Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук

На правах рукописи

Ky

## Куликов Игорь Михайлович

Математическое моделирование трехмерных гидродинамических процессов в самосогласованном гравитационном поле на суперЭВМ

> Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Новосибирск - 2016

# Содержание

B	веде	ние		6
1	Mo	делир	ование упруго-пластических деформаций	50
	1.1	Упруг	го-пластическая модель	50
		1.1.1	Уравнения нелинейной теории упругости	50
		1.1.2	Уравнение состояния упругой среды	53
		1.1.3	Упруго-пластическая модель фазового перехода	57
	1.2	Метод	д Годунова для решения уравнений в лагранжевых координатах .	60
		1.2.1	Метод Годунова для решения уравнений теории упругости	60
		1.2.2	Численное решение задачи Римана для упругой среды	65
		1.2.3	Процедура коррекции дисбаланса энергии и функции энтропии.	67
		1.2.4	Движение расчетной сетки	68
	1.3	Задач	а о "распаде разрыва" в упругой среде	70
	1.4	Задач	а "о сварке взрывом" двух алюминиевых пластин	71
	1.5	Модел	пирование взаимодействия метеоритов с поверхностью планет	72
	1.6	Выво,	ды по первой главе	75
<b>2</b>	Физ	ЗИКО-М	атематические модели гидродинамических процессов в са-	
	мос	огласо	ованном гравитационном поле	76
	2.1	Газод	инамическая модель	77
		2.1.1	Уравнения идеальной гравитационной газовой динамики	77
		2.1.2	Постановка начальных и краевых условий	79
		2.1.3	Построение равновесных конфигураций	80
		2.1.4	Законы сохранения	84
		2.1.5	Коррекция дисбаланса энергии и гарантия неубывания энтропии	85
		2.1.6	Формулировка с учетом космологического расширения	86
		2.1.7	Формулировка односкоростной многокомпонентной газовой ди-	
			намики	87
	2.2	Магн	итно-газодинамическая модель	88
		2.2.1	Уравнения идеальной магнитной газовой динамики	88
		2.2.2	Постановка начальных и краевых условий	89
		2.2.3	Условие бездивергентности магнитного поля	90
		2.2.4	Законы сохранения	90

		2.2.5	Коррекция дисбаланса энергии и гарантия неубывания энтропии 91	
		2.2.6	Формулировка с учетом космологического расширения 91	
	2.3	Бесст	олкновительная модель	2
		2.3.1	Бесстолкновительная модель N-тел	Ł
		2.3.2	Гидродинамическая модель с нулевой температурой 95	)
		2.3.3	Модель бесстолкновительной гидродинамики	j
		2.3.4	Аналитическая модель бесстолкновительной компоненты 101	-
		2.3.5	Сравнение бесстолкновительных моделей	)
	2.4	Моде.	ть подсеточной физики	)
		2.4.1	Функция охлаждения и нагревания	Ł
		2.4.2	Термодинамически согласованная модель звездообразования и	
			взрыва сверхновых	Ł
		2.4.3	Модель химической кинетики	)
		2.4.4	Использование эффективного показателя адиабаты 113	5
	2.5	Выво,	цы по второйглаве	Ł
3	Чи	сленнь	ые схемы для моделирования процессов гравитационной гид-	
	род	инами	ки 115	,
	3.1	Метод	ц разделения операторов для решения уравнений в эйлеровых ко-	
		ордин	атах	,
		3.1.1	Эйлеров этап метода для уравнений в эйлеровых координатах . 116	;
		3.1.2	Лагранжев этап метода для уравнений в эйлеровых координатах 135	)
		3.1.3	Процедура коррекция дисбаланса энергии и функции энтропии 141	-
		3.1.4	Интегрирование по времени	,
	3.2	Метод	ц решения уравнения Пуассона	į
		3.2.1	Учет граничных условий	j
		3.2.2	Процедура быстрого преобразования Фурье	7
	3.3	Верис	рикация численных методов	,
		3.3.1	Тесты в одномерной постановке	,
		3.3.2	Тесты в двумерной постановке	,
		3.3.3	Тесты в трехмерной постановке	)
		3.3.4	Верификация метода решения уравнения Пуассона	)
	3.4	Парал	илельная реализация численного метода	)
		3/11	Концепция со-дизайна вычислительной молели 174	-

		3.4.2	Схема параллельной реализации на многопроцессорных супер-
			ЭВМ
		3.4.3	Схема параллельной реализации на гибридных суперЭВМ, осна-
			щенных графическими ускорителями (код GPUPEGAS) 179
		3.4.4	Схема параллельной реализации на гибридных суперЭВМ, осна-
			щенных ускорителями Intel Xeon Phi (код AstroPhi) 185
		3.4.5	Имитационная модель параллельной реализации
	3.5	Выво,	цы по третьей главе
4	Mo,	делир	ование гидродинамических процессов в самосогласованном
	гра	витаці	ионном поле 196
	4.1	Моде.	ирование динамики крупномасштабных космологических структур196
		4.1.1	Моделирование образования крупномасштабных космологиче-
			ских структур
		4.1.2	Моделирование эволюция скопления галактик
		4.1.3	Моделирование столкновения двух скоплений галактик в МГД
			модели
	4.2	Моде.	пирование динамики галактических структур
		4.2.1	Моделирование образования рукавов галактик
		4.2.2	Моделирование сценариев столкновения газовых компонент га-
			лактик
		4.2.3	Моделирование свободного прохождения галактик в двухфаз-
			ной модели
		4.2.4	Моделирование столкновения галактик под углом 220
		4.2.5	Моделирование столкновения дисковых галактик в полной модели 220
		4.2.6	Моделирование столкновение дисковой и спиральной галактик
			в полной модели
		4.2.7	Моделирование ram-pressure механизма
	4.3	Моде.	ирование динамики молекулярных облаков и межзвездной среды 231
		4.3.1	Задачи о коллапсе
		4.3.2	Моделирование динамики молекулярных облаков
		4.3.3	Моделирование развития МГД турбулентности межзвездной сре-
			ды
	4.4	Моде:	ирование образования протопланетного диска

	4.4.1	Моделирование образования однопланетной системы	. 240
	4.4.2	Моделирование поздней стадии эволюции протопланетного диск	xa241
4.5	Выво	ды по четвертой главе	. 245
Заклю	очение	,	246
Списо	к лите	ературы	249

# Введение

#### Актуальность исследований

Математическое моделирование играет важную роль в изучении трехмерных нелинейных гидродинамических процессов. В настоящее время разработан ряд численных методов решения гидродинамических уравнений, изучены их свойства (точность, сходимость, устойчивость) и области их применения. На основе современных гидродинамических математических моделей и численных методов решения разработаны промышленные программные пакеты. Среди наиболее известных – это иностранные пакеты Ansys, Fluent, STAR-CD, а также российские пакеты Flow Vision, Эгида. В этих пакетах реализованы модели упруго-пластических деформаций, газодинамические и магнитно-газодинамические модели, а также необходимая подсеточная физика (химические реакции, излучение, охлаждение/нагревание и т. д.). Однако, остается открытым вопрос о применимости реализованных в пакетах моделей к ряду прикладных и фундаментальных задач. Также открыт вопрос о точности численных методов и об их эффективности.

Так в задачах о "сварке взрывом" не решена проблема формулировки уравнения состояния упруго-пластической среды и не исследована область его применимости. Дополнительная сложность при формулировке уравнения состояния возникает при учете фазовых переходов, которые имеют место при взаимодействии свариваемых пластин. Задача по изучению взаимодействия метеоритов с поверхностью планет на ранней стадии является продолжением задачи о "сварке взрывом" и особенно актуальна в связи с событиями 2013 года. Как и в случае "классических задач о сварке взрывом" остается проблемой формулировка уравнения состояния упругой среды с учетом фазовых переходов и области его применимости при до- и сверхзвуковых соударениях метеорита с поверхностью планеты. При рассмотрении больших астрономических объектов (от планетной системы до крупно-масштабных космологических структур) важную роль играет гравитация, которая вместе с силами давления определяет движение газа.

Предметом современной астрофизика является исследование физических процессов во Вселенной, их влияние на самоорганизацию и эволюцию астрономических объектов, а также на дальнейшую их динамику и взаимодействие. Несмотря на успехи современной наблюдательной астрономии, большинство астрофизических процессов существуют лишь в виде статической картины. На основе наблюдаемой информации

и известных физических процессов строится математическая модель (или теория) эволюции астрономического объекта до наблюдаемого момента и/или после него. Существенность учета гравитационного и магнитного полей, а также сложность воспроизведения условий космоса в лабораторных условиях накладывают значительные ограничения на экспериментальное изучение астрономических объектов. Таким образом, математическое моделирование – это основной, а часто и единственный, подход к теоретическому исследованию астрофизических процессов и астрономических объектов.

Одной из основных проблем моделирования астрономических объектов является соотношение масштабов. Так масса одной галактики составляет 10<sup>7</sup> – 10<sup>13</sup> масс солнц и размер 10<sup>3</sup> – 10<sup>5</sup> парсек, что приводит к разрыву в 13 порядков для массы и 14 порядков для размера по сравнению со звездой. Поэтому для моделирования таких объектов в высоком пространственном разрешении необходимо использовать наиболее мощные из доступных суперкомпьютеров. Два из Тор3 суперкомпьютеров в ноябрьской версии 2015 года списка Тор500 оснащены графическими ускорителями и ускорителями Intel Xeon Phi. Разработка программных комплексов для гибридных суперкомпьютеров является отдельной сложной научной задачей, требующей со-дизайна вычислительных алгоритмов на всех стадиях ее решения – от физической постановки до инструментариев разработки.

Таким образом, настоящая диссертация посвящена математическому моделированию трехмерных гидродинамических процессов в самосогласованном гравитационном поле на суперЭВМ. Из всего многообразия гидродинамических течений акцент сделан на моделях упруго-пластических деформаций, газодинамических и магнитногазодинамических течениях, а также бесстолкновительных моделях и их приложений для задач геофизики и астрофизики. Актуальность работы определяется необходимостью формулировки математических моделей гидродинамических процессов с учетом гравитационного поля, разработки, обоснования и верификации вычислительных методов для их разрешения, а также эффективной параллельной реализации методов на современных суперЭВМ и комплексного исследования с помощью вычислительного эксперимента научных проблем упруго-пластических деформаций, астрофизики и геофизики. Объект исследования настоящей работы – нестационарные гидродинамические процессы с учетом самогравитации путем построения и исследования их математических моделей, разработки вычислительных схем для их разрешения, реализованные на современных суперкомпьютерных архитектурах.

Цель исследования – развитие вычислительных подходов для решения прикладных и фундаментальных задач упруго-пластических деформаций, астрофизики и геофизики на основе современных конечно-объемных численных схем для гидродинамических систем уравнений, создание на их основе наукоемкого программного обеспечения для суперЭВМ и его применение для проведения крупно-масштабных вычислительных экспериментов.

В настоящей работе исследовано модельное уравнения состояния упруго-пластических сред, которое является обобщением формулировок уравнений состояния и условий их корректности, которые выработались в результате оригинальных вычислительных экспериментов и их сравнения с экспериментом на задаче о сварке взрывом металлических пластин [7, 8], а также на задачах разрушения материала [92] и теоретической работы по формулировке уравнений состояния для кристаллических структур [228]. Выбирая модельные задачи, мы стремились, на основе наблюдения за рассчитываемыми процессами, выработать представление о том, какие обстоятельства приводят к волнообразованию при сварке взрывом металлических пластин и вместе с этим сформулировать общий вид уравнения состояния для этой модели. Проблема волнообразования при сварке взрывом была поставлена М.А. Лаврентьевым ещё в 60-х годах прошлого века. Особенностью задачи является необходимость введения пластичности, что вносит дополнительные особенности в формулировку уравнения состояния и, как следствие, накладывает более жесткие ограничения на условие корректности [7]. В общем виде условие корректности уравнения состояния можно сформулировать в виде интервала допустимых значений для термодинамического потенциала – функции энтропии. Достижение нижней границы такого интервала свидетельствует о достижении "больших" отрицательных величин несимметричного тензора напряжений, что фактически является условием разрушения материала [92] или отколом [8]. На верхней границе такого интервала достигаются "большие" касательные напряжения, что свидетельствует о необходимости перестройки структуры материала и для этого вводятся пластические деформации [8], которые уменьшают девиатор несимметричного тензора напряжений, таким образом происходит "разгрузка" напряжения материала. Вторым подходом к уменьшению девиатора тензора напряжений является переход к гидродинамической модели с помощью введения эффективной скорости звука поперечных волн [8] или с использованием инвариантов специального вида для моделирования девиаторного члена уравнения состояния [92]. В случае использования кристаллической структуры материала про-

исходит переформулировка девиаторного члена уравнения состояния с учетом симметрий кристаллической решетки [228]. В настоящее время, в большинстве работ мало обращают внимание на учет пластичности и корректность уравнения состояния. Так в работе, посвященной запаковке грунта Марса с помощью сварки взрывом [115], модель пластичности не была использована и не сформулировано условие корректности уравнения состояния. В исследовании механизма волнообразования при сварке взрывом с помощью метода сглаженных частиц [268] также не сформулировано условие корректности уравнения состояния как и не введен учет пластичности. Хотя он неявно был использован при формулировке терма искусственной вязкости, который является обязательным атрибутом любой реализации SPH метода. Также условие корректности уравнения состояния не сформулировано в работе [15], что по всей видимости связано со значительными упрощениями в модели упругой среды.

В связи с событиями 2013 года под Челябинском [58] особый интерес представляют задачи, связанные с динамикой метеоритов, которые, фрагментируясь в атмосфере Земли [165, 215], являются наименьшими астрономическими объектами [193]. Исследовано поведение метеоритов в их потоке (метеоритный дождь) от комет 15p/finlay [277], 209p/linear [126], D/1819 W<sub>1</sub> (Blanpain) [130]. Такие потоки могут обрушиваться и на другие планеты и спутники, как например на Луну [188]. Задача столкновения метеорита с поверхностью планеты или спутника плотно примыкает к задачам сварки материала с помощью взрыва [7, 8, 92, 115, 268], в которых работают идентичные физические процессы.

В контексте космологического моделирования крупномасштабных структур [278] (см. например обзор [57]) в рамках рассматриваемой стандартной космологической модели  $\Lambda$ CDM необходимо моделирование прежде всего холодной темной материи, для описания которой используется бесстолкновительная модель N-тел. За последние годы в рамках этой модели был проведен ряд глобальных космологических моделирований [141, 235, 245], а также крупнейшее на сегодняшний день космологическое моделирование Q Continuum [121] с рекордным разрешением для частиц порядка  $10^8 M_{\odot}$ . Однако, для перехода к следующему уровню детализации – к отдельным галактикам, такой подход имеет значительные ограничения из-за невозможности получения ряда эллиптических галактик. Поэтому необходимо моделировать также барионную материю в гидродинамической модели и проводить совместное космологическое моделирование, такое как было сделано в проектах "Bolshoi" [144], "Illustris" [104, 256, 257] и "Eagle" [82, 222]. В задачах космологического моделирования важную роль играет задание начальных данных, так как они в основном и определяют динамику развития крупномасштабных структур [210]. Уточнение космологической модели происходит не только в сторону использования многофазной модели, но и в сторону усложнения так называемой подсеточной физической модели. Это связано прежде всего с новыми более детальными наблюдениями как каталога скоплений галактик [56], так и отдельных скоплений [142]. Магнитное поле играет ключевую роль в формировании и динамики астрофизических объектов. Так на космологических масштабах исследовано влияние слабого магнитного поля порядка  $\mu$ G на динамику гидродинамических неусточивостей и гат-pressure механизма в галактических кластерах [63], определена преимущественно радиальная ориентация магнитного поля в скоплении Дева вне центральной области [197], проведено сравнение структуры магнитного поля с радионаблюдениями [275] и смоделирована МГД турбулентность на масштабах скопления галактик [50].

Структурным элементом скопления галактик являются собственно сами галактики. Задачи моделирования динамики галактик можно разделить по времени их динамики. Так эволюция отдельной галактики составляет до нескольких миллиардов лет, в то время как взаимодействие отдельных галактик составляет несколько сотен миллионов лет. Движение галактик в плотных скоплениях превращает столкновения между ними в важный эволюционный фактор, поскольку за хаббловское время рядовая галактика может испытать до десятка столкновений с другими галактиками своего скопления [21]. Изолированные галактики имеют важное значение в связи с тем, что они меньше всего пострадали от взаимодействия на протяжении последних миллиардов лет и их морфология связана с развитием гравитационной неустойчивости [139]. Таким образом, изучение обоих механизмов динамики галактик позволяет нам объяснить всё их многообразие (или в зарубежной литературе "Galaxy Zoo", с одноименным проектом [271]). Так в рамках этого проекта изучено влияние активного галактического ядра на образование галактик с баром [101], а также процессы звездообразования [231] и распределения звездной массы [272].

Основным проблемам моделирования эволюции галактик посвящены два обзора разных лет [170, 240]. Основными проблемами, которые поднимаются в обзорах, являются вопросы о профиле плотности в галактиках, скорости процесса звездообразования, а также скорости вращения галактик. Проблема профиля скорости вращения поднимается в связи с анализом отношения Талли-Фишера и распределением темной

материи в галактиках и гравитационного потенциала [174]. В исследовании столкновения галактик отдельно стоит выделить проект GALMER парижской обсерватории – базу данных вычислительных экспериментов [74] по столкновению различных типов галактик. В задачах столкновения галактик [21] процессы (звездобразование [225], AGN [232], образование сверхмассивных двойных черных дыр [55, 216], химокинетика [79]) значительно ускоряются и необходим явный учет этих процессов в математической модели. Аналогичный учет нужно делать и в задачах эволюции галактик, так, например, проблеме учета различных процессов в контексте задачи "галактической археологии" Млечного Пути был посвящен отдельный сборник трудов [30]. В рамках МГД моделей была исследована структура магнитного поля в спиральных рукавах галактики М51 [98] и смоделирована эволюция дисковой галактики при влиянии магнитного поля [191, 192].

Стоит предварить задачи динамики молекулярных облаков проблемой их химической эволюции [108, 109] и химической эволюции карликовых галактик [200, 201, 212], которые могут быть сформулированы в одном контексте. Также была смоделирована химическая эволюция дисковых галактик в зависимости от различного распределения массы [97], в эволюции Млечного Пути [179, 180], в исследовании металличности дисковых галактик [198], в эволюции галактик с галактическим ветром [211], в галактическом гало [64]. Особый интерес представляет химическая эволюция молекулярных облаков и образование сложных элементов вплоть до воды и спиртов в мазерах [112, 119, 133, 134]. Стоит отметить, что проведение ряда химических реакций невозможно без наличия пылевой компоненты.

В контексте моделирования динамики молекулярных облаков рассматриваются также задачи развития гравитационной и магнитно-гравитационной неустойчивости [143], динамики падения облака на черную дыру [27], а также коллапса облака и его фрагментации [199]. Важную роль учет влияния магнитного поля оказывает на развитие межзвездных турбулентных течений, где магнитное поле достаточно сильное [49, 166, 196]. В задачах развития МГД турбулентности были исследованы энергетический спектр [51], субальфвеновские течения [172], скорость звездообразования [93] и проведено сравнение различных кодов на задаче сверхзвуковой турбулентности [146].

Явление коллапса имеет место как на начальной так и на конечной стадии эволюции отдельных звезд [31]. Так в рамках изучения эволюции звезд изучаются механизмы выброса релятивистских джетов [177], аккреция газа на замагниченную звезду и механизм переноса излучения [218], образование микроквазаров [267], эволюция нейтронных звезд [66], а также задачи влияния солнечного ветра на магнитосферу Земли [187, 276] и околоземное пространство [203]. В этих задачах большое влияние оказывает наличие магнитного поля, а также проявляются релятивистские эффекты.

Необходимо МГД моделирование и в задачах, связанных с солнечным ветром. Так была исследована турбулентность в солнечном ветре [102], построена одномерная МГД модель взаимодействия солнечного ветра с кометой 67Р/Churyumov-Gerasimenko [173] и с кометой Галлея [186], а также решены задачи взаимодействия газовой планеты со звездным ветром [131, 229]. Также стоит отметить аналогичные задачи о взаимодействии межзвездного ветра со звездами [255].

Остается открытым объяснение механизма образования планетных систем с более одной планетой [239]. Особое место занимает проблема планетообразования вокруг двойных звезд [117], что составляет примерно 20 % от числа всех планетных систем. Существует несколько сценариев процесса формирования планет в системах двойных звезд. Например, в системе из двух звезд, одна из которых красный гигант, а другая белый карлик, может происходить сброс вещества первой звездой, часть которого затем притягивается к белому карлику, образуя протопланетный диск. Кроме этого, планетные системы могут образоваться в ходе эволюции тесных двойных звезд. Отдельно стоит вопрос получения газовых гигантов [226], твердотельных планет и атмосфер вокруг таких планет [227]. В 2012 году профессором Тутуковым А.В. из Института астрономии РАН была сделана классификация сценариев образования планетных систем [22], в которой разобраны, в том числе, все описанные выше сценарии. Одной из основных проблем при моделировании сценариев образования планетных систем – это сохранение углового момента, что важно и в случае аккреции вещества на звезду [183]. В задачах моделирования протопланетных систем отдельный интерес представляет процесс коагуляции пыли и её электризация [168].

Таким образом, для математического моделирования астрономических объектов нам необходимо корректно описывать, а также численно и аналитически исследовать:

- гидродинамическую компоненту для описания барионной материи в космологических задачах, газовой компоненты галактик, молекулярных облаков и звезд;
- бесстолкновительную компоненту для описания темной материи в космологических задачах, темной материи и звездной компоненты в галактиках, пылевой компоненты в молекулярных облаках и протопланетных системах;

- упруго-пластическую среду с учетом фазовых переходов (твердое тело жидкость – газ) для описания взаимодействия метеоритов с поверхностью планеты;
- процесс перехода газовой компоненты в бесстолкновительную и наоборот в контексте звездообразования и эволюции звезд в галактических задачах и в молекулярных облаках;
- химическую эволюцию в крупномасштабных структурах, галактиках и молекулярных облаках;
- влияние магнитного поля на динамику молекулярных облаков и звезд;
- описание равновесных и динамических профилей распределения плотности в галактиках, молекулярных облаках и звездах;
- описание подсеточных процессов в галактиках и молекулярных облаках такие как излучение и нагревание.

Конечно, исследуемые процессы имеют разную природу, следовательно и математические модели имеют существенные различия, а тем более и численные методы. В настоящей работе будет сформулирован единый универсальный вычислительный подход к математическому моделированию динамики трехмерных астрономических объектов на суперЭВМ, который позволит эффективно разрешать большую часть описанных здесь проблем, начиная от физической постановки задачи и заканчивая её программной реализацией на конкретной архитектуре суперкомпьютера.

В последние два десятилетия из широкого диапазона газодинамических численных методов для решения нестационарных трехмерных астрофизических задач используются два основных подхода. Это лагранжев подход, в основном представленный SPH-методом [105, 163] (Smoothed Particle Hydrodynamics) и эйлеров подход с использование адаптивных сеток или AMR [190] (Adaptive Mesh Refinement). В последние пять лет появился ряд программных пакетов с использованием комбинации лагранжева и эйлерова подходов. Основной проблемой SPH метода является поиск соседей и организация их гравитационного взаимодействия. Для эффективного решения этой задачи были разработаны ряд алгоритмов. Например, particleparticle/particle-mesh или  $P^3M$  метод [123], адаптация  $P^3M$  метода с использованием иерархичности расчётной сетки  $AP^3M$  [80], tree алгоритм [46], комбинация tree алгоритма и particle-mesh подхода Tree-PM метод [87].

Для численного решения газодинамических задач широкое применение получил метод Годунова [5], основным структурным элементом которого является задача о распаде произвольного разрыва (задача Римана) с параметрами газа в соседних ячейках разностной сетки. Как правило, параметры газа в соседних ячейках достаточно близки, что создает благоприятные условия для применения упрощенного алгоритма решения задачи о распаде разрыва. Различные алгоритмы получения приближенного решения задачи Римана дали большой класс методов [12, 248]. Основными методами являются методы типа Куранта - Изаксона - Риса [81] и Роу [217], которые строятся на основе использования различным образом линеаризованных гиперболических систем уравнений, Ошера [90], где решения задачи Римана строится только с использованием волн Римана. Основоположным подходом к оценке скоростей волн является двухволновой метод Хартена - Лакса - Ван Лира (известный в литературе как HLL) [118], в котором учитываются девые и правые разрывы, без рассмотрения контактного разрыва. В схеме HLL использующей консервативные переменные, предложен простой, но эффективный способ выбора скоростей движения этих волн по максимальным наклонам характеристик в соседних ячейках разностной сетки. При этом веер волн разрежения заменяется скачком, но со скоростью распространения соответствующей максимальному наклону характеристик в этой волне разрежения. Поэтому этот выбор исключил проблему расчета "звуковой" точки при смене знака характеристик. Расчет ударных волн также проводится со скоростью, превышающей точное значение. В этой связи схема HLL эффективна при расчете ударных волн и зон разрежения. Однако, в расчете энтропийных скачков методом установления принятое допущение приводит к неприемлемому "размазыванию" контактного разрыва. Существуют также модификации HLL, такие как HLLE [88], где особо учитываются крайние собственные числа линеаризованной задачи, и HLLC [47], где производится дополнительный учет центрального разрыва, движущегося со скоростью равной центральному собственному значению линеаризованной задачи Римана.

Основными недостатками SPH метода являются плохое воспроизведение высоких градиентов решения и разрывов [148], подавление развития неустойчивостей [24], неоднозначный выбор ядра сглаживания [32] и необходимость введения искуственной вязкости [84, 230, 246]. Тем не менее, несмотря на большое число проблем в методе SPH существует работы по их решению [208]. Отдельно стоит проблема локального убывания энтропии в SPH методе [233]. Такая же проблема имеет место и в эйлеровых методах типа Годунова с линеаризованными распадами разрыва [17, 20]. Важность обеспечения неубывания энтропии подробно была показана в [10]. В работе [6] было сформулировано требование на обобщенное решение уравнений газовой динамики, которое состоит в запрете ударных волн разрежения, что эквивалентно неубыванию энтропии. В случае точного решения задачи о распаде разрыва такое просто не может существовать, а в случае приближенного распада разрыва такое может иметь место, что ведёт к локальному убыванию энтропии, что и было показано в [17]. Однако, даже в случае линеаризованного распада разрыва можно сконструировать схему с гарантированным неубыванием энтропии [111]. Отметим также, что ряд авторов [34, 219] используют в расчетах уравнение энтропии вместо уравнения для внутренней энергии, и такой подход имеет преимущество при большом числе Maxa [34]. Такой подход является сомнительным с той точки зрения, что в случае расчета уравнения для энтропии в явном виде не гарантируется возрастание энтропии на ударных волнах, что как раз и должно иметь место. В то же время, имеет место и нарушение закона сохранения энергии, в силу того что оно не используется в этом случае, а именно выполнение закона сохранения полной энергии является фундаментальным правилом. Внутренняя энергия (или давление, или энтропия) получается как следствие закона сохранения полной энергии и поведения кинетической энергии, чего достаточно для гарантии неубывания энтропии [111]. В случае вычисления внутренней энергии как разности полной и кинетической может возникнуть проблема её неположительности, что можно решить с использованием специальных лимитеров для функции плотности [39, 280], что важно при моделировании областей с высоким числом Маха. В астрофизических задачах такая проблема встает в области на границе газ-вакуум, что можно решить с использованием коррекции скоростей [264]. Такая модификация конечно даёт погрешность в момент импульса, но такая погрешность в случае разреженного газа мала и контролируема.

Основной недостаток сеточных методов – неинвариантность решения относительно поворота или галилеева неинвариантность [243, 266]. Однако такая проблема может быть решена при использовании различных подходов к конструированию численных схем в плане расширения шаблона вычислений [1, 9], использования геометрических деформаций [2, 7, 149] или с помощью решения многомерной задачи Римана [38, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 59, 60].

Один из общих недостатков обоих (AMR и SPH) подходов – проблема масштабируемости [96, 254]. В таблице 1 приведены достоинства и недостатки этих методов.

Достоинства SPH:	Достоинства AMR:
Робастность алгоритма	Апробированные методология
Инвариантность решения	Отсутствие искуственной вязкости
Простота реализации	Корректность на ударной волне
Адаптация под геометрию задачи	Воспроизведение разрывов
Высокая точность потенциала	Воспроизведение неустойчивостей
	Воспроизведение турбулентности
Недостатки SPH:	Недостатки AMR:
Искуственная вязкость	Сложность реализации
Радиус сглаживания	Сеточные эффекты
Осцилляции на разрывах	Проблема разрешения сетки
Подавление неустойчивостей	Проблема инвариантности
Слабая масштабируемость	Слабая масштабируемость

Таблица 1: Достоинства и недостатки SPH и AMR методов

Также на основе метода Годунова были сделаны реализации высокого порядка – монотонная противопотоковая схема второго порядка точности MUSCL [158, 253], неосциллирующие схемы с весами TVD-WENO [35, 36, 122, 128, 129], кусочнопараболический метод РРМ [76]. Однако, что понимается под высоким порядком точности в случае разрывных решений не очень понятно [110]. Генеральная идея таких подходов состоит в конструкции кусочно-полиномиальной функции в каждой ячейке расчетной области. Это может быть кусочно-линейная функция (в случае MUSCL схемы) или кусочно-полиномиальная функция (в случае PPM схемы). Для конструирования монотонного численного решения необходимо использование различных лимитеров [269]. Основной недостаток методов высокого порядка – это необходимость введения ограничителя потока (flux limiter в зарубежной литературе). Такой подход зачастую приводит к искажениям численного решения, например к неустранимой ошибке скорость ударной волны. Также существенным недостатком методов высокого порядка точности является необходимость использования отличного от компактного сеточного шаблона вычислений, что приводит к необходимости использования большего числа слоев перекрытия, что приводит к увеличению нагрузки на сетевую инфраструктуру и как следствие падение производительности. В связи с этим была разработана модификация метода РРМ – кусочно-параболический метод на локальном шаблоне (PPML) [205, 206].

Метод	Временная сложность	Сложность при использовании N <sup>3</sup> процессоров
CGM	$N^5$	$N^2 log(N)$
SOR	$N^5$	$N^2$
FFT	$N^3 log(N)$	log(N)
MG	$N^3$	$log^2(N)$

Таблица 2: Сравнительные характеристики методов решения уравнения Пуассона

Метод	Сложность	Количество сообщений	Объем сообщения
CGM	$N^5 log(p)/p$	$pN^2$	$N^2/p$
SOR	$N^5/p$	$pN^2$	$N^2/p$
FFT	$N^3 log(N)/p$	p	$N^3/p$
MG	$N^3/p + log(p)log(N)$	$plog^{3}(N)$	$N^2/p + log(p)log(N)$

Таблица 3: Сравнительные характеристики параллельных методов решения уравнения Пуассона

На сегодняшний день основными методами решения уравнения Пуассона, реализованные в астрофизических пакетах – это метод сопряженных градиентов (CGM); метод последовательной верхней релаксации (SOR); метод, основанный на быстром преобразовании Фурье (FFT); многосеточный метод (MG) или метод Федоренко [94]. В таблице 2 приведена сравнительная характеристика способов решения уравнения Пуассона на регулярной расчетной сетке в N<sup>3</sup> ячеек. В таблице 3 представлена временная сложность параллельных алгоритмов решения уравнения Пуассона.

Приведем также достоинтсва и недостатки гибридных архитектур суперЭВМ, которые перечислены в таблице 4.

В рамках лагранжева подхода на основе SPH метода были разработаны пакеты Hydra [195], Gasoline [265], GrapeSPH [169], GADGET [236]. В рамках эйлерова подхода (в том числе и с использованием AMR) были разработаны пакеты NIRVANA [281], FLASH [175], ZEUS [120], ENZO [190], RAMSES [244], ART [145], Athena [241], Pencil Code [61], Heracles [113], Orion [147], Pluto [176], CASTRO [28]. Эйлеров подход с использованием AMR был впервые использован на гибридных суперкомпьютерах, оснащенных графическими ускорителями, в пакете GAMER [223]. Пакет ВЕТНЕ-Hydro [184], AREPO [238], CHIMERA [62], GIZMO [125] и авторская реализация PEGAS – GPUPEGAS –AstroPhi [150, 152, 263] основаны на комбинации лагранжева и эйлерова подходов и в различной мере устраняют недостатки при сохранении

Достоинства NVIDIA Tesla/Kepler:	Достоинства Intel Xeon Phi:
Большое число ядер	Простота использования
Методическая поддержка	Стандарт OpenMP
Контроль за оптимизацией	Реализация операции редукции
Контроль передачи данных	Переносимость
Большое число библиотек	Поддержка стандарта IEEE 754
Недостатки NVIDIA Tesla/Kepler:	Недостатки Intel Xeon Phi:
Сложность программирования	Малое число ядер
Ограничения на алгоритмы	Слабая методическая поддержка
Ограничения на структуры данных	Слабая производительность ядер
Отсутствие редукции	
Непереносимость кода	
Потеря точности вычислений	
a c	

Таблица 4: Достоинства и недостатки графических ускорителей и ускорителей Intel Xeon Phi

достоинств базовых методов. Далее кратко опишем особенности основных используемых кодов. Остановимся на Тор-20 таких реализаций, реальное число таких кодов составляет более ста.

**AREPO** [238]. В основе кода лежит технология подвижных сеток, на основе триангуляции Вороного и Делоне с регуляризацией Ллойда [161]. Такой подход позволяет адаптировать сетку под решение при этом в отличие от SPH методов в основе метода находится эйлеров подход. В качестве основного решателя используется классический метод Годунова и MUSCL схема. Это связано с тем, что достаточно тяжело построить схему более высокого порядка на подвижной сетке. Такая проблема может быть решена с использованием метода конечных элементов в формулировке "разрывный метод Галеркина" [182, 221]. Для решения уравнения Пуассона используется подход на основе переформулировки уравнения для полной механической энергии в уравнение для суммы всех видов энергии (внутренняя, кинетическая и потенциальная). Такое уравнение имеет в правой части производную по времени от потенциала и его градиент, что вычисляется с помощью интеграла Пуассона методами TreePM. Для интегрирования по времени используется индивидуальный шаг по времени для различных ячеек. При всех достоинствах такого подхода он достаточно тяжелый в плане вычислительных затрат, а также остается открытым вопрос о качестве решения в областях, описываемых менее подробными сеточными ячейками. Тем не менее, код AREPO является одним из наиболее используемых в Мире в данные момент.

**ART** [145]. В основе кода лежит технология адаптивных деревьев сеток. Таким образом, классическая адаптивная сетка (AMR) представляется в виде регулярной (октет) древовидной структуры, которая естественным образом ложится на классические структуры данных, а следовательно к ним применимы все классические древесные параллельные алгоритмы. Для решения уравнения Пуассона используется метод релаксации, когда уравнение Пуассона переформулируется в виде:

$$\Delta \Phi = 4\pi G\rho \qquad \rightarrow \qquad \lim_{\tau \to \infty} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = \Delta \Phi - 4\pi G\rho \right)$$

а для решения последнего уравнения используется метод последовательной верхней релаксации. Для решения газодинамических уравнений используется MUSCL схема.

**АТНЕNA** [241]. Код ориентирован на МГД приложения и изначально не предполагает самогравитации. В основе решения МГД задачи Римана используются различные способы линеаризации (осреднение Poe, HLLC, HLLD, HLLE), а также точное решение задачи Римана. Для бездивергентности магнитного поля используется подход, основанный на использовании теоремы Стокса. Для этого с использованием решения задачи Римана для скорости и вектора магнитного поля на середину ребер проецируются вектор электрического поля, затем с использованием этих значений электрического поля пересчитываются значения магнитного поля на границах ячеек, что обеспечивает выполнение условия

$$\nabla \cdot B = 0$$

Для повышения порядка точности помимо кусочно-постоянной реконструкции используется кусочно-линейная (MUSCL) и кусочно-параболическая (PPM) реконструкции. Стоит также отметить очень подробное тестирование кода.

**ВЕТНЕ-НҮДОО** [184]. В основе данного кода лежит ALE-подход, сочетающий достинства как эйлерового так и лагранжевого подходов. Уравнения гидродинамики формулируются в лагранжевой неконсервативной форме и решаются на неструктурированной сетке. В основе численного метода – операторный подход, который позволяет построить (и в работе это построено) согласованные схемы для аппроксимации операторов градиент и дивергенция. Для решения уравнения Пуассона в одномерной постановке используется метод прогонки (или метод Томаса в зарубежной литературе). В двумерной постановке уравнения Пуассона решается с помощью

метода сопряженных градиентов. Далее происходит коррекция потенциала для сохранения полной энергии (сумма кинетической, внутренней и потенциальной энергий) системы. Стоит отметить, что полностью сохранить полную энергию системы все равно не удается, но ошибка на задаче коллапса составляет порядка  $10^{-2}$  процента, что очень незначительно. К сожалению подход не был развит на трехмерный случай.

**CAFE** [162]. Код предназначен для решения задач релятивистской идеальной магнитной газовой динамики. В основе программного комплекса WENO схема пятого порядка точности с методом решения задачи Римана HLLE. Для обеспечения бездивергентности магнитного поля используется теорема Стокса, аналогично подходу, реализованному в коде Athena [241]. Приведена формулировка метода для цилиндрических координат.

**CASTRO** [28]. Программный комплекс основан на методах MUSCL и PPM с использованием AMR подхода. Для решения уравнения Пуассона используется многосеточный метод, а на каждом этапе цикла метод Гаусса-Зейделя. Важной особенностью кода с точки зрения вычислительных методов является использование подхода, основанного на построении трехмерной кусочно-параболической функции [178], что важно для инвариантности численного метода. Кроме этого были использованы более "гладкие" симметричные ограничители [78, 171].

**CHOLLA** [224]. Программный комплекс реализован для проведения вычислительных экспериментов на GPU и основан на CTU-методе (Corner Transport Upwind), суть которого – распространение противопоточной схемы на многомерный случай [77, 103]. Для хранения расчетной сетки на GPU используется структура – ячейка, в которой содержатся все гидродинамические параметры. Утверждается, что такая локальность данных позволяет более эффективно использовать глобальную память графической карты. Вычисления временного шага происходит на графических ускорителях с помощью расширений CUDA. Стоит отметить, что в работе [224] достаточно подробно описаны все используемые численные методы.

**COSMOMHD** [160]. В коде, основанном на TVD-ES подходе, МГД уравнения решаются в расширенной форме с дополнительными уравнениями для внутренней энергии и энтропии. Ранее во введении была обозначена проблема контроля и коррекции энтропии, а также процедура ее расчета из полной энергии и кинетической. Код предназначен для космологического моделирования, поэтому тестовые задачи подобраны для подобных проблем.

**COSMOS** [29]. Основное назначение кода – моделирование химодинамических астрофизических течений с учетом излучения. Для решения гидродинамических уравнений используется TVD схема. В качестве метода решения уравнения Пуассона и уравнения для неравновесной диффузии излучения используется метод сопряженных градиентов и многосеточный метод. В коде используется равновесная химокинетика, что не требует затрат на решение ОДУ для химокинетики.

**CRASH** [251]. В основе кода решение уравнений гравитационной газовой динамики, излучения и диффузии с помощью метода разделения операторов по физическим процессам. Для решения уравнений гидродинамики используется метод HLLE для консервативной и неконсервативной формулировки. Такое обстоятельство связано с тем, что при использовании ряда уравнений состояния консервативная формулировка очень сложна, а на границе двух сред не всегда возможна. В этих случаях используется уравнение для давления [137].

ENZO [65]. В основе программного комплекса решение уравнений магнитной газовой динамики с учетом космологического расширения. Для моделирования бесстолкновительной компоненты используется модель N-тел. В код включено большое число подсеточных процессов: примордиальная химическая кинетика, функции охлаждения/нагревания, перенос излучения, а также процессы звездообразования и эффекты от взрыва сверхновых. Для решения гидродинамических уравнений используется несколько сольверов: PPM (реализован только для уравнений газовой динамики), MUSCL и конечно-разностный метод. Для решения уравнения Пуассона используется алгоритм, основанный на быстром преобразовании Фурье. В комплексе используется так называемая структурированная адаптивная сетка, основная идея состоит в минимальном отличии расчетной сетки между соседними ячейками. Такая структура позволяет использовать регулярные деревья, где подобласть разбивается не более чем в два раза, что повышает эффективность использования таких расчетных сеток.

**FISH** [135]. Код предназначен для моделирования МГД астрофизических приложений. Интересной особенностью метода является метод решения уравнений магнитной газовой динамики, который основан на методе Годунова, но с интересным подходом к решению задачи Римана. Для решения уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

где w = F(u), строится дополнительное уравнение с малым параметром  $\epsilon$ :

$$\epsilon \left(\frac{\partial w}{\partial t} + D^2 \frac{\partial u}{\partial x}\right) = F(u) - w$$

где *D* – диагональная матрица с максимальным наклоном характеристики. В этом месте использована идея HLLD методов. Такая система в пределе имеет простую характиристичесую структуру:

$$\frac{\partial}{\partial t}(w+Du) + D\frac{\partial}{\partial x}(w+Du) = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial t}(w-Du) - D\frac{\partial}{\partial x}(w-Du) = 0$$

разрешая которую мы получаем решение задачи Римана. Отметим, что здесь не используется определение собственных векторов матрицы  $A = \frac{\partial F(u)}{u}$ , как и сама матрица A, что является достаточно тяжелой процедурой. Следующим нюансом метода является учет гравитационного терма. Особенность состоит в использовании расщепления учета гравитационного члена схемой предиктор-корректор, где на первом этапе для гравитационного члена используется центральная разность, а на втором этапе строится подправка, получаемая из условия равновесия сил давления и гравитационной силы:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

Аналогичный подход для учета гравитационный силы был использован в работе [136].

**GADGET2** [236]. В качестве базового метода решения в коде используется SPH метод. Фактически на сегодняшний день это наиболее распространенный код, основанный на SPH подходе. Но стоит отметить, что количество реально используемых кодов, основанных на SPH методе, сокращается и основной тренд уходит в сторону лагранжево-эйлеровых подходов в комбинации с сеточными методами. Для распределения частиц между процессами используется обход по кривой Пеано-Гильберта, такой подход сейчас является стандартом де-факто для параллельной реализации SPH методов.

**GAMER** [223]. В коде реализовано решение уравнение газовой динамики с использованием AMR подхода на графических ускорителях. Для решения уравнений газовой динамики используется TVD подход, для решения уравнения Пуассона используется комбинация метода, основанного на быстром преобразовании Фурье, и метода последовательной верхней релаксации. Пожалуй основной особенностью данного комплекса является реализация AMR подхода на графических картах. Так регулярная структура сетки естественным образом проецируется на архитектуру GPU, в то время как древесная структура требует специальных подходов. Такой подход состоит в использовании октетов для определения сетки, который проецируется на отдельный поток графической карты. Главной проблемой здесь является формирование фиктивных ячеек для октета, что составляет порядка 63 % времени, однако такая процедура может быть реализована независимо для каждого октета.

**GASOLINE** [265]. В программном комплексе реализован метод SPH для решения уравнений газовой динамики, в основе которого адаптивное разделение пространства на октеты. В октетах расположены SPH частицы. В коде используется классическая формулировка SPH метода.

**GENASIS** [68]. В коде реализовано решение уравнений газовой динамики с использованием конечно-объемной балансной аппроксимации. Для решения задачи Римана, которая в такой постановке нужна для аппроксимации краевого значения на границе ячейки используется HLL метод.

GIZMO [125]. В программном коде разработан и реализован новый бессеточный подход к решению уравнений гравитационной газовой динамики. Подход основан на комбинации классических сеточных методов и метода SPH. Метод состоит в использовании уравнений газовой динамики в эйлеровых координатах, которые, используя вариационный принцип Галеркина, домножаются на пробные функции. Особенность этих функций является тот факт, что они не привязаны к расчетной сетке, как это сделано в работе [182], а привязаны к отдельным частицам [100], аналогичным по своей природе SPH частицам. Для определения значений на границах области используется решение задачи Римана с использованием MUSCL схемы.

**PENCIL CODE** [61]. В основе програмного комплекса лежит решение уравнений магнитной газовой динамики с использованием семиточечной конечно-разностной схемы с искуственной вязкостью. Для обеспечения условия бездивергентности магнитного поля используется проекционная схема с решением уравнения Пуассона для электростатического потенциала. Для параллельной реализации используется High Performance Fortran. Такая простая на первый взгляд реализация достаточно эффективна и с точки зрения масштабируемости и с точки зрения решения задач, в первую очередь турбулентных течений.

**RAMSES** [244]. В коде реализовано численное решение уравнений гравитационной газовой динамики с использованием AMR подхода, основанный на разбиение на октеты. Для решения уравнения Пуассона используется комбинация метода, основанного на быстром преобразовании Фурье, и метода Гаусса-Зейделя. Для аппроксимации уравнения Пуассона используется простая пятиточечная конечно-разностная аппроксимация, которая была заменена на более эффективную 19-точечную аппроксимацию, которая была реализована в виде расширения кода RAMSES на случай неклассической гравитации (MOND) [67].

**ZEUS** [120]. Основное назначение кода – это решение уравнений магнитной газовой динамики. Численный метод основан на методе разделения операторов. Где работа сил аппроксимируется пятиточечной конечно-разностной схемой с искуственной вязкостью в форме Нейманна-Рихтмайера. Для реализации этапа адвективного переноса используется адаптация PPM метода для решения уравнение переноса PPA (Piecewise-parabolic advection) схема.

FOXT	Численный метод	
Hydra	$SPH + Adaptive P^3M + FFT$	HPF
Gasoline	$SPH + Tree \ code + Multipole \ Method$	MPI
GrapeSPH	SPH + Direct Summation	GRAPE
GADGET-2	SPH + TreePM + FFT	MPI
NIRVANA	AMR + HLL + Multigrid	MPI
FLASH	AMR + PPM + Multigrid	MPI
ZEUS-MP	Finite difference method $+$ FFT+Multigrid	MPI
ENZO	AMR + PPM + FFT+Multigrid	MPI
RAMSES	AMR + HLLC + Multigrid+CG	<b>OpenMP+MPI</b>
ART	AMR + MUSCL + FFT	MPI
A then a	$\operatorname{Roe's} \operatorname{solver} + \operatorname{FFT}$	MPI
Pencil Code	Finite difference method $+$ FFT	<b>HPF+MPI</b>
Heracles	MUSCL + CG	MPI
Pluto	AMR+HLLC + Analytical	MPI
CASTRO	AMR+PPM + Multigrid	MPI+OpenMP
GAMER	AMR+TVD + FFT+SOR	<b>CUDA+MPI</b>
<b>BETHE-Hydro</b>	Arbitrary Lagrangian-Eulerian + Matrix Inverse	I
AREPO	Moving mesh $+$ MUSCL $+$ TreePM $+$ FFT	MPI
PEGAS	$Operator\ splitting\ approach\ +\ PPML\ +\ FFT$	MPI + CUDA + OpenMP

Таблица 5: Основные характеристики астрофизических пакетов. В последней строке указана оригинальная авторская технология.

Как уже было сказано ранее общее число кодов на сегодняшний день более ста. Здесь были выделены двадцать наиболее распространенных и интересных с точки зрения вычислительной математики кодов. Из них наиболее интересными (и наиболее используемые) кодами являются следующие пять: AREPO, ZEUS, ENZO, ATHE-NA, GIZMO. Отметим, что среди них нет реализаций, основанных на классическом SPH методе (как и почти в 20 рассмотренных кодах). Два кода (AREPO и GIZMO) основаны на эйлерово-лагранжевом подходах на подвижных сетках, что является безусловным трендом современной вычислительной астрофизики. В то же время и код ZEUS использует подобный подход, ограничиваясь статичной эйлеровой сеткой, а особенности эйлерово-лагранжева подхода реализованы в методе разделения операторов и формулировки численного метода. В настоящей работе был использован аналогичный подход, детали которого изложены в следующих главах, а результаты вычислительных экспериментов с использованием такого подхода описаны в заключительной главе.

#### Цели и задачи диссертации

Главной целью настоящей работы является построение универсальной численной модели для описания трехмерных гидродинамических процессов в самосогласованном гравитационном поле на суперЭВМ. Для этого были сформулированы следующие задачи:

- Разработка численной модели упруго-пластических деформаций с учетом фазовых переходов и определение области ее применимости при моделировании процесса "сварки взрывом" двух металлических пластин.
- Разработка математической модели гидродинамических процессов на основе уравнений газовой динамики, магнитной газовой динамики и уравнений для первых моментов бесстолкновительного уравнения Больцмана с учетом самогравитации и подсеточных процессов.
- Разработка, верификация и эффективная параллельная реализация единого вычислительного метода решения систем гиперболических уравнений, используемых для описания процессов гравитационной гидродинамики.
- Исследование гидродинамических процессов на различных пространственных и временных масштабах: космологические структуры и галактики, молекулярные облака и межзвездная среда, протопланетные диски.

#### Научная новизна

В диссертации сформулированы новые постановки задач математического моделирования гидродинамических процессов: "сварка взрывом" металлических пластин, взаимодействие галактик, гравитационная гидродинамика молекулярных облаков. Созданы оригинальные математические модели, вычислительные схемы с малой диссипацией решения и их эффективные параллельные реализации. Научная новизна работы состоит в следующем:

- Построена новая математическая модель упруго-пластических деформаций с учетом фазовых переходов, с помощью которой объяснен процесс волнообразования и динамика кумулятивной струи, возникающей при "сварке взрывом" двух пластин. Модель основана на уравнениях нелинейной теории упругости в лагранжевых координатах, замкнутых уравнением состояния общего вида для описания всех фазовых состояний материала (основные результаты приведены в монографии [8] и в работе [7]).
- 2. Построена не имеющая мировых аналогов гидродинамическая модель астрофизических объектов. Модель основана на уравнениях (магнитной) газовой динамики и уравнениях для первых моментов бесстолкновительного уравнения Больцмана для описания бесстолкновительной компоненты, записанных в виде гиперболической системы уравнений. Такая модель позволяет термодинамически согласовано описать процессы фазовых переходов – звездообразование и роли сверхновых звезд (основные результаты приведены в главе монографии [151] и в работах [150, 209]).
- 3. Для решения гиперболических систем уравнений разработан новый численный метод высокого порядка точности на гладких решениях и с малой диссипацией решения в области разрывов. Метод основан на комбинации метода разделения операторов, метода Годунова и кусочно-параболического метода на локальном шаблоне (основные результаты приведены в главе монографии [151] и в работах [150, 155, 154]).
- 4. Впервые в мировой практике с помощью термодинамически согласованной гидродинамической модели смоделирован процесс взаимодействия галактик, сценарий свободного прохождения галактик в результате их центрального столкновения и коллапс молекулярного облака в ходе эволюции межзвездной среды.

Экспериментально определены

диапазоны

гидродинамических параметров, при которых развиваются сценарии слияния, свободного прохождения и диссипации галактик. Обоснована гипотеза об области повышенной скорости звездообразования за фронтом ударных волн, возникающих при столкновении галактик. Экспериментально обоснована гипотеза об образовании большего числа спиральных рукавов галактики при меньшей массе диска по отношению к массе Гало. Определены гидродинамические параметры, при которых образуются 2, 4 и 7 спиральных рукавов галактики. Определено, что при наличии сильного магнитного поля образуются полярные течения при коллапсе молекулярного облака вдоль магнитных силовых линий (основные результаты приведены в главе монографии [151] и в работах [150, 152, 155, 149, 263, 21, 154]).

5. На основе разработанных численных моделей реализован первый в Мире программный код для моделирования самогравитирующих гидродинамических объектов на гибридных суперЭВМ с ускорителями Intel Xeon Phi. Для параллельной реализации используется двухуровневая геометрическая декомпозиция области. Такая реализация позволила получить 134-кратное ускорение и 92 % эффективность при использовании 64 ускорителей (основные результаты приведены в работах [152, 154]).

#### Теоретическая и практическая значимость

С помощью достижений в области дифференциальных уравнений, теории конечнообъемных схем и параллельных вычислительных методов диссертантом построена и теоретически обоснована математическая модель упруго-пластических деформаций с учетом фазовых переходов и термодинамически согласованная гидродинамическая модель астрофизических объектов, разработаны и экспериментально верифицированы оригинальные численные методы высокого порядка точности для математического моделирования самогравитирующих гидродинамических объектов на различных пространственных масштабах и на этой основе разработано наукоемкое программное обеспечение для современных суперЭВМ.

В диссертации разработаны суперкомпьютерные программные комплексы с открытым кодом: Elast2d – программа для моделирования упруго-пластических деформаций, PEGAS – программа для моделирования астрофизических течений на классических суперкомпьютерных архитектурах, GPUPEGAS – расширение послед-

него комплекса на гибридные архитектуры, оснащенные графическими ускорителями, AstroPhi – расширение комплекса PEGAS на гибридные архитектуры с ускорителями Intel Xeon Phi. Программные комплексы зарегистрированы в Фонде алгоритмов и программ СО РАН, РосПатенте и специализированной библиотеке журнала Computer Physics Communications. Данные программные комплексы используются в исследованиях по изучению процесса "сварки взрывом" в ИТПМ СО РАН, ИГиЛ СО РАН, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, ОИВТ РАН, анализе астрономических наблюдений в ИНАСАН, ЮФУ, Институте Астрономии университета г. Вена, анализе производительности гибридных суперЭВМ в Группе компаний РСК. Эффективность построенных моделей, численных методов и программного обеспечения экспериментально подтверждена на решении задач о "сварке взрывом" и астрофизики.

Проводимые в рамках диссертации исследования являются частью планов научноисследовательских работ ИВМиМГ СО РАН, а их выполнение было поддержано Российским фондом фундаментальных исследований и Министерством образования и науки Российской Федерации. Так под руководством диссертанта были выполнены следующие проекты: грант Президента Российской Федерации на 2015 – 2016 годы "Разработка эффективных высокоточных параллельных алгоритмов для магнитно-газодинамического моделирования динамики галактик на гибридных суперЭВМ, оснащенных графическими ускорителями и ускорителями Intel Xeon Phi", грант Российского фонда фундаментальных исследований на 2015 – 2017 годы "Разработка эффективных параллельных вычислительных методов высокого порядка точности для моделирования динамики астрофизических объектов на гибридных высокопроизводительных вычислительных системах", грант Российского фонда фундаментальных исследований на 2015 – 2016 годы для ведущих молодежных научных групп "Разработка эффективных параллельных вычислительных методов высокого порядка точности для разномасштабного моделирования астрофизических течений на гибридных суперЭВМ", грант Президента Российской Федерации на 2013 – 2014 годы, "Разработка эффективных параллельных алгоритмов для моделирования гравитационных магнитно-газодинамических процессов на высокопроизводительных вычислительных системах, оснащенных графическими ускорителями", муниципальный грант мэрии города Новосибирска в 2013 году "Разработка математических моделей и параллельных алгоритмов для компьютерного моделирования на графических ускорителях динамики протопланетного диска", молодежный грант Российского фонда фундаментальных исследований на 2012 – 2013 годы "Разработка эффектив-

ных параллельных алгоритмов для моделирования динамики многофазных астрофизических объектов на гибридных высокопроизводительных вычислительных системах", федеральная целевая программа "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009 – 2013 годы" на 2011 – 2013 годы "Разработка высокоточных вычислительных методов и программ для моделирования на высокопроизводительных вычислительных системах астрофизических процессов". Основные результаты исследований опубликованы в ведущих рецензируемых научных изданиях из перечня ВАК и используются как в Российской Федерации, так и за рубежом.

#### Методы исследований

Сложность нестационарных течений, их нелинейность и разномасштабность требуют детального исследования, основанного на совместном использовании современных знаний из ряда научных дисциплин: математическое моделирование, вычислительная математика, теория и технологии параллельных вычислений, гидродинамика, астрофизика и астрономия с использованием натурных экспериментов и наблюдений. В диссертации проводится теоретическое исследование косого соударения металлических пластин при "сварке взрывом", взаимодействие и эволюция галактик, эволюция молекулярных облаков. Для исследования использовался аппарат математического моделирования, часть проблем была решена аналитическими методами. Используемые в настоящей работе математические модели характеризуются полнотой описания, что позволило учесть ряд особенностей, влияющих на поведение гидродинамических процессов в задачах упруго-пластических деформаций и астрофизических задачах. Методология исследований при решении задач состоит в совместном использовании комплексных гидродинамических моделей с эффективными параллельными вычислительными методами. Численные модели и разработанные на их основе программные комплексы прошли полную верификацию на ряде модельных задач, близких по физическим постановкам к изучаемым процессам и имеющих аналитическое решение.

#### Положения, выносимые на защиту

В диссертации содержатся оригинальные результаты по трем направлениям: математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. Это соответствует трем пунктам паспорта специальности 05.13.18 "Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ".

1) Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий:

- Разработка, обоснование и тестирование математической модели упруго-пластических деформаций с учетом фазовых переходов. Модель основана на обобщенной формулировке уравнения состояния деформируемой среды, описывающего упругую среду, жидкость, газ и набор частиц [8, 7].
- Разработка, обоснование и тестирование численной гидродинамической модели для описания астрофизических объектов. Модель основана на уравнениях (магнитной) газовой динамики и уравнениях для первых моментов бесстолкновительного уравнения Больцмана для описания бесстолкновительной компоненты. Такая модель формулируется в виде гиперболической системы уравнений, для которой формулируется единый вычислительный метод [150, 209].
- Разработка, обоснование и тестирование эффективного численного метода высокого порядка точности на гладких решениях и малой диссипации численного решения в области разрывов для математического моделирования гидродинамических течений на суперЭВМ. В основе метода лежит комбинация метода разделения операторов, метода Годунова и кусочно-параболического метода на локальном шаблоне [150, 155, 154].

2) Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента:

- Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплекса программ для проведения вычислительных экспериментов для исследования динамики кумулятивной струи и процесса волнообразования при "сварке взрывом" двух металлических пластин [8, 7].
- Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплекса программ для проведения вычислительных экспериментов для исследования эволюции и взаимодействия галактик [150, 155, 209, 154].
- Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплекса программ для проведения вычислительных экспериментов для исследования эволюции межзвездной среды и коллапса молекулярных облаков [152].

3) Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента:

- С помощью вычислительного эксперимента объяснен процесс волнообразования и процесс фазового перехода при эволюции кумулятивной струи, возникающей при косом соударении двух металлических пластин. Волнообразование происходит вследствие совместного использования режима "склейки" и "проскальзывания" в области контакта. Кумулятивная струя образуется при малом угле столкновения между пластинами [7].
- С помощью вычислительного эксперимента в полной гидродинамической модели объяснен процесс развития центрального столкновения галактик: разрушение, слияние, свободное прохождение, образование третьей галактики после свободного прохождения галактик. Определены гидродинамические параметры, приводящие к развитию каждого из сценариев. Показано, что области активного звездообразования находятся за фронтом сформировавшихся в результате столкновения ударных волн. Образование молекулярного водорода происходит в области высокой плотности. Показано, что образуется большее число спиральных рукавов галактики при меньшей массе диска по отношению к массе Гало. Определены гидродинамические параметры, при которых образуются 2, 4 и 7 спиральных рукавов галактики [150, 155, 263, 209, 154].
- С помощью вычислительного эксперимента объяснен процесс и образование полярных течений в молекулярных облаках при самоорганизации межзвездной среды. Показано, что полярные течения образуются вдоль силовых линий магнитного поля при коллапсе молекулярного облака. Экспериментально доказано преимущество разработанного в диссертации численного метода над лагранжевым методом сглаженных частиц при воспроизведении высоких градиентов решения [152, 151, 148].

### Апробация работы

Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на семинарах в Институте вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Институте гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Институте вычислительных технологий СО РАН, Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Институте астрономии университета г. Вена, Институте астрономии и физики космоса университета г. Буэнос-Айрес, а также на следующих конференциях в России и за рубежом: Всероссийская конференция "Нелинейные волны: теория и новые приложения" (Новосибирск, 2016), Сибирский форум индустрии информационных систем (Новосибирск, 2016, 2015), Международная конференция AstroNum 2015 (Франция, 2015), Международная конференция "10th Marseille Cosmology Conference" (Франция, 2015), Международная конференция "Workshop on Non-equilibrium Flow Phenomena in Honor of Mikhail Ivanov's 70th Birthday" (Новосибирск, 2015), Международная конференция "Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики" (Новосибирск, 2015, 2014), Международная конференция "ISC High Performance" (Германия, 2015), Всероссийская конференция "Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии" (Новосибирск, 2014), Международное рабочее совещание "Workshop on Numerical and Observational Astrophysics" (Аргентина, 2014, 2011), Международная конференция "Mind The Gap: from microphysics to large-scale structure in the Universe" (Великобритания, 2013), Всероссийская конференция "Современные проблемы динамики разреженного газа" (Новосибирск, 2013), Международная конференция "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория Приближений" (Новосибирск, 2013), Международная конференция "Математические и информационные технологии, МІТ-2013" (Черногория, 2013), Международная научная конференция "Методы создания, исследования и идентификации математических моделей" (Новосибирск, 2013), Национальный суперкомпьютерный форум (Переславль-Залесский, 2013), Международная конференция "Interacting Galaxies and Binary Quasars: A Cosmic Rendezvous" (Италия, 2012), Международная суперкомпьютерная конференция "Научный сервис в сети Интернет" (Абрау-Дюрсо, 2011, 2010), Международная конференция "Parallel Computing Technologies (PaCT-2009)" (Новосибирск, 2009), Международное рабочее совещание "Происхождение и эволюция биосферы" (Новосибирск, 2005), Молодежная научная школа-конференция "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач" (Новосибирск, 2015, 2013, 2009), Конференция молодых ученых ИВМиМГ СО РАН (Новосибирск, 2016, 2015, 2014, 2013, 2009, 2008, 2006), Всероссийская межвузовская конференция молодых ученых (Санкт-Петербург, 2008), Международная научная студенческая конференция "Студент и научно-технический прогресс" (Новосибирск, 2006, 2005). Всего по теме диссертации опубликовано более 30 работ, из которых 24 в ведущих рецензируемых научных изданиях из перечня ВАК. Список основных публикаций приведен в конце автореферата.

#### Достоверность представленных результатов

Достоверность представленных результатов основана на применении обоснованных

математических моделей, проверенных на специальном наборе тестовых задач вычислительных методов, устойчивостью и сходимостью используемых конечно-объемных схем, сравнением результатов моделирования с лабораторными экспериментами и наблюдениями, наличием высокорейтинговых публикаций и докладов по теме диссертации на различных специализированных конференциях и семинарах.

#### Личный вклад автора

В совместных работах по моделированию упруго-пластических деформаций личный вклад диссертанта заключается в разработке и исследованию корректности уравнения состояния деформируемой среды при фазовых переходах, реализации численного метода и проведению вычислительных экспериментов. В работах по моделированию гидродинамических процессов в астрофизических приложениях личный вклад диссертанта заключается в формулировке и обоснованию гидродинамической модели астрофизических объектов, разработке нового численного метода высокого порядка точности и его программной реализации, а также в проведение вычислительных экспериментов. Вклад автора в обсуждении постановок задач и интерпретации полученных результатов бал равным вкладом других соавторов. Все выносимые на защиту результаты принадлежат лично автору. Представление изложенных в настоящей диссертации и выносимых на защиту результатов, полученных в совместных исследованиях, согласованно с соавторами.

#### Объем и структура диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения. Общий объем диссертации составляет 275 страниц, включая 97 рисунков, 13 таблиц и список литературы из 281 наименования.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **Введении** изложено современное состояние математических моделей гидродинамических процессов с учетом самогравитации и численных методов, используемых для их разрешения, а также программных комплексов эти методы реализующие. Обосновывается актуальность и сформулированы цели работы, сформулированы защищаемые научные результаты, приведен обзор литературы, сведения о научной новизне, практической и научной ценности, личном вкладе автора, сведения о структуре диссертации.

В **Главе 1** (Моделирование упруго-пластических деформаций) представлена численная модель упруго-пластических деформаций с учетом фазовых переходов. Модель основана на решении уравнений нелинейной теории упругости в лагранжевых

координатах. Сформулировано и исследовано уравнение состояния упруго-пластичной среды, описаны правила преобразования уравнения состояния при фазовых переходах. Изложен численный метод решения уравнений, который был верифицирован на задаче "о распаде разрыва" в упругой среде. Приведены результаты вычислительных экспериментов по численному решению задач "о сварке взрывом" и ранней стадии взаимодействия метеоритов с поверхностью планет.

В *разделе 1.1* (Упруго-пластическая модель) определены понятия тензора дисторсии *С* в лагранжевых координатах

$$C_j^i = \frac{\partial x^i \left(\xi^1, \xi^2, \xi^3\right)}{\partial \xi^j},$$

где  $x^i$  – эйлеровы координаты,  $\xi^j$  – лагранжевы координаты, понятие уравнения состояния  $E(C,S) = E\left(\sqrt{CC^T},S\right)$ , где S – функция энтропии, и тензор напряжений  $\pi = E_C$ . Записаны уравнения теории упругости с учетом максвелловских релаксаций

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^i}{\partial t} - \frac{\partial \pi_i^j}{\partial \xi^j} &= 0, \qquad \frac{\partial C_j^i}{\partial t} - \frac{\partial u^i}{\partial \xi^j} &= 0, \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= \frac{\tau_0^{-1} c_0 E_{c_0} + \tau_*^{-1} c_* E_{c_*} + \tau_1^{-1} c_1 E_{c_1}}{E_S}, \\ \frac{\partial c_0}{\partial t} &= -\frac{c_0}{\tau_0}, \qquad \frac{\partial c_1}{\partial t} &= -\frac{c_1}{\tau_1}, \qquad \frac{\partial c_*}{\partial t} &= -\frac{c_*}{\tau_*} \end{aligned}$$

Домножив уравнения на  $u^i$ ,  $E_{C_i^j}$ ,  $E_S$ ,  $E_{c_0}$ ,  $E_{c_*}$ ,  $E_{c_1}$  соответственно получим закон сохранения полной энергии, который записывается в следующей форме:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u^i u_i}{2} + E\right) - \frac{\partial}{\partial \xi^j}\left(u^i \pi_i^j\right) = 0,$$

где  $u^i$  – скорость,  $c_0$ ,  $c_*$ ,  $c_1$  – продольные и поперечные скорости звука,  $\tau_0$ ,  $\tau_*$ ,  $\tau_1$ – параметры релаксации. Для вычислений нам удобно рассматривать сингулярный вид матрицы дисторсии. Для этого в каждой точке деформируемой среды в рассматриваемый момент времени вычисляется сингулярное разложение для матрицы  $C = UKV^T$ , где U и V – ортогональные матрицы,  $K = diag(k_1, k_2, k_3)$  – диагональная матрица сингулярных чисел. В этом случае уравнение состояния может быть представлено в виде:

$$E(C,S) = E\left(\sqrt{CC^{T}},S\right) = E(k_{1},k_{2},k_{3},S)$$

Для того вида сформулирована и доказана теорема о выпуклости (корректности) уравнения состояния упруго-пластической среды, в которой говорится, что для выпуклости уравнения состояния упругой среды E = E(C, S) как функции от элементов матрицы необходимо и достаточно, чтобы была положительно определена матрица $E_{k_ik_j}>0$  и выполнены условия:

$$\frac{E_{k_i} - E_{k_j}}{k_i - k_j} > 0, \qquad \frac{E_{k_i} + E_{k_j}}{k_i + k_j} > 0.$$

Приведен список инвариантов, используемых для записи уравнения состояния для каждой фазы и выписаны условия его корректности.

