf{s}, \omega) \quad , \quad (\text{A.18})$$

где $\mathbf{a}^{(1)}(\mathbf{s}, \omega) = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{s}, \mathbf{s}', \omega) \mathbf{T}(\mathbf{s}', \mathbf{s}'', \omega) \mathbf{Q}(\mathbf{s}'', \mathbf{s}''', \omega) \mathbf{a}^{(0)}(\mathbf{s}''', \omega)$.

Формулы (A.12)-(A.18) предоставляют возможность в дополнение к вычислению трёх компонент скорости частиц и давления вычислять их декомпозицию на пару волновых амплитуд на всех гранях слоёв и в приёмниках. Таким образом, ТОПРД позволяет получать восемь синтетических сейсмограмм на профиле приёмников вместо четырёх синтетических сейсмограмм, которые воспроизводятся методами полного решения прямой задачи сейсмоки. Наличие декомпозиционных сейсмограмм можно использовать как теоретическое обоснование специфической обратной задачи сейсмоки: выделение из полного волнового поля волнового фрагмента в виде зеркального отражения от контакта «воздух-море» в морской сейсмике и контакта «воздух-грунт» в наземной сейсмике, которое в настоящее время осуществляется эвристическими приёмами [25].

ПРИЛОЖЕНИЕ В. БЛОЧНАЯ СТРУКТУРА ОПЕРАТОРОВ ПРОХОЖДЕНИЯ- РАСПРОСТРАНЕНИЯ И ВЕКТОРОВ

В данном приложении описана блочная структура матричных операторов и векторных операндов теории операторов прохождения-распространения-дифрагирования (ТОПРД), изложенной в приложении А в объёме, необходимом для диссертации. Блочная структура операторов и операндов взаимно-однозначно отображает волновые процессы в полном наборе слоёв и границ слоистой среды.

В.1. Блочная структура матричных операторов и векторов в слоях

Вектор граничных значений в уравнении (А.9) имеет блочный вид:

$$\mathbf{b}(\mathbf{s}, \omega) = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \dots \\ \mathbf{b}_M \end{pmatrix}, \quad (\text{В.1})$$

где волновые векторы в слоях имеют вид:

$$\mathbf{b}_1 = (\mathbf{b}_1^2), \quad \mathbf{b}_m = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_m^1 \\ \mathbf{b}_m^2 \end{pmatrix}, \quad m = 2, \dots, M-1, \quad \mathbf{b}_M = (\mathbf{b}_M^1). \quad (\text{В.2})$$

Оператор прохождения-распространения из уравнения (А.9) имеет блочный вид:

$$\mathbf{L}(\mathbf{s}, \mathbf{s}', \omega) = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{L}_{12} & 0 & \dots & \dots \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} & \mathbf{L}_{23} & 0 & \dots \\ 0 & \mathbf{L}_{32} & \mathbf{L}_{33} & \mathbf{L}_{34} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{L}_{M(M-1)} & \mathbf{L}_{MM} \end{bmatrix}. \quad (\text{В.3})$$

Операторы прохождения-распространения в слоях в операторе прохождения-распространения (В.3) имеют вид:

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{11} &= \mathbf{T}_{11} \mathbf{P}_{11}, \quad \mathbf{L}_{12} = \mathbf{T}_{12} \mathbf{P}_{22}, \\
\mathbf{L}_{m'm} &= \mathbf{T}_{m'm} \mathbf{P}_{mm}, \quad m' = 2, \dots, M-1, \quad m = m'-1, m', m'+1, \\
\mathbf{L}_{M(M-1)} &= \mathbf{T}_{M(M-1)} \mathbf{P}_{(M-1)(M-1)}, \quad \mathbf{L}_{MM} = \mathbf{T}_{MM} \mathbf{P}_{MM}.
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Операторы (B.4) описывают распространение в слое \mathbb{D}_m и прохождение в соседний слой $\mathbb{D}_{m'}$ через двустороннюю границу $\mathbb{S}_{m'}^j \cup \mathbb{S}_m^j$ (отражение для $m' = m$ и преломление для $m' \neq m$). По построению матричный оператор в M -слоистой среде (B.3) и операторы в отдельных слоях (B.4) адекватны реальным процессам распространения волн и отражения/преломления. Поэтому оператор слоистой среды \mathbf{L} описывает полную волновую передаточную характеристику слоистой среды.

Поскольку все приёмники колебаний (линия наблюдения) чаще всего располагаются в том же слое, что и источник, то есть в \mathbb{D}_2 , то в векторе $\mathbf{b}^{(n)}(\mathbf{s}, \omega)$ вычислительный интерес представляет его компонента $\mathbf{b}_2^{(n)}(\mathbf{s}, \omega)$. Тогда вектор граничных значений n -кратного прохождения-распространения в приёмнике x имеет вид:

$$\mathbf{b}_2^{(n)}(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{P}_{22}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega) \mathbf{b}_2^{(n)}(\mathbf{s}, \omega) \quad . \tag{B.5}$$

Поскольку оператор \mathbf{L} имеет волновые свойства, уравнение прохождения-распространения (A.9) или его решение в виде ряда (A.10) совместно с представлением трёхмерного решения прямой задачи (B.5) может рассматриваться как строгое аналитическое решение прямой задачи.

Так как в большинстве случаев источники, возбуждающие волны, располагаются в слое \mathbb{D}_2 , то вектор полей источников выберем в следующем виде:

$$\mathbf{b}^{(0)}(\mathbf{s}, \omega) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{b}_2^{(0)} \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{B.6}$$

Вектор полей источников в слое \mathbb{D}_2 из (B.6) имеет следующий вид:

$$\mathbf{b}_2^{(0)} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_2^{1(0)} \\ \mathbf{b}_2^{2(0)} \end{pmatrix} \quad . \tag{B.7}$$

В большинстве случаев приёмники колебаний располагаются в том же слое \mathbb{D}_2 , что и источники, возбуждающие волны. Поэтому выделим вектор решения для слоя \mathbb{D}_2 из полного вектора (А.6) и запишем его в следующем виде:

$$\mathbf{u}_2(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{P}_{22}^{x1}(\mathbf{x}, \mathbf{s}_2^1, \omega) \mathbf{b}_2^1(\mathbf{s}_2^1, \omega) + \mathbf{P}_{22}^{x2}(\mathbf{x}, \mathbf{s}_2^1, \omega) \mathbf{b}_2^2(\mathbf{s}_2^2, \omega) + \mathbf{u}_2^{(0)}(\mathbf{x}, \omega) \quad . \quad (\text{B.8})$$

Операторы $\mathbf{P}_{22}^{xj}(\mathbf{x}, \mathbf{s}_2^j, \omega)$ описывают распространение граничных значений полного волнового поля от верхней ($j=1$) и нижней ($j=2$) граней слоя \mathbb{D}_2 . Векторы $\mathbf{u}_2(\mathbf{x}, \omega)$ и $\mathbf{u}_2^{(0)}(\mathbf{x}, \omega)$ содержат три компоненты вектора скорости частиц и давление. Вектор $\mathbf{u}_2^{(0)}(\mathbf{x}, \omega)$ описывает продольную волну от источника в приёмниках колебаний. Вектор $\mathbf{u}_2(\mathbf{x}, \omega)$ описывает полное волновое поле в приёмниках колебаний. Векторы граничных значений полного волнового поля $\mathbf{b}_2^j(\mathbf{s}_2^j, \omega)$ ($j=1, 2$) в слое \mathbb{D}_2 связаны с предельным значением вектора полного волнового поля $\mathbf{u}_2(\mathbf{x}, \omega)$ в слое \mathbb{D}_2 из (B.8) следующим соотношением:

$$\mathbf{b}_2^j(\mathbf{s}_2^j, \omega) = \mathbf{C}_2^j \mathbf{R}(\mathbf{s}_2^j) \mathbf{u}(\mathbf{s}_2^j, \omega), \quad j=1, 2 \quad , \quad (\text{B.9})$$

где $\mathbf{R}(\mathbf{s}_2^j) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{3 \times 3}(\mathbf{s}_2^j) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$ – матрица поворота от глобальной декартовой системы координат к локальной декартовой системе координат в точках \mathbf{s}_2^j , принадлежащих грани \mathbb{S}_2^j , с учётом ориентации нормали $\mathbf{n}(\mathbf{s}_2^j)$ относительно локального векторного базиса, $\mathbf{R}^{3 \times 3}(\mathbf{s}_2^j)$ – стандартная 3×3 матрица поворота вектора скорости, $\mathbf{C}_2^j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ – матрица конкатенации (удаление неиспользуемых компонент скоростей частиц, касательных грани \mathbb{S}_2^j).

