

На правах рукописи



ЧЕНЦОВ Евгений Петрович

Математическое моделирование колебательных процессов в структурно неоднородных средах

05.13.18 – математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Красноярск – 2018

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном научном учреждении «Федеральный исследовательский центр «Красноярский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук»

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор
Садовский Владимир Михайлович

Официальные оппоненты:

Кургузов Владимир Дмитриевич, доктор физико-математических наук, доцент, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук, г. Новосибирск, ведущий научный сотрудник

Чеверда Владимир Альбертович, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука Сибирского отделения Российской академии наук, г. Новосибирск, заведующий лабораторией многоволновых сейсмических исследований

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт горного дела им. Н.А. Чинакала Сибирского отделения Российской академии наук (ИГД СО РАН), г. Новосибирск

Защита состоится 29 января 2019 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 003.061.02 на базе ФГБУН ИВМиМГ СО РАН по адресу: 630090, г. Новосибирск, проспект Академика Лаврентьева, 6, тел. +7 (383) 330-71-59.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИВМиМГ СО РАН, <http://icmmg.nsc.ru>.

Автореферат разослан 8 ноября 2018 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета Д 003.061.02
на базе ИВМиМГ СО РАН, д.ф.-м.н.



Сорокин Сергей Борисович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Исследование деформационных и колебательных процессов в структурно неоднородных средах, таких как горные породы, представляет большой практический интерес на протяжении последних десятилетий. Для описания горных массивов широко используется представленный М. А. Садовским подход, согласно которому такая среда есть множество вложенных друг в друга блоков, разделенных податливыми прослойками. Деформируемость среды в таком подходе в основном описывается через деформируемость прослоек, а не блоков.

В связи с этим особый интерес представляет способ моделирования, в котором учитывается относительная толщина прослоек между блоками, обладающих набором механических параметров. Эти параметры в разных средах значительно варьируются, оказывая существенное влияние на процесс распространения волн в среде. Важной задачей является поиск метода моделирования прослоек, с помощью которого можно описать тот или иной характер межблочного материала: упругий, пластический или вязкий, пористый или сплошной, многофазный (например, флюидонасыщенный) или однофазный. Варьирование толщины, в свою очередь, значительно расширяет сферу применения моделей такого типа. При достаточно большой толщине прослойки модель блочной среды может описывать деформационные процессы в кирпичной кладке. Стремление увеличить сопротивляемость сооружений из блоков колебаниям (таким как землетрясения) побуждает исследователей развивать методы моделирования волновых процессов.

При изучении сред блочного типа исследователей интересует не только распространение волн, но и резонанс, возникающий при колебаниях определенного типа на собственной частоте. В таком случае амплитуда колебания блоков в среде растет, вызывая разрушение материала. Большое внимание здесь уделяется не только поиску резонансных частот, но и характеру возмущений, вызывающих резонанс. В результате анализа можно избежать возникновения резонанса там, где он нежелателен, и использовать его для разрушения структурно схожих с блочными средами материалов. Актуальным вопросом является как значение собственных частот, так и их практическая достижимость.

Целью исследования является применение математического моделирования для описания динамического поведения блочных сред, а также разработка вычислительных алгоритмов для используемых моделей, их программная реализация в виде комплекса программ.

Для достижения поставленной цели решаются следующие **задачи**:

1. Анализ распространения упругих волн в блочной среде с примени-

ем современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента;

2. Комплексное исследование резонансных частот в структурно неоднородных средах в части их практической достижимости с применением математического моделирования и вычислительного эксперимента;
3. Создание эффективных численных методов для реализации разработанных математических моделей;
4. Разработка комплекса программ для моделирования волновых процессов в блочных средах с применением высокопроизводительных вычислений.

Основным методом исследования в работе является вычислительный эксперимент, состоящий из следующих этапов: постановка задачи, создание адекватной математической модели, ее численная реализация с помощью конечно-разностных схем, разработка программного комплекса с использованием предложенного численного алгоритма, с помощью которого получены результаты моделирования.

Результаты, выносимые на защиту:

1. Математические методы моделирования колебательных процессов в двумерных блочных средах из упругих блоков, разделенных податливыми прослойками со сложными реологическими свойствами. Методы моделирования включают в себя постановку задачи, разработку математических моделей блочных сред и их обоснование, численную и программную реализацию модели, анализ результатов моделирования.
2. Численный алгоритм для нахождения решения систем уравнений, описывающих распространение волн в средах блочного типа.
3. Комплекс параллельных программ для суперкомпьютеров кластерной архитектуры, реализующий разработанный численный алгоритм.
4. Результаты анализа характерной собственной частоты вращательного движения блоков, определяемой исключительно значениями механических параметров модели. Данная частота является достижимой, что указывает на возможность ее практического использования в технических приложениях.

Личный вклад. Личный вклад автора состоит в следующем: исследование определяющих уравнений математических моделей на термодинамическую согласованность; включенное участие во всех этапах разработки вычислительного алгоритма и комплекса программ, в том числе – отладка и тестирование; проведение расчетов, обработка и анализ полученных результатов; подготовка и представление статей и докладов по теме работы. Садовскому В.М. принадлежат: постановка задачи, идеи задания определяющих уравнений моделей блочных сред и численного метода; предложены задачи для тестирова-

ния численного алгоритма. Садовская О.В. осуществляла распараллеливание вычислительного алгоритма и общее руководство по созданию комплекса программ.