В *разделе 1.2* (Метод Годунова для решения уравнений в лагранжевых координатах) описан метод Годунова для решения уравнений для описания упруго-пластической среды, где помимо решения уравнений теории упругости необходимо использовать процедуру перемещения расчетной сетки. Вычислительный алгоритм можно представить в виде следующих шагов, которые выполняются для каждой ячейки расчетной области: сингулярное разложение матрицы дисторсии *C*, при достижении необходимых условий учет фазового перехода и формулировка уравнения состояния, контроль корректности уравнения состояния с помощью сформулированной выше теоремы, решение задачи Римана для сформулированного уравнения состояния, расчет законов сохранения, пересчет функции энтропии, движение расчетной сетки. Наиболее сложным этапом алгоритма является численное решение задачи Римана для упругой среды. Для решения задачи Римана с помощью преобразования Лежандра преобразуем уравнения теории упругости:

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} - \frac{\partial \pi^j_i}{\partial \xi^j} = 0, \qquad \frac{\partial C^i_j}{\partial t} - \frac{\partial u^i}{\partial \xi^j} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

к виду:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial \pi_i^j}{\partial \xi^j} = 0, \qquad \left( E_{C_j^k C_l^j} \right)^{-1} \frac{\partial \pi_j^i}{\partial t} - \frac{\partial u_i}{\partial \xi^j} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

где матрица  $E_{C_j^k C_l^j}$  – обратима и положительно определенная матрица. В одомерном случае первые два уравнения можно переписать в виде:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial \pi_i^j}{\partial \xi^j} = 0, \qquad \Lambda^2 \frac{\partial \pi_j^i}{\partial t} - \frac{\partial u_i}{\partial \xi^j} = 0,$$

где  $\Lambda^2 - j$ -й блочно-диагональный элемент матрицы  $\left(E_{C_j^k C_l^j}\right)^{-1}$ . В результате, перейдя к инвариантам  $\Lambda \pi_i \pm u$  последняя система элементарно разрешается. После пересчета законов сохранения происходит пересчет эйлеровой сетки и матрицы дисторсии по уравнениям:

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = U_i, \qquad C^i_j = \frac{\partial X_i}{\partial \xi^j}$$

Для этого используя значения скорости  $U_i$ , полученные в результате решения задачи "о распаде разрыва", мы перемещаем расчетную сетку.
В *разделе 1.3* (Задача о "распаде разрыва" в упругой среде) на решении задачи "о распаде разрыва" в упругой среде был верифицирован численный метод, используемый для решения уравнений теории упругости.

В *разделе 1.4* (Задача "о сварке взрывом" двух алюминиевых пластин) исследовано образование и динамика кумулятивной струи при косом соударении двух алюминиевых пластин, а также исследован процесс волнообразования.

В разделе 1.5 (Моделирование взаимодействия метеоритов с поверхностью планет) рассмотрены две задачи взаимодействия метеоритов с поверхностью планет на ранней стадии: столкновение с поверхностью планет, имеющих атмосферу, что приводит к частичному разрушению метеорита и падением его скорости, в этом случае будет рассмотрен удар с дозвуковой скоростью; столкновение с поверхностью планет, не имеющих атмосферу, что приводит к удару со сверхзвуковой скоростью. Будем моделировать две пластины. Первая из которых (поверхность планеты – вулканогенноосадочный слой) размером  $120 \times 60$  сантиметров с плотностью  $\rho_0 = 2.3$  г/см<sup>3</sup>, продольной и поперечной скоростями звука  $c_0=5.0~{
m km/cek}$  и  $c_1=2.9~{
m km/cek}$  соответственно. Вторая пластина (метеор – материал оливин) размером 40×40 сантиметров с плотностью  $ho_0 = 3.27 \ r/cm^3$ , продольной и поперечной скоростями звука  $c_0 = 7.4 \ km/s$ сек и  $c_1 = 5.3$  км/сек соответственно. Критическое давление откола частиц  $\pi_{cr} = 60$ ГПа. В результате математического моделирования было показано, что в области контакта между пластинами происходит разогрев и плавление материала, также образуется небольшая волновая структура, а затем происходит выброс частиц. Следует отметить, что частицы вылетают как из газовой фазы, так и из твердой, что связано с резким сменой уравнения состояния для последних. В целом картина течения напоминает картину сварки взрывом двух алюминиевых пластин. В то время как при сверхзвуковом ударе от области контакта между пластинами выходит волна плавления материала, которая распространяется практически на всю область метеорита. Отметим, что выброса части в виде кумулятивной струи не наблюдается, что связано с быстрым плавлением и разогревом материала без образования критических значений давления.

В разделе 1.6 сформулированы основные выводы по первой главе.

В Главе 2 (Физико-математические модели гидродинамических процессов в самосогласованном гравитационном поле) представлены математические модели астрономических объектов и подсеточные процессы, небходимые для учета на различных пространственных масштабах. Модель основана на совместном использовании

(магнитно) газодинамической модели и уравнений для первых моментов бесстолкновительного уравнения Больцмана для описания бесстолкновительной компоненты астрономических объектов. Такой подход позволяет сформулировать термодинамически согласованную гидродинамическую модель для описания динамики астрофизических течений.

В *разделе 2.1* (Газодинамическая модель) изложена трехмерная модель гравитационной газовой динамики, основанная на использовании переопределенной системы уравнений газовой динамики, замкнутую уравнением состояния для идеального газа и дополненную уравнением Пуассона для гравитационного потенциала.

$$\begin{split} \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{u}) &= 0, \qquad \frac{\partial\rho\vec{u}}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{u}\vec{u}) = -\nabla p - \rho\nabla(\Phi), \\ \frac{\partial\rho E}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho E\vec{u}) &= -\nabla\cdot(p\vec{u}) - (\rho\nabla(\Phi),\vec{u}), \qquad \frac{\partial\rho\varepsilon}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\varepsilon\vec{u}) = -(\gamma-1)\rho\varepsilon\nabla\cdot\vec{u}, \\ \rho E &= \frac{1}{2}\rho\vec{u}^2 + \rho\varepsilon, \qquad p = (\gamma-1)\rho\varepsilon, \qquad \Delta\Phi = 4\pi G\rho, \end{split}$$

где p – давление газа,  $\rho$  – плотность газа,  $\vec{u}$  – скорость газа, E – плотность полной механической энергии газа,  $\Phi$  – гравитационный потенциал,  $\varepsilon$  – плотность внутренней энергии газа,  $\gamma$  – показатель адиабаты. Описана операция приведения уравнений к безразмерной форме. Сформулированы начальные и граничные условия. Сформулированы основные законы сохранения, а также коррекция численного решения, гарантирующая неубывание энтропии, состоящая в двух преобразованиях:

1. Коррекция внутренней энергии (или энтропии) в области с основной плотностью газа:

$$\rho \varepsilon = \left(\rho E - \frac{\rho \vec{u}^2}{2}\right), \frac{\rho}{\rho_{\max}} > 10^{-5}.$$

2. Коррекция длины вектора скорости в области разреженного газа (граница газвакуум):

$$|\vec{u}| = \sqrt{\frac{2(\rho E - \rho \varepsilon)}{\rho}}, \frac{\rho}{\rho_{\max}} \le 10^{-5}.$$

В области малой плотности используется второй подход, так как в ней отсутствуют проблемы с падением энтропии. В основной области используется первый подход, который при выпуклости уравнения состояния для энтропии, что имеет место для идеального газа, гарантирует ее неубывание. Формулировка уравнений гравитационной газовой динамики расширены на уравнения многокомпонентной односкоростной газовой динамики для учета химической эволюции газовой компоненты астрофизических объектов, а также уравнения сформулированы с учетом космологического расширения за счет темной энергии. В этом случае координаты пересчитываются в виде x = ar, где r – исходные координаты, a = 1/(1 + z) – параметр расширения, который вычисляется из уравнения Эйнштейна:

$$\frac{da}{dt} = H\sqrt{\Omega_M \left(a^{-1} - 1\right) + \Omega_\Lambda \left(a^2 - 1\right) + 1},$$

где  $\Omega_M = \Omega_B + \Omega_D$  – доля материи в общей массе,  $\Omega_B$  – доля видимой барионной материи (газа и звезд),  $\Omega_D$  – доля темной материи,  $\Omega_{\Lambda}$  – доля темной энергии,  $H = \dot{a}/a$ – постоянная Хаббла, z – параметр красного смещения. В этом случае мы рассматриваем специфичную плотность  $\rho_c \equiv \rho a^3$  и скорость  $\vec{u}_c = a\vec{u}$ .

В *разделе 2.2* (Магнитно-газодинамическая модель) приведено расширение уравнений газовой динамики для учета магнитного поля. Сформулированы основные законы сохранения, а также коррекция численного решения, гарантирующая неубывание энтропии. Процедура коррекции решения уравнений магнитной газовой динамики является расширением такой процедуры для газодинамических уравнений. Формулировка уравнений гравитационной магнитной газовой динамики обобщена на случай космологического расширения.

В *разделе 2.3* (Бесстолкновительная модель) приведены модели для описания бесстолкновительных компонент астрономических объектов. В работе рассматривается модель N-тел, которая используется для описания бесстолкновительной компоненты в задач об эволюции протопланетных дисков, гидродинамическая модель, основанная на уравнениях газовой динамики с нулевым давлением, и модель, основанная на уравнениях для первых моментов бесстолкновительного уравнения Больцмана, дополненная уравнением Пуассона, в декартовых координатах имеют следующий вид.

$$\begin{split} \frac{\partial n}{\partial t} &+ \frac{\partial nv_k}{\partial x_k} = 0, \qquad \frac{\partial nv_i}{\partial t} + \frac{\partial nv_iv_k}{\partial x_k} = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} - na_i, \\ \frac{\partial nW_{ij}}{\partial t} &+ \frac{\partial nE_{ij}v_k}{\partial x_k} = -\frac{\partial (\Pi_{jk}v_i + \Pi_{ik}v_j)}{\partial x_k} - nv_ia_j - nv_ja_i, \\ \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial t} &+ \frac{\partial \Pi_{ij}v_k}{\partial x_k} = -\Pi_{jk}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \Pi_{ik}\frac{\partial v_j}{\partial x_k}, \\ a_i &= \frac{\partial (\Phi)}{\partial x_i}, \qquad \Delta \Phi = 4\pi Gn, \qquad nW_{ij} = \Pi_{ij} + nv_iv_j, \end{split}$$

где n – плотность бесстолкновительной компоненты,  $\Pi_{ij}$  – симметричный тензор дисперсии скоростей,  $\vec{v}$  – вектор скорости,  $nW_{ij}$  – тензор полной энергии,  $\Phi$  – гравитационный потенциал. Сформулированы начальные и граничные условия. Сформулированы основные законы сохранения, а также коррекция численного решения, гарантирующая неубывание энтропии. Процедура коррекции решения уравнений для первых моментов бесстолкновительного уравнения Больцмана является расширением такой процедуры для газодинамических уравнений. Формулировка уравнений обобщена на случай космологического расширения. Также проведено сравнение бесстолкноительных моделей на задаче столкновения двух волн плотности. Отметим, что бесстолкновительная модель, основанная на уравнениях для первых моментов бесстолкновительного уравнения Больцмана, позволяет термодинамически согласовано описать процессы фазовых переходов (звездообразование и эффекты от взрыва сверхновых звезд).

В *paзделе 2.4* (Модель подсеточной физики) описана модель подсеточных физических процессов, включающая самосогласованную химокинетическую модель, процесс звездообразования и эффект от взрыва сверхновых звезд, охлаждение и нагревание газа. Подсеточные процессы включены в виде правых частей в законы сохранения. В рамках модели химической кинетики рассмотрены три модели на разных масштабах: примордиальная химокинетика основных форм водорода и гелия на космологических масштабах, модель химокинетики водорода на пыли с учетом ионизации на масштабах межзвездной среды, и аналитическую модель образования молекулярного водорода на галактических масштабах. Сформулировано правило для вычисления эффективного показателя адиабаты.

В разделе 2.5 сформулированы основные выводы по второй главе.

В Главе 3 (Численные схемы для моделирования процессов гравитационной гидродинамики) описан численный метод решения уравнений гравитационной гидродинамики, его верификация на тестовых задачах и параллельная реализация на различных типах суперЭВМ. В основе численного метода лежит метод разделения операторов, в котором исходные уравнения расщепляются на эйлеров и лагранжев этап. На эйлеровом этапе происходит учет работы сил, а на лагранжевом этапе происходит адвективный перенос гидродинамических величин. В основе решения каждого этапа лежит комбинация метода Годунова со специальной модификацией осреднения Рое и кусочно-параболический метода на локальном шаблоне, обеспечивающего высокий порядок точности на гладких решениях и малую диссипацию решения в области разрывов. Геометрическая декомпозиция области используется в основе параллельной реализации.

В *разделе 3.1* (Метод разделения операторов для решения уравнений в эйлеровых координатах) описан численный метод решения уравнений гидродинамики (газовая динамика, магнитная газовая динамика, уравнения для первых моментов бесстолк-

новительного уравнения Больцмана). В основе метода разделения операторов лежит схема разделения решения по физическим процессам: работа сил и адвективный перенос. Формально такое разделение можно записать в виде рассмотрения общего вида системы уравнений:

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \mathcal{U} \vec{u} \right) = \mathcal{F} \left( \mathcal{U}, \nabla \mathcal{U} \right),$$

где  $\mathcal{U}$  – вектор гидродинамических консервативных переменных,  $\mathcal{F}$  – работа поля сил,  $\vec{u}$  – вектор скорости. Такое уравнение является гиперболическим и расщепляется на два гиперболических уравнения:

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} = \mathcal{F}(\mathcal{U}, \nabla \mathcal{U}), \qquad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathcal{U}\vec{u}) = 0.$$

Для уравнений на каждом этапе используется численные схемы вида:

$$\frac{\mathcal{U}_{i}^{n+1/2} - \mathcal{U}_{i}^{n}}{\tau} = \frac{F_{i+1/2} - F_{i-1/2}}{h}, \qquad \frac{\mathcal{U}_{i}^{n+1} - \mathcal{U}_{i}^{n+1/2}}{\tau} + \frac{G_{i+1/2} - G_{i-1/2}}{h} = 0,$$

где F – поток вектора гидродинамических величин  $\mathcal{U}$  на эйлеровом этапе, G – поток вектора гидродинамических величин  $\mathcal{U}$  со скоростью  $\vec{u}$ . Для определения потоков будет использоваться метод Годуновского типа. Для определения потоков будем рассматривать линеаризованный одномерный вариант уравнений на каждом этапе:

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \mathcal{B}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} = 0,$$

где  $\mathcal{B} = -\partial F/\partial \mathcal{U}$  или  $\mathcal{B} = -\partial G/\partial \mathcal{U}$  в зависимости от этапа численного метода. Далее рассмотрим интерфейс между левой L и правой R ячейками, в которых построены кусочно-параболические функции. Используя эти значения определим матрицу  $\mathcal{B}$  с помощью модификации осреднения Рое, где вместо среднегеометрического осреднения плотности используется среднеарифметическое значение. Так как система гиперболическая, то матрицу  $\mathcal{B}$  можно представить в виде разложения по левым  $\mathcal{L}$  и правым  $\mathcal{R}$  собственным векторам, где  $\mathcal{LR} = \mathcal{RL} = I$  и  $\mathcal{B} = \mathcal{R}\Lambda\mathcal{L}$ . С учетом такого разложения линеаризованное уравнение можно переписать в виде:

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \mathcal{R}\Lambda \mathcal{L}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} = 0.$$

Домножим последнее уравнение слева на матрицу  $\mathcal{L}$  и произведя замену  $\mathcal{W} = \mathcal{L}\mathcal{U}$ , получим набор уравнений переноса вида:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x} = 0.$$

Нас интересует решение только на интерфейсе между ячейками на некотором шаге au, которое записывается как:

$$\mathcal{W}^{k}(\tau) = \mathcal{W}^{k}_{0}(-\tau\lambda_{k}) = \begin{cases} \mathcal{W}^{k,L}_{0}(-\tau\lambda_{k}), \lambda_{k} < 0\\ \mathcal{W}^{k,R}_{0}(-\tau\lambda_{k}), \lambda_{k} > 0 \end{cases}$$

где  $\lambda_k$  – собственное число матрицы  $\mathcal{B}$ , нулевым индексом обозначено начальное условие, которое представляется в виде кусочно-параболической функции в каждой ячейке по каждому направлению. Произведя обратную замену  $\mathcal{U} = \mathcal{RW}$  получим решение задачи Римана для определения потоков  $F_{i\pm 1/2}$  и  $G_{i\pm 1/2}$  через границы. Для интегрирования по времени используется схема первого порядка или схема Рунге-Кутта 4-го порядка точности. После эйлерова и лагранжева этапов осуществляется коррекция численного решения.

В *разделе 3.2* (Метод решения уравнения Пуассона) описан метод решения уравнения Пуассона. Метод основан на представлении правой части в виде суперпозиции по собственным функциям оператора Лапласа, для этого используется процедура прямого быстрого преобразования Фурье, затем происходит решение уравнения Пуассона в пространстве гармоник, после чего осуществляется обратное быстрое преобразование Фурье решения. Для постановки краевых условий используются первые моменты мультипольного разложения.

В разделе 3.3 (Верификация численных методов) приведено тестирование численных методов. На одномерных задачах об ударной трубе показана возможность численного метода решения газодинамических уравнений корректно воспроизводить все виды волн, в том числе сильные ударные волны. Показано, что в стандартном тесте Сода ударная волна при использовании кусочно-параболического представления решения размазывается на две ячейки, в то время как при использовании кусочнопостоянного решения на десять ячеек. На задаче Аксенова, имеющей бесконечно дифференцируемое гладкое решение, исследован порядок точности численного метода при использовании кусочно-параболического представления решения. На этой задаче был достигнут 1.713 порядок точности. Таким образом, экспериментально доказано, что численный метод имеет высокий порядок точности на гладких решениях и малую диссипацию решения в области разрывов. На одномерной задаче Погорелова о распаде МГД разрыва, в которой существуют все виды волн, верифицирован метод решения уравнений магнитной газовой динамики. Для верификации метода решения уравнений для первых моментов бесстолкновительного уравнения Больцмана была также использована задача о распаде разрыва. На двумерных задачах развития

неустойчивостей Кельвина-Гельмгольца и Релея-Тейлора показана возможность численного метода воспроизводить подобные виды неустойчивостей без их подавления. На задачах о сверхзвуковом потоке в туннеле со ступенью и о двойном маховском отражении сильной ударной волны продемонстрирована возможность метода моделировать течения с большим числом Маха. На задаче Орзага-Танга экспериментально подтверждена возможность метода решения МГД уравнений моделировать переход к сверхзвуковым турбулентным течениям. В трехмерной и постановке была решена задача Седова о точечном взрыве, которая является стандартным тестом, проверяюцим способность метода воспроизводить сильные ударные волны с очень большими числами Маха. Для тестирования решения уравнений гравитационной газовой динамики была решена задача о получении равновесных вращающихся конфигураций. С увеличением угловой скорости самогравитирующий газовый шар принимает форму эллипсоида с длинами полуосей, аппроксимируемыми следующими выражениями:

$$r_x(\omega) = 2.3510^{-3}e^{\frac{\omega}{0.15736}} + 1.18171, \qquad r_z(\omega) = 2.5210^{-3}e^{\frac{\omega}{0.17686}} + 1.03146$$

где  $\omega$  – угловая скорость вращения. Решены задачи столкновения самогравитирующих газовых сфер в различных конфигурациях. На аналитическом решении был верифицирован метод решения уравнения Пуассона.

В разделе 3.4 (Параллельная реализация численного метода) изложена схема параллельной реализации метода и исследование ее производительности. В силу описания всех компонент астрофизических объектов с помощью гиперболических систем уравнений и построения единого численного метода для их разрешения в основе параллельной реализации может быть использована схема произвольной геометрической декомпозиции области. Для классических архитектур суперкомпьютеров использовалась декомпозиция области по одному направлению. Необходимо отметить, что при использовании кусочно-параболического метода на локальном шаблоне для перекрытия используется только один слой ячеек. В случае использования гибридных суперЭВМ с графическими ускорителями использовалась одномерная декомпозиция области по процессорным элементам и двумерная декомпозиция в рамках графического ускорителя. При использовании гибридных суперЭВМ с ускорителями Intel Xeon Phi использовалась также одномерная декомпозиция области по процессорным элементам и многопоточное распределение задач между ядрами ускорителя. В случае использования классической архитектуры суперкомпьютера ССКЦ СО РАН была достигнута 93 % эффективность при использовании 768 вычислительных

ядер. При использовании гибридного суперЭВМ, оснащенного графическими картами, было достигнуто 55-кратное ускорение и 96 % эффективность на 60 графических картах. В случае использования гибридных суперЭВМ с ускорителями Intel Xeon Phi было достигнуто 134-кратное ускорение и 75 % эффективность при использовании 224 ускорителей Intel Xeon Phi. С помощью имитационного моделирования показана масштабируемость реализации до одного миллиона ускорителей, что соответствует экзафлопсному уровню производительности. Для быстрого преобразования Фурье использовалась библиотека FFTW.

В разделе 3.5 сформулированы основные выводы по третьей главе.

В **Главе 4** (Моделирование гидродинамических процессов в самосогласованном гравитационном поле) описаны результаты моделирования гидродинамических процессов, начиная от крупно-масштабных объектов (космологические структуры), заканчивая объектами масштаба протопланетного диска.

В *разделе 4.1* (Моделирование динамики крупномасштабных космологических структур) представлены результаты по моделированию крупно-масштабных космологических структур. В рамках двухфазной многокомпонентной гидродинамической модели с учетом космологического расширения и подсеточных процессов было смоделировано образование космологических структур – волос (филаменты в зарубежной литературе), стен (блины Я.Б. Зельдовича в российской литературе), скоплений (кластеры в зарубежной литературе) галактик, пустот (войды в зарубежной литературе). Смоделирована эволюция и столкновение в МГД модели скоплений галактик. В результате вычислительного эксперимента было показано качественное соответствие структуры смоделированных галактик и расстояний между ними с наблюдаемыми значениями.

В *разделе 4.2* (Моделирование динамики галактических структур) приведены результаты по моделированию эволюции взаимодействия галактик. Объяснен механизм образования спиральных неустойчивостей в галактическом диске в модели изотермической гидродинамики, приводящий к образованию многорукавных галактик (двух-, четырех- и семирукавная структура) в ходе развития гравитационной неустойчивости. Определены параметры для образования каждого вида галактик. Таким образом, разработанная вычислительная модель и метод для ее разрешения ведет себя в соответствии с теоретическими оценками по этой задаче: системы с меньшим соотношением массы диска к массе Гало дают большее число рукавов, что имеет большое

значение для изучения наблюдаемых неосесимметричных структур в дисковых галактиках. Приведены результаты по моделированию в полной гидродинамической модели сценариев столкновения галактик, которые подтвердили основанную на наблюдательных данных теоретическую гипотезу зависимости исхода взаимодействия галактик от скорости в момент столкновения. Были также решены задачи образования хвостов галактик в газодинамической, магнитно-газодинамической и полной двухфазной постановке при их взаимодействии с другими галактиками и межгалактическим газом.

В разделе 4.3 (Моделирование динамики молекулярных облаков и межзвездной среды) приведены результаты по исследованию образованию, эволюции и коллапса молекулярных облаков в межзвездной среде. Были исследованы задачи коллапса молекулярных облаков в различных режимах, на которых было продемонстрировано преимущество разработанного в диссертации метода над лагранжевыми методами при воспроизведении высоких градиентов решения. Смоделирован сценарий образования полярных течений при коллапсе молекулярных облаков в МГД модели. Исследована задача образования молекулярных облаков в ходе развития МГД турбулентности. Было показано, что для альфвеновского числа Маха прослеживается корреляция  $\mathcal{M} \sim n^2$  и большая часть облака n > 10 см<sup>-3</sup> попадают в сверхальфвеновскую область. Причина возникновения такого режима связано с самоорганизацией в замагниченной турбулентной межзвездной среде в трансальфеновском режиме  $\mathcal{M} \sim 1$  при  $n \sim 1$ . При таких плотностях контуры косинуса угла колинеарности между векторами скорости и магнитного поля образуют седловидную структуру, что говорит о том, что сжатие происходит вдоль силовых линий магнитного поля. Затем за счёт влияния самогравитации происходит дальнейшее увеличение массы и плотности облаков. В свою очередь в полученных плотных облаках турбулентность является только сверхальфвеновской с числом Maxa  $\mathcal{M} > 100$ .

В *разделе* 4.4 (Моделирование образования протопланетного диска) исследован один из сценариев эволюции протопланетной системы на ранней и поздней стадии. На ранней стадии смоделирован механизм образования однопланетной системы вследствие эволюции плотного пылевого кольца. На поздней стадии рассматривалась эволюция несколько сформированных планетезималей, в ходе которой было образовано три объекта высокой плотности, которые можно интерпретировать в качестве потенциальных протопланет. Кроме этого в ходе моделирования за счет самоорганизации была получена область разрежения рядом со звездой. Она образовалась в резуль-

тате влияния звездного ветра, из-за которого часть вещества была выброшена во внешнюю часть диска. Это, в частности, является одной из причин невозможности образования газовых гигантов вблизи звезды.

В разделе 4.5 сформулированы основные выводы по четвертой главе.

В Заключении диссертации сформулированы основные выводы и основные результаты диссертации.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ Монография:

 Годунов С.К., Киселев С.П., Куликов И.М., Мали В.И. Моделирование ударноволновых процессов в упругопластических материалах на различных (атомный, мезо и термодинамический) структурных уровнях. – Москва, Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований. – 2014. – 296 С.

Публикации в изданиях, индексируемых "Web of Science", Scopus и NASA ADS:

- Kulikov I. GPUPEGAS: A New GPU-accelerated Hydrodynamic Code for Numerical Simulations of Interacting Galaxies // The Astrophysical Journal Supplements Series.
   2014. - V. 214, I. 1. - Article Number 12.
- Kulikov I.M., Chernykh I.G., Snytnikov A.V., Glinskiy B.M., Tutukov A.V. AstroPhi: A code for complex simulation of dynamics of astrophysical objects using hybrid supercomputers // Computer Physics Communications. - 2015. - V. 186. - P. 71-80.
- Kulikov I., Vorobyov E. Using the PPML approach for constructing a low-dissipation, operator-splitting scheme for numerical simulations of hydrodynamic flows // Journal of Computational Physics. - 2016. - V. 317. - P. 318-346.
- Kulikov I., Chernykh I., Snytnikov A., Protasov V., Tutukov A., Glinsky B. Numerical Modelling of Astrophysical Flow on Hybrid Architecture Supercomputers // In Parallel Programming: Practical Aspects, Models and Current Limitations (ed. M. Tarkov). - 2014. - P. 71-116.
- Kulikov I. PEGAS: Hydrodynamical code for numerical simulation of the gas components of interacting galaxies // Book Series of the Argentine Astronomical Society. - 2013. - V. 4. - P. 91-95.

- Vshivkov V., Lazareva G., Snytnikov A., Kulikov I., Tutukov A. Hydrodynamical code for numerical simulation of the gas components of colliding galaxies // The Astrophysical Journal Supplement Series. - 2011. - V. 194, I. 2. - Article Number 47.
- Vshivkov V., Lazareva G., Snytnikov A., Kulikov I., Tutukov A. Computational methods for ill-posed problems of gravitational gasodynamics // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. - 2011. - V. 19. - P. 151-166.
- Тутуков А.В., Лазарева Г.Г., Куликов И.М. Газодинамика центрального столкновения двух галактик: слияние, разрушение, пролет, образование новой галактики // Астрономический журнал. – 2011. – Т. 88, №9. – С. 837-851.
- Godunov S., Kulikov I. Computation of Discontinuous Solutions of Fluid Dynamics Equations with Entropy Nondecrease Guarantee // Computational Mathematics and Mathematical Physics. - 2014. - V. 54, I. 6. - P. 1012-1024.
- Годунов С.К., Киселев С.П., Куликов И.М., Мали В.И. Численное и экспериментальное моделирование образования волн при сварке взрывом // Труды Математического Института им. В.А. Стеклова. – 2013. – Т. 281. – С. 16 - 31.
- Kulikov I., Lazareva G., Snytnikov A., Vshivkov V. Supercomputer Simulation of an Astrophysical Object Collapse by the Fluids-in-Cell Method // Lecture Notes in Computer Science. - 2009. - V. 5698. - P. 414-422.
- Вшивков В.А., Лазарева Г.Г., Куликов И.М. Модификация метода крупных частиц для задач гравитационной газовой динамики. // Автометрия. – 2007. – Т. 43, Вып. 6. – С. 56-65.
- Вшивков В.А., Лазарева Г.Г., Киреев С.Е., Куликов И.М. Параллельная реализация модели газовой компоненты самогравитирующего протопланетного диска на суперЭВМ // Вычислительные технологии. – 2007. – Т. 12, Вып. 3. – С. 38-52.
- Вшивков В.А., Лазарева Г.Г., Куликов И.М. Операторный подход для численного моделирования гравитационных задач газовой динамики // Вычислительные технологии. – 2006. – Т. 11, Вып. 3. – С. 27-35.

- Kulikov I., Chernykh I. Glinskiy B., Weins D., Shmelev A. Astrophysics simulation on RSC massively parallel architecture // Proceedings - 2015 IEEE/ACM 15th International Symposium on Cluster, Cloud, and Grid Computing, CCGrid 2015. – 2015. – P. 1131-1134
- Protasov V., Serenko A., Nenashev V., Kulikov I., Chernykh I. High-Performance Computing in Astrophysical Simulations // Journal of Physics: Conference Series. - 2016. - V. 681. - Article Number 012022.
- Kulikov I., Chernykh I., Tutukov A. A New Hydrodynamic Model for Numerical Simulation of Interacting Galaxies on Intel Xeon Phi Supercomputers // Journal of Physics: Conference Series. - 2016. - V. 719. - Article Number 012006.
- Kulikov I., Chernykh I., Protasov V. Mathematical modeling of formation, evolution and interaction of galaxies in cosmological context // Journal of Physics: Conference Series. - 2016. - V. 722. - Article Number 012023.
- Kulikov I., Chernykh I., Nenashev V., Katysheva E. Numerical modeling of interacting galaxies on Intel Xeon Phi supercomputers // CEUR Workshop Proceedings. - 2015. - V. 1482. - P. 226-237.
- Glinskiy B., Kulikov I., Snytnikov A., Chernykh I., Weins D. A multilevel approach to algorithm and software design for exaflops supercomputers // CEUR Workshop Proceedings. - 2015. - V. 1482. - P. 4-16.

Публикации в изданиях из списка ВАК:

- Куликов И.М., Черных И.Г., Глинский Б.М. AstroPhi: программный комплекс для моделирования динамики астрофизических объектов на гибридных супер-ЭВМ, оснащенных ускорителями Intel Xeon Phi // Вестник Южно-Уральского Государственного Университета. Серия: Вычислительная математика и информатика. – 2013. – Т. 2, Вып. 4. – С. 57-79.
- Протасов В.А., Куликов И.М. РАDME новый код для моделирования процесса формирования георесурсов планет на гетерогенных вычислительных системах // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. – 2015. – Т. 326, Вып. 8. –- С. 61-70.

- Вшивков В.А., Лазарева Г.Г., Киреев С.Е., Куликов И.М. Численное решение трехмерных задач динамики самогравитирующих многофазных систем // Научный вестник НГТУ. – 2011. – Вып. 3 (44). – С. 69-80.
- Лазарева Г.Г., Куликов И.М., Вшивков В.А., Кошкарова Е.А., Берендеев Е.А., Горр М.Б., Антонова М.С. Параллельная реализация численной модели столкновения галактик // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. – 2011. – Т. 9., Вып. 4. – С. 71-78.

Результаты интеллектуальной деятельности по теме диссертации:

- Программа для численного решения уравнений магнитной газовой динамики в трехмерной постановке на суперЭВМ, свидетельство 2016617832 от 14 июля 2016 г.
- 2. Программа для моделирования динамики трехмерных астрофизических газовых объектов, свидетельство 2013611678 от 19 апреля 2013 г.
- Программа для решения нестационарных задач акустики в трехмерной постановке на гибридных суперЭВМ, свидетельство 2012618663 от 21 сентября 2012 г.
- Программный пакет для решения задач гравитационной газовой динамики PE-GAS, свидетельство 2012617347 от 15 июня 2012 г.

# 1 Моделирование упруго-пластических деформаций

Настоящая глава посвящена моделированию упруго-пластических деформаций с помощью уравнений теории упругости и максвелловских релаксаций. Выбирая модельные задачи, мы стремились, на основе наблюдения за рассчитываемыми процессами, выработать представление о том, какие обстоятельства приводят к волнообразованию при сварке взрывом металлических пластин. Эта проблема была поставлена М.А. Лаврентьевым ещё в 60-х годах прошлого века. Главной целью работы является формулировка общего вида уравнения состояния для упруго-пластических деформаций с учетом фазовых переходов и его корректности.

#### 1.1 Упруго-пластическая модель

#### 1.1.1 Уравнения нелинейной теории упругости

Напряженное состояние упругой среды зависит от деформации, которой эта среда подвергалась и от её теплового состояния, описываемого термодинамической переменной (температурой или энтропией S). Для определения напряжений по заданным деформациям используется уравнение состояния среды с энергетическими затратами, потребными для осуществления этих деформаций. Деформация описывается при помощи отображения координат

$$x^{i} = x^{i} \left(\xi^{1}, \xi^{2}, \xi^{3}, t\right)$$

составляющих среду материальных точек из "начального" состояния в продеформированное. Начальные координаты  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$  носят название лагранжевых. Возникшее при деформации искажение координатной сетки задаётся так называемой матрицей дисторсии *C* 

$$C_j^i = \frac{\partial x^i \left(\xi^1, \xi^2, \xi^3\right)}{\partial \xi^j}$$

то есть якобианом отображения  $x^i$  ( $\xi^1, \xi^2, \xi^3$ ). Для вычислений нам удобно рассматривать сингулярный вид матрицы дисторсии. Выполним в какой-либо точке нашей среды в рассматриваемый момент времени сингулярное разложение для матрицы C:

$$C = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_1^2 & u_1^3 \\ u_2^1 & u_2^2 & u_2^3 \\ u_3^1 & u_3^2 & u_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 & v_1^2 & v_1^3 \\ v_2^1 & v_2^2 & v_2^3 \\ v_3^1 & v_3^2 & v_3^3 \end{pmatrix} = UKV^T, (UU^T = VV^T = I)$$

Мы будем использовать такой вид далее. Уравнение состояние среды – это выражение зависимости внутренней энергии E (на единицу объёма и  $\rho_0 E$  на единицу массы), от тензора деформации C и от термодинамического параметра (энтропии)  $E(C,S) = E(C_j^i,S)$ . При адиабатическом (dS = 0) изменении полный дифференциал матрицы дисторсии есть:

$$dE(C,S) = E_{C_j^i} dC_j^i = E_{C_j^i} d\left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}\right)$$

Из которой следует формула Мурнагана для тензора напряжений Пиола-Кирхгофа:

$$\pi_i^j = E_{C_i^j}$$

Если среда изотропная, а именно такие среды мы и будем рассматривать, то энергетические затраты на деформацию можно выразить через инварианты симметрической матрицы  $CC^T$ , которой присваивается название тензор деформации. Такая форма позволяет сформулировать общий вид уравнения состояния для моделирования широкого круга упруго-пластических сред. Для формулировки и исследования уравнения состояния нам оказалось удобнее использовать вместо матрицы  $CC^T$  её квадратный корень  $\sqrt{CC^T}$ . В этом случае уравнение состояния мы можем записать в виде:

$$E(C,S) = E\left(\sqrt{CC^T},S\right)$$

В этом случае матрица  $\sqrt{CC^{T}}$  может быть представлена в виде:

$$\sqrt{CC^T} = \sqrt{UKV^T VKU^T} = \sqrt{UKKU^T} = \sqrt{UK(UK)^T} = UKU^T$$

Тензор напряжений вычисляется по формуле:

$$\pi = E_C = E \left( CC^T, S \right)_C = E_{CC^T} \left( CC^T \right)_C = U E_K K^{-1} U^T U K V^T = U E_K V^T$$

Стоит отметить, что при изучении вращений системы координат тензор  $\sqrt{CC^T}$ удобно представить в виде шарового тензора Q и девиатора (тензора с нулевым следом)  $\mathcal{D}$ :

$$\sqrt{CC^T} = \frac{1}{3} tr \sqrt{CC^T} I_3 + \sqrt{CC^T} - \frac{1}{3} tr \sqrt{CC^T} I_3 = \mathcal{Q} + \mathcal{D}$$

где

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{3} tr \sqrt{CC^T} I_3$$
$$\mathcal{D} = \sqrt{CC^T} - \frac{1}{3} tr \sqrt{CC^T} I_3$$

след матрицы  $p = \frac{1}{3} tr \sqrt{CC^T}$  может быть записан в двух видах:

$$p = \frac{s_{11} + s_{22} + s_{33}}{3} = \frac{k_1 + k_2 + k_3}{3}$$

Девиатор  $\mathcal{D}$  в этом случае записывается в виде:

$$\mathcal{D} = U \begin{pmatrix} k_1 - \frac{k_1 + k_2 + k_3}{3} & 0 & 0 \\ 0 & k_2 - \frac{k_1 + k_2 + k_3}{3} & 0 \\ 0 & 0 & k_3 - \frac{k_1 + k_2 + k_3}{3} \end{pmatrix} U^T$$

Для описания матрицы  $\mathcal{D}$  мы можем использовать пятимерный вектор

$$\vec{s} = (s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, s_2)^T = \left(-\sqrt{2}s_{13}, \sqrt{2}s_{12}, \sqrt{\frac{3}{2}\frac{2s_{22} - s_{11} - s_{33}}{3}}, \sqrt{2}s_{23}, \frac{s_{11} - s_{33}}{\sqrt{2}}\right)^T$$

удовлетворяющий условию:

$$s_{-2}^{2} + s_{-1}^{2} + s_{0}^{2} + s_{1}^{2} + s_{2}^{2} = \frac{2}{3} \left( k_{1}^{2} + k_{2}^{2} + k_{3}^{2} - k_{1}k_{2} - k_{1}k_{3} - k_{2}k_{3} \right)$$

В этом случае матрица девиатора  ${\cal D}$  может быть записана через элементы вектора  $ec{s}$ 

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} s_2 - \frac{\sqrt{6}}{2}s_0 & s_{-1} & s_{-2} \\ s_{-1} & \sqrt{3}s_0 & s_1 \\ s_{-2} & s_1 & s_2 - \frac{\sqrt{6}}{2}s_0 \end{pmatrix}$$

Уравнение состояния мы можем записать в двух видах, первый и которых формулируется через пятимерный вектор *s*:

$$E = E(C, S) = E^{(0)} \left( \det \sqrt{CC^T}, S \right) + E^{(1)} \left( \vec{s}, M \right) = E^{(0)} \left( \rho, S \right) + \vec{s}^T M \vec{s}$$

где матрица  $M = M^T$  – матрица, задающая кристаллическую структуру или какойлибо вид "доисторической" деформации. Второй вид уравнения состояния записывается напрямую через матрицу девиатора  $\mathcal{D}$ :

$$E = E(C, S) = E^{(0)} \left( \det \sqrt{CC^T}, S \right) + E^{(1)} \left( \vec{s}, M \right) = E^{(0)} \left( \rho, S \right) + tr \left( \mathcal{D}^T \mathcal{N} \mathcal{D} \right)$$

где матрица  $\mathcal{N} = \mathcal{N}^T$  – снова матрица, задающая кристаллическую структуру или какой-либо вид "доисторической" деформации. С помощью линейного преобразования  $\mathcal{R}$ :

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}u_1^1u_3^1 & -\sqrt{2}u_1^2u_3^2 & -\sqrt{2}u_1^3u_3^3 \\ \sqrt{2}u_1^1u_2^1 & -\sqrt{2}u_1^2u_2^2 & -\sqrt{2}u_1^3u_2^3 \\ \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{2u_2^1u_2^1 - u_1^1u_1^1 - u_3^1u_3^1}{3}\right) & \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{2u_2^2u_2^2 - u_1^2u_1^2 - u_3^2u_3^2}{3}\right) & \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{2u_2^3u_2^3 - u_1^3u_1^3 - u_3^3u_3^3}{3}\right) \\ \sqrt{2}u_2^1u_2^1 & -\sqrt{2}u_2^2u_2^2 & -\sqrt{2}u_2^3u_2^3 \\ \frac{u_1^1u_1^1 - u_3^1u_3^1}{\sqrt{2}} & \frac{u_1^2u_1^2 - u_3^2u_3^2}{\sqrt{2}} & \frac{u_1^3u_1^3 - u_3^3u_3^3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

вектор  $\vec{s}$  можно представить через сингулярные числа матрицы дисторсии

$$\vec{s} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \mathcal{R} \vec{k}$$

тогда уравнение состояния представимо в виде:

$$E = E(C, S) = E^{(0)}(\rho, S) + \left(\vec{k}^T, [\mathcal{R}^T M \mathcal{R}] \vec{k}\right)$$

или в поэлементном виде

$$E = E^{(0)}(\rho, S) + \left(k_j \mathcal{R}_j^p M_p^s \mathcal{R}_s^i k_i\right)$$

Решаемые уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^i}{\partial t} - \frac{\partial \pi^j_i}{\partial \xi^j} &= 0\\ \frac{\partial C^i_j}{\partial t} - \frac{\partial u^i}{\partial \xi^j} &= 0\\ \frac{\partial S}{\partial t} &= \frac{\tau_0^{-1} c_0 E_{c_0} + \tau_*^{-1} c_* E_{c_*} + \tau_1^{-1} c_1 E_{c_1}}{E_S}\\ \frac{\partial c_0}{\partial t} &= -\frac{c_0}{\tau_0}\\ \frac{\partial c_1}{\partial t} &= -\frac{c_1}{\tau_1}\\ \frac{\partial c_*}{\partial t} &= -\frac{c_*}{\tau_*} \end{aligned}$$

Домножив уравнения на  $u^i$ ,  $E_{C_i^j}$ ,  $E_S$ ,  $E_{c_0}$ ,  $E_{c_*}$ ,  $E_{c_1}$  соответственно получим закон сохранения полной энергии, который записывается в следующей форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u^i u_i}{2} + E \right) - \frac{\partial}{\partial \xi^j} \left( u^i \pi_i^j \right) = 0$$

#### 1.1.2 Уравнение состояния упругой среды

**Инварианты для описания уравнения состояния**. Будем также предполагать, что уравнение состояния  $E\left(\sqrt{CC^T}, S\right)$  зависит от некоторого набора функций  $\mathcal{J}_i$  – инвариантов. В качестве примера можно привести следующие инварианты:

$$\mathcal{J}_0 = det\left(\sqrt{CC^T}\right)$$
$$\mathcal{J}_1 = \frac{1}{3}tr\left(CC^T\right)$$

$$\mathcal{J}_2 = tr\left(CC^T\right) - \frac{1}{3}tr^2\left(\sqrt{CC^T}\right)$$
$$\mathcal{J}_3 = \frac{det\left(\sqrt{CC^T}\right)}{3}tr\left(CC^T\right)$$

этот список может быть продолжен. Однако мы остановимся на этих инвариантах. В наших математических моделях мы использовали более простой вид уравнения состояния вида и сделали три допущения:

- Будем предполагать аддитивность по инвариантам уравнения состояния. Это допущение вполне обосновано, так как каждый инвариант формулируется для описания определенного свойства упруго-пластического материала, а уравнение состояния в этом случае формулируется в виде суперпозиции рассматриваемых свойств. Такой подход был успешно апробирован в оригинальных работах [7, 8] и в работах других авторов [92].
- 2. Термодинамическую переменную S мы будем рассматривать отдельно и в качестве множителя к одному из инвариантов. Такая форма записи не умаляет сферу применения уравнения состояния, так как энтропийная переменная характеризует влияние от теплового состояния и связано прежде всего с изменением плотности упруго-пластической среды, которая описывается отдельным инвариантом.
- Будем рассматривать изотропную среду, а именно такие среды и представляют интерес. В этом случае энергетические затраты на деформацию можно выразить через инварианты симметричной матрицы CC<sup>T</sup>, которой присваивается название тензор деформации.

В наших расчетах будем использовать следующие виды уравнения состояния для каждой фазы. Уравнение состояния упругой среды записывается в виде:

$$E = \frac{c_0^2}{\gamma(\gamma - 1)} \sigma(S) \mathcal{J}_0^{-(\gamma - 1)} + \frac{c_*^2}{\gamma} \mathcal{J}_0 + \frac{2c_1^2}{3} \mathcal{J}_2$$

Уравнение состояния жидкой среды записывается в виде:

$$E = \frac{c_0^2}{\gamma(\gamma - 1)} \sigma(S) \mathcal{J}_3^{-(\gamma - 1)} + \frac{\rho_0 c_*^2}{\gamma} \mathcal{J}_3$$

Уравнение состояния газовой фазы примет вид:

$$E = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma(\gamma - 1)} \sigma(S) \mathcal{J}_3^{-(\gamma - 1)}$$

Далее подробно опишем переход между фазами и общий вид уравнения состояния для всей модели целиком. Условие корректности уравнения состояния. Для корректности уравнения состояния нам необходима положительная определенность матриц  $E_{C_j^i C_l^k}$ , а также неравенство  $E_{SS} > 0$ , которое формулируется как достаточно естественное условие.

Отметим тот факт, что уравнение состояния в независимости от формы используемых инвариантов есть функция от сингулярных чисел матрицы C:  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ . Тогда для исследования корректности уравнения состояния будем рассматривать  $E = E(k_1, k_2, k_3, S)$ . Напомним, что матрица C в какой-либо точке и некоторый момент времени может быть представлена в каноническом виде:

$$C = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_1^2 & u_1^3 \\ u_2^1 & u_2^2 & u_2^3 \\ u_3^1 & u_3^2 & u_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 & v_1^2 & v_1^3 \\ v_2^1 & v_2^2 & v_2^3 \\ v_3^1 & v_3^2 & v_3^3 \end{pmatrix} = UKV^T, (UU^T = VV^T = I)$$

Очевидно, что близкие к матрице C матрицы  $\tilde{C}$  допускают представление с достаточно малыми элементами  $\gamma_i^j$  несимметричной матрицы Г:

$$\tilde{C} = U \begin{pmatrix} \gamma_1^1 + k_1 & \gamma_1^2 & \gamma_1^3 \\ \gamma_2^1 & \gamma_2^2 + k_2 & \gamma_2^3 \\ \gamma_3^1 & \gamma_3^2 & \gamma_3^3 + k_3 \end{pmatrix} V^T = U(K + \Gamma) V^T$$

с помощью тех же ортогональных преобразований U и V. Ранее мы предполагали, что E = E(C, S), то есть при фиксированном значении энтропийной переменной S имеет место  $E = E(k_1, k_2, k_3)$ . Очевидно, что  $E = E\left(\tilde{C}, S\right) = E\left(\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{k}_3, S\right)$ . Можно легко показать [8], что сингулярные числа  $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{k}_3$  матрицы  $\tilde{C}$  связаны с сингулярными числами матрицы C следующими соотношениями:

$$\tilde{k_1} = k_1 + \gamma_1^1 + \frac{1}{4} \frac{(\gamma_1^2 + \gamma_2^1)^2}{k_1 - k_2} + \frac{1}{4} \frac{(\gamma_1^2 - \gamma_2^1)^2}{k_1 + k_2} + \frac{1}{4} \frac{(\gamma_1^3 + \gamma_3^1)^2}{k_1 - k_3} + \frac{1}{4} \frac{(\gamma_1^3 - \gamma_3^1)^2}{k_1 + k_3} + \dots$$

$$\tilde{k_2} = k_2 + \gamma_2^2 + \frac{1}{4} \frac{(\gamma_2^1 + \gamma_1^2)^2}{k_2 - k_1} + \frac{1}{4} \frac{(\gamma_2^1 - \gamma_1^2)^2}{k_2 + k_1} + \frac{1}{4} \frac{(\gamma_2^3 + \gamma_3^2)^2}{k_2 - k_3} + \frac{1}{4} \frac{(\gamma_2^3 - \gamma_3^2)^2}{k_2 + k_3} + \dots$$

$$\tilde{k_3} = k_3 + \gamma_3^3 + \frac{1}{4} \frac{(\gamma_3^1 + \gamma_1^3)^2}{k_3 - k_1} + \frac{1}{4} \frac{(\gamma_3^1 - \gamma_1^3)^2}{k_3 + k_1} + \frac{1}{4} \frac{(\gamma_3^2 + \gamma_2^3)^2}{k_3 - k_2} + \frac{1}{4} \frac{(\gamma_3^2 - \gamma_2^3)^2}{k_3 + k_2} + \dots$$

Из этих представлений вытекает равенство, которое определяет условия выпуклости уравнения состояния по аргументам  $\gamma_i^j$ :

$$E = E\left(\tilde{C}, S\right) = E\left(\tilde{k}_{1}, \tilde{k}_{2}, \tilde{k}_{3}\right) = E(k_{1}, k_{2}, k_{3}) + \sum_{i} \gamma_{i}^{i} E_{k_{i}} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} E_{k_{i}k_{j}} \gamma_{i}^{j} \gamma_{j}^{i} + \sum_{i \neq j} \left(\frac{E_{k_{i}} - E_{k_{j}}}{k_{i} - k_{j}} \left(\frac{\gamma_{i}^{j} + \gamma_{j}^{i}}{2}\right)^{2} + \frac{E_{k_{i}} + E_{k_{j}}}{k_{i} + k_{j}} \left(\frac{\gamma_{i}^{j} - \gamma_{j}^{i}}{2}\right)^{2}\right) + \dots$$

Таким образом, выпуклость изучаемого уравнения состояния совпадает с положительной определенностью квадратичной формы:

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j}E_{k_ik_j}\gamma_i^j\gamma_j^i + \sum_{i\neq j}\left(\frac{E_{k_i} - E_{k_j}}{k_i - k_j}\left(\frac{\gamma_i^j + \gamma_j^i}{2}\right)^2 + \frac{E_{k_i} + E_{k_j}}{k_i + k_j}\left(\frac{\gamma_i^j - \gamma_j^i}{2}\right)^2\right)$$

Введем обозначения:

$$E_{ij}^{-} = \frac{1}{2} \left( \frac{E_{k_i} - E_{k_j}}{k_i - k_j} - \frac{E_{k_i} + E_{k_j}}{k_i + k_j} \right), E_{ij}^{+} = \frac{1}{2} \left( \frac{E_{k_i} - E_{k_j}}{k_i - k_j} + \frac{E_{k_i} + E_{k_j}}{k_i + k_j} \right)$$

с помощью которых матрица квадратичной формы имеет следующий вид:

$$E_{\gamma_i^j \gamma_l^k} = \begin{pmatrix} E_{k_1k_1} & 0 & 0 & 0 & E_{k_1k_2} & 0 & 0 & 0 & E_{k_1k_3} \\ 0 & E_{12}^+ & 0 & E_{12}^- & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{13}^+ & 0 & 0 & 0 & E_{13}^- & 0 & 0 \\ 0 & E_{12}^- & 0 & E_{12}^+ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{k_1k_2} & 0 & 0 & 0 & E_{k_2k_2} & 0 & 0 & 0 & E_{k_2k_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{23}^+ & 0 & E_{23}^- & 0 \\ 0 & 0 & E_{13}^- & 0 & 0 & 0 & E_{13}^+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{23}^- & 0 & E_{23}^+ & 0 \\ E_{k_1k_3} & 0 & 0 & 0 & E_{k_2k_3} & 0 & 0 & 0 & E_{k_3k_3} \end{pmatrix}$$

Данная матрица простыми перестановками с помощью матрицы *Z*:

приводится к блочно-диагональному виду:

$$E_{\gamma_{i}^{j}\gamma_{l}^{k}} = \mathcal{Z} \begin{pmatrix} E_{k_{1}k_{1}} & E_{k_{1}k_{2}} & E_{k_{1}k_{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{k_{1}k_{2}} & E_{k_{2}k_{2}} & E_{k_{2}k_{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{k_{1}k_{3}} & E_{k_{2}k_{3}} & E_{k_{3}k_{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{12}^{+} & E_{12}^{-} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{12}^{-} & E_{12}^{+} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{23}^{+} & E_{23}^{-} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{23}^{+} & E_{23}^{-} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{13}^{+} & E_{13}^{-} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{13}^{+} & E_{13}^{-} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{13}^{+} & E_{13}^{+} \end{pmatrix}$$

Тогда условие корректности формулируется в виде следующей теоремы [8].

**Теорема о выпуклости уравнения состояния.** Для выпуклости уравнения состояния упругой среды E = E(C, S) как функции от элементов матрицы необходимо и достаточно, чтобы были положительно определенными матрицы:

$$\begin{pmatrix} E_{k_1k_1} & E_{k_1k_2} & E_{k_1k_3} \\ E_{k_1k_2} & E_{k_2k_2} & E_{k_2k_3} \\ E_{k_1k_3} & E_{k_2k_3} & E_{k_3k_3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_{ij}^+ & E_{ij}^- \\ E_{ji}^- & E_{ji}^+ \end{pmatrix}, i \neq j$$

где

$$E_{ij}^{-} = \frac{1}{2} \left( \frac{E_{k_i} - E_{k_j}}{k_i - k_j} - \frac{E_{k_i} + E_{k_j}}{k_i + k_j} \right), E_{ij}^{+} = \frac{1}{2} \left( \frac{E_{k_i} - E_{k_j}}{k_i - k_j} + \frac{E_{k_i} + E_{k_j}}{k_i + k_j} \right)$$

Стоит отметить, что мы здесь говорим только о положительной определенности, но ничего не говорим об обусловленности полученных матриц. Далее в рамках работы при построении уравнения состояния будем предполагать, что оно зависит от конечного числа функций – инвариантов от матрицы  $\sqrt{CC^T}$ . Это даёт нам возможность простого вычисления необходимых величиин и проверки применимости уравнения состояния.

#### 1.1.3 Упруго-пластическая модель фазового перехода

В результате вычислительных экспериментов с учетом фазовых переходов было сформулировано уравнение состояния вида:

$$E = (1 - \omega_0)\sigma(S) + \omega_0 (E_0 + \omega_* E_1 + \omega_1 E_2)$$

где

$$E_0 = \frac{c_0^2}{\gamma(\gamma - 1)} \sigma(S) \left[\omega_1 \mathcal{J}_0 + (1 - \omega_1) \mathcal{J}_3\right]^{-(\gamma - 1)}$$

$$E_1 = \frac{c_0^2}{\gamma} \left[ \omega_1 \mathcal{J}_0 + (1 - \omega_1) \mathcal{J}_3 \right]$$
$$E_2 = \frac{2c_1^2}{3} \mathcal{J}_2$$

где коэффициенты  $\omega_0, \omega_*, \omega_1$  – параметры релаксации для перехода к частицам, в газовую и жидкую фазу соответственно. Далее определим уравнения состояния для каждой фазы и запишем правило перехода между состояниями, что эквивалентно записи правил для параметров релаксации  $\tau_0, \tau_*, \tau_1$ .

Уравнение состояния упругой среды записывается в виде:

$$E = \frac{c_0^2}{\gamma(\gamma - 1)} \sigma(S) \mathcal{J}_0^{-(\gamma - 1)} + \frac{c_0^2}{\gamma} \mathcal{J}_0 + \frac{2c_1^2}{3} \mathcal{J}_2$$

Для формулировки условий корректности необходимо выписать явный вид  $\frac{E_{k_i}\pm E_{k_j}}{k_i\pm k_j}$ для каждого инварианта:

$$\mathcal{J}_{0,k_i}^{-(\gamma-1)} = \frac{(1-\gamma)}{k_i} (k_1 k_2 k_3)^{-(\gamma-1)}$$

$$\frac{\mathcal{J}_{0,k_i}^{-(\gamma-1)} - \mathcal{J}_{0,k_j}^{-(\gamma-1)}}{k_i - k_j} = (1 - \gamma)(k_1k_2k_3)^{-\gamma}k_l \qquad \frac{\mathcal{J}_{0,k_i}^{-(\gamma-1)} + \mathcal{J}_{0,k_j}^{-(\gamma-1)}}{k_i + k_j} = (\gamma - 1)(k_1k_2k_3)^{-\gamma}k_l$$
$$\mathcal{J}_{0,k_i} = k_jk_l \qquad \frac{\mathcal{J}_{0,k_i} - \mathcal{J}_{0,k_j}}{k_i - k_j} = -k_l \qquad \frac{\mathcal{J}_{0,k_i} + \mathcal{J}_{0,k_j}}{k_i + k_j} = k_l$$
$$\mathcal{J}_{2,k_i} = 2k_i - k_j - k_l \qquad \frac{\mathcal{J}_{2,k_i} - \mathcal{J}_{2,k_j}}{k_i - k_j} = 3 \qquad \frac{\mathcal{J}_{2,k_i} + \mathcal{J}_{0,k_j}}{k_i + k_j} = 1 - \frac{2k_l}{k_i + k_j}$$

В результате критерий корректности для упругой среды записывается в виде:

$$\max_{i} \left( \frac{1 - \frac{2\gamma c_1^2}{c_0^2 k_i}}{\left(k_1 k_2 k_3\right)^{-\gamma}} \right) < \sigma(S) < \min_{i} \left( \frac{1 + \frac{2\gamma c_1^2}{3c_0^2 k_i} \left(1 - \frac{2k_i}{k_j - k_l}\right)}{\left(k_1 k_2 k_3\right)^{-\gamma}} \right)$$

Уравнение состояния жидкой среды записывается в виде:

$$E = \frac{c_0^2}{\gamma(\gamma - 1)} \sigma(S) \left(\mathcal{J}_0 \mathcal{J}_1\right)^{-(\gamma - 1)} + \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \left(\mathcal{J}_0 \mathcal{J}_1\right)$$

В уравнении нельзя использовать только инвариант  $\mathcal{J}_0$ , так как это приведет к полному отсутствию корректности, поэтому будем использовать инвариант  $\mathcal{J}_3 = \mathcal{J}_0 \mathcal{J}_1$ для описания плотностного члена. Для формулировки условий корректности необходимо выписать явный вид  $\frac{E_{k_i} \pm E_{k_j}}{k_i \pm k_j}$  для каждого инварианта:

$$\mathcal{J}_{3,k_i}^{-(\gamma-1)} = \frac{(1-\gamma)k_jk_l(3k_i^2+k_j+k_l)}{3} \left(k_1k_2k_3\frac{k_1^2+k_2^2+k_3^2}{3}\right)^{-\gamma}$$
$$\frac{\mathcal{J}_{3,k_i}^{-(\gamma-1)} - \mathcal{J}_{3,k_j}^{-(\gamma-1)}}{k_i - k_j} = \frac{(\gamma-1)k_l(k_1^2+k_2^2+k_3^2-2k_ik_j)}{3} \left(k_1k_2k_3\frac{k_1^2+k_2^2+k_3^2}{3}\right)^{-\gamma}$$

$$\frac{\mathcal{J}_{3,k_i}^{-(\gamma-1)} + \mathcal{J}_{3,k_j}^{-(\gamma-1)}}{k_i + k_j} = \frac{(1-\gamma)k_l(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + 2k_ik_j)}{3} \left(k_1k_2k_3\frac{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}{3}\right)^{-\gamma}$$

Для жидкости корректность формулируется в виде одностороннего неравенства:

$$\sigma(S) < \min_{i} \left( \left( k_1 k_2 k_3 \frac{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}{3} \right)^{-\gamma} \right)$$

Уравнение состояния газовой фазы примет вид:

$$E = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma(\gamma - 1)} \sigma(S) \left(\mathcal{J}_0 \mathcal{J}_1\right)^{-(\gamma - 1)}$$

Для газовой фазы и в случае перехода на модель частиц условия корректности совпадают с естественными условиями на функцию энтропии  $\sigma(S) > 0$ . Моделирование откола осуществляется при достижении критического значения напряжения  $\pi_{cr}$ . Для полноты изложения запишем правила для параметров релаксации и обоснуем выбор таких правил.

В случае достижения малости девиаторного члена в уравнении состояния упругой среды, то есть при достижении триггера:

$$E_2 < 0.05 \times (E_1 + E_0)$$

будем запускать процесс релаксации в течение времени релаксации  $\tau_1 = 5$  мксек для исключения девиаторного члена и замены инварианта для описания откольного члена:

$$\omega_1 = \begin{cases} 1 & t < 0\\ 2(t/\tau_1)^3 - 2(t/\tau_1)^2 + 1 & 0 < t < \tau_1\\ 0 & t > \tau_1 \end{cases}$$

В случае достижения малости откольного члена в уравнении состояния жидкой среды, то есть при достижении триггера:

$$E_1 \leq 0.05 \times E_0$$

будем запускать процесс релаксации в течение времени релаксации  $au_* = 3$  мксек для исключения этого члена:

$$\omega_* = \begin{cases} 1 & t < 0\\ 2(t/\tau_*)^3 - 2(t/\tau_*)^2 + 1 & 0 < t < \tau_*\\ 0 & t > \tau_* \end{cases}$$

При достижении в точке критического значения напряжения  $\pi_{cr}$  в этой точке будем запускать процесс релаксации в течение времени релаксации  $\tau_* = 3$  мксек для перехода к частицам:

$$\omega_0 = \begin{cases} 1 & t < 0\\ 2(t/\tau_0)^3 - 2(t/\tau_0)^2 + 1 & 0 < t < \tau_0\\ 0 & t > \tau_0 \end{cases}$$

Это связано с моментальным выбросом частиц, что фактически является единственным разумным способом их описания в рамках данной модели.

# 1.2 Метод Годунова для решения уравнений в лагранжевых координатах

Для разрешения модели упруго-пластической среды помимо решения уравнений теории упругости необходимо использовать процедуру перемещения расчетной сетки. Таким образом, вычислительный алгоритм можно представить в виде следующих шагов, которые выполняются для каждой ячейки расчетной области:

- 1. сингулярное разложение матрицы дисторсии С,
- при достижении необходимых условий учет фазового перехода и формулировка уравнения состояния,
- 3. контроль корректности уравнения состояния,
- 4. решение задачи Римана для сформулированного уравнения состояния,
- 5. расчет законов сохранения,
- 6. пересчет функции энтропии,
- 7. движение расчетной сетки.

Эти этапы имеют разную сложность, но тем не менее далее все они будут описаны.

#### 1.2.1 Метод Годунова для решения уравнений теории упругости

Напомним, что система уравнений нелинейной теории упругости имеет вид:

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} - \frac{\partial \pi^j_i}{\partial \xi^j} = 0$$
$$\frac{\partial C^i_j}{\partial t} - \frac{\partial u^i}{\partial \xi^j} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\tau_0^{-1} c_0 E_{c_0} + \tau_*^{-1} c_* E_{c_*} + \tau_1^{-1} c_1 E_{c_1}}{E_S}$$
$$\frac{\partial c_0}{\partial t} = -\frac{c_0}{\tau_0}$$
$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = -\frac{c_1}{\tau_1}$$
$$\frac{\partial c_*}{\partial t} = -\frac{c_*}{\tau_*}$$

Домножив уравнения на  $u^i$ ,  $E_{C_i^j}$ ,  $E_S$ ,  $E_{c_0}$ ,  $E_{c_*}$ ,  $E_{c_1}$  соответственно получим закон сохранения полной энергии, который записывается в следующей форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u^i u_i}{2} + E \right) - \frac{\partial}{\partial \xi^j} \left( u^i \pi_i^j \right) = 0$$

Будем считать, что на начало временного шага нам известны величины скорость  $u_i^n$ , элементы тензора дисторсии  $C_i^{n,j}$  и напряжения  $\pi_i^{n,j}$ , энтропия  $S^n$ , полная энергия  $\frac{1}{2}u^{i,n}u_i^n + E^n$ , скорость звука  $c_{0,1,*}^n$  и плотность  $\rho_0^n$  в каждой ячейке. Кроме этого нам известны геометрические характеристики ячейки X. Схему Годунова для такой системы уравнений (законов сохранения момента импульса и полной энергии) можно записать в виде:

$$\frac{u_{i,lmk}^{n+1} - u_{i,lmk}^{n}}{\tau} - \frac{\Pi_{i,lmk}^{j,+} - \Pi_{i,lmk}^{j,-}}{h_{j}} = 0$$
$$\frac{\left(\frac{u^{i}u_{i}}{2} + E\right)_{lmk}^{n+1} - \left(\frac{u^{i}u_{i}}{2} + E\right)_{lmk}^{n}}{\tau} - \frac{U_{i,lmk}^{+}\Pi_{i,lmk}^{j,+} - U_{i,lmk}^{-}\Pi_{i,lmk}^{j,-}}{h_{j}} = 0$$

Величины потоков скорости  $U_{i,lmk}^{\pm}$  и напряжения  $\Pi_{i,lmk}^{j,\pm}$  будут находится из решения задачи Римана, решение которой будет описано далее. Затем происходит пересчет энтропии и движение расчетной сетки. После чего, на основании нового положения ячейки пересчитывается матрица дисторсии *C*. Опишем эти этапы далее подробно.

Формулировка уравнения состояния с учетом фазовых переходов. На первом шаге алгоритма в каждой ячейке расчетной области вычисляется сингулярное разложение матрицы дисторсии C:

$$C = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_1^2 & u_1^3 \\ u_2^1 & u_2^2 & u_2^3 \\ u_3^1 & u_3^2 & u_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 & v_1^2 & v_1^3 \\ v_2^1 & v_2^2 & v_2^3 \\ v_3^1 & v_3^2 & v_3^3 \end{pmatrix} = UKV^T, (UU^T = VV^T = I)$$

где U и V – ортогональные матрицы.

Следует напомнить, что уравнение состояния с учетом фазовых переходов было сформулировано уравнение состояния вида:

$$E = (1 - \omega_0)\sigma(S) + \omega_0 (E_0 + \omega_* E_1 + \omega_1 E_2)$$

где

$$E_0 = \frac{c_0^2}{\gamma(\gamma - 1)} \sigma(S) \left[\omega_1 \mathcal{J}_0 + (1 - \omega_1) \mathcal{J}_3\right]^{-(\gamma - 1)}$$
$$E_1 = \frac{c_0^2}{\gamma} \left[\omega_1 \mathcal{J}_0 + (1 - \omega_1) \mathcal{J}_3\right]$$
$$E_2 = \frac{2c_1^2}{3} \mathcal{J}_2$$

где коэффициенты  $\omega_0, \omega_*, \omega_1$  – параметры релаксации для перехода к частицам, в газовую и жидкую фазу соответственно. Далее определим уравнения состояния для каждой фазы и запишем правило перехода между состояниями, что эквивалентно записи правил для параметров релаксации  $\tau_0, \tau_*, \tau_1$ .

Используя сингулярные числа  $k_1, k_2, k_3$  уравнение состояния можно переписать в виде:

$$E = (1 - \omega_0)\sigma(S) + \omega_0 (E_0 + \omega_* E_1 + \omega_1 E_2)$$

где

$$E_{0} = \frac{c_{0}^{2}}{\gamma(\gamma - 1)}\sigma(S) \left[ \omega_{1}(k_{1}k_{2}k_{3}) + (1 - \omega_{1})\frac{k_{1}^{2} + k_{2}^{2} + k_{3}^{2}}{3} \right]^{-(\gamma - 1)}$$

$$E_{1} = \frac{c_{0}^{2}}{\gamma} \left[ \omega_{1}(k_{1}k_{2}k_{3}) + (1 - \omega_{1})\frac{k_{1}^{2} + k_{2}^{2} + k_{3}^{2}}{3} \right]$$

$$E_{2} = \frac{2c_{1}^{2}}{3}(k_{1}^{2} + k_{2}^{2} + k_{3}^{2} - k_{1}k_{2} - k_{1}k_{3} - k_{2}k_{3})$$

Что вычислительно реализуемо более просто.