Так как матрица (B.3) трёхдиагональная и вектор источников имеет ненулевую компоненту вида (B.7), то ненулевые компоненты для 1-го акта отражения-преломления имеют вид:

$$\mathbf{b}_p^{(1)}(\mathbf{s}, \omega) = \mathbf{T}_{p2} \mathbf{b}_2^{(0)}, \quad p = 2-1, 2, 2+1 \quad . \quad (\text{B.10})$$

Используя формулу (A.11), можно выразить компоненты $\mathbf{b}_q^{(2)}$ для 2-го акта отражения-преломления через компоненты для 1-го акта в (B.10) и получить следующее выражение:

$$\mathbf{b}_q^{(2)}(\mathbf{s}, \omega) = \sum_{p=2-1}^{p=2+1} \mathbf{L}_{qp} \mathbf{T}_{p2} \mathbf{b}_2^{(0)}, \quad q = p-1, p, p+1 \quad . \quad (\text{B.11})$$

Используя формулу (B.11), можно выразить компоненты $\mathbf{b}_l^{(3)}$ для 3-го акта отражения-преломления через компоненты для 2-го акта и получить следующее выражение:

$$\mathbf{b}_s^{(3)}(\mathbf{s}, \omega) = \sum_{q=p-1}^{q=p+1} \sum_{p=2-1}^{p=2+1} \mathbf{L}_{sq} \mathbf{L}_{qp} \mathbf{T}_{p2} \mathbf{b}_2^{(0)}, \quad s = q-1, q, q+1 \quad . \quad (\text{B.12})$$

Выполнив последовательные подстановки для всех последующих актов включительно до ненулевых компонентов для n -го акта отражения-преломления, приведём общий вид конечного соотношения для случая $n = 6$:

$$\mathbf{b}_2^{(6)}(\mathbf{s}, \omega) = \sum_{k=l-1}^{k=l+1} \sum_{l=s-1}^{l=s+1} \sum_{s=q-1}^{s=q+1} \sum_{q=p-1}^{q=p+1} \sum_{p=2-1}^{p=2+1} \mathbf{L}_{2k} \mathbf{L}_{kl} \mathbf{L}_{ls} \mathbf{L}_{sq} \mathbf{L}_{qp} \mathbf{T}_{p2} \mathbf{b}_2^{(0)}, \quad k, l, s, q, p \in [1, N] \quad . \quad (\text{B.13})$$

Для произвольного n формула (B.13) дополняется матрицами 2×2 по правилам составления индексов для произведения трёхдиагональных матриц.

Для вычисления по формуле вида (B.13) для заданного n можно ввести понятие волнового кода, который позволяет учитывать все необходимые матричные сомножители и их последовательность, а также выполнять произведения матриц в необходимом порядке и их суммирование без потери элементов. Если нужно вычислить вектор граничных значений на конкретной грани слоя, то волновой код дополняется необходимой информацией, которая позволяет выделить нужный вектор для грани из вектора для слоя. Если необходимо вычислять отдельно граничные значения нормальной скорости частиц и давление в формулах вида (B.13), то волновой код должен быть сконструирован так, чтобы допускать раздельное вычисление нормальной скорости частиц и давления.

С учётом формулы (A.7) можно записать спектральное представление полного волнового поля в точках слоя \mathbb{D}_2 , которые принадлежат произвольной горизонтальной плоскости в глобальной декартовой системе координат, в виде:

$$\mathbf{u}_2(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) \mathbf{a}_2(\mathbf{x}', \omega) \quad , \quad (\text{B.14})$$

где $\mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)$ – 4×2 матрица, каждый скалярный элемент которой является конволюционным оператором, действующим в точку \mathbf{x} из всех точек \mathbf{x}' , принадлежащих горизонтальной плоскости, $\mathbf{a}_2(\mathbf{x}', \omega) = (a_2^+(\mathbf{x}', \omega) \ a_2^-(\mathbf{x}', \omega))^T$ – 2×1 вектор, который состоит из скалярных волновых амплитуд, распространяющихся во взаимно-встречных направлениях относительно горизонтальной плоскости. В (B.14) введён конволюционный оператор

$$\mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) = \begin{bmatrix} H_2^{v_1^+}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) & H_2^{v_1^-}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) \\ H_2^{v_2^+}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) & H_2^{v_2^-}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) \\ H_2^{v_n^+}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) & H_2^{v_n^-}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) \\ H_2^{p^+}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) & H_2^{p^-}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) \end{bmatrix}, \quad (\text{B.15})$$

где скалярные конволюционные операторы имеют вид:

$$\begin{aligned} H_2^{v_1^\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) \langle \dots \rangle &= \pm F^{-1}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{k}}) \left\{ -\frac{1}{\alpha_2} i k_1 \right\} F(\bar{\mathbf{k}}, \mathbf{x}') \langle \dots \rangle, \\ H_2^{v_2^\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) \langle \dots \rangle &= \pm F^{-1}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{k}}) \left\{ -\frac{1}{\alpha_2} i k_2 \right\} F(\bar{\mathbf{k}}, \mathbf{x}') \langle \dots \rangle, \\ H_2^{v_n^\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) \langle \dots \rangle &= \pm F^{-1}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{k}}) \left\{ -\frac{1}{\alpha_2} i \hat{k}_{nP_2}(\bar{\mathbf{k}}, \omega) \right\} F(\bar{\mathbf{k}}, \mathbf{x}') \langle \dots \rangle, \\ H_2^{p^\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) \langle \dots \rangle &= F^{-1}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{k}}) \{1\} F(\bar{\mathbf{k}}, \mathbf{x}') \langle \dots \rangle = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') * \langle \dots \rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

нормальная компонента волнового числа имеет вид:

$$\hat{k}_{nP_m}(\bar{\mathbf{k}}, \omega) = \sqrt{\frac{\omega^2}{v_{P_m}^2} - (k_1^2 + k_2^2)} \quad . \quad (\text{B.17})$$

Подставив (B.14) с учётом матрицы вращения в соотношение (B.9), получим тождество для произвольного слоя \mathbb{D}_m :

$$\mathbf{b}_m^j(\mathbf{s}_m^j, \omega) = \mathbf{Q}_m^j(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^{\prime j}, \omega) \mathbf{a}_m^j(\mathbf{s}_m^{\prime j}, \omega), \quad j=1,2 \quad . \quad (\text{B.18})$$

В (B.18) введен конволюционный оператор

$$\mathbf{Q}_m^j(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}'_m^j, \omega) = \mathbf{C}_m^j \mathbf{H}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}'_m^j, \omega) = \begin{bmatrix} H_m^{v_n^+}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}'_m^j, \omega) & H_m^{v_n^-}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}'_m^j, \omega) \\ H_m^{p^+}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}'_m^j, \omega) & H_m^{p^-}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}'_m^j, \omega) \end{bmatrix}, \quad (\text{B.19})$$

где скалярные конволюционные операторы имеют вид:

$$\begin{aligned} H_m^{v_n^\pm}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}'_m^j, \omega) \langle \dots \rangle &= \pm F^{-1}(\mathbf{s}_m^j, \bar{\mathbf{k}}) \left\{ -\frac{1}{\alpha_2} \hat{k}_{nP_m^j}(\bar{\mathbf{k}}, \omega) \right\} F(\bar{\mathbf{k}}, \mathbf{s}'_m^j) \langle \dots \rangle, \\ H_m^{p^\pm}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}'_m^j, \omega) \langle \dots \rangle &= F^{-1}(\mathbf{s}_m^j, \bar{\mathbf{k}}) \{1\} F(\bar{\mathbf{k}}, \mathbf{s}'_m^j) \langle \dots \rangle = \delta(\mathbf{s}_m^j - \mathbf{s}'_m^j) * \langle \dots \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

В операторах (B.16) и (B.20) символом $F(\bar{\mathbf{k}}, \mathbf{s}_m^j)$ обозначен двукратный пространственный оператор Фурье по стороне гладкой границы, символом $F^{-1}(\mathbf{s}'_m^j, \bar{\mathbf{k}})$ – обратный двукратный пространственный оператор Фурье. Эти операторы могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} F(\bar{\mathbf{k}}, \mathbf{s}_m^j) \langle \dots \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \dots \rangle e^{+i(k_1 s_1 + k_2 s_2)} \frac{ds_1 ds_2}{2\pi}, \\ F^{-1}(\mathbf{s}'_m^j, \bar{\mathbf{k}}) \langle \dots \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \dots \rangle e^{-i(k_1 s_1 + k_2 s_2)} \frac{dk_1 dk_2}{2\pi}, \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

где s_1 и s_2 – это длины дуг вдоль криволинейных координатных осей поверхностных комформно-евклидовых координат, заданных на обеих сторонах криволинейной грани границы, $\bar{\mathbf{k}} = (k_1, k_2)$, k_1 и k_2 – это пространственные волновые частоты, $\mathbf{s}'_m^j = (s'_1, s'_2)$ и $\mathbf{s}_m^j = (s_1, s_2)$ – это произвольные точки на криволинейной грани \mathbb{S}_m^j слоя \mathbb{D}_m . Символами $F(\bar{\mathbf{k}}, \mathbf{x})$ и $F^{-1}(\mathbf{x}', \bar{\mathbf{k}})$ обозначены двукратные пространственные операторы Фурье, действующее на горизонтальной плоскости, на которой расположены приёмники.