Достоверность и обоснованность результатов. Достоверность и обоснованность представленных в диссертационной работе результатов обеспечены использованием фундаментальных законов механики деформируемого твердого тела. Они основаны на строгости вывода используемых моделей и выполнением для них законов сохранения, теоретическом обосновании разработанных численных алгоритмов и подтверждаются согласованностью одномерных расчетов с точными решениями. Двумерные расчеты качественно согласуются с экспериментальными и лабораторными исследованиями.

Научная новизна.

1. Разработаны математические методы моделирования для описания распространения волн и колебательных процессов в двумерной блочной среде, состоящей из упругих блоков и податливых прослоек. Прослойки при этом могут обладать различными реологическими свойствами. Рассмотрены следующие случаи: прослойки из упругого материала; прослойки являются вязкоупругими; разномодульные прослойки; пористые прослойки; флюидонасыщенные прослойки с упругим скелетом; флюидонасыщенные пористые прослойки с вязкоупругим скелетом.
2. Для определяющих уравнений прослоек разработан вычислительный алгоритм, основанный на схемах Годунова и Иванова. Полученный численный метод не обладает схемной диссипацией энергии и хорошо реализуем на программном уровне.
3. Разработан программный комплекс, позволяющий описывать распространение волн в блочной среде с реологически сложными прослойками. Проведенные расчеты показали, что изотропные свойства среды переходят в анизотропные по мере увеличения относительной толщины прослоек. Для модели блочной среды с флюидонасыщенными пористыми прослойками данный эффект выражен в меньшей степени, чем для модели с упругими прослойками.
4. С помощью дискретного моделирования колебательных процессов показано, что характерная собственная частота вращательного движения, зависящая только от механических параметров модели, является практически достижимой.

Практическая значимость. Разработанные математические модели и программный комплекс могут использоваться при описании колебательных процессов в геосредах, в том числе в насыщенной нефтью горной породе. На основе предложенного метода можно анализировать эффект разрушения

ледяного тороса – аналога блочной среды. Модели также могут быть использованы для анализа распространения волн в искусственных средах (например, кирпичной кладке).

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 136 страниц, включая 43 рисунка и 1 таблицу. Список используемой литературы содержит 195 наименований.

Апробация работы. Основные результаты исследований были представлены на следующих научных конференциях: Открытые конференции молодых ученых ИВМ СО РАН (Красноярск, 2014, 2015, 2016, 2017); XX Конференция молодых ученых ФИЦ КНЦ СО РАН (2017); XVIII, XIX, XX Международные научно-практические конференции “Решетневские чтения”, посвящ. годовщинам СибГАУ им. акад. М.Ф. Решетнева (Красноярск, 2014, 2015, 2016); XX Всероссийская конференция “Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики”, посвященная памяти К.И. Бабенко (Новороссийск, 2014); Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов-2015” (Москва, 2015); XXIV Всероссийская конференция по численным методам решения задач теории упругости и пластичности (Омск, 2015); XVI Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (Красноярск, 2015); VI ежегодная конференция математического сообщества Грузии (Грузия, Батуми, 2015); VI Международная конференция по численному анализу и приложениям “NAA 16” (Болгария, Лозенец, 2016); VIII и IX Международные конференции Евро-Американского консорциума по продвижению приложений математики в технических и естественных науках (Болгария, Албена, 2016, 2017).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 20 печатных работ; из них 4 – публикации в изданиях по списку ВАК, в том числе – зарегистрированный программный комплекс для численного моделирования динамических процессов в многоблочных средах на кластерных системах N2016615178.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 14-01-00130, 16-31-00078, 18-31-00100), гранта краевого государственного автономного учреждения “Красноярский краевой фонд поддержки научной и научно-технической деятельности” и программы по комплексным фундаментальным исследованиям №18 Президиума РАН.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении представлены цели и задачи диссертационной работы, ее актуальность, новизна и практическая значимость; описаны выносимые на защиту результаты.

В первой главе представлен обзор литературы по теме исследования. **Раздел 1.1** посвящен описанию различных подходов к моделированию структурно неоднородных сред, таких как горная порода или кирпичная кладка. **Раздел 1.2** представляет собой обзор методов численной реализации моделей блочной среды. **Раздел 1.3** содержит выводы по главе.

Вторая глава посвящена моделированию колебательных процессов в блочной среде на основе дискретных моделей, а также анализу резонансных частот с помощью спектральных портретов. В **разделе 2.1** приведена общая постановка исследуемой задачи. Дискретное моделирование процессов распространения упругих волн бесконечно малой амплитуды приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений $A\ddot{U} + B\dot{U} = F$, где U – вектор обобщенных координат, F – вектор внешних сил, A – симметричная положительно определенная матрица обобщенных масс, B – симметричная неотрицательно определенная матрица жесткости. Точками над символом обозначаются производные по времени.

Если вектор F зависит от времени периодически $F = \hat{F}e^{i\omega t}$ с частотой ω , то вектор $U = \hat{U}e^{i\omega t}$ – также периодический, причем $(B - \omega^2 A)\hat{U} = \hat{F}$. Исключение составляют собственные (резонансные) частоты, для которых условие периодичности U нарушается. Квадраты частот $\lambda = \omega^2$ являются корнями характеристического уравнения $\det(B - \lambda A) = 0$.

