

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи



Белозеров Александр Александрович

**Консервативная модель и численные методы для
течений многофазных сжимаемых сред**

Специальность 05.13.18 –

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н.

Роменский Евгений Игоревич

Новосибирск – 2016

Оглавление

Введение	5
Глава 1. Математическая модель	19
1.1. Общая формулировка математической модели многофазной сжимаемой среды	20
1.1.1. Параметры состояния для описания многофазной среды	20
1.1.2. Определяющие уравнения	21
1.1.3. Замыкающие соотношения	29
1.1.4. Определяющие уравнения в терминах параметров фаз	33
1.1.5. Сравнение с моделью типа Байера-Нунциато	34
1.2. Одномерные уравнения для четырёхфазной среды в изэнтропическом приближении	37
1.2.1. Определяющие уравнения	38
1.2.2. Уравнение состояния для смеси жидкостей и газов	39
1.3. Уравнения течения двухфазной газожидкостной смеси в трубах	40
1.3.1. Общие трёхмерные уравнения для течений двухфазной сжимаемой среды	40
1.3.2. Вывод осреднённых уравнений для описания течений газожидкостной смеси в трубах	44
1.3.3. Анализ характеристических свойств линеаризованной системы уравнений модели трубных течений	51
Глава 2. Численный алгоритм	55
2.1. Одномерные уравнения для четырёхфазной среды в изэнтропическом приближении	56
2.1.1. Метод вычисления потоков на границах между расчётными ячейками	57

2.1.2.	TVD-реконструкция	57
2.1.3.	Вычисление энтропии смеси	58
2.1.4.	Неявная численная процедура для учёта эффекта релаксации давлений	59
2.1.5.	Схема для объёмных концентраций, сохраняющая однородный фон начальных данных	61
2.2.	Уравнения течения двухфазной газожидкостной смеси в трубах .	64
2.2.1.	Интегрирование по времени: метод Рунге-Кутты 3-го порядка	65
2.2.2.	WENO-реконструкция 5-го порядка по пространству . . .	66
2.2.3.	Модификация схемы для описания течений с малыми значениями чисел Маха	68
2.2.4.	Граничные условия	69
2.2.5.	Учёт эффекта релаксации давлений	73
Глава 3.	Программная реализация и численные эксперименты	76
3.1.	Комплекс программ	77
3.2.	Изэнтропическая модель для четырёхфазной сжимаемой среды .	80
3.2.1.	Задача Римана для четырёхфазной смеси модельных жидкостей	80
3.2.2.	Эффект мгновенной релаксации давлений для «нефтяной смеси»	82
3.2.3.	Задача с разрывом в начальной концентрации	83
3.2.4.	Задача Римана для смеси семи модельных жидкостей . .	86
3.3.	Моделирование трубных течений	87
3.3.1.	Задача Water Faucet	88
3.3.2.	Задача сепарации	91
3.3.3.	Течение газожидкостной смеси в наклонной трубе	93
3.3.4.	Задача о V-трубе	94

3.3.5. Задача о L-трубе	97
3.3.6. Пробковый режим течения газожидкостной смеси в горизонтальной трубе	99
Заключение	104
Список литературы	107
Приложение А. Вывод уравнений осреднённой модели трубных течений	115
Приложение Б. Приведение системы уравнений трубных течений к характеристической форме	121

Введение

Математическое моделирование течений многофазных сжимаемых сред представляется интерес с точки зрения многих научных дисциплин и имеет большой потенциал для практического применения в различных инженерных областях. Под многофазной средой понимается сплошная среда, состоящая из нескольких компонент (фаз) с различными физическими характеристиками. Задачи моделирования многофазных течений встречаются в таких областях как метеорология и океанология, а также при использовании гидродинамического подхода к описанию различных геологических процессов, таких как конвективный массоперенос мантийных пород, фильтрационные течения и др. Другие области применения связаны с решением разнообразных инженерных и технологических задач: в области проектирования охладительных систем, разработки и описания динамики различных композитных материалов, сыпучих смесей и технологических жидкостей. Отдельно стоит выделить нефтегазовую отрасль, где вычислительные модели многофазных сред востребованы как с точки зрения разведки месторождений полезных ископаемых и моделирования процессов в нефтеносных пластах, так и с точки зрения проектирования и оптимизации сложных систем транспортировки углеводородов.

Несмотря на актуальность и востребованность данной тематики, многие вопросы, связанные с физическими, математическими и вычислительными аспектами моделирования многофазных течений, требуют дальнейших исследований. К настоящему времени наиболее широко развиты исследования в построении и изучении моделей двухфазных сред. Пионерской работой в данном направлении является работа Х.А. Рахматулина [1], в которой введено понятие взаимопроникающих континуумов. Данный подход получил дальнейшее развитие в многочисленных работах как российских, так и зарубежных авторов (см. книгу [2] и ссылки в ней). Классический подход к построению двухфазных моделей основан на предположении, что многофазное течение может рассмат-

риваться как множество взаимодействующих континуумов, или фаз, и описывается параметрами, полученными применением процедур осреднения к параметрам фаз. Поведение каждой фазы при этом описывается законами сохранения массы, импульса и энергии, а межфазное взаимодействие учитывается путём добавления в правые части законов сохранения специальных алгебраических или дифференциальных членов [2–6]. Одной из проблем классических моделей, полученных методом осреднения, является сложность корректного описания межфазной границы.

Распространённым подходом является использование моделей с одним давлением для описания течений двухфазных сжимаемых сред, которые до сих пор лежат в основе индустриальных программных комплексов. Обычно системы определяющих уравнений таких моделей имеют смешанный эллипτικο-гиперболический тип, что делает затруднительной корректную постановку начально-краевых задач для такой системы [1, 7]. Расчёты, проведённые для подобных моделей на грубых сетках или с использованием диссипативных численных схем, могут обеспечивать правдоподобные результаты, однако при измельчении расчётной сетки и использовании более точных методов результаты расчётов демонстрируют отсутствие сходимости численного решения [8]. Для преодоления трудностей, связанных с некорректностью начально-краевых постановок, были предложены различные «гиперболизированные» модификации модели с одним давлением [9]. Гиперболичность системы определяющих уравнений в таких моделях обычно достигается путём введения дополнительных дифференциальных слагаемых в правые части исходных законов сохранения импульса фаз, которые называют виртуальными массовыми силами, межфазным давлением и др. В итоге система уравнений модели является гиперболической, однако её приведение к симметрическому виду, как и представление всех уравнений системы в дивергентной форме, оказывается невозможным, что осложняет применение модифицированной модели для исследования разрывных решений, в том числе задач с ударными волнами и контактными разрывами.

Напрямую получить гиперболические модели для описания двухфазных сред позволяет применение общего вариационного подхода [10], а также подхода, основанного на методе законов сохранения, развитого Л.Д. Ландау при описании динамики сверхтекучего гелия, который заключается в выборе потоковых членов в определяющих уравнениях таким образом, чтобы обеспечить выполнение закона сохранения энергии [11].