Существует соотношение, обратное к (B.19), в виде:

$$\mathbf{a}_m^j(\mathbf{s}_m^j, \omega) = \mathbf{Q}_m^{j-1}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}'_m^j, \omega) \mathbf{b}_m^j(\mathbf{s}'_m^j, \omega), \quad j=1,2 \quad (\text{B.22})$$

с обратным оператором

$$\mathbf{Q}_m^{j-1}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}'_m^j, \omega) = \begin{bmatrix} H_m^{v_n^+ - 1}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}'_m^j, \omega) & H_m^{p^+}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}'_m^j, \omega) \\ H_m^{v_n^- - 1}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}'_m^j, \omega) & H_m^{p^-}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}'_m^j, \omega) \end{bmatrix}, \quad (\text{B.23})$$

где два скалярных конволюционных оператора имеют вид:

$$H_m^{v_n^\pm - 1}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}'_m^j, \omega) \langle \dots \rangle = \pm F^{-1}(\mathbf{s}_m^j, \bar{\mathbf{k}}) \left\{ -\frac{\alpha_2}{\hat{k}_{nPm}^j(\bar{\mathbf{k}}, \omega)} \right\} F(\bar{\mathbf{k}}, \mathbf{s}'_m^j) \langle \dots \rangle, \quad (\text{B.24})$$

а два скалярных оператора $H_m^{p^\pm}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}'_m^j, \omega)$ определены в соотношениях (B.20).

Вектор решения для слоя \mathbb{D}_2 (B.5) с помощью формул (B.14)-(B.22) может быть записан относительно вектора волновых амплитуд, распространяющихся во взаимно-встречных направлениях относительно горизонтальной плоскости:

$$\mathbf{a}_2(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{j=1}^2 \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) \mathbf{C} \mathbf{P}(\mathbf{x}', \mathbf{s}'_2^j, \omega) \mathbf{Q}(\mathbf{s}'_2^j, \mathbf{s}''_2^j, \omega) \mathbf{a}_2^j(\mathbf{s}''_2^j, \omega) + \mathbf{a}_2^{(0)}(\mathbf{x}, \omega), \quad (\text{B.25})$$

где $\mathbf{a}_2^{(0)}(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) \mathbf{C} \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}', \omega)$. Вектор (B.25) определён во всех внутренних точках слоя \mathbb{D}_2 , которые принадлежат произвольной горизонтальной плоскости в глобальной декартовой системе координат.

Используя формулу (B.18) для перехода от волновых векторов $\mathbf{a}_m^j(\mathbf{s}_m^j, \omega)$ к механическим векторам $\mathbf{b}_m^j(\mathbf{s}_m^j, \omega)$ и формулу (B.22) для обратного перехода, можно переписать формулы кратных актов отражения-преломления (B.10)-(B.13) в терминах волновых векторов. Запишем формулы (B.10) и (B.11) в терминах волновых векторов:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_p^{(1)} &= \mathbf{Q}_p^{-1} \mathbf{T}_{p2} \mathbf{Q}_2 \mathbf{a}_2^{(0)}, \quad p = 2-1, 2, 2+1, \\ \mathbf{a}_q^{(2)} &= \sum_{p=2-1}^{p=2+1} \mathbf{Q}_q^{-1} \mathbf{L}_{qp} \mathbf{T}_{p2} \mathbf{Q}_2 \mathbf{a}_2^{(0)} = \sum_{p=2-1}^{p=2+1} \mathbf{Q}_q^{-1} \mathbf{L}_{qp} \mathbf{Q}_p \mathbf{Q}_p^{-1} \mathbf{T}_{p2} \mathbf{Q}_2 \mathbf{a}_2^{(0)}, \quad q = p-1, p, p+1. \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Из выражений (B.26) следует, что аналогом оператора прохождения \mathbf{T}_{p2} для механических векторов является оператор $\mathbf{Q}_p^{-1} \mathbf{T}_{p2} \mathbf{Q}_2$ для векторов волновых амплитуд, а аналогом оператора прохождения-распространения \mathbf{L}_{qp} для механических векторов является оператор $\mathbf{Q}_q^{-1} \mathbf{L}_{qp} \mathbf{Q}_p$

для векторов волновых амплитуд. Формулы (В.12) и (В.13) можно переписать в терминах волновых векторов по аналогии с (В.26).

В.2. Операторы распространения волн в слоях

В произвольном слое \mathbb{D}_m должны удовлетворяться система уравнений (А.1), свойства (А.2), условия излучения (А.3) и, при необходимости, условие на рёбрах и вершинах (А.4). Однако теория операторов прохождения-распространения-дифрагирования (ТОПРД) позволяет заменить эту систему уравнений со всеми условиями на эквивалентное им интегральное представление искомого вектора вида (В.8) [12], [12]. Это представление выражает искомый вектор в любой точке слоя \mathbb{D}_m через след искомого вектора на границе слоя с помощью операторов распространения типа Кирхгофа [12]. Отличие операторов распространения типа Кирхгофа, рассматриваемых в ТОПРД, от классических поверхностных интегральных операторов Кирхгофа заключено в ядре оператора. В ТОПРД вводится обобщение матричного фундаментального решения, которое к классическому фундаментальному решению добавляет слагаемое, называемое каскадной дифракцией. Каскадная дифракция подавляет нефизическое излучение, проникающее через вогнутые части границы слоя \mathbb{D}_m , которые образуют зоны геометрической тени, и вносит физическое излучение в виде дифракционного волнового поля в эти зоны [12], [13]. Рассматривая приближение пространственной точки к поверхности интегрирования (границе слоя), можно получить систему предельных соотношений для интегралов типа Кирхгофа, типичную для классической проблемы начально-краевых значений [7]. Формулы ТОПРД для акустического случая позволяют разложить искомый вектор на сумму двух собственных векторов дифференциального оператора t – гиперболического матричного уравнения. Эти собственные векторы соответствуют волновым амплитудам, распространяющимся во взаимно противоположных направлениях. Упомянутые выше формулы позволяют представить след искомого вектора на границе слоя в виде разложения на пары волновых амплитуд. С учётом этого разложения искомый вектор «вектор скорости частиц - давление» преобразуется в искомый новый волновой вектор «амплитуда отходящего от границы волнового поля - амплитуда приходящего к границе волнового поля», а интегральный оператор типа Кирхгофа оснащается двумя операторами: 1) оператор разложения по обобщённым плоским волнам, 2) оператор, обратный этому оператору разложения. В итоге, возникают композитные интегральные операторы распространения \mathbf{P}_{mm} из (В.4).

Композитные операторы распространения в слоях \mathbf{P}_{mm} имеют вид:

$$\mathbf{P}_{11} = [\mathbf{P}_{11}^{22}], \quad \mathbf{P}_{mm} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{mm}^{11} & \mathbf{P}_{mm}^{12} \\ \mathbf{P}_{mm}^{21} & \mathbf{P}_{mm}^{22} \end{bmatrix}, m = 2, \dots, M-1, \quad \mathbf{P}_{MM} = [\mathbf{P}_{MM}^{11}] \quad . \quad (\text{B.27})$$

Композитные операторы распространения в каждом слое \mathbf{P}_{mm} используют реализуемые фундаментальные решения, представленные формулой (34) из работы [13], в виде матриц

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m, \omega) = \mathbf{G}(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m, \omega) + \mathbf{K}_{mm}(\mathbf{x}_m, \mathbf{s}_m, \omega) \sum_{i=1}^{\infty} [\mathbf{K}_{mm} \mathbf{D}_{mm}]^i \mathbf{G}(\mathbf{s}_m, \mathbf{y}_m, \omega) \quad , \quad (\text{B.28})$$

где матрицы $\mathbf{G}(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m, \omega)$ – фундаментальные решения безграничной среды с материальными параметрами слоя \mathbb{D}_m . Сумма матриц в (B.28) представляет каскадную дифракцию и дополнительное волновое поле, которое подавляет нефизическое излучение, проникающее через вогнутые части границы в зоны геометрической тени внутри слоя. Каскадная дифракция на границах каждого слоя представлена отдельной матрицей $[\mathbf{K}_{mm} \mathbf{D}_{mm}]^i \mathbf{G}(\mathbf{s}_m, \mathbf{y}_m, \omega)$. Если зоны геометрической тени в слое \mathbb{D}_m отсутствуют, тогда реализуемое фундаментальное решение в этом слое совпадает с расходящимся фундаментальным решением для безграничной среды с материальными параметрами этого слоя.