Для исследования поведения системы в окрестности резонансных частот строятся спектральные портреты матриц, технология построения которых описана в **разделе 2.2**. В теории колебаний спектральным портретом матрицы $C = A^{-1}B$ называется визуальное изображение множества дискретных собственных значений этой матрицы, которое представлено в комплексной плоскости. Для построения спектрального портрета в рамках данной работы вычисляются значения $s(\lambda) = 1/(\|C\| \cdot \|R(\lambda)\|)$, $R(\lambda) = (\lambda I - C)^{-1}$ с использованием спектральной матричной нормы в узлах некоторой сетки на плоскости комплексной переменной λ , с последующим построением картины линий уровня для $s(\lambda)$. Присвоив определенному диапазону цвета, будет получен спектральный портрет матрицы C . Быстрое изменение величины $s(\lambda)$ при приближении к собственной частоте указывает на сильную чувствительность системы к возмущениям, что в точности соответствует общим представлениям о резонансе. В данной работе спектральные портреты используются для визуального отделения собственных частот и анализа изменения амплитудного

вектора перемещений в их окрестности, а также в целях анализа практической достижимости собственных частот.

Раздел 2.3 посвящен моделированию продольных колебаний в моноатомной цепочке, n элементов которой соединены друг с другом пружинами одинаковой жесткости, обладают одинаковыми массами и равноудалены друг от друга. Полученные характеристические уравнения решаются аналитически; показано, что в пределе при стремлении числа элементов к бесконечности резонансные частоты стремятся к собственным частотам продольных колебаний в однородном упругом стержне со способом закрепления, соответствующим граничным условиям. Построенные спектральные портреты указывают на эквивалентность резонансных частот в том смысле, что при приближении к разным резонансным частотам характер изменения амплитуды колебаний одинаков.

Раздел 2.4 посвящен модели вращательно-поперечных колебаний в моноатомной цепочке. Здесь на элементы действуют поперечные силы Q_j и вращательные моменты R_j . Под воздействием сил и моментов элементы поворачиваются на малые углы φ_j и получают в поперечном направлении малые перемещения w_j . Граничные условия представлены уравнениями $w_1 + w_0 = 0$, $w_{n+1} + w_n = 0$, $\varphi_1 - \varphi_0 = 0$, $\varphi_{n+1} - \varphi_n = 0$ после введения двух дополнительных элементов с индексами $j = 0$ и $j = n + 1$; такой выбор определяется простотой получения резонансных частот в замкнутой форме. Уравнения движения в таком случае принимают вид

$$\begin{aligned} m\ddot{w}_j &= a \frac{w_{j-1} - 2w_j + w_{j+1}}{h^2} - a \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}}{2h} + Q_j, \\ J\ddot{\varphi}_j &= a \frac{w_{j+1} - w_{j-1}}{2h} - a \frac{\varphi_{j-1} + 2\varphi_j + \varphi_{j+1}}{4} + b \frac{\varphi_{j-1} - 2\varphi_j + \varphi_{j+1}}{h^2} + R_j, \end{aligned} \quad (1)$$

где коэффициент a характеризует линейную зависимость между перерезывающими силами и деформациями сдвига, коэффициент b – между моментами сил и кривизнами. Подстановка в однородные уравнения выражений $w_j = \hat{w} e^{i\omega t} \sin(j - 1/2)\alpha$, $\varphi_j = \hat{\varphi} e^{i\omega t} \cos(j - 1/2)\alpha$, $\alpha = \pi s/(n + 1)$ позволяет получить биквадратное уравнение для определения собственных частот цепочки. При варьировании длины цепочки выделяется характерная частота $\omega_0 = \sqrt{a/J}$, связанная с вращательным движением элементов, зависящая только от механических параметров среды и не зависящая от ее размера.

Для оценки достижимости резонансной частоты строятся спектральные портреты матриц для среды, эквивалентной цепочке из ледяных блоков (Рисунок 1). Полученные спектральные портреты указывают на практическую достижимость характерной резонансной частоты относительно других собственных частот колебания. Также показано, что уравнения

движения в пределе для бесконечной (плотной) цепочки фиксированной длины переходят в одномерные дифференциальные уравнения континуума Коссера.

Раздел 2.5 содержит выводы по главе.

Глава 3 посвящена непрерывным моделям блочных сред. В разделе 3.1 представлены одномерная и двумерная модели, в которых упругие блоки разделены упругими податливыми прослойками. В двумерном случае блоки в среде являются прямоугольниками со сторонами h_1 и h_2 , отделенными друг от друга прослойками толщиной δ_1 и δ_2 , соответственно. Движение каждого из блоков определяется уравнениями однородной изотропной упругой среды

$$\begin{aligned} \rho \dot{v}_1 &= \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2}, & \rho \dot{v}_2 &= \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2}, & \dot{\sigma}_{12} &= \rho c_2^2 (v_{2,1} + v_{1,2}), \\ \dot{\sigma}_{11} &= \rho c_1^2 (v_{1,1} + v_{2,2}) - 2\rho c_2^2 v_{2,2}, & \dot{\sigma}_{22} &= \rho c_1^2 (v_{1,1} + v_{2,2}) - 2\rho c_2^2 v_{1,1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь c_1 и c_2 – скорости продольных и поперечных упругих волн, ρ – плотность материала блока; индекс после запятой есть производная по следующей за ней пространственной переменной. Система записана относительно компонент тензора напряжений σ_{jk} и проекций вектора скорости v_k .