Параметры релаксации  $\omega_0, \omega_*, \omega_1$  известны в каждой точке на предыдущем шаге. В случае если все эти значения равны единице, то рассматривается уравнение состояния упругой среды. В случае рассмотрения упруго-пластической среды вычисляется значение  $E_1 + E_0$ , при достижении триггера:

$$E_2 < 0.05 \times (E_1 + E_0)$$

будет запущен процесс релаксации в течение времени релаксации  $au_1 = 5$  мксек для исключения девиаторного члена и замены инварианта для описания откольного члена:

$$\omega_1 = \begin{cases} 1 & t < 0\\ 2(t/\tau_1)^3 - 2(t/\tau_1)^2 + 1 & 0 < t < \tau_1\\ 0 & t > \tau_1 \end{cases}$$

Если параметр релаксации ω<sub>1</sub> меньше единицы, то есть мы находимся в области перехода от упругой среды к жидкой, то продолжается релаксация параметра ω<sub>1</sub>. В этом случае выбор уравнения состояния заканчивается и необходимо перейти к следующему этапу.

В случае если параметр  $\omega_1 = 0$ , а остальные параметры релаксации равны единицы, то рассматривается жидкая среда. Вычисляются значения  $E_1$  и  $E_0$ , при достижении триггера:

$$E_1 \leq 0.05 \times E_0$$

запускается процесс релаксации в течение времени релаксации  $\tau_* = 3$  мксек для исключения этого члена:

$$\omega_* = \begin{cases} 1 & t < 0\\ 2(t/\tau_*)^3 - 2(t/\tau_*)^2 + 1 & 0 < t < \tau_*\\ 0 & t > \tau_* \end{cases}$$

Если параметр релаксации  $\omega_*$  меньше единицы, то есть мы находимся в области перехода от жидкости к газу, то продолжается релаксация параметра  $\omega_*$ . В этом случае выбор уравнения состояния заканчивается и необходимо перейти к следующему этапу.

В случае если параметр  $\omega_1 = 0$  и  $\omega_* = 0$ , а параметр релаксации  $\omega_0$  равен единице, то рассматривается среда газа. При достижении в точке критического значения напряжения  $\pi_{cr}$  в этой точке запускается процесс релаксации в течение времени релаксации  $\tau_* = 3$  мксек для перехода к частицам:

$$\omega_0 = \begin{cases} 1 & t < 0\\ 2(t/\tau_0)^3 - 2(t/\tau_0)^2 + 1 & 0 < t < \tau_0\\ 0 & t > \tau_0 \end{cases}$$

Если параметр релаксации  $\omega_0$  меньше единицы, то есть мы находимся в области перехода от газа к частицам, то продолжается релаксация параметра  $\omega_0$ . В этом случае выбор уравнения состояния заканчивается и необходимо перейти к следующему этапу. При обнулении параметра релаксации  $\omega_0$  происходит моментальный отрыв частиц, что фактически является единственным разумным способом их описания в рамках данной модели. Стоит также отметить, что при процессе релаксации происходит подъем энтропии, что связано с выбором используемого уравнения состояния и конструкции инвариантов. Таким образом, уравнение состояния с учетом фазовых переходов на данном этапе метода сформулировано. Контроль корректности уравнения состояния упругой среды. Для корректности уравнения состояния нам необходима положительная определенность матриц  $E_{C_j^i C_l^k}$ , а также неравенство  $E_{SS} > 0$ , которое формулируется как достаточно естественное условие. Условие корректности обосновано и доказано ранее и формулируется в следующем виде.

**Теорема о выпуклости уравнения состояния** Для выпуклости уравнения состояния упругой среды E = E(C, S) как функции от элементов матрицы необходимо и достаточно, чтобы были положительно определенными матрицы:

$$\begin{pmatrix} E_{k_1k_1} & E_{k_1k_2} & E_{k_1k_3} \\ E_{k_1k_2} & E_{k_2k_2} & E_{k_2k_3} \\ E_{k_1k_3} & E_{k_2k_3} & E_{k_3k_3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_{ij}^+ & E_{ij}^- \\ E_{ji}^- & E_{ji}^+ \end{pmatrix}, i \neq j$$

где

$$E_{ij}^{-} = \frac{1}{2} \left( \frac{E_{k_i} - E_{k_j}}{k_i - k_j} - \frac{E_{k_i} + E_{k_j}}{k_i + k_j} \right), E_{ij}^{+} = \frac{1}{2} \left( \frac{E_{k_i} - E_{k_j}}{k_i - k_j} + \frac{E_{k_i} + E_{k_j}}{k_i + k_j} \right)$$

Основываясь на данной теореме, в каждой ячейке расчетной области проверяются эти условия. Если рассматривается уравнение состояния упругой среды:

$$E = \frac{c_0^2}{\gamma(\gamma - 1)} \sigma(S) \mathcal{J}_0^{-(\gamma - 1)} + \frac{c_0^2}{\gamma} \mathcal{J}_0 + \frac{2c_1^2}{3} \mathcal{J}_2$$

то условие корректности для упругой среды записывается в виде:

$$\max_{i} \left( \frac{1 - \frac{2\gamma c_1^2}{c_0^2 k_i}}{\left(k_1 k_2 k_3\right)^{-\gamma}} \right) < \sigma(S) < \min_{i} \left( \frac{1 + \frac{2\gamma c_1^2}{3c_0^2 k_i} \left(1 - \frac{2k_i}{k_j - k_l}\right)}{\left(k_1 k_2 k_3\right)^{-\gamma}} \right)$$

Если рассматривается уравнение состояния жидкой среды:

$$E = \frac{c_0^2}{\gamma(\gamma - 1)} \sigma(S) \left(\mathcal{J}_0 \mathcal{J}_1\right)^{-(\gamma - 1)} + \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \left(\mathcal{J}_0 \mathcal{J}_1\right)$$

то условие корректности формулируется в виде одностороннего неравенства:

$$\sigma(S) < \min_{i} \left( \left( k_1 k_2 k_3 \frac{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}{3} \right)^{-\gamma} \right)$$

Если рассматривается уравнение состояния газовой фазы:

$$E = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma(\gamma - 1)} \sigma(S) \left(\mathcal{J}_0 \mathcal{J}_1\right)^{-(\gamma - 1)}$$

то как и в случае модели частиц условия корректности совпадают с естественными условиями на функцию энтропии  $\sigma(S) > 0$ .

#### 1.2.2 Численное решение задачи Римана для упругой среды

Для построения численного решения задачи Римана необходимо выполнить преобразования Лежандра к уравнениям:

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} - \frac{\partial \pi^j_i}{\partial \xi^j} = 0$$
$$\frac{\partial C^i_j}{\partial t} - \frac{\partial u^i}{\partial \xi^j} = 0$$
$$\frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

На данном этапе в правой части уравнения для энтропии стоит нуль, так как подъем энтропии за счет релаксационных процессов уже произошел на предыдущем этапе. Введем функцию энтальпии:

$$H = \frac{u_i u^i}{2} + E + C_j^i \pi_i^j$$

и ее потоки:

$$H^j = u^j E_{C_a^j}$$

В этом случае уравнения можно переписать в виде:

$$\frac{\partial H_{u^i}}{\partial t} - \frac{\partial H_{u^i}^j}{\partial \xi^j} = 0$$
$$\frac{\partial H_{\pi_i^j}}{\partial t} - \frac{\partial H_{\pi_i^j}^j}{\partial \xi^j} = 0$$
$$\frac{\partial H_T}{\partial t} = 0$$

которые сводятся к уравнениям:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial \pi_i^j}{\partial \xi^j} = 0$$
$$\Phi_k^l \frac{\partial \pi_j^i}{\partial t} - \frac{\partial u_i}{\partial \xi^j} = 0$$

где матрица  $\Phi_k^l = H_{\pi_j^k \pi_l^j} = \left(E_{C_j^k C_l^j}\right)^{-1}$ . В последней формуле матрица  $E_{C_j^k C_l^j}$  – обратима и положительно определенная матрица, что мы доказали на этапе формулировки корректности уравнения состояния. Образуем трехмерные векторы

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \qquad \pi^{[i]} = \begin{pmatrix} \pi_1^i \\ \pi_2^i \\ \pi_3^i \end{pmatrix}$$

и обозначим через  $\Phi$  симметрическую матрицу  $\Phi = H_{\pi_j^k \pi_l^j} = \left( E_{C_j^k C_l^j} \right)^{-1} = \Phi^T$ , которая имеет следующую структуру:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_{[1]} & \Phi_{[12]} & \Phi_{[1]} \\ \Phi_{[21]} & \Phi_{[2]} & \Phi_{[23]} \\ \Phi_{[31]} & \Phi_{[32]} & \Phi_{[3]} \end{pmatrix}$$

что позволит нам переписать основную часть нашей системы в следующем изящном блочном виде:

Именно эта система используется на этапе расчета одного шага по времени. С её помощью на ограничивающих счетные ячейки гранях (на ребрах в двумерном случае) рассчитываются скорости и напряжения из задачи "о распаде разрыва". Для этого из этой системы выделяются одномерные уравнения, используемые для расчета величин на тех или иных гранях. Выделение состоит в вычеркивании строк в этих одномерных уравнениях не участвующих. В одномерном случае по любому направлению  $\xi^k$  будет решаться линеаризованная задача Римана для следующей системы уравнений:

$$\begin{pmatrix} I_3 & 0\\ 0 & \Phi_{[k]} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u\\ \pi^{[k]} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & I_3\\ I_3 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi^k} \begin{pmatrix} u\\ \pi^{[k]} \end{pmatrix} = 0$$

Для решения задачи Римана будем предполагать кусочно-постоянное решение в ячейках расчетной области. С помощью сингулярного разложения симметричной матрицы

$$\Phi_{[k]} = \mathcal{Z} \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} \mathcal{Z}^T = \Lambda^2$$

перепишем систему в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \pi^{[k]}}{\partial \xi^k} = 0$$



Рис. 1: Поведение характеристик внутри ячейки

$$\Lambda^2 \frac{\partial \pi^{[k]}}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial \xi^k} = 0$$

Домножив первое уравнение на величину  $\Lambda$  слева и сначала прибавив его ко второму уравнения, а во втором случае вычтя из второго уравнения, получим следующий вид:

$$\Lambda \frac{\partial}{\partial t} (\Lambda \pi^{[k]} + u) - \frac{\partial}{\partial \xi^k} (\Lambda \pi^{[k]} + u) = 0$$
$$\Lambda \frac{\partial}{\partial t} (\Lambda \pi^{[k]} - u) + \frac{\partial}{\partial \xi^k} (\Lambda \pi^{[k]} - u) = 0$$

Для нахождения потоков скорости U и компонент тензора напряжений  $\Pi^{[k]}$  необходимо разрешить систему:

$$\Lambda \Pi^{[k]} + U = \Lambda \pi_L^{[k]} + u_L$$
$$\Lambda \Pi^{[k]} - U = \Lambda \pi_R^{[k]} - u_R$$

где индексами *L* и *R* указаны значения напряжений и скоростей, расположенные слева и справа относительно границы между ячейками, соответственно. Полученные таким образом значения потоков скорости *U* и компонент тензора напряжений  $\Pi^{[k]}$ и используются в реализации численной схемы.

При решении задачи Римана определяется также и шаг по времени. Поведение характеристик в ячейке можно проиллюстрировать рисунком (1): Максимальная скорость характеристики определяется максимальным значением собственного числа  $\lambda_i$ .

#### 1.2.3 Процедура коррекции дисбаланса энергии и функции энтропии.

Следующим этапом после пересчета законов сохранения является этап пересчета энтропии. Для этого в каждой ячейке расчетной области пересчитывается значение:

$$E_{lmk}^{n+1} = \left(\frac{u^i u_i}{2} + E\right)_{lmk}^{n+1} - \frac{1}{2}u_{i,lmk}^{n+1}u_{i,lmk}^{n+1}$$



Рис. 2: Сеточные ячейки в начальный и текущий момент времени t

Далее из используемого уравнения состояния выражается функция энтропии и пересчитывается. В силу того, что функция *E* является выпуклой функцией, энтропия в каждой ячейке гарантированно не убывает.

#### 1.2.4 Движение расчетной сетки

В рассчитываемой модели в начальный момент времени среда описывается в прямоугольной лагранжевой сетке с постоянными шагами по координатным осям. Напомним, что помимо параметров скорости  $u_i^n$ , элементов тензора дисторсии  $C_i^{n,j}$  и напряжения  $\pi_i^{n,j}$ , энтропии  $S^n$ , полной энергии  $\frac{1}{2}u^{i,n}u_i^n + E^n$ , скорости звука  $c_{0,1,*}^n$  и плотности  $\rho_0^n$  в каждой ячейке нам известны геометрические характеристики ячейки X – эйлеровы координаты узлов ячейки (см. рисунок 2). На первом этапе расчетного шага вычисляются на ребрах, разграничивающих соседние ячейки, потоки через эти ребра и "размещаются" в вершинах ромба (эти потоки и являются результатами решения задач о "распаде разрывов"). После вычисления законов сохранения происходит перемещение расчетной сетки. Значения компонент вектора скорости на ребрах приписываются к серединам этих ребер. Они будут использованы на третьем этапе расчета шага (корректор) при определении рассчитываемых эйлеровых координат угловых точек ячеек.

Использование сдвинутой сетки для перемещения ячеек расчетной области. На втором этапе внутренние значения сеточных величин для результирующего момента времени определяются по законам сохранения, аналогично стандартной процедуре схемы Годунова. При этом используются граничные потоки, полученные



Рис. 3: Соответствие лагранжевой и эйлеровой ячеек

с помощью "распадов разрывов". Происходит пересчет эйлеровой сетки и матрицы дисторсии по уравнениям:

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = U_i \qquad C_j^i = \frac{\partial X_i}{\partial \xi^j}$$

Для этого, используя значения скорости  $U_i$ , полученные в результате решения задачи "о распаде разрыва", мы перемещаем расчетную сетку. После этого окончательные положения угловых точек ячеек находятся как средние арифметические значения координат середин всех четырех ребер, сходящихся в этой угловой точке.

Движение граничных ячеек в области склейки материалов Отдельно опишем движение граничных лагранжевых ячеек в области склейки материалов. Дело в том, что граничные ребра смежных лагранжевых областей, хотя и лежат на одной и той же лагранжевой прямой, совсем не обязаны совпадать. Их концы, как правило, сдвинуты друг от друга (см. рисунок 3). Поэтому, чтобы получить в середине граничного ребра первой (например, верхней) пластины результирующие напряжения и скорости необходимо на лагранжевы координаты этой середины верхнего ребра интерполировать значения в центрах примыкающих к границе ячеек второй (нижней) пластины. После этого, в случае "сварившихся" пластин можно применять стандартную процедуру расчета распада разрыва. В случае скользящих пластин, мы задаемся в нужной нам полуцелой точке на ребре верхней пластины с нулевой нормальной к границе разностью скоростей и нормальным к границе напряжением нижней пластины, рассчитывая касательное напряжение и касательную к границе скорость на



Рис. 4: Поведение различных элементов расчетной сетки при её измельчении

верхнем ребре. В рассчитываемой физической задаче, эйлеровы координаты "сваренного" шва между верхней и нижней пластинами должны совпадать. Однако, в описываемом приеме расчета, соответствующие лагранжевы границы описываются различными наборами эйлеровых граничных точек ячеек, примыкающих к шву (см. рисунок 3). Это же обстоятельство имеет место и на гладкой границе между столкнувшимся пластинами, скользящих одна вдоль другой. Поэтому не удивительно, что в результате расчета эти границы оказываются не совпадающими. Пластины оказываются или перекрывающимися или разделёнными зазорам. Для избежания взаимного проникновения двух пластин друг в друга, после момента контакта в течение t = 10 микросекунд мы будем сваривать пластины. Учёт такого процесса осуществляется следующим образом: определяется момент, когда граничная ячейка вступила в контакт с ячейками противоположенной пластины, как было сказано ранее для учета краевых условий задается давление со стороны противоположенной ячейки и такой процесс продолжается в течение t = 10 микросекунд; после этого времени на границе контакта задается не напряжение, а решается задача о распаде разрыва с соответствующей ячейкой противоположенной пластины. Таким образом достигается условие склейки. Отметим, что учет взаимного давления в течение интервала времени t=10 микросекунд достаточно для установления режима склейки без явного учёта склейки. Эксперименты показали, что наблюдаемое их несоответствие убывает при уменьшении шага сетки, дробящей лагранжевы координаты на счетные ячейки (см. рисунок 4).

## 1.3 Задача о "распаде разрыва" в упругой среде

Для верификации метода решения уравнений теории упругости на интервале [0; 1] см зададим параметры материала: продольная скорость звука  $c_0 = 5.3$  км/с, поперечная скорость  $c_1 = 2.49$  км/с, плотность  $\rho_0 = 2.7$  г/см<sup>3</sup>. Значение начальной продольной скорости зададим нулевым, а матрицу дисторсии единичной. В точке  $x_0 = 0.5$  зададим разрыв в поперечной скорости, слева от разрыва  $u_{2,0,L} = 1$  км/с, а справа от



разрыва  $u_{2,0,R} = 0$  км/с. На момент времени t = 10 микросекунд результаты для основных упругих параметров параметров приведены на рисунке (5) На рисунке видно

Рис. 5: Распределение плотности, скоростей и энтропии при решении задачи о распаде разрыва упругой среды.

распространение ударной волны и волны разрежения в поперечной скорости, в продольной скорости отходят две симметричные волны, в плотности происходит провал между волнами, а на месте контактного разрыва имеет место скачок энтропии, который затем спадает к внутренним фронтам волн.

### 1.4 Задача "о сварке взрывом" двух алюминиевых пластин

Будем моделировать две пластины размером  $40 \times 20$  и  $40 \times 10$  сантиметров, с плотностью  $\rho = 3.0$  г/см<sup>3</sup>, продольной и поперечной скоростями звука  $c_0 = 5.2$  км/с и  $c_1 = 3.4$  км/с соответственно. Критическое давление  $\pi_{cr} = 60$  ГПа. Результаты моделирования (области фазовых переходов) показаны на рисунках (6). Как видно из рисунков в области контакта между пластинами образуется достаточно сложная геометрия сетки, эта область разогревается и происходит процесс фазового перехода. В



Рис. 6: Области с различным уравнением состояния на моменты времени t = 10 мксек (сверху слева), t = 20 мксек (сверху справа), t = 30 мксек (снизу слева), t = 52 мксек (снизу справа). Светлым цветом выделена область с уравнением состояния, соответствующим твердой фазе, более темная область – жидкости, контрастная область – газовой фазе.

ходе процесса сварки имеет место развитие волнообразования на границе сварки. Это связано с тем, что в первые 10 микросекунд происходит только скольжение пластин. После этого момента часть пластин сваривается с ячейками противоположенной пластины, в то время как соседние области двигаются в режиме скольжения. Это приводит к различию скоростей движения соседних ячеек, что приводит к колебательному процессу вдоль границы сварки и распространяется на ортогональные направления. При прохождении 10 микросекунд ячейки склеиваются, тем самым "замораживая" волны на границе контакта.

# 1.5 Моделирование взаимодействия метеоритов с поверхностью планет

Рассмотрим две задачи ранней стадии взаимодействия метеоритов с поверхностью планет: столкновение с поверхностью планет, имеющую атмосферу, что приводит к частичному разрушению метеорита и падением его скорости, в этом случае будет рассмотрен удар с дозвуковой скоростью; столкновение с поверхностью планет, не имеющую атмосферу, что приводит к удару со сверхзвуковой скоростью. В качестве
постановки задачи будем использовать схему, приведенную в работе [213], которая повторяет схему задачи о сварке взрывом двух пластин.

Будем моделировать две пластины. Первая из которых (поверхность планеты – вулканогенно-осадочный слой) размером 120 × 60 сантиметров с плотностью  $\rho = 2.3$ г/см<sup>3</sup>, продольной и поперечной скоростями звука  $c_0 = 5.0$  км/с и  $c_1 = 2.9$  км/с соответственно. Вторая пластина (метеор – материал оливин) размером 40 × 40 сантиметров с плотностью  $\rho = 3.27$  г/см<sup>3</sup>, продольной и поперечной скоростями звука  $c_0 = 7.4$  км/с и  $c_1 = 5.3$  км/с соответственно [279]. Критическое давление откола частиц  $\pi_{cr} = 60$  ГПа.

Результаты моделирования (области фазовых переходов) дозвукового соударения пластин при скорости c = 1 км/с показаны на рисунках (7). Как видно из рисунков



Рис. 7: Области с различным уравнением состояния на моменты времени t = 0 мксек (сверху слева), t = 10 мксек (сверху справа), t = 20 мксек (снизу слева), t = 37 мксек (снизу справа). Синим цветом выделена область с уравнением состояния, соответствующим твердой фазе, сиреневая область – жидкости, красная область – газовой фазе.

в области контакта между пластинами происходит разогрев и плавление материала, также образуется небольшая волновая структура, а затем происходит выброс частиц. Отметим, что частицы вылетают как из газовой фазы, так и из твердой, что связано с резким сменой уравнения состояния для последних. В целом картина течения напоминает картину сварки взрывом двух алюминиевых пластин.

Результаты моделирования (области фазовых переходов) сверхзвукового соуда-



рения пластин при скорости c = 7 км/с показаны на рисунках (8). Как видно из

Рис. 8: Области с различным уравнением состояния на моменты времени t = 0 мксек (сверху слева), t = 10 мксек (сверху справа), t = 15 мксек (снизу слева), t = 18 мксек (снизу справа). Синим цветом выделена область с уравнением состояния, соответствующим твердой фазе, сиреневая область – жидкости, красная область – газовой фазе.

рисунков от области контакта между пластинами выходит волна плавления материала, которая распространяется практически на всю область метеорита. Отметим, что выброса части в виде кумулятивной струи не наблюдается, что связано с быстрым плавлением и разогревом материала без образования критических значений давления.

#### 1.6 Выводы по первой главе

В первой главе представлена и сформулирована физико-математическая модель упругопластических деформаций. Для описания упруго-пластических деформаций используются уравнения теории упругости и максвелловские релаксации для описания фазовых переходов между твердым телом, жидкостью и газом, записанные в лагранжевых координатах. В настоящей главе сформулировано и исследовано модельное уравнения состояния упруго-пластических сред, которое является обобщением формулировок уравнения состояния и условий их корректности, выработанных в результате оригинальных вычислительных экспериментов и их сравнения с экспериментом на задаче сварке взрывом металлических пластин, а также на задачах разрушения материала и теоретической работы по формулировке уравнений состояния для кристаллических структур. Для формулировки уравнения состояния использовались два компонента – плотность, для описания которой использовались инварианты на основе определителя и следа матрицы дисторсии, и девиатор, для описания которого использовалось его пятимерное представление. Такое представление уравнения позволило естественным образом описать фазовые переходы, а представление девиатора в дальнейшем может быть использовано для учета произвольной кристаллической структуры. Для решения уравнений теории упругости был использован метод Годунова на основе линеаризованных распадов разрыва в лагранжевых координатах. Численный метод был верифицирован на задаче о распаде разрыва в упругой среде. На задаче о сварке взрывом двух алюминиевых пластин был продемонстрирован сценарий прохождения всех фазовых переходов с образованием кумулятивной струи, состоящей из частиц материала. В ходе процесса сварки объяснен процесс волнообразования на границе сварки. Это связано с тем, что в первые 10 микросекунд происходит только скольжение пластин. После этого момента часть пластин сваривается с ячейками противоположенной пластины, в то время как соседние области двигаются в режиме скольжения. Это приводит к различию скоростей движения соседних ячеек, что приводит к колебательному процессу вдоль границы сварки и распространяется на ортогональные направления. При прохождении 10 микросекунд ячейки склеиваются, тем самым "замораживая" волны на границе контакта.

# 2 Физико-математические модели гидродинамических процессов в самосогласованном гравитационном поле

Современная астрофизика – это эволюционная теория, предметом которой является исследование физических процессов во Вселенной, как эти процессы повлияли на самоорганизацию и эволюцию астрономических объектов, а также на дальнейшую их динамику и взаимодействие. В данной работе будет рассматриваться астрономические объекты от наиболее массивных – крупно-масштабных структур во Вселенной (космическая паутина), до объектов прямого наблюдения – планетные системы.

Гравитационная газовая динамика – наука, изучающая динамику сжимаемых газообразных и жидких сред с учётом самогравитации. Движение самогравитирующего газа является результатом взаимодействия сил гравитации и давления, поэтому гравитационная неустойчивость более характерна для описания динамики астрономических объектов, чем динамика ударных волн и турбулентных течений. Тем не менее, последние также рассматриваются в данной работе. При изучении сложных астрофизических явлений переход к моделированию пространственных течений газа сопровождается появлением новых физических эффектов, которые в других задачах либо отсутствуют, либо их проявление незначительно. Большинство крупных астрономических объектов начиная от скопления галактик до звезд описываются с помощью модели гравитационной газовой динамики.

Однако модель гравитационной газовой динамики не может описывать ряд астрофизических течений, в которых важную роль играет магнитное поле. В этом случае для описания необходимо использовать модель гравитационной магнитной газовой динамики, а в случае учета химической эволюции, то и модель гравитационной магнитной многокомпонентной газовой динамики. Учет магнитного поля важен как на масштабах скопления галактик, так и на масштабах звезд.

При построении модели динамики астрономических объектов важным ингредиентом является бесстолкновительная компонента, необходимая для описания звезд и темной материи на космологических и галактических масштабах и пылевой компоненты протопланетного диска. Необходимо отметить, что на разных масштабах бесстолкновительная компонента ведет себя по разному. И если на масштабах галактики достаточно учитывать динамику кластера частиц – звезд, то на масштабах

76

протопланетного диска необходим явный учет отдельных частиц.

В ходе численной реализации неустойчивость Джинса или гравитационная неустойчивость, как физическое свойство решения, приводит к зависимости численного решения от координатных линий. При численном решении астрофизических задач возникает необходимость задания областей нулевой плотности и корректного определения границ газ-вакуум. Рассматриваемые постановки астрофизических задач, определяющиеся важностью вклада гравитационной энергии и отсутствием больших потоков через границы области, характеризуются влиянием свойства полной консервативности схемы на решение.

Несмотря на такое многообразие математических моделей в настоящей работе был сформулирован общий подход к описанию динамики астрономических объектов и единый вычислительный метод для разрешения этих моделей. В настоящей главе будут описаны математические модели астрономических объектов и подсеточные процессы, необходимые для учета на различных масштабах.

#### 2.1 Газодинамическая модель

#### 2.1.1 Уравнения идеальной гравитационной газовой динамики

Для описания газовой компоненты астрономических объектов будем рассматривать трехмерную модель динамики самогравитирующего газа в декартовых координатах, включающих в себя переопределённую систему уравнений газовой динамики в дивергентной форме, замкнутую уравнением состояния для идеального газа. Система уравнений газовой динамики дополнена уравнением Пуассона для гравитационного потенциала.

Закон сохранения массы:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

Закон сохранения момента импульса:

$$\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) = -\nabla p - \rho \nabla (\Phi)$$

Закон сохранения полной механической энергии:

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \vec{u}) = -\nabla \cdot (p \vec{u}) - (\rho \nabla (\Phi), \vec{u})$$

Закон поведения внутренней энергии:

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \epsilon \vec{u}) = -(\gamma - 1)\rho \epsilon \nabla \cdot \vec{u}$$

Связь полной механической, внутренней и кинетической энергий:

$$\rho E = \frac{1}{2}\rho \vec{u}^2 + \rho \varepsilon$$

уравнение состояния для идеального газа:

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$$

уравнение Пуассона записывается в виде:

$$\Delta \Phi = 4\pi G\rho$$

где *p* – давление газа, *ρ* – плотность газа, *ū* – скорость газа, *E* – плотность полной механической энергии газа, Φ – гравитационный потенциал, *ε* – плотность внутренней энергии газа, *γ* – показатель адиабаты. Данная система уравнений представляет собой дифференциальную форму законов сохранения массы, момента импульса и энергии.

Для масштабирования элементов решения системы уравнений вводится операция приведения уравнений к безразмерному виду. Данная операция позволяет избежать большого накопления погрешности вычислений при решении задач, которая всегда возникает при использовании реальных размерностей искомых величин. Для этого газодинамические параметры следует представить в виде  $f = f_0 f^{[c]}$ , где f – некоторая физическая характеристика,  $f_0$  – ее характерное значение физической характеристики,  $f^{[c]}$  – безразмерное значение, где символ [c] обозначает непосредственное представление величины в компьютере. Таким образом, каждый искомый параметр представляет собой произведение характерной величины параметра и безразмеренной переменной. Подставим газодинамические величины в таком виде в исходную систему уравнений. Так как величины с нулевым индексом являются константами, можно вынести эти множители за знак производной. В результате получим следуюцие соотношения:

$$L_0 = t_0 u_0$$
  $p_0 = \rho_0 u_0^2$   $\Phi_0 = u_0^2$   $\varepsilon_0 = E_0 = u_0^2$   $v_0 = \sqrt{\frac{GM_0}{L_0}}$ 

где  $L_0$  – характерная длина,  $t_0$  – характерное время,  $u_0$  – характерная скорость,  $\rho_0$  – характерная плотность,  $p_0$  – характерное давление,  $\Phi_0$  – характерное значение гравитационного потенциала,  $\varepsilon_0$  и  $E_0$  – характерные значения плотности полной и внутренней энергии,  $M_0 = \rho_0 L_0^3$  – характерная масса. В качестве характерных величин задается значение массы  $M_0$  и длины  $L_0$ . В случае если необходимо задать значение давления газа через функцию температуры, то используется формула для скорости звука в газе:

$$c^2 = \frac{\gamma kT}{m}$$

где k – постоянная Больцмана, T – температура газа, m – молекулярная масса. С другой стороны имеет место равенства

$$c = u_0 c^{[c]}$$
  $c^{[c]} = \sqrt{\frac{\gamma p^{[c]}}{\rho^{[c]}}}$ 

Откуда и определяется значение  $p^{[c]}$  по формуле:

$$p^{[c]} = \rho^{[c]} \frac{kT}{mv_0^2}$$

Последняя формула важная в связи с тем, что очень часто (например при моделировании эволюции галактик) задается в явном виде распределение их температуры и химический состав газа, что требует аккуратного пересчета в распределение давления, которое явно используется в уравнениях.

#### 2.1.2 Постановка начальных и краевых условий

Для математически полной постановки задачи требуется постановка краевых и начальных условий. По постановке задачи физически значимая динамика газового облака развивается вдали от границы исследуемой области. Отдельно рассмотрим краевые условия для газодинамических величин и потенциала поля, так как краевые условия для уравнения Пуассона полностью определяют решение задачи, в отличие от краевых условий для газодинамических величин.

Определим краевые условия для скалярных газодинамических величин как однородные краевые условия второго рода:  $\frac{\partial f}{\partial n}|_{\Gamma} = 0$ , где в качестве f выступают все скалярные газодинамические величины,  $\Gamma$  – граница расчетной области. При определении краевых условий для векторных величини скорости и импульса в случае если внешняя нормаль к поверхности сонаправлена с компонентой скорости или импульса, то данная компонента должна "пропускать" поток импульса от границы, то есть имеет место "неотражающие граничные условия", в случае разнонаправленности имеет место "отражение" от границы, то есть используются "отражающие" граничные условия. Из этого условия можно достаточно просто определить краевые условия для скоростей. Выпишем краевые условия для примера, когда внешняя нормаль к поверхности разнонаправлена с осью x, то есть  $\cos(x, n) = -1$ . В результате получим следующие условия:  $\frac{\partial u_x}{\partial n}|_{\Gamma-\delta} = -\frac{\partial u_x}{\partial n}|_{\Gamma}, \frac{\partial u_y}{\partial n}|_{\Gamma} = 0, \frac{\partial u_z}{\partial n}|_{\Gamma} = 0.$  В случае если  $\cos(x, n) = 1$ , то условия трансформируются в форму  $\frac{\partial u_x}{\partial n}|_{\Gamma-\delta} = \frac{\partial u_x}{\partial n}|_{\Gamma}, \frac{\partial u_y}{\partial n}|_{\Gamma} = 0, \frac{\partial u_z}{\partial n}|_{\Gamma} = 0$ , где  $\vec{u}$ – векторная величина. В большинстве вычислительных экспериментов, если об этом не сказано отдельно, мы будем использовать "неотражающие" граничные условия. В задачах моделирования крупномасштабных структур и МГД турбулентности были использованы периодические граничные условия.

Краевые условия уравнения Пуассона полностью определяют решение задачи, поэтому их постановка является достаточно важной проблемой. Известно, что в бесконечном удалении от объекта гравитационный потенциал может считаться нулевым. Краевые условия ставить приходится на конечном расстоянии от газового объекта. Для вычисления граничных условий на границе конечной расчетной области будем использовать первые моменты мультипольного разложения:

$$\Phi(x, y, z)|_{\Gamma} = -\frac{M}{r} - \frac{1}{r^3} \left( I_x + I_y + I_z - 3I_0 \right),$$

где

$$I_{0} = \frac{(x^{2}I_{x} + y^{2}I_{y} + z^{2}I_{z}) - 2(xyI_{xy} + xzI_{xz} + yzI_{yz})}{r^{2}}$$

$$I_{x} = \sum_{j} (z_{j}^{2} + y_{j}^{2}) m_{j} \qquad I_{y} = \sum_{j} (x_{j}^{2} + z_{j}^{2}) m_{j} \qquad I_{z} = \sum_{j} (x_{j}^{2} + y_{j}^{2}) m_{j},$$

$$I_{xy} = \sum_{j} x_{j}y_{j}m_{j} \qquad I_{xz} = \sum_{j} x_{j}z_{j}m_{j} \qquad I_{yz} = \sum_{j} y_{j}z_{j}m_{j},$$

где x, y, z – координаты элемента границы расчетной области,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  – расстояние рассматриваемого элемента границы расчетной области до центра,  $x_j$ ,  $y_j, z_j$  – координаты ячеек расчетной области,  $m_j$  – масса ячеек расченой области, M – общая масса в расчетной области. Суммирование происходит по всем ячейкам расчетной области.

Начальное распределение основных газодинамических параметров (плотность, давление, скорость) внутри газового объекта может быть произвольным. Особый интерес представляет собой равновесные распределения самогравитирующего газового облака в сферической и цилиндрической (с учетом вращения) симметрии.

#### 2.1.3 Построение равновесных конфигураций

Равновесная сферически симметричная статическая конфигурация. В качестве начальных данных для системы уравнений газовой динамики с учётом гравитации возьмем гидростатически равновесную стационарную конфигурацию, которую, можно найти [14], задав распределение плотности, из системы уравнений газовой динамики, дополненной уравнением Пуассона, записанных в сферических координатах:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{M(r)\rho}{r^2}\\ \frac{\partial M}{\partial r} = 4\pi r^2\rho\\ p = (\gamma - 1)\rho\epsilon \end{cases}$$

Начальное распределения плотности выберем следующим образом:

$$\rho_0(r) = \begin{cases} 1 - r, & r \le 1, \\ 0, & r > 1. \end{cases}$$

Тогда начальные распределения давления и гравитационного потенциала имеют вид:

$$p_0(r) = \begin{cases} -\frac{\pi r^2}{36} (9r^2 - 28r + 24) + \frac{5\pi}{36}, & r \le 1, \\ 0, & r > 1. \end{cases}$$
$$\Phi_0(r) = \begin{cases} -\frac{\pi}{3} (r^3 - 2r^2) - \frac{2\pi}{3}, & r \le 1, \\ -\frac{\pi}{3r}, & r > 1. \end{cases}$$

Используя такой подход можно построить достаточно много начальных профилей плотности с различной степенью гладкости. В ряде вычислительных экспериментов будем использовать построенный профиль.

# Равновесная вращающаяся конфигурация с учетом внешнего потенциала. Для построения равновесной вращающейся конфигурации при наличии внешнего потенциала, как например в задачах эволюции спиральных рукавов галактик, необходимо использовать итерационную процедуру для ее построения [261] в цилиндрических координатах. Распределение плотности $\rho_{DM}(r, z)$ темной материи имеет вид:

$$\rho^{DM}(r,z) = \frac{\rho_0}{1 + \frac{r^2 + z^2}{R^2}}$$

где r – цилиндрический радиус, а  $\rho_0$  и R – некоторые постоянные величины. В этом случае потенциал есть решение уравнения Пуассона и имеет вид:

$$\Phi^{DM}(r,z) = 4\pi\rho_0 R^2 \left( \frac{\ln\left(1 + \frac{r^2 + z^2}{R^2}\right)}{2} + \frac{R}{\sqrt{r^2 + z^2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{r^2 + z^2}}{R}\right) \right)$$

Силы, дающие вклад в уравнение движения от темной материи вычисляются по формулам:

$$g_r^{DM} = -\frac{\partial \Phi_{DM}(r,z)}{\partial r} = -\frac{4\pi\rho_0 R^2 r \left(1 - R\frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{r^2 + z^2}}{R}\right)}{\sqrt{r^2 + z^2}}\right)}{r^2 + z^2}$$

$$g_z^{DM} = -\frac{\partial \Phi_{DM}(r,z)}{\partial z} = -\frac{4\pi\rho_0 R^2 z \left(1 - R\frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{r^2+z^2}}{R}\right)}{\sqrt{r^2+z^2}}\right)}{r^2+z^2}$$

Для газовой компоненты будем использовать изотермическое уравнение состояния

$$p(r, z) = \rho(r, z)T$$

где p – давление газа,  $\rho(r, z)$  – искомый профиль плотности газа, T – некоторая заданная температура. Тогда уравнения для равновесного вращения газового диска с учетом темной материи имеют вид:

$$\frac{T}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial r} = \frac{v_{\phi}^2}{r} - \frac{\partial\Phi}{\partial r} + g_r^{DM}$$
$$\frac{T}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial z} = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} + g_z^{DM}$$

где  $\Phi = \Phi(r, z)$  – потенциал газовой компоненты,  $v_{\phi}$  – скорость вращения. С учетом того, что скорость вращения  $v_{\phi}$  задается формулой (где  $\alpha$  – некоторая константа):

$$v_{\phi} = \alpha \sqrt{r \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} + g_r^{DM}\right)_{z=0}} = \sqrt{r\Omega(r)}$$

В этом случае уравнения для равновесного вращения можно переписать в более простой форме:

$$\frac{T}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} = \Omega - \frac{\partial \Phi}{\partial r} + g_r^{DM}$$
$$\frac{T}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} + g_z^{DM}$$

Уравнение Пуассона для сил самогравитации в цилиндрических координатах имеет вид (при *G* = 1):

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 4\pi\rho$$

Выразим компоненты градиента самосогласованного потенциала из уравнений и получим:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\left(\Omega+g_{r}^{DM}-T\frac{\partial ln\rho}{\partial r}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(g_{z}^{DM}-T\frac{\partial ln\rho}{\partial z}\right)=4\pi\rho$$

учитывая, что:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rg_{r}^{DM}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(g_{z}^{DM}\right) = 4\pi\rho^{DM}$$

и проведя замену  $u = ln(\rho)$  или  $\rho = exp(u)$  получим уравнение Пуассона для профиля плотности:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{4\pi}{T}\left(\rho^{DM} - exp(u)\right) + \frac{1}{rT}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\Omega\right)$$

Алгоритм вычисления начального профиля плотности и скорости вращения в этом случае можно записать в следующем виде.

- 1. Зафиксируем расчетную область  $[0; \mathcal{R}] \times [0; \mathcal{Z}]$  и параметры  $T, \rho_0, R, \alpha$  и профиль плотности начального приближения  $exp(\Theta)$ .
- Выберем начальное приближение для функции плотности ρ<sup>0</sup> при граничных условиях:

$$\frac{\partial \rho^0}{\partial z}_{z=0} = \frac{\partial \rho^0}{\partial r}_{r=0} = 0$$
$$\rho^0_{r=\mathcal{R}} = \rho^0_{z=\mathcal{Z}} = exp(\Theta)$$

Положим k = 0.

3. Вычислим массу газового облака М:

$$M = 2\pi \int_{r=0}^{\mathcal{R}} \int_{z=0}^{\mathcal{Z}} r \rho^k(r, z) dz dr$$

4. Решим уравнение Пуассона для потенциала Ф

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 4\pi\rho^k$$

при граничных условиях:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}_{z=0} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}_{r=0} = 0$$
$$\Phi_{r=\mathcal{R}} = \Phi_{z=\mathcal{Z}} = -\frac{M}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

5. Вычислим функцию  $\Omega(r)$  по формуле:

$$\Omega(r) = \alpha \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{4\pi \rho_0 R^2 r \left( 1 - R \frac{arctan\left(\frac{r}{R}\right)}{r} \right)}{r^2} \right)_{z=0}$$

6. Решим уравнение Пуассона для функции и

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{4\pi}{T}\left(\rho^{DM} - exp(u)\right) + \frac{1}{rT}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\Omega\right)$$

при граничных условиях:

$$\frac{\partial u}{\partial z}_{z=0} = \frac{\partial u}{\partial r}_{r=0} = 0$$
$$u_{r=\mathcal{R}} = u_{z=\mathcal{Z}} = \Theta$$

- 7. Вычислим новое приближение  $\rho^{k+1}(r,z) = exp(u(r,z))$
- 8. В случае если невязка  $||\rho^k \rho^{k+1}|| > \varepsilon$  тогда положим k = k+1 и перейдем на шаг 3.

9. В противном случае решение найдено:

$$\rho(r, z) = \rho^{k+1}(r, z)$$
  
 $v_{\phi} = \sqrt{r\Omega(r)}$ 

Алгоритм закончен. Результатом алгоритма будет равновесный профиль плотности  $\rho(r, z)$  при скорости дифференциального вращения  $v_{\phi}$ . Такое начальное распределение будет использовано при моделировании эволюции спиральных рукавов галактик, а также в виде начального профиля при столкновении галактик в многофазной модели, о которых речь пойдет далее.

#### 2.1.4 Законы сохранения

Так как исходная задача неустойчива и ее постановка некорректна, то вопрос о контроле правильности решения численной реализации задачи стоит особенно остро. Для контроля корректности решения используются законы сохранения массы, момента импульса, а также полной энергии. При отсутствии гравитации полная энергия газа есть сумма внутренней и кинетической энергий, в случае гравитации необходимо учесть вклад от нее. Приведем вывод изменения полной энергии самогравитирующего газа. Для этого проинтегрируем уравнение для полной механической энергии по объему расчетной области V:

$$\int_{V} \left( \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \vec{u}) \right) dV = \int_{V} \left( -\nabla \cdot (p \vec{v}) - (\rho \nabla (\Phi), \vec{u}) \right) dV$$

преобразуем скалярное произведение градиента потенциала и момента импульса

$$(\rho \vec{u}, \nabla(\Phi)) = \nabla \cdot (\Phi \rho \vec{u}) - \Phi \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = \nabla \cdot (\Phi \rho \vec{u}) + \Phi \frac{\partial \rho}{\partial t} =$$
$$= \nabla \cdot (\Phi \rho \vec{u}) + \frac{\partial \rho \Phi}{\partial t} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \nabla \cdot (\Phi \rho \vec{u}) + \frac{\partial \rho \Phi}{\partial t} - \frac{\Delta \Phi}{4\pi G} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

последнее слагаемое можно заменить на

$$\frac{\Delta\Phi}{4\pi G}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{1}{4\pi G}\nabla\cdot\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\nabla\Phi\right) - \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{4\pi G}\left(\frac{1}{2}\nabla\Phi,\nabla\Phi\right)$$

тогда

$$(\rho \vec{u}, \nabla(\Phi)) = \nabla \cdot (\Phi \rho \vec{u}) + \frac{\partial \rho \Phi}{\partial t} - \frac{1}{4\pi G} \nabla \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \nabla \Phi\right) + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi G} \left(\frac{1}{2} \nabla \Phi, \nabla \Phi\right)$$

В случае постоянства потенциала во времени  $\frac{\partial \Phi_0}{\partial t} = 0$  последнее равенство можно переписать в виде:

$$(\rho \vec{u}, \nabla(\Phi_0)) = \nabla \cdot (\Phi_0 \rho \vec{u}) + \frac{\partial \rho \Phi_0}{\partial t}$$

В общем случае закон сохранения полной энергии системы (сумма кинетической, внутренней и потенциальной энергий) при условии отсутствии потоков газа через границу можно записать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V} \left( \rho \varepsilon + \frac{\rho \vec{u}^2}{2} + \rho \Phi + \frac{1}{8\pi G} \left( \frac{1}{2} \nabla \Phi, \nabla \Phi \right) \right) dV = 0$$

или, используя формулу интегрирования по частям:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V} \left( \rho \varepsilon + \frac{\rho \vec{u}^2}{2} + \frac{\rho \Phi}{2} \right) dV = 0$$

В случае постоянства потенциала во времени  $\frac{\partial \Phi_0}{\partial t} = 0$  закон сохранения полной энергии газа можно переписать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V} \left( \rho \varepsilon + \frac{\rho \vec{u}^2}{2} + \rho \Phi_0 \right) dV = 0$$

В ряде задач взаимодействия галактик, а также динамики молекулярных облаков средством контроля корректности численного решения будет служить закон сохранения полной (сумма кинетической, внутренней и потенциальной) энергии.

#### 2.1.5 Коррекция дисбаланса энергии и гарантия неубывания энтропии

Главная проблема при численном решении уравнений газовой динамики является дисбаланс между внутренней и полной механической энергии, который выражается в падении энтропии, что приводит к получению некорректного численного решения. Такая проблема уже обсуждалась во введении и были приведены некоторые способы ее решения. В настоящей работе используется комбинация подходов, изложенных в оригинальных авторских работах [111, 264]. Он состоит в использовании переопределенной системы уравнений гравитационной газовой динамики и состоит в двух преобразованиях:

1. коррекция внутренней энергии (или энтропии) в области с основной плотностью газа [111]:

$$\rho \epsilon = \left(\rho E - \frac{\rho \vec{u}^2}{2}\right), \frac{\rho}{\rho_{\max}} > 10^{-5}$$

 коррекция длины вектора скорости в области разреженного газа (фактически на границе газ-вакуум) [264]:

$$|\vec{u}| = \sqrt{\frac{2(\rho E - \rho \epsilon)}{\rho}}, \frac{\rho}{\rho_{\max}} \le 10^{-5}$$

В области малой плотности используется второй подход, так как в ней отсутствуют проблемы с падением энтропии. В этой подобласти дисбаланс состоит в образовании большой кинетической энергии, что связано также с делением на функцию плотности. В этом случае длины вектора скорости корректируется. В основной области используется первый подход, который при выпуклости уравнения состояния, что имеет место для идеального газа, гарантирует неубывание внутренней энергии, а при неизменности плотности гарантирует неубывание энтропии. Подобный подход также используется в работах [65, 75].

#### 2.1.6 Формулировка с учетом космологического расширения

В задачах космологического моделирования используются так называемые расширяющиеся (comoving в зарубежной литературе) за счет темной энергии координаты, то есть x = ar, где r – исходные координаты, a = 1/(1 + z) – параметр расширения, который вычисляется из уравнения Эйнштейна [26]:

$$\frac{da}{dt} = H\sqrt{\Omega_M \left(a^{-1} - 1\right) + \Omega_\Lambda \left(a^2 - 1\right) + 1}$$

где  $\Omega_M = \Omega_B + \Omega_D$  – доля материи в общей массе,  $\Omega_B$  – доля видимой барионной материи (газа и звезд),  $\Omega_D$  – доля темной материи,  $\Omega_{\Lambda}$  – доля темной энергии,  $H = \dot{a}/a$  – постоянная Хаббла, z – параметр красного смещения. В этом случае мы рассматриваем специфичную плотность  $\rho_c \equiv \rho a^3$  и скорость  $\vec{u}_c = a\vec{u}$ . В этом случае переопределенная система уравнений гравитационной газовой динамики в расширяющихся координатах с учетом космологического расширения имеет вид:

$$\begin{split} \frac{\partial \rho}{\partial t} &+ \frac{1}{a} \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \\ \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} &+ \frac{1}{a} \nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) = -\frac{1}{a} \nabla p - \frac{1}{a^2} \rho \nabla (\Phi) - H \rho \vec{u} \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} &+ \frac{1}{a} \nabla \cdot (\rho E \vec{u}) = -\frac{1}{a} \nabla \cdot (p \vec{u}) - \frac{1}{a^2} (\rho \nabla (\Phi), \vec{u}) - 2 H \rho E \\ \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} &+ \frac{1}{a} \nabla \cdot (\rho \epsilon \vec{u}) = -\frac{1}{a} (\gamma - 1) \rho \epsilon \nabla \cdot \vec{u} - 2 H \rho \varepsilon \end{split}$$

Связь полной механической, внутренней и кинетической энергий остается без изменений:

$$\rho E = \frac{1}{2}\rho \vec{u}^2 + \rho \epsilon$$

уравнение состояния для идеального газа также формулируется в виде:

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$$

уравнение Пуассона переписывается в виде:

$$\Delta \Phi = 4\pi G \left( \rho - \rho_0 \right)$$

где *p* – давление газа, *ρ* – плотность газа, *ρ*<sub>0</sub> – средняя плотность газа, *ū* – скорость газа, *E* – плотность полной механической энергии газа, *Φ* – гравитационный потенциал, *ε* – плотность внутренней энергии газа, *γ* – показатель адиабаты, *H* – постоянная Хаббла.

### 2.1.7 Формулировка односкоростной многокомпонентной газовой динамики

При учете химической эволюции газа в настоящей работе используется модель односкоростной многокомпонентной газовой динамики, которая в эйлеровых координатах записывается в следующем виде.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) &= 0\\ \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \vec{u}) &= s_i\\ \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) &= -\nabla p - \rho \nabla (\Phi)\\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \vec{u}) &= -\nabla \cdot (p \vec{u}) - (\rho \nabla (\Phi), \vec{u})\\ \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \epsilon \vec{u}) &= -(\gamma - 1)\rho \epsilon \nabla \cdot \vec{u} \end{aligned}$$

Связь полной механической, внутренней и кинетической энергий:

$$\rho E = \frac{1}{2}\rho \vec{u}^2 + \rho\varepsilon$$

уравнение состояния для идеального газа:

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$$

уравнение Пуассона записывается в виде:

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho$$

где p – давление газа,  $\rho_i$  – плотность i–й компоненты смеси,  $\rho = \sum_i \rho_i$  – плотность газа,  $s_i$  – скорость образования i–й компоненты смеси,  $\sum_i s_i = 0$ ,  $\vec{u}$  – скорость газа, E – плотность полной механической энергии газа,  $\Phi$  – гравитационный потенциал,  $\varepsilon$ – плотность внутренней энергии газа,  $\gamma$  – показатель адиабаты.

#### 2.2 Магнитно-газодинамическая модель

Далее будет описана магнитно-газодинамическая модель астрономических объектов. Основные ее компоненты базируются на газодинамической модели, поэтому подробно будут описаны те части, которые касаются учета магнитного поля.

#### 2.2.1 Уравнения идеальной магнитной газовой динамики

Для описания газовой компоненты астрономических объектов с учетом магнитного поля будем рассматривать в декартовых координатах переопределённую систему уравнений гравитационной магнитной газовой динамики в дивергентной форме, замкнутую уравнением состояния для идеального газа. Система уравнений магнитной газовой динамики дополнена уравнением Пуассона для гравитационного потенциала.

Закон сохранения массы:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

Закон сохранения момента импульса:

$$\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u} - \vec{B} \vec{B}) = -\nabla p^* - \rho \nabla(\Phi)$$

Закон сохранения полной механической энергии:

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \vec{u} - \vec{B}(\vec{B}, \vec{u})) = -\nabla \cdot (p^* \vec{u}) - (\rho \nabla(\Phi), \vec{u})$$

Закон поведения внутренней энергии:

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \epsilon \vec{u}) = -(\gamma - 1)\rho \epsilon \nabla \cdot \vec{u}$$

Закон поведения магнитного поля:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B})$$

Условие бездивергентности магнитного поля:

$$\nabla \cdot B = 0$$

Связь полной механической, внутренней и кинетической энергий:

$$\rho E = \frac{1}{2}\rho \vec{u}^2 + \rho \varepsilon + \frac{1}{2}\vec{B}^2$$

уравнение состояния для идеального газа:

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$$

полное давление

$$p^* = p + \frac{1}{2}\vec{B}^2$$

уравнение Пуассона записывается в виде:

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho$$

где *p* – давление газа, *ρ* – плотность газа, *ū* – скорость газа, , *B* – вектор магнитного поля, *E* – плотность полной механической энергии газа, *Φ* – гравитационный потенциал, *ε* – плотность внутренней энергии газа, *γ* – показатель адиабаты. Данная система уравнений представляет собой дифференциальную форму законов сохранения массы, момента импульса и энергии.

Для масштабирования элементов решения системы уравнений вводится операция приведения уравнений к безразмерному виду. При сохранении всех соотношение между газодинамическими величинами добавляется связь давления с вектором магнитного поля. В результате получим следующие соотношение:

$$p_0 = B_0^2$$

где  $p_0$  – характерное давление,  $B_0$  – характерное значение модуля магнитного поля. Для задания магнитного поля в явном виде используется соотношение:

$$B_0 = \sqrt{\mu_0 \rho_0 u_0}$$

где  $\rho_0$  – характерная плотность,  $u_0$  – характерная скорость,  $\mu_0$  – магнитная постоянная (или магнитная проницаемость вакуума). Последняя формула важная в связи с тем, что очень часто магнитное поле задается своим значением, а не отношение энергии магнитного поля к внутренней или кинетической энергии, что требует аккуратного пересчета величины магнитного поля, которое явно используется в уравнениях.

#### 2.2.2 Постановка начальных и краевых условий

Также как и для газодинамических уравнений для математически полной постановки задачи требуется постановка краевых и начальных условий. Особенностью МГД постановок астрофизических задач является тот факт, что в качестве краевых используются периодические краевые условия. Поэтому главной проблемой становится постановка начальных данных так, что было выполнено условие бездивергентности магнитного поля:

$$\nabla \cdot B = 0$$

В рассматриваемых в настоящей работе задачах в качестве начальных данных используется постоянный вектор магнитного поля вдоль выбранной оси, вдоль остальных осей начальное магнитное поле нулевое. Очевидно, что условие бездивергентности удовлетворяется.

#### 2.2.3 Условие бездивергентности магнитного поля

Условие бездивергентности магнитного поля записывается в виде:

$$\nabla \cdot B = 0$$

Для выполнения этого условия используется формулировка на основе теореме Стокса. Для этого вводится вектор электрического поля  $\vec{E} = -\vec{u} \times \vec{B}$ , который в ходе расчета одного шага по времени с помощью Flux-CT схемы [37] определяется по значением соответствующих компонент скорости и магнитного поля, а затем происходит пересчет магнитного поля по формуле:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times E$$

При этом, если в начале шага по времени условие бездивергентности магнитного поля было выполнено, то оно имеет место и по окончании расчета очередного временного шага.

#### 2.2.4 Законы сохранения

При учете магнитного поля в общем случае закон сохранения полной энергии системы (сумма кинетической, внутренней, магнитной и потенциальной энергий) при условии отсутствии потоков газа через границу можно записать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V} \left( \rho \varepsilon + \frac{\rho \vec{u}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2} + \frac{\rho \Phi}{2} \right) dV = 0$$

В случае постоянства потенциала во времени  $\frac{\partial \Phi_0}{\partial t} = 0$  закон сохранения полной энергии газа можно переписать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V} \left( \rho \varepsilon + \frac{\rho \vec{u}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2} + \rho \Phi_0 \right) dV = 0$$

В ряде задач МГД моделирования взаимодействия галактик с межгалактическим ветром, а также динамики молекулярных облаков средством контроля корректности численного решения будет служить закон сохранения полной (сумма кинетической, внутренней, магнитной и потенциальной) энергии.

#### 2.2.5 Коррекция дисбаланса энергии и гарантия неубывания энтропии

Аналогично уравнениям газовой динамики главная проблема при численном решении уравнений магнитной газовой динамики является дисбаланс между суммой внутренней, магнитной энергии и полной механической энергии, который выражается в падении энтропии, что приводит к получению некорректного численного решения. Для решения этой проблемы используется переопределенная система уравнений гравитационной магнитной газовой динамики и состоит в двух преобразованиях:

1. Коррекция внутренней энергии (или энтропии) в области с основной плотностью газа (аналогично работе [111]):

$$\rho \epsilon = \left(\rho E - \frac{\rho \vec{u}^2}{2} - \frac{\vec{B}^2}{2}\right), \frac{\rho}{\rho_{\text{max}}} > 10^{-5}$$

2. Коррекция длины вектора скорости в области разреженного газа (фактически на границе газ-вакуум) (аналогично работе [264]):

$$|\vec{u}| = \sqrt{\frac{2(\rho E - \rho \epsilon - \frac{\vec{B}^2}{2})}{\rho}}, \frac{\rho}{\rho_{\max}} \le 10^{-5}$$

Напомним, что такой подход для решения уравнений магнитной газовой днамики используется в работах [65, 75].

#### 2.2.6 Формулировка с учетом космологического расширения

В случае космологического моделирования и использования расширяющихся (comoving в зарубежной литературе) координат переопределенная система уравнений гравитационной магнитной газовой динамики в имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{a} \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\rho\vec{u}}{\partial t} + \frac{1}{a}\nabla\cdot(\rho\vec{u}\vec{u} - \frac{1}{a}\vec{B}\vec{B}) &= \frac{1}{a}\nabla p^* - \frac{1}{a^2}\rho\nabla(\Phi) - H\rho\vec{u} \\ \frac{\partial\rho E}{\partial t} + \frac{1}{a}\nabla\cdot(\rho E\vec{u} - \frac{1}{a}\vec{B}(\vec{B},\vec{u})) &= -\frac{1}{a}\nabla\cdot(p^*\vec{u}) - \frac{1}{a^2}(\rho\nabla(\Phi),\vec{u}) - 2H\rho E - \frac{H}{2a}\vec{B}\vec{B} \\ \frac{\partial\rho\varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{a}\nabla\cdot(\rho\epsilon\vec{u}) &= -\frac{1}{a}(\gamma - 1)\rho\epsilon\nabla\cdot\vec{u} - 2H\rho\varepsilon \end{aligned}$$

Закон поведения магнитного поля:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{a} \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B})$$

Условие бездивергентности магнитного поля:

$$\nabla \cdot B = 0$$

Связь полной механической, внутренней и кинетической энергий:

$$\rho E = \frac{1}{2}\rho \vec{u}^2 + \rho \varepsilon + \frac{1}{2a}\vec{B}^2$$

уравнение состояния для идеального газа:

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$$

полное давление

$$p^* = p + \frac{1}{2a}\vec{B}^2$$

уравнение Пуассона записывается в виде:

$$\Delta \Phi = 4\pi G \left( \rho - \rho_0 \right)$$

где *p* – давление газа, *ρ* – плотность газа, *ρ*<sub>0</sub> – средняя плотность газа, *ū* – скорость газа, *B* – вектор магнитного поля, *E* – плотность полной механической энергии газа, *Φ* – гравитационный потенциал, *ε* – плотность внутренней энергии газа, *γ* – показатель адиабаты, *H* – постоянная Хаббла.

#### 2.3 Бесстолкновительная модель

Для моделирования темной материи и звездной компоненты в задачах космологического моделирования, а также пылевой компоненты в задачах об эволюции протопланетного диска необходимо моделировать бесстолкновительную среду. Для моделирования бесстолкновительной компоненты традиционно используется модель N-тел. Такая модель естественным образом описывает бесстолкновительное свойство среды и безальтернативна в случае необходимости описания каждой отдельной частицы, что имеет место, например, в задачах эволюции протопланетного диска. Однако, модель N-тел имеет недостатки в виде ложного образования энтропии при малом числе частиц в некоторой подобласти, увеличение накладных расходов и сложности балансировки загрузки [181].

В задачах центрального столкновения галактик, которая будет рассматриваться в заключительной главе настоящей работы, бесстолкновительная компонента была смоделирована в виде центрального тела с аналитическим заданием потенциала

92

[21, 263]. Такой способ при описания бесстолкновительной компоненты имеет значительные ограничения в случае сложной геометрии или в случае не центральных столкновений. Как альтернатива может быть использована модель газовой динамики с нулевой температурой [73]. Такой подход был использован для моделирования пылевой компоненты [207].

Альтернативой для модели N-тел может служить модель, основанная на первых моментах уравнения Болцмана [181, 220, 259, 260]. Была экспериментально обоснована возможность использования такой модели для описания бесстолкновительной компоненты сталкивающихся галактик [150], что также будет изложено далее в настоящей работе. Конечно, такая модель не является универсальной, и может быть использована при выполнении условий: нас интересует поведения кластера бесстолкновительной компоненты (что справедливо для динамики звезд в масштабах галактики); скорость движения кластера, как правило, имеет направленное движение и малую дисперсию скоростей (что также имеет место в случае взаимодействующих галактик, более того именно дисперсия скоростей звездной компоненты и наблюдается в галактиках); отсутствуют теплопроводные свойства (что характерно для всех астрофизических задач).

Несомненным преимуществом модели, основанной на первых моментах уравнения Больцмана, является возможность термодинамически согласованного фазового перехода между газовой и звездной компонентами. В случае модели N-тел при фазовом переходе сохраняется масса и момент импульса, однако теряется энтропия системы. Например, если в случае звездообразования при переходе из газа в бесстолкновительную компоненту сохраняется внутренняя энергия системы, теряя при этом массу и момент импульса, что фактически приводит к росту энтропии газа в этой области, то в случае эффекта от взрыва сверхновых при переходе от звездной компоненты в газ в случае модели N-тел отсутствует вклад во внутреннюю энергию газа. Кроме того, для описания модели могут быть использованы единые численные методы и параллельные алгоритмы. Следовательно, они могут быть эффективно реализованы на суперЭВМ, в том числе и на гибридных. Главным недостатком модели, основанной на первых моментах уравнения Больцмана, является её ограничение на описание динамики небольшого числа тел, что имеет место в случае протопланетных дисков. Однако, такая задача может быть рассмотрена в двумерной динамике, что требует меньших в отличие от трехмерного моделирования взаимодействующихся галактик вычислительных ресурсов и следовательно менее требовательна к численным ме-

93

тодам в плане их производительности. Далее приведем описание каждой модели и проведем их сравнение.

#### 2.3.1 Бесстолкновительная модель N-тел

В рамках модели N-тел будем рассматривать множество частиц, обладающих массой и скоростью. При моделировании динамики частиц основная алгоритмическая сложность состоит в определении силы, действующей на каждую частицу со стороны других частиц. Кроме этого необходимо учитывать взаимодействие гравитационных полей газа и частиц. В настоящей работе используется метод Particle-Mesh [116], который позволяет сократить вычислительные затраты на этом этапе моделирования. Суть метода заключается в разбиение расчетной области на конечное множество ячеек. В общем случае такое разбиение может не совпадать с расчетной сеткой газовой компоненты, но в настоящей работе такой подход не используется.

У данного метода существует весомый недостаток – точность. При использовании классического подхода точность расчета силы притяжения зависит только от точности суммирования. В этом же методе существует несколько источников погрешности:

- Вычисление плотности частицы в ячейке. Как и в методе Харлоу, здесь не избежать колебаний плотности при переходе частицы из ячейки в ячейку, что приводит к нефизичным флуктуациям решения.
- 2. Вычисление гравитационной силы. Гравитационный потенциал привязывается не к частице, а к центру ячейки.

Чтобы уменьшить влияние этих факторов плотность частицы в ячейке и сила, действующая на нее, вычисляются по методу Clouds-In-Cells (CIC) [54]. При таком подходе считается, что координаты частицы – координаты центра массы "облака" конечного размера. Плотность такого облака распределяется между ячейками, в которые оно попало (см. рис. 9). Таким образом, плотность частиц в некоторой ячейке и сила, действующая на частицу, вычисляются как:

$$\rho_{ij} = \sum_{clouds} W_{ij}(x, y) m(x, y)$$

где ядро сглаживания для ячейки (i, j) имеет вид:

$$W_{ij}(x,y) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x - x_i}{h_x}\right) \left(1 - \frac{y - y_j}{h_y}\right) & |x - x_i| \le h_x, |y - y_j| \le h_y \\ 0 & other \end{cases}$$



Рис. 9: Плотность частицы распределится между ячейками (i, j), (i + 1, j), (i, j + 1),(i + 1, j + 1)

Данный подход, конечно же, не решает проблемы полностью, но он позволяет существенно сократить ошибку вычислений, что подробно рассмотрено в [54].

Далее для полученного распределения плотности решается уравнение Пуассона

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho$$

где  $\rho$  – плотность частиц,  $\Phi$  – создаваемый частицами гравитационный потенциал. Зная потенциал вычисляется сила притяжения между частицами:

$$F(x,y) = \sum_{i,j} W_{ij}(x,y) \nabla \Phi_{ij}$$

где ядро сглаживание было определено ранее, таким образом происходит движение частиц.

#### 2.3.2 Гидродинамическая модель с нулевой температурой

Для уравнений гидродинамики с нулевой температурой используется редуцированная система уравнений газовой динамики, в которой остается только закон сохранения массы и момента импульса. Будем рассматривать трехмерную модель динамики самогравитирующего газа в декартовых координатах, дополненную уравнением Пуассона для гравитационного потенциала.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) &= 0\\ \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) &= -\rho \nabla (\Phi) \end{aligned}$$

уравнение Пуассона записывается в виде:

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho$$

где *ρ* – плотность среды, *u* – скорость среды, Φ – гравитационный потенциал. Данная система уравнений представляет собой дифференциальную форму законов сохранения массы и момента импульса. Так как эти уравнения являются следствием уравнений гравитационной газовой динамики мы не будем подробно останавливаться на их анализе.

#### 2.3.3 Модель бесстолкновительной гидродинамики

В этом подразделе будет описана модель бесстолкновительной гидродинамики, основанная на первых моментах бесстолкновительного уравнения Больцмана.

Уравнения для первых моментов уравнения Больцмана. Динамика бесстолкновительной компоненты описывается бесстолкновительным уравнением Больцмана для функции распределения частиц f(x,t,w) в шестимерном фазовом пространстве координат x – скорости w. Далее для описания полной системы уравнений и ее вывода будет использовано правило суммирования Эйнштейна для явного вида слагаемых связанных с давлением. Бесстолкновительное уравнение Больцмана имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + w_k \frac{\partial f}{\partial x_k} + a_k \frac{\partial f}{\partial w_k} = 0$$

где  $a_k \equiv dw_k/dt$ . Проинтегрируем в пространстве скоростей  $d^3w = dw_x dw_y dw_z$  умноженную на массу *m* частицы функцию распределения, в результате получим значение плотности:

$$n = \int m f d^3 w$$

Проинтегрируем в пространстве скоростей  $d^3w$  умноженную на момент импульса  $m\vec{w}$  частицы функцию распределения, в результате получим значение скорости:

$$\vec{v} = n^{-1} \int m \vec{w} f d^3 w$$

Проинтегрируем в пространстве скоростей  $d^3w$  умноженную на произведение скоростей  $w_iw_j$  частицы функцию распределения, в результате получим симметричный тензор дисперсии скоростей:

$$\Pi_{ij} = n^{-1} \int m(v_i - w_i)(v_k - w_k) f d^3 w$$

В этом случае будем рассматривать переопределенную систему уравнений для первых моментов бесстолкновительного уравнения Больцмана в декартовых координатах, дополненную уравнением Пуассона для гравитационного потенциала. Закон сохранения массы:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n v_k}{\partial x_k} = 0$$

Закон сохранения момента импульса:

$$\frac{\partial nv_i}{\partial t} + \frac{\partial nv_iv_k}{\partial x_k} = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} - na_i$$

Закон сохранения тензора полной энергии:

$$\frac{\partial nW_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial nE_{ij}v_k}{\partial x_k} = -\frac{\partial(\Pi_{jk}v_i + \Pi_{ik}v_j)}{\partial x_k} - nv_ia_j - nv_ja_i$$

Закон поведения тензора дисперсии скоростей:

$$\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ij} v_k}{\partial x_k} = -\Pi_{jk} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \Pi_{ik} \frac{\partial v_j}{\partial x_k},$$

Гравитационная сила

$$a_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$$

Уравнение Пуассона

$$\Delta \Phi = 4\pi G n$$

Связь тензора дисперсии скоростей и тензора полной энергии:

$$nW_{ij} = \Pi_{ij} + nv_i v_j$$

где *n* – плотность бесстолкновительной компоненты,  $\Pi_{ij}$  – симметричный тензор дисперсии скоростей,  $\vec{v}$  – вектор скорости,  $nW_{ij}$  – тензор полной энергии,  $\Phi$  – гравитационный потенциал.