Применение каскадной дифракции в ядрах операторов (B.27) позволяет с помощью формулы (46) из работы [13] представить реализуемые операторы распространения суммой:

$$\mathbf{P}_{mm} = \mathbf{K}_{mm} + \sum_{i=1}^{\infty} [\mathbf{K}_{mm} \mathbf{D}_{mm}]^i \mathbf{K}_{mm} \quad . \quad (\text{B.29})$$

В формулах (B.28)-(B.29) введены два матричных оператора. Оператор \mathbf{K}_{mm} – оператор распространения типа Кирхгофа с классическим расходящимся фундаментальным решением в ядре (фундаментальное решение в безграничной среде). Оператор \mathbf{D}_{mm} – оператор дифрагирования, который учитывает существование зон геометрических теней при распространении между элементами границы \mathbb{S} . Этот оператор одновременно распространяет два волновых поля: 1) волновое поле отдельного i -го акта каскадной дифракции, 2) нефизическое волновое поле, которое подавляет нефизическое излучение в i -ом акте каскадной дифракции, порождённое предыдущим $(i-1)$ -ым актом дифракции.

Сумма в (В.29) описывает полную каскадную дифракцию. Если зоны геометрической тени в слое \mathbb{D}_m отсутствуют, тогда оператор дифрагирования в этом слое обращается в нулевой оператор, т.е. $\mathbf{D}_{mm} \equiv \mathbf{O}$.

В ядрах операторов \mathbf{D}_{mm} в (В.29) используется расходящееся фундаментальное решение для безграничной среды с целочисленным множителем h , который может принимать два значения: 0 или 1. Если между двумя произвольными точками границ слоя \mathbb{D}_m существует геометрическая тень (луч, соединяющий две предельные точки у границы, пересекает границу), то функция h принимает значение 1, иначе 0 [2].

Так как операторы распространения \mathbf{K}_{mm} и дифрагирования \mathbf{D}_{mm} имеют подобную структуру, то сначала выпишем формулы для \mathbf{K}_{mm} , а затем формулы для оператора \mathbf{D}_{mm} .

Операторы распространения из (В.29) в произвольном слое \mathbb{D}_m , описывающие распространение от одной грани S_m^l до другой грани S_m^j , могут быть записаны в виде:

$$\mathbf{K}_{mm}^{jl} = \mathbf{K}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l, \omega) = \begin{bmatrix} K^{vv}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l, \omega) & K^{vp}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l, \omega) \\ K^{pv}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l, \omega) & K^{pp}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l, \omega) \end{bmatrix}, \quad m = 1, \dots, M \quad . \quad (\text{В.30})$$

Если распространение происходит с грани S_m^l на ту же грань, то $j=l$ и $S_m^j = S_m^l$. По построению матричный оператор (В.30) адекватен реальным процессам распространения между гранями в слое. В операторе (В.30) использованы скалярные компоненты матричного поверхностного интегрального оператора типа Кирхгофа, которые представлены формулами (64) и (65) из [60], с ядрами, которые представлены формулой (С5) из [61]. Скалярные компоненты операторов имеют вид:

$$\begin{aligned} K^{vv}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l, \omega) \langle \dots \rangle &= - \iint_{S_m^l} \mathbf{n}(\mathbf{s}_m^j) \cdot \nabla g(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l, \omega) \langle \dots \rangle dS(\mathbf{s}_m^l), \\ K^{vp}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l, \omega) \langle \dots \rangle &= - \frac{1}{\alpha_m} \iint_{S_m^l} \mathbf{n}(\mathbf{s}_m^j) \cdot \nabla [\mathbf{n}(\mathbf{s}_m^l) \cdot \nabla g(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l, \omega)] \langle \dots \rangle dS(\mathbf{s}_m^l), \\ K^{pv}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l, \omega) \langle \dots \rangle &= \alpha_m \iint_{S_m^l} g(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l, \omega) \langle \dots \rangle dS(\mathbf{s}_m^l), \\ K^{pp}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l, \omega) \langle \dots \rangle &= \iint_{S_m^l} \mathbf{n}(\mathbf{s}_m^l) \cdot \nabla g(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l, \omega) \langle \dots \rangle dS(\mathbf{s}_m^l), \end{aligned} \quad (\text{В.31})$$

где $\alpha_m = (-i\omega)\rho_m$, в ядрах операторов используется расходящееся сферическая волна в безграничной однородной акустической среде

$$g(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l, \omega) = \frac{e^{i\frac{\omega}{v_{pm}}R}}{4\pi R}, \quad R = |\mathbf{s}_m^j - \mathbf{s}_m^l|. \quad (\text{B.32})$$

Операторы дифрагирования из (B.29) в произвольном слое \mathbb{D}_m , описывающие распространение излучения, гасящего нефизическое распространение от одной грани \mathbb{S}_m^l до другой грани \mathbb{S}_m^j , могут быть записаны в виде:

$$\mathbf{D}_{mm}^{jl} = \mathbf{D}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l, \omega) = \begin{bmatrix} D^{vv}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l, \omega) & D^{vp}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l, \omega) \\ D^{pv}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l, \omega) & D^{pp}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l, \omega) \end{bmatrix}, \quad m=1, \dots, M, \quad (\text{B.33})$$

где

$$\begin{aligned} D^{vv}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l, \omega) \langle \dots \rangle &= - \iint_{\mathbb{S}_m^j} h(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l) \mathbf{n}(\mathbf{s}_m^j) \cdot \nabla g(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l, \omega) \langle \dots \rangle dS(\mathbf{s}_m^l), \\ D^{vp}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l, \omega) \langle \dots \rangle &= - \frac{1}{\alpha_m} \iint_{\mathbb{S}_m^j} h(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l) \mathbf{n}(\mathbf{s}_m^j) \cdot \nabla [\mathbf{n}(\mathbf{s}_m^l) \cdot \nabla g(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l, \omega)] \langle \dots \rangle dS(\mathbf{s}_m^l), \\ D^{pv}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l, \omega) \langle \dots \rangle &= \alpha_m \iint_{\mathbb{S}_m^l} h(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l) g(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l, \omega) \langle \dots \rangle dS(\mathbf{s}_m^l), \\ D^{pp}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l, \omega) \langle \dots \rangle &= \iint_{\mathbb{S}_m^l} h(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l) \mathbf{n}(\mathbf{s}_m^l) \cdot \nabla g(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l, \omega) \langle \dots \rangle dS(\mathbf{s}_m^l), \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

$h(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^l)$ – это целочисленная функция, которая в зонах виртуальной геометрической тени на гранях \mathbb{S}_m^j и \mathbb{S}_m^l имеет значение 1, а вне этих зон – значение 0.

Применение каскадной дифракции в векторах граничных значений реализуемого поля источника (B.7) с помощью формулы (48) из работы [13] позволяет представить их суммой:

$$\mathbf{b}_2^{(0)} = \mathbf{b}_{2(g)}^{(0)} + \sum_{i=1}^{\infty} [\mathbf{K}_{22} \mathbf{D}_{22}]^i \mathbf{b}_{2(g)}^{(0)}, \quad (\text{B.35})$$

где $\mathbf{b}_{2(g)}^{(0)} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{2(g)}^{1(0)} \\ \mathbf{b}_{2(g)}^{2(0)} \end{pmatrix}$ – составной вектор граничных значений прямого поля источника на обоих гранях границы области \mathbb{D}_2 , которое не учитывает геометрическую форму границы,

$\mathbf{b}_{2(g)}^{j(0)} = \begin{pmatrix} v_{2(g)}^{j(0)} \\ p_{2(g)}^{j(0)} \end{pmatrix}$ – векторная компонента этого вектора на грани \mathbb{S}_m^j ($j=1,2$), а её скалярные

компоненты имеют явный вид:

$$v_{2(g)}^{j(0)}(\mathbf{s}_2^j, \mathbf{y}, \omega) = -\frac{1}{\alpha_2} \mathbf{n}_2^j \cdot \nabla p_{2(g)}^{j(0)}(\mathbf{s}_2^j, \mathbf{y}, \omega), \quad p_{2(g)}^{j(0)}(\mathbf{s}_2^j, \mathbf{y}, \omega) = \alpha_2 g(\mathbf{s}_2^j, \mathbf{y}, \omega) \quad , \quad (\text{B.36})$$

где нормальная скорость частиц $v_{2(g)}^{j(0)}$ (опущен индекс n) и давление $p_{2(g)}^{j(0)}$ определяются без учёта геометрической формы граней.