Методы, основанные на вариационном подходе, широко применялись для построения различных моделей многофазных и неоднородных сред [12–14], однако недостаток данного подхода связан с невозможностью однозначного выделения из энергии среды кинетической и внутренней составляющих. Однозначное разбиение энергии на две составляющих невозможно вследствие того, что внутренняя энергия многофазной среды включает также кинетическую энергию относительного движения фаз. Данная особенность влечёт трудности при определении лагранжиана. В работах [15–18] приводится построение гиперболических моделей двухфазных сред на основе принципа Гамильтона.

Построение моделей двухфазных сред на основе метода законов сохранения описано в работах В.Н. Доровского и др. [19–22]. Возникающие при этом уравнения также имеют ряд недостатков. В частности, в получаемых решениях оказывается затруднительным определить индивидуальные плотности фаз. Вследствие этого, характеристики предельных состояний (скорости звука, теплоемкости и т.д.) при исчезающей концентрации одной из фаз оказываются совпадающими для обоих предельных случаев. Кроме этого, не все уравнения модели типа Доровского могут быть записаны в дивергентной форме.

Другой подход связан с моделью с двумя давлениями, предложенной в работе Байера и Нунциато [23]. Согласно данному подходу, две среды, составляющие двухфазную смесь, описываются собственными системами законов сохранения, а межфазное взаимодействие моделируется специальными членами в правых частях законов сохранения массы и импульса фаз. Модель Байера-Нунциато и различные её модификации были всесторонне изучены в большом

количестве работ и использовались для решения ряда практических задач, см., например, работы [24–26] и ссылки в них. Несмотря на то, что модели данного типа являются гиперболическими, не все их определяющие уравнения можно представить в дивергентной форме, что приводит к вышеупомянутым трудностям при моделировании разрывных решений, а также осложняет использование современных высокоточных вычислительных методов для численной реализации модели. Обобщение подхода Байера-Нунциато на случай многофазной среды с количеством фаз больше двух изучалось лишь в немногих работах, например [27]. Одномерная модель, предложенная в этой работе, представляет собой обобщение модели типа Байера-Нунциато для сжимаемой двухфазной среды на случай трёхфазной смеси.

Таким образом, можно сказать, что несмотря на многочисленные исследования, на настоящий момент нет единого общепринятого подхода к построению математических моделей для описания течений многофазных сжимаемых сред, а существующие широко используемые подходы обладают упомянутыми выше недостатками: негиперболичность системы уравнений и наличие уравнений, не представимых в дивергентной форме. Основной задачей при конструировании новой математической модели многофазной среды, таким образом, следует считать одновременное выполнение трёх условий: 1) гиперболичность системы определяющих уравнений (или симметрическая гиперболичность); 2) дивергентность всех определяющих уравнений; 3) согласованность математической модели с законами термодинамики. Эти свойства обеспечивают математическую основу для постановки начально-краевых задач, а также открывают возможности для разработки высокоточных численных алгоритмов. Определяющих уравнений для описания течений многофазных сжимаемых сред с количеством фаз больше двух, удовлетворяющей всем трём перечисленным свойствам, до сих пор не было предложено.

В данной работе для построения модели течений многофазной сжимаемой среды автором использован подход термодинамически согласованных систем

законов сохранения [28, 29], развиваемый в научной школе академика С. К. Годунова. Суть подхода состоит в том, чтобы сформулировать систему законов сохранения, описывающих ту или иную физическую систему, таким образом, чтобы закон сохранения энергии можно было получить из неё как следствие. Такую систему можно привести к симметрической форме в терминах так называемого производящего потенциала и производящих переменных, притом условие принадлежности системы к классу симметрических гиперболических по Фридрихсу систем сводится к условию выпуклости внутренней энергии как функции параметров описываемой среды, которая подлежит определению. В рамках данного подхода многие классические гиперболические системы уравнений математической физики, такие как уравнения газовой динамики, уравнения магнитной гидродинамики и др., могут быть представлены в форме термодинамически согласованных систем. В недавних работах [30–35] данный подход был успешно применён для построения моделей двухфазных течений, в том числе с учётом фазового перехода.

Целью первой части настоящей работы является обобщение упомянутого подхода для построения вычислительной модели многофазной смеси с произвольным количеством фаз и изучение её свойств. В работе рассмотрен случай одноэнтропийного приближения, приемлемого для описания течений с малыми вариациями температур фаз. Общая модель строится для случая трёхмерного течения и произвольного количества фаз, однако в качестве примера рассматриваются одномерные уравнения для описания четырёхфазной смеси, которые могут иметь приложения в области моделирования геофизических процессов. Для этого частного случая приводится построение вычислительного алгоритма и рассматривается ряд численных экспериментов, призванных продемонстрировать соответствие результатов вычислений математическим свойствам уравнений.

Вторая часть работы посвящена разработке вычислительной модели течений двухфазной газожидкостной смеси в трубах. Моделирования многофазных

течений в трубах сложной геометрии представляет интерес в первую очередь с точки зрения задач оптимизации транспортировки по трубопроводам, возникающих в нефтегазовой сфере. Для моделирования двухфазных трубных течений в нефтегазовой индустрии наиболее часто используется одна из двух одномерных нестационарных моделей [36]: упрощённая модель дрейфа и двухжидкостная модель. Особенностью модели дрейфа является то, что определяющие уравнения в ней, а именно законы сохранения массы фаз и закон сохранения полного импульса, дополняются алгебраическим соотношением, связывающим скорости фаз. Это дополнительное соотношение содержит ряд параметров, имеющих эмпирический характер и подлежащих определению для каждой конкретной задачи [37], что составляет основной недостаток модели дрейфа. В двухжидкостной модели в число определяющих уравнений входят уравнения баланса импульса для каждой фазы. В моделях такого типа обычно используется приближение одного давления, в связи с чем возникают уже упомянутые проблемы, связанные с гиперболичностью двухфазных моделей с одним давлением [38]. В некоторых работах, так же как в статьях по моделированию общих двухфазных течений, обсуждается вопрос введения дополнительных членов уравнений, обеспечивающих гиперболичность [39, 40].

В диссертации приводятся уравнения модели газожидкостных трубных течений, полученной на основе общей модели двухфазных смесей с двумя давлениями [32]. Уравнения полученной модели имеют дивергентный вид и образуют гиперболическую систему, что позволяет применить эффективные высокоточные численные методы.

Различные методы высокого порядка точности для задач гидродинамики с разрывными решениями появились вследствие развития классического метода первого порядка, основанного на решении задачи о распаде произвольного разрыва, предложенного С.К. Годуновым [41]. Диссипативные свойства методов первого порядка делают их малоэффективными при моделировании разрывных решений, требуя использования расчётных сеток с большим количеством яче-

ек, поэтому дальнейшее развитие методов было связано с повышением порядка аппроксимации. С.К. Годуновым было показано, что невозможно построить линейную монотонную разностную схему выше первого порядка аппроксимации, в связи с чем одним из путей развития высокоточных методов стало построение различных нелинейных схем, в той или иной степени обеспечивающих монотонность решения. Примером являются различные схемы на основе принципа невозрастания полной вариации решения, или TVD-схемы (Total Variation Diminishing) [42], где повышение порядка численной схемы достигается с помощью полиномиальных реконструкций величин и применения функций-ограничителей, или «лимитеров» для выполнения условия TVD. Развёрнутый обзор современных вычислительных методов на основе подхода TVD представлен в книге [43].