В ряде задач рассмотрение полного тензора дисперсии скоростей бывает избыточным [181]. Тогда используется диагональный тензор дисперсии скоростей, а уравнения для первых моментов бесстолкновительного уравнения Больцмана в декартовых координатах можно переписать в более компактной операторной форме.

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\vec{v}) &= 0\\ \frac{\partial n\vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (n\vec{v}\vec{v}) &= -\nabla\Pi - n\nabla(\Phi)\\ \frac{\partial nW}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho W\vec{v}) &= -\nabla \cdot (\Pi\vec{v}) - (n\nabla(\Phi),\vec{v})\\ \frac{\partial\Pi_{\xi\xi}}{\partial t} + \nabla \cdot (\Pi_{\xi\xi}\vec{v}) &= -2\Pi\nabla \cdot \vec{v}\\ nW &= \frac{1}{2}n\vec{v}^2 + \frac{\Pi_{xx} + \Pi_{yy} + \Pi_{zz}}{2} \end{aligned}$$

Уравнение Пуассона остается без изменений

$$\Delta \Phi = 4\pi G n$$

где *n* – плотность бесстолкновительной компоненты, *v* – скорость бесстолкновительной компоненты, *W* – плотность полной механической энергии бесстолкновительной компоненты, Ф – гравитационный потенциал,  $\Pi = (\Pi_{xx}, \Pi_{yy}, \Pi_{zz})$  – диагональный тензор дисперсии скоростей бесстолкновительной компоненты.

Для масштабирования элементов решения системы уравнений вводится операция приведения уравнений к безразмерному виду. Соотношения имеют форму, аналогичную соотношениям между газодинамическими величинами. В результате получим следующие соотношение:

$$L_0 = t_0 v_0$$
  $\Pi_0 = n v_0^2$   $\Phi_0 = v_0^2$   $W_0 = v_0^2$   $v_0 = \sqrt{\frac{GM_0}{L_0}}$ 

где  $L_0$  – характерная длина,  $t_0$  – характерное время,  $v_0$  – характерная скорость,  $n_0$  – характерная плотность,  $\Pi_0$  – характерное значение тензора дисперсии скоростей,  $\Phi_0$  – характерное значение гравитационного потенциала,  $E_0$  – характерное значение плотности тензора полной энергии,  $M_0 = n_0 L_0^3$  – характерная масса. В качестве характерных величин задается значение массы  $M_0$  и длины  $L_0$ . Для задания тензора дисперсии скоростей задается явный вид значения дисперсии, в отличие от давления, играющего аналогичную роль в уравнениях газовой динамики.

Постановка начальных и краевых условий. Также как и для газодинамических уравнений для математически полной постановки задачи требуется постановка краевых и начальных условий. В уравнениях для первых моментов бесстолкновительного уравнения Больцмана для постановки граничных и краевых условий используются те же принципы, что и для уравнений газовой динамики. Для равновесной сферически симметричной конфигурации используется уравнения:

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = 4\pi n \\ -\frac{d\Pi}{dr} - n \frac{d\phi}{dr} = 0 \end{cases}$$

где *n* – профиль плотности, *ф* – гравитационный потенциал, П – диагональный элемент тензора дисперсии скоростей. Стоит отметить, что все диагональные элементы предполагаются равными, а внедиагональные элементы в начальный момент времени нулевые. Таким образом, для профиля плотности:

$$n(r) = \begin{cases} 2r^3 - 3r^2 + 1 & r \le 1\\ 0 & r > 1 \end{cases}$$

профиль гравитационного потенциала есть:

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{4\pi}{15}r^5 - \frac{3\pi}{5}r^4 + \frac{2\pi}{3}r^2 - \frac{3\pi}{5} & r \le 1\\ -\frac{4\pi}{15r} & r > 1 \end{cases}$$

профиль диагонального элемента тензора дисперсии скоростей:

$$\Pi(r) = \begin{cases} -\frac{\pi}{3}r^8 + \frac{44\pi}{35}r^7 - \frac{6\pi}{5}r^6 - \frac{4\pi}{5}r^5 + \frac{8\pi}{5}r^4 - \frac{2\pi}{3}r^2 + \frac{\pi}{7} & r \le 1\\ 0 & r > 1 \end{cases}$$

Масса бесстолкновительной компоненты М вычисляется по формуле:

$$M = 4\pi \int_r r^2 \xi(r) dr = \frac{4\pi}{15}$$

Законы сохранения. В уравнениях для первых моментов бесстолкновительного уравнения Больцмана в случае полного тензора дисперсии скоростей единый закон сохранения записать не удается. Поэтому в этом случае контролируется закон сохранения каждого элемента тензора полной энергии. В случае диагонального тензора дисперсии скоростей закон сохранения полной энергии (суммы кинетической, аналога внутренней и потенциальной) при условии отсутствии потоков газа через границу можно записать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V} \left( \frac{\Pi_{xx} + \Pi_{yy} + \Pi_{zz}}{2} + \frac{n\vec{v}^2}{2} + \frac{\rho\Phi}{2} \right) dV = 0$$

В случае постоянства потенциала во времени  $\frac{\partial \Phi_0}{\partial t} = 0$  закон сохранения полной энергии газа можно переписать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V} \left( \frac{\Pi_{xx} + \Pi_{yy} + \Pi_{zz}}{2} + \frac{n\vec{v}^{2}}{2} + \rho\Phi_{0} \right) dV = 0$$

В ряде задач моделирования динамики галактик средством контроля корректности численного решения будет служить закон сохранения полной (сумма кинетической, внутренней и потенциальной) энергии. Контроль дисбаланса энергии. Аналогично уравнениям газовой динамики главная проблема при численном решении уравнений для первых моментов бесстолкновительного уравнения Больцмана является дисбаланс между внутренней и полной механической энергии. Для решения этой проблемы используется переопределенная система уравнений и состоит в двух преобразованиях:

1. Коррекция полного тензора дисперсии скоростей аналогично работе [111]:

$$\Pi_{ij} = (nW_{ij} - nv_iv_j)$$

при этом корректировка происходит независимо от плотности бесстолкновительной компоненты, что связано с невозможностью скорректировать скорость в области малой плотности. В случае если рассматривается диагональный тензор дисперсии скоростей, то происходит корректировка величины каждого из элементов диагонали

$$\Pi_{xx} = \frac{2\Pi_{xx}^{0}}{\Pi_{xx}^{0} + \Pi_{yy}^{0} + \Pi_{zz}^{0}} \left( nW - \frac{1}{2}n\vec{v}^{2} \right), \frac{n}{n_{\max}} > 10^{-5}$$
$$\Pi_{yy} = \frac{2\Pi_{yy}^{0}}{\Pi_{xx}^{0} + \Pi_{yy}^{0} + \Pi_{zz}^{0}} \left( nW - \frac{1}{2}n\vec{v}^{2} \right), \frac{n}{n_{\max}} > 10^{-5}$$
$$\Pi_{zz} = \frac{2\Pi_{zz}^{0}}{\Pi_{xx}^{0} + \Pi_{yy}^{0} + \Pi_{zz}^{0}} \left( nW - \frac{1}{2}n\vec{v}^{2} \right), \frac{n}{n_{\max}} > 10^{-5}$$

Верхний индекс <sup>0</sup> здесь добавления для указания, что решение получено из уравнений для поведения тензора дисперсии скоростей.

2. Коррекция длины вектора скорости в разреженной области (что используется только в случае диагонального тензора дисперсии скоростей), аналогично работе [264]:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\frac{2nW - (\Pi_{xx} + \Pi_{yy} + \Pi_{zz})}{n}}, \frac{n}{n_{\max}} \le 10^{-5}$$

Напомним, что аналогичный подход используется в работах [65, 75].

Формулировка с учетом космологического расширения. Для задач космологического моделирования в настоящей работе будут использоваться уравнения с диагональным тензором дисперсии скоростей, что связано с малостью внедиагональных членов [48]. В случае космологического моделирования и использования расширяющихся (comoving в зарубежной литературе) координат переопределенная система уравнений для первых моментов бесстолкновительного уравнения Больцмана имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} &+ \frac{1}{a} \nabla \cdot (n\vec{v}) = 0 \\ \frac{\partial n\vec{v}}{\partial t} &+ \frac{1}{a} \nabla \cdot (n\vec{v}\vec{v}) = -\frac{1}{a} \nabla \Pi - \frac{n}{a^2} \nabla (\Phi) - Hn\vec{v} \\ \frac{\partial nW}{\partial t} &+ \frac{1}{a} \nabla \cdot (\rho W\vec{v}) = -\frac{1}{a} \nabla \cdot (\Pi\vec{v}) - \frac{1}{a^2} (n\nabla(\Phi), \vec{v}) - 2HnW \\ \frac{\partial \Pi_{\xi\xi}}{\partial t} &+ \frac{1}{a} \nabla \cdot (\Pi_{\xi\xi}\vec{v}) = -\frac{2}{a} \Pi \nabla \cdot \vec{v} - 2H\Pi_{\xi\xi} \\ nW &= \frac{1}{2} n\vec{v}^2 + \frac{\Pi_{xx} + \Pi_{yy} + \Pi_{zz}}{2} \end{aligned}$$

Уравнение Пуассона переписывается в виде:

$$\Delta \Phi = 4\pi G \left( n - n_0 \right)$$

где n – плотность бесстолкновительной компоненты,  $n_0$  – средння плотность бесстолкновительной компоненты,  $\vec{v}$  – скорость бесстолкновительной компоненты, W– плотность полной механической энергии бесстолкновительной компоненты,  $\Phi$  – гравитационный потенциал,  $\Pi = (\Pi_{xx}, \Pi_{yy}, \Pi_{zz})$  – диагональный тензор дисперсии скоростей бесстолкновительной компоненты, H – постоянная Хаббла.

#### 2.3.4 Аналитическая модель бесстолкновительной компоненты

В задаче центрального столкновения галактик используется аналитическая модель потенциала для задания бесстолкновительной компоненты. Звездный компонент галактик моделируется центральным телом эллипсоидальной формы с заданной массой *M*, дающим вклад в общее значение потенциала. Этот вклад задаётся аналитически:

$$\Phi_0(r) = \begin{cases} -\frac{M(r^2-3)}{2}, & r \le 1, \\ -\frac{M}{r}, & r > 1. \end{cases}$$

где *r* – нормированное расстояние до центра звездного компонента. Изменение скорости звёздных компонент галактик при гравитационном взаимодействии мало. Для этого можно сделать следующую оценку:

$$\frac{E_{grav}}{E_{kin}} \approx 0.1$$

Поэтому движение звездного компонента в данной задаче происходит с постоянной скоростью. Столкновений звезд при этом не происходит, поскольку расстояния между ними достаточно велики.



Рис. 10: Столкновение двух волн плотности при использовании различных моделей, t = 1.2

#### 2.3.5 Сравнение бесстолкновительных моделей

Для моделирования столкновения двух волн плотности мы будем использовать три модели: модель частиц, которые двигаются с начальной скоростью и не сталкиваются (модель 1); модель газовой динамики с нулевой температурой (модель 2); модель, использующую первые моменты уравнения Больцмана (модель 3). В последнем случае при одномерной постановке модель эквивалентна газодинамической модели с  $\gamma = 3$ . На рисунке (10) показаны распределения плотности при использовании трех моделей. В случае второй модели решение представляет собой  $\delta$ -функцию, что делает непригодным использование этой модели для описания бесстолкновительной компоненты. В случае модели, основанной на первых моментах бесстолкновительного уравнения Больцмана мы видим разлет волн после их столкновения, что может быть расширено и на случай столкновения галактик. Данный факт и был подтвержден в работе [150].

#### 2.4 Модель подсеточной физики

Подсеточная физика играет большую роль в моделировании астрофизических течений. Так на космологических масштабах и на масштабах галактик важную роль играет процесс звездообразования и эффект от взрыва сверхновых звезд, особую роль играет химокинетика, а также связанные с ней процессы охлаждения и нагревания. На масштабах молекулярных облаков и межзвездной среды химокинетика играет также важную роль, но в отличие от космологических масштабов, где работает первозданная (в зарубежной литературе примордиальная) химия, важным катализатором является пылевая компонента. Таким образом, остановимся на следующих наиболее важных физических процессах:

- 1. Самосогласованная химокинетическая модель.
- 2. Процесс звездообразования и эффект от взрыва сверхновых звезд.
- 3. Охлаждение и нагревание газа.

Для описания будем использовать двухфазную модель, основанную на уравнениях многокомпонентной гравитационной газовой динамики и уравнениях для первых моментов бесстолкновительного уравнения Больцмана с диагональным тензором дисперсии скоростей. Система уравнений односкоростной многокомпонентной газовой динамики в эйлеровых координатах имеет вид:

$$\begin{split} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) &= S - \mathcal{D}, \\ \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \vec{u}) &= s_i + S \frac{\rho_i}{\rho} - \mathcal{D} \frac{\rho_i}{\rho}, \\ \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) &= -\nabla p - \rho \nabla (\Phi) + \vec{v} S - \vec{u} \mathcal{D}, \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \vec{u}) &= -\nabla \cdot (p \vec{v}) - (\rho \nabla (\Phi), \vec{u}) - \Lambda + \Gamma + \varepsilon \frac{S}{\rho} - \varepsilon \frac{\mathcal{D}}{\rho}, \\ \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \epsilon \vec{u}) &= -(\gamma - 1) \rho \epsilon \nabla \cdot \vec{u} - \Lambda + \Gamma + \varepsilon \frac{S}{\rho} - \varepsilon \frac{\mathcal{D}}{\rho}, \\ \rho E &= \frac{1}{2} \rho \vec{u}^2 + \rho \varepsilon, \\ p &= (\gamma - 1) \rho \varepsilon, \end{split}$$

Уравнения для первых моментов бесстолкновительного уравнения Больцмана в эйлеровых координатах имеют вид:

0

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\vec{v}) &= \mathcal{D} - \mathcal{S}, \\ \frac{\partial n\vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (n\vec{v}\vec{v}) &= -\nabla\Pi - n\nabla(\Phi) + \vec{u}\mathcal{D} - \vec{v}\mathcal{S}, \\ \frac{\partial \rho W}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho W\vec{v}) &= -\nabla \cdot (\Pi\vec{v}) - (n\nabla(\Phi), \vec{v}) + \varepsilon \frac{\mathcal{D}}{\rho} - \varepsilon \frac{\mathcal{S}}{\rho}, \\ \frac{\partial \Pi_{\xi\xi}}{\partial t} + \nabla \cdot (\Pi_{\xi\xi}\vec{v}) &= -2\Pi\nabla \cdot \vec{u} + \varepsilon \frac{\mathcal{D}}{3\rho} - \varepsilon \frac{\mathcal{S}}{3\rho}, \\ \rho W &= \frac{1}{2}\rho \vec{v}^2 + \frac{\Pi_{xx} + \Pi_{yy} + \Pi_{zz}}{2}, \end{aligned}$$

Уравнение Пуассона для обеих фаз записывается в виде:

$$\Delta \Phi = 4\pi G(\rho + n),$$

где p – давление газа,  $\rho_i$  – плотность *i*-й компоненты газа,  $s_i$  – скорость образования *i*-й компоненты газа,  $\rho = \sum_i \rho_i$  – плотность газовой смеси, n – плотность бесстолкновительной компоненты,  $\vec{u}$  – скорость газовой компоненты,  $\vec{v}$  – скорость бесстолкновительной компоненты, E – плотность полной механической энергии газа, W – плотность полной механической энергии бесстолкновительной компоненты,  $\rho$  – гравитационный потенциал,  $\varepsilon$  – плотность внутренней энергии газа,  $\gamma$  – эффективный показатель адиабаты,  $\Pi = (\Pi_{xx}, \Pi_{yy}, \Pi_{zz})$  – диагональные компоненты тензора дисперсии скоростей, S – скорость образования сверхновых звезд,  $\mathcal{D}$  – скорость звездообразования,  $\Lambda$  – функция охлаждения,  $\Gamma$  – функция нагревания. Далее детально опишем подсеточные процессы.

#### 2.4.1 Функция охлаждения и нагревания

Галактический газ, разогретый за счет столкновения до температуры ~  $10^4 - 10^8 K$ описывается функцией охлаждения [242]:

$$\Lambda \simeq 10^{-22} n_H^2 cm^{-3} erg$$

где  $n_H$  – концентрация атомарного водорода. Далее функция охлаждения (также как и функция нагревания) будет связаны с другими подсеточными процессами.

## 2.4.2 Термодинамически согласованная модель звездообразования и взрыва сверхновых

Будем использовать следующее необходимое условие процесса звездообразования, сформулированное в виде [138]:

$$T < 10^4 K \qquad \bigtriangledown \cdot \vec{u} < 0 \qquad \rho > 1.64 \frac{M_\odot}{pc^{-3}}$$

тогда скорость звездообразования может быть сформулирована в виде:

$$\mathcal{D} = \frac{dn}{dt} = \mathcal{C} \frac{\rho}{\tau_{dyn}} = \mathcal{C} \rho^{3/2} \sqrt{\frac{32G}{3\pi}}$$

где C = 0.034 – коэффициент эффективности звездообразования на масштабах галактик, на космологических масштабах используется значение коэффициента C = 0.03. Скорость образования сверхновых звезд записывается в виде [234]:

$$\mathcal{S} = \frac{d\rho}{dt} = \beta \mathcal{C} \frac{n}{\tau_{dyn}} = \beta \mathcal{C} n^{3/2} \sqrt{\frac{32G}{3\pi}}$$

где  $\beta = 0.1$  – коэффициент взрыва молодых звезд. При взрыве одной звезды солнечной массы выделяется энергия  $10^{51}$  эрг, в этом случае функция нагревания за счет взрыва сверхновых может быть записана в виде:

$$\Gamma = 10^{51} \frac{M^{SN}}{M_{\odot}} erg$$

где  $M^{SN}$  – масса сверхновых звезд в локальном объеме.

#### 2.4.3 Модель химической кинетики

В рамках модели химической кинетики будем рассматривать три модели на разных масштабах: примордиальная химокинетика на космологических масштабах, модель химокинетики на пыли с учетом ионизации на масштабах межзвездной среды, и аналитическую модель образования молекулярного водорода на галактических масштабах.

Модель примордиальной химокинетики. Будем рассматривать химическую эволюцию основных форм водорода и гелия [23, 26, 114]. Для этого будем использовать следующие 20 химических реакций.

- (1) Столкновительная ионизация  $H + e \longrightarrow H^+ + 2e$ , скорость реакции (здесь и далее в см<sup>3</sup>/сек)  $k_1$  приведена в таблице (6).
- (2) Столкновительная рекомбинация с излучением  $H^+ + e \longrightarrow H + \gamma$ , скорость реакции  $k_2$  в случае T > 5500K приведена в таблице (6), при меньшей температуре  $k_2 = 3.92 \times 10^{-13} \times T^{-0.6353}$ .
- (3) Столкновительная ионизация с излучением  $H + e \longrightarrow H^- + \gamma$ , скорость реакции  $k_3 = 6.77 \times 10^{-15} \times T^{0.8779}$ .
- (4) Диссоциативное присоединение электронов  $H^- + H \longrightarrow H_2 + e$ , скорость реакции  $k_4$  в случае T > 1160K приведена в таблице (6), при меньшей температуре  $k_4 = 1.43 \times 10^{-9}$ .
- (5) Ассоциация с излучением  $H + H^+ \longrightarrow H_2^+ + \gamma$ , скорость реакции в случае  $T > 6700K k_5 = 5.81 \times 10^{-16} \left(\frac{T}{56200}\right)^{-0.6657 \times \log_{10}(T/56200)}$ , при меньшей температуре  $k_5 = 1.85 \times 10^{-23} \times T^{1.8}$ .

- (6) Рекомбинация водорода  $H_2^+ + H \longrightarrow H_2 + H^+$ , скорость реакции  $k_6 = 6 \times 10^{-10}$ .
- (7) Рекомбинация молекулярного водорода  $H_2 + H^+ \longrightarrow H_2^+ + H$ , скорость реакции  $k_7$  в случае T > 350K приведена в таблице (6), при меньшей температуре реакция не происходит.
- (8) Столкновительная диссоциация  $H_2 + e \longrightarrow 2H + e$ , скорость реакции в случае  $T > 350K k_8 = 5.6 \times 10^{-11} \times \sqrt{T} \times \exp^{-102124/T}$ , при меньшей температуре реакция не происходит.
- (9) Первая реакция столкновительного отделения электронов  $H^- + e \longrightarrow H + 2e$ , скорость реакции  $k_9$  в случае T > 45K приведена в таблице (6), при меньшей температуре реакция не происходит.
- (10) Вторая реакция столкновительного отделения электронов  $H^- + H \longrightarrow 2H + e$ , скорость реакции  $k_{10}$  в случае T > 45K приведена в таблице (6), при меньшей температуре  $k_{10} = 2.56 \times 10^{-9} \times T^{1.78186}$ .
- (11) Нейтрализация  $H^- + H^+ \longrightarrow 2H + \gamma$ , скорость реакции  $k_{11} = 6.5 \times 10^{-9} \times T^{-1/2}$ .
- (12) Столкновительная ассоциация  $H^- + H^+ \longrightarrow H_2^+ + e$ , скорость реакции  $k_{12} = 10^{-8} \times T^{-0.4}$ .
- (13) Диссоциативная рекомбинация  $H_2^+ + e \longrightarrow 2H + \gamma$ , скорость реакции при температуре  $T > 617K k_{13} = 1.32 \times 10^{-6} \times T^{-0.76}$ , при меньшей температуре  $k_{13} = 10^{-8}$ .
- (14) Молекулярная нейтрализация  $H_2^+ + H^- \longrightarrow H + H_2$ , скорость реакции  $k_{14} = 5 \times 10^{-7} (100 \times T)^{-0.5}$ .
- (15) Столкновительная молекулярная ассоциация  $3H \longrightarrow H_2 + H$ , скорость реакции при температуре  $T > 300K \ k_{15} = 1.3 \times 10^{-32} (T/300)^{-1}$ , при меньшей температуре  $k_{15} = 1.3 \times 10^{-32} (T/300)^{-0.38}$ .
- (16) Столкновительная молекулярная диссоциация  $H_2 + H \longrightarrow 3H$ , скорость реакции  $k_{16} = 5 \times 10^{-7} (100T)^{-0.5} \frac{1.0671 \times 10^{-10} \times T^{2.012}}{\exp^{4.463/T} (1+0.2472 \times T)^{3.512}}$ .
- (17) Столкновительная ионизация  $He + e \longrightarrow He^+ + 2e$ , скорость реакции  $k_{17}$  в случае T > 900K приведена в таблице (6), при меньшей температуре реакция не происходит.

- (18) Столкновительная рекомбинация с излучением  $He^+ + e \longrightarrow He + \gamma$ , скорость реакции при температуре  $T > 900K \ k_{18} = 3.92 \times 10^{-12} \times T^{-0.6353} + 1.54 \times 10^{-9} \times T^{-1.5} \frac{1 + \frac{0.3}{e^{8.0993/T}}}{e^{40.4966/T}}$ , при меньшей температуре  $k_{18} = 3.92 \times 10^{-13} T^{-0.6353}$ .
- (19) Столкновительная ионизация  $He^+ + e \longrightarrow He^{++} + 2e$ , скорость реакции  $k_{19}$  в случае T > 900K приведена в таблице (6), при меньшей температуре реакция не происходит.
- (20) Столкновительная молекулярная диссоциация  $He^{++} + e \longrightarrow He^{+} + \gamma$ , скорость реакции  $k_{20} = 3.36 \times 10^{-10} \times T^{-0.5} \frac{(T/1000)^{-0.2}}{1+(T/10^6)^{0.7}}$

В вычислительных экспериментах будут использованы классические начальные распределения элементов во Вселенной [114].

Функции охлаждения (здесь и далее в эрг см<sup>-3</sup> с<sup>-1</sup> [23, 26, 114]) для столкновительных реакций:

$$Q_1^{col} = 7.50 \times 10^{-19} \left( 1 + \sqrt{T/10^5} \right)^{-1} \exp^{-118349/T} \times n_e n_H$$
$$Q_2^{col} = 9.10 \times 10^{-27} \left( 1 + \sqrt{T/10^5} \right)^{-1} T^{-0.1687} \exp^{-13179/T} \times n_e^2 n_{He}$$
$$Q_3^{col} = 5.54 \times 10^{-17} \left( 1 + \sqrt{T/10^5} \right)^{-1} T^{-0.397} \exp^{-473638/T} \times n_e n_{He^+}$$

для реакций ионизации:

$$Q_1^{ion} = 2 \times 10^{-11} \times k_1 n_e n_H \qquad Q_2^{ion} = 4 \times 10^{-11} \times k_{17} n_e n_{He} \qquad Q_3^{ion} = 9 \times 10^{-11} \times k_{19} n_e n_{He^+}$$
$$Q_4^{ion} = 5 \times 10^{-27} \left(1 + \sqrt{T/10^5}\right)^{-1} T^{-0.1687} \exp^{-55338/T} \times n_e^2 n_{He^+}$$

для реакций рекомбинаций:

$$Q_1^{rec} = 8.71 \times 10^{-27} (T/1000)^{-0.2} \left(1 + (T/10^6)^{0.7}\right)^{-1} \times n_e n_{H^+}$$
$$Q_2^{rec} = 1.55 \times 10^{-26} T^{0.3647} \times n_e n_{He^+}$$
$$Q_3^{rec} = 1.24 \times 10^{-13} T^{-1.5} \left(1 + 0.3 \exp^{-94000/T}\right) \exp^{-94000/T} \times n_e n_{He^+}$$
$$Q_4^{rec} = 3.48 \times 10^{-26} \sqrt{T} (T/1000)^{-0.2} \left(1 + (T/10^6)^{0.7}\right)^{-1} \times n_e n_{He^+}$$

где  $n_H$  – концентрация атомарного водорода,  $n_{He}$  – атомарного гелия,  $n_e$  – электронов,  $n_{H_2}$  – молекулярного водорода,  $n_{H^+}$  – ионизированного водорода,  $n_{He^+}$  – ионизированного гелия,  $n_{He^{++}}$  – дважды ионизированного гелия. Скорости химических реакций будем представлять в виде  $k = \exp^{\sum_{i=0}^8 A_i \times \log^i(T)}$ . Коэффициенты  $A_i$  для реакций запишем в таблице (6).

Nº	$k_1$	$k_2$	$k_4$	$k_7$	$k_9$	$k_{10}$	$k_{17}$	$k_{19}$
$A_0$	-32.71	-28.61	-20.07	-24.24	-18.01	-20.37	-44.09	-68.71
$A_1$	13.53	-7.24(1)	2.28(1)	3.40	2.36	1.13	23.91	43.93
$A_2$	-5.73	-2.02(2)	3.59(2)	-3.89	-2.82(1)	-1.42(1)	-10.75	-18.48
$A_3$	1.56	-2.38(3)	-4.55(3)	2.04	1.62(2)	8.46(3)	3.05	4.71
$A_4$	-0.28	-3.21(4)	-3.10(4)	-5.41(1)	-3.36(2)	-1.43(3)	-5.68(1)	-7.69(1)
$A_5$	3.48(2)	1.42(5)	1.07(5)	8.41(2)	1.17(2)	2.01(4)	6.79(2)	8.11(2)
$A_6$	-2.63(3)	4.98(6)	-8.36(6)	-7.87(3)	-1.65(3)	8.66(5)	-5.01(3)	-5.32(3)
$A_7$	1.12(4)	5.75(7)	2.23(7)	4.13(4)	1.06(4)	-2.58(5)	2.06(4)	1.97(4)
$A_8$	-2.04(6)	-1.85(8)	0	-9.36(6)	-2.63(8)	2.45(8)	-3.64(6)	-3.16(6)

Таблица 6: Коэффициенты скоростей протекания реакций в форме  $A(N) = A \times 10^{-N}$ 

**Модель химокинетики водорода на пыли.** Для описания химокинетики водорода на пыли были рассмотрены следующие восемь реакций, которые были использованы также в работе [108].

(1) Образование молекулярного водорода [124]:

$$H + H + grain \rightarrow H_2 + grain$$

которая проходит со скоростью  $k_1$  и инициирует нагревание  $\Gamma_1$ .

(2) Первая реакция диссоциации молекулярного водорода [159]:

$$H_2 + H \rightarrow 3H$$

которая проходит со скоростью  $k_2$  и инициирует нагревание  $\Lambda_2$ .

(3) Вторая реакция диссоциации молекулярного водорода [164]:

$$H_2 + H_2 \rightarrow 2H + H_2$$

которая проходит со скоростью  $k_3$  и инициирует охлаждение  $\Lambda_3$ .

(4) Фотодиссоциация молекулярного водорода [108]:

$$H_2 + \gamma \rightarrow 2H$$

которая проходит со скоростью  $k_4$  и инициирует нагревание  $\Gamma_4$ .
(5) Ионизация космическими лучами [108]:

$$H + c.r. \rightarrow H^+ + e$$

которая проходит со скоростью  $k_5$  и инициирует нагревание  $\Gamma_5$ .

(6) Столкновительная ионизация [23]:

$$H + e \to H^+ + 2e$$

которая проходит со скоростью  $k_6$  и инициирует охлаждение  $\Lambda_6$ .

(7) Излучательная рекомбинация [95]:

$$H^+ + e \to H + \gamma$$

которая проходит со скоростью  $k_7$  и инициирует охлаждение  $\Lambda_7$ .

(8) Рекомбинации на пыли [270]:

$$H^+ + e + grain \rightarrow H + grain$$

которая проходит со скоростью  $k_8$  и инициирует охлаждение  $\Lambda_8$ .

Скорости протекания реакций, а также ассоциированные с ними функции охлаждения/нагревания имеют следующий вид. Скорость реакции образования молекулярного водорода в ( $cm^3s^{-1}$ ) и далее:

$$k_1 = \frac{3 \times 10^{-17} \sqrt{T/100} \times n/n_H}{1 + 0.4\sqrt{T/100} + 0.2(T/100) + 0.08(T/100)^2}$$

функция нагревания в  $(ergs \times cm^{-3}s^{-1})$  и далее:

$$\Gamma_1 = 7.2 \times 10^{-12} \frac{n_{H_2}/n}{1 + \frac{4 - 0.416x - 0.327x^2}{n}}$$

где  $x = log(T/10^4)$ .

Скорость первой реакции диссоциации молекулярного водорода:

$$k_2 = \begin{cases} 6.11 \times 10^{-14} \exp\left(-2.93 \times 10^4/T\right) & T > 7390\\ 2.67 \times 10^{-15} \exp\left(-(6750/T)^2\right) & T \le 7390 \end{cases}$$

функция охлаждения:

$$\Lambda_2 = n_{H_2} \frac{L_H}{1 + L_H/L_L}$$

где

$$L_{H} = \begin{cases} 3.9 \times 10^{-19} \exp\left(-6118/T\right) & T > 1087\\ 10^{-19.24 + 0.474x - 1.247x^{2}} & T \le 1087 \end{cases}$$
$$L_{L} = \left(n_{H_{2}}^{0.77} + 1.2n_{H}^{0.77}\right) \times \begin{cases} 1.38 \times 10^{-22} \exp\left(-9243/T\right) & T > 4031\\ 10^{-22.9 - 0.553x - 1.148x^{2}} & T \le 4031 \end{cases}$$

где  $x = log(T/10^4)$ .

Скорость второй реакции диссоциации молекулярного водорода:

$$k_3 = \begin{cases} 5.22 \times 10^{-14} \exp\left(-3.2210^4/T\right) & T > 7291\\ 3.17 \times 10^{-15} \exp\left(-(4060/T) - (7500/T)^2\right) & T \le 7291 \end{cases}$$

функция охлаждения

$$\Lambda_3 = n_{H_2} \frac{L_H}{1 + L_H / L_L}$$

где

$$L_H = 1.1 \times 10^{-13} \exp(-6744/T)$$
$$L_L = 8.18 \times 10^{-13} (n_H k_H + n_{H_2} k_{H_2})$$

где

$$k_{H_2} = 6.29 \times 10^{-15} \times 1.38 \times f(T) / f(4500)$$

где  $f(T) = \sqrt{T} \alpha \exp \alpha$ ,  $\alpha = 1 + (kT)^{-1}$ , k – постоянная Больцмана.

Скорость реакции фотодиссоциации молекулярного водорода :

$$k_4 = \xi_{diss}(0) f_{shield}(N_{H_2}) f_{dust}(A_V)$$

где все компоненты будут рассмотрены в аналитической модели образования молекулярного водорода, функция нагревания

$$\Gamma_4 = 6.4 \times 10^{-13} \times k_4 \ n_{H_2}$$

Скорость реакции ионизации космическими лучами:

$$k_5 = 6 \times 10^{-18} n_{H_2}$$

функция нагревания

$$\Gamma_5 = 1.92 \times 10^{-28} n$$

Скорость реакции столкновительной ионизации:

$$k_6 = \exp\left(-32.7 + 13.5\log(T) - 5.7\log^2(T) + 1.5\log^3(T) - 0.3\log^4(T)\right)$$

$$+3.4(-2)\log^{5}(T) - 2.6(-3)\log^{6}(T) + 1.1(-4)\log^{7}(T) - 2.1(-6)\log^{8}(T)\big)$$

функция охлаждения

$$\Lambda_6 = 2.18 \times 10^{-11} k_6$$

Скорость реакции излучательной рекомбинации:

$$k_7 = 10^{\frac{-10.78+4.68x-0.87x^2+0.08x^3-3.87(-3)x^4}{1-0.38x+0.06x^2-5.1(-3)x^3+2.4(-4)x^4}}$$

где функция x = log(T) и функция охлаждения

$$\Lambda_7 = 4.65 \times 10^{-30} \times T^{0.94} \times \left(\frac{\exp(-0.75 \times 10^{-20} (N_H + N_{H_2}))\sqrt{t}}{n_e}\right)^{0.74/T^{0.068}}$$

Скорость реакции рекомбинации на пыли:

$$k_8 = \frac{12.25 \times 10^{-14}}{1 + 8.074(-6) \times 10^{2.756} \left(1 + 5.087(2) \times T^{1.586(-2)} 10^{-1.8892 - 4.4(-5)log(T)}\right)}$$

функция охлаждения

$$\Lambda_8 = 5.7 \times 10^{-26} \times \left(T/10^4\right)^{0.8}$$

Аналитическая модель образования молекулярного водорода. Молекулы водорода в межгалактическом пространстве формируются на поверхности частиц и диссоциируют космическим излучением. Предполагая, что плотность газа пропорциональна плотности частиц из-за хорошего перемешивания частиц и газа в нашей модели, концентрация молекулярного водорода определяется следующим выражением [53]:

$$\frac{dn_{H_2}}{dt} = R_{gr}(T)n_H(n_H + 2n_{H_2}) - (\xi_H + \xi_{diss}(N_{H_2}, A_V))n_{H_2},$$

где  $n_{H_2}$  и  $n_H$  – концентрация молекулярного и атомарного водорода,  $N_{H_2}$  – столбцевая плотность молекулярного водорода, скорость образования молекулярного водорода ны пыли задается функцией [247]:

$$R_{qr}(T) = 2.2 \times 10^{-18} S \sqrt{T} s^{-1}$$

где S = 0.3 – эффективность образования молекулярного водорода на пыли [71], скорость ионизации водорода за счет космических лучей задается функцией [52, 69]:

$$\xi_H = 6 \times 10^{-18} s^{-1}$$

где  $A_v$  – погашение [252]. Скорость фотодиссоциации  $\xi_{diss}(N_{H_2}, A_V)$  записывается в виде [86]:

$$\xi_{diss}(N_{H_2}, A_V) = \xi_{diss}(0) f_{shield}(N(H_2)) f_{dust}(A_V),$$

где

$$\xi_{diss}(0) = 3.3 \times 1.7 \times 10^{-11} s^{-1}$$

неэкранированная скорость фотодиссоциации [85],

$$f_{dust}(A_V) = exp(-\tau_{d,1000}(A_V))$$

скорость абсорбции на пыли [86], где

$$\tau_{d,1000}(A_V) = 3.74A_V = 10^{-21} \left( N(H) + N(H_2) \right)$$

оптическая глубина на частицах пыли на длине волны  $\lambda = 1000$  Å, где N(H) и  $N(H_2)$  – столбцевые плотности. Функция коэффициента самозащиты можно аппроксимировать[86]:

$$f_{shield}(N(H_2)) = \frac{0.965}{(1+x/b_5)^2} + \frac{0.035}{\sqrt{1+x}} exp\left(-8.5 \times 10^{-4} \sqrt{1+x}\right),$$

где

$$x = N(H_2)/5 \times 10^{10} m^2$$

 $b_5 = b/10^7$  м/сек, где b – параметр Допплеровского расширения.

Обозначив концентрацию молекулярного водорода за *u* кинетику молекулярного водорода в безразмерной форме можно записать в виде:

$$du/dt = R_{gr}(T)(M-u)M - (\xi_H + \xi_{diss}) u$$

где M – суммарная концентрация водорода в ячейке.

Сформулируем задачу определения концентрации молекулярного водорода в ячейке за фиксированный шаг по времени. Пусть нам известны  $M = \rho \Delta x^3$  – безразмерная масса водорода в ячейке, p – безразмерное значение плотности,  $\rho$  – безразмерное значение плотности и m – начальная концентрация молекулярного водорода в ячейке. Тогда обозначив:

$$\alpha = R_{gr}(T) + \xi_H + \xi_{diss}$$
$$\beta = R_{gr}(T)M^2$$

мы получим следующее дифференциальное уравнение:

$$du/dt = -\alpha u + \beta, u(0) = m$$

Данное уравнение имеет аналитическое решение вида:

$$u(t) = \left(m - \frac{\beta}{\alpha}\right) exp(-\alpha t) + \frac{\beta}{\alpha}.$$

при желании это уравнение можно решать численно [140].

### 2.4.4 Использование эффективного показателя адиабаты

Эффективный показатель адиабаты будем находить из уравнения [114]:

$$\gamma = \frac{5n_H + 5n_{He} + 5n_e + 7n_{H_2}}{3n_H + 3n_{He} + 3n_e + 5n_{H_2}}$$

где  $n_H$  – концентрация атомарного водорода,  $n_{He}$  – атомарного гелия,  $n_e$  – электронов,  $n_{H_2}$  – молекулярного водорода.

### 2.5 Выводы по второй главе

Во второй главе представлены и сформулированы физико-математические модели газовых объектов в самосогласованном гравитационном поле, в качестве которых рассматриваются астрономические объекты. Для описания газодинамических свойств астрономических объектов используется модель многокомпонентной односкоростной гравитационной газовой динамики. Модель состоит из переопределенной системы уравнений газовой динамики, дополненных уравнением Пуассона для гравитационного потенциала. Для учета магнитного поля используются переопределенная система уравнений многокомпонентной односкоростной гравитационной магнитной газовой динамики. Для обеспечения бездивергентности магнитного поля используется теорема Стокса. Использование односкоростной модели для многокомпонентной газодинамической среды позволяет естественным образом учесть химокинетику в астрофизических течениях. Для моделирования бесстолкновительной компоненты на космологических и галактических масштабах используются уравнения для первых моментов бесстолкновительного уравнения Больцмана. Использование такого подхода для описания бесстолкновительной среды позволяет сформулировать термодинамически согласованную модель процесса звездообразования и эффекта от взрыва сверхновой, что невозможно сделать в модели N-тел, а также использовать единый вычислительный подход к численному разрешению таких гиперболических моделей, что перспективно в контексте использования многопроцессорных вычислительных систем. Для планетных систем используется модель N-тел. Проведено сравнение бесстолкновительных моделей на одномерной задаче столкновения волн. Показано, что при использовании модели, основанной на уравнениях для первых моментов бесстолкновительного уравнения Больцмана, поведение волн соответствуют бесстолкновительной природе, что не наблюдается при использовании газодинамической модели с нулевой температурой, в которой решение выраждается в  $\delta$ -функцию. Несмотря на такое многообразие математических моделей во второй главе настоящей работы был сформулирован единый подход к описанию динамики астрономических объектов для различных пространственных масштабов.

# 3 Численные схемы для моделирования процессов гравитационной гидродинамики

В газодинамических задачах, имеющих две или более пространственных переменных, использование лагранжевых координат встречает определенные трудности, связанные с наличием областей плохого определения и неоднозначностью расчётной сетки. В задачах, где появляются большие деформации и большие относительные перемещения газа при возникновении турбулентности, имеет место значительное искажение расчетной сетки. В таком случае вычисления становятся затруднительными и неточными. В связи с этим в настоящей работе используется гидродинамический подход для решения в эйлеровых координатах уравнений газовой динамики, магнитной газовой динамики и уравнений для первых моментов бесстолкновительного уравнения Больцмана.

Метод крупных частиц (в зарубежной литературе используется Fluid-In-Cells метод) для решения гидродинамических уравнений основан на методе Харлоу, который сочетает в себе преимущества как лагранжева, так и эйлерова подходов. Область решения разбивается неподвижной (эйлеровой) расчетной сеткой, где сплошная среда трактуется дискретной моделью. Этот метод позволяет исследовать сложные явления в динамике многокомпонентных сред, частицы позволяют хорошо отслеживать свободные поверхности и линии раздела сред, взаимодействия разрывов и т.п. Фактически решение уравнений гидродинамики происходит с помощью расщепления по процессам работы сил и адвективного переноса и численного решения каждого из этапов раздельно. В классической литературе такой подход именуют как "метод разделения операторов" (в зарубежной литературе operator splitting approach). Именно в такой редакции в настоящей работе будет построен численный метод решения гидродинамических уравнений.

## 3.1 Метод разделения операторов для решения уравнений в эйлеровых координатах

В основе метода разделения операторов лежит схема расщепления по физическим процессам. Метод состоит из двух этапов: эйлеров, на котором решается система уравнений гидродинамики без адвективных членов и лагранжев, на котором происходит адвективный перенос гидродинамических величин. Формально такое разделение можно записать в виде системы уравнений:

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathcal{U}\vec{u}) = \mathcal{F}(\mathcal{U}, \nabla \mathcal{U})$$

где  $\mathcal{U}$  – вектор гидродинамических консервативных переменных,  $\mathcal{F}$  – работа поля сил,  $\vec{u}$  – вектор скорости. Такое уравнение является гиперболическим и расщепляется на два этапа, на каждом из которых уравнение остается гиперболическим, эйлеров этап:

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} = \mathcal{F}\left(\mathcal{U}, \nabla \mathcal{U}\right)$$

лагранжев этап:

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathcal{U}\vec{u}) = 0$$

Введем в трехмерной области решения равномерную прямоугольную сетку с ячейками  $x_i = ih_x$ ,  $i = 1, ..., I_{max}$ ,  $y_k = kh_y$ ,  $k = 1, ..., K_{max}$ ,  $z_l = lh_z$ ,  $l = 1, ..., L_{max}$ , где  $h_x$ ,  $h_y$ ,  $h_z$  - шаги сетки,  $I_{max}$ ,  $K_{max}$ ,  $L_{max}$  - количество ячеек сетки по направлениям x, y, z:  $h_x = x_{max}/I_{max}$ ,  $h_y = y_{max}/K_{max}$ ,  $h_z = z_{max}/L_{max}$ . Для численной реализации перейдем от функций с непрерывными аргументами к дискретным наборам чисел, их заменяющих  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{ikl}^n \left( x_{i+1/2}, y_{k+1/2}, z_{l+1/2} \right)$ . Для уравнений на эйлеровом этапе используется численная схема вида:

$$\frac{\mathcal{U}_{ikl}^{n+1/2} - \mathcal{U}_{ikl}^{n}}{\tau} = \frac{F_{i+1/2,kl}^x - F_{i-1/2,kl}^x}{h_x} + \frac{F_{i,k+1/2,l}^x - F_{i,k-1/2,l}^x}{h_y} + \frac{F_{ik,l+1/2}^x - F_{ik,l-1/2}^x}{h_z}$$

где *F* – поток вектора сил. Для уравнений на лагранжевом этапе используется численная схема вида:

$$\frac{\mathcal{U}_{ikl}^{n+1} - \mathcal{U}_{ikl}^{n+1/2}}{\tau} + \frac{G_{i+1/2,kl}^x - G_{i-1/2,kl}^x}{h_x} + \frac{G_{i,k+1/2,l}^x - G_{i,k-1/2,l}^x}{h_y} + \frac{G_{ik,l+1/2}^x - G_{ik,l-1/2}^x}{h_z} = 0$$

где G – поток вектора гидродинамических величин  $\mathcal{U}$  со скоростью  $\vec{u}$ . Для определения потоков будет использоваться метод Годуновского типа.

#### 3.1.1 Эйлеров этап метода для уравнений в эйлеровых координатах

**Метод Годунова для решения уравнений на эйлеровом этапе.** Для определения потоков  $F_{i\pm1/2,k\pm1/2,l\pm1/2}^n$  будем рассматривать одномерный вариант уравнений эйлерова этапа, который можно записать в виде:

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} = \mathcal{F}\left(\mathcal{U}, \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}\right)$$

Линеаризуем это уравнение:

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \mathcal{B}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} = 0$$

где  $\mathcal{B} = -\partial F/\partial \mathcal{U}$ . Далее рассмотрим интерфейс между левой L и правой R ячейками, в которых заданы кусочно-постоянные функции. Используя эти значения, определим матрицу  $\mathcal{B}$ . Отметим, что существует большое число подходов к определению этой матрицы, далее при описании решения уравнений на эйлеровом этапе каждого вида уравнений остановимся на этом подробно.

Так как система гиперболическая, то матрицу  $\mathcal{B}$  можно представить в виде разложения по левым  $\mathcal{L}$  и правым  $\mathcal{R}$  собственным векторам, где  $\mathcal{LR} = \mathcal{RL} = I$ :

$$\mathcal{B} = \mathcal{R} \Lambda \mathcal{L}$$

С учетом такого разложения линеаризованное уравнение можно переписать в виде:

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \mathcal{R}\Lambda \mathcal{L}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} = 0$$

Домножим последнее уравнение слева на матрицу  $\mathcal{L}$  и произведя замену  $\mathcal{W} = \mathcal{L}\mathcal{U}$ , получим набор уравнений переноса вида:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x} = 0$$

Нас интересует решение только на интерфейсе между ячейками на некотором шаге  $\tau$ , которое записывается как:

$$\mathcal{W}^{i}(\tau) = \mathcal{W}^{i}_{0}(-\tau\lambda_{i}) = \begin{cases} \mathcal{W}^{i,L}_{0}, \lambda_{i} < 0\\ \mathcal{W}^{i,R}_{0}, \lambda_{i} > 0 \end{cases}$$

где  $\lambda_i$  – собственное число матрицы  $\mathcal{B}$ , а нулевым индексом обозначено начальное условие. Произведя обратную замену  $\mathcal{U} = \mathcal{RW}$  получим решение задачи Римана для определения потоков  $F_{i\pm 1/2,k\pm 1/2,l\pm 1/2}^n$  через границы.

Использование кусочно-параболического метода на локальном шаблоне для решения уравнений на эйлеровом этапе. В качестве начальных данных для задачи Римана мы можем использовать более сложное, чем кусочно-постоянное решение. В настоящей работе было использовано кусочно-параболическое решение. Такой подход основан на кусочно-параболическом методе на локальном шаблоне [205, 206]. Основным элементом схемы является построение параболы. Для определенности будем конструировать кусочно-параболическую функцию произвольного параметра q(x) на регулярной сетке с шагом h, на интервале  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ . В общем виде парабола может быть записана как:

$$q(x) = q_i^L + \xi \left( \triangle q_i + q_i^{(6)} (1 - \xi) \right)$$

где  $q_i$  – значение в центре ячейки,  $\xi = (x - x_{i-1/2})h^{-1}$ ,  $\Delta q_i = q_i^L - q_i^R$  и  $q_i^{(6)} = 6(q_i - 1/2(q_i^L + q_i^R))$  при условии сохранения консервативности, то есть:

$$q_i = h^{-1} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) dx$$

Приведем подробную процедуру построения параболы и параметров  $q_i^R$ ,  $q_i^L$ ,  $\triangle q_i$ ,  $q_i^6$ . Для конструирования значений  $q_i^R = q_{i+1}^L = q_{i+1/2}$  будем использовать интерполяционную функцию четвертого порядка точности:

$$q_{i+1/2} = 1/2(q_i + q_{i+1}) - 1/6(\delta q_{i+1} - \delta q_i)$$

где  $\delta q_i = 1/2(q_{i+1} - q_{i-1})$ . Далее опишем алгоритм получения локальной параболы. На вход алгоритма подаются значения в точках ячеек  $q_i$ . На выходе алгоритма определяются все параметры кусочно-параболических функций на всех интервалах  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ .

Шаг 1. На первом шаге мы конструируем значения  $\delta q_i = 1/2(q_{i+1} - q_{i-1})$ . Для этого нам необходимо знание только соседних ячеек  $q_{i+1}, q_{i-1}$ . Для избежания экстремумов функций используем модификацию последней формулы для  $\delta q_i$  в виде:

$$\delta_m q_i = \begin{cases} \min(|\delta q_i|, 2|q_{i+1} - q_i|, 2|q_i - q_{i-1}|) sign(\delta q_i), \\ (q_{i+1} - q_i)(q_i - q_{i-1}) > 0 \\ 0, (q_{i+1} - q_i)(q_i - q_{i-1}) \le 0 \end{cases}$$

В случае параллельной реализации на архитектурах с распределенной памятью мы должны сделать обмены одного слоя перекрытия расчетной области средствами MPI. После чего пересчитываем значения на границе с помощью интерполянта четвертого порядка точности:

$$q_i^R = q_{i+1}^L = q_{i+1/2} = 1/2(q_i + q_{i+1}) - 1/6(\delta_m q_{i+1} - \delta_m q_i)$$

Шаг 2. На втором шаге алгоритма мы начинаем конструировать саму локальную параболу с помощью формулы:

$$\Delta q_i = q_i^L - q_i^R \qquad q_i^{(6)} = 6(q_i - 1/2(q_i^L + q_i^R))$$

В случае немонотонности локальной параболы (такое имеет место на разрывах) мы перестраиваем значения на границах  $q_i^L, q_i^R$  по формулам:

$$q_i^L = q_i, q_i^R = q_i, (q_i^L - q_i)(q_i - q_i^R) \le 0$$

$$q_i^L = 3q_i - 2q_i^R, \Delta q_i q_i^{(6)} > (\Delta q_i)^2$$
$$q_i^R = 3q_i - 2q_i^L, \Delta q_i q_i^{(6)} < -(\Delta q_i)^2$$

Таким образом, граничные значения удовлетворяют условиям монотонности.

Шаг 3. На третьем шаге перестроим параметры параболы с учетом новых значений на границах ячеек:

$$\triangle q_i = q_i^L - q_i^R$$
$$q_i^{(6)} = 6(q_i - 1/2(q_i^L + q_i^R))$$

Стоит отметить, что параболы могут иметь разрыв на границах ячеек, что в случае использования классического кусочно-параболического метода (PPM) приводит к необходимости решения задачи Римана для парабол. В нашем случае локальные параболы используются как составная часть задачи Римана.

Шаг 4. На четвертом шаге происходит дополнительная монотонизация параболы. Если мы находимся в области разрыва рассматриваемой функции, тогда вводятся дополнительный подправки в параболу:

$$q_i^{L,+} = q_i - \frac{1}{4}\delta_m q_i \qquad q_i^{R,+} = q_i + \frac{1}{4}\delta_m q_i$$

Вводим дополнительный критерий

$$\eta = -h^2 \frac{\delta_m^2 q_{i+1} - \delta_m^2 q_{i-1}}{q_{i+1} - q_{i-1}}$$

В случае если выполнено одно из следующих условий:

$$|q_{i+1} - q_{i-1}| - \frac{\min(|q_{i+1}|, |q_{i-1}|, |q_{i+1}| + |q_{i-1}|)}{100} \le 0$$
$$q_{i+1}q_{i-1} > 0$$

значений критерия  $\eta$  обнуляется. Вес, с которым будет браться в расчетную схему значения  $q_i^{L,+}$  и  $q_i^{R,+}$  определяется по формуле:

$$\hbar = \max(\min(20(\eta - 0.05), 1), 0)$$

Итоговые значения потоков на границе вычисляются по формулам:

$$\begin{split} q_i^{L,FINAL} &= (1-\hbar)q_i^{L,+} + \hbar q_i^L \\ q_i^{R,FINAL} &= (1-\hbar)q_i^{R,+} + \hbar q_i^R \end{split}$$

Последние два значения и используются для определения величин  $q_i^L$  и  $q_i^R$ . Такая дополнительная монотонизация проводится для всех гидродинамических величин в

отличие от классической процедуры в работе [76], а также экспериментально подобраны несколько иные способы определения градиента решения в отличие от оригинальной работы.

Шаг 5. На пятом шаге происходит финальная перестройка параболы с учетом новых значений на границах ячеек:

$$\triangle q_i = q_i^L - q_i^R$$
$$q_i^{(6)} = 6(q_i - 1/2(q_i^L + q_i^R))$$

В результате локальная парабола в каждой ячейке  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$  получена. Отметим, что монотонизация численного решения происходит только на этапе построения локальной параболы, которая используется для решения задачи Римана на каждом этапе.

Нас интересует решение только на интерфейсе между ячейками на некотором шаге  $\tau$ , которое записывается как:

$$\mathcal{W}^{i}(\tau\lambda_{i}) = \mathcal{W}^{i}_{0}(-\tau\lambda_{i}) = \begin{cases} q_{i}^{R} - \frac{\lambda_{i}\tau}{2h} \left( \bigtriangleup q_{i} - q_{i}^{6} \left(1 - \frac{2\lambda_{i}\tau}{3h}\right) \right), \lambda_{i} < 0\\ q_{i}^{L} + \frac{\lambda_{i}\tau}{2h} \left( \bigtriangleup q_{i} + q_{i}^{6} \left(1 - \frac{2\lambda_{i}\tau}{3h}\right) \right), \lambda_{i} > 0 \end{cases}$$

где  $\lambda_i$  – собственное число матрицы  $\mathcal{B}$ , а нулевым индексом обозначено начальное условие. Произведя обратную замену  $\mathcal{U} = \mathcal{RW}$  получим решение задачи Римана для определения потоков  $F_{i\pm 1/2,k\pm 1/2,l\pm 1/2}^n$  через границы.

**Численное решение задачи Римана для уравнений газовой динамики на эйлеровом этапе.** Для нахождения численного решения задачи Римана для уравнений газовой динамики на эйлеровом этапе будем использовать одномерную запись уравнений газовой динамики в неконсервативной форме.

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & \rho^{-1} \\ 0 & \gamma p & u \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix} = 0$$

В качестве неконсервативных переменных выбран вектор ( $\rho$ , u, p). Для определенности будем рассматривать две соседние ячейки, для границы между которыми и формулируется решение задачи Римана. Для записи неконсервативной формы уравнений на эйлеровом этапе из последнего уравнения необходимо исключить адвективные члены. Таким образом, система редуцируется в следующую форму:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \rho^{-1} \\ \gamma p & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = 0$$

Уравнение для плотности содержит только адвективный член, поэтому оно исключается из уравнений на эйлеровом этапе. Для решения уравнений на эйлеровом этапе будем использовать схему типа Годунова. Для этого перепишем систему в виде:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + B\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

где вектор  $v = \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix}$ , а матрица *B* записывается в виде:

$$B = \left(\begin{array}{cc} 0 & \widehat{\rho}^{-1} \\ \gamma \widehat{p} & 0 \end{array}\right)$$

где  $\hat{\rho}$  и  $\hat{p}$  осредненные на границу между ячейками (в зарубежной литературе – интерфейс между ячейками) значения плотности и давления. Чуть позже будет описано способ такого осреднения. Для разрешения такой гиперболической системы матрицу B представим в виде  $B = R \times \Lambda \times L$ , где R и L – правые и левые собственные вектора матрицы B, а матрица  $\Lambda$  – диагональная матрица, состоящая из собственных векторов матрицы B. В случае матрицы  $2 \times 2$  матрицы R, L и  $\Lambda$  можно выписать достаточно легко:

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\gamma\widehat{p}\widehat{\rho}}} & \frac{1}{\sqrt{1+\gamma\widehat{p}\widehat{\rho}}} \\ \frac{\widehat{\rho}\sqrt{\gamma\widehat{p}/\widehat{\rho}}}{\sqrt{1+\gamma\widehat{p}\widehat{\rho}}} & -\frac{\widehat{\rho}\sqrt{\gamma\widehat{p}/\widehat{\rho}}}{\sqrt{1+\gamma\widehat{p}\widehat{\rho}}} \end{pmatrix}$$
$$L = \begin{pmatrix} \frac{\widehat{\rho}(\widehat{\rho}^{-1}+\gamma\widehat{p})}{2\sqrt{1+\gamma\widehat{p}\widehat{\rho}}} & \frac{(\widehat{\rho}^{-1}+\gamma\widehat{p})}{2\sqrt{1+\gamma\widehat{p}\widehat{\rho}}\sqrt{\gamma\widehat{p}/\widehat{\rho}}} \\ \frac{\widehat{\rho}(\widehat{\rho}^{-1}+\gamma\widehat{p})}{2\sqrt{1+\gamma\widehat{p}\widehat{\rho}}} & -\frac{(\widehat{\rho}^{-1}+\gamma\widehat{p})}{2\sqrt{1+\gamma\widehat{p}\widehat{\rho}}\sqrt{\gamma\widehat{p}/\widehat{\rho}}} \end{pmatrix}$$
$$\Lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{\gamma\widehat{p}/\widehat{\rho}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\gamma\widehat{p}/\widehat{\rho}} \end{pmatrix}$$

Домножив векторную запись уравнений на эйлеровом этапе слева на матрицу L:

$$L\frac{\partial v}{\partial t} + L \times R \times \Lambda \times L\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

и учитывая свойства собственных векторов  $L \times R = R \times L = I$ , где I – единичная матрица, и произведя замену w = Lv, последнюю систему уравнения можно переписать в виде:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

где  $\Lambda$  – диагональная, знакоопределенная матрица, состоящая из собственных чисел $\lambda_j$   $(j{=}1{,}2)$ :

$$\lambda_1 = \sqrt{\gamma \widehat{p} / \widehat{\rho}} \qquad \lambda_2 = -\sqrt{\gamma \widehat{p} / \widehat{\rho}}.$$

В этом случае матричные уравнения аналитически разрешаются элементарно. Решение на границе между ячейками при использовании кусочно-постоянных функций можно записать в виде:

$$w(x,0) = w^{0}(x) = \begin{cases} w^{L}, x < 0\\ w^{R}, x > 0 \end{cases} = \begin{cases} Lv^{L}, x < 0\\ Lv^{R}, x > 0 \end{cases}$$

где x – рассматриваемая координата,  $v^L$  и  $v^R$  – кусочно-постоянные значения в правой и левой ячейках и  $w^L = Lv^L$  and  $w^R = Lv^R$ . Последняя система имеет аналитическое решение  $w_j(x,t) = w_j^0(x - \lambda_j t)$ , где j = 1, 2. Зная значения  $w_1(x,t)$  и  $w_2(x,t)$ , можно определить значения вектора v (то есть значения скорости и давления), используя обратную замену:

$$v(x,t) = Rw(x,t),$$
где  $w(x,t) = \begin{pmatrix} w_1(x,t) \\ w_2(x,t) \end{pmatrix}$ . Решение  $v(x,t) = \begin{pmatrix} v_1(x,t) \\ v_2(x,t) \end{pmatrix}$ используется в качестве решения задачи Римана для уравнений газовой динамики на эйлеровом этапе.

Далее для полного разрешения задачи Римана необходимо выполнить пространственное осреднение для элементов матриц Л, *R* и *L* на интерфейсе между ячейками. Для этого используется модификация схему Рое [217] и осреднения плотности и давления на границе между ячейками записываются в виде:

$$\widehat{\rho} = \frac{\rho_L^{3/2} + \rho_R^{3/2}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}$$
$$\widehat{p} = \frac{p_L \sqrt{\rho_L} + p_R \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}$$

Причина такой модификации схемы Рое обусловлена необходимостью более аккуратного вычисления значений на границе газ-вакуум. Данное обстоятельство можно проиллюстрировать на простом примере. Для этого рассмотрим границу газ-вакуум с плотностью и давлением со стороны газа ~ 1 и плотностью и давлением со стороны разреженной области  $10^{-4k}$ , k > 0. При использовании подхода к осреднению Рое [217] скорость звука на границе газ-вакуум составляет порядка  $10^k$ , тогда как по обеим сторонам скорость звука порядка единицы. В случае оригинальной модификации единичная скорость звука на границе будет восстановлена. Использование такой модификации позволит использовать более высокое число Куранта, о котором речь пойдет дальше в данной главе.

В результате решение задачи Римана для нормальной составляющей скорости и

давления на границе между ячейками записывается в виде:

$$U = v_1(0,\tau) = \frac{u_L + u_R}{2} + \frac{p_L - p_R}{2} \sqrt{\frac{(\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R})^2}{\gamma(\rho_L^{3/2} + \rho_R^{3/2})(p_L\sqrt{\rho_L} + p_R\sqrt{\rho_R})}}$$
$$P = v_2(0,\tau) = \frac{p_L + p_R}{2} + \frac{u_L - u_R}{2} \sqrt{\frac{\gamma(\rho_L^{3/2} + \rho_R^{3/2})(p_L\sqrt{\rho_L} + p_R\sqrt{\rho_R})}{(\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R})^2}}$$

В случае использования кусочно-параболического метода на локальном шаблоне, на этапе решения уравнений переноса для величин *w* необходимо учесть кусочнополиномиальное представление начальных данных:

$$w(x,0) = w^{0}(x) = \begin{cases} w^{L}(x), x < 0\\ w^{R}(x), x > 0 \end{cases} = \begin{cases} Lv^{L}(x), x < 0\\ Lv^{R}(x), x > 0 \end{cases}$$

где  $v^{L}(x)$  and  $v^{R}(x)$  – кусочно-параболические начальные данные, где  $w^{L}(x) = Lv^{L}(x)$ и  $w^{R}(x) = Lu^{R}(x)$ . Последняя уравнение имеет аналитическое решения  $w_{j}(x,t) = w_{j}^{0}(x - \lambda_{j}t), j = 1, 2$ , где  $\lambda_{j}$  – собственные значения матрицы B:

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\gamma (p_L \sqrt{\rho_L} + p_R \sqrt{\rho_R})}{\rho_L^{3/2} + \rho_R^{3/2}}}$$

В свою очередь  $w_j(x,t) = w_j^0(x-\lambda_j t), j = 1, 2$  также является кусочно-параболической функцией. Такой подход для формулировки задачи Римана был впервые использован в кусочно-параболическом методе на локальном шаблоне [205, 206] (в зарубежной литературе piecewise-parabolic method on local stencil – PPML). Далее произведя замену:

$$v(x,t) = Rw(x,t),$$

где  $w(x,t) = (w_1(x,t), w_2(x,t))$ . Решение задачи Римана для нормальной компоненты скорости и давления представимы в виде:

$$U = \frac{u_L(-\lambda t) + u_R(\lambda t)}{2} + \frac{p_L(-\lambda t) - p_R(\lambda t)}{2} \sqrt{\frac{(\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R})^2}{\gamma(\rho_L^{3/2} + \rho_R^{3/2})(p_L\sqrt{\rho_L} + p_R\sqrt{\rho_R})}},$$
$$P = \frac{p_L(-\lambda t) + p_R(\lambda t)}{2} + \frac{u_L(-\lambda t) - u_R(\lambda t)}{2} \sqrt{\frac{\gamma(\rho_L^{3/2} + \rho_R^{3/2})(p_L\sqrt{\rho_L} + p_R\sqrt{\rho_R})}{(\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R})^2}},$$

где способ вычисления для значений  $p_L(-\lambda t), p_R(\lambda t), u_L(-\lambda t), u_R(\lambda t)$  был приведен ранее.

Численное решение задачи Римана для уравнений газовой динамики на эйлеровом этапе в сферической симметрии. Для записи уравнений в сферической симметрии будем использовать их неконсервативную форму:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ p \end{pmatrix} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} \rho u r^2 \\ \rho u^2 r^2 \\ p u r^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial p}{\partial r} \\ (\gamma - 1) p \frac{1}{r^2} \frac{\partial u r^2}{\partial r} \end{pmatrix} = 0$$

Система разбивается на два этапа: эйлеров этап, на котором решаются уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial p}{\partial r} \\ (\gamma - 1)p\frac{1}{r^2}\frac{\partial ur^2}{\partial r} \end{pmatrix} = 0$$

и лагранжев этап, на котором решаются уравнения в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho r^2 \\ \rho u r^2 \\ p r^2 \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} \rho r^2 u \\ \rho u r^2 u \\ p r^2 u \end{pmatrix} = 0$$

Последний вид уравнений лагранжевого этапа более удобен для организации единой вычислительной процедуры.

Для аппроксимации пространственных производных на эйлеровом этапе численного метода используется решение задачи на каждой границе между расчетными ячейками. Для этого перепишем систему в следующем квазилинейной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & \rho^{-1} \\ 0 & \gamma p & u \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{r}\rho u \\ 0 \\ \frac{2\gamma}{r}pu \end{pmatrix} = 0$$

Исключая из последней системы члены, связанные с адвективным переносом, который будет учтен на лагранжевом этапе, получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u\\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \rho^{-1}\\ \gamma p & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} u\\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0\\ \frac{2\gamma}{r}pu \end{pmatrix} = 0$$

Система решается на каждой границе между ячейками в два этапа: на первом решается "плоская" задача Римана для уравнений газовой динамики на эйлеровом этапе:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \rho^{-1} \\ \gamma p & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = 0$$

на втором этапе добавляется правая часть, связанная с использованием сферических координат:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \begin{array}{c} u \\ p \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} 0 \\ \frac{2\gamma}{r} p u \end{array} \right) = 0$$

Будем также предполагать, что в каждой ячейке построена локальная парабола. Тогда итоговые формулы для аппроксимации величин скорости U и давления P на границе между левой (L) и правой (R) ячейками имеют вид:

$$U = \frac{u_L(-\lambda\tau) + u_R(\lambda\tau)}{2} + \frac{p_L(-\lambda t) - p_R(\lambda t)}{2} \sqrt{\frac{(\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R})^2}{\gamma(\rho_L^{3/2} + \rho_R^{3/2})(p_L\sqrt{\rho_L} + p_R\sqrt{\rho_R})}}}{P = \frac{p_L(-\lambda\tau) + p_R(\lambda\tau)}{2} + \frac{u_L(-\lambda t) - u_R(\lambda t)}{2} \times \sqrt{\frac{\gamma(\rho_L^{3/2} + \rho_R^{3/2})(p_L\sqrt{\rho_L} + p_R\sqrt{\rho_R})}{(\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R})^2}} - \frac{2\tau\gamma}{r} \frac{p_L\sqrt{\rho_L} + p_R\sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \frac{u_L\sqrt{\rho_L} + u_R\sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}$$
$$\lambda = \sqrt{\frac{\gamma(p_L\sqrt{\rho_L} + p_R\sqrt{\rho_R})}{\rho_L^{3/2} + \rho_R^{3/2}}}$$

где au – шаг по времени, выбираемый из условия Куранта, h – шаг по пространству. Алгоритм для вычисления интеграла по параболе был описан ранее.