Напряженно-деформированное состояние упругой прослойки, параллельной оси x_1 , между блоками с номерами (k_1, k_2) и $(k_1 + 1, k_2)$ представлено с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений, учитывающих как массу прослойки, так и продольную и поперечную жесткости:

$$\begin{aligned} \rho' \frac{\dot{v}_1^+ + \dot{v}_1^-}{2} &= \frac{\sigma_{11}^+ - \sigma_{11}^-}{\delta_1}, & \frac{\dot{\sigma}_{11}^+ + \dot{\sigma}_{11}^-}{2} &= \rho' c_1^2 \frac{v_1^+ - v_1^-}{\delta_1}, \\ \rho' \frac{\dot{v}_2^+ + \dot{v}_2^-}{2} &= \frac{\sigma_{12}^+ - \sigma_{12}^-}{\delta_1}, & \frac{\dot{\sigma}_{12}^+ + \dot{\sigma}_{12}^-}{2} &= \rho' c_2^2 \frac{v_2^+ - v_2^-}{\delta_1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь c'_1, c'_2 и ρ' – скорости продольных и поперечных волн в прослойках и плотность материала, соответственно. Прослойка, расположенная вдоль оси x_2 , между блоками с номерами (k_1, k_2) и $(k_1, k_2 + 1)$ описывается с помощью уравнений

$$\begin{aligned} \rho' \frac{\dot{v}_2^+ + \dot{v}_2^-}{2} &= \frac{\sigma_{22}^+ - \sigma_{22}^-}{\delta_2}, & \frac{\dot{\sigma}_{22}^+ + \dot{\sigma}_{22}^-}{2} &= \rho' c_1^2 \frac{v_2^+ - v_2^-}{\delta_2}, \\ \rho' \frac{\dot{v}_1^+ + \dot{v}_1^-}{2} &= \frac{\sigma_{12}^+ - \sigma_{12}^-}{\delta_2}, & \frac{\dot{\sigma}_{12}^+ + \dot{\sigma}_{12}^-}{2} &= \rho' c_2^2 \frac{v_1^+ - v_1^-}{\delta_2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Индексы “+” и “–” относятся к границам верхнего (+) и нижнего (–) взаимодействующих блоков в уравнениях (3), правого (+) и левого (–) в уравнениях (4). Данные уравнения термодинамически согласованы с системой (2)

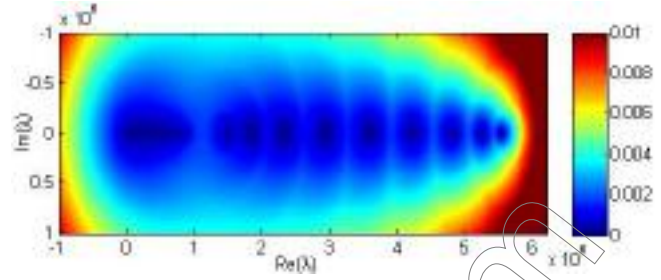


Рис. 1. Спектральный портрет матрицы

в том смысле, что для блочной среды в целом выполняется закон сохранения энергии, в котором кинетическая и потенциальная энергия среды равна суммам кинетических и потенциальных энергий блоков и прослоек.

Подразделы 3.1.4 и 3.1.5 описывают подходы к численной реализации представленной модели. Для численного решения системы (2)–(4) с заданными начальными данными и граничными условиями разработан вычислительный алгоритм, основанный на методе двуциклического расщепления по пространственным переменным. Для краткости представим определяющие уравнения в символическом виде

$$\dot{U} = A_1(U) + A_2(U), \quad (5)$$

где A_1 и A_2 – нелинейные дифференциально-разностные операторы, моделирующие одномерное движение блочной среды в направлении осей координат x_1 и x_2 , соответственно; U – векторная функция неизвестных значений, которая включает в себя компоненты вектора скорости и тензора напряжений в блоках и прослойках. Используя данные обозначения, метод расщепления на временном интервале $(t_k, t_k + \tau)$ включает четыре шага: решение одномерного уравнения в направлении x_1 на интервале $(t_k, t_k + \tau/2)$, аналогичное решение в направлении x_2 , пересчет решения в направлении x_2 на временном интервале $(t_k + \tau/2, t_k + \tau)$ и аналогичный пересчет в направлении x_1 на таком же временном интервале:

$$\begin{aligned} \dot{U}^{(1)} &= A_1(U^{(1)}), & U^{(1)}(t_k) &= U(t_k), \\ \dot{U}^{(2)} &= A_2(U^{(2)}), & U^{(2)}(t_k) &= U^{(1)}(t_k + \tau/2), \\ \dot{U}^{(3)} &= A_2(U^{(3)}), & U^{(3)}(t_k + \tau/2) &= U^{(2)}(t_k + \tau/2), \\ \dot{U}^{(4)} &= A_1(U^{(4)}), & U^{(4)}(t_k + \tau/2) &= U^{(3)}(t_k), \end{aligned} \quad (6)$$

Решение в момент времени $t_k + \tau$ определяется как $U(t_k + \tau) = U^{(4)}(t_k + \tau)$. Тем самым, на каждом этапе решается одномерная система уравнений в блоках с внутренними граничными условиями на межблочных границах. В отличие от обычного расщепления, такой метод имеет второй порядок точности по пространственным переменным и времени, если при решении одномерных систем используются схемы второго порядка. Одномерные системы в блоках решаются на основе схемы распада разрыва Годунова на равномерной сетке с реконструкцией решения с максимально возможным шагом по времени, определяемым критерием Куранта-Фридрихса-Леви: $c\tau = \max(\Delta x_1, \Delta x_2)$, Δx_j – шаг сетки в направлении x_j . Для уравнений используется метод Иванова, который представляет собой модификацию метода Годунова. Отличительной особенностью применяемого метода является возможность предваритель-

ного задания искусственной диссипации энергии в схеме, обеспечивающей вычислительную устойчивость алгоритма.