Дальнейшее развитие подхода TVD для моделирования разрывных решений задач гиперболического типа привело к появлению так называемых существенно неосциллирующих (квазимонотонных), или ENO (Essentially Non-Oscillatory) схем [44]. Суть подхода ENO состоит в использовании интерполяционного полинома для вычисления значений искомых величин на границах ячеек. Интерполяционный полином выбирается из нескольких возможных вариантов для данной ячейки на основе анализа гладкости решения, и порядок метода определяется количеством возможных полиномов. Дальнейшее развитие и повышение эффективности ENO-схем связано с широко используемыми на настоящий момент WENO-схемами (Weighted Essentially Non-Oscillatory) [45, 46], использующими усовершенствованный способ построения интерполяционного полинома. Для каждой расчётной ячейки выбирается не один полином, как в случае ENO, а используется комбинация всех возможных полиномов с некоторыми весовыми коэффициентами. На практике схемы на основе методов ENO и WENO позволяют получать не осциллирующие вблизи разрывов решения при произвольном порядке аппроксимации на гладких решениях.

В последнее время распространено применение высокоточных методов для

расчёта начальных данных для задачи о распаде разрыва в сочетании с алгоритмами высокого порядка для решения обыкновенных дифференциальных уравнений для увеличения порядка аппроксимации по времени. Для системы законов сохранения вида

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{Q}(\mathbf{U})$$

можно записать конечно-объёмную дискретизацию в пространственной ячейке $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ в виде

$$\frac{d\mathbf{U}_i}{dt} = -\frac{\mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}}{\Delta x} + \mathbf{Q}(x_i, \mathbf{U}_i). \quad (1)$$

На текущем временном слое правые части уравнений (1) известны. Значение $\mathbf{Q}(x_i, \mathbf{U}_i)$ вычисляется как функция значений параметров с предыдущего временного слоя, а разности потоков через границы ячеек $\mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}$ рассчитываются с использованием одного из упомянутых методов. Таким образом, решение исходной системы сводится к решению (1) как системы обыкновенных дифференциальных уравнений по временной переменной t . В работах [47–51] для решения задач гиперболического типа успешно применяются алгоритмы на основе различных модификаций высокоточных TVD- и WENO-схем в сочетании с методами типа Рунге-Кутты для интегрирования по времени.

В настоящей работе для решения определяющих дифференциальных уравнений предложенных моделей построены вычислительные алгоритмы на основе методов Рунге-Кутты-TVD (RK-TVD) и Рунге-Кутты-WENO (RK-WENO). Для расчёта начальных данных задачи Римана используется TVD-реконструкция с лимитером типа minmod [43] и полиномиальная WENO-реконструкция пятого порядка [46]. Интегрирование по времени осуществляется с помощью одного из SSPRK-методов (Strong Stability Preserved Runge-Kutta) третьего порядка. Детальное описание методов данного типа приведено в работе [52].

Для сформулированных уравнений многофазных течений и газожидкостных трубных течений в работе приведено решение серии тестовых задач. Ре-

зультаты численных экспериментов для общей модели многофазных течений продемонстрировали адекватность модели ожидаемым физическим явлениям. Решение тестовых задач для трубных газожидкостных течений носило поисковый характер, целью которого была оценка возможности применения модели для описания различных режимов трубных течений, в том числе пробковых течений. В работе рассмотрены задачи моделирования пробковых течений двух типов: пробковых течений, обусловленных сложной геометрией трубы, и гидродинамических пробковых течений. В первом случае речь идёт об образовании периодического режима течения в трубе с наличием изгибов, в которых под действием силы тяжести скапливается более тяжёлая жидкая фаза, блокирующая поток газа. Механизм образования гидродинамического пробкового течения связан с действием сил трения и развитием неустойчивости межфазной границы стратифицированного течения в горизонтальных трубах. Описание течений обоих типов имеет важное прикладное значение, в частности, для разработки и оптимизации трубопроводных систем и всесторонне изучается как экспериментально, так и с точки зрения численного моделирования [53–58]. Приведённые в настоящей работе результаты расчётов показывают, что предложенная вычислительная модель способна качественно описывать сложные переходные течения смеси жидкости и газа, однако достижение количественной согласованности с экспериментальными данными требует дальнейших исследований.

Цели и задачи диссертационной работы. Целью диссертационной работы является разработка термодинамически согласованной математической модели течений многофазной сжимаемой среды в случае произвольного количества фаз, обладающей следующими свойствами: определяющие уравнения модели имеют дивергентную форму и образуют гиперболическую систему; построение математической модели трубных газожидкостных течений, позволяющей описывать движение смеси в трубах сложной геометрии с учётом процессов межфазного взаимодействия; построение вычислительного алгоритма для численного решения уравнений предложенных моделей; разработка комплек-

са программ на основе численного алгоритма и проведение расчётов с целью валидации математических моделей и вычислительного алгоритма.

Для достижения поставленных целей были решены следующие задачи:

1. Построение математической модели многофазных сжимаемых течений в случае произвольного количества фаз в одноэнтропийном приближении, основываясь на подходе термодинамически согласованных систем, применённом ранее для построения моделей двухфазных сред [32].
2. Вывод нестационарных осреднённых одномерных уравнений для описания трубных течений с учётом эффектов межфазного трения и релаксации давлений фаз на основе модели двухфазной сжимаемой среды путём применения процедур осреднения по сечению трубы.
3. Разработка вычислительного алгоритма на основе конечно-объёмных методов высокого порядка точности Рунге-Кутты-TVD, Рунге-Кутты-WENO, а также модификаций базового алгоритма для учёта эффектов межфазного взаимодействия и более точного решения задач с наличием контактного разрыва.
4. Реализация вычислительного алгоритма в виде комплекса программ, позволяющего проводить численные эксперименты по расчёту начально-краевых задач для сформулированных моделей.
5. Валидация математических моделей и вычислительных алгоритмов на классических тестовых задачах.

Научная новизна. В работе сформулирована новая термодинамически согласованная математическая модель для описания течений многофазной сжимаемой среды с произвольным количеством фаз. Система определяющих дифференциальных уравнений модели является гиперболической, а все уравнения системы записываются в дивергентной форме. Построена модель трубных течений сжимаемых газожидкостных смесей с двумя давлениями. Разработаны

высокоточные численные алгоритмы для решения уравнений предложенных моделей. Показана применимость модели трубных течений для решения важных с практической точки зрения задач пробковых течений в трубопроводах.

Теоретическая и практическая значимость. Предложенные математические модели способствуют развитию теоретических аспектов моделирования многофазных сжимаемых сред, а также исследованию практически важных задач в области геофизики и нефтегазовой индустрии. В работе продемонстрирована возможность достоверного описания с помощью сформулированной модели различных режимов трубных течений, в том числе пробковых течений, что имеет важное практическое значение для задач оптимизации трубопроводных систем и транспортировки углеводородов и может найти применение при разработке промышленных симуляторов. Развиваемый в работе подход и предложенные модели могут быть использован для построения более сложных моделей многофазных течений с учётом межфазного массообмена и химических реакций.