Численное решение задачи Римана для уравнений магнитной газовой динамики. На эйлеровом этапе схемы для численного решения МГД уравнений используется линеаризованный метод Годунова. Для вычисления МГД потоков на каждой границе всех расчетных ячеек формулируется задача Римана с начальными данными, задаваемыми кусочно-параболическими функциями, по каждому направлению:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \mathcal{B}\frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

в случае МГД уравнений для эйлерова этапа вектор  $q = (u_x, u_y, u_z, B_y, B_z, p)^T$ , а матрица  $\mathcal{B}$  на каждой границе ячеек записывается в виде:

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{B_y}{\rho} & \frac{B_z}{\rho} & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{B_x}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{B_x}{\rho} & 0 \\ B_y & -B_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_z & 0 & -B_x & 0 & 0 & 0 \\ \gamma p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Для осреднения магнитно-газодинамических значений из левой (L) и правой (R) ячеек на границу используются следующие уравнения:

$$\rho = \frac{\sqrt{\rho^L}\rho^L + \sqrt{\rho^R}\rho^R}{\sqrt{\rho^L} + \sqrt{\rho^R}}$$
$$u_{[x,y,z]} = \frac{\sqrt{\rho^L}u_{[x,y,z]}^L + \sqrt{\rho^R}u_{[x,y,z]}^R}{\sqrt{\rho^L} + \sqrt{\rho^R}}$$
$$B_{[x,y,z]} = \frac{\sqrt{\rho^L}B_{[x,y,z]}^R + \sqrt{\rho^R}B_{[x,y,z]}^L}{\sqrt{\rho^L} + \sqrt{\rho^R}}$$

после чего могут быть вычислены значения скорости звука c, альфвеновской скорость звука  $c_a$ , быстрой  $c_f$  и медленной  $c_s$  магнитной скорости:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

$$c_a = |\frac{B_x}{\sqrt{\rho}}|$$

$$c_f = \sqrt{\frac{(c^2 + b^2) + \sqrt{(c^2 + b^2)^2 - 4c^2c_a^2}}{2}}$$

$$c_s = \sqrt{\frac{(c^2 + b^2) - \sqrt{(c^2 + b^2)^2 - 4c^2c_a^2}}{2}}$$

где  $b = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$ . Для декомпозиции матрицы  $\mathcal{B}$  нам необходимо доопределить параметры:

$$(\alpha_f, \alpha_s) = \begin{cases} \frac{\left(\sqrt{c^2 - c_s^2}, \sqrt{c_f^2 - c^2}\right)}{\sqrt{c_f^2 - c_s^2}} & B_y^2 + B_z^2 > 0, \gamma p \neq B_x^2\\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) & B_y^2 + B_z^2 = 0, \gamma p = B_x^2\\ (\beta_f, \beta_s) = \begin{cases} \frac{(B_y, B_z)}{\sqrt{B_y^2 + B_z^2}} & B_y^2 + B_z^2 > 0\\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) & B_y^2 + B_z^2 = 0 \end{cases}$$

Матрицу  $\mathcal{B}$  можно представить в виде декомпозиции по собственным векторам  $\mathcal{B} = R\Omega L$ , где R и L – взаимно ортогональные матрицы RL = LR = I правых и левых собственных векторов:

$$R^{T} = \begin{pmatrix} \alpha_{f}c_{f} & -\alpha_{s}c_{s}\beta_{y}sign\left(B_{x}\right) & -\alpha_{s}c_{s}\beta_{z}sign\left(B_{x}\right) & \alpha_{s}\sqrt{\rho}c\beta_{y} & \alpha_{s}\sqrt{\rho}c\beta_{z} & \alpha_{f}\gamma p \\ -\alpha_{f}c_{f} & \alpha_{s}c_{s}\beta_{y}sign\left(B_{x}\right) & \alpha_{s}c_{s}\beta_{z}sign\left(B_{x}\right) & \alpha_{s}\sqrt{\rho}c\beta_{y} & \alpha_{s}\sqrt{\rho}c\beta_{z} & \alpha_{f}\gamma p \\ \alpha_{s}c_{s} & \alpha_{f}c_{f}\beta_{y}sign\left(B_{x}\right) & \alpha_{f}c_{f}\beta_{z}sign\left(B_{x}\right) & -\alpha_{f}\sqrt{\rho}c\beta_{y} & -\alpha_{f}\sqrt{\rho}c\beta_{z} & \alpha_{s}\gamma p \\ -\alpha_{s}c_{s} & -\alpha_{f}c_{f}\beta_{y}sign\left(B_{x}\right) & -\alpha_{f}c_{f}\beta_{z}sign\left(B_{x}\right) & -\alpha_{f}\sqrt{\rho}c\beta_{y} & -\alpha_{f}\sqrt{\rho}c\beta_{z} & \alpha_{s}\gamma p \\ 0 & -\frac{\beta_{z}}{\sqrt{2}}sign\left(B_{x}\right) & \frac{\beta_{y}}{\sqrt{2}}sign\left(B_{x}\right) & \sqrt{\frac{\rho}{2}}\beta_{z} & -\sqrt{\frac{\rho}{2}}\beta_{y} & 0 \\ 0 & -\frac{\beta_{z}}{\sqrt{2}}sign\left(B_{x}\right) & \frac{\beta_{y}}{\sqrt{2}}sign\left(B_{x}\right) & -\sqrt{\frac{\rho}{2}}\beta_{z} & \sqrt{\frac{\rho}{2}}\beta_{y} & 0 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_f c_f}{2c^2} & -\frac{\alpha_s c_s \beta_y}{2c^2} sign\left(B_x\right) & -\frac{\alpha_s c_s \beta_z}{2c^2} sign\left(B_x\right) & \frac{\alpha_s \beta_y}{2\sqrt{\rho c}} & \frac{\alpha_s \beta_z}{2\sqrt{\rho c}} & \frac{\alpha_f}{2\rho c^2} \\ -\frac{\alpha_f c_f}{2c^2} & \frac{\alpha_s c_s \beta_y}{2c^2} sign\left(B_x\right) & \frac{\alpha_s c_s \beta_z}{2c^2} sign\left(B_x\right) & \frac{\alpha_s \beta_y}{2\sqrt{\rho c}} & \frac{\alpha_s \beta_z}{2\sqrt{\rho c}} & \frac{\alpha_f \beta_z}{2\rho c^2} \\ \frac{\alpha_s c_s}{2c^2} & \frac{\alpha_f c_f \beta_y}{2c^2} sign\left(B_x\right) & \frac{\alpha_f c_f \beta_z}{2c^2} sign\left(B_x\right) & -\frac{\alpha_f \beta_y}{2\sqrt{\rho c}} & -\frac{\alpha_f \beta_z}{2\sqrt{\rho c}} & \frac{\alpha_s}{2\rho c^2} \\ -\frac{\alpha_s c_s}{2c^2} & -\frac{\alpha_f c_f \beta_y}{2c^2} sign\left(B_x\right) & -\frac{\alpha_f c_f \beta_z}{2c^2} sign\left(B_x\right) & -\frac{\alpha_f \beta_y}{2\sqrt{\rho c}} & -\frac{\alpha_f \beta_z}{2\sqrt{\rho c}} & \frac{\alpha_s}{2\rho c^2} \\ 0 & -\frac{\beta_z}{\sqrt{2}} sign\left(B_x\right) & \frac{\beta_y}{\sqrt{2}} sign\left(B_x\right) & \frac{\beta_z}{\sqrt{2\rho}} & -\frac{\beta_y}{\sqrt{2\rho}} & 0 \\ 0 & -\frac{\beta_z}{\sqrt{2}} sign\left(B_x\right) & \frac{\beta_y}{\sqrt{2}} sign\left(B_x\right) & -\frac{\beta_z}{\sqrt{2\rho}} & \frac{\beta_y}{\sqrt{2\rho}} & 0 \end{pmatrix}$$

 $\Omega$  – диагональная матрица с собственными значениями:

$$\lambda_1 = c_f$$
  $\lambda_2 = -c_f$   $\lambda_3 = c_s$   $\lambda_4 = -c_s$   
 $\lambda_5 = c_a$   $\lambda_6 = -c_a$ 

Сделав замену s = Lq мы переходим к системе

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \Omega \frac{\partial s}{\partial x} = 0$$

которая решается аналитически, но с учетом того, что начальные данные  $s^0$  для этой задачи суть кусочно-параболические функции. Таким образом, решение задачи Римана для последней системы уравнений можно сформулировать в виде:

$$\mathbf{s}_{1} = s_{1}^{0} (-c_{f} \tau) \qquad \mathbf{s}_{2} = s_{2}^{0} (c_{f} \tau) \qquad \mathbf{s}_{3} = s_{3}^{0} (-c_{s} \tau)$$
$$\mathbf{s}_{4} = s_{4}^{0} (c_{s} \tau) \qquad \mathbf{s}_{5} = s_{5}^{0} (-c_{a} \tau) \qquad \mathbf{s}_{6} = s_{6}^{0} (c_{a} \tau)$$

В зависимости от знака собственного числа мы должны производить интегрирование по левой или правой параболе. После решения задачи Римана для вектора s, используя замену q = Rs мы получаем решения задачи Римана  $\mathbf{U}_{\mathbf{x}}, \mathbf{U}_{\mathbf{y}}, \mathbf{U}_{\mathbf{z}}, \mathbf{B}_{\mathbf{y}}, \mathbf{B}_{\mathbf{z}}, \mathbf{P}$ , которые затем используются в конечно-объемной аппроксимации. Точное решение задачи Римана на эйлеровом этале залисывается в следующей форме для x – продольной компоненты скорости:

$$\begin{split} \mathbf{U}_{\mathbf{x}} &= \frac{a_{s}^{2}c_{s}^{2}\left(u_{s}\left(c_{r}\right) + u_{s}\left(-c_{r}r\right)\right)}{2c^{2}} + \frac{\alpha_{r}c_{r}\alpha_{s}\beta_{s} sign\left(B_{s}\right)\left(u_{s}\left(c_{r}r\right) + u_{s}\left(-c_{r}r\right) - u_{s}\left(c_{r}r\right)\right)}{2c^{2}} + \frac{\alpha_{r}c_{r}\alpha_{s}\beta_{s} sign\left(B_{s}\right)\left(u_{s}\left(c_{r}r\right) + u_{s}\left(-c_{r}r\right)\right)}{2c^{2}} + \frac{\alpha_{r}c_{r}\alpha_{s}\beta_{s}\left(p_{r}\left(-c_{r}r\right)\right)}{2c^{2}} + \frac{\alpha_{r}^{2}c_{s}\beta_{s}\left(p_{r}\left(-c_{r}r\right)\right)}{2c^{2}} + \frac{\alpha_{r}^{2}c_{s}\left(p_{r}\left(-c_{r}r\right)\right)}{2c^{2}} + \frac{\alpha_{r}^{2}c_{s}\beta_{s}\left(p_{r}\left(-c_{r}r\right)\right)}{2c^{2}} + \frac{\alpha_{r}^{2}c_{s}\beta_{s}\left(p_{r}\left(-c_{r}r\right)\right)}{2c^{2}} + \frac{\alpha_{r}^{2}c_{s}\beta_{s}\left(p_{r}\left(-c_{r}r\right)\right)}{2c^{2}} + \frac{\alpha_{r}^{2}c_{s}\beta_{s}\left(p_{r}\left(-c_{r}r\right)\right)}{2c^{2}} + \frac{\alpha_{r}^{2}c_{s}\beta_{s}\left(p_{r}\left(-c_{r}r\right)\right)}{2c^{2}} + \frac{\alpha_{r}^{2}c_{s}\beta_{s}\left(p_{r}\left(-c_{r}r\right)\right)}{2c^{2}} + \frac{\alpha_{r}^{2}c_{s}p_{s}\left(p_{r}\left(-c_{r}r\right)\right)}{2c^{2}} + \frac{\alpha_{r}^{2}c_{s}$$

для z - попе

 $2c^2$ 

 $2c^2$ 

 $2c^2$ 

2C <sup>2</sup>
$\frac{\beta_y^2 \left(u_z \left(c_a \tau\right)+u_z \left(-c_a \tau\right)\right)}{2}+\frac{sign\left(B_x\right) \alpha_f^2 c_f \beta_z^2 \left(b_z \left(c_s \tau\right)-b_z \left(-c_s \tau\right)\right)}{2 c_x \sqrt{\rho}}+\frac{sign\left(B_x\right) \alpha_s^2 c_s \beta_z^2 \left(b_z \left(c_f \tau\right)-b_z \left(-c_f \tau\right)\right)}{2 c_x \sqrt{\rho}}+\frac{sign\left(B_x\right) \alpha_s^2 c_s \beta_z^2 \left(b_z \left(c_f \tau\right)-b_z \left(-c_f \tau\right)\right)}{2 c_x \sqrt{\rho}}+\frac{sign\left(B_x\right) \alpha_s^2 c_s \beta_z^2 \left(b_z \left(c_f \tau\right)-b_z \left(-c_f \tau\right)\right)}{2 c_x \sqrt{\rho}}+\frac{sign\left(B_x\right) \alpha_s^2 c_s \beta_z^2 \left(b_z \left(c_f \tau\right)-b_z \left(-c_f \tau\right)\right)}{2 c_x \sqrt{\rho}}+\frac{sign\left(B_x\right) \alpha_s^2 c_s \beta_z^2 \left(b_z \left(c_f \tau\right)-b_z \left(-c_f \tau\right)\right)}{2 c_x \sqrt{\rho}}+\frac{sign\left(B_x\right) \alpha_s^2 c_s \beta_z^2 \left(b_z \left(c_f \tau\right)-b_z \left(-c_f \tau\right)\right)}{2 c_x \sqrt{\rho}}+\frac{sign\left(B_x\right) \alpha_s^2 c_s \beta_z^2 \left(b_z \left(c_f \tau\right)-b_z \left(-c_f \tau\right)\right)}{2 c_x \sqrt{\rho}}+\frac{sign\left(B_x\right) \alpha_s^2 c_s \beta_z^2 \left(b_z \left(c_f \tau\right)-b_z \left(-c_f \tau\right)\right)}{2 c_x \sqrt{\rho}}+\frac{sign\left(B_x\right) \alpha_s^2 c_s \beta_z^2 \left(b_z \left(c_f \tau\right)-b_z \left(-c_f \tau\right)\right)}{2 c_x \sqrt{\rho}}+\frac{sign\left(B_x\right) \alpha_s^2 c_s \beta_z^2 \left(b_z \left(c_f \tau\right)-b_z \left(-c_f \tau\right)\right)}{2 c_x \sqrt{\rho}}+\frac{sign\left(B_x\right) \alpha_s^2 c_s \beta_z^2 \left(b_z \left(c_f \tau\right)-b_z \left(-c_f \tau\right)\right)}{2 c_x \sqrt{\rho}}+\frac{sign\left(B_x\right) \alpha_s^2 c_s \beta_z^2 \left(b_z \left(c_f \tau\right)-b_z \left(-c_f \tau\right)\right)}{2 c_x \sqrt{\rho}}+\frac{sign\left(B_x\right) \alpha_s^2 c_s \beta_z^2 \left(b_z \left(c_f \tau\right)-b_z \left(-c_f \tau\right)\right)}{2 c_x \sqrt{\rho}}+\frac{sign\left(B_x\right) \alpha_s^2 c_s \beta_z^2 \left(b_z \left(c_f \tau\right)-b_z \left(-c_f \tau\right)\right)}{2 c_x \sqrt{\rho}}+\frac{sign\left(B_x\right) \alpha_s^2 c_s \beta_z \left(c_f \tau\right)-b_z \left(-c_f \tau\right)}{2 c_x \sqrt{\rho}}+\frac{sign\left(B_x\right) \alpha_s^2 c_s \beta_z \left(c_f \tau\right)-b_z \left(-c_f \tau\right)}{2 c_x \sqrt{\rho}}+\frac{sign\left(B_x\right) \alpha_s \alpha_s \alpha_s \beta_z \left(c_f \tau\right)-b_z \left(-c_f \tau\right)}{2 c_x \sqrt{\rho}}+sign\left(B_x\right) \alpha_s \alpha_s \alpha_s \alpha_s \alpha_s \alpha_s \alpha_s \alpha_s \alpha_s \alpha_s$
$sign\left(B_{x}\right)\beta_{y}^{2}\left(b_{z}\left(c_{a}\tau\right)-b_{z}\left(-c_{a}\tau\right)\right)\ ,\ sign\left(B_{x}\right)\beta_{y}\beta_{z}\left(b_{y}\left(-c_{a}\tau\right)-b_{y}\left(c_{a}\tau\right)\right)\ \ \beta_{y}\beta_{z}\left(u_{y}\left(c_{a}\tau\right)+u_{y}\left(-c_{a}\tau\right)\right)\ ,$
$\frac{2\sqrt{p}}{2\sqrt{p}} + \frac{2\sqrt{p}}{2\sqrt{p}} - \frac{2}{2} + \frac{2}{2} $
$sign\left(B_{x}\right)\alpha_{f}^{2}c_{f}\beta_{z}\beta_{y}\left(b_{y}\left(c_{s}\tau\right)-b_{y}\left(-c_{s}\tau\right)\right)\ , \ sign\left(B_{x}\right)\alpha_{s}^{2}c_{s}\beta_{z}\beta_{y}\left(b_{y}\left(c_{f}\tau\right)-b_{y}\left(-c_{f}\tau\right)\right)\ ,$
$2c\sqrt{\rho}$ $+$ $2c\sqrt{\rho}$ $+$
$\frac{sign\left(B_{x}\right)\alpha_{f}c_{f}\beta_{z}\alpha_{s}\left(p\left(-c_{s}\tau\right)+p\left(c_{f}\tau\right)-p\left(-c_{f}\tau\right)-p\left(c_{s}\tau\right)\right)}{\sigma^{2}}$
для y — поперечной компоненты магнитного поля:
$\mathbf{B}_{\mathbf{y}} = \frac{\alpha_f^2 \beta_y^2 \left( b_y \left( c_s \tau \right) + b_y \left( -c_s \tau \right) \right)}{2} + \frac{\alpha_s^2 \beta_y^2 \left( b_y \left( c_f \tau \right) + b_y \left( -c_f \tau \right) \right)}{2} + \frac{\beta_z^2 \left( b_y \left( c_a \tau \right) + b_y \left( -c_a \tau \right) \right)}{2} + \frac{\beta_z^2 \left( b_y \left( c_a \tau \right) + b_y \left( -c_a \tau \right) \right)}{2} + \frac{\beta_z^2 \left( b_y \left( c_a \tau \right) + b_y \left( -c_a \tau \right) \right)}{2} + \frac{\beta_z^2 \left( b_y \left( c_a \tau \right) + b_y \left( -c_a \tau \right) \right)}{2} + \frac{\beta_z^2 \left( b_y \left( c_a \tau \right) + b_y \left( -c_a \tau \right) \right)}{2} + \frac{\beta_z^2 \left( b_y \left( c_a \tau \right) + b_y \left( -c_a \tau \right) \right)}{2} + \frac{\beta_z^2 \left( b_y \left( c_a \tau \right) + b_y \left( -c_a \tau \right) \right)}{2} + \frac{\beta_z^2 \left( b_y \left( c_a \tau \right) + b_y \left( -c_a \tau \right) \right)}{2} + \frac{\beta_z^2 \left( b_y \left( c_a \tau \right) + b_y \left( -c_a \tau \right) \right)}{2} + \frac{\beta_z^2 \left( b_y \left( c_a \tau \right) + b_y \left( -c_a \tau \right) \right)}{2} + \frac{\beta_z^2 \left( b_y \left( c_a \tau \right) + b_y \left( -c_a \tau \right) \right)}{2} + \frac{\beta_z^2 \left( b_y \left( c_a \tau \right) + b_y \left( -c_a \tau \right) \right)}{2} + \frac{\beta_z^2 \left( b_y \left( c_a \tau \right) + b_y \left( -c_a \tau \right) \right)}{2} + \frac{\beta_z^2 \left( b_y \left( c_a \tau \right) + b_y \left( -c_a \tau \right) \right)}{2} + \frac{\beta_z^2 \left( b_y \left( c_a \tau \right) + b_y \left( -c_a \tau \right) \right)}{2} + \frac{\beta_z^2 \left( b_y \left( c_a \tau \right) + b_y \left( -c_a \tau \right) \right)}{2} + \frac{\beta_z^2 \left( b_y \left( c_a \tau \right) + b_y \left( -c_a \tau \right) \right)}{2} + \frac{\beta_z^2 \left( b_y \left( c_a \tau \right) + b_y \left( -c_a \tau \right) \right)}{2} + \frac{\beta_z^2 \left( b_y \left( c_a \tau \right) + b_y \left( -c_a \tau \right) \right)}{2} + \frac{\beta_z^2 \left( b_y \left( c_a \tau \right) + b_y \left( -c_a \tau \right) \right)}{2} + \frac{\beta_z^2 \left( b_y \left( c_a \tau \right) + b_y \left( -c_a \tau \right) \right)}{2} + \frac{\beta_z^2 \left( b_y \left( c_a \tau \right) + b_y \left( -c_a \tau \right) \right)}{2} + \frac{\beta_z^2 \left( b_y \left( c_a \tau \right) + b_y \left( -c_a \tau \right) \right)}{2} + \frac{\beta_z^2 \left( b_y \left( c_a \tau \right) + b_y \left( -c_a \tau \right) \right)}{2} + \frac{\beta_z^2 \left( b_y \left( c_a \tau \right) + b_y \left( -c_a \tau \right) \right)}{2} + \frac{\beta_z^2 \left( b_y \left( c_a \tau \right) + b_y \left( -c_a \tau \right) \right)}{2} + \frac{\beta_z^2 \left( b_y \left( c_a \tau \right) + b_y \left( -c_a \tau \right) \right)}{2} + \frac{\beta_z^2 \left( b_y \left( c_a \tau \right) + b_y \left( -c_a \tau \right) \right)}{2} + \frac{\beta_z^2 \left( b_y \left( c_a \tau \right) + b_y \left( -c_a \tau \right) \right)}{2} + \frac{\beta_z^2 \left( b_y \left( c_a \tau \right) + b_y \left( -c_a \tau \right) \right)}{2} + \frac{\beta_z^2 \left( b_y \left( c_a \tau \right) + b_y \left( -c_a \tau \right) \right)}{2} + \frac{\beta_z^2 \left( b_y \left( c_a \tau \right) + b_y \left( -c_a \tau \right) \right)}{2} + \frac{\beta_z^2 \left( b_y \left( c_a \tau \right) + b_y \left( -c_a \tau \right) \right)}{2} + \frac{\beta_z^2 \left( b_y \left( c_a \tau \right) + b_y \left( c_a \tau \right) \right)}{2} + \beta_z^2 \left( b_y \left( c_a \tau \right) + b_y \left( c_a$
$\frac{\alpha_s^2\beta_y\beta_z\left(b_z\left(c_f\tau\right)+b_z\left(-c_f\tau\right)\right)}{\alpha_s^2\beta_y\beta_z\left(b_z\left(c_s\tau\right)+b_z\left(-c_s\tau\right)\right)} - \frac{\beta_z\beta_y\left(b_z\left(c_a\tau\right)+b_z\left(-c_a\tau\right)\right)}{\alpha_s^2\beta_y\left(b_z\left(c_a\tau\right)+b_z\left(-c_a\tau\right)\right)} + \frac{\alpha_s^2\beta_y\beta_z\left(b_z\left(c_s\tau\right)+b_z\left(-c_s\tau\right)\right)}{\alpha_s^2\beta_y\left(b_z\left(c_s\tau\right)+b_z\left(-c_s\tau\right)\right)} + \frac{\alpha_s^2\beta_y\beta_z\left(b_z\left(c_s\tau\right)+b_z\left(-c_s\tau\right)\right)}{\alpha_s^2\beta_y\left(b_z\left(c_s\tau\right)+b_z\left(-c_s\tau\right)\right)} - \frac{\beta_z\beta_y\left(b_z\left(c_s\tau\right)+b_z\left(-c_s\tau\right)\right)}{\alpha_s^2\beta_y\left(b_z\left(c_s\tau\right)+b_z\left(-c_s\tau\right)\right)} + \frac{\alpha_s^2\beta_y\beta_z\left(b_z\left(c_s\tau\right)+b_z\left(-c_s\tau\right)\right)}{\alpha_s^2\beta_y\left(b_z\left(c_s\tau\right)+b_z\left(-c_s\tau\right)\right)} - \frac{\beta_z\beta_y\left(b_z\left(c_s\tau\right)+b_z\left(-c_s\tau\right)\right)}{\alpha_s^2\beta_y\left(c_s\tau\right)+b_z\left(-c_s\tau\right)\right)} + \frac{\alpha_s^2\beta_y\beta_z\left(b_z\left(c_s\tau\right)+b_z\left(-c_s\tau\right)\right)}{\alpha_s^2\beta_y\left(c_s\tau\right)+b_z\left(-c_s\tau\right)\right)} - \frac{\beta_z\beta_y\left(b_z\left(c_s\tau\right)+b_z\left(-c_s\tau\right)\right)}{\alpha_s^2\beta_y\left(c_s\tau\right)+b_z\left(-c_s\tau\right)\right)} + \frac{\alpha_s^2\beta_y\beta_z\left(b_z\left(c_s\tau\right)+b_z\left(-c_s\tau\right)\right)}{\alpha_s^2\beta_y\left(c_s\tau\right)+b_z\left(-c_s\tau\right)\right)} + \frac{\alpha_s^2\beta_y\beta_z\left(b_z\left(c_s\tau\right)+b_z\left(-c_s\tau\right)\right)}{\alpha_s^2\beta_y\left(c_s\tau\right)+b_z\left(-c_s\tau\right)\right)} - \frac{\beta_z\beta_y\left(b_z\left(c_s\tau\right)+b_z\left(-c_s\tau\right)\right)}{\alpha_s^2\beta_y\left(c_s\tau\right)+b_z\left(-c_s\tau\right)\right)} + \frac{\alpha_s^2\beta_y\beta_z\left(b_z\left(c_s\tau\right)+b_z\left(-c_s\tau\right)\right)}{\alpha_s^2\beta_y\left(c_s\tau\right)+b_z\left(-c_s\tau\right)\right)} - \frac{\beta_z\beta_y\left(c_s\tau\right)+b_z\left(-c_s\tau\right)}{\alpha_s^2\beta_y\left(c_s\tau\right)+b_z\left(-c_s\tau\right)\right)} + \frac{\alpha_s^2\beta_y\left(c_s\tau\right)+b_z\left(-c_s\tau\right)}{\alpha_s^2\beta_y\left(c_s\tau\right)+b_z\left(-c_s\tau\right)\right)} - \frac{\beta_z\beta_y\left(c_s\tau\right)+b_z\left(-c_s\tau\right)}{\alpha_s^2\beta_y\left(c_s\tau\right)+b_z\left(-c_s\tau\right)}$
$\sum_{\tau} \alpha_f \beta_u \alpha_s c_s \left( u_x \left( c_s \tau \right) - u_x \left( -c_s \tau \right) \right) + \alpha_s \beta_u \alpha_f c_f \left( u_x \left( c_f \tau \right) - u_x \left( -c_f \tau \right) \right) + \alpha_s^2 \beta_u^2 c_s sign \left( B_x \right) \left( u_u \left( c_f \tau \right) - u_u \left( -c_f \tau \right) \right)$
$\sqrt{ ho}$ $\sqrt$
$\beta_{z}^{2}\sqrt{\rho}sign\left(B_{x}\right)\left(u_{y}\left(c_{a}\tau\right)-u_{y}\left(-c_{a}\tau\right)\right)_{-1}\alpha_{f}^{2}\beta_{y}^{2}c_{f}sign\left(B_{x}\right)\left(u_{y}\left(c_{s}\tau\right)-u_{y}\left(-c_{s}\tau\right)\right)\sqrt{\rho}_{-1}$
2 $2c$ $1$
$\beta_{z}\sqrt{\rho}\beta_{y}sign\left(B_{x}\right)\left(u_{z}\left(-c_{a}\tau\right)-u_{z}\left(c_{a}\tau\right)\right)}\left[\frac{\alpha_{f}^{2}\beta_{y}c_{f}\beta_{z}sign\left(B_{x}\right)\sqrt{\rho}\left(u_{z}\left(c_{s}\tau\right)-u_{z}\left(-c_{s}\tau\right)\right)}\right]_{\perp}$
2 $2c$ $1$
$\underline{\alpha_s^2 \beta_y c_s \beta_z sign\left(B_x\right) \sqrt{p}\left(u_z\left(c_f \tau\right) - u_z\left(-c_f \tau\right)\right)}_{+} + \underline{\alpha_s \beta_y \alpha_f\left(p\left(c_f \tau\right) + p\left(-c_f \tau\right) - p\left(c_s \tau\right) - p\left(-c_s \tau\right)\right)}_{+}$
$2c$ $2c\sqrt{\rho}$
для $z-$ поперечной компоненты магнитного поля:
$\mathbf{B_{z}} = \frac{\alpha_{f}^{2}\beta_{z}^{2}\left(b_{z}\left(c_{s}\tau\right) + b_{z}\left(-c_{s}\tau\right)\right)}{2} + \frac{\alpha_{s}^{2}\beta_{z}^{2}\left(b_{z}\left(c_{f}\tau\right) + b_{z}\left(-c_{f}\tau\right)\right)}{2} + \frac{\beta_{y}^{2}\left(b_{z}\left(c_{a}\tau\right) + b_{z}\left(-c_{a}\tau\right)\right)}{2} + \frac{\beta_{y}^{2}\left(b_{z}\tau\right) + b_{z}\left(-c_{a}\tau\right)}{2} + \frac{\beta_{y}^{2}\left($

$\frac{\alpha_s^2\beta_z\beta_y\left(b_y\left(c_f\tau\right)+b_y\left(-c_f\tau\right)\right)}{2}+\frac{\alpha_f^2\beta_z\beta_y\left(b_y\left(c_s\tau\right)+b_y\left(-c_s\tau\right)\right)}{2}-\frac{\beta_y\beta_z\left(b_y\left(c_a\tau\right)+b_y\left(-c_a\tau\right)\right)}{2}+$	$\sqrt{\rho}\frac{\alpha_f \beta_z \alpha_s c_s \left(u_x \left(c_s \tau\right) - u_x \left(-c_s \tau\right)\right) + \alpha_s \beta_z \alpha_f c_f \left(u_x \left(c_f \tau\right) - u_x \left(-c_f \tau\right)\right) + \alpha_s^2 \beta_z^2 c_s sign \left(B_x\right) \left(u_z \left(c_f \tau\right) - u_z \left(-c_f \tau\right)\right) + \frac{1}{2c}$	$\frac{\beta_y^2 \sqrt{\rho} sign\left(B_x\right) \left(u_z \left(c_a \tau\right) - u_z \left(-c_a \tau\right)\right)}{2} + \frac{\alpha_f^2 \beta_z^2 c_f sign\left(B_x\right) \left(u_z \left(c_s \tau\right) - u_z \left(-c_s \tau\right)\right) \sqrt{\rho}}{2c} + \frac{2}{2c}$	$\frac{\beta_y \sqrt{\rho} \beta_z sign\left(B_x\right) \left(u_y\left(-c_a \tau\right)-u_y\left(c_a \tau\right)\right)}{2} + \frac{\alpha_f^2 \beta_z c_f \beta_y sign\left(B_x\right) \sqrt{\rho} \left(u_y\left(c_s \tau\right)-u_y\left(-c_s \tau\right)\right)}{2c} + \frac{2c}{2c}$	$\frac{\alpha_s^2 \beta_z c_s \beta_y sign\left(B_x\right) \sqrt{\rho} \left(u_y \left(c_f \tau\right) - u_y \left(-c_f \tau\right)\right)}{2c} + \frac{\alpha_s \beta_z \alpha_f \left(p \left(c_f \tau\right) + p \left(-c_f \tau\right) - p \left(c_s \tau\right) - p \left(-c_s \tau\right)\right)}{2c \sqrt{\rho}}$	для давления: $\mathbf{P} = \frac{\rho \alpha_f^2 c_f \left( u_x \left( -c_f \tau \right) - u_x \left( c_f \tau \right) \right)}{2} + \frac{\sqrt{\rho} \alpha_f \alpha_s \beta_y c \left( b_y \left( c_f \tau \right) + b_y \left( -c_f \tau \right) - b_y \left( c_s \tau \right) - b_y \left( -c_s \tau \right) \right)}{2} + $	$\frac{\rho\alpha_s^2 c_s \left(u_x \left(-c_s \tau\right) - u_x \left(c_s \tau\right)\right)}{2} + \frac{\sqrt{\rho}\alpha_f \alpha_s \beta_z c \left(b_z \left(c_f \tau\right) + b_z \left(-c_f \tau\right) - b_z \left(c_s \tau\right) - b_z \left(-c_s \tau\right)\right)}{2} + \frac{1}{2}$	$\frac{\rho\alpha_{f}\alpha_{s}c_{s}\beta_{y}sign\left(B_{x}\right)\left(u_{y}\left(c_{f}\tau\right)-u_{y}\left(-c_{f}\tau\right)\right)}{2}+\frac{\rho\alpha_{f}\alpha_{s}c_{f}\beta_{y}sign\left(B_{x}\right)\left(u_{y}\left(c_{s}\tau\right)-u_{y}\left(-c_{s}\tau\right)\right)}{2}+\frac{\alpha_{f}^{2}\left(p\left(c_{f}\tau\right)+p\left(-c_{f}\tau\right)\right)}{2}$	$\frac{\rho\alpha_{f}\alpha_{s}c_{s}\beta_{z}sign\left(B_{x}\right)\left(u_{z}\left(c_{f}\tau\right)-u_{z}\left(-c_{f}\tau\right)\right)}{2}+\frac{\rho\alpha_{f}\alpha_{s}c_{f}\beta_{z}sign\left(B_{x}\right)\left(u_{z}\left(c_{s}\tau\right)-u_{z}\left(-c_{s}\tau\right)\right)}{2}+\frac{\alpha_{s}^{2}\left(p\left(c_{s}\tau\right)+p\left(-c_{s}\tau\right)\right)}{2}$
--	--	--	---	--	---	--	---	---



Рис. 11: Схема распределения величин в ячейке (*i*, *k*, *l*)

Выполнение условия бездивергентности магнитного поля. Для выполнения условия бездивергентности магнитного поля рассмотрим следующую схему распределения величин в ячейке (i, k, l) (см. рисунок 11). Для определенности будем рассматривать  $h_x = h_y = h_z = h$ . Вектор магнитного поля будем определять на границах ячеек:

$$B_{x,i+1/2,k,l}^{n+1} = B_{x,i+1/2,k,l}^{n} - \frac{\tau}{h} \left( E_{z,i+1/2,k+1/2,l} - E_{z,i+1/2,k-1/2,l} \right) \\ + \frac{\tau}{h} \left( E_{y,i+1/2,k,l+1/2} - E_{y,i+1/2,k,l-1/2} \right) \\ B_{y,i,k+1/2,l}^{n+1} = B_{y,i,k+1/2,l}^{n} - \frac{\tau}{h} \left( E_{x,i,k+1/2,l+1/2} - E_{x,i,k+1/2,l-1/2} \right) \\ + \frac{\tau}{h} \left( E_{z,i+1/2,k+1/2,l} - E_{z,i-1/2,k+1/2,l} \right) \\ B_{z,i,k,l+1/2}^{n+1} = B_{z,i,k,l+1/2}^{n} - \frac{\tau}{h} \left( E_{y,i+1/2,k,l+1/2} - E_{y,i-1/2,k,l+1/2} \right) \\ + \frac{\tau}{h} \left( E_{x,i,k+1/2,l+1/2} - E_{x,i,k-1/2,l+1/2} \right)$$

В этом случае необходимо определить компоненты вектора электрического поля  $\vec{E} = -\vec{u} \times \vec{B} = \vec{B} \times \vec{u}$ . Или в покомпонентной записи:

$$E_x = B_y u_z - B_z u_y \qquad E_y = B_z u_x - B_x u_z \qquad E_z = B_x u_y - B_y u_x$$

Для этого будем использовать результат решения задачи Римана на эйлеровом этапе метода. Далее определим явный вид компонент электрического поля, в котором величины – элементы решения задачи Римана будут обозначены "жирным" шрифтом:

$$E_{x,i,k+1/2,l+1/2} = \frac{1}{4} \left( \mathbf{B}_{y,i,k,l+1/2} \mathbf{U}_{z,i,k,l+1/2} - \mathbf{B}_{z,i,k,l+1/2} \mathbf{U}_{y,i,k,l+1/2} + \right)$$

$$\begin{split} & \mathbf{B}_{y,i,k+1,l+1/2} \mathbf{U}_{z,i,k+1,l+1/2} - \mathbf{B}_{z,i,k+1,l+1/2} \mathbf{U}_{y,i,k+1,l+1/2} + \\ & \mathbf{B}_{y,i,k+1/2,l+1} \mathbf{U}_{z,i,k+1/2,l+1} - \mathbf{B}_{z,i,k+1/2,l+1} \mathbf{U}_{y,i,k+1/2,l+1} + \\ & \mathbf{B}_{y,i,k+1/2,l} \mathbf{U}_{z,i,k+1/2,l} - \mathbf{B}_{z,i,k+1/2,l} \mathbf{U}_{y,i,k+1/2,l} \end{pmatrix} \\ & E_{y,i+1/2,k,l+1/2} = \frac{1}{4} \left( \mathbf{B}_{z,i,k,l+1/2} \mathbf{U}_{x,i,k,l+1/2} - \mathbf{B}_{x,i,k,l+1/2} \mathbf{U}_{z,i,k,l+1/2} + \\ & \mathbf{B}_{z,i+1,k,l+1/2} \mathbf{U}_{x,i+1,k,l+1/2} - \mathbf{B}_{x,i+1,k,l+1/2} \mathbf{U}_{z,i+1,k,l+1/2} + \\ & \mathbf{B}_{z,i+1/2,k,l} \mathbf{U}_{x,i+1/2,k,l} - \mathbf{B}_{x,i+1/2,k,l} \mathbf{U}_{z,i+1/2,k,l} + \\ & \mathbf{B}_{z,i+1/2,k,l+1} \mathbf{U}_{x,i+1/2,k,l+1} - \mathbf{B}_{x,i+1/2,k,l+1} \mathbf{U}_{z,i+1/2,k,l+1} \end{pmatrix} \\ & E_{z,i+1/2,k+1/2,l} = \frac{1}{4} \left( \mathbf{B}_{x,i+1/2,k,l} \mathbf{U}_{y,i+1/2,k,l} - \mathbf{B}_{y,i+1/2,k,l} \mathbf{U}_{x,i+1/2,k,l+1} + \\ & \mathbf{B}_{x,i+1/2,k+1,l} \mathbf{U}_{y,i+1/2,k+1,l} - \mathbf{B}_{y,i+1/2,k+1,l} \mathbf{U}_{x,i+1/2,k+1,l} + \\ & \mathbf{B}_{x,i,k+1/2,l} \mathbf{U}_{y,i+1/2,k+1,l} - \mathbf{B}_{y,i,k+1/2,l} \mathbf{U}_{x,i,k+1/2,l} + \\ & \mathbf{B}_{x,i+1,k+1/2,l} \mathbf{U}_{y,i+1,k+1/2,l} - \mathbf{B}_{y,i+1,k+1/2,l} \mathbf{U}_{x,i+1,k+1/2,l} \end{pmatrix} \end{split}$$

После определения значений магнитного поля на границах ячеек осредним их в центр:

$$B_{x,ikl} = \frac{1}{2} \left( B_{x,i+1/2,k,l} + B_{x,i-1/2,k,l} \right)$$
$$B_{y,ikl} = \frac{1}{2} \left( B_{y,i,k+1/2,l} + B_{y,i,k-1/2,l} \right)$$
$$B_{z,ikl} = \frac{1}{2} \left( B_{z,i,k,l+1/2} + B_{z,i,k,l-1/2} \right)$$

Таким образом достигается условие бездивергентности магнитного поля.

Численное решение задачи Римана для уравнений бесстолкновительной гидродинамики. На эйлеровом этапе схемы для численного решения уравнений бесстолкновительной гидродинамики используется линеаризованный метод Годунова. Для вычисления потоков на каждой границе всех расчетных ячеек формулируется задача Римана с начальными данными, задаваемыми кусочно-постоянными (в случае полного тензора дисперсии скоростей) или кусочно-параболическими (в случае диагонального тензора дисперсии скоростей) функциями, по каждому направлению. В случае использования диагонального тензора дисперсии скоростей удавнений газовой динамики с показателем адиабаты равным  $\gamma = 3$ . Для осреднения значений из левой (L) и правой (R) ячеек на границу используются следующие уравнения:

$$n = \frac{\sqrt{n^L}n^L + \sqrt{n^R}n^R}{\sqrt{n^L} + \sqrt{n^R}}$$

$$v_{[x,y,z]} = \frac{\sqrt{n^L} v_{[x,y,z]}^L + \sqrt{n^R} v_{[x,y,z]}^R}{\sqrt{n^L} + \sqrt{n^R}}$$
$$\Pi_{[xx,yy,zz]} = \frac{\sqrt{n^R} \Pi_{[xx,yy,zz]}^R + \sqrt{n^L} \Pi_{[xx,yy,zz]}^L}{\sqrt{n^L} + \sqrt{n^R}}$$

Решение задачи Римана имеет вид:

$$V = \frac{v_L(-\lambda t) + v_R(\lambda t)}{2} + \frac{\Pi_L(-\lambda t) - \Pi_R(\lambda t)}{2} \sqrt{\frac{(\sqrt{n_L} + \sqrt{n_R})^2}{3(n_L^{3/2} + n_R^{3/2})(\Pi_L\sqrt{n_L} + \Pi_R\sqrt{n_R})}}$$
$$\Pi = \frac{\Pi_L(-\lambda t) + \Pi_R(\lambda t)}{2} + \frac{v_L(-\lambda t) - v_R(\lambda t)}{2} \sqrt{\frac{3(n_L^{3/2} + n_R^{3/2})(\Pi_L\sqrt{n_L} + \Pi_R\sqrt{n_R})}{(\sqrt{n_L} + \sqrt{n_R})^2}}$$

где способ вычисления для значений  $\Pi_L(-\lambda t)$ ,  $\Pi_R(\lambda t)$ ,  $v_L(-\lambda t)$ ,  $v_R(\lambda t)$  был приведен ранее.

Для решения задачи Римана в случае полного тензора дисперсии скоростей запишем одномерный вариант уравнений:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \mathcal{B}\frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

в случае уравнений для первых моментов бесстолкновительного уравнения Больцмага для эйлерова этапа вектор  $q = (v_x, v_y, v_z, \Pi_{xx}, \Pi_{xy}, \Pi_{xz})^T$ , а матрица  $\mathcal{B}$  на каждой границе ячеек записывается в виде:

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & n^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n^{-1} \\ 3\Pi_{xx} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\Pi_{xy} & \Pi_{xx} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\Pi_{xz} & 0 & \Pi_{xx} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрицу  $\mathcal{B}$  можно представить в виде декомпозиции по собственным векторам  $\mathcal{B} = R\Omega L$ , где R и L – взаимно ортогональные матрицы RL = LR = I правых и левых собственных векторов, матрица  $\Omega$  – диагональная матрица с собственными числами на диагонали.

Решение спектральной задачи ( $\lambda_i$  – собственные числа,  $r_i$  и  $l_i$  – правые и левые собственные вектора) для матрицы  $\mathcal{B}$  суть:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{3\Pi_{xx}}{n}}$$
$$r_1 = \left(\frac{\sqrt{\Pi_{xx}}}{\Pi_{xz}\sqrt{3n}}, \frac{\Pi_{xy}\sqrt{3}}{\Pi_{xz}\sqrt{n\Pi_{xx}}}, \frac{1}{\sqrt{3n\Pi_{xx}}}, \frac{\Pi_{xx}}{\Pi_{xz}}, \frac{\Pi_{xy}}{\Pi_{xz}}, 1\right)$$

$$l_{1} = \left(\frac{n\Pi_{xx}\sqrt{3}}{2\sqrt{n\Pi_{xx}}}, 0, 0, \frac{\Pi_{xz}}{2\Pi_{xx}}, 0, 0\right)$$
$$\lambda_{2} = -\sqrt{\frac{3\Pi_{xx}}{n}}$$
$$r_{2} = \left(-\frac{\sqrt{\Pi_{xx}}}{\Pi_{xz}\sqrt{3n}}, -\frac{\Pi_{xy}\sqrt{3}}{\Pi_{xz}\sqrt{n\Pi_{xx}}}, -\frac{1}{\sqrt{3n\Pi_{xx}}}, \frac{\Pi_{xx}}{\Pi_{xz}}, \frac{\Pi_{xy}}{\Pi_{xz}}, 1\right)$$
$$l_{2} = \left(-\frac{n\Pi_{xz}\sqrt{3}}{2\sqrt{n\Pi_{xx}}}, 0, 0, \frac{\Pi_{xx}}{2\Pi_{xx}}, 0, 0\right)$$
$$\lambda_{3} = \sqrt{\frac{\Pi_{xx}}{n}}$$
$$r_{3} = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{n\Pi_{xx}}}, 0, 0, 1\right)$$
$$l_{3} = \left(-\frac{\Pi_{xz}\sqrt{n}}{2\sqrt{\Pi_{xx}}}, 0, \frac{\sqrt{n\Pi_{xx}}}{2}, -\frac{\Pi_{xz}}{2\Pi_{xx}}, 0, \frac{1}{2}\right)$$
$$\lambda_{4} = \sqrt{\frac{\Pi_{xx}}{n}}$$
$$r_{4} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{n\Pi_{xx}}}, 0, 0, 1, 0\right)$$
$$l_{4} = \left(-\frac{\Pi_{xy}\sqrt{n}}{2\sqrt{\Pi_{xx}}}, \frac{\sqrt{n\Pi_{xx}}}{2}, 0, -\frac{\Pi_{xy}}{2\Pi_{xx}}, \frac{1}{2}, 0\right)$$
$$\lambda_{5} = -\sqrt{\frac{\Pi_{xx}}{n}}$$
$$r_{5} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{n\Pi_{xx}}}, 0, 0, 1, 0\right)$$
$$l_{5} = \left(-\frac{\Pi_{xy}\sqrt{n}}{2\sqrt{\Pi_{xx}}}, -\frac{\sqrt{n\Pi_{xx}}}{2}, 0, -\frac{\Pi_{xy}}{2\Pi_{xx}}, \frac{1}{2}, 0\right)$$
$$\lambda_{6} = -\sqrt{\frac{\Pi_{xx}}{n}}$$
$$r_{6} = \left(0, 0, -\frac{1}{\sqrt{n\Pi_{xx}}}, 0, 0, 1\right)$$
$$l_{6} = \left(\frac{\Pi_{xz}\sqrt{n}}{2\sqrt{\Pi_{xx}}}, 0, -\frac{\sqrt{n\Pi_{xx}}}{2}, -\frac{\Pi_{xz}}{2\Pi_{xx}}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

В результате решение задачи Римана для уравнений для первых моментов бесстолкновительного уравнения Больцмана записываются в виде:

\_\_\_\_

$$\mathbf{V}_{x} = \frac{u_{x}^{L} + u_{x}^{R}}{2} + \frac{\Pi_{xx}^{L} - \Pi_{xx}^{R}}{2} \sqrt{\frac{n^{L} + n^{R}}{3n^{L}n^{R}(\Pi_{xx}^{L} + \Pi_{xx}^{R})}},$$
$$\mathbf{V}_{y} = \frac{u_{y}^{L} + u_{y}^{R}}{2} + \frac{\Pi_{xy}^{L} - \Pi_{xy}^{R}}{2} \sqrt{\frac{n^{L} + n^{R}}{n^{L}n^{R}(\Pi_{xx}^{L} + \Pi_{xx}^{R})}} +$$

$$\begin{split} \frac{\Pi_{xx}^{L} - \Pi_{xx}^{R}}{2} \sqrt{\frac{n^{L} + n^{R}}{3n^{L}n^{R}(\Pi_{xx}^{L} + \Pi_{xx}^{R})}} \frac{(\Pi_{xy}^{L} + \Pi_{xy}^{R})(1 - \sqrt{3})}{\Pi_{xx}^{L} + \Pi_{xx}^{R}}, \\ \mathbf{V}_{z} &= \frac{u_{z}^{L} + u_{z}^{R}}{2} + \frac{\Pi_{xz}^{L} - \Pi_{xz}^{R}}{2} \sqrt{\frac{n^{L} + n^{R}}{n^{L}n^{R}(\Pi_{xx}^{L} + \Pi_{xx}^{R})}} + \\ \frac{\Pi_{xx}^{L} - \Pi_{xx}^{R}}{2} \sqrt{\frac{n^{L} + n^{R}}{3n^{L}n^{R}(\Pi_{xx}^{L} + \Pi_{xx}^{R})}} \frac{(\Pi_{xz}^{L} + \Pi_{xz}^{R})(1 - \sqrt{3})}{\Pi_{xx}^{L} + \Pi_{xx}^{R}}, \\ \Pi_{xx} &= \frac{\Pi_{xx}^{L} + \Pi_{xx}^{R}}{2} + \frac{u_{x}^{L} - u_{x}^{R}}{2} \sqrt{\frac{3n^{L}n^{R}(\Pi_{xx}^{L} + \Pi_{xx}^{R})}{n^{L} + n^{R}}}, \\ \Pi_{xy} &= \frac{\Pi_{xy}^{L} + \Pi_{xy}^{R}}{2} + \frac{u_{y}^{L} - u_{y}^{R}}{2} \sqrt{\frac{n^{L}n^{R}(\Pi_{xx}^{L} + \Pi_{xx}^{R})}{n^{L} + n^{R}}} + \\ \frac{u_{x}^{L} - u_{x}^{R}}{2} \sqrt{\frac{n^{L} + n^{R}}{n^{L}n^{R}(\Pi_{xx}^{L} + \Pi_{xx}^{R})}}} \frac{n^{L}n^{R}(\Pi_{xx}^{L} + \Pi_{xx}^{R})}{n^{L} + n^{R}} + \\ \frac{u_{x}^{L} - u_{x}^{R}}{2} \sqrt{\frac{n^{L} + \Pi_{xx}^{R}}{n^{L}n^{R}(\Pi_{xx}^{L} + \Pi_{xx}^{R})}}} \frac{n^{L}n^{R}(\Pi_{xx}^{L} + \Pi_{xx}^{R})}{n^{L} + n^{R}} + \\ \frac{u_{x}^{L} - u_{x}^{R}}{2} \sqrt{\frac{n^{L} + n^{R}}{n^{L}n^{R}(\Pi_{xx}^{L} + \Pi_{xx}^{R})}}} \frac{n^{L}n^{R}(\Pi_{xx}^{L} + \Pi_{xx}^{R})}{n^{L} + n^{R}} + \\ \frac{u_{x}^{L} - u_{x}^{R}}{2} \sqrt{\frac{n^{L} + n^{R}}{n^{L}n^{R}(\Pi_{xx}^{L} + \Pi_{xx}^{R})}}} \frac{n^{L}n^{R}(\Pi_{xx}^{L} + \Pi_{xx}^{R})(\sqrt{3} - 1)}{n^{L} + n^{R}}}. \end{split}$$

Значения  $\mathbf{V}_{x,y,z}$  и  $\Pi_{xx,xy,xz}$  и используются для аппроксимации потоков при решении уравнений для первых моментов бесстолкновительного уравнения Больцмана.

#### 3.1.2 Лагранжев этап метода для уравнений в эйлеровых координатах

Уравнения на лагранжевом этапе метода могут быть записаны в общей форме:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f\vec{u}) = 0,$$

где *f* – любая гидродинамическая величина. Тогда конечно-объемная схема для такого уравнения может быть записана в виде:

$$\frac{f_{ikl}^{n+1/2} - f_{ikl}^{n+1}}{\tau} + \frac{G_{i+1/2,kl}^x - G_{i-1/2,kl}^x}{h_x} + \frac{G_{i,k+1/2,l}^x - G_{i,k-1/2,l}^x}{h_y} + \frac{G_{ik,l+1/2}^x - G_{ik,l-1/2}^x}{h_z} = 0$$

Далее будут изложены способы вычисления потоков  $G_{i\pm 1/2,k\pm 1/2,l\pm 1/2}^n$ .

Метод Годунова для решения уравнений на лагранжевом этапе. Для определения потоков  $G_{i\pm1/2,k\pm1/2,l\pm1/2}^n$  будем рассматривать одномерный вариант уравнений лагранжевого этапа и схему Годуновского типа. Для вычисления потока через границу  $G = f\vec{u}$  на каждом интерфейсе между ячейками в одномерной постановке будем рассматривать одномерную запись уравнения лагранжевого этапа в неконсервативной форме:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \widehat{u_x} \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Это уравнение имеет тривиальное разложения по собственным векторам. Единственное собственное значение вычисляется как  $\lambda = \hat{u_x}$ . В этом случае собственное число не знакоопределенное, поэтому решение записывается в виде:

$$G = \widehat{u}_x \times \begin{cases} f_L(-|\lambda|t) = f_L, \widehat{u}_x \ge 0\\ f_R(|\lambda|t) = f_R, \widehat{u}_x < 0 \end{cases}$$

где осреднение скорости на границе между ячейками записывается в виде:

$$\widehat{u_x} = \frac{u_L \sqrt{\rho_L} + u_R \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}$$

Численная схема для одномерной постановки уравнений на эйлеровом этапе может быть записана в виде:

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^{n+1/2}}{\tau} = -\frac{G_{i+1/2} - G_{i-1/2}}{h}$$

где значения с индексом  $i \pm 1/2$  – потоки через границы ячеек, значения с индексом *i* гидродинамические величины, расположенные в серединах ячеек. Индекс n + 1/2обозначает решение, полученное на эйлеровом этапе численной схемы, а индекс n + 1обозначает итоговое решение на шаге по времени, которое получается после лагранжевого этапа.

Использование кусочно-параболического метода на локальном шаблоне для решения уравнений на эйлеровом этапе. В случае использования кусочнопараболического метода необходимо переписать уравнение для определения потока *G*, поэтому решение записывается в виде:

$$G = \widehat{u_x} \times \begin{cases} f_L(-|\lambda|t), \widehat{u_x} \ge 0\\ f_R(|\lambda|t), \widehat{u_x} < 0 \end{cases}$$

где  $f_L(-|\lambda|t)$  и  $f_R(|\lambda|t)$  – кусочно параболические функции, а осреднение скорости на границе между ячейками снова записывается в виде:

$$\widehat{u_x} = \frac{u_L \sqrt{\rho_L} + u_R \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}$$

При этом численная схема сохраняет свой первоначальный вид.

Использование операторного подхода для учета полной деформации расчетных ячеек. Важный недостаток определения значений скорости  $u_x$ , используя только информацию по оси x, это невозможность построения схемы, инвариантной



Рис. 12: Схема для вычсиления пространственного осреднения скоростей. Проекция нормальных компонент скоростей из центров ячеек в узлы (a), проекция из узлов в центры ячеек (b) с помощью шаблона весов (c).

относительно поворота, что имеет важное значение в задачах вычислительной астрофизики. Для решения этой проблемы в одномерном случае усредненное значение скорость  $\widehat{v_x}$  можно записать в виде:

$$\widehat{v_x} = \frac{\widetilde{v_L}\sqrt{\rho_L} + \widetilde{v_R}\sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}$$

где значения  $\tilde{v}_L$  и  $\tilde{v}_R$  определяются по двух-уровневой схеме. На первой стадии нормальные компоненты скорости проецируются из центров ячеек в узлы (см. рисунок 12a), такой способ определения скорости позволяет учесть информацию об ортогональных направлениях. На второй стадии, нормальные составляющие компоненты скорости проецируются из узлов в центр ячеек (см. рисунок 12b). Это и будут значения величин  $\tilde{v}_L$  и  $\tilde{v}_R$ . Шаблон весов для определения скорости представлен на рисунке (12c). Таким образом, уравнение для определения скорости  $\tilde{v}$  в ячейке (i, k, l)записывается в виде:

$$\widetilde{v}_{(i,k,l)} = \frac{1}{16} \left( v_{i,k+1,l+1} + v_{i,k+1,l-1} + v_{i,k-1,l+1} + v_{i,k-1,l-1} \right) + \frac{1}{8} \left( v_{i,k+1,l} + v_{i,k-1,l} + v_{i,k,l+1} + v_{i,k,l-1} \right) + \frac{1}{4} v_{i,k,l}$$

Такой подход основан на искуственной технике, которая базируется на полной геометрической деформации [2, 7] ячеек: перемещение, растяжение и скос. Конечно, такой подход не единственен и для решения подобных проблем используется подход на основе построения многомерного решения задачи Римана [38, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 59, 60]. Далее приведем подробный алгоритм для решения уравнений на лагранжевом этапе для каждой ячейки (*i*, *k*, *l*) расчетной области.

1. Будем рассматривать численную схему для трехмерной постановки уравнений на лагранжевом этапе:

$$\frac{f_{i,k,l}^{n+1} - f_{i,k,l}^{n+1/2}}{\tau} = -\frac{G_{i+1/2,k,l}^x - G_{i-1/2,k,l}^x}{h_x} - \frac{G_{i,k+1/2,l}^y - G_{i,k-1/2,l}^y}{h_y} - \frac{G_{i,k,l+1/2}^z - G_{i,k,l-1/2,l}^z}{h_z} - \frac{G_{i,k,l+1/2}^z - G_{i,k,l-1/2,l}^z}{h_z} - \frac{G_{i,k,l-1/2,l}^y}{h_z} -$$

- 2. Определим поток величины f вдоль оси x.
- 3. Для аппроксимации потока  $G^x_{i\pm 1/2,k,l}$  будем использовать осреднение для *х*-компоненты скорости в ячейках i 1, i, i + 1 с помощью схемы:

$$\widetilde{u}_{x,([i\pm1,i],k,l)} = \frac{1}{4}u_{x,([i\pm1,i],k,l+1]} + \frac{1}{16}\left(u_{x,([i\pm1,i],k+1,l+1)} + u_{x,([i\pm1,i],k+1,l+1)} + u_{x,([i\pm1,i],k-1,l+1)} + u_{x,([i\pm1,i],k-1,l-1)}\right) + \frac{1}{8}\left(u_{x,([i\pm1,i],k+1,l)} + u_{x,([i\pm1,i],k-1,l)} + u_{x,([i\pm1,i],k,l+1)} + u_{x,([i\pm1,i],k,l-1)}\right)$$

4. Вычисляем осреднение *x*-компоненты скорости на границы  $(i \pm 1/2, k, l)$ :

$$\widehat{u}_{x,i+1/2,k,l} = \frac{\widetilde{u}_{x,(i+1,k,l)}\sqrt{\rho_{i+1,k,l}} + \widetilde{u}_{x,(i,k,l)}\sqrt{\rho_{i,k,l}}}{\sqrt{\rho_{i+1,k,l}} + \sqrt{\rho_{i,k,l}}}$$
$$\widehat{u}_{x,i-1/2,k,l} = \frac{\widetilde{u}_{x,(i-1,k,l)}\sqrt{\rho_{i-1,k,l}} + \widetilde{u}_{x,(i,k,l)}\sqrt{\rho_{i,k,l}}}{\sqrt{\rho_{i-1,k,l}} + \sqrt{\rho_{i,k,l}}}$$

5. Вычисляем *х*-компоненту потока:

$$G_{i+1/2,k,l}^{x} = \widehat{u}_{x,i+1/2,k,l} \times \begin{cases} f_{i,k,l}(-|\widehat{u}_{x,i+1/2,k,l}|t), \widehat{u}_{x,i+1/2,k,l} \ge 0\\ f_{i+1,k,l}(|\widehat{u}_{x,i+1/2,k,l}|t), \widehat{u}_{x,i+1/2,k,l} < 0 \end{cases}$$
$$G_{i-1/2,k,l}^{x} = \widehat{u}_{x,i-1/2,k,l} \times \begin{cases} f_{i-1,k,l}(-|\widehat{u}_{x,i-1/2,k,l}|t), \widehat{u}_{x,i-1/2,k,l} \ge 0\\ f_{i,k,l}(|\widehat{u}_{x,i-1/2,k,l}|t), \widehat{u}_{x,i-1/2,k,l} < 0 \end{cases}$$

- 6. Определим поток величины f вдоль оси y.
- 7. Для аппроксимации потока  $G_{i,k\pm 1/2,l}^{y}$  будем использовать осреднение для *у*-компоненты скорости в ячейках k 1, k, k + 1 с помощью схемы:

$$\widetilde{u}_{y,(i,[k\pm1,k],l)} = \frac{1}{4}u_{y,(i,[k\pm1,k],l)} + \frac{1}{16}\left(u_{y,(i+1,[k\pm1,k],l+1)} + u_{y,(i+1,[k\pm1,k],l-1)} + u_{y,(i-1,[k\pm1,k],l+1)} + u_{y,(i-1,[k\pm1,k],l-1)}\right) + \frac{1}{8}\left(u_{y,(i+1,[k\pm1,k],l)} + u_{y,(i-1,[k\pm1,k],l)} + u_{y,(i,[k\pm1,k],l+1)} + u_{y,(i,[k\pm1,k],l-1)}\right)$$

8. Вычисляем осреднение <br/> y-компоненты скорости на границы  $(i,k\pm 1/2,l):$ 

$$\widehat{u}_{y,i,k+1/2,l} = \frac{\widetilde{u}_{y,(i,k+1,l)}\sqrt{\rho_{i,k+1,l}} + \widetilde{u}_{y,(i,k,l)}\sqrt{\rho_{i,k,l}}}{\sqrt{\rho_{i,k+1,l}} + \sqrt{\rho_{i,k,l}}}$$
$$\widehat{u}_{y,i,k-1/2,l} = \frac{\widetilde{u}_{y,(i,k-1,l)}\sqrt{\rho_{i,k-1,l}} + \widetilde{u}_{y,(i,k,l)}\sqrt{\rho_{i,k,l}}}{\sqrt{\rho_{i,k-1,l}} + \sqrt{\rho_{i,k,l}}}$$

9. Вычисляем у-компоненту потока:

$$\begin{aligned} G_{i,k+1/2,l}^{y} &= \widehat{u}_{y,i,k+1/2,l} \times \begin{cases} f_{i,k,l}(-|\widehat{u}_{y,i,k+1/2,l}|t), \widehat{u}_{y,i,k+1/2,l} \ge 0\\ f_{i,k+1,l}(|\widehat{u}_{y,i,k+1/2,l}|t), \widehat{u}_{y,i,k+1/2,l} < 0 \end{cases} \\ \\ G_{i,k-1/2,l}^{y} &= \widehat{u}_{y,i,k-1/2,l} \times \begin{cases} f_{i,k-1,l}(-|\widehat{u}_{y,i,k-1/2,l}|t), \widehat{u}_{y,i,k-1/2,l} \ge 0\\ f_{i,k,l}(|\widehat{u}_{y,i,k-1/2,l}|t), \widehat{u}_{y,i,k-1/2,l} < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- 10. Определим поток величины f вдоль оси z.
- 11. Для аппроксимации потока  $G^{z}_{i,k,l\pm 1/2}$  будем использовать осреднение для *z*-компоненты скорости в ячейках l-1, l, l+1 с помощью схемы:

$$\widetilde{u}_{z,(i,k,[l\pm1,l])} = \frac{1}{4}u_{z,(i,k,[l\pm1,l])} + \frac{1}{16}\left(u_{z,(i+1,k+1,[l\pm1,l])} + u_{z,(i+1,k-1,[l\pm1,l])} + u_{z,(i-1,k+1,[l\pm1,l])} + u_{z,(i-1,k-1,[l\pm1,l])}\right) + \frac{1}{8}\left(u_{z,(i+1,k,[l\pm1,l])} + u_{z,(i-1,k,[l\pm1,l])} + u_{z,(i,k+1,[l\pm1,l])} + u_{z,(i,k-1,[l\pm1,l])}\right)$$

12. Вычисляем осреднение *у*-компоненты скорости на границы  $(i, k, l \pm 1/2)$ :

$$\widehat{u}_{z,i,k,l+1/2} = \frac{\widetilde{u}_{z,(i,k,l+1)}\sqrt{\rho_{i,k,l+1}} + \widetilde{u}_{z,(i,k,l)}\sqrt{\rho_{i,k,l}}}{\sqrt{\rho_{i,k,l+1}} + \sqrt{\rho_{i,k,l}}}$$
$$\widehat{u}_{z,i,k,l-1/2} = \frac{\widetilde{u}_{z,(i,k,l-1)}\sqrt{\rho_{i,k,l-1}} + \widetilde{u}_{z,(i,k,l)}\sqrt{\rho_{i,k,l}}}{\sqrt{\rho_{i,k,l-1}} + \sqrt{\rho_{i,k,l}}}$$

13. Вычисляем *z*-компоненту потока:

$$\begin{aligned} G^{z}_{i,k,l+1/2} &= \widehat{u}_{z,i,k,l+1/2} \times \begin{cases} f_{i,k,l}(-|\widehat{u}_{z,i,k,l+1/2}|t), \widehat{u}_{z,i,k,l+1/2} \ge 0\\ f_{i,k,l+1}(|\widehat{u}_{z,i,k,l+1/2}|t), \widehat{u}_{z,i,k,l+1/2} < 0 \end{cases} \\ \\ G^{z}_{i,k,l-1/2} &= \widehat{u}_{z,i,k,l-1/2} \times \begin{cases} f_{i,k,l-1}(-|\widehat{u}_{z,i,k,l-1/2}|t), \widehat{u}_{z,i,k,l-1/2} \ge 0\\ f_{i,k,l}(|\widehat{u}_{z,i,k,l-1/2}|t), \widehat{u}_{z,i,k,l-1/2} < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

**Численное решение уравнений на лагранжевом этапе в сферической симметрии.** На лагранжевом этапе происходит адвективный перенос гидродинамических параметров и все уравнения на лагранжевом этапе имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(fr^{2}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(fr^{2}u\right) = 0$$

где f – это функции плотности, импульса или давления газа. Для решения уравнений используется аналогичный, что и на эйлеровом этапе подход. Для вычисления потока  $F = fr^2 u$  при  $\lambda = |u|$  используется формула:

$$F = u \times \begin{cases} f_L(-\lambda\tau)r^2, u \ge 0\\ f_R(\lambda\tau)r^2, u < 0 \end{cases}$$

где  $f_L(-\lambda \tau)$  и  $f_R(\lambda \tau)$  – кусочно-параболические функции для величины f и скорость на интерфейсе между ячейками вычисляется по формуле:

$$u = \frac{u_L \sqrt{\rho_L} + u_R \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}$$

Для построения кусочно-параболического решения используется аналогичная процедура, которая приведена в предыдущих разделах.

Проблема инвариантности решения относительно поворота при различном способе учета деформации ячеек. Для обоснования необходимости использования операторного подхода для определения скоростей и его преимущества над простейшим способом осреднения была поставлена задача о вращении газового диска в двумерной постановке. Для этой задачи профили плотности и давления определим как:

$$p(r) = \rho(r) = \begin{cases} 2 - r, r < 1 \\ 1, r \ge 1 \end{cases}$$

профиль скорости вращения как:

$$\omega(r) = \begin{cases} 1, r < 1\\ 0, r \ge 1 \end{cases}$$

На рисунке (13) показаны результаты использования одноточечного (слева) и девятиточечного (справа) шаблонов для осреднения скоростей. Красным цветом на левой картинке показаны геометрические артефакты (в зарубежной литературе carbuncle эффекты), что не наблюдается в случае использования 9-точечного шаблона. Таким образом, обосновывается необходимость использования последнего шаблона для осреднения скоростей.