Разделы 3.2 – 3.6 расширяют сферу применимости моделей блочной среды, учитывающих различный характер прослоек. При описании используется подход, в котором взаимодействие между блоками описывается с помощью реологических схем.

Раздел 3.2 посвящен модели вязкоупругих прослоек. Вязкоупругость моделируется с помощью реологической схемы Пойнтинга-Томсона, которая изначально использовалась для описания поведения

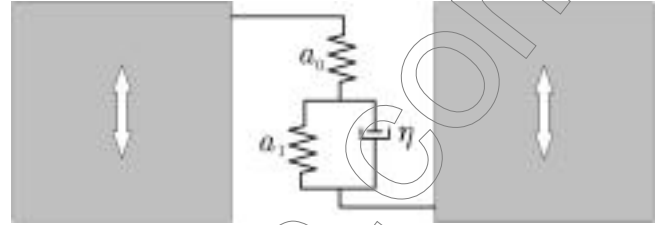


Рис. 2. Реологическая схема Пойнтинга-Томсона

стеклянных волокон. Модель представляет собой комбинацию двух основных реологических моделей – модели Максвелла и Кельвина-Фойхта, соединенных последовательно в реологической схеме. Такая схема используется для описания поперечных волн. Уравнения прослойки согласно реологической схеме (рисунок 2) примут вид

$$a_2 \frac{\dot{q}^+ + \dot{q}^-}{2} = \frac{v^+ - v^-}{\delta} - a_1 \frac{\dot{\sigma}^+ + \dot{\sigma}^-}{2}, \quad \frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} = \frac{q^+ + q^-}{2} + \eta a_2 \frac{\dot{q}^+ + \dot{q}^-}{2},$$

где η – модуль вязкости, q – упругое напряжение, a_0, a_1 – коэффициенты упругости для верхней и нижней пружин, соответственно. Для модели выписаны определяющие уравнения и на основе метода Иванова составлен вычислительный алгоритм.

В параграфе 3.3 для описания распространения продольных волн представлена модель разномодульных прослоек, определяющая поведение микроразрушенной (гранулированной) среды. Наличие жесткого контакта в реологической схеме позволяет моделировать прослойки, по-разному сопротивляющиеся растяжению и сжатию. В общем виде реологическая схема представлена рисунком 3. Определяющие уравнения прослойки примут вид

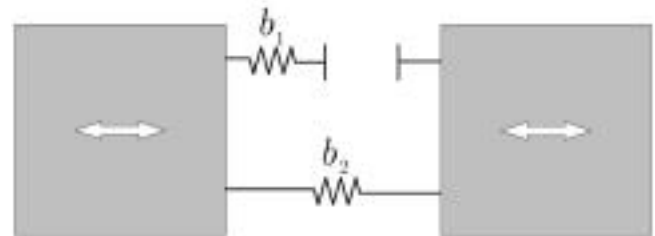


Рис. 3. Реологическая схема пористой и разномодульной прослойки

$$\rho \frac{\dot{v}^+ + \dot{v}^-}{2} = \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{\delta}, \quad \dot{\varepsilon} = \frac{v^+ - v^-}{\delta}, \quad \frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} = b_2 \varepsilon + b_1 \pi(\varepsilon).$$

Здесь ε – деформация прослойки, π – проектор на отрицательную полуось действительной оси, b_1, b_2 – коэффициенты жесткости пружин. Для модели проверена выполнимость уравнения баланса энергии. Для численной реали-

зации использована схема, основанная на методе Иванова; представлен вычислительный алгоритм. Незначительное изменение в модели – задание начального зазора в контакте – позволяет моделировать пористую среду (**раздел 3.4**). При достижении определенного значения деформации ε_0 контакты замыкаются, моделируя процесс схлопывания пор. Вычислительный алгоритм основан на аналоге численного метода для модели разномодульных прослоек.