Положения, выносимые на защиту:

1. Сформулирована модель течений многофазной сжимаемой среды с произвольным количеством фаз в приближении общей энтропии смеси. Определяющие дифференциальные уравнения модели имеют дивергентную форму и представляют собой термодинамически согласованную гиперболическую систему.
2. Получена нестационарная одномерная осреднённая модель двухфазных газожидкостных трубных течений с различными давлениями фаз. Дифференциальные уравнения модели имеют дивергентную форму и образуют гиперболическую систему.
3. Разработан вычислительный алгоритм на базе высокоточных методов Рунге-Кутты-TVD, Рунге-Кутты-WENO для численного решения начально-краевых задач для предложенных систем уравнений.

4. Создана вычислительная модель газожидкостных трубных течений, включающая определяющие уравнения, численные методы и комплекс программ.
5. На серии тестовых задач показана применимость модели для расчёта пробковых трубных течений, обусловленных сложной геометрией трубы, и гидродинамических пробковых течений.

Степень достоверности и апробация результатов. Предложенные в работе математические модели получены на основе подхода, обеспечивающего гиперболичность уравнений модели и их согласованность с законами термодинамики. Для построения вычислительных алгоритмов использованы методы адекватные математическим свойствам систем определяющих уравнений. Разработанный комплекс вычислительных программ прошёл верификацию на основе решения классических тестовых задач. Программная реализация алгоритмов и интерпретация результатов численных экспериментов осуществлялась с использованием современных средств разработки ПО, обработки и визуализации данных.

По материалам диссертации опубликовано 6 работ [59–64], 4 из которых [59–62] – в рецензируемых изданиях, входящих в перечень ВАК. Результаты работы были представлены на следующих международных конференциях:

- 14th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2015), Родос, Греция, 23 – 29 сентября 2015
- IMA Conference on Numerical Methods for Simulation, Оксфорд, Великобритания, 1 - 4 сентября 2015
- The 13th Asian Symposium on Visualization, Новосибирск, 22 – 26 июня 2015
- European Workshop on High Order Nonlinear Numerical Methods for Evolutionary PDEs: Theory and Applications (HONOM 2015), Тренто, Италия,

16 – 20 марта 2015

- Advanced Mathematics, Computations and Applications 2014 (AMCA-14), Новосибирск, 8 – 11 июня 2014
- 11th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2013), Родос, Греция, 21 – 27 сентября 2013

Развёрнутые доклады по результатам диссертационной работы были представлены на различных научных семинарах институтов Сибирского отделения РАН, в том числе:

- Семинар отдела термогазодинамики Института теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН под руководством заведующего отделом, д.т.н. Терехова В.И.
- Объединенный семинар Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН и кафедры вычислительной математики Новосибирского государственного университета под руководством д.ф.-м.н. Ильина В.П.
- Семинар лаборатории дифференциальных уравнений и смежных вопросов анализа Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН под руководством д.ф.-м.н. Белоносова В.С.
- Семинар лаборатории фильтрации Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН под руководством д.ф.-м.н. Шелухина В.В.
- Семинар «Волны в неоднородных средах» кафедры гидродинамики механико-математического факультета Новосибирского государственного университета под руководством д.ф.-м.н. Макаренко Н.И.

Личный вклад автора. Основные научные результаты диссертационной работы получены автором лично. Личный вклад автора состоит в участии

в формулировке математических моделей, построении вычислительных алгоритмов, разработке пакетов программ, а также в постановке, проведении и интерпретации результатов численных экспериментов. В опубликованных в соавторстве работах личный вклад автора заключается в участии на всех этапах работы.

Благодарности. Автор выражает благодарность научному руководителю д.ф.-м.н. Роменскому Е. И., к.ф.-м.н. Пешкову И. М. Автор глубоко признателен к.ф.-м.н. Лебедевой Н. А. за поддержку работы и помощь при формулировке и анализе задач моделирования трубных газожидкостных течений, а также к.ф.-м.н. Лукьянову А. А. за плодотворное обсуждение результатов работы.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка литературы и двух приложений. Общий объём диссертации составляет 125 страниц с 23 рисунками и 3 таблицами. Список литературы включает 83 наименования.

Глава 1

Математическая модель

В данной главе описываются развиваемые в работе математические модели. В разделе 1.1 описывается общая модель течения многофазной сжимаемой смеси с произвольным количеством фаз. Предложенные уравнения получены как естественное обобщение уравнений модели двухфазной среды, сформулированной в работе [32]. Определяющие уравнения модели и описание их свойств приводятся в подразделе 1.1.2. Изначально записываются уравнения с нулевыми правыми частями, не учитывающие диссипативные процессы. Полученная система допускает дополнительный закон сохранения, которым является закон сохранения энергии. Для такой системы, следуя теории термодинамически согласованных систем законов сохранения [29], удаётся определить производящий потенциал и производящие переменные, в терминах которых система приводится к симметричной форме. Условие принадлежности полученной системы к классу симметрических гиперболических по Фририхсу систем сводится к условию выпуклости внутренней энергии смеси как функции параметров течения, подлежащей определению. Следующим шагом построения математической модели является учёт процессов межфазного взаимодействия путём включения дополнительных членов в правые части уравнений системы. В подразделе 1.1.3 описывается завершающий этап построения модели – формулировка замыкающих соотношений. В подразделе 1.1.4 приводится представление сформулированной системы в эквивалентном виде в терминах параметров фаз. В подразделе 1.1.5 проводится сравнительный анализ предложенной модели с общей моделью типа Байера-Нунциато.

Раздел 1.2 содержит описание частного случая предложенной математической модели течений многофазной сжимаемой среды с количеством фаз равным четырём, на примере которого в главе 3 проводится численное исследование мо-

дели.

Раздел 1.3 посвящён построению математической модели трубных течений газожидкостных смесей. На основе общей трёхмерной модели двухфазной среды [32], приведённой в подразделе 1.3.1, формулируются нестационарные осреднённые одномерные уравнения для описания трубных течений. Вывод определяющих уравнений модели трубных течений путём применения процедуры осреднения, а также определение замыкающих соотношений описаны в подразделе 1.3.2. В подразделе 1.3.3 приводится анализ характеристических свойств полученной системы уравнений, используемый для построения вычислительного алгоритма в главе 2.

1.1. Общая формулировка математической модели многофазной сжимаемой среды

1.1.1. Параметры состояния для описания многофазной среды

Многофазная смесь рассматривается как сплошная среда, состоящая из нескольких компонент, или фаз, каждая из которых характеризуется собственными параметрами состояния, такими как плотность, скорость и температура. Смесь в целом характеризуется осреднёнными параметрами фаз. Кроме того, для учёта многофазного характера течения вводятся некоторые дополнительные параметры.