Рис. 13: Задача вращения газового диска. Слева: скорость на лагранжевом этапе определялась из одноточечного шаблона. Справа: скорость определялась по 9точечному шаблону.

#### 3.1.3 Процедура коррекция дисбаланса энергии и функции энтропии

Процедура коррекции решения для уравнений газовой динамики. Напомним, что главная проблема при численном решении уравнений газовой динамики является дисбаланс между внутренней и полной механической энергией, который выражается в падении энтропии, что приводит к получению некорректного численного решения. В настоящей работе мы используем комбинацию подходов, изложенных в оригинальных авторских работах [111, 264]. Он состоит в использовании переопределенной системы уравнений гравитационной газовой динамики и состоит в двух преобразованиях:

1. Коррекция внутренней энергии (или энтропии) в области с основной плотностью газа [111]:

$$\rho \varepsilon = \left(\rho E - \frac{\rho \vec{u}^2}{2}\right), \frac{\rho}{\rho_{\max}} > 10^{-5}$$

 Коррекция длины вектора скорости в области разреженного газа (фактически на границе газ-вакуум) [264]:

$$|\vec{u}| = \sqrt{\frac{2(\rho E - \rho \varepsilon)}{\rho}}, \frac{\rho}{\rho_{\max}} \le 10^{-5}$$

Для реализации формулы для первого преобразования в ячейке (*i*, *k*, *l*) используется простое выражение:

$$\rho \varepsilon_{i,k,l} = \rho E_{i,k,l} - \rho_{i,k,l} \frac{u_{x,i,k,l}^2 + u_{y,i,k,l}^2 + u_{z,i,k,l}^2}{2}$$

Для реализации формулы для второго преобразования используется схема:

$$u_{x,i,k,l} = \frac{u_{x,i,k,l}}{\sqrt{u_{x,i,k,l}^2 + u_{y,i,k,l}^2 + u_{z,i,k,l}^2}} \sqrt{2(\rho^{-1})_{i,k,l}(\rho E_{i,k,l} - \rho \varepsilon_{i,k,l})}$$
$$u_{y,i,k,l} = \frac{u_{y,i,k,l}}{\sqrt{u_{x,i,k,l}^2 + u_{y,i,k,l}^2 + u_{z,i,k,l}^2}} \sqrt{2(\rho^{-1})_{i,k,l}(\rho E_{i,k,l} - \rho \varepsilon_{i,k,l})}$$
$$u_{z,i,k,l} = \frac{u_{z,i,k,l}}{\sqrt{u_{x,i,k,l}^2 + u_{y,i,k,l}^2 + u_{z,i,k,l}^2}} \sqrt{2(\rho^{-1})_{i,k,l}(\rho E_{i,k,l} - \rho \varepsilon_{i,k,l})}$$

В области разрежения и на границе газ-вакуум обращение функции плотности может вызвать определенные проблемы, проявляющиеся в виде образования нефизичных скоростей. Для решения такой проблемы для определения терма  $(\rho^{-1})_{i,k,l}$  будем использовать следующий подход:

$$(\rho^{-1})_{i,k,l} = 4096 \frac{\rho_{i,k,l}}{D_{i,k,l}^2}$$

где

$$\begin{split} D_{i,k,l} &= 8\rho_{i,k,l} + 4\left(\rho_{i+1,k,l} + \rho_{i,k+1,l} + \rho_{i,k,l+1} + \rho_{i-1,k,l} + \rho_{i,k-1,l} + \rho_{i,k,l-1}\right) + \\ & 2\left(\rho_{i+1,k+1,l} + \rho_{i+1,k-1,l} + \rho_{i-1,k+1,l} + \rho_{i-1,k-1,l} + \rho_{i+1,k,l+1} + \rho_{i+1,k,l-1} + \rho_{i,k+1,l+1} + \rho_{i,k-1,l+1} + \rho_{i-1,k-1,l-1} + \rho_{i-1,k,l+1} + \rho_{i-1,k,l-1} + \rho_{i+1,k+1,l+1} + \rho_{i+1,k-1,l+1} + \rho_{i-1,k+1,l-1} + \rho_{i-1,k-1,l-1} + \rho_{i-1,k-1,l-1$$

Последняя формула используется для деления момента импульса на плотность для получения скорости.

# Процедура коррекции решения для уравнений магнитной газовой динамики. Аналогично уравнениям газовой динамики главная проблема при численном решении уравнений магнитной газовой динамики является дисбаланс между суммой внутренней и магнитной энергии и полной механической энергии, который выражается в падении энтропии, что приводит к получению некорректного численного решения. Для решения этой проблемы используется переопределенная система уравнений гравитационной магнитной газовой динамики и состоит в двух преобразованиях:

1. Коррекция внутренней энергии (или энтропии) в области с основной плотностью газа:

$$\rho\varepsilon = \left(\rho E - \frac{\rho \vec{u}^2}{2} - \frac{\vec{B}^2}{2}\right), \frac{\rho}{\rho_{\max}} > 10^{-5}$$

2. Коррекция длины вектора скорости в области разреженного газа:

$$|\vec{u}| = \sqrt{\frac{2(\rho E - \rho \varepsilon - \frac{\vec{B}^2}{2})}{\rho}}, \frac{\rho}{\rho_{\max}} \le 10^{-5}$$

Для реализации формулы для первого преобразования в ячейке (*i*, *k*, *l*) используется простое выражение:

$$\rho \varepsilon_{i,k,l} = \rho E_{i,k,l} - \rho_{i,k,l} \frac{u_{x,i,k,l}^2 + u_{y,i,k,l}^2 + u_{z,i,k,l}^2}{2} - \frac{B_{x,i,k,l}^2 + B_{y,i,k,l}^2 + B_{z,i,k,l}^2}{2}$$

Для реализации формулы для второго преобразования используется схема:

$$u_{x,i,k,l} = \frac{u_{x,i,k,l}\sqrt{2(\rho^{-1})_{i,k,l}\left(\rho E_{i,k,l} - \rho \varepsilon_{i,k,l} - \frac{B_{x,i,k,l}^2 + B_{y,i,k,l}^2 + B_{z,i,k,l}^2}{2}\right)}{\sqrt{u_{x,i,k,l}^2 + u_{y,i,k,l}^2 + u_{z,i,k,l}^2}}$$
$$u_{y,i,k,l} = \frac{u_{y,i,k,l}\sqrt{2(\rho^{-1})_{i,k,l}\left(\rho E_{i,k,l} - \rho \varepsilon_{i,k,l} - \frac{B_{x,i,k,l}^2 + B_{y,i,k,l}^2 + B_{z,i,k,l}^2}{2}\right)}}{\sqrt{u_{x,i,k,l}^2 + u_{y,i,k,l}^2 + u_{z,i,k,l}^2}}$$
$$u_{z,i,k,l} = \frac{u_{z,i,k,l}\sqrt{2(\rho^{-1})_{i,k,l}\left(\rho E_{i,k,l} - \rho \varepsilon_{i,k,l} - \frac{B_{x,i,k,l}^2 + B_{y,i,k,l}^2 + B_{z,i,k,l}^2}{2}\right)}}{\sqrt{u_{x,i,k,l}^2 + u_{y,i,k,l}^2 + u_{z,i,k,l}^2}}}$$

Терм  $(\rho^{-1})_{i,k,l}$  был определен ранее.

Контроль дисбаланса энергии для уравнений бесстолкновительной гидродинамики. Аналогично уравнениям газовой динамики главная проблема при численном решении уравнений для первых моментов бесстолкновительного уравнения Больцмана является дисбаланс между внутренней и полной механической энергии. Для решения этой проблемы используется переопределенная система уравнений и состоит в двух преобразованиях:

1. Коррекция полного тензора дисперсии скоростей аналогично работе [111]:

$$\Pi_{ij} = (nW_{ij} - nv_iv_j)$$

при этом корректировка происходит независимо от плотности бесстолкновительной компоненты, что связано с невозможностью скорректировать скорость в области малой плотности. В случае если рассматривается диагональный тензор дисперсии скоростей, то происходит корректировка величины каждого из элементов диагонали

$$\Pi_{xx} = \frac{2\Pi_{xx}^{0}}{\Pi_{xx}^{0} + \Pi_{yy}^{0} + \Pi_{zz}^{0}} \left( nW - \frac{1}{2}n\vec{v}^{2} \right), \frac{n}{n_{\max}} > 10^{-5}$$
$$\Pi_{yy} = \frac{2\Pi_{yy}^{0}}{\Pi_{xx}^{0} + \Pi_{yy}^{0} + \Pi_{zz}^{0}} \left( nW - \frac{1}{2}n\vec{v}^{2} \right), \frac{n}{n_{\max}} > 10^{-5}$$
$$\Pi_{zz} = \frac{2\Pi_{zz}^{0}}{\Pi_{xx}^{0} + \Pi_{yy}^{0} + \Pi_{zz}^{0}} \left( nW - \frac{1}{2}n\vec{v}^{2} \right), \frac{n}{n_{\max}} > 10^{-5}$$

Верхний индекс<sup>0</sup> здесь добавления для указания, что решение получено из уравнений для поведения тензора дисперсии скоростей.

2. Коррекция длины вектора скорости в разреженной области (что используется только в случае диагонального тензора дисперсии скоростей), аналогично работе [264]:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\frac{2nW - (\Pi_{xx} + \Pi_{yy} + \Pi_{zz})}{n}}, \frac{n}{n_{\max}} \le 10^{-5}$$

Для реализации первой формулы для первого преобразования в ячейке (i, k, l) используется простое выражение:

$$\begin{aligned} \Pi_{xx,i,k,l} &= nW_{xx,i,k,l} - nv_{x,i,k,l}v_{x,i,k,l} & \Pi_{xy,i,k,l} = nW_{xy,i,k,l} - nv_{x,i,k,l}v_{y,i,k,l} \\ \Pi_{xz,i,k,l} &= nW_{xz,i,k,l} - nv_{x,i,k,l}v_{z,i,k,l} & \Pi_{yy,i,k,l} = nW_{yy,i,k,l} - nv_{y,i,k,l}v_{y,i,k,l} \\ \Pi_{yz,i,k,l} &= nW_{yz,i,k,l} - nv_{y,i,k,l}v_{z,i,k,l} & \Pi_{zz,i,k,l} = nW_{zz,i,k,l} - nv_{z,i,k,l}v_{z,i,k,l} \end{aligned}$$

Для реализации второй формулы для первого преобразования в ячейке (i, k, l) используется схема:

$$\Pi_{xx,i,k,l} = \frac{2\Pi_{xx,i,k,l}^{0}}{\Pi_{xx,i,k,l}^{0} + \Pi_{yy,i,k,l}^{0} + \Pi_{zz,i,k,l}^{0}} \left( nW_{i,k,l} - n_{i,k,l} \frac{v_{x,i,k,l}^{2} + v_{y,i,k,l}^{2} + v_{z,i,k,l}^{2}}{2} \right)$$
$$\Pi_{yy,i,k,l} = \frac{2\Pi_{yy,i,k,l}^{0}}{\Pi_{xx,i,k,l}^{0} + \Pi_{yy,i,k,l}^{0} + \Pi_{zz,i,k,l}^{0}} \left( nW_{i,k,l} - n_{i,k,l} \frac{v_{x,i,k,l}^{2} + v_{y,i,k,l}^{2} + v_{z,i,k,l}^{2}}{2} \right)$$
$$\Pi_{zz,i,k,l} = \frac{2\Pi_{zz,i,k,l}^{0}}{\Pi_{xx,i,k,l}^{0} + \Pi_{yy,i,k,l}^{0} + \Pi_{zz,i,k,l}^{0}} \left( nW_{i,k,l} - n_{i,k,l} \frac{v_{x,i,k,l}^{2} + v_{y,i,k,l}^{2} + v_{z,i,k,l}^{2}}{2} \right)$$

Для реализации формулы для второго преобразования используется схема:

$$v_{x,i,k,l} = \frac{v_{x,i,k,l}\sqrt{2(n^{-1})_{i,k,l}\left(nW_{i,k,l} - (\Pi_{xx,i,k,l} + \Pi_{yy,i,k,l} + \Pi_{zz,i,k,l})\right)}}{\sqrt{v_{x,i,k,l}^2 + v_{y,i,k,l}^2 + v_{z,i,k,l}^2}}$$
$$v_{y,i,k,l} = \frac{v_{y,i,k,l}\sqrt{2(n^{-1})_{i,k,l}(nW_{i,k,l} - (\Pi_{xx,i,k,l} + \Pi_{yy,i,k,l} + \Pi_{zz,i,k,l}))}}{\sqrt{v_{x,i,k,l}^2 + v_{y,i,k,l}^2 + v_{z,i,k,l}^2}}$$
$$v_{z,i,k,l} = \frac{v_{z,i,k,l}\sqrt{2(n^{-1})_{i,k,l}(nW_{i,k,l} - (\Pi_{xx,i,k,l} + \Pi_{yy,i,k,l} + \Pi_{zz,i,k,l}))}}{\sqrt{v_{x,i,k,l}^2 + v_{y,i,k,l}^2 + v_{z,i,k,l}^2}}$$

Терм  $(n^{-1})_{i,k,l}$  определяется аналогично терму  $(\rho^{-1})_{i,k,l}$ , который был определен ранее.

#### 3.1.4 Интегрирование по времени

**Выбор временного шага.** Шаг по времени *т* будем вычислять из условия Куранта (в зарубежной литературе условие Куранта-Фридрихса-Леви):

$$\frac{\tau \times (|u_{max}| + |c_{max}|)}{h} = CFL < 1,$$

где  $u_{max}$  – максимальная скорость движения газа или бесстолкновительной компоненты,  $c_{max}$  – максимальная скорость звука газа, замагниченного газа или бесстолкновительной компоненты, CFL – число Куранта. В вычислительных экспериментах, о которых пойдет речь далее, а также для тех вычислительных экспериментов, что были уже приведены число Куранта было выбрано CFL = 0.2.

Использование схемы Рунге-Кутта для интегрирования по времени. При конечно-объемной аппроксимации эйлерова и лагранжева этапов, численную схему можно записать в виде обыкновенного дифференциального уравнения вида:

$$\frac{d\mathcal{Q}}{dt} = \mathcal{R}$$

где *Q* – гидродинамические параметры, *R* – конечно-объемная аппроксимация каждого из этапов. В этом случае для решения каждого этапа будем использовать схему Рунге-Кутта для аппроксимации производной по времени:

$$\mathcal{Q}^{(n+1/3)} = \mathcal{Q}^{(n)} + \tau \mathcal{R}^{(n)}$$
$$\mathcal{Q}^{(n+2/3)} = \frac{3}{4} \mathcal{Q}^{(n)} + \frac{1}{4} \mathcal{Q}^{(n+1/3)} + \frac{\tau}{4} \mathcal{R}^{(n+1/3)}$$
$$\mathcal{Q}^{(n+1)} = \frac{1}{3} \mathcal{Q}^{(n)} + \frac{2}{3} \mathcal{Q}^{(n+2/3)} + \frac{2\tau}{3} \mathcal{R}^{(n+2/3)}$$

где  $\mathcal{Q}^{(i)}$  – решение каждого из этапов на *i*-м слое по времени,  $\mathcal{R}^{(i)}$  – конечно-объемная аппроксимация уравнений на *i*-м слое по времени.

# 3.2 Метод решения уравнения Пуассона

После решения гидродинамических уравнений необходимо восстановить гравитационный потенциал по плотности гидродинамической компоненты. Для этого будем использовать 27-точечный шаблон для аппроксимации уравнения Пуассона (для определенности  $h = h_x = h_y = h_z$ ):

$$\begin{split} & -\frac{38}{9} \Phi_{i,k,l} + \frac{4}{9} \left( \Phi_{i-1,k,l} + \Phi_{i+1,k,l} + \Phi_{i,k-1,l} + \Phi_{i,k+1,l} + \Phi_{i,k,l-1} + \Phi_{i,k,l+1} \right) + \\ & \frac{1}{9} \left( \Phi_{i-1,k-1,l} + \Phi_{i+1,k-1,l} + \Phi_{i-1,k+1,l} + \Phi_{i+1,k+1,l} + \Phi_{i-1,k,l-1} + \Phi_{i+1,k,l-1} + \Phi_{i-1,k,l-1} + \Phi_{i+1,k,l-1} + \Phi_{i,k-1,l-1} + \Phi_{i,k-1,l-1} + \Phi_{i,k-1,l-1} + \Phi_{i,k+1,l-1} \right) + \\ & \frac{1}{36} \left( \Phi_{i-1,k-1,l-1} + \Phi_{i-1,k+1,l-1} + \Phi_{i-1,k-1,l+1} + \Phi_{i-1,k+1,l+1} + \Phi_{i+1,k-1,l-1} + \Phi_{i+1,k+1,l-1} + \Phi_{i+1,k-1,l-1} + \Phi_{i+1,k+1,l-1} \right) + \\ & \Phi_{i+1,k-1,l+1} + \Phi_{i+1,k+1,l+1} \right) = 4\pi G h^2 \rho_{i,k,l} \end{split}$$

Это связано с тем, чтобы обеспечить максимальную инвариантность решения относительно поворота. Алгоритм решения уравнения Пуассона будет состоять из нескольких этапов.

#### 3.2.1 Учет граничных условий

На первом этапе решения уравнения Пуассона происходит учет граничных условий.

Этап 1. Постановка граничных условий для уравнения Пуассона. Для постановки граничных условий для гравитационного потенциала на границе области *D* будем использовать первые члены мультипольного разложения – статический, осевой и центробежный моменты инерции:

$$\Phi(x, y, z)|_{D} = -\frac{M}{r} - \frac{M}{r^{3}} \left( I_{x} + I_{y} + I_{z} - 3I_{0} \right)$$

где

$$I_{0} = \frac{(x^{2}I_{x} + y^{2}I_{y} + z^{2}I_{z}) - 2(xyI_{x}y + xzI_{x}z + yzI_{y}z)}{r^{2}}$$

$$I_{x} = \sum_{j} (z_{j}^{2} + y_{j}^{2}) m_{j} \qquad I_{y} = \sum_{j} (x_{j}^{2} + z_{j}^{2}) m_{j} \qquad I_{z} = \sum_{j} (x_{j}^{2} + y_{j}^{2}) m_{j}$$

$$I_{xy} = \sum_{j} x_{j}y_{j}m_{j} \qquad I_{xz} = \sum_{j} x_{j}z_{j}m_{j} \qquad I_{yz} = \sum_{j} y_{j}z_{j}m_{j}$$

где x, y, z – координаты центра ячеек на границе области,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  – расстояние до центра области,  $x_j, y_j, z_j$  – координата очередной ячейки,  $m_j$  – масса очередной ячейки, M – масса всей области. Когда значения потенциала на границе области определены, то они подставляются в 27-точечный шаблон для определения итоговой плотности  $\rho_{i,k,l}$  на границе D.

## 3.2.2 Процедура быстрого преобразования Фурье

На втором и третьем этапах метода будет использована процедура быстрого преобразования Фурье.

Этап 2. Преобразование плотности в пространство гармоник. Итоговая плотность представляется в виде суперпозиции по собственным функциям оператора Лапласа:

$$\rho_{i,k,l} = \sum_{jmn} \sigma_{jmn} exp\left(\frac{\vec{i}\pi i j}{I} + \frac{\vec{i}\pi k m}{K} + \frac{\vec{i}\pi l n}{L}\right)$$

где I, K, L – число ячеек по каждой координате,  $\vec{i}$  – мнимая единица. Для этого используется быстрое преобразование Фурье.

Этап 3. Решение уравнения Пуассона в пространстве гармоник. Мы предполагаем, что потенциал также представлен в виде суперпозиции по собственным функциям оператора Лапласа:

$$\Phi_{i,k,l} = \sum_{jmn} \phi_{jmn} exp\left(\frac{\vec{i}\pi ij}{I} + \frac{\vec{i}\pi km}{K} + \frac{\vec{i}\pi ln}{L}\right)$$

При подстановке такого разложения в схему аппроксимации уравнения Пуассона мы получаем достаточно простую формулу для вычисления амплитуд гармоник потенциала:

$$\phi_{jmn} = \frac{\frac{2}{3}\pi h^2 \sigma_{jmn}}{1 - \left(1 - \frac{2\sin^2\frac{\pi j}{L}}{3}\right) \left(1 - \frac{2\sin^2\frac{\pi m}{K}}{3}\right) \left(1 - \frac{2\sin^2\frac{\pi n}{L}}{3}\right)}$$

После чего необходимо проделать обратное быстрое преобразование Фурье гармоник потенциала в функциональное пространство гармоник.

# 3.3 Верификация численных методов

В настоящем подразделе будут приведены результаты тестовых вычислительных экспериментов для всех описанных ранее вычислительных моделей.

#### 3.3.1 Тесты в одномерной постановке

Задачи о распаде разрыва для уравнений газовой динамики. Начальная конфигурация для трех задач приведена в таблице (7), где  $x_0$  – начальная позиция разделителя между двумя соседними состояниями (L – левое, R – правое). Для вычислительных экспериментов использовалось 100 расчетных ячеек. Целью первого теста является определение правильности описания контактного разрыва. Большинство методов решения газодинамических уравнений дают либо осцилляцию, либо

N	$ ho_L$	$v_L$	$p_L$	$ ho_R$	$v_R$	$p_R$	$x_0$	t
1	1	0	1	0.125	0	0.1	0.5	0.2
2	1	-2	0.4	1	2	0.4	0.5	0.15
3	1	0	1000	1	0	0.01	0.5	0.012

Таблица 7: Начальное состояния для задач об ударной трубе

диффузию ("размазывание" ударных волн). Авторский метод высокого порядка точности дает малое (на две ячейки) размазывание решения в области ударной волны (см. рисунок 14) по сравнению с методом первого порядка (см. рисунок 15). В ходе второго теста, газ с одинаковыми термодинамическими параметрами разлетается в разные стороны, образуя в центре существенную область разрежения. Тест выявляет способность физически правдоподобно моделировать такую ситуацию. Из литературы известно, что многие методы дают ошибочный (нефизический) рост температуры в области сильного разрежения и как следствие, получаемое решение искажается. Авторский метод успешно моделирует область разрежения (см. рисунок 16). Основная задача третьего теста – проверка устойчивости численного метода. Огромный перепад давления (5 десятичных порядков) должен выявить способность метода устойчиво моделировать сильные возмущения с возникновением быстро распространяющихся ударных волн. Так называемая волна-предшественник (ступенька на графике внутренней энергии на правом фронте ударной волны) отражена корректно, без размазывания, что говорит в пользу метода (см. рисунок 17).

Задача взаимодействия ударных волн в газовой динамике. Основная особенность этого теста – это возможность численного метода моделирования взаимодействия сильных ударных волн в узкой области решений. Для постановки задачи выберем расчетную область [0; 1] с единичной начальной плотностью и нулевой начальной скоростью. Начальное давление при x < 0.1 выберем как  $p_L = 1000$ , для 0.1 < x < 0.9 выберем как  $p_C = 0.01$ , и для интервала x > 0.9 возьмем значение  $p_R = 100$ . В качестве краевых условий используются условия отражения. Результат вычислительного эксперимента показан на рисунке (18). Метод получил очень хорошее численное решение. Положение всех ударных волн и контактного разрыва воспроизведены как и в решение с использованием классического РРМ метода. Как и в случае других методов имеет место размазывание контактного разрыва. Ударная



Рис. 14: Результаты для первой задачи об ударной трубе.



Рис. 15: Сравнение метода первого порядка (слева) и высокого порядка (справа) на первой задаче об ударной трубе.

волна в точке x = 0.76 ограничена и ее амплитуда составляет значение ~ 6.5, также корректно при x = 0.86 воспроизведена волна-предшественник с амплитудой ~ 1. Все ударные волны имеют малую диссипацию решения. На графике скорости видно, что корректно воспроизведены градиенты скорости выходящие сначала на пик ~ 10 в точке x = 0.65 и на пик ~ 14 в точке x = 0.86. В расчете была использована равномерная расчетная сетка, в отличие от адаптивной сетки около ударных волн, используемой в ряде работ.

Задача Аксенова (определение порядка точности). Рассмотрим систему уравнений одномерной газовой динамики в размерном виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma},$$

где p - давление,  $\rho$  - плотность, u - скорость,  $\gamma$  - показатель адиабаты.

В качестве характерных величин выберем l – характерная длина,  $\rho_0$  – характерная плотность,  $p_0$  – характерное давление. В этом случае характерная скорость  $u_0 = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$ , и характерное время  $t_0 = l/\sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$ . Выбрав в качестве размерных величин l = 1,  $p_0 = 1$ ,  $\rho_0 = 1$ ,  $\gamma = 3$  и введя обозначения  $\lambda = 1/(\gamma - 1)$ ,  $r = \rho^{1/2\lambda}$ ,  $z = u/2\lambda$ , с использованием подхода, описанного в [25] можно взять в качестве начальных данных r = 1 + 0.5cos(x), z = 0. Тогда периодическое решение на интервале



Рис. 16: Результаты для второй задачи об ударной трубе.



Рис. 17: Результаты для третьей задачи об ударной трубе.



Рис. 18: Результаты вычислительного эксперимента для задачи взаимодействия двух ударных волн при использовании 2400 ячеек

 $[0; 2\pi]$  записывается в виде:

$$r = 1 + 0.5\cos(x - zt)\cos(rt),$$
$$z = 0.5\sin(x - zt)\sin(rt).$$

Легко можно проверить, что такое решение с учётом обезразмеривания удовлетворяет исходной системе уравнений. Для сравнения численного результата, полученного авторским методом с аналитическим решением выберем момент времени, когда хотя бы одна из функций имеет простой (явный) вид. Выберем в качестве такого момента  $t = \pi/2$ . Тогда r(x) = 1, а уравнение для z имеет простой вид:

$$z = 0.5sin(x - zt)$$

Результаты вычислительного эксперимента представлены на рисунке (19). Из рисунков видно, что решение скорости в виду его гладкости достаточно хорошо приближается численным решением. А вот график плотности имеет скачок в центре. Данный скачок имеет ту же природу, что и скачок температуры в третьем тесте Годунова, когда газ разлетается в разные стороны. Фактически в этом тесте имеет место быть что-то типа энтропийного следа, который образуется в результате "стекания" газа в эту область с нулевой скоростью. Полученную особенность имеет смысл исследовать в плане сравнения численных методов на таком тесте и возникающих особенностей при воспроизведении данной области. В любом случае стоит отметить, что данная особенность сосредоточена на конечном числе точек рассчетной области и уменьшается при дроблении сетки. Так как решение задачи бесконечно дифференцируемо



Рис. 19: Распределения плотности и скорости в момент времени  $t = \pi/2$ . Сплошной линией обозначено точное решение, точками обозначен результат расчета.

[25], то на этой задаче можно проверить порядок точности. Для разработанного в настоящей работе численного метода достигается порядок 1.713, что является доказательством достижения высокого порядка точности при конструировании схемы.

Задача о сферически симметричном разлете газа в вакуум. Для верификации численного метода решения уравнений газовой динамики будем рассматривать сферически симметричный разлёт статического в начальный момент времени газового шара, ограниченного радиусом R = 1 и имеющий равномерное распределение плотности  $\rho = 1$  и давления p = 1. Результаты моделирования разлёт газового облака на момент времени t = 0.4 в вакуум приведены на рисунке (20). Из рисунка видно, что контактный разрыв движется по направлению от центра газового шара, за ним идёт волна разрежения. Численное решение имеет небольшую диссипацию в области стыковки волны разрежения и невозмущенной области, а также небольшие колебания численного решения плотности и импульса после контактного разрыва, что по всей видимости связано со способом деления на функцию плотности на границе газ-вакуум и возникающие отсюда отражения с малой амплитудой.

Задача Погорелова о распаде МГД разрыва. Для верификации метода была поставлена задача в одномерной постановке, решение которой содержит все типы МГД волн, распространяющихся по обеим сторонам расчетной области, разделенных контактным разрывом [12]. Задача решается в области [0; 1], начальный разрыв задается в точке  $x_0 = 0.5$ . Слева от разрыва параметры газа

$$\left(\rho, p, v_x, v_y, v_z, B_y/\sqrt{4\pi}, B_z/\sqrt{4\pi}\right) = (0.18405, 0.3541, 3.8964, 0.5361, 2.4866, 2.394, 1.197)$$



(c)

Рис. 20: Результаты моделирования на момент времени t = 0.4. Плотность – (a), импульс – (b), давление – (c). Численное решение нарисовано кружками, точное решение нарисовано тонкой линией.

справа параметры газа имеют более простой вид

$$\left(\rho, p, v_x, v_y, v_z, B_y/\sqrt{4\pi}, B_z/\sqrt{4\pi}\right) = (0.1, 0.1, -5.5, 0, 0, 2, 1)$$

*х*-компонента магнитного поля  $B_x/\sqrt{4\pi} = 4$ , показатель адиабаты  $\gamma = 1.4$ . Численное решение задачи на момент времени t = 0.15 показан на рисунке (21). Отметим, что все волны воспроизведены корректно [12], размазывание МГД ударных волн происходит не более чем на три ячейки, отсутствуют осцилляции решения в области разрыва, а также корректно воспроизведен контактный разрыв.

#### Задача о распаде разрыва в модели бесстолкновительной гидродинамики.

Для верификации метода решения уравнений для первых моментов бесстолкновительного уравнения Больцмана с полным тензором дисперсии скоростей на интервале [0; 1] зададим начальное распределение бесстолкновительной компоненты со следу-



Рис. 21: Одномерная задача Римана для МГД уравнений. На рисунках изображены (слева направо, сверху вниз) распределение плотности, скорости, давления, полной энергии, продольных компонент магнитного поля на момент времени t = 0.15. Символом о показано решение с использованием 100 ячеек, сплошной линией показано решение, полученное при использовании 1000 ячеек.

ющими значениями:  $\Pi_{xy} = \Pi_{xz} = \Pi_{yy} = \Pi_{yz} = \Pi_{zz} = 1, \ \vec{u} = \vec{0},$ 

$$\rho = \Pi_{xx} = \begin{cases} 2, & x \le 0.5, \\ 1, & x \le 0.5 \end{cases}$$

На момент времени t = 0.2 результаты для основных гидродинамических параметров приведены на рисунке (22). Как видно из рисунка (22) численный метод позволяет корректно воспроизводить все разрывы модели бесстолкновительной среды с размазыванием, характерным методу первого порядка точности.



Рис. 22: Распределение плотности, скоростей и тензора дисперсии скоростей в результате численного решения задачи о распаде разрыва в бесстолкновительной компоненте. Непрерывной линией изображено решение на очень подробной сетке, точками изображено решение на сетке, с разрешением которой проводятся трехмерные вычислительные эксперименты.

#### 3.3.2 Тесты в двумерной постановке

Задача о контроле момента импульса. В авторском методе величина углового момента импульса не является сохраняемой величиной. Поэтому необходим ее контроль. Для исследования поведения момента импульса на задаче вращения диска будем рассматривать расчетную область  $[-8;8]^2$ , с показателем адиабаты  $\gamma = 1.4$ , начальным осесимметричным профилем давления и плотности

$$p_0(r) = \rho_0(r) = \begin{cases} 2 - r, r \le 1, \\ 1, r > 1. \end{cases}$$

угловой скорость вращения

$$\omega(r) = \begin{cases} 1, r \le 1, \\ 0, r > 1. \end{cases}$$

На момент времени t = 5 на рисунке (23) показано поведение углового момента импульса при измельчение расчетной сетки. Как видно из рисунка, ошибка в моменте



Рис. 23: Поведение момента импульса во время одного оборота диска

импульса на подробной сетке не составляется более одной сотой процента, что является очень малой величиной в реальных расчетах.

Задача развития неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. При разработке вычислительных методов важным является их свойство не подавлять физические неустойчивости задачи при их численном решение. Для проверки такого свойства были исследованы задачи развития неустойчивостей Кельвина-Гельмгольца и Релея-Тейлора. Неустойчивость Релея-Тейлора развивается на границе двух газов с различным значением плотности с учетом гравитационной силы. В то время как неустойчивость Кельвина-Гельмгольца развивается на границе двух газов с различным значением плотности, движущихся относительно друг друга. Оба вида неусточивостей приводят к развитию нелинейной гидродинамической турбулентности.

Для моделирования неустойчивости Кельвина-Гельмгольца, будем рассматривать квадратный регион размером [-0.5; 0.5]<sup>2</sup>. Начальный профиль плотности и *x*-компонента скорости задается в виде:

$$\rho_0(x,y) = \begin{cases} 1, |y| > 0.25 + 0.01(1 + \cos(8\pi x)) \\ 2, |y| \le 0.25 + 0.01(1 + \cos(8\pi x)) \end{cases}$$
$$v_{x,0}(x,y) = \begin{cases} -0.5, |y| > 0.25 + 0.01(1 + \cos(8\pi x)) \\ 0.5, |y| \le 0.25 + 0.01(1 + \cos(8\pi x)) \end{cases}$$

Давление газа задается значением p = 2.5, показатель адиабаты выбирается равным  $\gamma = 1.4$ . Для развития неустойчивости задается синусоидальное возмущение плотности и скорости газа. Развитие неустойчивости Кельвина-Гельмгольца показано на рисунке (24). Для вычисления характерного времени развития неусточивости Кельвина-Гельмгольца используется уравнение:

$$\tau_{KH} = \frac{\lambda \left(\rho_{in} + \rho_{out}\right)}{v_{rel} \sqrt{\rho_{in} \rho_{out}}},$$

где  $\lambda = 1/4$  – обратная частота синусоидального возмущения,  $v_{rel} = 1$  – относительная скорость движения между газами различной плотности,  $\rho_{in} = 2$  – плотность внутренней области,  $\rho_{out} = 1$  – плотность внешней области. Для таких параметров характерное развитие неустойчивости Кельвина-Гельмгольца  $\tau_{KH} \approx 0.53$ , что хорошо согласуется с результатами вычислительных экспериментов, показаных на рисунке (24). Действительно, образование полных турбулентных вихрей происходит на границе двух газов при t > 0.5.

Задача развития неустойчивости Релея-Тейлора. Для моделирования неустойчивости Релея-Тейлора будем рассматривать область [-0.25; 0.25] × [-1.5; 1.5] со следующими параметрами:

$$\rho_0(x, y) = \begin{cases} 1, |y| > 0.75\\ 2, |y| \le 0.75\\ p = 0.15 - \rho \cdot g \cdot |y| \end{cases}$$

где p – гидростатически равновесное давление, g = 0.1 – ускорение свободного падения, y – вертикальная координата и  $\gamma = 1.4$  – показатель адиабаты.



Рис. 24: Развитие неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. Приведены распределения скорости на моменты времени t = 0.0 (сверху слева), t = 0.2 (сверху справа), t = 0.5(снизу слева) и t = 0.8 (снизу-справа)

Начальное гидростатически равновесное начальное распределение возмущается по следующему правилу:  $v_{y,0}(x,y) = A(|y| - 0.75)[1 + cos(2\pi x)][1 + cos(2\pi y)]$ , где

$$A(y) = \begin{cases} 10^{-2}, |y| \le 0.01\\ 0, |y| > 0.01 \end{cases}$$

Развитие неустойчивости Релея-Тейлора показано на рисунке (25). Для анализа роста неустойчивости Релея-Тейлора будем использовать следующую формулу для амплитуды возмущений:

$$p(t) = 0.01 exp\left(t\sqrt{Ag}\right) \simeq 0.01 exp\left(0.25t\right)$$

где A = 2/3 – число Атвуда. Например в момент времени t = 13 амплитуда возмущения  $p(t = 13) \simeq 0.25$ , что хорошо согласуется с моделированием развития неустойчивости. Действительно, начальное положение интерфейса между различными состояниями газа расположено на границе  $y = \pm 0.75$ . А на момент времени t = 13, возмущение плотности распространяется примерно на  $dy = \pm 0.25 - 0.3$ .

Задача о сверхзвуковом потоке в туннеле со ступенью. Рассмотрим область  $[0;3] \times [0;1]$  с начальной плотностью  $\rho_0 = 1.4$ , давлением  $p_0 = 1$  и нулевой *у*-компонентой вектора скорости, *х*-компонента скорости при x < 0.5 равна трем и нулевой в оставшейся области. Показатель адиабаты равен  $\gamma = 1.4$ . На левой границе области задано условие втекания, на правой границе условие вытекания, на верхней границе, внизу и на ступеньке заданы отражающие граничные условия. Для вычислительного эксперимента была использована расчетная сетка 720 × 240. Результат вычислительных экспериментов показан на рисунке (26). Метод получил очень хорошее численное решение. Положение всех ударных волн корректно воспроизведены. Однако, в нашем методе мы не использовали специальные приемы с расчетом особой точки на уголке ступени в отличие от подходов, используемых в ряде подходов на основе РРМ методов. Это связано с важным фундаментальным различием РРМ и PPML методов. Так в PPM методах для построения параболы используется большой шаблон вычислений. В этом случае на уголке ступени приходится дважды задействовать одни и те же ячейки для построения парабол, используемых для направления x и y. В методе PPML и нашем методе используется компактный шаблон, который используется только для решения задачи Римана. Поэтому мы явно можем поставить условия отражения на границах ячеек, поэтому особенности решения в области уголка отсутствуют. Также в отличие от РРМ методов в верхней области возникает неустойчивый контактный разрыв, вдоль которого слабо развивается неустойчивость Кельвина-Гельмгольца. В правой половине области этот контактный разрыв взаимодействует с отраженной ударной волной и новая ударная волна распространяется вправо.

Задача о двойном маховском отражении сильной ударной волны. В области [0; 3.5] × [0; 1] начальная плотность, давление и вектор скорости имею вид:

$$\rho_{0} = \begin{cases} 8, x < 1/2 + y/tan(\pi/3) \\ 1.4, x \ge 1/2 + y/tan(\pi/3) \end{cases} \qquad p_{0} = \begin{cases} 116.5, x < 1/2 + y/tan(\pi/3) \\ 1, x \ge 1/2 + y/tan(\pi/3) \end{cases}$$
$$v_{x,0} = \begin{cases} 7.1447, x < 1/2 + y/tan(\pi/3) \\ 0, x \ge 1/2 + y/tan(\pi/3) \end{cases} \qquad v_{y,0} = \begin{cases} -4.125, x < 1/2 + y/tan(\pi/3) \\ 0, x \ge 1/2 + y/tan(\pi/3) \end{cases}$$

показатель адиабаты  $\gamma = 1.4$ . На левой границе области задано условие втекания, на правой и верхней границах и на нижней границе при x < 0.5 условие вытекания, внизу при x > 0.5 заданы отражающие граничные условия. Для вычислительного эксперимента была использована расчетная сетка  $840 \times 240$ . Результаты вычислительных экспериментов представлены на рисунке 27. Метод получил очень хорошее численное решение. Положение всех ударных волн и контактных разрывов корректно воспроизведены как и в решении с использованием классического РРМ метода. Все ударные волны имеют малую диссипацию и не имеют проблем вблизи границ. Отраженная волна выходит из точки контакта x = 0.5 и ее амплитуда достигает значения  $\sim 0.5$  при x = 1.8. В точках x = 2.6 и x = 3.0 наблюдаются первая и вторая тройные точки маховского отражения, которые корректно воспроизведены. Из второй тройной точки при x = 3.0 выходит контактная граница с малой диссипацией, которая в точке x = 2.7 взаимодействует с отраженной волной из первой тройной точки маховского отражения. В результате ниже этой точки происходит завихрение типа неустойчивости Релея-Тейлора.



Рис. 25: Развитие неустойчивости Релея-Тейлора. Приведены распределения скорости на моменты времени t = 0.0 (сверху слева), t = 7.0 (сверху справа), t = 10.0(снизу слева) и t = 13.0 (снизу-справа)



Рис. 26: Результаты моделирования задачи сверхзвукового течения газа в тунеле со ступенькой



Рис. 27: Результаты моделирования задачи о двойном маховском отражении сильной ударной волны

Задача Орзага-Танга. Задача Орзага-Танга [189] является наиболее распространенной моделью для тестирования перехода к сверхзвуковой МГД турбулентности и проверяет насколько код корректно воспроизводит образование ударных волн и их взаимодействие. Также на этой задаче может быть протестировано условие  $\nabla \cdot (\mathbf{B}) =$ 0. В задаче рассматривается область [0; 1]<sup>2</sup> с периодическими граничными условиями по всем направлениям, заполненная равномерно плотностью  $\rho = 25/(36\pi)$  и давлением  $p = 5/(12\pi)$ . Начальная скорость движения  $v_x = -\sin(2\pi y)$  и  $v_y = \sin(2\pi x)$ . Начальное магнитное поле  $B_x = -B_0 \sin(2\pi y)$  и  $B_y = B_0 \sin(4\pi x)$ , где  $B_0 = 1/\sqrt{4\pi}$ . Показатель адиабаты  $\gamma = 5/3$ . Численное решение задачи на момент времени t = 0.2показан на рисунке (28). Отметим, что поле плотности и структура векторного маг-



Рис. 28: Задача Орзага-Танга. На рисунках изображены распределение плотности (сверху) и векторное магнитное поле (снизу) в момент времени t = 0.2. Для вычислительного эксперимента использовалось сетка  $256^2$  ячеек.

нитного поля соответствует многочисленным результатам, полученным другими авторами.

#### 3.3.3 Тесты в трехмерной постановке

Задача Седова о точечном взрыве. Задача Седова о точечном взрыве в астрофизике формулируется как задача о взрыве сверхновой. Для моделирования задачи о точечном взрыве будем рассматривать область  $[-0.5; 0.5]^3$ , показатель адиабаты  $\gamma = 5/3$ , начальную плотность в области  $\rho_0 = 1$ , и начальное давление  $p_0 = 10^{-5}$ . В момент времени t = 0 выделяется внутренняя энергия  $E_0 = 0.6$ . Область взрыва ограничена радиусом  $r_{central} = 0.02$ . Для вычислительного эксперимента использовалась расчетная сетка  $100^3$ . Смоделированный профиль плотности и момента им-



пульса на момент времени t = 0.05 изображен на рисунке (29). Задача Седова о

Рис. 29: Плотность (слева) и момент импульса (справа), полученные при численном решении задачи Седова о точечном взрыве. Сплошной линией изображено точное решение

точечном взрыве является стандартным тестом, проверяющим способность метода и его реализации воспроизводить сильные ударные волны с большими числами Маха. Скорость звука фоновой среды пренебрижимо мала, поэтому число Маха достигает значения M = 1432. Авторский численный метод достаточно хорошо воспроизводит положение ударной волны, а также профиль плотности и импульса. Моделирование равновесных конфигураций вращающегося самогравитирующего газа. В качестве начального приближения используем стационарную конфигурацию самогравитирующего газового шара. При введении в начальное распределение небольших значений угловой скорости (как постоянных, так и вытекающих из закона Кеплера) удается получить последовательность равновесных фигур вращающегося самогравитирующего газа. В качестве начальных данных для системы уравнений газовой динамики с учётом гравитации возьмем гидростатически равновесную стационарную конфигурацию, задав распределение плотности, из системы уравнений газовой динамики, дополненной уравнением Пуассона, записанных в сферических координатах:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{M(r)\rho}{r^2}\\ \frac{\partial M}{\partial r} = 4\pi r^2\rho\\ p = (\gamma - 1)\rho\epsilon \end{cases}$$

Начальное распределения плотности выберем следующим образом:

$$\rho_0(r) = \begin{cases} 1 - r, & r \le 1, \\ 0, & r > 1. \end{cases}$$

Тогда начальные распределения давления и гравитационного потенциала имеют вид:

$$p_0(r) = \begin{cases} -\frac{\pi r^2}{36} (9r^2 - 28r + 24) + \frac{5\pi}{36}, & r \le 1, \\ 0, & r > 1. \end{cases}$$
$$\Phi_0(r) = \begin{cases} -\frac{\pi}{3} (r^3 - 2r^2) - \frac{2\pi}{3}, & r \le 1, \\ -\frac{\pi}{3r}, & r > 1. \end{cases}$$

Угловая скорость  $\omega$  должна удовлетворять условию:

$$0 < \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \omega^2 r^2 d\Omega < 0.4 \left| \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \Phi d\Omega \right|$$

С увеличением угловой скорости самогравитирующий газовый шар принимает форму эллипсоида вращения, полуоси которого можно аппроксимировать функциями (см. рисунок 30):

$$r_x(\omega) = 2.3510^{-3} e^{\frac{\omega}{0.15736}} + 1.18171$$
$$r_z(\omega) = 2.5210^{-3} e^{\frac{\omega}{0.17686}} + 1.03146$$



Рис. 30: Изменение формы самогравитирующего газового шара при вращении. Зависимость длин полуосей эллипса от угловой скорости (сплошная линия) и ее аппроксимация (пунктирная линия)

Задача столкновения двух самогравитирующих газовых сфер. Особый интерес в связи с задачей столкновения газовых компонент галактик представляет тест о высокоскоростном столкновении самогравитирующих газовых облаков с одинаковыми равновесными распределениями газодинамических параметров. Задача столкновения газовых компонент галактик характеризуется непродолжительным сжатием и образованием ударных волн в момент столкновения. Результаты моделирования (безразмерное распределение плотности) представлены на рисунке (31). Как видно из рисунка (31) поведение самогравитирующих газовых облаков качественно соответствуют результатам полученными другими авторами. При всех достоинствах данного теста хотелось бы отметить ряд его недостатков:

- Начальные данные теста предполагают наличие сильно разреженного газа вокруг газовых облаков. Это может приводит к образованию в разреженном облаке слабых ударных волн. Тогда возможная осцилляция численного метода на них может привести, за счёт неустойчивости, к образованию волн плотности. Это может исказить картину изучаемого явления особенно в момент столкновения галактик. Тест не позволяет верифицировать поведение численного метода на границе газ-вакуум.
- Скорости столкновения в задаче столкновения газовых компонент галактик являеются в основном дозвуковыми, либо с числом Маха не превышающим 5. Начальная скорость движения газовых облаков в тесте соответствует числу Ма-



Рис. 31: Венгеновский тест. Безразмерная плотность газовых облаков в моменты времени:  $10^{12}$  секунд - (a),  $2 \cdot 10^{12}$  секунд - (b),  $3 \cdot 10^{12}$  секунд - (c),  $4 \cdot 10^{12}$  секунд - (d),  $5 \cdot 10^{12}$  секунд - (e),  $6 \cdot 10^{12}$  секунд - (f),  $7 \cdot 10^{12}$  секунд - (g),  $8 \cdot 10^{12}$  секунд - (h),  $9 \cdot 10^{12}$  секунд - (i)

ха порядка 100, что не совсем соответствует реальному физическому течению. Характерная скорость столкновения галактик равна 600 км/сек, задаваемая в тесте скорость сопоставима со скоростью света, что требует использования релятивистской гидродинамики.

3. Не совсем ясно, каким образом надо ставить краевые условия для сохранения равновесной конфигурации. При использовании однородных краевых условий первого рода в соответствии с начальными данными имеет место "вытекание" значительной части газа из области. Данная проблема обусловлена наличием разреженного газа вместо вакуума, что приводит к невозможности задания устойчивой в значительном интервале времени равновесной конфигурации.

Таким образом необходимо создание теста для столкновения самогравитирующих газовых облаков, которые позволяют протестировать границу газ-вакуум, задать устойчивую равновесную конфигурацию и остаться в рамках нерелятивистской гравитационнной газовой динамики.

Для этого в качестве начальных данных для системы уравнений газовой динамики с учётом гравитации возьмем гидростатически равновесную стационарную конфигурацию, которую, можно найти, задав распределение плотности, из системы уравнений газовой динамики, дополненной уравнением Пуассона, записанных в сферических координатах:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{M(r)\rho}{r^2}$$
$$\frac{\partial M}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho$$
$$p = (\gamma - 1)\rho\epsilon$$

Начальное распределения плотности выберем следующим образом:

$$\rho_0(r) = \begin{cases} 1 - r, & r \le 1, \\ 0, & r > 1. \end{cases}$$

Тогда начальные распределения давления и гравитационного потенциала имеют вид:

$$p_0(r) = \begin{cases} -\frac{\pi r^2}{36} (9r^2 - 28r + 24) + \frac{5\pi}{36}, & r \le 1\\ 0, & r > 1 \end{cases}$$
$$\Phi_0(r) = \begin{cases} -\frac{\pi}{3} (r^3 - 2r^2) - \frac{2\pi}{3}, & r \le 1,\\ -\frac{\pi}{3r}, & r > 1. \end{cases}$$

Начальное расстояние между газовыми облаками  $L_0 = 2.4$ , скорость столкновения  $v_{collide} = 1.0$ . Краевые условия для газодинамических уравнений как однородные краевые условия второго рода. Поведение различных видов энергии приведено на рисунке (32) На рисунке (33) приведены результаты вычислительных экспериментов В момент столкновения происходит резкое повышение внутренней энергии газовых облаков, в то же время резко увеличивается модуль потенциальной энергии. Как видно из рисунка они адекватно компенсируют друг друга, тем самым имеет место сохранение полной энергии. Изменение кинетической энергии в результате столкновения течением. Кроме этого на границе газ-вакуум не существует нефизичных особенностей, таких как мнимые ударные волны, что может иметь место в случае окружения облаков разреженным газом. Сохраняются равновесные конфигурации газовых облаков до момента столкновения и границы газ-вакуум после столкновения.



Рис. 32: Авторский тест столкновения двух самогравитирующих газовых сфер. Поведение различных видов энергий

Задача столкновения двух самогравитирующих газовых сфер с разной массой. Особый интерес в связи с задачей столкновения газовых компонент галактик представляет тест о высокоскоростном столкновении самогравитирующих газовых облаков с различными по массе (в соотношении 1:20) равновесными распределениями газодинамических параметров. Первое облако задается сферической областью, заполненной по NFW-профилю газом массы  $M_{gas} = 16 \cdot 10^{41}$  кг, масса второго облака  $M_{qas} = 0.8 \cdot 10^{41}$  кг. В ходе встречного движения облаков с равными начальными скоростями  $v_{cr} = 600$  км/с происходит их столкновение. Результаты моделирования (безразмерное распределение плотности) представлены на рисунке (34) поведение энергий на рисунке (35). Задача характеризуется малым подъёмом внутренней энергии в момент столкновения и одновременным падением кинетической энергии. После момента столкновения кинетическая энергия повышается и вместе с этим понижается потенциальная энергия. Главная же особенность данного теста – это развитие механизма набегающего давления (в зарубежной литературе ram-pressure механизм). На рисунке (34) за галактикой имеет место развитие турбулентного течения, аналогичное полученному в работе [214].



Рис. 33: Авторский тест столкновения двух самогравитирующих газовых сфер. Безразмерная плотность газовых облаков в моменты времени: 10<sup>14</sup> секунд - (a), 2 · 10<sup>14</sup> секунд - (b), 3 · 10<sup>14</sup> секунд - (c), 4 · 10<sup>14</sup> секунд - (d), 5 · 10<sup>14</sup> секунд - (e), 6 · 10<sup>14</sup> секунд - (f)

## 3.3.4 Верификация метода решения уравнения Пуассона

Решение уравнения Пуассона исследовалось при измельчении расчётной сетки с известной функцией гравитационного потенциала и функции плотности:

$$\Phi(r) = \begin{cases} \frac{4\pi}{15}r^5 - \frac{3\pi}{5}r^4 + \frac{2\pi}{3}r^2 - \frac{3\pi}{5}, & r \le 1, \\ & -\frac{4\pi}{15r}, & r > 1. \end{cases}$$
$$\rho(r) = \begin{cases} 2r^3 - 2r^2 + 1, & r \le 1, \\ & 0, & r > 1. \end{cases}$$

В таблице приведены значения относительной невязки при измельчении сетки. Как видно из таблицы (8) имеет место четвёртый порядок сходимости.

# 3.4 Параллельная реализация численного метода

Как уже было сказано во введении, изучение астрофизических процессов усложняется необходимостью учета большого числа подсеточных физических процессов. Кроме того, состав астрофизических объектов состоит из нескольких ингридиентов, для описания которых используются различные математические модели. Данное обстоятельство усложняет разработку эффективных кодов для исследования астрофизических проблем на суперкомпьютерах. Для моделирования сложных астрофизи-



Рис. 34: Безразмерная плотность газовых облаков в моменты времени: начальная конфигурация (сверху слева),  $0.8 \cdot 10^{14}$  секунд (сверху посередине),  $1.5 \cdot 10^{14}$  секунд (сверху справа),  $2 \cdot 10^{14}$  секунд (снизу слева),  $2.4 \cdot 10^{14}$  секунд (снизу посередине),  $2.7 \cdot 10^{14}$  секунд (снизу справа)

ческих процессов в высоком разрешении необходимо использовать наиболее мощные суперкомпьютеры. Два из Top-3 (четыре из Top-10) суперкомпьютера в ноябрьской версии 2015 года списка Top-500 оснащены графическими ускорителями и ускорителями Intel Xeon Phi. Ожидается, что первый суперкомпьютер экзафлопсной производительности будет построен на основе гибридного подхода. Разработка кодов для гибридных суперкомпьютеров не сугубо техническая задача, а отдельная сложная научная задача, требующая со-дизайна алгоритмов на всех стадиях решения задачи

Таблица 8: Эвклидова норма отклонения численного решения от аналитического

Сетка	Норма отклонения
$16^{3}$	4.799777e-005
$32^{3}$	2.978253e-006
$64^{3}$	1.862059e-007
$128^{3}$	1.164110e-008
$256^{3}$	7.278760e-010
$512^{3}$	4.548964e-011
$1024^{3}$	2.843139e-012



Рис. 35: Поведение внутренней энергии (черная линия), кинетической энергии (красная линия) и сдвинутая потенциальная энергия (синия линия).

– от физической постановки до инструментов разработки. Несмотря на большое число разработанных кодов для решения астрофизических задач [150] остается большое число нерешенных проблем в области математических моделей, численных методов и программных реализаций для изучения астрофизических течений.

## 3.4.1 Концепция со-дизайна вычислительной модели

Рассмотрим основные этапы со-дизайна численных моделей для решения астрофизических задач. Для определенности будем рассматривать масштабы галактик и крупных скоплений, где число подсеточных процессов велико, также как и моделируемых компонент.

1. Этап формулировки физической задачи. Главными ингридиентами галактик является газовая компонента, которая описывает межзвездный газ и равномерно распределенную пыль, и бесстолкновительная компоненты, которая используется для описания звездной компоненты и темной материи. Основными подсеточными физическими процессами являются процессы звездообразования, эффект от взрыва сверхновых, функции охлаждения и нагревания, а также химические реакции [262].

- 2. Этап математической формализации. Для описания газовой компоненты используются уравнения гравитационной газовой динамики, которые расширяются на уравнения односкоростной многокомпонентной гравитационной газовой динамики с эффективным показателем адиабаты в случае учёта химических реакций. Для описания бесстолкновительной компоненты используются уравнения для первых моментов бесстолкновительного уравнения Больцмана. Такой подход был исследован и успешно использован для решения задач эволюции [181, 262] и столкновения галактик [150]. Такой способ описания бесстолкновительной компоненты позволяет позволяет сформулировать термодинамически согласованную модель звездообразования и эффекта от взрыва сверхновых.
- 3. Этап построения численного метода решения. Особенностью математической формализации является описание газовой и бесстолкновительной компонент галактик с помощью системы гиперболических уравнений. Таким образом, можно сформулировать единый численный метод решения гиперболических уравнений. Использование единого численного метода позволяет записать единый параллельный алгоритм. В основе такого алгоритма лежит локальность вычислений, что достаточно эффективно проецируется на современные архитектуры суперкомпьютеров.
- 4. Этап выбора структур данных. Используемые структуры данных в случае решения гиперболических уравнений полностью согласуются с выбором расчетных сеток. В оригинальном подходе используются регулярные сетки, что позволяет сформулировать простой подход к организации параллельных вычислений [148]. Основным из трендов современного численного решения гиперболических уравнений является технология подвижных сеток. В случае использования регулярных структур данных может быть описана технология комфорных подвижных сеток, которая позволяет эффективно моделировать большое число задач механики сплошной среды. При этом сохраняются параллельные алгоритмы, используемые для вычислений на регулярных сетках.
- 5. Этап учета архитектуры суперкомпьютера. В наших исследованиях используются гибридные суперкомпьютеры с ускорителями Intel Xeon Phi и графическими ускорителями. Логическая архитектура суперкомпьютеров с Intel Xeon Phi

представляется в виде линейки ускорителей, взаимодействующих напрямую (в случае использования native режима) или через CPU (в случае использования offload режима). В рамках одного ускорителя вычисления разбиваются на больmoe (несколько сотен) нитей. Организация вычислений в оригинальном методе позволяет исключить взаимодействие между нитями в рамках одного ускорителя на основных этапах метода, либо сводить такие вычисления к минимуму. Такое взаимодействие возникает в случае вычисления шага по времени из условия Куранта.

6. Этап использования средств разработки. Организация вычислений оригинального численного метода и архитектуры используемых суперкомпьютеров позволяют нам ограничиться библиотекой MPI для организации межпроцессных взаимодействий и технологией OpenMP для организации многопоточных вычислений. В случае использования графических ускорителей используется технология CUDA.

Далее подробнее опишем параллельные реализации для классических и гибридных архитектур.

## 3.4.2 Схема параллельной реализации на многопроцессорных суперЭВМ

На рисунке (36) приведены процентные соотношения между этапами Основными



Рис. 36: Процентное соотношение между этапами численного метода

этапами вычислительной схемы являются эйлеров и лагранжев этапы. Мы сосредоточимся именно на этих этапах, как на наиболее затратных. Также вне нашего рассмотрения в плане ускорения останутся процедуры, в которых "деление" импульса на функцию плотности и перезапись массивов. Геометрическая декомпозиция расчетной области. Со-дизайн [106] физикоматематической модели, численного метода и структур данных позволяет использовать геометрическую декомпозицию расчетной области с одним слоем перекрытия подобластей. Такую возможность мы имеем за счёт локального взаимодействия между ячейками. В случае кусочно-постоянного решения необходимость только одного слоя перекрытия естественно.

Использование равномерной сетки в декартовых координатах для решения уравнений гидродинамики позволяет использовать произвольную декартову топологию для декомпозиции расчетной области. Такая организация вычислений имеет потенциально бесконечную масштабируемость. В настоящей работе используется геометрическая декомпозиция расчетной области. По одной координате внешнее одномерное разрезание происходит средствами технологии MPI (рисунок 37). Такая декомпо-



Рис. 37: Геометрическая декмопозиция расчетной области

зиция связана с топологией и архитектурой всех суперкомпьютеров, которые были использованы для вычислительных экспериментов.

**Алгоритм перекрытия подобластей**. Межпроцессное взаимодействие средствами MPI осуществляется с помощью шаблона передачи по двунаправленному списку (см. листинг 1) крайних элементов одномерного массива размером *N* элементов.

Listing 1: Паттерн для MPI коммуникаций

```
#define COMM MPI_COMM_WORLD
#define STATUS MPI_STATUS_IGNORE
#define TR 1 // "to right" communications
#define TL 2 // "to left" communications
....
```

```
if(rank == 0)
{
  buffer[0] = a[N-2];
  MPI Send(buffer, 1, MPI DOUBLE, rank+1, TR, COMM);
  MPI Recv(buffer, 1, MPI DOUBLE, rank+1, TL, COMM, STATUS);
  a[N-1] = buffer[0];
}
if(rank == size -1)
ł
  MPI Recv(buffer, 1, MPI DOUBLE, rank -1, TR, COMM, STATUS);
  a[0] = buffer[0];
  buffer[0] = a[1];
  MPI Send(buffer, 1, MPI DOUBLE, rank -1, TL, COMM);
}
if (\operatorname{rank} != 0 \&\& \operatorname{rank} != \operatorname{size} -1)
{
  MPI Recv(buffer, 1, MPI DOUBLE, rank -1, TR, COMM, STATUS);
  a[0] = buffer[0];
  buffer[0] = a[N-2];
  MPI Send(buffer, 1, MPI DOUBLE, rank+1, TR, COMM);
  MPI Recv(buffer, 1, MPI DOUBLE, rank+1, TL, COMM, STATUS);
  a[N-1] = buffer[0];
  buffer[0] = a[1];
  MPI Send(buffer, 1, MPI DOUBLE, rank -1, TL, COMM);
}
```

Указанный шаблон является очень простым, однако именно на нём построены более сложные межпроцессные взаимодействия обмена срезами трехмерных массивов.

Вычисление шага по времени. Отдельно остановимся на процедуре вычисления шага по времени, исходя из условия Куранта. В случае использования графических ускорителей данная процедура была реализована только на CPU [150] (также было сделано и в коде GAMER [223]). Причина этого – отсутствие эффективной реализации редуцирующей операцией *min* в технологии CUDA. В то время как в OpenMP такая операция эффективно реализована. Стоимость этой процедуры составляет порядка одного процента от общего времени вычислений и практически не влияет на эффективность параллельной реализации. Однако, при увеличении количества графических ядер до нескольких тысяч и стократного ускорения в рамках одного графического процессора суммарно всех остальных процедур, может возникнуть курьёзная ситуация, когда процедура вычисления шага по времени будет выполняться дольше всех остальных. При том, что уже было достигнуто 55-кратное ускорение в рамках одного GPU [150] и количество графических ядер в одном ускорителе увеличивается, то такая ситуация может быть достигнута в ближайшие пару лет. Стоит отметить, что такая проблема в принципе невозможна на ускорителях Intel Xeon Phi.

Реализация решения уравнения Пуассона. Для решения уравнения Пуассона, в основе которого быстрое преобразование Фурье для суперЭВМ с распределенной памятью, была использована библиотека FFTW [99]. В основе этой библиотеки лежит процедура ALLTOALL, которая "транспонирует" трехмерный массив, перераспределяя значительные объемы памяти между всеми процессами. Безусловно, это дорогая сетевая операция, которая требует отказа от всего алгоритма в случае использовании сколь либо значительного количества вычислителей. Однако, эта процедура в случае использования сетевой инфраструктуры InfiniBand не занимает критическое время и, по всей видимости, оптимизирована на низком сетевом уровне [132]. Результаты ускорения решения уравнения Пуассона приведена на рисунке (рисунок 38).

**Исследование параллельной реализации.** Было проведено исследование масштабируемости программного кода на оборудовании ССКЦ для этого использовалось от 1 до 768 ядер процессора Intel Xeon X5670. Была достигнута 93 % эффективность при использовании 768 вычислительных ядер (см. рисунок39).

# 3.4.3 Схема параллельной реализации на гибридных суперЭВМ, оснащенных графическими ускорителями (код GPUPEGAS)

Использование равномерной сетки в декартовых координатах для решения гидродинамических уравнений позволяет использовать произвольную многомерную декартову топологию для декомпозиции расчетной области. Как уже отмечалось во введении, такая организация вычислений имеет потенциально бесконечную масштабируемость.



Рис. 38: Ускорение решения уравнения Пуассона для расчетной сетки 1024<sup>3</sup> в зависимости от использованных ядер

Многоуровневая декомпозиция расчетной области В коде GPUPEGAS используется многоуровневая одномерная декомпозиция расчетной области. По одной координате разрезание происходит средствами технологии MPI, по двум другим с использованием технологии CUDA (см. рисунок 40). Это связано с топологией и архитектурой гибридного суперЭВМ NKS-30T Сибирского суперкомпьютерного центра ИВМиМГ СО РАН, который был использован для вычислительных экспериментов. Дизайн численного метода решения гидродинамических уравнений позволяет на каждом этапе численного метода независимо вычислять значения потоков через каждую границу ячеек. Декомпозиция области на каждом этапе осуществляется с перекрытием одного слоя граничных точек соседних областей. Трехмерное параллельное быстрое преобразование Фурье выполняется с помощью процедуры из свободно распространяемой библиотеки FFTW. Способ распределения массивов также задается библиотекой. Перекрытие расчётных областей в этом случае не требуется.

Алгоритм вычисления одного шага по времени в коде GPUPEGAS имеет следующий вид:

1. Вычисление шага по времени (на СРU) в каждой ячейке.


Рис. 39: Масштабируемость программной реализации на кластере NKS-30T ССКЦ. В вычислительном эксперименте использовалась полная гидродинамическая модель, на одно ядро приходилась сетка размером 256<sup>3</sup>.

- 2. Определение минимального шага по времени (на CPU) во всех процессах с использованием редуцирующей операции.
- 3. Постановка граничных условий для уравнения Пуассона (на CPU).
- 4. Параллельное прямое быстрое преобразование Фурье (на CPU) с использованием библиотеки FFTW.
- 5. Решение уравнения Пуассона в пространстве гармоник (на СРU).
- 6. Параллельное обратное быстрое преобразование Фурье (на CPU) с использованием библиотеки FFTW.
- 7. Передача необходимых для решения уравнений эйлерового этапа массивов с CPU на GPU.
- 8. Решение уравнений эйлерова этапа (на GPU).
- 9. Передача решения уравнений эйлерового этапа массивов с GPU на CPU.
- 10. Постановка граничных условий и обмен крайними слоями подобластей (на CPU).



Рис. 40: Декомпозиция расчетной области для решения гидродинамических уравнений.

- 11. Передача массивов импульсов и плотностей с СРU на GPU.
- 12. Вычисление скоростей по значениям импульсов и плотностей (на GPU).
- 13. Передача массивов скоростей с GPU на CPU.
- 14. Передача необходимых для решения уравнений лагранжевого этапа массивов с CPU на GPU.
- 15. Решение уравнений лагранжевого этапа (на GPU).
- 16. Передача решения уравнений лагранжевого этапа массивов с GPU на CPU.
- 17. Постановка граничных условий и обмен крайними слоями подобластей (на CPU).
- 18. Передача массивов импульсов и плотностей с СРU на GPU.
- 19. Вычисление скоростей по значениям импульсов и плотностей (на GPU).
- 20. Передача массивов скоростей с GPU на CPU.

Для вычисления гидродинамических параметров на GPU используется следующий алгоритм работы:

1. передача необходимых массивов с CPU на GPU с использованием функции cudaMemcpy с параметром cudaMemcpyHostToDevice,

- 2. запуск процедуры на графическом ускорителе
- передача вычисленных массивов с гидродинамическими параметрами с GPU на CPU с использованием функции cudaMemcpy с параметром cudaMemcpyDevice-ToHost.

```
Подробный листинг работы с GPU приведен в листинге (2).
```

```
Listing 2: Шаблон запуска процеудры на GPU
cudaMemcpy(acu, a, NX*NY*NZ*sizeof(real),
        cudaMemcpyHostToDevice );
dim3 threads (BLOCK SIZE, BLOCK SIZE, 1);
dim3 blocks (NY/threads.x,NZ/threads.y,1);
function <<< blocks , threads >>>(acu, tau, NX, NY, NZ, h);
cudaMemcpy(anext, acu, NX*NY*NZ*sizeof(real),
        cudaMemcpyDeviceToHost );
\__device\__ void gpu_function(real acuelem, real tau, real h)
{
  return acuelem * h/tau;
}
global void function (real * acu, real tau,
        int NX, int NY, int NZ, real h)
{
  k = blockIdx.y * blockDim.y + threadIdx.y;
  l = blockIdx.x * blockDim.x + threadIdx.x;
  for (i=0; i < NX; i++)
    acu[i*NZ*NY+k*NZ+l] =
        gpu function (acu [i*NZ*NY+k*NZ+1], tau, h);
}
```

**Вычисление шага по времени.** В случае использования графических ускорителей данная процедура была реализована только на CPU [150] (также было сделано и в коде GAMER [223]). Причина этого – отсутствие эффективной реализации редуцирующей операцией *min* в технологии CUDA.

**Исследование параллельной реализации** В случае использования гибридной реализации необходимо определить два понятия масштабируемости.