Дальнейшее усложнение свойств прослоек представлено **разделом 3.5**, в котором для описания поведения флюидонасыщенных прослоек используется модель Био. Наличие движущейся жидкости в упругом скелете влияет на механические свойства и в то же время изменение механического состояния пор в скелете влияет на поведение жидкости внутри пор. Определяющие уравнения для такой системы записаны в виде

$$\begin{aligned} (\rho_s + \rho_a) \frac{\dot{v}_1^+ + \dot{v}_1^-}{2} - \rho_a \dot{w}_1 &= \frac{\sigma_{12}^+ - \sigma_{12}^-}{\delta_2}, \quad \frac{\dot{\sigma}_{12}^+ + \dot{\sigma}_{12}^-}{2} = \mu \frac{v_1^+ - v_1^-}{\delta_2}, \\ (\rho_f + \rho_a) \dot{w}_1 - \rho_a \frac{\dot{v}_1^+ + \dot{v}_1^-}{2} &= s_{1,1}, \quad s_1 = -\theta p, \\ (\rho_s + \rho_f) \frac{\dot{v}_2^+ + \dot{v}_2^-}{2} &= \frac{\sigma_{22}^+ - \sigma_{22}^-}{\delta_2}, \quad \dot{s}_1 = Q \frac{v_2^+ - v_2^-}{\delta_2} + R w_{1,1}, \\ \frac{\dot{\sigma}_{22}^+ + \dot{\sigma}_{22}^-}{2} &= \frac{v_2^+ - v_2^-}{\delta_2} + Q w_{1,1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь θ – пористость скелета, $\theta = \delta_2^0 / \delta_2$, δ_2^0 – площадь пор, δ_2 – площадь сечения; $\rho_s = (1 - \theta) \rho_s^0$ – плотность пористого скелета; $\rho_f = \theta \rho_f^0$ – плотность жидкой фазы; ρ_s^0 – плотность материала скелета; ρ_f^0 – плотность жидкости; ρ_a – плотность присоединенной массы, s_1 – нормальное напряжение в жидкой фазе, Q и R – модули упругости, характеризующие связь “пористый скелет – жидкость”. В (7) четыре уравнения представляют собой модификацию закона Гука с дополнениями в правой части за счет наличия жидкости, в то время как оставшиеся три уравнения описывают поведение самой жидкости. Показана термодинамическая согласованность модели. Особое внимание уделено стыкам горизонтальных и вертикальных прослоек, поскольку для последних должен выполняться гидродинамический аналог закона Кирхгофа, согласно которому сумма входящих и исходящих потоков в узле равна нулю. Закон используется для исключения появления стоков и источников в местах пересечения прослоек.

Раздел 3.6 содержит дальнейшее развитие модели флюидонасыщенных прослоек и является комбинацией предложенных ранее моделей. Прослойки здесь являются флюидонасыщенными с учетом эффекта схлопывания пор, причем пористый скелет обладает вязкоупругими свойствами. Схлопывание приводит к купированию жидкости внутри поры и остановке течения в про-

слойке. Для численной реализации модели разработан алгоритм, основанный на смешанном подходе Годунова – Иванова.

Раздел 3.7 содержит выводы по главе.

В **главе 4** описан комплекс параллельных программ, реализующий представленные в главе 3 вычислительные алгоритмы, а также приведены результаты вычислительных экспериментов. **Раздел 4.1** содержит информацию о структуре программного комплекса, основных входных параметрах и технологии вычисления искомых величин. Описано распараллеливание алгоритма, основанное на декомпозиции блочной среды: каждый процесс осуществляет расчет цепочки блоков вдоль оси x_1 . Количество используемых процессов связано с размерами вычислительной области.

В **разделе 4.2** приведена информация об эффективности вычислений. При предложенном способе параллелизации алгоритма целесообразно исследовать не ускорение работы программы, а время коммуникаций T^{comm} и отношение времени коммуникации к времени выполнения всей программы T^{comm}/T^{ex} . Показано, что при выбранной схеме взаимодействия процессов и типе обменов зависимости T^{comm} и T^{comm}/T^{ex} от количества используемых процессов близки к линейным.

Раздел 4.3 содержит результаты численных расчетов для двух задач с использованием двух моделей: модели блочной среды с упругими прослойками и модели блочной среды с флюидонасыщенными прослойками, имеющими пористый вязкоупругий скелет. Блочная среда во всех случаях состоит из 81×81 блоков, каждый блок содержит 20×20 узлов.

Первой исследуемой задачей (**пункт 4.3.1**) является поворот центрального блока вокруг центра масс. В начальный момент времени напряжения и скорости в блочной среде (за исключением центрального блока) являются нулевыми. В центральном блоке задается поле скоростей, соответствующее повороту блока вокруг центра масс с заданной угловой скоростью ω_0 . Граничные эффекты вокруг исследуемой блочной среды игнорируются, а сами границы являются отражающими. Для визуализации волн изображены линии уровня касательного напряжения σ_{12} .

На рисунке 4 показаны линии уровня σ_{12} в момент времени $t = 1.86$ мс для блочных сред с толщиной упругих прослоек $\delta = 0.05, 0.25$ и 2 мм. При относительно тонких прослойках фронт волны является круговым, что указывает на изотропные свойства среды. По мере роста толщины прослоек фронты волн получают эллиптическую форму, указывающую на появление анизотропии. Рисунок 5 демонстрирует линии уровня касательного напряжения для модели флюидонасыщенных пористых прослоек. Сравнительный анализ указывает на сохранение изотропных свойств относительно упругой модели.

При этом зафронтовые колебания, характерные для вращения блоков, в модели флюидонасыщенных пористых прослоек проявляются значительно слабее. Полученные результаты качественно согласуются с экспериментальными исследованиями.