Рассматривается многофазная сжимаемая смесь N фаз. Фаза с номером k характеризуется набором собственных параметров: объёмной концентрацией α_k , плотностью ρ_k и вектором скорости u_i^k ($i = 1, 2, 3$). При этом всегда выполнено условие $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N = 1$. Вышеперечисленные параметры описывают перенос массы. Для описания тепловых процессов используется приближение общей энтропии смеси S . Такое допущение оправдано при рассмотрении процессов с малыми вариациями температур фаз, когда нет необходимости учитывать

межфазный теплообмен.

Определим теперь соответствующие параметры, характеризующие смесь в целом. Плотность смеси определяется как $\rho = \alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2 + \dots + \alpha_N\rho_N$. Вводя массовые концентрации $c_k = \alpha_k\rho_k/\rho$, ($k = 1, \dots, N$, $c_1 + c_2 + \dots + c_N = 1$), определим среднюю скорость $u_i = c_1u_i^1 + c_2u_i^2 + \dots + c_Nu_i^N$.

Дополнительными кинематическими параметрами являются относительные скорости. Для определения относительных скоростей выделяется одна из фаз, пусть это будет фаза с номером N . Движение остальных фаз характеризуется их скоростью по отношению к скорости выделенной фазы: $w_i^1 = u_i^1 - u_i^N$, $w_i^2 = u_i^2 - u_i^N$, ..., $w_i^{N-1} = u_i^{N-1} - u_i^N$.

Таким образом, имеем полный набор параметров, описывающих течение многофазной сжимаемой смеси:

$$u_1, u_2, u_3, w_1^1, w_2^1, w_3^1, \dots, w_1^{N-1}, w_2^{N-1}, w_3^{N-1}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N-1}, \rho, c_1, c_2, \dots, c_{N-1}, S.$$

Все остальные параметры можно получить из данных параметров с помощью описанных ниже законов термодинамики.

1.1.2. Определяющие уравнения

В этом разделе формулируется гиперболическая система законов сохранения для описания многофазной сжимаемой смеси, полученная как обобщение уравнений модели двухфазной среды, предложенной в работе [32]. Классические законы сохранения массы, импульса и энергии дополняются уравнениями, описывающими изменение введенных выше параметров, характеризующих многофазную смесь.

Приведём здесь трёхмерную систему уравнений двухфазной сжимаемой среды из работы [32] без учёта диссипативных членов в терминах введенных выше параметров при $N = 2$, на основе которой будет строиться обобщение:

$$\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho S u_k}{\partial x_k} = 0,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho \alpha_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho \alpha_1 u_k}{\partial x_k} &= 0, \\
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_k}{\partial x_k} &= 0, \\
\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i u_k + \rho^2 E_\rho + \rho w_i E_{w_k})}{\partial x_k} &= 0, \quad i = 1, 2, 3, \\
\frac{\partial \rho c_1}{\partial t} + \frac{\partial (\rho c_1 u_k + \rho E_{w_k})}{\partial x_k} &= 0, \\
\frac{\partial w_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_k w_k + E_{c_1})}{\partial x_i} &= 0.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь E – обобщённая внутренняя энергия смеси, заданная определённым образом как функция параметров течения.

Система законов сохранения для описания процессов без диссипации

Рассмотрим течение жидкости в декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 . Ниже формулируется гиперболическая система законов сохранения и изучаются её математические свойства. На данном этапе не рассматриваются диссипативные процессы, которые будут учтены позже путём включения правых частей в некоторые уравнения системы. Полная система законов сохранения записывается в терминах следующих независимых переменных

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N-1}, \rho, u_i, c_1, c_2, \dots, c_{N-1}, w_1^i, w_2^i, \dots, w_{N-1}^i, S.$$

Предположим, что обобщённая внутренняя энергия E определена как функция от α_j, c_j, w_j^i ($j = 1, \dots, N-1; i = 1, 2, 3$), ρ и S , тогда полная система законов сохранения для описания течений многофазной сжимаемой среды без учёта диссипативных процессов записывается в виде

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho S u^k}{\partial x_k} &= 0, \\
\frac{\partial \rho \alpha_j}{\partial t} + \frac{\partial \rho \alpha_j u^k}{\partial x_k} &= 0, \quad j = 1, \dots, N-1, \\
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^k}{\partial x_k} &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho u^l}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^l u^k + \rho^2 E_\rho \delta_k^l + \rho w_n^l E_{w_n^k})}{\partial x_k} &= 0, \quad l = 1, 2, 3, \\
\frac{\partial \rho c_j}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^k c_j + \rho E_{w_j^k})}{\partial x_k} &= 0, \quad j = 1, \dots, N-1, \\
\frac{\partial w_j^k}{\partial t} + \frac{\partial(u^l w_j^l + E_{c_j})}{\partial x_k} &= 0, \quad j = 1, \dots, N-1.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

При записи уравнений использовано соглашение о суммировании по повторяющемуся индексу. В данной формулировке система записана в терминах параметров смеси. Классические законы сохранения дополняются уравнениями для относительных скоростей в дивергентной форме, которые определяются указанным образом для обеспечения выполнения закона сохранения энергии. Данная форма уравнений используется для обоснования свойства гиперболичности по Фридрихсу для системы определяющих уравнений. В разделе 1.1.4 будет приведена эквивалентная форма полной системы с учётом диссипативных процессов в терминах индивидуальных параметров фаз, которая является более удобной для построения вычислительного алгоритма и более наглядной с точки зрения законов механики.

Система (1.2) имеет два важных свойства, позволяющих представить её в симметричной форме в терминах производящего потенциала и переменных. Если при этом производящий потенциал является выпуклой функцией, полученная система принадлежит классу симметрических гиперболических по Фридрихсу систем [65, 66]. Во-первых, для относительных скоростей выполняется тождество:

$$\frac{\partial w_k^j}{\partial x_n} - \frac{\partial w_n^j}{\partial x_k} = 0, \quad j = 1, \dots, N-1; \quad k, n = 1, 2, 3, \tag{1.3}$$

которое может быть получено путём вычитания уравнения для w_n^j , продифференцированного по x_k , из уравнения для w_k^j , продифференцированного по x_n .

В результате имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w_k^j}{\partial x_n} - \frac{\partial w_n^j}{\partial x_k} \right) = 0,$$

и если равенство (1.3) выполняется при $t = 0$, то оно выполняется и в любой

момент времени $t > 0$.