Составной вектор граничных значений физически реализуемого волнового поля на обеих гранях \mathbb{S}_m^1 и \mathbb{S}_m^2 границы области \mathbb{D}_m имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= (\mathbf{b}_1^2) = \begin{pmatrix} v_1^2 \\ p_1^2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{b}_m &= \begin{pmatrix} \mathbf{b}_m^1 \\ \mathbf{b}_m^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_m^j = \begin{pmatrix} v_m^j \\ p_m^j \end{pmatrix}, \quad m = 2, \dots, M-1, \quad j = 1, 2, \\ \mathbf{b}_M &= (\mathbf{b}_M^1) = \begin{pmatrix} v_M^1 \\ p_M^1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

где физически реализуемые нормальная скорость частиц v_m^j (опущен индекс n) и давление p_m^j определяются с учётом геометрической формы граней.

Подставив векторы (B.37) в формулу (B.22) с учётом (B.23) и (B.24), можно получить для всех слоёв и граней набор векторов волновых амплитуд

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (\mathbf{a}_1^2) = \begin{pmatrix} a_1^{2+} \\ a_1^{2-} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{a}_m &= \begin{pmatrix} \mathbf{a}_m^1 \\ \mathbf{a}_m^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_m^j = \begin{pmatrix} a_m^{j+} \\ a_m^{j-} \end{pmatrix}, \quad m = 2, \dots, M-1, \quad j = 1, 2, \\ \mathbf{a}_M &= (\mathbf{a}_M^1) = \begin{pmatrix} a_M^{1+} \\ a_M^{1-} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

Рассмотрим полезное свойство векторов волновых амплитуд, которое следует из формул теории операторов прохождения-распространения-дифрагирования (ТОПРД). Для этого выпишем матричную формулу (B.18) в скалярном виде

$$v_m^j(\mathbf{s}_m^j, \omega) = H_m^{v_n^+}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^{\prime j}, \omega) a_m^{j+}(\mathbf{s}_m^{\prime j}, \omega) + H_m^{v_n^-}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^{\prime j}, \omega) a_m^{j-}(\mathbf{s}_m^{\prime j}, \omega), \quad (\text{B.39})$$

$$p_m^j(\mathbf{s}_m^j, \omega) = \delta(\mathbf{s}_m^j - \mathbf{s}_m^{\prime j}) * a_m^{j+}(\mathbf{s}_m^{\prime j}, \omega) + \delta(\mathbf{s}_m^j - \mathbf{s}_m^{\prime j}) * a_m^{j-}(\mathbf{s}_m^{\prime j}, \omega) = a_m^{j+}(\mathbf{s}_m^j, \omega) + a_m^{j-}(\mathbf{s}_m^j, \omega).$$

Поскольку для каждой точки \mathbf{s}_m^j однозначно определяется направление падения сферической волны (B.32), которая образует ядра интегральных операторов (B.31), то можно заменить формулу (B.39) поточечной операцией, используя простые геометрические соображения. Будем сортировать нормальные скорости частиц $v_m^j(\mathbf{s}_m^j, \omega)$ и давления $p_m^j(\mathbf{s}_m^j, \omega)$ в зависимости от направления падения сферической волны (B.32) относительно нормали $\mathbf{n}(\mathbf{s}_m^j)$. Если в точке \mathbf{s}_m^j угол между направлением подхода и нормалью меньше 90° , то согласно ТОПРД в этой точке будет существовать ненулевая амплитуда $a_m^{j+}(\mathbf{s}_m^j, \omega)$ и нулевая амплитуда $a_m^{j-}(\mathbf{s}_m^j, \omega)$. Если в точке \mathbf{s}_m^j угол между направлением подхода и нормалью больше 90° , то в этой точке будет существовать ненулевая амплитуда $a_m^{j-}(\mathbf{s}_m^j, \omega)$ и нулевая амплитуда $a_m^{j+}(\mathbf{s}_m^j, \omega)$. При этом согласно формулам (B.39) возникает аналогичное расщепление на пару нормальных скоростей частиц и пару давлений

$$v_m^{j+}(\mathbf{s}_m^j, \omega) = H_m^{v_n^+}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^{\prime j}, \omega) a_m^{j+}(\mathbf{s}_m^{\prime j}, \omega), \quad v_m^{j-}(\mathbf{s}_m^j, \omega) = H_m^{v_n^-}(\mathbf{s}_m^j, \mathbf{s}_m^{\prime j}, \omega) a_m^{j-}(\mathbf{s}_m^{\prime j}, \omega), \quad (\text{B.40})$$

$$p_m^{j+}(\mathbf{s}_m^j, \omega) = a_m^{j+}(\mathbf{s}_m^j, \omega), \quad p_m^{j-}(\mathbf{s}_m^j, \omega) = a_m^{j-}(\mathbf{s}_m^j, \omega).$$

Существенно, что расщеплённые нормальные скорости частиц и давления в (B.40) получены поточечной операцией, основанной на геометрических свойствах ядер интегральных операторов (B.31).

По аналогии для каждой точки \mathbf{s}_m^j можно определить направление падения сферической волны от источника, заданной формулами (B.36), и применить поточечные операции вида (B.40).

В.3. Операторы прохождения волн на границах

На границе между двумя произвольными слоями \mathbb{D}_m и $\mathbb{D}_{m'}$ должны выполняться граничные условия непрерывности давления и нормальной скорости частиц (A.5). Однако

ТОПРД позволяет заменить граничные условия на эквивалентные им интегральные преобразования отражения-преломления [12, 15]. Эти преобразования выражают следы проходящего (отражённого или преломленного) волнового поля на границе через след падающего волнового поля на границе с помощью операторов прохождения $\mathbf{T}_{m'm}$ из (В.4).

Операторы прохождения в слоях имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{11} &= [\mathbf{T}_{11}^{22}], \quad \mathbf{T}_{12} = [\mathbf{T}_{12}^{21} \quad \mathbf{O}], \\ \mathbf{T}_{(m-1)m} &= \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{T}_{(m-1)m}^{21} & \mathbf{O} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{mm} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{mm}^{11} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{T}_{mm}^{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{(m+1)m} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{T}_{(m+1)m}^{12} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}, \quad m = 2, \dots, M-1, \\ \mathbf{T}_{M(M-1)} &= [\mathbf{O} \quad \mathbf{T}_{M(M-1)}^{12}], \quad \mathbf{T}_{MM} = [\mathbf{T}_{MM}^{11}]. \end{aligned} \quad (\text{В.41})$$

Ненулевой матричный оператор прохождения из (В.41), действующий на двусторонней границе или грани $\mathbb{S}_{m'}^{j'} \cup \mathbb{S}_m^j$ между двумя произвольными слоями \mathbb{D}_m и $\mathbb{D}_{m'}$, может быть представлен в конволюционной форме:

$$\mathbf{T}_{m'm}^{j'j}(\mathbf{s}_{m'}^{j'}, \mathbf{s}_m^j, \omega) \langle \dots \rangle = \begin{bmatrix} T_{m'm}^{j'j\,vv}(\mathbf{s}_{m'}^{j'}, \mathbf{s}_m^j, \omega) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T_{m'm}^{j'j\,pp}(\mathbf{s}_{m'}^{j'}, \mathbf{s}_m^j, \omega) \end{bmatrix} \langle \dots \rangle, \quad (\text{В.42})$$

$$m \in [1; M], \quad 1 \leq m' = m-1, m, m+1 \leq M, \quad j' = j + (m - m'),$$

где скалярные конволюционные операторы могут быть представлены в спектральной форме:

$$T_{m'm}^{j'j\,vv}(\mathbf{s}_{m'}^{j'}, \mathbf{s}_m^j, \omega) \langle \dots \rangle = -F^{-1}(\mathbf{s}_{m'}^{j'}, \bar{\mathbf{k}}) (\hat{k}_{nPm'} / \hat{k}_{nPm}) \hat{T}_{m'm}^{j'j}(\bar{\mathbf{k}}, \omega) F(\bar{\mathbf{k}}, \mathbf{s}_m^j) \langle \dots \rangle, \quad (\text{В.43})$$

$$T_{m'm}^{j'j\,pp}(\mathbf{s}_{m'}^{j'}, \mathbf{s}_m^j, \omega) \langle \dots \rangle = F^{-1}(\mathbf{s}_{m'}^{j'}, \bar{\mathbf{k}}) \hat{T}_{m'm}^{j'j}(\bar{\mathbf{k}}, \omega) F(\bar{\mathbf{k}}, \mathbf{s}_m^j) \langle \dots \rangle,$$