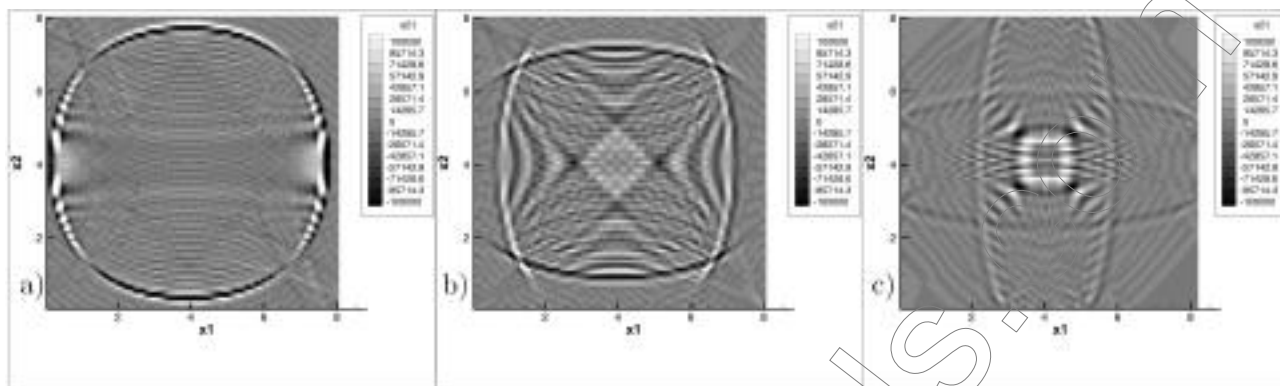


Рис. 4. Мгновенный поворот центрального блока в массиве. Модель среды с упругими прослойками. Линии уровня касательного напряжения $\bar{\sigma}_{12}$ в момент времени 1.86 мс. Толщина прослойки δ : а) 0.05 мм; б) 0.25 мм; в) 2 мм.

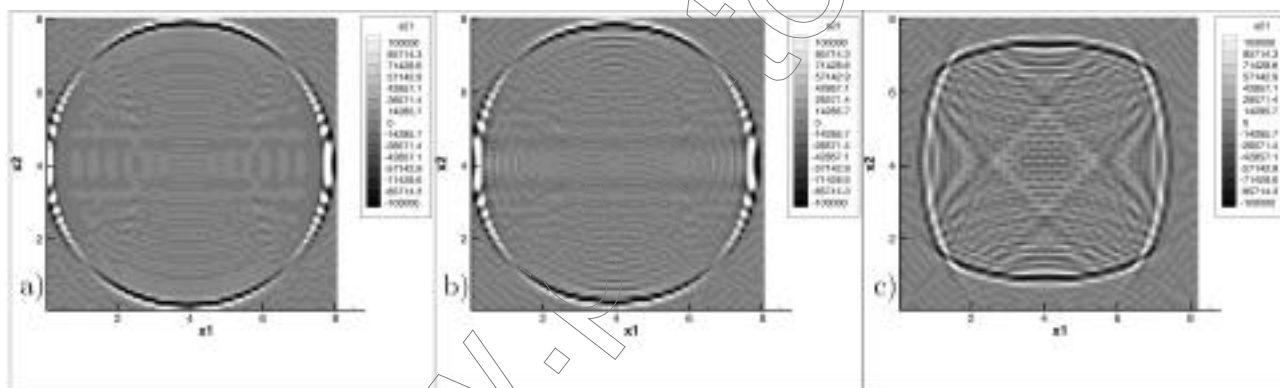


Рис. 5. Мгновенный поворот центрального блока в массиве. Модель среды с флюидонасыщенными прослойками, имеющими вязкоупругий пористый скелет. Линии уровня касательного напряжения $\bar{\sigma}_{12}$ в момент времени 1.86 мс. Толщина прослойки δ : а) 0.05 мм; б) 0.25 мм; в) 2 мм.

Для модели флюидонасыщенных пористых прослоек также вычислена циркуляция вокруг блоков для сред с различной толщиной в момент времени $t = 1.86$ мс (Рисунок 6). По мере утолщения прослоек взаимно перпендикулярные потоки, расположенные под углом 45 градусов к осям координат, усиливаются, расширяясь по мере приближения к границам расчетной области.

Вторая задача описана в пункте 4.3.2. Здесь изучено поведение блочной среды при воздействии локализованного вращательного момента на левой границе. Блок, находящийся по центру на левой границе, мгновенно подвергается сосредоточенному моменту сил, эквивалентному воздействию вращательного момента. Граничные условия на остальной части границы идентичны граничным условиям первой задачи, а блочная среда состоит из такого же количества