Вторым замечательным свойством рассматриваемой системы является то, что её решение всегда удовлетворяет основному термодинамическому тождеству. Как следствие, закон сохранения энергии всегда выполнен, и может быть получен из уравнений системы (1.2) как дополнительный закон сохранения. Получить его можно суммированием шести уравнений системы (1.2), умноженных соответственно на

$$q_\omega = T = E_S, q_j = E_{\alpha_j} (j = 1, \dots, N-1), q_0 = E - SE_S - VE_V - c_j E_{c_j} - \frac{u_n u_n}{2},$$

$$u^l (l = 1, 2, 3), \theta_j = E_{c_j} (j = 1, \dots, N-1), J_k^j = \rho E_{w_j^k} (j = 1, \dots, N-1, k = 1, 2, 3)$$

и тождества (1.3), умноженного на $\rho u^l E_{w_j^k}$:

$$\rho u^l E_{w_j^k} \left(\frac{\partial w_j^k}{\partial x_n} - \frac{\partial w_j^n}{\partial x_k} \right) = 0.$$

В итоге получаем уравнение в дивергентной форме:

$$\frac{\partial \rho(E + u^l u^l / 2)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^k (E + u^l u^l / 2) + \Pi_k)}{\partial x_k} = 0, \quad (1.4)$$

где Π_k – вектор потока энергии, определённый следующим образом:

$$\Pi_k = u^k p + \rho u^k w_l^n E_{w_n^k} + \rho E_{c_j} E_{w_k^j},$$

а $p = \rho^2 E_\rho$. Теперь перепишем систему (1.2) в терминах производящего потенциала и переменных. Такая переформулировка позволяет привести исходную систему к симметричной форме. Так называемые производящие переменные вводятся как сопряжённые к консервативным переменным $(\rho, \rho u_i^k, \rho \alpha_k, \rho c_k, w_i^k, \rho S)$ относительно преобразования Лежандра полной энергии смеси, а для определения производящего потенциала L используется тождество:

$$\begin{aligned} d\rho \left(E + \frac{u_l u_l}{2} \right) &= q_\omega d(\rho S) + q_j d(\rho \alpha_j) + q_0 d\rho + u_l d(\rho u_l) + \theta_j d(\rho c_j) + J_k^j d w_k^j = \\ &= q_\omega dL_{q_\omega} + q_j dL_{q_j} + q_0 dL_{q_0} + u_l dL_{u_l} + \theta_j dL_{\theta_j} + J_k^j dL_{J_k^j} = \end{aligned}$$

$$= d(q_\omega L_{q_\omega} + q_j L_{q_j} + q_0 L_{q_0} + u_l L_{u_l} + \theta_j L_{\theta_j} + J_k^j L_{J_k^j} - L).$$

Из вышеприведенных тождеств получаем:

$$L_{q_\omega} = \rho S, L_{q_j} = \rho \alpha_j, L_{q_0} = \rho, L_{u_l} = \rho u_l, L_{\theta_j} = \rho c_j, L_{J_k^j} = w_k^j.$$

$$L = q_\omega L_{q_\omega} + q_j L_{q_j} + q_0 L_{q_0} + u_l L_{u_l} + \theta_j L_{\theta_j} + J_k^j L_{J_k^j} - \rho \left(E + \frac{u_l u_l}{2} \right) = \rho^2 E_\rho + \rho w_k^j E_{w_k^j}.$$

Теперь все уравнения системы (1.2) можно записать в терминах переменных $q_\omega, q_j, q_0, u_l, \theta_j, J_k^j$ и производных $L_{q_\omega}, L_{q_j}, L_{q_0}, L_{u_l}, L_{\theta_j}, L_{J_k^j}$. В итоге система (1.2) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{q_n}}{\partial t} + \frac{\partial u^k L_{q_n}}{\partial x_k} &= 0, \quad n = \omega, 1, \dots, N-1, 0, \\ \frac{\partial L_{u^l}}{\partial t} + \frac{\partial (u^k L_{u^l} + J_k^j L_{J_k^j} - \delta_k^l J_n^j L_{J_n^j})}{\partial x_k} &= 0, \\ \frac{\partial L_{\theta_j}}{\partial t} + \frac{\partial (u^k L_{\theta_j} + J_k^j)}{\partial x_k} &= 0, \\ \frac{\partial L_{J_k^j}}{\partial t} + \frac{\partial (u^n L_{J_n^j} + \theta_j)}{\partial x_k} &= 0, \end{aligned} \tag{1.5}$$

и ограничение (1.3) запишется в виде

$$\frac{\partial L_{J_k^j}}{\partial x_n} - \frac{\partial L_{J_n^j}}{\partial x_k} = 0. \tag{1.6}$$

Закон сохранения энергии в терминах производящего потенциала и переменных примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(q_\omega L_{q_\omega} + q_j L_{q_j} + q_0 L_{q_0} + u^l L_{u^l} + \theta_j L_{\theta_j} + J_k^j L_{J_k^j} - L \right) + \\ \frac{\partial}{\partial x_k} \left(u^k (q_\omega L_{q_\omega} + q_j L_{q_j} + q_0 L_{q_0} + \theta_j L_{\theta_j} + J_k^j L_{J_k^j}) + J_k^j \theta_j \right) &= 0. \end{aligned}$$

Теперь систему (1.5) можно представить в эквивалентном симметричном виде.

Для этого необходимо ко второму уравнению системы (1.5) добавить выражение

$$J_k^j \left(\frac{\partial L_{J_k^j}}{\partial x_n} - \frac{\partial L_{J_n^j}}{\partial x_k} \right) = 0,$$

а к последнему уравнению (1.5) – выражение

$$u^l \left(\frac{\partial L_{J_k^j}}{\partial x_n} - \frac{\partial L_{J_n^j}}{\partial x_k} \right) = 0.$$

Тогда система (1.5) окончательно приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{q_n}}{\partial t} + \frac{\partial (u^k L)_{q_n}}{\partial x_k} &= 0, \quad n = \omega, 1, \dots, N-1, 0, \\ \frac{\partial L_{u^l}}{\partial t} + \frac{\partial ((u^k L)_{u^l})}{\partial x_k} + L_{J_l^j} \frac{\partial J_k^j}{\partial x_k} - L_{J_n^j} \frac{\partial J_n^j}{\partial x_l} &= 0, \\ \frac{\partial L_{\theta_j}}{\partial t} + \frac{\partial (u^k L)_{\theta_j}}{\partial x_k} + \frac{\partial J_k^j}{\partial x_k} &= 0, \\ \frac{\partial L_{J_m^j}}{\partial t} + \frac{\partial (u^k L)_{J_m^j}}{\partial x_k} + L_{J_n^j} \frac{\partial u^n}{\partial x_m} - L_{J_m^j} \frac{\partial u^k}{\partial x_k} + \frac{\partial \theta_m}{\partial x_k} &= 0. \end{aligned}$$

Легко заметить, что квазилинейная форма приведённой выше системы симметрична. В самом деле, два первых члена каждого из уравнений, содержащие производные по t и x_k , можно записать с использованием симметричных матриц вторых производных L и $u^k L$ по переменным $q_\omega, q_j, q_0, u^l, \theta_j, J_k^j$. Оставшиеся слагаемые очевидно образуют симметричную матрицу. Положительная определённость матрицы вторых производных L следует из выпуклости L как функции переменных $q_\omega, q_j, q_0, u^l, \theta_j, J_k^j$, что в свою очередь эквивалентно выпуклости полной энергии $\rho(E + u^l u^l / 2)$ как функции переменных $\rho S, \rho \alpha_j, \rho, \rho u^l, \rho c_j, w_j^k$, так как L и $\rho(E + u^l u^l / 2)$ связаны преобразованием Лежандра [29].