символы $F(\bar{\mathbf{k}}, \mathbf{s}_m^j)$ и $F^{-1}(\mathbf{s}_{m'}^{j'}, \bar{\mathbf{k}})$ обозначают прямой и обратный двукратные операторы Фурье вида (В.21) по стороне гладкой границы или грани, нормальная компонента волнового числа имеет вид:

$$\hat{k}_{nPm}(\bar{\mathbf{k}}, \omega) = \sqrt{\frac{\omega^2}{v_{Pm}^2} - (k_1^2 + k_2^2)}, \quad (\text{В.44})$$

$\mathbf{s}_m^{j'} = (s_1', s_2')$ и $\mathbf{s}_m^j = (s_1, s_2)$ – это произвольные точки на сторонах $\mathbb{S}_m^{j'}$ и \mathbb{S}_m^j кривой границы, s_1 и s_2 – это длины дуг вдоль криволинейных координатных осей поверхностных комформно-евклидовых координат, заданных на обеих сторонах кривой границы, $\bar{\mathbf{k}} = (k_1, k_2)$, k_1 и k_2 – это пространственные волновые частоты.

Операторы (В.43) описывают прохождение из слоя \mathbb{D}_m в соседний слой $\mathbb{D}_{m'}$ через двустороннюю границу или грань $\mathbb{S}_m^{j'} \cup \mathbb{S}_m^j$ и по построению адекватны реальным процессам отражения и преломления. В случае преломления $m' \neq m$, а в случае отражения $m' = m$ и $j' = j$, т.е. $\mathbb{S}_m^{j'} = \mathbb{S}_m^j$.

Скалярные элементы $-(\hat{k}_{3Pm'} / \hat{k}_{3Pm}) \hat{T}_{m'm}^{j'j}$ и $\hat{T}_{m'm}^{j'j}$ являются пространственными спектрами ядер двукратных конволюционных операторов (В.43), действующих по криволинейной поверхности между слоями \mathbb{D}_m и $\mathbb{D}_{m'}$. Скалярный элемент $\hat{T}_{m'm}^{j'j}$ является коэффициентом прохождения плоских продольных волн через плоскую границу между двумя жидкостями (отражения при $m' = m$ и преломления при $m' \neq m$) для давления, а оператор $T_{m'm}^{j'j pp}$ обобщает эти коэффициенты на случай произвольных неплоских волн и неплоских границ. Скалярный элемент $-(\hat{k}_{3Pm'} / \hat{k}_{3Pm}) \hat{T}_{m'm}^{j'j}$ является коэффициентом прохождения плоских продольных волн через плоскую границу между двумя жидкостями (отражения при $m' = m$ и преломления при $m' \neq m$) для нормальной скорости частиц, а оператор $T_{m'm}^{j'j vv}$ обобщает эти коэффициенты на случай произвольных неплоских волн и неплоских границ. Коэффициенты $\hat{T}_{m'm}^{j'j}(\bar{\mathbf{k}}, \omega)$ зависят от материальных параметров контактирующих сред \mathbb{D}_m и $\mathbb{D}_{m'}$ в точке отражения или преломления на криволинейной границе или грани [15, 25].

ПРИЛОЖЕНИЕ С. ВЕРИФИКАЦИЯ МНКВ ЛАБОРАТОРНЫМИ ДАННЫМИ

В данном приложении описывается сравнение синтетических сейсмограмм, вычисленных упрощённой версией программного комплекса МНКВ, которая не учитывает каскадную дифракцию, с лабораторными (физическими) сейсмограммами, измеренными с помощью установки Лаборатории механики и акустики Университета Экс-Марсель (г. Марсель, Франция). Несмотря на то, что такое сравнение выполнялось аспирантом Норвежского Университета Науки и Технологии (NTNU, г. Тронхейм, Норвегия) Анастасией В. Танцеровой, реферативное изложение результатов сравнения приведено в данном приложении в силу их важности для подтверждения корректности вычисления волновых полей методом МНКВ. Полное изложение результатов сравнения опубликовано в статьях [18, 20].

Двуслойная модель, используемая в лабораторных экспериментах, была названа «Модель Марсель» и представляет собой наполненный водой резервуар, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда. Слой дна резервуара был сделан из поливинилхлорида (ПВХ) и имеет сложный рельеф, состоящий из ската, купола, купола с вертикальным срезом и усечённой пирамиды (Рисунок С.1). Размеры ПВХ-слоя составляют $600\text{ мм} \times 400\text{ мм} \times 70\text{ мм}$. Толщина варьируется от 30 до 70 мм, разница между двумя уровнями модели, разделённых плоским скатом, составляет 40 мм. Акустические параметры слоя воды – скорость $c = 1.493\text{ км/с}$ и плотность $\rho = 1.0\text{ г/см}^3$, упругие параметры слоя ПВХ – $v_p = 2.22\text{ км/с}$, $v_s = 1.05\text{ км/с}$, $\rho_{\text{ПВХ}} = 1.412\text{ г/см}^3$. Модель облучалась широкоугольным пьезоэлектрическим преобразователем с диаметром $D = 3\text{ мм}$, который излучал волновое поле с широкополосным импульсом и доминантной частотой $f_{\text{dom}} = 500\text{ кГц}$. Расстояние преобразователя до плоской части поверхности ПВХ слоя составили 150 мм. Ширина главного лепестка луча, генерируемого датчиком, составляет примерно 45° на уровне -3 дБ . Преобразователь одновременно выполнял роль источника и приёмника. Общая схема лабораторной модели показана на Рисунке С.2. Преобразователь, погруженный в воду, перемещался вдоль линий Y с шагом $\Delta y = 2\text{ мм}$, излучал волновое поле источника в слой воды и принимал отражение от границы «вода-ПВХ». Лабораторные данные снимались вдоль линий $Y150$, $Y200$ и $Y250$ (см. Рисунок С.2) и показаны на Рисунках С.3, С.6, С.9, соответственно, в виде сейсмограмм. Эти линии были выбраны для того, чтобы на сейсмограммах наблюдались отражённые и дифрагированные волны от всей структуры модели.

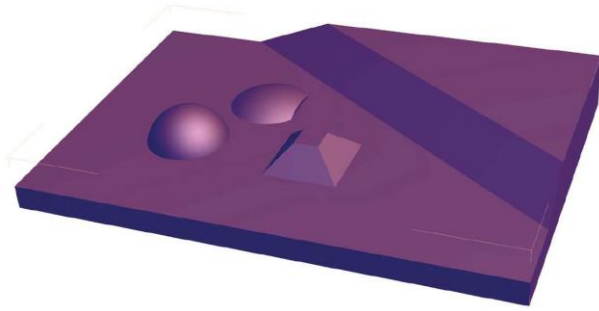


Рисунок С.1. Трёхмерное изображение контакта «вода-ПВХ» в лабораторной модели.

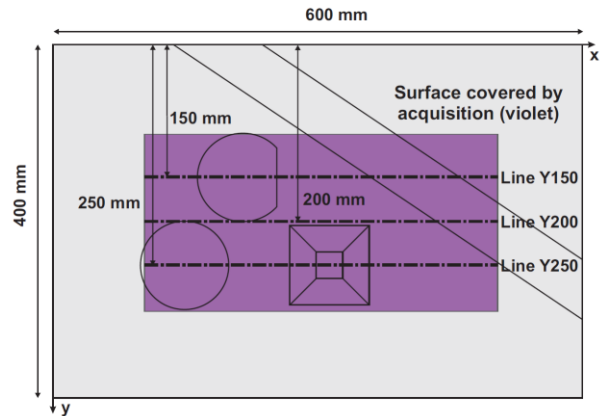


Рисунок С.2. Двумерная проекция контакта «вода-ПВХ» и системы лабораторных наблюдений.

Для вычисления сейсмограмм упрощённой версией программного комплекса МНКВ была задана программная модель, соответствующая следующему фрагменту волнового поля:

- 1) Распространение волнового поля источника по слою воды на контакт «вода-ПВХ»;
- 2) Отражение от контакта «вода-ПВХ»;
- 3) Распространение волнового поля от контакта «вода-ПВХ» по слою воды в приёмник.

Сейсмограммы, вычисленные упрощённой версией программного комплекса МНКВ, показаны для линии приёмников Y150 на Рисунке С.4, для линии приёмников Y200 на Рисунке С.7, для линии приёмников Y250 на Рисунке С.10.