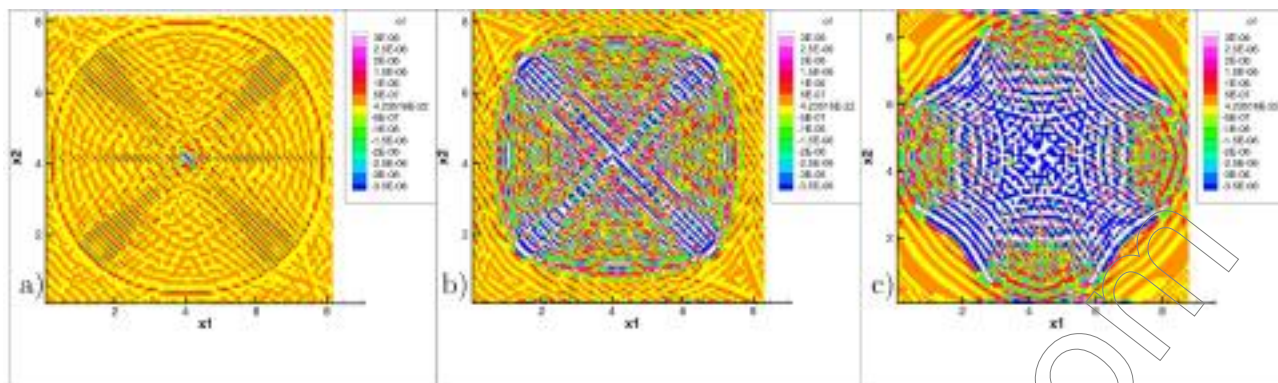


Рис. 6. Мгновенный поворот центрального блока в массиве. Модель среды с флюидонасыщенными прослойками, имеющими вязкоупругий пористый скелет. Циркуляция потока в прослойках cir в момент времени 1.86 мс. Толщина прослойки δ : а) 0.25 мм; б) 2 мм; в) 8 мм.

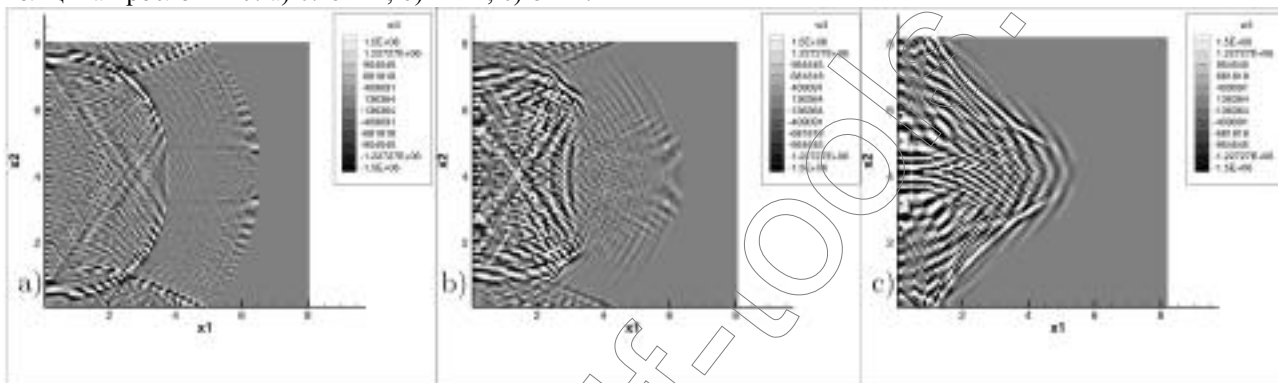


Рис. 7. Воздействие локализованного вращательного момента на левой границе расчетной области. Модель среды с упругими прослойками. Линии уровня угловой скорости $\bar{\omega}$ в момент времени 1.86 мс. Толщина прослойки δ : а) 0.05 мм; б) 0.25 мм; в) 2 мм.

блоков. Рисунок 7, демонстрирующий линии уровня угловой скорости для модели с упругими прослойками, указывает на поведение среды, аналогичное поведению в первой задаче. Для модели с флюидонасыщенными пористыми прослойками исследовано влияние эффекта схлопывания пор на движение жидкости. При сильном начальном воздействии поры схлопываются, а жидкость не формирует поток. Если силу воздействия снизить (схлопывание пор не происходит), образуется два ярко выраженных потока; полученный результат качественно согласуется с лабораторными данными.

В **заключении** представлены основные результаты диссертационной работы и обозначены планы дальнейших исследований.

Список основных публикаций по теме диссертации

Статьи в ведущих научных журналах, включенных в перечень ВАК:

1. Sadovskii, V.M. Analysis of oscillation processes in a blocky medium by means of continuous models / V. M. Sadovskii, E. P. Chentsov // AIP Conf. Proc. – 2016. – Vol. 1773. – 080003-1 - 08003-9.
2. Sadovskii, V.M. Discrete modeling of oscillatory processes in a blocky

medium / V. M. Sadosvkii, E. P. Chentsov // Lect. Notes Com. Sc. – 2017. – Vol. 10187. – P. 583-590.

3. Chentsov, E.P. Modeling of wave processes in a blocky medium with fluid-saturated porous interlayers / E.P. Chentsov, V.M. Sadovskii, O.V. Sadovskaya // AIP Conf. Proc. – 2017. – Vol. 1895. – 080002-1 - 080002-10.

Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ:

4. Садовский В. М., Садовская О. В., Ченцов Е. П. Программный комплекс для численного моделирования динамических процессов в многоблочных средах на кластерных системах (2Dyn_Blocks_MPI) / 24.03.2016 / Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. Рег. N 2016615178. Роспатент.

Статьи в рецензируемых научных журналах:

5. Ченцов, Е.П. Использование дискретных моделей для исследования резонанса в сплошных средах / Е.П. Ченцов // Молодой ученый. – 2015. – Т. 91, №11. – С. 120-125.

6. Садовский, В. М. Анализ резонансного возбуждения слоистых и блочных сред на основе дискретных моделей / В.М. Садовский, Е.П. Ченцов // Вычисл. методы и программирование. – 2015. – Т. 16. – С. 318-327.

7. Ченцов, Е.П. Модели блочной среды для исследования колебательных процессов в структурно неоднородных средах / Е.П. Ченцов // Молодой ученый. – 2016. – Т. 115, №11. – С. 79-84.