Таким образом, сформулирована общая система (1.2), не учитывающая диссипативные процессы, которая в дальнейшем будет использоваться для получения определяющих дифференциальных уравнений для описания течений многофазной сжимаемой смеси. Все уравнения системы имеют дивергентную форму. Система является гиперболической, если полная энергия $\rho(E + u^l u^l / 2)$ определена как выпуклая функция консервативных переменных $\rho S, \rho \alpha_j, \rho, \rho u^l, \rho c_j, w_j^k$.

Введение в систему правых частей для учёта межфазного взаимодействия

Рассматриваются только два типа межфазного взаимодействия: релаксация давлений фаз к общей величине и межфазное трение. Диссипативные члены для учёта релаксации давлений можно ввести по аналогии с двухфазным случаем добавлением правых частей в уравнения баланса объёмных концентраций [29]. Межфазное трение (релаксация скоростей) учитывается путём добавления диссипативных членов в правые части уравнений для относительных скоростей. Введение диссипативных членов необходимо делать с учётом законов термодинамики. Во-первых, вводимые в уравнения правые части не должны повлиять на закон сохранения полной энергии. Во-вторых, необходимо удовлетворять закону возрастания энтропии. Предполагаем также, что для определяемых диссипативных членов выполнен принцип Онзагера симметрии кинетических коэффициентов [67].

Учёт релаксации скоростей нарушает условие согласованности относительных скоростей (1.3), добавляя ненулевую правую часть. Поэтому для сохранения дивергентной формы уравнения для относительных скоростей вводятся дополнительные переменные – вихри относительных скоростей (1.9). С учётом всех этих условий основная система записывается следующим образом

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho S u^k}{\partial x_k} &= Q, \\
\frac{\partial \rho \alpha_j}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^k \alpha_j}{\partial x_k} &= -\Phi_j, \quad j = 1, \dots, N-1, \\
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^k}{\partial x_k} &= 0, \\
\frac{\partial \rho u^l}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^l u^k + \rho^2 E_\rho \delta_{kl} + \rho w_n^l E_{w_n^k})}{\partial x_k} &= 0, \quad l = 1, 2, 3, \\
\frac{\partial \rho c_j}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^k c_j + \rho E_{w_j^k})}{\partial x_k} &= 0, \quad j = 1, \dots, N-1, \\
\frac{\partial w_j^k}{\partial t} + \frac{\partial (u^l w_j^l + E_{c_j})}{\partial x_k} &= -e_{klm} u^l \omega_j^m - \Lambda_j^k, \quad j = 1, \dots, N-1.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Здесь $-\Phi_j$ и $-\Lambda_j^k$ отвечают за релаксацию давлений и скоростей соответственно и определяются следующим образом

$$\Phi_j = \rho \sum_{n=1}^{N-1} \phi_{jn} E_{\alpha_n}, \quad \Lambda_j^k = \sum_{n=1}^{N-1} \lambda_{jn}^k E_{w_n^k}. \quad (1.8)$$

Производство энтропии Q в уравнении энтропии смеси возникает вследствие диссипативных процессов:

$$Q = \frac{\rho}{E_S} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{n=1}^{N-1} \phi_{jn} E_{\alpha_j} E_{\alpha_n} + \frac{\rho}{E_S} \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{n=1}^{N-1} \lambda_{jn}^k E_{w_j^k} E_{w_n^k}.$$

Производство энтропии должно быть неотрицательным, что обеспечивается положительной определённой матриц коэффициентов ϕ_{jn} и $\lambda_{jn}^1, \lambda_{jn}^2, \lambda_{jn}^3$.

Условия равновесного состояния $\Phi_j = 0$ и $\Lambda_j^k = 0$ эквивалентны условиям $E_{\alpha_n} = 0$ и $E_{w_k^n} = 0$ в силу положительной определённости матриц кинетических коэффициентов. Ниже будет дано определение E через уравнения состояния фаз, что позволит сформулировать условия термодинамического равновесия в терминах давлений фаз и относительных скоростей.

Заметим, что в правой части уравнения для относительных скоростей возникает слагаемое $-e_{klm} u^l \omega_j^m$, где e_{klm} – символ Леви-Чивиты. Здесь дополнительные переменные ω_j^m , имеющие смысл вихрей относительных скоростей, вводятся с целью сохранения дивергентной формы уравнения для относительных скоростей. Вихри относительных скоростей

$$\omega_j^m = e_{mkl} \frac{\partial w_j^k}{\partial x_l} \quad (1.9)$$

связаны с членом, отвечающим за межфазное трение, условием совместности

$$\frac{\partial \omega_j^m}{\partial t} + \frac{\partial (u^l \omega_j^m - u^k \omega_j^l + e_{mln} \lambda_n^j)}{\partial x_l} = 0. \quad (1.10)$$

Последнее соотношение можно получить дифференцированием уравнения для относительных скоростей и используя определение ω_j^m (1.9). Имея в виду тождество $\partial \omega_j^m / \partial x_m = 0$, уравнение (1.10) можно записать в форме

$$\frac{\partial \omega_j^m}{\partial t} + u^l \frac{\partial \omega_j^m}{\partial x_l} + \frac{\partial e_{mln} \lambda_n^j}{\partial x_l} = 0.$$

Это нестационарное условие согласованности объясняет возможность включения члена $-e_{klm}u^l\omega_j^m$ в правую часть уравнения для относительных скоростей. Таким образом, система (1.7), дополненная условием согласованности (1.10), примет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho S u^k}{\partial x_k} &= Q, \\ \frac{\partial \rho \alpha_j}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^k \alpha_j}{\partial x_k} &= -\Phi_j, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^k}{\partial x_k} &= 0, \\ \frac{\partial \rho u^l}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^l u^k + \rho^2 E_\rho \delta_{kl} + \rho w_n^l E_{w_n^k})}{\partial x_k} &= 0, \quad l = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial \rho c_j}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^k c_j + \rho E_{w_j^k})}{\partial x_k} &= 0, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ \frac{\partial w_j^k}{\partial t} + \frac{\partial (u^l w_j^l + E_{c_j})}{\partial x_k} &= -e_{klm}u^l\omega_j^m - \Lambda_k^j, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ \frac{\partial \omega_j^m}{\partial t} + \frac{\partial (u^l \omega_m^j - u^k \omega_j^l + e_{mln}\lambda_n^j)}{\partial x_l} &= 0.\end{aligned}$$

Производные вихрей относительных скоростей ω_j^m по пространственным переменным присутствуют лишь в последнем уравнении, поэтому в правую часть дивергентного уравнения для относительных скоростей вносится $-e_{klm}u^l\omega_j^m$. Также можно показать, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\omega_j^m - e_{mkl} \frac{\partial w_j^k}{\partial x_l} \right) = 0,$$

и если условие $\omega_j^m - e_{mkl} \frac{\partial w_j^k}{\partial x_l} = 0$ выполняется в начальный момент времени, то оно выполнено и в любой момент $t > 0$.

Можно легко проверить, что все введённые правые части не нарушают закон сохранения энергии (1.4) системы (1.7).