Для корректного сравнения пар из лабораторной и вычисленной сейсмограммы каждая сейсмограмма была нормализована путем деления амплитуды волны на максимальную амплитуду волны на сейсмограмме. Визуальное сравнение трёх пар сейсмограмм показывает хорошее качественное совпадение между лабораторной и вычисленной сейсмограммами: для линии приёмников Y150 на Рисунках С.3 и С.4, для линии приёмников Y200 на Рисунках С.6 и С.7, для линии приёмников Y250 на Рисунках С.9 и С.10. Детальное количественное сравнение нескольких выбранных трасс на паре лабораторных и вычисленных сейсмограмм показано для линии приёмников Y150 на Рисунке С.5, Y200 на Рисунке С.8 и Y250 на Рисунке С.11.

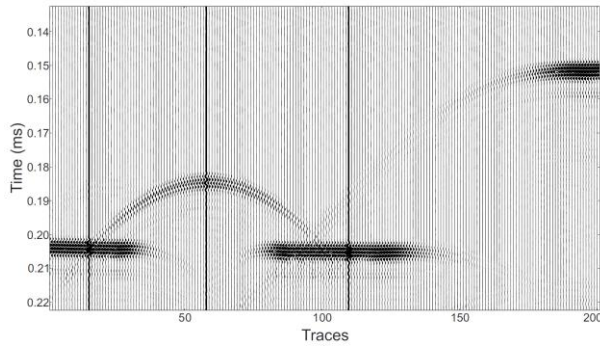


Рисунок С.3. Лабораторная сейсмограмма для линии Line Y150.

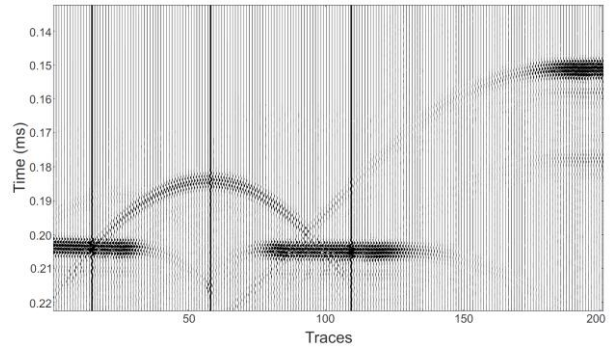


Рисунок С.4. Вычисленная сейсмограмма для линии Line Y150.

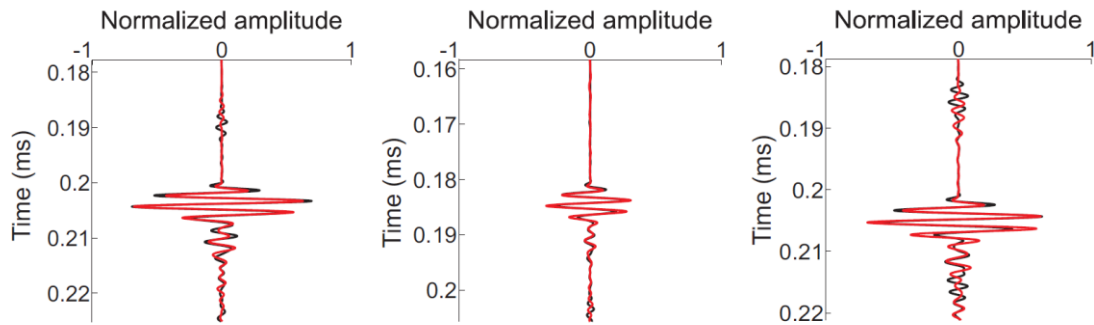


Рисунок С.5. Сравнение вычисленных (чёрный график) и лабораторных (красный график) трасс для линии Line Y150. Слева направо: трассы №15, 57 и 110.

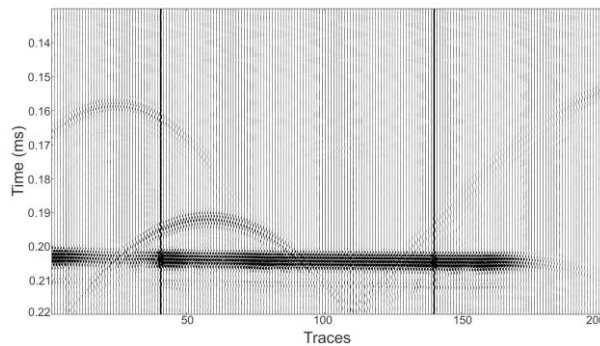


Рисунок С.6. Лабораторная сейсмограмма для линии Line Y200.

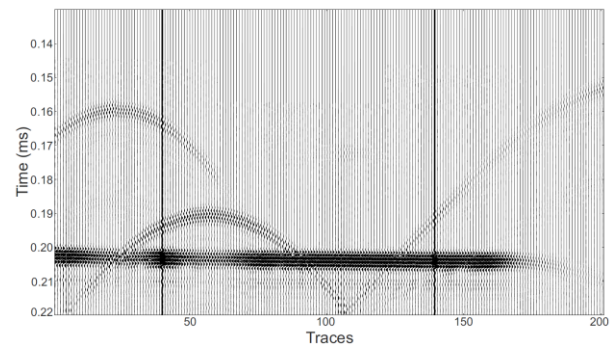


Рисунок С.7. Вычисленная сейсмограмма для линии Line Y200.

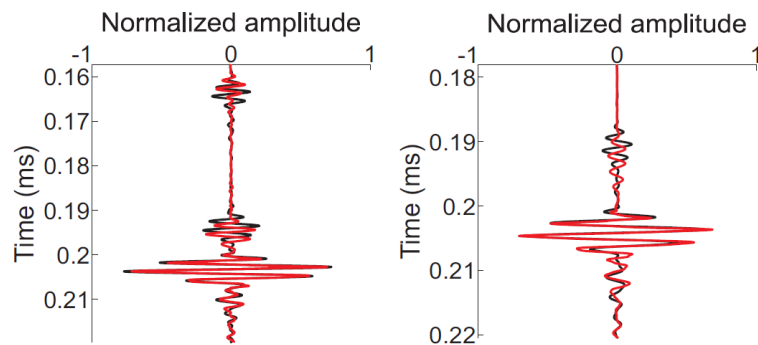


Рисунок С.8. Сравнение вычисленных (чёрный график) и лабораторных (красный график) трасс для линии Line Y200. Слева направо: трассы №40 и 140.

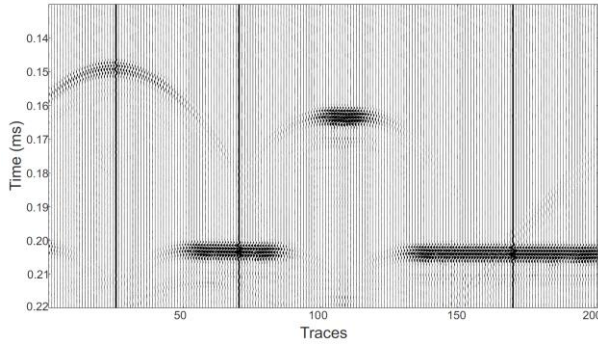


Рисунок С.9. Лабораторная сейсмограмма для линии Line Y250.

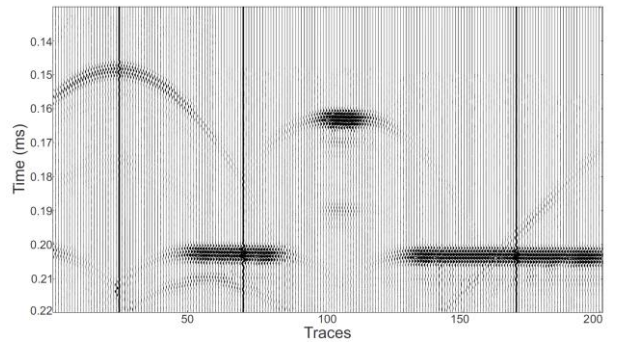


Рисунок С.10. Вычисленная сейсмограмма для линии Line Y250.