- SingleGPU performance (сильная масштабируемость в рамках одного графического ускорителя) – уменьшение времени счета одного шага одной и той же задачи при использовании большего числа ядер ускорителя.
- MultiGPU performance (слабая масштабируемость при использовании многих графических ускорителей) – сохранение времени счета одного шага одного и того же объема задачи при одновременном увеличении количества ускорителей.

Для нахождения ускорения в рамках одного GPU использовалась сетка 256<sup>3</sup>. В случае нахождения эффективности на один ускоритель приходилась доля расчетной сетки равная 256<sup>3</sup>. Результаты эффективности программной реализации приведена на рисунке (41). Для демонстрации абсолютных значений времени при использовании



Рис. 41: Ускорение метода решения уравнений гидродинамики динамики в рамках одного GPU (слева). Эффективность параллельной реализации в зависимости от числа использованных графических ускорителей (справа).

нескольких GPU проведём следующий эксперимент. Будем фиксировать время счета эйлерова (Euler) и лагранжевого (Lagrange) этапа, решения уравнения Пуассона (Poisson) и этапов, связанных с пересчетом скоростей (imp2vel), а также вычисления шага по времени (tau). Для этого будем использовать расчетную сетку 256<sup>3</sup> и 4 узла кластера ССКЦ СО РАН. Определим три конфигурации замера времени:

1. Configuration 1 – расчет шага по времени при использовании одного ядра процессора Intel Xeon X5670 и одного ядра NVidia Tesla M2090.

$\mathbb{N}^{\underline{o}} \setminus \sec$	Euler	Lagrange	Imp2Vel	Poisson	Tau	Total
Configuration 1	34,72	22,87	8,43	4,02	1,22	71,26
Configuration 2	8,62	5,51	$2,\!11$	$1,\!03$	$0,\!31$	$17,\!58$
Configuration 2	$0,\!17$	$0,\!095$	$0,\!035$	$1,\!03$	0,31	$1,\!64$

Таблица 9: Исследование производительности кода GPUPEGAS.

- Configuration 2 расчет шага по времени на 4 узлах кластера при использовании на каждом одного ядра процессора Intel Xeon X5670 и одного ядра NVidia Tesla M2090.
- Configuration 3 расчет шага по времени на 4 узлах кластера при использовании на каждом одного ядра процессора одного ядра процессора Intel Xeon X5670 и 256 ядер NVidia Tesla M2090.

Результаты замера времени представлены в таблице (9). При использовании всех возможностей графического ускорителя было достигнуто 11-кратное общее ускорение кода и 54-кратное ускорение этапов, выполняющихся на графическом ускорителе, что совсем немного не хватило для 55-кратного ускорения, достигнутого на сетке 256<sup>3</sup> на один GPU. Ситуация осложняется тем, что время выполнения расчета гидродинамических уравнений в этом случае составляет примерно 20% от времени счета и почти совпадает с временем определения шага по времени и в три раза медленнее решения уравнения Пуассона.

# 3.4.4 Схема параллельной реализации на гибридных суперЭВМ, оснащенных ускорителями Intel Xeon Phi (код AstroPhi)

Декомпозиция и распределение расчетной области. Использование равномерной сетки в декартовых координатах для решения уравнений гидродинамики позволяет использовать произвольную декартову топологию для декомпозиции расчетной области. Такая организация вычислений имеет потенциально бесконечную масштабируемость. В коде AstroPhi используется многоуровневая одномерная декомпозиция расчетной области. По одной координате внешнее одномерное разрезание происходит средствами технологии MPI, внутри каждой подобласти разрезание происходит средствами OpenMP, адаптированного для MIC-архитектур (см. рисунок 42). Такой подход использовался также и в версии программного кода AstroPhi [152] с учетом использования offload режима. Такая декомпозиция связана с топологией



Рис. 42: Геометрическая декомпозиция расчетной области в случае использования гибридных суперЭВМ, оснащенных ускорителями Intel Xeon Phi.

и архитектурой гибридного суперЭВМ RSC PetaStream, который был использован для вычислительных экспериментов.

Схема программного комплекса AstroPhi представлена на рисунке (43). Серым цветом отмечены процедуры, выполняемые на ускорителях Intel Xeon Phi. Рядом со стрелочками показаны входные для следующей процедуры и выходные для предыдущей, где R – плотность,  $RV_{\xi}$  и  $V_{\xi}$  – импульс и скорость соответственно по оси  $\xi$ , P– давление, E – полная механическая энергия, F – гравитационный потенциал.

**Использование offload и native режима работы ускорителя** Со-дизайн численного метода позволил для всех процедур, выполняемых на ускорителях Intel Xeon Phi, использовать единый pattern программирования (см. листинг 3), что позволило минимизировать затраты на реализацию численного метода после реализации его в виде кода GPUPEGAS [150]. А самое главное при реализации численного метода как на графических ускорителях, так и на ускорителях Intel Xeon Phi нет необходимости синхронизации между потоками, что позволит получить высокое ускорение в рамках одного Intel Xeon Phi.

Listing 3: Шаблон запуска процеудры на Intel Xeon Phi

. . .

```
// MIC mode
#ifndef MIC DEV
\#define MIC DEV 0
#endif
. . .
// Number of MIC-threads
#define MIC NUM THREADS 60
. . .
#pragma offload attribute(push, target(mic))
double function (double *a, double x, int number)
ł
        return a [number] * x;
}
#pragma offload attribute(pop)
. . .
#pragma offload target(mic) in(a : length(NX*NY*NZ)) \
  out(c : length(NX*NY*NZ))
{
 \#pragma omp parallel for default(none) shared(a,x,c) \setminus
   num threads (MIC NUM THREADS)
 for (int i=1; i < NX-1; i++)
  for (int k=1 ; k<NY-1 ; k++)
   for (int l=1; l<NZ-1; l++)
      {
        c[i*NZ*NY+k*NZ+l] = function(a, x, i*NZ*NY+k*NZ+l);
      }
. . .
```

**Вычисление шага по времени** Напомним, что в OpenMP операция редуцирования эффективно реализована. Стоимость этой процедуры составляет порядка одного процента от общего времени вычислений и практически не влияет на эффективность параллельной реализации. **Исследование параллельной реализации.** В случае использования гибридной реализации необходимо определить два понятия масштабируемости.

- SingleMIC performance (сильная масштабируемость в рамках одного ускорителя Intel Xeon Phi) – уменьшение времени счета одного шага одной и той же задачи при использовании большего числа ядер ускорителя.
- MultiMIC performance (слабая масштабируемость при использовании многих ускорителей Intel Xeon Phi) – сохранения времени счета одного шага одного и того же объема задачи при одновременном увеличении количества ускорителей.

Результаты эффективности программной реализации в случае offload режима приведена на рисунке (44). Для нахождения ускорения в рамках одного Intel Xeon Phi использовалась сетка 256<sup>3</sup>. В случае нахождения эффективности на один ускоритель Intel Xeon Phi приходилась доля расчетной сетки равная 256<sup>3</sup>.

Для экспериментов по исследованию native режима работы ускорителя были использованы два гибридных суперкомпьютера на основе архитектуры RSC PetaStream: MBC-10П МСЦ РАН (64 ускорителя Intel Xeon Phi 7120 D) и Политехник RSC PetaStream СПбПУ (256 ускорителя Intel Xeon Phi 5120 D). В силу разного объема памяти на ускорителях Intel Xeon Phi 7120 D исследование ускорения проводилось на сетке 512<sup>3</sup>, на ускорителях Intel Xeon Phi 5120 D была использована сетка 512 × 256<sup>2</sup>. Это максимальные размеры сеток, которые могут поместиться в один ускоритель. Для измерения ускорения замерялось время каждого этапа численного метода, в секундах, а затем вычислялась их сумма (Total) при различном числе используемых логических ядер (Threads). Ускорение P (SpeedUp) вычислялось по формуле:

$$P = \frac{Total_1}{Total_K}$$

где  $Total_1$  – время вычислений на одном логическом ядре,  $Total_K$  – время вычислений при использовании K логических ядер. Результаты исследований ускорения для суперкомпьютера MBC-10П MCЦ РАН (JSCC) и Политехник RSC PetaStream СПбПУ (SPb) приведены в таблице 10. Таким образом, было получено 134-кратное ускорение (масштабируемость в сильном смысле) в рамках одного ускорителя Intel Xeon Phi 7120 D и 84-кратное ускорение в рамках одного ускорителя Intel Xeon Phi 5120 D. Заметим, что время вычислений должно отличаться примерно в 4 раза. Однако, при малом числе узлов такое отношение составляет примерно 7-8 раз, а в случае большого числа ускорителей отношение приходит к ожидаемому 4-кратному. Это связано

Threads	Total (JSCC)	Total (SPb)	Speed-Up (JSCC)	Speed-Up (SPb)
1	$1755,\!2382$	219,7956	1,0000	1,0000
2	$855,\!0393$	118,7445	2,0528	1,8510
4	445,5877	55,6405	3,9391	3,9502
8	$232,\!1210$	27,7089	7,5617	7,9323
16	$114,\!4909$	16,2230	$15,\!3308$	13,5483
32	$58,\!2999$	7,9673	$30,\!1070$	27,5872
64	$31,\!4894$	4,6190	55,7406	47,5851
128	17,3562	2,6271	101,1303	83,6647
240	13,1333	2,5905	133,6479	84.8467

Таблица 10: Исследование ускорения кода на различном числе логических ядер суперкомпьютеров MBC-10П МСЦ РАН и Политехник RSC PetaStream СПбПУ

с лучшей кэшированностью памяти при её малых объемах и лучшей оптимизацией компилятора. Так исследования ускорения (и дальнейшей масштабируемости) на суперкомпьютере MBC-10П МСЦ РАН было сделано в апреле 2015 года, а исследования на суперкомпьютере Политехник RSC PetaStream СПбПУ было сделано в ноябре 2015 года.

Также проводилось исследование масштабируемости кода AstroPhi в native режиме на ускорителях Intel Xeon Phi 7120 D на сетке  $512p \times 512 \times 512$ , на ускорителях Intel Xeon Phi 5120 D была использована сетка  $512p \times 256 \times 256$  в обеих случаях использовались четыре логических ядра на каждый ускоритель, где p – число используемых ускорителей. Таким образом, на каждый ускоритель приходится одинаковый размер подобласти при любом числе исследуемых ускорителей. Для исследования масштабируемости замерялось время каждого этапа численного метода, в секундах, а затем вычислялась их сумма (Total) при различном числе используемых ускорителей Intel Xeon Phi (MIC). Масштабируемость T (Scalability) вычислялось по формуле

$$T = \frac{Total_1}{Total_p}$$

где *Total*<sub>1</sub> – время вычислений на одном ускорителе при использовании одного ускорителя, *Total*<sub>p</sub> – время вычислений на одном ускорителей при использовании *p* ускорителей. Результаты исследований ускорения приведены в таблице 11. Таким образом, была получена 92-процентная эффективность (масштабируемость в слабом смысле) на 64 ускорителях Intel Xeon Phi 7120 D и 75-процентная эффективность

MIC	Total (JSCC)	Total (SPb)	Scalability (JSCC)	Scalability (SPb)
1	457,7285	$55,\!5742$	1,0000	1,0000
2	442,4235	$55,\!2495$	1,0345	1,0058
4	442,8754	$56,\!3392$	1,0335	0,9864
8	$468,\!4368$	$56,\!3752$	$0,\!9771$	$0,\!9857$
16	$486,\!0677$	$57,\!9393$	$0,\!9417$	$0,\!9591$
32	489,7659	$61,\!0681$	$0,\!9345$	$0,\!9101$
64	$495,\!5962$	64.1803	$0,\!9235$	$0,\!8659$
96	_	66.7413		$0,\!8326$
128		68.6065		0,8101
192		72.0681		0,7711
224		73.4610		0,7565

Таблица 11: Исследование масштабируемости кода на различном числе ускорителей суперкомпьютеров MBC-10П МСЦ РАН и Политехник RSC PetaStream СПбПУ

на 224 ускорителях Intel Xeon Phi 5120 D. Заметим, что эффективность быстрее "просаживается" на суперкомпьютере СПбПУ, что связано со сложностью сетевой инфраструктуры и дополнительными сетевыми расходами на организацию обменов.

Для демонстрации абсолютных значений времени и сравнении с вычислениями на CPU проведём следующий эксперимент. Будем фиксировать время счета эйлерова и лагранжевого этапа, решения уравнения Пуассона и остальных этапов, связанных с пересчетом скоростей и их перенормировкой, а также вычисления шага по времени. Для этого будем использовать расчетную сетку 256<sup>3</sup>, 4 узла кластера MBC-10П МСЦ PAH, в котором в однопоточном режиме будем использовать процессор Intel Xeon E5-2690, также будем использовать по одному ускорителю Intel Xeon Phi 7110X на узел. Определим четыре конфигурации замера времени:

- 1. Config 1 расчет шага по времени на одном ядре процессора Intel Xeon E5-2690.
- 2. Config 2 расчет шага по времени на 4 узлах кластера при использовании на каждом одного ядра процессора Intel Xeon E5-2690.
- 3. Config 3 расчет шага по времени на 4 узлах кластера при использовании на каждом одного ядра процессора Intel Xeon E5-2690 для решения уравнения Пуассона и одного ядра одного ускорителя Intel Xeon Phi 7110X для решения уравнений газовой динамики.

$\mathbb{N}^{\underline{0}} \setminus \sec$	Eulerian stage	Lagrangian stage	Other	Poisson	Total
Config 1	6,032	42,230	$5,\!453$	$5,\!965$	$59,\!680$
Config 2	1,523	$10,\!664$	$1,\!387$	$1,\!950$	15,524
Config 3	$11,\!672$	81,708	$10,\!552$	$1,\!950$	105,882
Config 4	$0,\!456$	2,960	$0,\!440$	$1,\!950$	5,806

Таблица 12: Исследование производительности кода AstroPhi в offload режиме.

4. Config 4 – расчет шага по времени на 4 узлах кластера при использовании на каждом одного ядра процессора Intel Xeon E5-2690 для решения уравнения Пуассона и 60 ядер одного ускорителя Intel Xeon Phi 7110X для решения уравнений газовой динамики.

Результаты замера времени представлены в таблице 12. Как видно из таблицы 12, что при использовании 4 CPU в однопоточном режиме на разных узлах мы получили практически линейной ускорение. Однако, когда было задействовано на каждом узле одно ядро Intel Xeon Phi вместо одного ядра Intel Xeon для решения уравнений газовой динамики газодинамический решатель стал работать медленнее примерно в 8 раз, что связано с малой производительностью одного ядра Intel Xeon Phi. При использовании всего потенциала ускорителя Intel Xeon Phi было получено ускорение в чуть менее чем в 3 раза по сравнению с использованием 4 CPU в однопоточном режиме и 10-кратного ускорения относительно последовательной программы.

#### 3.4.5 Имитационная модель параллельной реализации

Особенностью оригинального подхода является возможность простой геометрической декомпозиции расчетной области и последующим обменом граничных значений между только соседними вычислительными узлами. Имитационная модель организации вычислений строится из следующих предположений:

- для нахождения общего времени выполнения вычислений на каждом этапе будем предполагать, что нам известно среднее время вычислений на одну ячейку, таким образом, предполагая однородность вычислений по всей расчетной области;
- в качестве вычислительного узла выбирается ускоритель Intel Xeon Phi полностью, тем самым не моделируется масштабируемость вычислений внутри одного устройства;

- время выполнения коммуникаций будем считать линейной функцией от числа передаваемых элементов с учетом латентности;
- 4. количество передаваемых элементов, а, следовательно, и время передачи, после каждого из этапов численного метода одинаково;
- 5. используется сетевая инфраструктура ССКЦ ИВМиМГ СО РАН;
- 6. используется одномерная декомпозиция расчетной области;
- 7. рассматривается только экстенсивность вычислительной системы при сохранении производительности отдельного устройства.

Построенная на таких допущениях имитационная модель кода AstroPhi была смоделирована с помощью комплекса AGNES [202] на различном числе модельных ускорителей. Вычислительные эксперименты показали, что программный комплекс AstroPhi может быть с 70-процентной эффективностью масштабируем до одного миллиона вычислительных устройств. Такое число ускорителей соответствует экзафлопсному уровню вычислений.



Рис. 43: Блок-схема программного комплекса AstroPhi.



Рис. 44: Ускорение метода решения уравнений газовой динамики в рамках одного Intel Xeon Phi (слева). Эффективность параллельной реализации в зависимости от числа использованных ускорителей Intel Xeon Phi (справа)

#### 3.5 Выводы по третьей главе

В третьей главе диссертации изложены численные схемы для моделирования процессов гравитационной гидродинамики. В основе метода решения лежит метод разделения операторов, который расщепляет исходную систему уравнений на эйлеров этап, на котором происходит учет работы сил, и лагранжев этап, на котором происходит адвективный перенос гидродинамических величин. В основе решения уравнений на каждом этапе - метод Годунова с использованием линеаризованных распадов разрыва. Для построения решения линеаризованного распада разрыва (задачи Римана) используется специальная модификация схемы осреднения Рое и кусочнопараболический метод на локальном шаблоне для построения численного метода с малой диссипацией решения. Использование компактного шаблона для организации вычислений позволило использовать минимальное перекрытие подобластей, а гиперболичность математической модели позволило сформулировать единый вычислительный метод для всех компонент, что позволило получить 55-кратное ускорение в рамках одного графического ускорителя и 134-кратное ускорение в рамках одного ускорителя Intel Xeon Phi, а также высокую масштабируемость как в случае классических архитектур, так и в случае гибридных суперЭВМ. Для решения уравнения Пуассона используется подход, основанный на быстром преобразовании Фурье. Численные методы были протестированы на классических задачах в одно-, двухи трехмерных постановках. Так на одномерных задач об ударной трубе была показана возможность численного метода воспроизводить все виды волн (в том числе магнитно-газодинамические волны). На задачах развития неустойчивости Кельвина-Гельмгольца, Релея-Тейлора показана возможность метода воспроизводить развитие неустойчивых течений. На задачах столкновения газовых сфер подтверждена возможность моделирования взаимодействия гидродинамических объектов с учетом гравитационного поля, что особенно важно в задачах взаимодействия галактик и их скоплений. Смоделированы равновесные вращающиеся конфигурации самогравитирующего газа в форме эллипсоида вращения.

# 4 Моделирование гидродинамических процессов в самосогласованном гравитационном поле

В настоящей главе будут представлены результаты математического моделирования гидродинамических процессов в самосогласованном гравитационном поле начиная от крупно-масштабных объектов (космологические структуры), заканчивая объектами масштаба протопланетного диска.

# 4.1 Моделирование динамики крупномасштабных космологических структур

# 4.1.1 Моделирование образования крупномасштабных космологических структур

С момента времени, соответствующему z = 99 будем рассматривать расширяющуюся кубическую область с длиной куба L = 100/h мпк  $= 3 \times 10^{23}/h$  м, и периодическими граничными условиями по каждому измерению. В качестве характерного значения плотности взято значение  $\rho = 1.88 \times 10^{-26}h^2$  кг/м<sup>3</sup>. Доля темной энергии  $\Omega_{\Lambda} = 0.73$ , темной материи  $\Omega_D = 0.226$ , видимой барионной материи  $\Omega_B = 0.044$  (в начальный момент времени предполагается отсутствие звезд). Температура газовой компоненты  $T = 10^4$  К. Постоянная Хаббла H = 67.8 км/с/мпк. Для задания начальных данных задаются малые флуктуации равномерно распределенной плотности. Для задания случайных возмущений формируется нормальное распределение с амплитудой, соответствующей энергетическому спектру (уравнение (25) статьи [89]). Затем выполняется обратное преобразование Фурье.

Для исследования необходимости использования равновесной химокинетики в задачах космологического моделирования были взяты характерные концентрации различных форм водорода и гелия [23, 26, 114] при температуре  $T = 10^4$  K. Затем с помощью разработанного ранее пакета ChemPAK [72] был проведен вычислительный эксперимент, который показал, что все химические реакции происходят за время порядка десяти тысяч лет. С учётом того, что характерный шаг по времени в задачах космологического моделирования составляет один миллион лет, была выбрана и реализована модель равновесной химокинетики.

В рамках двухфазной многокомпонентной гидродинамической модели с учетом космологического расширения и подсеточных процессов было смоделировано образо-



Рис. 45: Поведение концентраций в процессе математического моделирования

вание крупномасштабных космологических структур – волос (filaments в зарубежной литературе), стен (pancakes Я.Б. Зельдовича в российской литературе), скоплений (clusters в зарубежной литературе) галактик, пустот (voids в зарубежной литературе). Данные крупномасштабные объекты образуются в результате развития неустой-



Рис. 46: Плотность темной материи в моменты z = 2 (сверху слева), z = 1 (сверху справа), z = 0.4 (снизу слева), z = 0 (снизу справа)

чивостей. Также было исследовано поведение процесса звездообразования в результате космологического моделирования. Смоделированное значение доли звезд в общей массе сооответствует наблюдаемому значению (см. рисунок 49). Также процесс



Рис. 47: Плотность видимой материи в моменты z = 2 (сверху слева), z = 1 (сверху справа), z = 0.4 (снизу слева), z = 0 (снизу справа)

активного звездообразования начинается с z = 2, что также соответствует наблюдаемым данным.

#### 4.1.2 Моделирование эволюция скопления галактик

Далее с помощью zoom-in подхода было выделено отдельное смоделированное скопление галактик, построен приближенный экспоненциальный профиль плотности для газовой и бесстолкновительной компонент и вычислительный эксперимент проведён для области, содержащей только это скопление. В результате вычислительного эксперимента была показано качественное соответствие структуры смоделированного скопления и наблюдаемых скоплений, количественное соответствие масс смоделированных галактик и расстояний между ними с наблюдаемыми значениями.

## 4.1.3 Моделирование столкновения двух скоплений галактик в МГД модели

В рамках задачи столкновения кластеров мы рассматривали высокоскоростное взаимодействие двух самогравитирующих газовых сфер в слабом вертикальном магнитном поле. Для этого на расстоянии 3 мпк между центрами масс был задана левая

198



Рис. 48: Температура газа в моменты z = 2 (сверху слева), z = 1 (сверху справа), z = 0.4 (снизу слева), z = 0 (снизу справа)

газовая сфера с массой  $M_L = 10^{15} M_{\odot}$  и правая сфера с массой  $M_R = 10^{14} M_{\odot}$ . Используется равновесная конфигурация с NFW профилем плотности. Скорость столкновения каждого кластера v = 4000 км/с. Величина вертикального магнитного поля составляет 1  $\mu$ G. Профиль плотности и ориентация векторая магнитного поля приведена на рисунке (51). Отметим, что качественный результат столкновения соответствует результатам, полученных в работе [167]. Также видно значительная перестройка магнитного поля в результате столкновения кластеров.

#### 4.2 Моделирование динамики галактических структур

#### 4.2.1 Моделирование образования рукавов галактик

В этом подразделе будет продемонстрирован механизм образования спиральных неустойчивостей в галактическом диске в модели изотермической гидродинамики  $\gamma = 1$ . Известно, что газовый диск является неустойчивым к неосесимметричным возмущениям, если параметр Тумре *Q* меньше единицы [249]:

$$Q = \frac{c_s \kappa}{\pi G \Sigma} < Q_{\rm crit} = 1.0$$



Рис. 49: Поведение звездообразования в процессе математического моделирования



Рис. 50: Плотность темной (слева) и видимой материи (в центре), температура газа (справа)

где  $c_s$  – скорость звука,  $\Sigma$  – столбцевая плотность и  $\kappa$  – эпициклическая частота, определяемая из уравнения:

$$\kappa^2 = \frac{2\Omega}{r} \frac{d}{dr} \left( r^2 \Omega \right)$$

где Ω – угловая скорость, r – цилиндрический радиус. Для локальных неосесимметричных возмущений трехмерных дисков конечной толщины критическое значение параметра Тумре несколько больше  $Q_{\rm crit} \approx 1.5$  [185, 204]. Начальная конфигурация состоит из самогравитирующего галактического газового диска, погруженного в неподвижном Гало темной материи (DM) с профилем:

$$\rho_{DM} = \frac{\rho_0}{1 + (r/r_0)^2}$$

где  $\rho_0 = 1.97 M_{\odot}$  пс<sup>-3</sup> – центральная плотность темной материи,  $r_0 = 1.6$  кпк – характеристическая длина Гало и  $r_h = 78.55$  кпк – радиус Гало. Масса темной материи выбирается равной 5 × 10<sup>10</sup>  $M_{\odot}$ . Процедура построения вращающейся равновесной конфигурации приведена в описании математической модели и также может быть найдена в работе [261].

Далее рассмотрим четыре модели, параметры для которых приведены в таблице (13). Начальное распределение столбцевой плотности газа  $\Sigma$  и параметр Тумре Q- показаны на рисунке(52). Температура газа для моделей 1 – 3 выбрана равной



Рис. 51: Задача столкновения кластеров галактик. На рисунках изображены распределение плотности в  $cm^{-3}$  (сверху) и ориентация векторного магнитного поля (снизу) в момент времени t = 100 млн. лет. Для вычислительного эксперимента использовалось сетка 512<sup>3</sup> ячеек.

Таблица 13: Параметры модели					
Модель	$M_{\rm disk}$	$\xi = M_{\rm disk}/M_{\rm DM}$	$Q_{\min}$	T	dominant mode
	$(10^{10}M_{\odot})$			Κ	
1	0.217	0.0434	3.912	$10^{4}$	_
2	0.854	0.1708	1.109	$10^{4}$	2
3	0.334	0.0668	1.122	$10^{4}$	4
4	0.118	0.0236	1.243	$2 \times 10^3$	7

 $T = 10^4$  К, для модели 4 выбирается равной  $T = 2 \times 10^3$  К. В начальной момент времени используются малые возмущения плотности с использованием нормального распределения с нулевым математическим ожиданием и средне-квадратичным отклонением  $10^{-4}$ .

Для количественной оценки спиралей, полученных при численном моделировании гравитационной неустойчивости дисков будем вычислять значения глобальных амплитуд Фурье на локальной подобласти  $r \leq R_f = 8$  кпк, где r – цилиндрический



Рис. 52: Начальные профили столбцевой плотности (слева) и параметр Тумре Q (справа) для всех моделей

радиус. Общий размер расчетной области выбирается [-16; 16]<sup>3</sup> кпк<sup>3</sup>:

$$A_{m}(t) = \frac{\begin{vmatrix} R_{f} & \sqrt{R_{f}^{2} - x^{2}} \\ \int & \int \\ -R_{f} & -\sqrt{R_{f}^{2} - x^{2}} \\ R_{f} & \sqrt{R_{f}^{2} - x^{2}} \\ \int & \int \\ -R_{f} & -\sqrt{R_{f}^{2} - x^{2}} \\ \sum \\ -R_{f} & -\sqrt{R_{f}^{2} - x^{2}} \\ \sum \\ \Sigma(x, y, t) dx dy \end{vmatrix}}$$

где  $m = 1, 2, \ldots$  – спиральные моды,  $\Sigma(x, y, y)$  – столбцевая плотность газа и  $\phi = \tan^{-1}(y/x)$  – полярный угол. Так как диск осесимметричный, то амплитуды для всех мод равны нулю. В случае, например, если значение моды равно  $A_m(t) = 0.1$ , то амплитуда спиральной моды составляет 10% от начальной плотности распределения.

На рисунке (53) показана эволюция столбцевой плотности газа для модели 1 на протяжении 400 миллионов лет (далее будем использовать обозначение Муг для фразы "млн. лет"). Параметр Тумре Q для этой модели всюду больше критического значения  $Q_{\rm crit} \approx 1.5$ . Как и ожидалось, начальные возмущения со временем затухают и модель не показывает существенных отклонений от первоначальной осесимметричной равновесной конфигурации. Эволюция глобальных амплитуду Фурье подтверждает эти выводы (см. рисунок 54) Глобальные амплитуды Фурье первых восьми мод находятся в диапазоне (-6.0 : -5.0) (в логарифмическом масштабе), что соответствует 0.001% начальному возмущению плотности осесимметричного диска. Амплитуды высших порядков демонстрируют аналогичное поведение. Таким образом, вычислительные эксперименты подтверждают устойчивость модели 1.

Эволюция столбцевой плотности газа для модели 2 показана на рисунке (55). Эта модель характеризуется максимальной массой диска и высоким отношением массы диска к массе Гало  $\xi = 0.1708$ . Критерий Тумре Q меньше критического значения 1.5 во внутренней области 7 кпк. Таким образом, модель 2 является неустойчивой и эволюционирует в двух-спиральную структуру. Эволюция глобальных амплитуд Фурье представлены на рисунке (56) и подтверждают заключение о развитие моды m = 2, при этом, что моды 4 и 8 также быстро растут, что связано с сеточными эффектами и кратностью второй моды. В конце моделирования вторая мода доминирует и составляет значение порядка -1.5 в логарифмической шкале. Почему вторая модель развилась в двухрукавную галактику, а не в большее количество рукавов? Причиной развития моды m = 2 служит теория усиления раскачки (в зарубежной литературе the swing amplification theory) [250]. В основе которой стоит тот факт, что при задании начального возмущения образуется некоторый спектр возмущений раз-



Рис. 53: Эволюция столбцевой плотности (в  $M_{\odot}pc^{-2}$ ) для модели 1 в моменты времени 0 Муг (слева сверху), 200 Муг (справа сверху), 300 Муг (слева снизу) и 400 Муг (справа снизу). Модель является гравитационно устойчивой



Рис. 54: Эволюция глобальных амплитуд Фурье (в логарифмической шкале) для модели 1

личных мод. Усиление в гравитационно неустойчивом диске происходит когда любая доминирующая спираль раскручивается за счет дифференциального вращения. В свою очередь для других спиралей происходят их столкновения с другими модами, что может привести к внутреннему Линдбладовскому резонансу, то есть к большему усилению через центр диска, что и формирует доминантную моду. Области с резким возрастанием параметра Тумре *Q* отсутствуют в нашей модели диска (см. рисунок 52). Таким образом, распространение возмущений через центр диска представляет единственно возможным механизмом воздействия. Этот механизм работает, если нет внутреннего Линдбладовского резонанса (ILR) для определенного режима спирали. Положение линдбладовских резонансов может быть определена как:

$$m(\Omega_{\rm p} - \Omega) = \pm \kappa$$

где  $\Omega_{\rm p}$  – скорость спиральной структуры. В нижней части рисунка (56) изображены радиальные профили  $\Omega_{\rm p}$ ,  $\Omega \pm \kappa/m$  и  $\Omega$  для мод m = 2 и m = 3. Пересечение  $\Omega_{\rm p}$  с  $\Omega - \kappa/2$  и  $\Omega - \kappa/3$  дает радиальную позицию ILR для мод m = 2 и m = 3. Очевидно, что ILR для второй моды отсутствует, в то время как для третьей моды имеет место. Таким образом, для второй моды возмущения распространяются через центр и выходят с другой стороны, тем самым усиливая раскачку спирали. В результате вторая мода растет, тогда как третья и далее выраждаются со временем.



Рис. 55: Эволюция столбцевой плотности (в  $M_{\odot}pc^{-2}$ ) для модели 2 в моменты времени 0 Муг (слева сверху), 100 Муг (справа сверху), 200 Муг (слева снизу) и 280 Муг (справа снизу). Модель является гравитационно неустойчивой и эволюционирует в два спиральных рукава



Рис. 56: Сверху: эволюция глобальных амплитуд Фурье для модели 2. Снизу: радиальные профили  $\Omega$ ,  $\Omega_p$ ,  $\Omega \pm \kappa/2$  и  $\Omega \pm \kappa/3$ . Пересечение  $\Omega_p$  с другими профилями дает позиции резонансов. В частности, пересечение  $\Omega_p$  с  $\Omega - \kappa/3$  обозначает положение внутреннего Линдбладовского резонанса для моды m = 3

На рисунке (57) показано развитие четырех-рукавной структурыдля модели 3. Эта модель имеет меньшее чем модель 2 отношение массы диска к массе Гало и равно значению  $\xi = 0.0668$ . Поведение глобальных амплитуд Фурье показаны на рисунке (58) что подтверждает развитие четвертой моды. В нижней части рисунка (58) изображены положения ILR и отсутствуют для четвертой моды, но имеют место для моды m = 5 и мод с большим номером, что объясняет рост и доминирование четвертой моды. Заметим, что восьмая мода m = 8 всего в два раза меньше, чем четвертая мода, при наличии Линдбладовскокого резонанса. Это связано с нелинейным взаимодействием мод m = 4 и m = 8, что приводит к перераспределению энергий между этими модами.

И в заключении на рисунке (59) показано развитие семи-спиральной структуры для модели 4. Эта модель характеризуется малым отношением массы диска к массе Гало  $\xi = 0.0236$  по сравнению с другими моделями. Эволюция глобальных амплитуд Фурье показано на рисунке (60), что подтверждает рост моды m = 7 и, следовательно, быстрым ростом семи рукавов плотности. На нижней части рисунка (60) показано, что ILR для моды m = 7 отсутствуют, в то время как для моды с номером m = 8 имеет место в модели 4.

Таким образом, разработанная вычислительная модель и метод для ее разрешения ведет себя в соответствии с теоретическими оценками по этой задаче: системы с меньшим соотношением массы диска к массе Гало дают большее число рукавов, что имеет большое значение для изучения наблюдаемых неосесимметричных структур в дисковых галактиках.

### 4.2.2 Моделирование сценариев столкновения газовых компонент галактик

В трехмерной расчетной области в начальный момент времени заданы два самогравитирующих газовых облака с равными начальными распределениями газодинамических параметров. Каждое облако задается сферической областью, равномерно заполненной газом массы  $M_{gas} = 16 \cdot 10^{41}$  кг. К этой конфигурации добавлен звездный компонент с массой, составляющей 100 процентов от массы газа. В рассматриваемой постановке звездный компонент представляет собой движущееся с постоянной скоростью вещество, вносящее вклад в гравитационное поле и взаимодействующий с газовым компонентом только через силы гравитации. В ходе встречного движения об-

208



Рис. 57: Эволюция столбцевой плотности (в  $M_{\odot}pc^{-2}$ ) для модели 3 в моменты времени 0 Муг (слева сверху), 100 Муг (справа сверху), 250 Муг (слева снизу) и 360 Муг (справа снизу). Модель является гравитационно неустойчивой и эволюционирует в четыре спиральных рукава



Рис. 58: **Сверху:** эволюция глобальных амплитуд Фурье для модели 3. **Снизу**: радиальные профили  $\Omega$ ,  $\Omega_p$ ,  $\Omega \pm \kappa/4$  и  $\Omega \pm \kappa/5$ . Пересечение  $\Omega_p$  с другими профилями дает позиции резонансов. В частности, пересечение  $\Omega_p$  с  $\Omega - \kappa/5$  обозначает положение внутреннего Линдбладовского резонанса для моды m = 5



Рис. 59: Эволюция столбцевой плотности (в  $M_{\odot}pc^{-2}$ ) для модели 4 в моменты времени 0 Муг (слева сверху), 100 Муг (справа сверху), 150 Муг (слева снизу) и 200 Муг (справа снизу). Модель является гравитационно неустойчивой и эволюционирует в семь спиральных рукавов



Рис. 60: **Сверху:** эволюция глобальных амплитуд Фурье для модели 4. **Снизу**: радиальные профили Ω, Ω<sub>p</sub>, Ω±κ/7 и Ω±κ/8. Пересечение Ω<sub>p</sub> с другими профилями дает позиции резонансов. В частности, пересечение Ω<sub>p</sub> с Ω – κ/8 обозначает положение внутреннего Линдбладовского резонанса для моды m = 8

лаков с равными начальными скоростями  $v_{cr} = 200 \div 3000$  км/с происходит их столкновение (см. рисунок 61). Рассмотрены сценарии столкновения при  $lg(\frac{M_{gas}}{M_{\odot}}) = 11$  при



Рис. 61: Сценарии столкновений галактик

различных скоростях столкновения газовых компонент, отложенных на оси ординат. Стоит отметить, что скорость в момент столкновения в общем случае не совпадает с начальной скоростью движения галактик. Более того, при одной и той же начальной скорости можно получить разные скорости в момент столкновения, а следовательно и сценарии. Развитие сценария столкновения определяется внутренней энергией галактик на момент столкновения. Основными факторами, определяющими внутреннюю энергию галактик, являются отношение внутренней энергии к гравитационной  $\alpha = E_{int}/|E_{grav}|$  и расстояние между ними  $L_0 \in [2 \cdot 10^4; 5 \cdot 10^4]$  пк. Сценарием столкновения галактик может быть их слияние, свободный разлёт, разлёт с образованием новой галактики, лишённой звездной компоненты, рассеивание газовых компонент галактик (см. рисунок 63).

Слияние галактик. Выберем в качестве начальной скорости сближения величину 600 км/с (см. рисунок 64). Необходимым условием сохранения начальной скорости газа к моменту столкновения является совместное движение газа и звездного компонента, что возможно только при малом значении внутренней энергии ( $\alpha \in [10^{-4}; 5 \cdot 10^{-4}]$ ). В случае малого значения внутренней энергией и малой скорости движения газовые компоненты галактик остывают и начинают сжиматься вокруг звездной составляющей. Для достаточного сжатия газа в возникающем мощном гравитационном поле



Рис. 62: Схема начального распределения в расчетной области плотности газа (область выделена серым цветом), звездного компонента (область выделена черным цветом) и плоскости столкновения (заштрихована)

необходимо время порядка 10<sup>14</sup> секунд. Если галактики расположены дальше 25 000 парсек друг от друга, то за это время звездный компонент успевает увлечь за собой газ, придав ему скорость. При этом гравитационное поле одной галактики не оказывает сильного влияния на скорость движения другой. В момент столкновения гравитационное поле двух галактик складывается и его значение настолько высоко, что ни силы давления, ни движение звездных компонент уже не влияют на динамику газа образовавшейся галактики. Новая галактика имеет высокую плотность  $(1.6 \cdot 10^{-20} \text{ кг/м}^3)$  при малом размере.

Пролёт галактик, образование новой галактики. Газ может не успеть остыть до момента столкновения. Это может случиться, например, если при малом значении внутренней энергии  $\alpha < 10^{-2}$  и малой начальной скорости (600 км/с) расстояние между галактиками невелико (меньше 25 000 парсек). Так как гравитационное поле соседней галактики начинает ускорять газовый компонент, скорость в момент столкновения становится порядка 800 км/с. В таком случае облака газа расходятся в разные стороны вслед за звездным компонентом (см. рисунок 65). Если отношение внутренней энергии к гравитационной не превышает  $10^{-3}$  и начальное расстояние не более 40 000 парсек, то газ также не успевает остыть до момента столкновения и сценарий пролёта галактик повторяется. При уменьшении начального расстоянии



Рис. 63: Сценарии столкновения галактик. Слияние галактик (сверху, слева), рассеивание газовых компонент галактик (сверху, справа), свободный разлёт галактик (снизу, слева), образование третей галактики, лишённой звездной компоненты (снизу, справа)

до 22 000 - 25 000 парсек и при  $\alpha \sim 0.001$  происходит образование третьей дочерней галактики лишенной звездной компоненты. Дочерняя галактика образуется из газового следа, остающегося за разлетающимися галактиками. Газовый след, остающийся после столкновения, становится более массивным с уменьшением начального расстояния между галактиками. Газ фокусируется в центре области и малая начальная внутренняя энергия позволяет газу остыть и образовать новую дочернюю галактику (см. рисунок 66).

**Рассеивание галактик.** Сценарий рассеивания галактик происходит при высокой скорости (около 1000 км/с и более) столкновения газовых компонент галактик. Та-кая скорость может быть достигнута при большой внутренней энергии газа или при



Рис. 64: Безразмерная плотность газа в плоскости столкновения, сценарий слияния галактик. Моменты времени 4·10<sup>14</sup> с – начало слияния (a), 10<sup>15</sup> с – финальная стадия слияния (b)



Рис. 65: Безразмерная плотность газа в плоскости столкновения, сценарий свободного пролета галактик. Моменты времени 5 · 10<sup>14</sup> с – начало столкновения (a), 10<sup>15</sup> с – момент столкновения галактик (b) 3 · 10<sup>15</sup> с – разлет галактик (c)

достаточно большом начальном расстоянии. При этом начальная скорость должна быть не менее 250 км/с. При большой скорости газ не успевает остыть и начинает расширяться, в результате скорость газа растет, становится больше начальной и достигает величины 1000 км/с на момент столкновения. В результате газовый компонент образовавшейся галактики рассеивается (см. рисунок 67). Если задать начальную скорость больше 250 км/с, то газ начинает расширяться почти не остывая и сценарий рассеивания повторяется.

Результаты моделирования столкновения газовых компонент галактик. Результаты моделирования сценариев столкновения при  $lg(\frac{M_G}{M_{\odot}}) = 11$  подтвердили основанную на наблюдательных данных теоретическую гипотезу зависимости исхода взаимодействия галактик от скорости в момент столкновения. На рисунке (68) представлена зависимость сценария столкновения от начального расстояния и отно-


Рис. 66: Безразмерная плотность газа в плоскости столкновения, сценарий образования третей галактики. Моменты времени 5 · 10<sup>14</sup> с – начало столкновения (a), 3 · 10<sup>15</sup> с – разлет галактик (b), 20 · 10<sup>15</sup> с – образование третей галактики (c)



Рис. 67: Безразмерная плотность газа в плоскости столкновения, сценарий рассеивания галактик. Моменты времени 10<sup>14</sup> с – начало столкновения (a), 5 · 10<sup>14</sup> с – момент столкновения (б), 4 · 10<sup>15</sup> с – рассеивание галактик (в)

шения гравитационной энергии к внутренней.



Рис. 68: Результаты столкновения в зависимости от начального расстояния  $L_0$  и отношения гравитационной энергии к внутренней  $\alpha = E_{int}/|E_{grav}|$ 

# 4.2.3 Моделирование свободного прохождения галактик в двухфазной модели

Основной целью повторения сценария разлета галактик после их центрального столкновения в двухфазной модели – демонстрация возможности воспроизведения бесстолкновительных свойств модели звездной компоненты и темной материи. Для этого выберем начальные условия, при которых происходит сценарий свободного пролета галактик [263]. Каждое облако задается сферической областью, заполненной по NFW-профилю газом массы и бесстолкновительной компонентой с равными массами  $M_{gas} = 16 \cdot 10^{41}$  кг. Скорость столкновения  $v_{cr} = 800$  км/с. На рисунке (69) изображена



Рис. 69: Безразмерная плотность галактик в результате столкновения при сценарии свободного разлета галактик в моменты времени:  $10^{14}$  с – начало столкновения (сверху слева),  $10^{15}$  с – момент столкновения (сверху справа)  $2.5 \cdot 10^{15}$  с – начало прохождения галактик (снизу слева),  $4.6 \cdot 10^{15}$  с – разлет галактик после столкновения (снизу справа)

динамика центрального столкновения галактик. Таким образом, мы смогли повторить сценарий свободного разлета галактик в результате их столкновения в полной двухфазной модели. Следовательно, мы можем эффективно использовать модель бесстолкновительной гидродинамики подход для моделирования комплексной динамики бесстолкновительной компоненты галактик.

#### 4.2.4 Моделирование столкновения галактик под углом

Столкновение дисковых галактик под углом на расчетной сетке  $1024^3$ . Цель этой задачи – демонстрация возможности моделирования "тонких" течений в высоком разрешении за приемлемое время. В качестве модельной задачи рассмотрим задачу столкновения дисковых галактик под углом. Первое облако задается сферической областью, заполненной по NFW-профилю газом массы  $M_{gas} = 16 \cdot 10^{41}$  кг, второе облако задается эллипсоидальной в отношении осей 1:2:1, наклоненный под углом 45 градусов к оси столкновения. В ходе встречного движения облаков с равными на-



Рис. 70: Безразмерная плотность газовых облаков в моменты времени: начальная конфигурация (слева), 1 · 10<sup>14</sup> секунд (посередине), 2 · 10<sup>14</sup> секунд (справа)

чальными скоростями  $v_{cr} = 600$  км/с происходит их столкновение. На рисунке (70) показана динамика столкновения и "тонкий всплеск" при начальном ударе галактик. Расчет был сделан с использованием 96 GPU-ускорителей на кластере NKS-G6 Сибирского суперкомпьютерного центра ИВМиМГ СО РАН на расчетной сетке 1024<sup>3</sup>, было сделано порядка 10<sup>5</sup> шагов по времени, время расчета составляло 50 часов.

#### 4.2.5 Моделирование столкновения дисковых галактик в полной модели

Будем моделировать столкновение двух галактик с массой  $M = 10^{13} M_{\odot}$  и скоростью  $v_{cr} = 800$  км/с, каждая из которых задана двумя самогравитирующими сферическими облаками для описания газовой и бесстолкновительной компоненты с равновесным начальным распределением плотности, давления/тензора дисперсии скоростей. Галактики вращаются в противоположенные стороны с дифференциальным вращением:

$$v_{\phi} = \sqrt{r \frac{\partial \Phi}{\partial r}}$$

Результаты моделирования представлены на рисунке На рисунке (71) представлены



Рис. 71: Результаты моделирования на момент времени t = 120 миллионов лет. Столбцевая плотность в  $M_{\odot}pc^{-2}$  газовой – (а) и бесстолкновительной – (b) компонент, молекулярного водорода – (c). Средняя скорость процесса звездообразования в  $M_{\odot}pc^{-2}Myr^{-1}$  – (d)

результаты распределения столбцевой плотности газовой и звездной компоненты. После процесса столкновения за фронтом ударной волны происходит активный рост скорости звездообразования, а также на месте будущей галактики образуется молекулярный водород.

# 4.2.6 Моделирование столкновение дисковой и спиральной галактик в полной модели

Будем моделировать столкновение двух галактик с массой  $M = 10^{13} M_{\odot}$  и скоростью  $v_{cr} = 800$  км/с, первая из которых задана самогравитирующими сферическими облаками для описания газовой и бесстолкновительной компоненты с равновесным начальным распределением плотности, давления/тензора дисперсии скоростей. Звездная компонента второй галактики имеет спиралевидную форму. Галактики вращаются в противоположенные стороны с дифференциальным вращением:



$$v_{\phi} = \sqrt{r \frac{\partial \Phi}{\partial r}}$$

Рис. 72: Столбцевая плотность в  $M_{\odot}pc^{-2}$  газовой компоненты, в моменты времени t = 0 Муг – (a), t = 100 Муг – (b), t = 200 Муг – (c), t = 400 Муг – (d).

На рисунках (72,73,74) представлены результаты распределения столбцевой плотности газовой и звездной компоненты. После процесса столкновения за фронтом ударной волны происходит активный рост скорости звездообразования, а также на месте будущей галактики образуется молекулярный водород. Стоит отметить, что рост образования наблюдается в области, соответствующей спиралевидной форме. Вероятно, при явном учёте процесса звездообразования в модели существует возможность смоделировать образование спиральной галактики в результате столкновения спиральной галактики и дисковой.



Рис. 73: Столбцевая плотность в  $M_{\odot}pc^{-2}$  звездной компоненты, в моменты времени t = 0 Муг – (a), t = 100 Муг – (b), t = 200 Муг – (c), t = 400 Муг – (d).

#### 4.2.7 Моделирование ram-pressure механизма

Моделирование набегания межгалактического газа на галактику. В качестве вычислительного эксперимента выбрана задача высоко-скоростного столкновения дисковой галактики с межгалактическим ветром в гидродинамической модели. В результате такого взаимодействия образуется механизм набегающего давления (в зарубежной литературе гат pressure) и происходит обтекание с образованием неустойчивостью за галактикой. Образование подобных неустойчивостей и хвостов важны для изучения механизма образования пекулярных галактик и процесса звездообразования [127, 258]. Дисковая галактика задается равновесной конфигурацией сферического гало с NFW-профилем плотности и равновесным экспоненциальным профилем плотности с дифференциальным вращением. Общая масса галактики составляет  $M = 10^{13} M_{\odot}$ . Скорость гат pressure потока составляет v = 600 км/с. Постановка задачи изображена на рисунке (75). Результаты моделирования представлены



Рис. 74: Столбцевая плотность в  $M_{\odot}pc^{-2}$  молекулярного водорода в момент времени t = 400 Муг – (а). Скорость процесса звездообразования  $M_{\odot}pc^{-2}Myr^{-1}$  в момент времени t = 400 Муг – (b).



Рис. 75: Постановка задачи набегания газа на галактику

на рисунке (76), которые согласуются с результатами аналогичного моделирования [258] и наблюдениями [70]. Расчеты были проведены на последовательности сеток от 896 × 128 × 128 до 7168 × 1024 × 1024. На последней сетке было достигнуто 47 процентов от пиковой скалярной производительности ускорителя Intel Xeon Phi при использовании 53760 нитей. На рисунке (76) видно образование хвоста за фронтом галактики, который образуется в следствии набегания газа на галактику.

Моделирование столкновения галактик различной массы. Будем моделировать столкновение двух галактик с массами  $M_1 = 10^{13} M_{\odot}$  и  $M_2 = 10^{12} M_{\odot}$ , со скоростью  $v_{cr} = 600$  км/с, каждая из которых задана двумя самогравитирующими сферическими облаками для описания газовой и бесстолкновительной компоненты с равновесным начальным распределением плотности, давления/тензора дисперсии скоростей. Результаты моделирования представлены на рисунках (77), (78) и (79).

Из рисунков (77), (78) и (79) видно, что аналогично предыдущей задаче, про-



Рис. 76: Результаты моделирования. Столбцевая плотность в  $M_{\odot}pc^{-2}$ 



Рис. 77: Моделирование столкновения галактик различной массы. Безразмерная плотность газовой компоненты в моменты времени: начальное состояние (сверху слева), t = 1.0 (сверху справа), t = 1.5 (снизу слева) и t = 2.0 (снизу справа)

исходит развитие гат pressure механизма. В результате столкновения галактика с меньшей массой фактически разрушается по всему фронту контакта с большей галактикой, образуя тем самым набегающий поток, который и является причиной набегающего давления. За фронтом большой галактики имеет место образование цилиндрически симметричной плотность области, что напоминает галактики типа "Jelly Fish" (галактика Megysa ESO 137-001). По всей видимости именно гат pressure механизм, создаваемый потоком газа или результат столкновения с меньшей галактикой, является причиной образования подобных объектов.

Моделирование образования хвостов галактик. Рассматривается дисковая галактика с массой звёздной компоненты  $M_{stars}$  и массой газа  $M_{gas} = 16 \cdot 10^{41}$  кг в соотношении  $M_{gas} = 0.05 M_{stars}$ . Распределение газа в галактике задаётся как  $\rho(r) \sim 1/r$  в центре галактики плотность газа составляет  $10^{-24}$  г/см<sup>3</sup>. Плотность межгалактического газа  $10^{-29}$  г/см<sup>3</sup>. Дисковая галактика движется в межгалактическом газе под углом  $\alpha$  к направлению движения (см. рисунок 80. Для получения сценария процесса



Рис. 78: Моделирование столкновения галактик различной массы. Безразмерная плотность бесстолкновительной компоненты в моменты времени: начальное состояние (сверху слева), t = 1.0 (сверху справа), t = 1.5 (снизу слева) и t = 2.0 (снизу справа)



Рис. 79: Моделирование столкновения галактик различной массы. Безразмерная общая плотность компоненты в моменты времени: начальное состояние (сверху слева), t = 1.0 (сверху справа), t = 1.5 (снизу слева) и t = 2.0 (снизу справа)

звездообразования в хвосте галактики, который состоит из сорванного с галактики газа будем рассматривать движение дисковой галактики, наклоненной под углом  $\alpha = 5$  градусов к вектору движения, со скорость в начальный момент времени 200 км/с. Для межгалактического газа такое движение галактики является сверхзвуковым с числом Маха ~ 5. В начальный момент времени облако галактического газа представляет собой обычное распределение в форме шара. Далее происходит стекание газа с галактики за счет сверхзвукового течения в межгалактической среде, которое со временем образует ярко выраженный хвост (см. рисунок 81), который состоит из газа, соравнного с галактики. В этом случае поведение массы горячего плотного газа должно быть следующим:

- 1. происходит процесс начального срыва плотного газа с галактики незначительное падения массы горячего газа вследствие начала обтекания,
- сорванный в начальный момент газ успевает остыть и начинается процесс звездообразования – незначительный рост массы горячего газа,
- 3. происходит основной процесс срыва плотного газа с галактики, в этот момент начинается значительно падение массы плотного газа,



Рис. 80: Схема движения галактики сквозь межгалактический газ. Красным показана звёздная компонента, синим - галактический газ, светлоголубым - межгалактический газ

 сорванный с галактики газ образует газовый хвост с очень небольшой кинетической энергией (можно привести аналог образование следов от самолета), который достаточно быстро остывает и начинается процесс звездообразования в основном хвосте галактики (см. рисунок 82).

В настоящем сценарии фактически имеет место два последовательных сценария. Первый сценарий – сорванный газ галактики успевает остыть, производя звездный хвост. Второй сценарий — сорванный газ галактики нагревается и остается горячим долгое время, после чего в любом случае остывает в силу малости своей кинетической энергии, а следовательно потерей и внутренней энергии за счет остывания. Таким образом, описанные два сценария дают один общий сценарий, связанный с процессом звезообразования в хвосте галактик, состоящем из сорванного с галактики газа (см. рисунок 81) и (см. рисунок 82).



Рис. 81: Результаты моделирования процесса звездообразования в хвосте галактики, состоящем из сорванного с галактики газа



Рис. 82: Поведение горячего газа при моделировании процесса звездообразования в хвосте галактики, состоящем из сорванного с галактики газа

Моделирования замагничивания хвостов галактик. Будем рассматривать аналогичную предыдущей задачи постановку, только добавим в модель учет вертикального магнитного поля 10<sup>-6</sup> Гаусса. В начальный момент времени облако галактического газа представляет собой обычное распределение в форме шара. Далее происхо-



Рис. 83: Результаты моделирования процесса замагничивания хвоста галактики, состоящего из сорванного с галактики газа. Плотность газовой компоненты (а), плотность бесстолкновительной компоненты (б), суммарная плотность (в), энергия магнитного поля (г)

дит стекание газа с галактики за счет сверхзвукового течения в межгалактической среде, которое со временем образует ярко выраженный замагниченный хвост (см. рисунок 83), который состоит из газа, сорванного с галактики.

# 4.3 Моделирование динамики молекулярных облаков и межзвездной среды

#### 4.3.1 Задачи о коллапсе

Процессы коллапса астрофизических объектов в настоящее время активно исследуются теоретически в связи с появлением значительного числа наблюдательных данных. Явление коллапса имеет место как на начальной стадии звездной эволюции, так и на конечной стадии эволюции звезд (взрывы сверхновых с коллапсирующим ядром). В этом разделе остановимся на задачах сжатия быстро вращающегося облака [31], сжатия вращающегося молекулярного облака [194], сжатие Эврарда [91].

Задача о коллапсе Эврарда. Для тестирования SPH методов часто используется модельная задача – коллапс Эврарда. Задача интересна тем, что вначале происходит короткий процесс сжатия центра, его быстрое нагревание и дальнейший разлет с образование ударной волны. Для решения этой задачи будем моделировать невращающееся облако с безразмерным радиусом  $R_0 = 1$ , распределением плотности внутри радиуса  $\rho(r) = 1/(2\pi r)$ , показателем адиабаты  $\gamma = 5/3$ , суммарной внутренней энергией u = 0.05. В рамках данного исследования количественно поведение энергий до момента коллапса, а качественно и после, совпало с результатом других авторов [238] (см. рисунок 84), также стоит отметить полное совпадение момента наступления коллапса. Количественное различие в поведении внутренней и потенциальной энергий обусловленно в фундаментальных возможностях кода AREPO моделировать высокие градиенты плотности. Стоит отметить, что при тестировании кода AREPO имеет место понижение потенциальной энергии и повышение внутренней энергии при увеличении размера расчетной сетки. В авторском коде получены более низкие значения потенциальной энергии и более высокие значения внутренней энергии, при этом поведение кинетической энергии качественно и количественно совпадает на всех этапах коллапса. Аналогичные результаты получены и в случае сферической симметрии (см. рисунок 85). В чем заключается такое различие в воспроизведении поведения потенциальной и внутренней энергий не понятно. Очень интересным было бы масштабное сравнение численных кодов (особенно кодов, основанных на сеточных методах) на этой задаче в плане поведения энергий. Такое сравнение позволило бы сформулировать "эталонный тест коллапса самогравитирующего газового шара".



Рис. 84: Поведение различных видов энергии (сверху слева). Сравнения поведения потенциальной (сверху справа), внутренней (снизу слева) и кинетической (снизу справа) энергий, полученные при моделировании авторской реализацией и AREPO [238]. Точками обозначены значения энергий, полученные по коду AstroPhi, звездочками обозначены значения энергий, полученные кодом AREPO.

Задача о сжатии быстро вращающегося облака. В рамках исследования возможности моделирования коллапса вращающихся протозвездных облаков будем моделировать газовое облака, ограниченное сферой радиуса  $R_0 = 3.81 \cdot 10^{14}$  м, с массой  $M_g = 3.457 \cdot 10^{30}$  кг, с равномерным распределением плотности  $\rho = 1.492 \cdot 10^{-14}$  кг/м<sup>3</sup> и давления  $p = 0.1548 \cdot 10^{-10}$  H/м<sup>2</sup>, вращающийся с угловой скоростью  $\omega = 2.008 \cdot 10^{-12}$  рад/с. Показатель адиабаты соответствует водороду  $\gamma = 5/3$ . Масса центрального тела  $M_{\odot} = 1.998 \cdot 10^{30}$  кг. В качестве размерных величин выберем следующие значения:  $L_0 = 3.81 \cdot 10^{14}$  м,  $\rho_0 = 1.492 \cdot 10^{-14}$  кг/м<sup>3</sup>,  $p = 0.1548 \cdot 10^{-7}$  H/м<sup>2</sup>,  $v_0 = 1010$  м/с,  $t = 3.7 \cdot 10^{11}$  с,  $\omega_0 = 0.27 \cdot 10^{-11}$  рад/с. Тогда в безразмерных величинах задача ставится следующим образом:  $\rho = 1.0$  – плотность газового облака,  $p = 10^{-3}$  – давление в газовом облаке,  $\omega = 0.744$  – угловая скорость вращения,  $m_{\odot} = 2.42$  – масса



Рис. 85: Поведение различных видов энергий в задаче Эврарда в сферической симметрии: кинетической (черная линия), внутренняя (красная линия), потенциальная (зеленая линия) и полная (синяя линия).

центрального тела,  $\gamma = 5/3$  – показатель адиабаты,  $[0; 6.4]^3$  – расчётная область.

В ряде работ, посвященных коллапсированию протозвездных облаков, проводился поиск ответа, каким будет распределение плотности в экваториальной плоскости облака после коллапсирования. Четкого ответа так и не было получено. Основным результатом в данной задаче является поведение энергий (см. рисунок 86 и рисунок 87) и торобразный профиль плотности в экваториальной плоскости, что связано с переносом углового момента. Эта причина иллюстрируется поведением вращательной и кинетической энергий, а также потенциальной после момента коллапса, на рисунке (86), которая значительно превосходит результат, полученный С.Г. Моисеенко и его соавторами с помощью специально созданного для подобных задач кода. Тем не менее стоит отметить, что существует разумное количественное соответствие поведения кинетической и вращательной энергий в начальной стадии эволюции облака. Далее имеет место некоторое качественное соответствие. Примечательно, что поведение внутренней энергии полностью соответствует результатам, полученным С.Г. Моисеенко и его соавторами. Стоит отметить, что поведение энергий качественно, а до момента коллапса количественно в целом совпадают с результатами других авторов [31]. Тем не менее с помощью кода AstroPhi или других кодов, основанных на SPH, AMR или ALE подходах, такая задача коллапса не может быть решена в принципе. Это связано с использованием классической лагранжевой формулировкой метода, реализованного в коде [31]. При этом сколь угодно близкое качественное



Рис. 86: Сравнения поведения потенциальной (сверху слева), внутренней (сверху справа), кинетической (снизу слева) и вращательной (снизу справа) энергий, полученные при моделировании кодом AstroPhi и лагранжевым методом [31]. Точками обозначены значения энергий, полученные по коду AstroPhi, звездочками обозначены значения энергий, полученные лагранжевым методом.

или количественное приближение к результатам этого лагранжевого кода говорит об очень высоком потенциале численного метода в плане моделирования быстрого образования больших градиентов решения. Поэтому, несмотря на различия, показанных на рисунке (86), утверждается, что авторский код AstroPhi справился с задачей о сжатии быстро вращающегося облака.

Задача о сжатии вращающегося молекулярного облака. В рамках исследования возможности моделирования коллапса вращающихся молекулярных облаков будем моделировать газовое облака, ограниченное сферой радиуса  $R_0 = 100$  парсек, с массой  $M_g = 10^7 M_{\odot}$ , с распределением плотности  $\rho(r) \simeq 1/r$  и температуры  $T \approx 2000$  K, вращающийся с угловой скоростью  $\omega = 21$  км/с. Показатель адиабаты соответствует водороду  $\gamma = 5/3$ . Скорость звука  $c \approx 3.8$  км/с. В качестве размерных



Рис. 87: Поведение различных видов энергии в коде AstroPhi при решении задачи о сжатии быстро вращающегося облака.

величин выберем следующие значения:  $L_0 = 100$  парсек,  $\rho_0 = 1.2 \cdot 10^{-18}$  кг/м<sup>3</sup>,  $v_0 = 21$  км/с. Тогда в безразмерных величинах задача ставится следующим образом:  $\rho = 1.0$  – плотность газового облака в центре,  $p = 2 \times 10^{-2}$  – давление в газовом облаке в центре,  $\omega = 1$  – угловая скорость вращения,  $\gamma = 5/3$  – показатель адиабаты,  $[0; 6.4]^3$  – расчётная область. В рамках данного исследования количественно поведение энергий до момента коллапса, а качественно и после, совпало с результатом других авторов [194] (см. рисунок 88), также стоит отметить полное совпадение момента наступления коллапса. Количественное различие в поведении внутренней и потенциальной энергий обусловленно в фундаментальных возможностях метода SPH моделировать высокие градиенты плотности. При наличии магнитного поля порядка  $10^{-6}$  Гаусса имеет место образование подобий полярных течений (см. рисунок 89). Такое течение обусловлено дополнительным вертикальным силам за счет магнитного поля.

#### 4.3.2 Моделирование динамики молекулярных облаков

Моделирование образование молекулярного водорода в облаке газа при его движении через межзвездный газ. Будем моделировать газовое облако, ограниченное вначале сферой с радиусом  $R_0 = 100$  парсек, с массой  $M_g = 10^7 M_{\odot}$  и начальной температурой T = 2000 K, двигающееся сквозь разреженный галактический газ со скоростью V = 21 км/с. Начальный эффективный показатель адиабаты соответствует водороду  $\gamma = 5/3$ , скорость звука c = 3.8 км/с, профиль плотности



Рис. 88: Поведение различных видов энергии в коде AstroPhi(сверху слева). Сравнения поведения потенциальной (сверху справа), внутренней (снизу слева) и кинетической (снизу справа) энергий, полученные при моделировании авторским кодом и SPH методом [194]. Точками обозначены значения энергий, полученные по авторскому коду, звездочками обозначены значения энергий, полученные SPH методом.

 $\rho(r) \simeq 2r^3 - 3r^2 + 1$ . Результаты моделирования приведены на рисунке (90). На рисунке (90) показана динамика газа, которая практически не зависит от изменения показателя адиабаты. На начальной стадии образование водорода имеет активную фазу и увеличивается к центру облака.

Моделирование взаимодействия молекулярного облака с межзвездной средой в МГД модели. В рамках задачи взаимодействия молекулярного облака с межзвездной средой мы рассматривали модель гидростатически равновесного молекулярного облака, на который набегает разреженная ISM со скоростью v = 45км/с. Размер молекулярного облака составляет R = 100 пк, масса  $10^7 M_{\odot}$ . Профиль плотности имеет вид:

$$\rho(r) \sim 2r^3 - 3r^2 + 1$$



Рис. 89: Изолинии плотности при коллапсе замагниченного вращающегося молекулярного облака.

профиль давления с учетом равновесия имеет вид:

$$p(r) \sim \pi \left( -\frac{r^8}{3} + \frac{44r^7}{35} - \frac{6r^6}{5} - \frac{4r^5}{5} + \frac{8r^4}{5} - \frac{2r^2}{3} + \frac{1}{7} \right)$$

Величина вертикального магнитного поля составляет  $B_0 = 0.05 \ \mu$ G. Результаты моделирования приведены на рисунках (91) и (92). В начальный момент времени происходит набегание потока и образование ударной волны перед молекулярным облаком. Также видно значительная перестройка магнитного поля на фронтах взаимодействия.

#### 4.3.3 Моделирование развития МГД турбулентности межзвездной среды

Задача моделирования химодинамики развития МГД турбулентности межзвездной среды рассматривалась в полной постановке с учетом самогравитации. Для этого была рассмотрена область 256<sup>3</sup> пк<sup>3</sup>, с вертикальной компонентой магнитного поля, равномерной начальной концентрации атомов  $n = 5 \text{ см}^{-3}$ , скорость начального случайного возмущения  $v_{rms} = 10 \text{ км/с}$ , начальное значение плазменного параметра  $\beta_{th} = 8\pi p_0/B_0^2 = 25$ , начальное значение турбулентного плазменного параметра  $\beta_{turb} = 8\pi \rho v_{rms}^2/B_0^2 = 25$ , альфвеновское число Маха  $\mathcal{M} = 3.52$ . Были рассмотрены следующие восемь реакций, которые были использованы также в работе [108].

- 1.  $H + H + grain \rightarrow H_2 + grain$
- 2.  $H_2 + H \rightarrow 3H$



Рис. 90: Безразмерная плотность газа (a), показатель адиабаты  $\gamma$  (b), безразмерная плотность атомарного H (c) и молекулярного  $H_2$  (d) водорода в момент времени  $4.5 \times 10^{14}$  секунд.

- 3.  $H_2 + H_2 \rightarrow 2H + H_2$
- 4.  $H_2 + \gamma \rightarrow 2H$
- 5.  $H + c.r. \rightarrow H^+ + e$
- 6.  $H + e \rightarrow H^+ + 2e$
- 7.  $H^+ + e \rightarrow H + \gamma$
- 8.  $H^+ + e + grain \rightarrow H + grain$

Для характерных значений температуры T = 1000 К и T = 5000 К, а также характерной концентрации атомарного нейтрального водорода, с помощью пакета ChemPAK [72] было смоделировано поведение концентрации различных форм водорода, который в подавляющей своей части ионизировался, а молекулярный составлял несколько тысячных процента (см. рисунок 93). В вычислительном эксперименте концентра-



Рис. 91: Задача взаимодействия межзвездной среды с молекулярным облаком. На рисунках изображены распределение плотности в  $10^3 cm^{-3}$  в моменты времени t = 0.6 Муг (сверху слева), t = 1.5 Муг (сверху справа), t = 2.1 Муг (снизу слева), t = 2.4 Муг (снизу справа). Для вычислительного эксперимента использовалось сетка  $512^3$  ячеек.

ции вели себя подобным образом. Результаты моделирования приведены на рисунке (94). На рисунках видно образование некоторых малых волн плотности в момент времени t = 10 и t = 14 млн. лет. Однако, затем происходит ускорение процесса кластеризации, что приводит к образованию облаков. Также была проанализирована зависимость альфвеновской скорости от плотности газа (см. рисунок 95 слева) и косинуса угла колинеарности между векторами скорости и магнитного поля от плотности газа (см. рисунок 95 справа). Из рисунков видно, что для альфвеновского числа Маха прослеживается корреляция  $\mathcal{M} \sim n^2$ , показанная белой линией и большая часть облака n > 10 см<sup>-3</sup> попадают в сверхальфвеновскую область (см. рисунок 95 слева). Причина возникновения такого режима связано с самоорганизацией в замагниченной турбулентной межзвездной среде в трансальфеновском режиме  $\mathcal{M} \sim 1$  при  $n \sim 1$ . При таких плотностях (см. рисунок 95 справа) контуры косинуса угла колинеарности о скорости и магнитного поля образуют седловидную структуру, что говорит о том, что сжатие происходит вдоль силовых линий магнитного поля. Затем за счёт влияния самогравитации происходит дальнейшее увеличение



Рис. 92: Задача взаимодействия межзвездной среды с молекулярным облаком. На рисунке изображена ориентация векторного магнитного поля в момент времени t = 2.4 Myr.