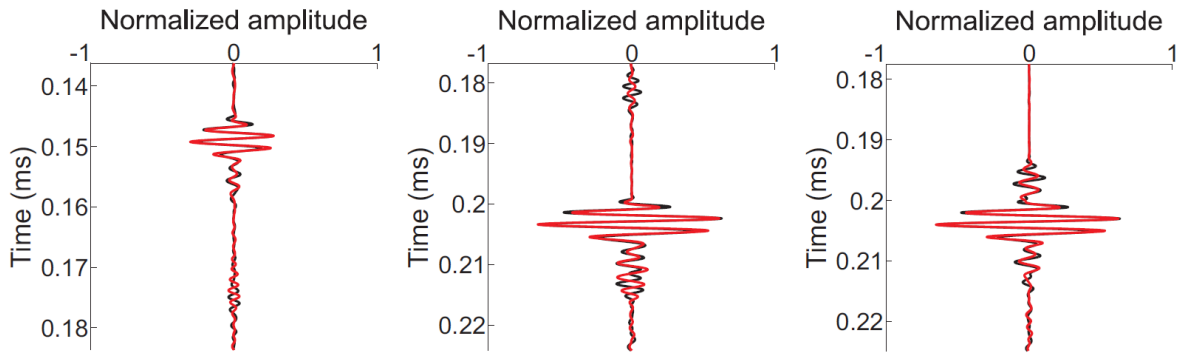


Рисунок С.11. Сравнение вычисленных (чёрный график) и лабораторных (красный график) трасс для линии Line Y250. Слева направо: трассы №25, 70 и 170.

Для детального количественного анализа было также проведено численное сравнение амплитуд на всех парах из вычисленной и лабораторной трасс, приведённых на Рисунках С.5, С.8, С.11. Коэффициент корреляции между лабораторной $d(x, t)$ и вычисленной $\tilde{d}(x, t)$ трассами был представлен в виде нормы

$$F = 1 - \frac{\|d - \tilde{d}\|^2}{\|d\|^2 + \|\tilde{d}\|^2} = 1 - \frac{\|d\|^2 - 2(d, \tilde{d}) + \|\tilde{d}\|^2}{\|d\|^2 + \|\tilde{d}\|^2} = \frac{2(d, \tilde{d})}{\|d\|^2 + \|\tilde{d}\|^2} . \quad (\text{C.1})$$

Коэффициент корреляции (С.1) был выбран так, чтобы выполнялось условие $0 \leq F \leq 1$. При полной корреляции лабораторной и вычисленной трасс, когда $d = \tilde{d}$, из формулы (С.1) следует значение коэффициента корреляции $F = 1$. Если лабораторная и вычисленная трассы абсолютно не коррелируют друг с другом, когда $(d, \tilde{d}) = 0$, из формулы (С.1) следует значение коэффициента корреляции $F = 0$.

Значения коэффициента корреляции F для различных позиций источника показано в Таблице С.1.

Таблица С.1. Коэффициенты корреляции лабораторных и вычисленных трасс.

	Источник 1	Источник 2	Источник 3
LineY150	0.9731	0.9558	0.9277
LineY200	0.8312	0.9255	–
LineY250	0.9300	0.9355	0.9745

Табличные значения коэффициентов корреляции близки к единице, что означает хорошее совпадение вычисленных и лабораторных трасс по амплитуде и форме импульса волны. В Таблице С.1 для Источника 3 на линии Line Y200 вместо коэффициента корреляции авторами статьи [18, 20] указан прочерк. В данном случае наблюдалась интерференция однократного отражения и двукратной дифракции в одном временном окне на лабораторной трассе. Так как упрощённая версия программного комплекса МНКВ не воспроизводила двукратную дифракцию на вычисленной трассе, то коэффициент корреляции принимал заниженные значения из-за несоответствия импульса отражённой волны на вычисленной трассе интерференционному импульсу в том же окне на лабораторной трассе. Ухудшение совпадения для Источника 1 на линии Line Y200 предположительно можно также объяснить применением упрощённой версии программного комплекса МНКВ.

**ПРИЛОЖЕНИЕ D. СВИДЕТЕЛЬСТВО О ГОСУДАРСТВЕННОЙ РЕГИСТРАЦИИ
ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ ФЕДЕРАЛЬНОЙ СЛУЖБОЙ ПО
ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ**



Рисунок D.1. Свидетельство о государственной регистрации программного комплекса МНКВ № 2015662020 Федеральной службой по интеллектуальной собственности.

**ПРИЛОЖЕНИЕ Е. СЕРТИФИКАТ ПОБЕДИТЕЛЯ КОНКУРСА «GPU: СЕРЬЕЗНЫЕ
УСКОРИТЕЛИ ДЛЯ БОЛЬШИХ ЗАДАЧ»**



Рисунок Е.1. Сертификат победителя конкурса «GPU: серьезные ускорители для больших задач» в номинации «Эффективное приложение».

**ПРИЛОЖЕНИЕ F. ДОКУМЕНТ, ПОДТВЕРЖДАЮЩИЙ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МНКВ
ЛАБОРАТОРИЕЙ МЕХАНИКИ И АКУСТИКИ (Г. МАРСЕЛЬ, ФРАНЦИЯ)**

Marseille (France), 2014 November 13th

Letter of endorsement

Name of nominee: Dr Arkady M. AIZENBERG

Endorser : Doctor Nathalie FAVRETTO-CRISTINI

Institution/affiliation : Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (LMA),
Marseille (France) / CNRS Researcher and Deputy Director of LMA

Email address/phone number : favretto@lma.cnrs-mrs.fr /
+ 33 491 164 183



To whom it may concern,

I firmly believe the project of the nominee Dr A.M. Aizenberg is worthy of recognition due to our experiences in comparing synthetic data obtained using the TWSM modeling to laboratory data obtained for a known configuration.

We have obtained the laboratory data by performing ultrasonic measurements of zero-offset reflection of broadband pulses, generated by narrow-beam and broad-beam sources, from a scaled representation of a complex geological model with strong 3D topographies immersed in water. The complicated features of the model produce diffraction effects on the wavefields and existence of shadow zones, and conventional numerical methods may fail to reproduce correctly the real physical data obtained under controlled conditions. The comparisons between synthetic data, using the TWSM suggested by the nominee, and laboratory data however exhibit a good qualitative and quantitative fit in terms of time arrivals and acceptable fit in amplitudes for both narrow-beam and broad-beam datasets. The next step will consist in a multi-offset experiment with broad-beam transducer.

I had a very fruitful collaboration with Dr. Aizenberg during 2011-2014 in our project called BENCHIE (<http://www.benchie.cnrs-mrs.fr/>). The results of this collaboration are very good and are reported in publications in co-authorship with the nominee. In future work we are very interested for further development of the TWSM software based on porting and optimization to GPU-clusters.

Yours faithfully,



Dr N. Favretto-Cristini

Рисунок F.1. Документ, подтверждающий использование программного комплекса МНКВ
Лабораторией механики и акустики (г. Марсель, Франция).

Марсель (Франция), 13 ноября 2014 г.

Письмо подтверждения

Имя запрашивающего лица: Д-р. Аркадий М. АЙЗЕНБЕРГ

Подтверждающее лицо: Д-р. Натали ФАВРЕТТО-КРИСТИНИ

Учреждение/должность: Лаборатория механики и акустики (ЛМА), Марсель (Франция) / CNRS
исследователь и заместитель директора ЛМА

Адрес электронной почты / номер телефона: favretto@lma.cnrs-mrs.fr / + 33 491 164 183

Для предъявления по месту требования,

Я твердо верю, что проект запрашивающего лица Д-ра А.М. Айзенберга достоин признания из-за нашего опыта в сравнении синтетических данных, вычисленных с помощью МНКВ, и лабораторных данных, полученных для известной конфигурации.

Мы получили лабораторные данные, выполняя ультразвуковые измерения отражения широкополосных импульсов при нулевом смещении приёмника от источника, генерируемых узкоугольным и широкоугольным источниками, от масштабируемого представления сложной геологической модели с сильной 3D топографией, погруженной в воду. Сложные особенности модели производят дифракционное влияние на волновые поля и существование зон тени, и обычные численные методы могут неправильно воспроизводить реальные физические данные, полученные в контролируемых условиях. Сравнения между синтетическими данными, полученные с помощью МНКВ, предложенного запрашивающим лицом, и лабораторными данными, тем не менее, демонстрируют хорошее качественное и количественное соответствие в терминах времен прибытия волн и приемлемое соответствие в амплитудах для обоих наборов данных от узкоугольных и широкоугольных источников. Следующий шаг будет состоять в эксперименте при ненулевых смещениях приёмника от источника с широкоугольным трансдюсером.

У меня было очень плодотворное сотрудничество с Д-ром Айзенбергом на протяжении 2011-2014 гг. в нашем проекте под названием BENCHIE (<http://www.benchie.cnrs-mrs.fr/>). Результаты этого сотрудничества очень хорошие, и они опубликованы в соавторстве с запрашивающим лицом. В дальнейшей работе мы очень заинтересованы в дальнейшем развитии программного комплекса МНКВ, основанном на его адаптации и оптимизации для GPU-кластеров.

С искренним уважением,

<подпись>

Д-р. Н. Фавретто-Кристини