массы и плотности облаков. В свою очередь в полученных плотных облаках турбулентность является только сверхальфвеновской с числом Maxa  $\mathcal{M} > 100$ .

### 4.4 Моделирование образования протопланетного диска

#### 4.4.1 Моделирование образования однопланетной системы

Рассмотрим область [-2.5; 2.5], в которой задан газ с параметрами:

$$\rho(r) = \begin{cases} 0 & r \ge 2 \\ 2 & r < 2 \\ 3 & r < 0.25 \end{cases} \quad p(r) = \begin{cases} 0 & r \ge 2 \\ 1 & r < 2 \\ 2 & r < 0.25 \end{cases}$$
$$\omega(r) = 2(2-r)^2$$

Также в области 1/2 < r < 2 равномерно распределено 50 000 частиц с массой  $m = 5 \times 10^{-5}$  и угловой скоростью  $\omega(r) = 2(2-r)^2 + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – случайное отклонение с амплитудой порядка одного процента. На рисунке (96) видно образование кольца из газа и пыли, в котором формируется уплотнение, состоящее в основном из частиц. Этот сгусток плотности можно интерпретировать как потенциальную планету,



Рис. 93: Поведение концентраций при температуре области T = 1000 К и T = 5000 К. Для обеих температур в интервале времени  $10^{11} < t < 10^{11.5}$  секунд происходит резкий процесс ионизации.

полученную в результате развития неустойчивостей.

#### 4.4.2 Моделирование поздней стадии эволюции протопланетного диска

Рассмотрим процесс эволюции протопланетного диска с момента, когда в нем уже сформированы несколько протопланет. Зададим в области  $[-5,5] \times [-5,5]$  газовый диск радиусом R = 4 с распределением плотности  $\rho(r) = 3.5 \frac{(R-r)(R+r)}{R^2}$ , давлением  $p(r) = 0.8 \frac{(R-r)(R+r)}{R^2}$  и угловой скоростью  $\omega = 1$ . В качестве протопланет зададим 10 частиц, равномерно распределенных в диске с радиусом  $R \in [1.0, 2.5]$ , массами  $m \in [9e - 3, 9e - 2]$  и угловой скоростью  $\omega = 2.5 + \epsilon$ ,  $\epsilon \sim N(1.0, 0.5)$ . Результат представлен на рисунке (97). На нем видно образование трех газовых объектов высокой плотности, которые можно интерпретировать как потенциальные звезды. Кроме этого наблюдается область разрежения слева от центральной звезды. Она образовалась в результате звездного ветра, из-за которого часть вещества была выброшена во внешнюю часть диска. Это, в частности, одна из причин невозможности образования газовых гигантов вблизи звезды.



Рис. 94: Задача химодинамики развития МГД турбулентности межзвездной среды. На рисунках приведена концентрация газа в см<sup>-3</sup> в моменты времени t = 10 Муг (слева), t = 14 Муг (посередине), t = 15 Муг (справа). После процесса ионизации водорода происходит процесс образования облачных структур. Для вычислительного эксперимента использовалось сетка  $512^3$  ячеек.



Рис. 95: Задача химодинамики развития МГД турбулентности межзвездной среды. На рисунках приведена зависимость альфвеновской скорости от плотности газа (слева) и косинуса угла колинеарности между векторами скорости и магнитного поля от плотности газа (справа).



Рис. 96: Моделирование наального этапа эволюции протопланетного диска



Рис. 97: Моделирование последнего этапа эволюции протопланетного диска

### 4.5 Выводы по четвертой главе

В четвертой главе диссертации представлены результаты вычислительных экспериментов по изучению гидродинамических процессов в самосогласованном гравитационном поле. Были рассмотрены различные масштабы астрономических объектов: от крупно-масштабных структур до масштабов протопланетного диска. Исследована задача столкновения галактик в полной термодинамически согласованной гидродинамической модели. Определены диапазоны гидродинамических параметров для развития сценариев столкновения галактик: рассеивание галактик, слияние галактик, свободное прохождение галактик, разлет галактик с образованием новой галактики. Показано, что область повышенной скорости звездообразования образуется за фронтом ударных волн, возникающих при столкновении галактик. В сценарии слияния галактик экспериментально доказано, что в плотной области происходит активный процесс образования молекулярного водорода. Исследована задача обтекания галактики межгалактическим газом, образованном из газа галактик меньшей массы. При набегании разреженного газа на галактику происходит образование гат pressure механизма, что приводит к образованию хвостов за фронтом галактик. Такой механизм объясняет образования ряда пекулярных галактик. Исследован механизм развития спиральных структур у дисковых галактик, было показано, что при меньшем отношении массы диска к массе Гало формируется большее число спиральных рукавов. Таким образом, были объяснены механизмы образования двух-, четырех- и семирукавных спиральных галактик. Исследована в газодинамической и магнитно-газодинамической постановках задача коллапса молекулярных облаков в ходе эволюции межзвездной среды. Показано образование полярных течений при коллапсе молекулярного облака в случае сильного вертикального магнитного поля. Экспериментально подтверждено преимущество разработанного численного метода над лагранжевым методом сглаженных частиц при воспроизведении высоких градиентов решения. Смоделирован сценарий образования однопланетной системы при эволюции протопланетного диска, а также поведение протопланетной системы на поздней стадии ее эволюции, где показана невозможность образования планетных систем вблизи звезды за счет углового момента.

## Заключение

В диссертации сформулированы и решены постановки новых задач математического моделирования гидродинамических процессов в самосогласованном гравитационном поле на суперЭВМ. Разработаны математические модели, созданы оригинальные эффективные численные схемы и их параллельные реализации в виде наукоемкого программного обеспечения для проведения суперкомпьютерных вычислительных экспериментов.

Построена новая модель упруго-пластических деформаций с учетом фазовых переходов, основанная на решении уравнений теории упругости и максвелловских релаксаций для описания фазовых переходов между твердым телом, жидкостью и газом. Для этого был сформулирован общий вид уравнения состояния и исследована его корректность. Такой вид уравнения состояния был выработан в результате оригинальных вычислительных экспериментов и их сравнения с натурными экспериментами на задаче "о сварке взрывом" металлических пластин. Для разрешения уравнения на основе метода Годунова был разработан, реализован и верифицирован численный метод решения уравнений теории упругости в лагранжевых координатах. На задаче "о сварке взрывом" двух алюминиевых пластин был объяснен механизм волнообразования и продемонстрирован сценарий прохождения всех фазовых переходов с образованием кумулятивной струи, состоящей из частиц материала.

Построена новая гидродинамическая модель астрофизических объектов. Модель основана на совместном решении переопределенной системы уравнений многокомпонентной односкоростной (магнитной) газовой динамики и уравнений для первых моментов бесстолкновительного уравнения Больцмана для описания бесстолкновительной компоненты. Использование такого подхода для описания бесстолкновительной среды позволяет сформулировать термодинамически согласованную модель процесса звездообразования и эффекта от взрыва сверхновых, что невозможно сделать в модели N-тел, а также использовать единый вычислительный подход к численному разрешению таких гиперболических моделей, что особенно важно в контексте использования суперЭВМ. Использование односкоростной модели для многокомпонентной газодинамической среды позволяет естественным образом учесть химокинетику в астрофизических течениях. Для обеспечения бездивергентности магнитного поля используется теорема Стокса.

Разработан новый численный метод высокого порядка точности на гладких ре-

246

шениях и с малой диссипацией решения в области разрывов для решения уравнений газовой динамики, магнитной газовой динамики и решения уравнений для первых моментов бесстолкновительного уравнения Больцмана. В основе численного метода лежит метод разделения операторов, который расщепляет исходную систему уравнений на эйлеров этап, на котором происходит учет работы сил, и лагранжев этап, на котором происходит адвективный перенос гидродинамических величин. В основе решения уравнений на каждом этапе лежит метод Годунова с использованием линеаризованных распадов разрыва. Для построения решения линеаризованного распада разрыва используется специальная модификация схемы осреднения Рое и кусочнопараболический метод на локальном шаблоне для построения численного метода с малой диссипацией решения в области разрыва и высокого порядка точности на гладких решениях. Использование компактного шаблона для организации вычислений позволило использовать минимальное перекрытие подобластей, а гиперболичность математической модели позволило сформулировать единый вычислительный метод для всех компонент, что позволило получить 55-кратное ускорение на графическом ускорителе и 134-кратное ускорение на ускорителе Intel Xeon Phi, а также высокую масштабируемость как в случае классических архитектур, так и в случае гибридных суперЭВМ.

Проведена серия вычислительных экспериментов, позволившая: впервые в рамках полной гидродинамической модели исследовать задачу столкновения галактик, определить диапазоны гидродинамических параметров для развития каждого сценария столкновения: рассеивание галактик, слияние галактик, свободное прохождение галактик, разлет галактик с образованием новой галактики, определить области звездообразования, возникающие при столкновении галактик, и образования сложных химических соединений; впервые исследовать задачу образования различного числа рукавов галактики, определить гидродинамические параметры для образования двух-, четырех- и семирукавных галактик; впервые исследовать задачу самоорганизации молекулярных облаков, происходящей за счет самосогласованного гравитационного и магнитного полей и показать преимущество разработанного численного метода над лагранжевым методом сглаженных частиц при воспроизведении высоких градиентов решения. Полученные результаты подтверждают существующие теории и согласуются с наблюдениями и результатами натурных экспериментов.

Разработанная в диссертации численная модель трехмерных гидродинамических процессов в самосогласованном гравитационном поле **рекомендуется** для использо-

247

вания специалистами в области материаловедения принимать обоснованные решения при постановке натурных экспериментов для создания новых материалов, а специалистам в области космологии, астрофизики и геофизики экспериментально исследовать механизмы образования пекулярных галактик, областей звездообразования в них, развития МГД процессов на масштабах межзвездной среды и геофизических масштабах. В качестве перспективы дальнейшей разработки темы предполагается качественное расширение численной модели для учета релятивистских эффектов, более сложных уравнений состояния и химической кинетики на различных пространственных масштабах. Расширение численного метода предполагается в сторону использования подвижных сеток, что позволит при сохранении параллельных алгоритмов более детализированно воспроизводить разномасштабные гидродинамические течения. Разработанные параллельные алгоритмы в перспективе могут быть эффективно реализованы на современных архитектурах программируемых логических интегральных схем, что существенно повысит производительность вычислений. В дальнейшем такой программный комплекс предполагается использовать для широкого круга задач астрофизики и геофизики: образование и взаимодействие галактик различных типов в рамках космологической модели, детальное исследование процесса звездообразования в рукавах галактик, объяснение механизмов образования планетных систем различного типа, исследование влияния солнечного ветра и импактных событий на объекты солнечной системы.

# Список литературы

- [1] Вшивков В.А., Лазарева Г.Г., Куликов И.М. Операторный подход для численного моделирования гравитационных задач газовой динамики // Вычислительные технологии. – 2006. – Т. 11, Вып. 3. – С. 27-35.
- [2] Вшивков В.А., Лазарева Г.Г., Куликов И.М. Модификация метода крупных частиц для задач гравитационной газовой динамики. // Автометрия. – 2007. – Т. 43, Вып. 6. – С. 56-65.
- [3] Вшивков В.А., Лазарева Г.Г., Киреев С.Е., Куликов И.М. Параллельная реализация модели газовой компоненты самогравитирующего протопланетного диска на суперЭВМ // Вычислительные технологии. – 2007. – Т. 12, Вып. 3. – С. 38-52.
- [4] Вшивков В.А., Лазарева Г.Г., Киреев С.Е., Куликов И.М. Численное решение трехмерных задач динамики самогравитирующих многофазных систем // Научный вестник НГТУ. – 2011. – Вып. 3 (44). – С. 69-80.
- [5] Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Математический сборник. – 1959. – Т. 47, Вып. 3. – С. 271-306.
- [6] Годунов С.К. Проблема обобщенного решения в теории квазилинейных уравнений и в газовой динамике // Успехи математических наук. – 1962. – Т. 17, Вып. 3. – С. 147-158.
- [7] Годунов С.К., Киселев С.П., Куликов И.М., Мали В.И. Численное и экспериментальное моделирование образования волн при сварке взрывом // Труды Математического Института им. В.А. Стеклова. – 2013.– Т. 281. – С. 16 - 31.
- [8] Годунов С.К., Киселев С.П., Куликов И.М., Мали В.И. Моделирование ударноволновых процессов в упругопластических материалах на различных (атомный, мезо и термодинамический) структурных уровнях. – Москва, Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований. – 2014. – 296 С.
- [9] Головизнин В.М., Карабасов С.А., Кондаков В.Г. Обобщение схемы КАБАРЕ на двумерные ортогональные расчетные сетки // Математическое моделирование. – 2013. – Т. 25. – С. 103-136.

- [10] Забродин А.В., Софронов И.Д., Ченцов Н.Н. Адаптивные разностные методы математического моделирования нестационарных газодинамических течений (Обзор) // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Методики и программы численного решения задач математической физики. – 1988. – Вып. 4. – С.3-22.
- [11] Куликов И.М., Черных И.Г., Глинский Б.М. AstroPhi: программный комплекс для моделирования динамики астрофизических объектов на гибридных супер-ЭВМ, оснащенных ускорителями Intel Xeon Phi // Вестник Южно-Уральского Государственного Университета. Серия: Вычислительная математика и информатика. – 2013. – Т. 2, Вып. 4. – С. 57-79.
- [12] Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семёнов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2001. – 608 С.
- [13] Лазарева Г.Г., Куликов И.М., Вшивков В.А., Кошкарова Е.А., Берендеев Е.А., Горр М.Б., Антонова М.С. Параллельная реализация численной модели столкновения галактик // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. – 2011. – Т. 9., Вып. 4. – С. 71-78.
- [14] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. Москва: Наука. 1962. 568 С.
- [15] Меньшов И.С., Мищенко А.В., Сережкин А.А. Численное моделирование упругопластических течений методом Годунова на подвижных эйлеровых сетках // Математическое моделирование. – 2013. – Т. 25, Вып. 8. – С. 89-108.
- [16] Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. Москва: Наука. 1981.
   368 С.
- [17] Прокопов Г.П. Необходимость контроля энтропии в газодинамических расчетах // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2007. – Т. 47. – С. 1591-1601.
- [18] Протасов В.А., Куликов И.М. РАDME новый код для моделирования процесса формирования георесурсов планет на гетерогенных вычислительных системах // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. – 2015. – Т. 326, Вып. 8. – С. 61-70.

- [19] Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные схемы газовой динамики. Москва: Наука. – 1975. – 352 С.
- [20] Сафронов А.В. Разностный метод решения нестационарных уравнений газодинамики на основе соотношений на разрывах // Космонавтика и ракетостроение. – 2006. – Вып. 2, Номер 43. – С. 152-158.
- [21] Тутуков А.В., Лазарева Г.Г., Куликов И.М. Газодинамика центрального столкновения двух галактик: слияние, разрушение, пролет, образование новой галактики // Астрономический журнал.- 2011. – Т. 88, №9. – С. 837-851.
- [22] Тутуков А.В., Федорова А.В. Образование планет в ходе эволюции одиночных и двойных звезд // Астрономический журнал.- 2012. - Т. 89, №4. - С. 305-314.
- [23] Abel T., Anninos P., Zhang Y., Norman M. Modeling primordial gas in numerical cosmology // New Astronomy. - 1997. - V. 2, I. 3. - P. 181-207.
- [24] Agertz O., et al. Fundamental differences between SPH and grid methods // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. - 2007. - V. 380. - P. 963-978.
- [25] Aksenov A.V. Linear Differential Relations Between Solutions of the Class of Euler-Poisson-Darboux Equations // Journal of Mathematical Sciences. 2005. Vol. 130.
   P. 4911-4940.
- [26] Anninos P., Zhang Y., Abel T., Norman M. Cosmological Hydrodynamics with Multi-Species Chemistry and Nonequilibrium Ionization and Cooling // New Astronomy. – 1997. – V. 2, I. 3. – P. 209-224.
- [27] Alig C., Burkert A., Johansson P., Schartmann M. Simulations of direct collisions of gas clouds with the central black hole // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. - 2011. - V. 412, I. 1. - P. 469-486.
- [28] Almgren A., et al. CASTRO: A New Compressible Astrophysical Solver. I. Hydrodynamics and Self-gravity // The Astrophysical Journal. - 2010. - V. 715. - P. 1221-1238.
- [29] Anninos P., Chris Fragile P., Murray S. COSMOS: a radiation-chemo-hydrodynamics code for astrophysical problems // The Astrophysical Journal Supplement Series. – 2003. – V. 147. – P. 177-186.

- [30] Aoki W. eds. Galactic Archaeology: Near-Field Cosmology and the Formation of the Milky Way // Astronomical Society of the Pacific Conference Series. - 2012. - V. 458.
   - 435 P.
- [31] Ardeljan N., Bisnovatyi-Kogan G., Moiseenko S. An implicit Lagrangian code for the treatment of nonstationary problems in rotating astrophysical bodies // Astronomy & Astrophysics. 1996. V. 115. P. 573-594.
- [32] Attwood R., Goodwin S., Whitworth A. Adaptive smoothing length in SPH // Astronomy & Astrophysics. - 2007. - V. 464. - P. 447-450.
- [33] Bahe Y., McCarthy I. Star formation quenching in simulated group and cluster galaxies: when, how, and why? // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.
  2015. V. 447, I. 1. P. 969-992.
- [34] Balsara D., Spicer D. Maintaining Pressure Positivity in Magnetohydrodynamic Simulations // Journal of Computational Physics. - 1999. - V. 148. - P. 133-148.
- [35] Balsara D., Shu C.-W. Monotonicity Preserving Weighted Essentially Non-oscillatory Schemes with Increasingly High Order of Accuracy // Journal of Computational Physics. - 2000. - V. 160. - P. 405-452.
- [36] Balsara D., Rumpf T., Dumbser M., Munz C.-D. Efficient, high accuracy ADER-WENO schemes for hydrodynamics and divergence-free magnetohydrodynamics // Journal of Computational Physics. - 2009. - V. 228. - P. 2480-2516.
- [37] Balsara D., Spicer D. A Staggered Mesh Algorithm Using High Order Godunov Fluxes to Ensure Solenoidal Magnetic Fields in Magnetohydrodynamic Simulations // Journal of Computational Physics. - 1999. - V. 149. - P. 270-292.
- [38] Balsara D. Multidimensional HLLE Riemann solver: Application to Euler and magnetohydrodynamic flows // Journal of Computational Physics. - 2010. - V. 229.
   - P. 1970-1993.
- [39] Balsara D. Self-adjusting, positivity preserving high order schemes for hydrodynamics and magnetohydrodynamics // Journal of Computational Physics. - 2012. - V. 231.
   - P. 7504-7517.
- [40] Balsara D. A two-dimensional HLLC Riemann solver for conservation laws: Application to Euler and magnetohydrodynamic flows // Journal of Computational Physics. - 2012. - V. 231. - P. 7476-7503.
- [41] Balsara D., Dumbser M., Abgrall R. Multidimensional HLLC Riemann solver for unstructured meshes – With application to Euler and MHD flows // Journal of Computational Physics. – 2014. – V. 261. – P. 172-208.
- [42] Balsara D. Multidimensional Riemann problem with self-similar internal structure. Part I – Application to hyperbolic conservation laws on structured meshes // Journal of Computational Physics. – 2014. – V. 277. – P. 163-200.
- [43] Balsara D., Dumbser M. Multidimensional Riemann problem with self-similar internal structure. Part II – Application to hyperbolic conservation laws on unstructured meshes // Journal of Computational Physics. – 2015. – V. 287. – P. 269-292.
- [44] Balsara D. Three dimensional HLL Riemann solver for conservation laws on structured meshes: Application to Euler and magnetohydrodynamic flows // Journal of Computational Physics. - 2015. - V. 295. - P. 1-23.
- [45] Balsara D., Dumbser M. Divergence-free MHD on unstructured meshes using high order finite volume schemes based on multidimensional Riemann solvers // Journal of Computational Physics. - 2015. - V. 299. - P. 687-715.
- [46] Barnes J., Hut P. A hierarchical O(NLogN) force-calculation algorithm // Nature.
   1986. V. 324. P. 446-449.
- [47] Batten P., Clarke N., Lambert C., Causon D.M. On the Choice of Wavespeeds for the HLLC Riemann Solver // SIAM Journal of Computing. - 1997. - V. 18. - P. 1553-1570.
- [48] Baumgardt H., et al. The velocity dispersion and mass-to-light ratio of the remote halo globular cluster NGC 2419 // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.
  - 2009. - V. 396, I. 4. - P. 2051-2060.
- [49] Beresnyak A. Basic properties of magnetohydrodynamic turbulence in the inertial range // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. - 2012. - V. 422, I. 4. -P. 3495-3502.

- [50] Beresnyak A., Xu H., Li H., Schlickeiser R. Magnetohydrodynamic turbulence and cosmic-ray reacceleration in galaxy clusters // The Astrophysical Journal Supplement Series. - 2013. - V. 771, 131.
- [51] Beresnyak A. Spectra of strong magnetohydrodynamic turbulence from highresolution simulations // The Astrophysical Journal Letters. - 2014. - V. 784, L20.
- [52] Bergin E., Plume R., Williams J., Myers P. The Ionization Fraction in Dense Molecular Gas. II. Massive Cores // The Astrophysical Journal. - 1999. - V. 512.
  - P. 724-739.
- [53] Bergin E., Hartmann L., Raymond J., Ballesteros-Paredes J. Molecular Cloud Formation behind Shock Waves // The Astrophysical Journal. – 2004. – V. 612. – P. 921-939.
- [54] Birdsall C. Clouds-in-Cells Physics for Many-Body Plasma Simulation // Journal of Computational Physics. – 1997. – V. 135. – P. 141-148.
- [55] Blecha L., Loeb A., Narayan R. Double-peaked narrow-line signatures of dual supermassive black holes in galaxy merger simulations // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. - 2013. - V. 429, I. 3. - P. 2594-2616.
- [56] Bleem L., et al. A New Reduction of the Blanco Cosmology Survey: An Optically Selected Galaxy Cluster Catalog and a Public Release of Optical Data Products // The Astrophysical Journal Supplement Series. - 2015. - V. 216, 20.
- [57] Borgani S., Kravtsov A. Cosmological simulations of galaxy cluster // Advanced Science Letters. - 2011. - V. 4. - P. 204-227.
- [58] Borovicka J., et al. The trajectory, structure and origin of the Chelyabinsk asteroidal impactor // Nature. - 2013. - V. 503. - P. 235-237.
- [59] Boscheri W., Balsara D., Dumbser M. Lagrangian ADER-WENO finite volume schemes on unstructured triangular meshes based on genuinely multidimensional HLL Riemann solvers // Journal of Computational Physics. - 2014. - V. 267. - P. 112-138.
- [60] Boscheri W., Balsara D., Dumbser M. High-order ADER-WENO ALE schemes on unstructured triangular meshes-application of several node solvers to hydrodynamics and magnetohydrodynamics // International journal for numerical methods in fluids. - 2014. - V. 76. - P. 737-778.

- [61] Brandenburg A., Dobler W. Hydromagnetic turbulence in computer simulations // Computer Physics Communications. - 2002. - V. 147. - P. 471-475.
- [62] Bruenn S., et al. 2D and 3D core-collapse supernovae simulation results obtained with the CHIMERA code // Journal of Physics. - 2009. - V. 180. - P. 1-5.
- [63] Bruggen M. Magnetic fields in galaxy clusters // Astronomische Nachrichten. 2013.
   V. 334, I. 6. P. 543-547.
- [64] Brusadin G., Matteucci F., Romano D. Modeling the chemical evolution of the Galaxy halo // Astronomy & Astrophysics. - 2013. - V. 554, A135. - P. 1-10.
- [65] Bryan G., et al. ENZO: an adaptive mesh refinement code for astrophysics // The Astrophysical Journal Supplement Series. - 2014. - V. 211, I. 2. - Article Number 19.
- [66] Bucciantini N., Pili A., Del Zanna L. Solving the 3+1 GRMHD Equations in the eXtended Conformally Flat Condition: the XNS Code for Magnetized Neutron Stars // Astronomical Society of the Pacific Conference Series. - 2014. - V. 488. - P. 211-216.
- [67] Candlish G., Smith R., Fellhauer M. RAyMOND: an N-body and hydrodynamics code for MOND // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2015. – V. 446, I. 1. – P. 1060-1070.
- [68] Cardall C., Budiardja R., Endeve E., Mezzacappa A. GenASiS: general astrophysical simulation system. I. refinable mesh and nonrelativistic hydrodynamics // The Astrophysical Journal Supplement Series. – 2014. – V. 210, I. 2. – Article Number 17.
- [69] Caselli P., Walmsley C., Terzieva R., Herbst E. The Ionization Fraction in Dense Cloud Cores // The Astrophysical Journal. - 1998. - V. 499. - P. 234-249.
- [70] Cayatte V., Kotanyi C., Balkowski C., van Gorkom J.H. A very large array survey of neutral hydrogen in Virgo Cluster spirals. 3: Surface density profiles of the gas // The Astronomical Journal. 1994. V. 107, I. 3. P. 1003-1017.
- [71] Cazaux S., Tielens A. H<sub>2</sub> Formation on Grain Surfaces // The Astrophysical Journal.
   2004. V. 604. P. 222-237.
- [72] Chernykh I., Stoyanovskaya O., Zasypkina O. ChemPAK Software Package as an Environment for Kinetics Scheme Evaluation // Chemical Product and Process Modeling. - 2009. - V. 4, I. 4. - Article Number 3.

- [73] Chertock A., Kurganov A., Rykov Yu. A new sticky particle method for pressureless gas dynamics // SIAM Journal on Numerical Analysis. - 2007. - V. 45. - P. 2408-2441.
- [74] Chilingarian I., Di Matteo P., Combes F., Melchior A., Semelin B. The GalMer database: galaxy mergers in the virtual observatory // Astronomy & Astrophysics. – 2010. – V. 518, A61. – P. 1-14.
- [75] Clarke D. On the Reliability of ZEUS-3D // The Astrophysical Journal Supplement Series. - 2010. - V. 187. - P. 119-134.
- [76] Collela P., Woodward P.R. The Piecewise Parabolic Method (PPM) Gas-Dynamical simulations // Journal of Computational Physics. - 1984. - V. 54. - P. 174-201.
- [77] Collela P. Multidimensional Upwind Methods for Hyperbolic Conservation Laws // Journal of Computational Physics. - 1990. - V. 87. - P. 171-200.
- [78] Colella P., Sekora M. A limiter for PPM that preserves accuracy at smooth extrema // Journal of Computational Physics. - 2008. - V. 227. - P. 7069-7076.
- [79] Combes F., Melchior A. Chemodynamical evolution of interacting galaxies // Astrophysics and Space Science. - 2002. - V. 281, I. 1-2. - P. 383-387.
- [80] Couchman H.M.P. Mesh-refined P<sup>-3</sup> M: A fast adaptive N-body algorithm // The Astrophysical Journal. – 1991. – V. 368. – P. L23-L26.
- [81] Courant R., Isaacson E., Rees M. On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences // Communications on Pure and Applied Mathematics.
   - 1952. - V. 5. - P. 243-256.
- [82] Crain R., et al. The EAGLE simulations of galaxy formation: calibration of subgrid physics and model variations // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. - 2015. - V. 450, I. 2. - P. 1937-1961.
- [83] Dalla Vecchia C., Schaye J. Simulating galactic outflows with kinetic supernova feedback // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. - 2008. - V. 387, I. 4. - P. 1431-1444.
- [84] Dolag K., Vazza F., Brunetti G., Tormen G. Turbulent gas motions in galaxy cluster simulations: the role of smoothed particle hydrodynamics viscosity // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. - 2005. - V. 364. - P. 753-772.

- [85] Draine B. Photoelectric heating of interstellar gas // The Astrophysical Journal Supplement Series. - 1978. - V. 36. - P. 595-619.
- [86] Draine B., Bertoldi F. Structure of Stationary Photodissociation Fronts // The Astrophysical Journal. - 1996. - V. 468. - P. 269-289.
- [87] Dubinski J., Kim J., Park C., Humble R. GOTPM: a parallel hybrid particle-mesh treecode // New Astronomy. - 2004. - V. 9. - P. 111-126.
- [88] Einfeld B. On Godunov-type methods for gas dynamics // SIAM Journal of Numerical Analysis. - 1988. - V. 25. - P. 294-318.
- [89] Eisenstein D., Hu W. Power Spectra for Cold Dark Matter and Its Variants // The Astrophysical Journal. - 1999. - V. 511, I. 1. - P. 5-15.
- [90] Engquist B., Osher S.J. One-sided difference approximations for nonlinear conservation laws // Mathematics of Computational. - 1981. - V. 36, 321-351.
- [91] Evrard A. Beyond N-body: 3D cosmological gas dynamics // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. - 1988. - V. 235. - P. 911-934.
- [92] Favrie N., Gavrilyuk S., Ndanou S. A thermodynamically compatible splitting procedure in hyperelasticity // Journal of Computational Physics. - 2014. - V. 270.
   - P. 300-324.
- [93] Federrath C., Klessen R. The Star Formation Rate of Turbulent Magnetized Clouds: Comparing Theory, Simulations, and Observations // The Astrophysical Journal. – 2012. – V. 761, 156.
- [94] Fedorenko R. A relaxation method for solving elliptic difference equations // USSR Computational Mathematics & Mathematical Physics. - 1961. - V. 1. - P. 1092-1096.
- [95] Ferland G., Peterson B., Horne K., Welsh W., Nahar S. Anisotropic line emission and the geometry of the broad-line region in active galactic nuclei // The Astrophysical Journal. - 1992. - V. 387. - P. 95-108.
- [96] Ferrari A., Dumbser M., Toro E., Armanini A. A New Parallel SPH Method for 3D Free Surface Flows // High Performance Computing on Vector Systems 2009. – 2009.
   – P. 179-188.

- [97] Few C., Courty S., Gibson B., Michel-Dansac L., Calura F. Chemodynamics of a simulated disc galaxy: initial mass functions and Type Ia supernova progenitors // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. - 2014. - V. 444, I. 4. - P. 3845-3862.
- [98] Fletcher A., Beck R., Shukurov A., Berkhuijsen E., Horellou C. Magnetic fields and spiral arms in the galaxy M51 // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.
  - 2011. - V. 412, I. 4. - P. 2396-2416.
- [99] Frigo M., Johnson S. The Design and Implementation of FFTW3 // Proceedings of the IEEE. - 2005. - Vol. 93, I. 2. - P. 216-231.
- [100] Gaburov E., Nitadori K. Astrophysical weighted particle magnetohydrodynamics // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. - 2011. - V. 414, I. 1. - P. 129-154.
- [101] Galloway M., et al. Galaxy Zoo: the effect of bar-driven fuelling on the presence of an active galactic nucleus in disc galaxies // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. - 2015. - V. 448, I. 4. - P. 3442-3454.
- [102] Galtier S., Buchlin E. Multiscale Hall-Magnetohydrodynamic Turbulence in the Solar Wind // The Astrophysical Journal. - 2007. - V. 656. - P. 560-566.
- [103] Gardiner T., Stone J. An unsplit Godunov method for ideal MHD via constrained transport in three dimensions // Journal of Computational Physics. - 2008. - V. 227.
  - P. 4123-4141.
- [104] Genel S., et al. Introducing the Illustris project: the evolution of galaxy populations across cosmic time // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. - 2014. -V. 445, I. 1. - P. 175-200.
- [105] Gingold R.A., Monaghan J.J. Smoothed particle hydrodynamics Theory and application to non-spherical stars // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 1977. – V. 181. – P. 375-389.
- [106] Glinskiy B., Kulikov I., Snytnikov A., Romanenko A., Chernykh I., Vshivkov V. Co-design of Parallel Numerical Methods for Plasma Physics and Astrophysics // Supercomputing frontiers and innovations. - 2014. - V. 1, I. 3. - P. 88-98.

- [107] Glinskiy B., Kulikov I., Snytnikov A., Chernykh I., Weins D. A multilevel approach to algorithm and software design for exaflops supercomputers // CEUR Workshop Proceedings. - 2015. - V. 1482. - P. 4-16.
- [108] Glover S., Mac Low M. Simulating the Formation of Molecular Clouds. I. Slow Formation by Gravitational Collapse from Static Initial Conditions // The Astrophysical Journal Supplement Series. - 2007. - V. 169, I. 2. - P. 239-268.
- [109] Glover S., Mac Low M. Simulating the Formation of Molecular Clouds. II. Rapid Formation from Turbulent Initial Conditions // The Astrophysical Journal. - 2007. -V. 659, I. 2. - P. 1317-1337.
- [110] Godunov S.K., Manuzina Yu.D., Nazareva M.A. Experimental analysis of convergence of the numerical solution to a generalized solution in fluid dynamics // Computational Mathematics and Mathematical Physics. - 2011. - V. 51. - P. 88-95.
- [111] Godunov S., Kulikov I. Computation of Discontinuous Solutions of Fluid Dynamics Equations with Entropy Nondecrease Guarantee // Computational Mathematics and Mathematical Physics. - 2014. - V. 54, I. 6. - P. 1012-1024.
- [112] Gomez-Ruiz A., Kurtz S., Araya E., Hofner P., Loinard L. A Catalog of Methanol Masers in Massive Star-forming Regions. III. The Molecular Outflow Sample // The Astrophysical Journal Supplement Series. - 2016. - V. 222, 18.
- [113] Gonzalez M., Audit E., Huynh P. HERACLES: a three-dimensional radiation hydrodynamics code // Astronomy & Astrophysics. - 2007. - V. 464. - P. 429-435.
- [114] Grassi T., et al. KROME a package to embed chemistry in astrophysical simulations // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2014. V. 439, I. 3. P. 2386-2419.
- [115] Grignon F., Benson D., Vecchio K.S., Meyers M.A. Explosive welding of aluminum to aluminum: analysis, computations and experiments // International Journal of Impact Engineering. - 2004. - V. 30, I. 10. - P. 1333-1351.
- [116] Grigoriev Yu., Vshivkov V., Fedoruk M. Numerical "particle-in-cell" methods: theory and applications. – De Gruyter. – 2002. – 249 P.
- [117] Haghighipour N. eds. Planets in Binary Star Systems // Series: Astrophysics and Space Science Library. - 2010. - V. 366. - 332 P.

- [118] Harten A., Lax P.D., Van Leer B. On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws // Society for Industrial and Applied Mathematics. - 1983. - V. 25. - P. 35-61.
- [119] Harvey-Smith L., Cohen R. Discovery of large-scale methanol and hydroxyl maser filaments in W3(OH) // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. - 2006.
  - V. 371, I. 4. - P. 1550-1558.
- [120] Hayes J., et al. Simulating Radiating and Magnetized Flows in Multiple Dimensions with ZEUS-MP // The Astrophysical Journal Supplement Series. - 2006. - V. 165. -P. 188-228.
- [121] Heitmann K., et al. The Q Continuum Simulation: Harnessing the Power of GPU Accelerated Supercomputers // The Astrophysical Journal Supplement Series. - 2015.
   - V. 219, 34.
- [122] Henrick A., Aslam T., Powers J. Mapped weighted essentially non-oscillatory schemes: Achieving optimal order near critical points // Journal of Computational Physics. - 2005. - V. 207. - P. 542-567.
- [123] Hockney R.W., Eastwood J.W. Computer Simulation Using Particles. 1981. New York: McGraw-Hill. – 540 P.
- [124] Hollenbach D., McKee C.F. Molecule formation and infrared emission in fast interstellar shocks. I Physical processes // The Astrophysical Journal Supplement Series. - 1979. - V. 41. - P. 555-592.
- [125] Hopkins P. A new class of accurate, mesh-free hydrodynamic simulation methods // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. - 2015. - V. 450, I. 1. - P. 53-110.
- [126] Ishiguro M., et al. Dust from comet 209p/linear during its 2014 return: parent body of a new meteor shower, the may camelopardalids // The Astrophysical Journal Letters. - 2015. - V. 798, L34.
- [127] Jaffe Y.L., et al. BUDHIES II: A phase-space view of HI gas stripping and starformation quenching in cluster galaxies // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. - 2015. - V. 448. - P. 1715-1728.

- [128] Jiang G.-S., Shu C.-W. Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes // Journal of Computational Physics. - 1996. - V. 126. - P. 202-228.
- [129] Jin S., Xin Z. The Relaxation Schemes for Systems of Conservation Laws in Arbitrary Space Dimensions // Communications on Pure and Applied Mathematics.
   - 1995. - V. 48, I. 3. - P. 235-276.
- [130] Jenniskens P., Lyytinen E. Meteor Showers from the Debris of Broken Comets: D/1819 W<sub>1</sub> (Blanpain), 2003 WY<sub>2</sub>5, and the Phoenicids // The Astronomical Journal. - 2005. - V. 130. - P. 1286-1290.
- [131] Johnstone C.P., et al. Colliding winds in low-mass binary star systems: wind interactions and implications for habitable planets // Astronomy & Astrophysics.
   2015. V. 577, A122.
- [132] Kalinkin A., Laevsky Y., Gololobov S. 2D Fast Poisson Solver for High-Performance Computing // Lecture Notes in Computer Science. – 2009. – Vol. 5698. – P. 112-120.
- [133] Kang M., et al. Water and Methanol Maser Survey of Protostars in the Orion Molecular Cloud Complex // The Astrophysical Journal Supplement Series. - 2013.
  - V. 209, I. 2. - Article Number 25.
- [134] Kang H., Kim K.-T., Byun D.-Y., Lee S., Park Y.-S. Simultaneous observation of water and class I methanol masers toward class II methanol maser sources // The Astrophysical Journal Supplement Series. - 2015. - V. 221, I. 1. - Article Number 6.
- [135] Kappeli R., Whitehouse S., Scheidegger S., Pen U.-L., Liebendorfer M. FISH: a three-dimensional parallel magnetohydrodynamics code for astrophysical applications // The Astrophysical Journal Supplement Series. 2011. V. 195, I. 2. Article Number 20.
- [136] Kappeli R., Mishra S. A well-balanced finite volume scheme for the Euler equations with gravitation – The exact preservation of hydrostatic equilibrium with arbitrary entropy stratification // Astronomy & Astrophysics. – 2016. – V. 587, A94.
- [137] Karni S. Hybrid Multifluid Algorithms // SIAM Journal on Scientific Computing.
   1996. V. 17, I. 5. P. 1019-1039.
- [138] Katz N., Weinberg D., Hernquist L. Cosmological simulations with TreeSPH // The Astrophysical Journal Supplement Series. - 1996. - V. 105. - P. 19-35.

- [139] Khim H., et al. Demographics of Isolated Galaxies along the Hubble Sequence // The Astrophysical Journal Supplement Series. - 2015. - V. 220, I. 1. - Article Number 3.
- [140] Khoperskov S.A., Vasiliev E.O., Sobolev A.M., Khoperskov A.V. The simulation of molecular clouds formation in the Milky Way // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. - 2013. - V. 428, I. 3. - P. 2311-2320.
- [141] Kim J., Park C., Richard Gott III J., Dubinski J. The Horizon Run N-Body Simulation: Baryon Acoustic Oscillations and Topology of Large-scale Structure of the Universe // The Astrophysical Journal. – 2009. – V. 701, I. 2. – P. 1547-1559.
- [142] Kim S., et al. The Extended Virgo Cluster Catalog // The Astrophysical Journal Supplement Series. - 2014. - V. 215, I. 2. - Article Number 22.
- [143] Kim W., Ostriker E. Amplification, Saturation, and Q Thresholds for Runaway: Growth of Self-Gravitating Structures in Models of Magnetized Galactic Gas Disks // The Astrophysical Journal. - 2001. - V. 559. - P. 70-95.
- [144] Klypin A., Trujillo-Gomez S., Primack J. Dark Matter Halos in the Standard Cosmological Model: Results from the Bolshoi Simulation // The Astrophysical Journal. - 2011. - V. 740, I. 2, 102 - P. 1-17.
- [145] Kravtsov A., Klypin A., Hoffman Y. Constrained Simulations of the Real Universe.
   II. Observational Signatures of Intergalactic Gas in the Local Supercluster Region // The Astrophysical Journal. - 2002. - V. 571. - P. 563-575.
- [146] Kritsuk A., et al. Comparing numerical methods for isothermal magnetized supersonic turbulence // The Astrophysical Journal. - 2011. - V. 737, 13.
- [147] Krumholz M.R., Klein R.I., McKee C.F., Bolstad J. Equations and Algorithms for Mixed-frame Flux-limited Diffusion Radiation Hydrodynamics // The Astrophysical Journal. - 2007. - V. 667. - P. 626-643.
- [148] Kulikov I., Lazareva G., Snytnikov A., Vshivkov V. Supercomputer Simulation of an Astrophysical Object Collapse by the Fluids-in-Cell Method // Lecture Notes in Computer Science. - 2009. - V. 5698. - P. 414-422.

- [149] Kulikov I. PEGAS: Hydrodynamical code for numerical simulation of the gas components of interacting galaxies // Book Series of the Argentine Astronomical Society. - 2013. - V. 4. - P. 91-95.
- [150] Kulikov I. GPUPEGAS: A New GPU-accelerated Hydrodynamic Code for Numerical Simulations of Interacting Galaxies // The Astrophysical Journal Supplements Series. - 2014. - V. 214, I. 1. - Article Number 12.
- [151] Kulikov I., Chernykh I., Snytnikov A., Protasov V., Tutukov A., Glinsky B. Numerical Modelling of Astrophysical Flow on Hybrid Architecture Supercomputers // In Parallel Programming: Practical Aspects, Models and Current Limitations (ed. M. Tarkov). - 2014. - P. 71-116.
- [152] Kulikov I.M., Chernykh I.G., Snytnikov A.V., Glinskiy B.M., Tutukov A.V. AstroPhi: A code for complex simulation of dynamics of astrophysical objects using hybrid supercomputers // Computer Physics Communications. - 2015. - V. 186. P. 71-80.
- [153] Kulikov I., Chernykh I. Glinskiy B., Weins D., Shmelev A. Astrophysics simulation on RSC massively parallel architecture // Proceedings - 2015 IEEE/ACM 15th International Symposium on Cluster, Cloud, and Grid Computing, CCGrid 2015. – 2015. – P. 1131-1134.
- [154] Kulikov I., Chernykh I., Nenashev V., Katysheva E. Numerical modeling of interacting galaxies on Intel Xeon Phi supercomputers // CEUR Workshop Proceedings. - 2015. - V. 1482. - P. 226-237.
- [155] Kulikov I., Vorobyov E. Using the PPML approach for constructing a lowdissipation, operator-splitting scheme for numerical simulations of hydrodynamic flows // Journal of Computational Physics. - 2016. - V. 317. - P. 318-346.
- [156] Kulikov I., Chernykh I., Tutukov A. A New Hydrodynamic Model for Numerical Simulation of Interacting Galaxies on Intel Xeon Phi Supercomputers // Journal of Physics: Conference Series. - 2016. - V. 719. - Article Number 012006.
- [157] Kulikov I., Chernykh I., Protasov V. Mathematical modeling of formation, evolution and interaction of galaxies in cosmological context // Journal of Physics: Conference Series. - 2016. - V. 722. - Article Number 012023.

- [158] Kurganov A., Tadmor E. New High-Resolution Central Schemes for Nonlinear Conservation Laws and Convection-Diffusion Equation // Journal of Computational Physics. - 2000. - V. 160. - P. 214-282.
- [159] Lepp S., Shull J.M. The kinetic theory of H<sub>2</sub> dissociation // The Astrophysical Journal. - 1983. - V. 270. - P. 578-582.
- [160] Li S., Li H., Cen R. CosmoMHD: a cosmological magnetohydrodynamics code // The Astrophysical Journal Supplement Series. - 2008. - V. 174. - P. 1-12.
- [161] Lloyd S. Least squares quantization in PCM // IEEE Transactions on Information Theory. - 1982. - V. 28, I. 2. - P. 129-137.
- [162] Lora-Clavijo F., Cruz-Osorio A., Guzman F. CAFE: a new relativistic MHD code // The Astrophysical Journal Supplement Series. - 2015. - V. 218, I. 2. - Article Number 24.
- [163] Lucy L.B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis // The Astrophysical Journal. – 1977. – V. 82. – P. 1013-1024.
- [164] Martin P., Keogh W., Mandy M. Collision-induced Dissociation of Molecular Hydrogen at Low Densities // The Astrophysical Journal. – 1998. – V. 499. – P. 793-798.
- [165] Maslov I.V., Gorshkov A.V. Deformation of high-speed meteor bodies by the atmosphere // European Journal of Physics. - 2012. - V. 33, I. 6, S17.
- [166] Mason J., Perez J.C., Cattaneo F., Boldyrev S. Extended scaling laws in numerical simulations of magnetohydrodynamic turbulence // The Astrophysical Journal Letters. - 2011. - V. 735, L26.
- [167] Mastropietro C., Burkert A. Simulating the Bullet Cluster // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. - 2008. - V. 389, I. 2. - P. 967-988.
- [168] Matthews L., Land V., Hyde T. Charging and coagulation of dust in protoplanetary plasma environments // The Astrophysical Journal. – 2012. – V. 744, I. 1, 8 – P. 1-12.
- [169] Matthias S. GRAPESPH: cosmological smoothed particle hydrodynamics simulations with the special-purpose hardware GRAPE // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. - 1996. - V. 278. - P. 1005-1017.

- [170] Mayer L., Governato F., Kaufmann T. The formation of disk galaxies in computer simulations // Advanced Science Letters. - 2008. - V. 1. - P. 7-27.
- [171] McCorquodale P., Colella P. A High-Order Finite-Volume Method for Conservation Laws on Locally Refined Grids // Communications in Applied Mathematics and Computational Science. - 2011. - V. 6. - P. 1-25.
- [172] McKee C.F., Li P.S., Klein R. Sub-Alfvenic Non-ideal MHD Turbulence Simulations with Ambipolar Diffusion. II. Comparison with Observation, Clump Properties, and Scaling to Physical Units // The Astrophysical Journal. – 2010. – V. 720. – P. 1612-1634.
- [173] Mendis D., Horanyi M. The Global Morphology of the Solar Wind Interaction with Comet Churyumov-Gerasimenko // The Astrophysical Journal. - 2014. - V. 794, I.
  1. - Article Number 14.
- [174] Milgrom M. A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis // The Astrophysical Journal. - 1983. - V. 270. - P. 365-370.
- [175] Mignone A., Plewa T., Bodo G. The Piecewise Parabolic Method for Multidimensional Relativistic Fluid Dynamics // The Astrophysical Journal. - 2005.
   - V. 160. - P. 199-219.
- [176] Mignone A., et al. PLUTO: a Numerical Code for Computational Astrophysics // The Astrophysical Journal Supplement Series. - 2007. - V. 170. - P. 228-242.
- [177] Mignone A., Striani E., Bodo G., Anjiri M. Fluid Instabilities in the Crab Nebula Jet: Results from Numerical Simulations // Astronomical Society of the Pacific Conference Series. - 2014. - V. 488. - P. 120-126.
- [178] Miller G., Colella P. A Conservative Three-Dimensional Eulerian Method for Coupled Solid-Fluid Shock Capturing // Journal of Computational Physics. - 2002.
  - V. 183. - P. 26-82.
- [179] Minchev I., Chiappini C., Martig M. Chemodynamical evolution of the Milky Way disk. I. The solar vicinity // Astronomy & Astrophysics. - 2013. - V. 558, A9. - P. 1-25.

- [180] Minchev I., Chiappini C., Martig M. Chemodynamical evolution of the Milky Way disk. II. Variations with Galactic radius and height above the disk plane // Astronomy & Astrophysics. - 2014. - V. 572, A92. - P. 1-19.
- [181] Mitchell N., Vorobyov E., Hensler G. Collisionless Stellar Hydrodynamics as an Efficient Alternative to N-body Methods // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. - 2013. - V. 428. - P. 2674-2687.
- [182] Mocz P., Vogelsberger M., Sijacki D., Pakmor R., Hernquist L. A discontinuous Galerkin method for solving the fluid and magnetohydrodynamic equations in astrophysical simulations // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2014. – V. 437, I. 1. – 397-414.
- [183] Moiseenko S., Bisnovatyi-Kogan G., Ardeljan N. A magnetorotational core-collapse model with jets // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2006. – V. 370, I. 1. – P. 501-512.
- [184] Murphy J., Burrows A. BETHE-Hydro: An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Multidimensional Hydrodynamics Code for Astrophysical Simulations // The Astrophysical Journal Supplement Series. - 2008. - V. 179. - P. 209-241.
- [185] Nelson A.F., Benz W., Adams F.C., Arnett D. Dynamics of Circumstellar Disks // The Astrophysical Journal. – 1998. – V. 502. – P. 342-371.
- [186] Ogino T., Walker R.J., Ashour-Abdalla M. A Three-Dimensional MHD Simulation of the Interaction of the Solar Wind With Comet Halley // Journal of Geophysical Research. - 1988. - V. 93, I. A9. - P. 9568-9576.
- [187] Omelchenko Y., Karimabadi H., Vu H. Advances in Multiscale Simulations of Solar Wind Interactions with the Earth's Magnetosphere // Astronomical Society of the Pacific Conference Series. - 2014. - V. 488. - P. 161-166.
- [188] Ortiz J.L., et al. Observation and Interpretation of Leonid Impact Flashes on the Moon in 2001 // The Astrophysical Journal. - 2002. - V. 576. - P. 567-573.
- [189] Orszag S., Tang C.M. Small scale structure of two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence // Journal of Fluid Mechanics. - 1979. -Vol. 90. - P. 129-143.

- [190] O'Shea B., et al. Adaptive Mesh Refinement Theory and Applications // Lectures Notes of Computer Science Engineering. – 2005. – V. 41. – P. 341-350.
- [191] Pakmor R., Springel V. Simulations of magnetic fields in isolated disc galaxies // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. - 2013. - V. 432, I. 1. - P. 176-193.
- [192] Pakmor R., Marinacci F., Springel V. Magnetic fields in cosmological simulations of disk galaxies // The Astrophysical Journal Letters. - 2014. - V. 783, L20.
- [193] Park C., Brown J. Fragmentation and spreading of a meteor-like object // The Astronomical Journal. – 2012. – V. 144, I. 6. – Article Number 184.
- [194] Petrov M., Berczik P. Simulation of the Gravitational Collapse and Fragmentation of Rotating Molecular Clouds // Astronomische Nachrichten. - 2005. - V. 326. - P. 505-513.
- [195] Pearcea F.R., Couchman H.M.P. Hydra: a parallel adaptive grid code // New Astronomy. - 1997. - V. 2. - P. 411-427.
- [196] Perez J.C., Boldyrev S. Numerical simulations of imbalanced strong magnetohydrodynamic turbulence // The Astrophysical Journal Letters. - 2010. -V. 710. - P. L63-L66.
- [197] Pfrommer C., Dursi J. Detecting the orientation of magnetic fields in galaxy clusters // Nature Physics. - 2010. - V. 6. - P. 520-526.
- [198] Pilkington K., et al. Metallicity gradients in disks. Do galaxies form inside-out? // Astronomy & Astrophysics. - 2012. - V. 540, A56. - P. 1-12.
- [199] Petrov M., Berczik P. Simulation of the gravitational collapse and fragmentation of rotating molecular clouds // Astronomische Nachrichten. – 2005. – V. 326, I. 7. – P. 505-513.
- [200] Ploeckinger S., Hensler G., Recchi S., Mitchell N., Kroupa P. Chemodynamical evolution of tidal dwarf galaxies. I. Method and IMF dependence // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. - 2014. - V. 437, I. 4. - P.3980-3993.
- [201] Ploeckinger S., Recchi S., Hensler G., Kroupa P. Chemodynamical evolution of tidal dwarf galaxies. II. The long-term evolution and influence of a tidal field // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. - 2015. - V. 447, I. 3. - P. 2512-2525.

- [202] Podkorytov D., Rodionov A., Sokolova O., Yurgenson A. Using Agent-Oriented Simulation System AGNES for Evaluation of Sensor Networks // Lecture Notes of Computer Science. - 2010. - Vol. 6235. - P. 247-250.
- [203] Pogorelov N., Borovikov S., Heerikhuisen J., Kim T., Zank G. Time-dependent Processes in the Sheath Between the Heliospheric Termination Shock and the Heliopause // Astronomical Society of the Pacific Conference Series. - 2014. - V. 488. - P. 167-178.
- [204] Polyachenko V.L., Polyachenko E.V., Strelnikov A.V. Stability criteria for gaseous self-gravitating disks // Astronomy Letters. - 1997. - V. 23. - P. 483-491.
- [205] Popov M., Ustyugov S. Piecewise parabolic method on local stencil for gasdynamic simulations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2007. V. 47, I. 12. P. 1970-1989.
- [206] Popov M., Ustyugov S. Piecewise parabolic method on a local stencil for ideal magnetohydrodynamics // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2008. – V. 48, I. 3. – P. 477-499.
- [207] Porth O., Xia C., Hendrix T., Moschou S., Keppens R. MPI-AMRVAC for solar and astrophysics // The Astrophysical Journal Supplement Series. - 2014. - V. 214, I. 1.
   - Article Number 4.
- [208] Price D.J. Smoothed Particle Hydrodynamics and Magnetohydrodynamics // Journal of Computational Physics. - 2012. - V. 231. - P. 759-794.
- [209] Protasov V., Serenko A., Nenashev V., Kulikov I., Chernykh I. High-Performance Computing in Astrophysical Simulations // Journal of Physics: Conference Series. – 2016. – V. 681. – Article Number 012022.
- [210] Prunet S., et al. Initial Conditions For Large Cosmological Simulations // The Astrophysical Journal Supplement Series. - 2008. - V. 178. - P. 179-188.
- [211] Recchi S., Spitoni E., Matteucci F., Lanfranchi G. The effect of differential galactic winds on the chemical evolution of galaxies // Astronomy & Astrophysics. - 2008. -V. 489, I. 2. - P. 555-565.
- [212] Recchi S. Chemodynamical Simulations of Dwarf Galaxy Evolution // Advances in Astronomy. - 2014. - V. 2014, 750754. - P. 1-30.

- [213] Richardson J., Jay Melosh H., Artemeiva N., Pierazzo E. Impact Cratering Theory and Modeling for the Deep Impact Mission: From Mission Planning to Data Analysis // Space Science Reviews. - 2005. - V. 117, I. 1. - P. 241-267.
- [214] Roediger E., Bruggen M. Ram pressure stripping in a viscous intracluster medium // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. - 2008. - V. 388, I.1. - P. L89-L93.
- [215] Rodrigues H. Modelling the motion of meteors in the Earth's atmosphere // European Journal of Physics. - 2013. - V. 34, I. 5. - P. 1135-1143.
- [216] Rodriguez C., Taylor G., Zavala R., Pihlstrom Y., Peck A. Hi observations of the supermassive binary black hole system in 0402+379 // The Astrophysical Journal. – 2009. – V. 697, I. 1. – P. 37-44.
- [217] Roe P. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference solvers // Journal of Computational Physics. - 1997. - V. 135. - P. 250-258.
- [218] Romanova M., Kurosawa R. Simulations of Accretion onto Magnetized Stars: Results of 3D MHD Simulations and 3D Radiative Transfer // Astronomical Society of the Pacific Conference Series. - 2014. - V. 488. - P. 127-133.
- [219] Ryu D., Ostriker J., Kang H., Cen R. A cosmological hydrodynamic code based on the total variation diminishing scheme // The Astrophysical Journal. – 1993. – V. 414. – P. 1-19.
- [220] Samland M., Hensler G., Theis Ch. Modeling the Evolution of Disk Galaxies. I. The Chemodynamical Method and the Galaxy Model // The Astrophysical Journal. - 1997. - V. 476. - P. 544-559.
- [221] Schaal K., et al . Astrophysical hydrodynamics with a high-order discontinuous Galerkin scheme and adaptive mesh refinement // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. - 2015. - V. 453, I.4. - P. 4278-4300.
- [222] Schaye J., et al. The EAGLE project: simulating the evolution and assembly of galaxies and their environments // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.
   2015. V. 446, I. 1. P. 521-554.

- [223] Schive H., Tsai Y., Chiueh T. GAMER: a GPU-accelerated Adaptive-Mesh-Refinement Code for Astrophysics // The Astrophysical Journal. – 2010. – V. 186. – P. 457-484.
- [224] Schneider E., Robertson B. Cholla: a new massively parallel hydrodynamics code for astrophysical simulation // The Astrophysical Journal Supplement Series. - 2015.
  - V. 217, I. 2. - Article Number 24.
- [225] Schweizer F. Merger-Induced Starbursts // Astrophysics and Space Science Library.
   2005. V. 329. P. 143-152.
- [226] Seager S., Sasselov D. Extrasolar Giant Planets Under Strong Stellar Irradiation // The Astrophysical Journal. - 1998. - V. 502. - P. 157-161.
- [227] Seager S., Sasselov D. Exoplanet Atmospheres // Annual Review Astronomy and Astrophysics. - 2010. - V. 48. - P. 631-672.
- [228] Selivanova S. Computing Clebsch-Gordan matrices with applications in elasticity theory // Logic, Computation, Hierarchies. - 2014. - P. 273-296
- [229] Shematovich V.I., Bisikalo D.V., Barabash S., Stenberg G. Monte Carlo study of interaction between solar wind plasma and Venusian upper atmosphere // Solar System Research. - 2014. - V. 48, I. 5. - P. 317-323.
- [230] Sijacki D., Springel V. Physical Viscosity in Smoothed Particle Hydrodynamics Simulations of Galaxy Clusters // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.
   - 2006. - V. 371. - P. 1025-1046.
- [231] Smethurst R., et al. Galaxy Zoo: evidence for diverse star formation histories through the green valley // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2015. – V. 450, I. 1. – P. 435-453.
- [232] Sol Alonso M., Lambas D., Tissera P., Coldwell G. Active galactic nuclei and galaxy interactions // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2007. V. 375, I. 3. P. 1017-1024.
- [233] Springel V., Hernquist L. Cosmological smoothed particle hydrodynamics simulations: the entropy equation // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. - 2002. - V. 333. - P. 649-664.

- [234] Springel V., Hernquist L. Cosmological smoothed particle hydrodynamics simulations: a hybrid multiphase model for star formation // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. - 2003. - V. 339, I. 2. - P. 289-311.
- [235] Springel V., et al. Simulations of the formation, evolution and clustering of galaxies and quasars // Nature. - 2005. - V. 435. - P. 629-636.
- [236] Springel V. The cosmological simulation code GADGET-2 // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. - 2005. - V. 364. - P. 1105-1134.
- [237] Springel V., Di Matteo T., Hernquist L. Modelling feedback from stars and black holes in galaxy mergers // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. - 2005.
  - V. 361, I. 3. - P. 776-794.
- [238] Springel V. E pur si muove: Galilean-invariant cosmological hydrodynamical simulations on a moving mesh // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.
   2010. V. 401. P. 791-851.
- [239] Steffen J., et al. Transit timing observations from Kepler VII. Confirmation of 27 planets in 13 multiplanet systems via transit timing variations and orbital stability // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. - 2012. - V. 428, I. 2. - P. 1077-1087.
- [240] Steinmetz M. Numerical Simulations of Galaxy Formation // Astrophysics and Space Science. – 1999. – V. 269-270, I. 0. – P. 513-532.
- [241] Stone J., et al. Athena: A New Code for Astrophysical MHD // The Astrophysical Journal Supplement Series. - 2008. - V. 178. - P. 137-177.
- [242] Sutherland R., Dopita M. Cooling functions for low-density astrophysical plasmas
   // The Astrophysical Journal Supplement Series. 1993. V. 88. P. 253-327.
- [243] Tasker E., Brunino R., Mitchell N. A test suite for quantitative comparison of hydrodynamic codes in astrophysics // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. - 2008. - V. 390. - P. 1267-1281.
- [244] Teyssier R. Cosmological hydrodynamics with adaptive mesh refinement. A new high resolution code called RAMSES // Astronomy & Astrophysics. 2002. V. 385.
   P. 337-364.

- [245] Teyssier R., et al. Full-sky weak-lensing simulation with 70 billion particles // Astronomy & Astrophysics. - 2009. - V. 497, I. 2. - P. 335-341.
- [246] Thacker R., et al. Smoothed particle hydrodynamics in cosmology: a comparative study of implementation // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2000. – V. 319. – P. 619-648.
- [247] Tielens A., Hollenbach D. Photodissociation regions. I Basic model. II A model for the Orion photodissociation region // The Astrophysical Journal. - 1985. - V. 291.
  - P. 722-754.
- [248] Toro E.F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. 1999. –
   Heidelberg:Springer-Verlag. 724 P.
- [249] Toomre A. On the gravitational stability of a disk of stars // The Astrophysical Journal. - 1964. - V. 139. - P. 1217-1238.
- [250] Toomre A. What amplifies the spirals. in "The Structure and Evolution of Normal Galaxies". - 1981. - Fall S. M., Lynden-Bell D., eds, Cambridge University Press, Cambridge. - 283 P.
- [251] van der Holst B., et al. CRASH: a block-adaptive-mesh code for radiative shock hydrodynamics—implementation and verification // The Astrophysical Journal Supplement Series. - 2011. - V. 194, I. 2. - Article Number 23.
- [252] Van Der Tak F., Van Dishoeck E. Limits on the cosmic-ray ionization rate toward massive young stars // Astronomy & Astrophysics. - 2000. - V. 358. - P. L79-L82.
- [253] Van Leer B. Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme, V. A Second Order Sequel to Godunov's Method // Journal of Computational Physics. - 1979. -V. 32. - P. 101-136.
- [254] Van Straalen B., Shalf J., Ligocki T., Keen N., Yang W.-S. Scalability challenges for massively parallel AMR applications // Parallel & Distributed Processing, 2009.
   - 2009. - P. 1-12.
- [255] Villaver E., Manchado A., Garcia-Segura G. The interaction of asymptotic giant branch stars with the interstellar medium // The Astrophysical Journal. – 2012. – V. 748, I. 2. – Article Number 94.

- [256] Vogelsberger M., et al. Introducing the Illustris Project: simulating the coevolution of dark and visible matter in the Universe // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. - 2014. - V. 444, I. 2. - P. 1518-1547.
- [257] Vogelsberger M., et al. Properties of galaxies reproduced by a hydrodynamic simulation // Nature. - 2014. - V. 509. - P. 177-182.
- [258] Vollmer B., Cayatte V., Balkowski C., Duschl W.J. Ram pressure stripping and galaxy orbits: The case of the Virgo cluster // The Astrophysical Journal. – 2001. – V. 561. – P. 708-726.
- [259] Vorobyov E., Theis Ch. Boltzmann moment equation approach for the numerical study of anisotropic stellar discs // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.
   2006. V. 373, I. 1. P. 197-208.
- [260] Vorobyov E., Theis Ch. Shape and orientation of stellar velocity ellipsoids in spiral galaxies // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2008. V. 383, I. 3.
   P. 817-830.
- [261] Vorobyov E., Recchi S., Hensler G. Self-gravitating equilibrium models of dwarf galaxies and the minimum mass for star formation // Astronomy & Astrophysics. – 2012. – V. 543. – Article Number A129.
- [262] Vorobyov E., Recchi S., Hensler G. Stellar hydrodynamical modeling of dwarf galaxies: simulation methodology, tests, and first results // Astronomy & Astrophysics.
   2015. Vol. 579. Article Number A9.
- [263] Vshivkov V., Lazareva G., Snytnikov A., Kulikov I., Tutukov A. Hydrodynamical code for numerical simulation of the gas components of colliding galaxies // The Astrophysical Journal Supplement Series. - 2011. - V. 194, I. 2. - Article Number 47.
- [264] Vshivkov V., Lazareva G., Snytnikov A., Kulikov I., Tutukov A. Computational methods for ill-posed problems of gravitational gasodynamics // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. - 2011. - V. 19. - P. 151-166.
- [265] Wadsley J.W., Stadel J., Quinn T. Gasoline: a flexible, parallel implementation of TreeSPH // New Astronomy. - 2004. - V. 9. - P. 137-158.

- [266] Wadsley J., Veeravalli G., Couchman H. On the treatment of entropy mixing in numerical cosmology // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. - 2008.
   - V. 387. - P. 427-438.
- [267] Walder R., Melzani M., Folini D., Winisdoerffer C., Favre J. Simulation of Microquasars: The Challenge of Scales // Astronomical Society of the Pacific Conference Series. - 2014. - V. 488. - P. 141-148.
- [268] Wang X., et al. Numerical study of the mechanism of explosive/impact welding using Smoothed Particle Hydrodynamics method // Materials & Design. - 2012.- V. 35. - P. 210-219.
- [269] Watersona N.P., Deconinck H. Design principles for bounded higher-order convection schemes a unified approach // Journal of Computational Physics. 2007.
   V. 224. P. 182-207.
- [270] Weingartner J., Draine B. Electron-Ion Recombination on Grains and Polycyclic Aromatic Hydrocarbons // The Astrophysical Journal. - 2001. - V. 563. - P. 842-852.
- [271] Willet K., et al. Galaxy Zoo 2: detailed morphological classifications for 304 122 galaxies from the Sloan Digital Sky Survey // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. - 2013. - V. 435, I. 4. - P. 2835-2860.
- [272] Willet K., et al. Galaxy Zoo: the dependence of the star formation-stellar mass relation on spiral disc morphology // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. - 2015. - V. 449, I. 1. - P. 820-827.
- [273] Wiersma R., Schaye J., Smith B. The effect of photoionization on the cooling rates of enriched, astrophysical plasmas // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.
   2009. - V. 393, I. 1. - P. 99-107.
- [274] Wiersma R., Schaye J., Theuns T., Dalla Vecchia C., Tornatore L. Chemical enrichment in cosmological, smoothed particle hydrodynamics simulations // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. - 2009. - V. 399, I. 2. - P. 574-600.
- [275] Xu H., et al. Comparisons of cosmological magnetohydrodynamic galaxy cluster simulations to radio observations // The Astrophysical Journal. 2012. V. 759, I. 1. Article Number 40.

- [276] Yalim M., Poedts S. 3D Global Magnetohydrodynamic Simulations of the Solar Wind / Earth's Magnetosphere Interaction // Astronomical Society of the Pacific Conference Series. - 2014. - V. 488. - P. 192-200.
- [277] Ye Q.-Z., et al. Bangs and meteors from the quiet comet 15p/finlay // The Astrophysical Journal. - 2015. - V. 814, I. 1. - Article Number 79.
- [278] Zel'dovich Ya.B. Gravitational instability: An approximate theory for large density perturbations // Astronomy & Astrophysics. - 1970. - V. 5. - P. 84-89.
- [279] Zha C.-S., Duffy T., Downs R., Mao H.-K., Hemley R. Sound velocity and elasticity of single-crystal forsterite to 16 GPa // Journal of Geophysical Research. – 1996. – V. 101, I. B8. – P. 17535-17545.
- [280] Zhang X., Shu C.-W. On positivity-preserving high order discontinuous Galerkin schemes for compressible Euler equations on rectangular meshes // Journal of Computational Physics. - 2010. - V. 229. - P. 8918-8934.
- [281] Ziegler U. Self-gravitational adaptive mesh magnetohydrodynamics with the NIRVANA code // Astronomy & Astrophysics. - 2005. - V. 435. - P. 385-395.