1.1.3. Замыкающие соотношения

Для описания многофазных течений с помощью системы (1.7) её необходимо дополнить замыкающими соотношениями. Необходимо определить урав-

нение состояния в виде зависимости обобщённой внутренней энергии E от параметров состояния таким образом, чтобы уравнения системы имели нужный физический смысл законов сохранения. Таким образом, все частные производные E , входящие в уравнения системы (1.7), можно будет вычислить непосредственно, и останется лишь определить кинетические коэффициенты в релаксационных членах.

Предположим, что уравнения состояния каждой из фаз известны в форме $e_k = e_k(\rho_k, S_k)$, $k = 1, 2, \dots, N$. Давление и температура каждой фазы при этом вычисляются по формулам

$$p_k = \rho_k^2 \frac{\partial e_k}{\partial \rho_k}, \quad T_k = \frac{\partial e_k}{\partial S_k}.$$

Тогда естественный способ определить уравнение состояния смеси – задать внутреннюю энергию смеси E в виде суммы средней внутренней энергии фаз и кинематической составляющей относительного движения фаз:

$$E = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_N e_N + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} c_j w_j^i w_j^i - \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{N-1} c_j w_j^i \right)^2 \quad (1.11)$$

Как было отмечено в разделе 1.1, в развиваемой модели используется приближение одной энтропии, то есть многофазная смесь характеризуется общей энтропией смеси S . В связи с этим необходимо сделать уточнения для данного выше определения обобщённой внутренней энергии. Рассмотрим часть энергии $E^0 = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_N e_N$, не зависящую от скоростей, и предположим, что смесь находится в состоянии термодинамического равновесия, что означает равенство температур фаз: $T_1 = T_2 = \dots = T_N = T$. Можно определить осреднённую энтропию смеси как $S = c_1 S_1 + c_2 S_2 + \dots + c_N S_N$ и предположить, что энтропия каждой из фаз равна энтропии смеси плюс малое возмущение: $S_i = S + \delta S_i$. Заметим, что $c_1 \delta S_1 + c_2 \delta S_2 + \dots + c_N \delta S_N = 0$ в силу определения S . Таким образом, имеем

$$E^0 = c_1 e_1(\rho_1, S_1) + c_2 e_2(\rho_2, S_2) + \dots + c_N e_N(\rho_N, S_N) =$$

$$c_1 e_1(\rho_1, S) + c_2 e_2(\rho_2, S) + \dots + c_N e_N(\rho_N, S) + \quad (1.12)$$

$$c_1 \frac{\partial e_1}{\partial S_1}(\rho_1, S) \delta S_1 + c_2 \frac{\partial e_2}{\partial S_2}(\rho_2, S) \delta S_2 + \dots + c_N \frac{\partial e_N}{\partial S_N}(\rho_N, S) \delta S_N.$$

Теперь, используя определение температуры i -й фазы, получаем, что $T_i = \frac{\partial e_i}{\partial S_i}(\rho_i, S_i) = \frac{\partial e_i}{\partial S_i}(\rho_i, S) + \frac{\partial^2 e_i}{\partial S_i^2}(\rho_i, S) \delta S_i$. Если подставить выражение

$$\frac{\partial e_i}{\partial S_i}(\rho_i, S) = T_i - \frac{\partial^2 e_i}{\partial S_i^2}(\rho_i, S) \delta S_i$$

в уравнение (1.12) и положить $T_i = T + \delta T_i$, получим

$$E^0 = c_1 e_1(\rho_1, S) + c_2 e_2(\rho_2, S) + \dots + c_N e_N(\rho_N, S) + o(\delta S_i, \delta T_i).$$

Таким образом, если смесь близка к состоянию термодинамического равновесия, выражение $E^0 = c_1 e_1(\rho_1, S) + c_2 e_2(\rho_2, S) + \dots + c_N e_N(\rho_N, S)$ может быть использовано в определении обобщённой внутренней энергии смеси с параметрами состояния $\rho_1, \dots, \rho_N, S$. Заметим, что для такого рода смеси нет необходимости определять индивидуальные температуры фаз, достаточно температуры смеси $T = \frac{\partial E}{\partial S}$.

Пользуясь определением обобщённой энергии (1.11) и зная определения параметров смеси, данные в подразделе 1.1.1, можно выразить термодинамические силы (производные внутренней энергии) для смеси в терминах термодинамических сил и параметров отдельных фаз.

В подразделе 1.1.1 в качестве независимых переменных принимаются следующие физические параметры:

$$u_1, u_2, u_3, w_1^1, w_1^2, w_1^3, \dots, w_{N-1}^1, w_{N-1}^2, w_{N-1}^3, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N-1}, \rho, c_1, c_2, \dots, c_{N-1}, S.$$

Для того чтобы связать термодинамические силы для смеси $E_{w_j^k}, E_{\alpha_j}, E_{c_j}, E_S$ с параметрами состояния отдельных фаз, потребуются следующие выражения, вытекающие из определений соответствующих параметров.

$$d\alpha_N = -d\alpha_1 - d\alpha_2 - \dots - d\alpha_{N-1}, \quad dc_N = -dc_1 - dc_2 - \dots - dc_{N-1},$$

$$d\rho_j = d\left(\frac{\rho c_j}{\alpha_j}\right) = -\frac{\rho_j}{\alpha_j}d\alpha_j + \frac{c_j}{\alpha_j}d\rho + \frac{\rho}{\alpha_j}dc_j, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (1.13)$$

Из (1.11) получаем

$$\begin{aligned} dE = & (e_1 - e_N)dc_1 + (e_2 - e_N)dc_2 + \dots + (e_{N-1} - e_N)dc_{N-1} + c_1de_1 + c_2de_2 + \dots + c_Nde_N + \\ & + c_1(w_1^i - (c_1w_1^i + c_2w_2^i + \dots + c_{N-1}w_{N-1}^i))dw_1^i + \dots \\ & + c_{N-1}(w_{N-1}^i - (c_1w_1^i + c_2w_2^i + \dots + c_{N-1}w_{N-1}^i))dw_{N-1}^i. \end{aligned}$$

Используя выражение (1.13), получаем

$$\begin{aligned} de_j = & \frac{\partial e_j}{\partial \rho_j}d\rho_j + \frac{\partial e_j}{\partial S}dS = -\frac{\rho_j}{\alpha_j}\frac{\partial e_j}{\partial \rho_j}d\alpha_j + \frac{c_j}{\alpha_j}\frac{\partial e_j}{\partial \rho_j}d\rho + \frac{\rho}{\alpha_j}\frac{\partial e_j}{\partial \rho_j}dc_j + \frac{\partial e_j}{\partial S}dS, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ de_N = & \frac{\partial e_N}{\partial \rho_N}d\rho_j + \frac{\partial e_N}{\partial S_N}dS_N = -\frac{\rho_N}{\alpha_N}\frac{\partial e_N}{\partial \rho_N}d\alpha_N + \frac{c_N}{\alpha_N}\frac{\partial e_N}{\partial \rho_N}d\rho + \frac{\rho}{\alpha_N}\frac{\partial e_N}{\partial \rho_N}dc_N + \frac{\partial e_N}{\partial S}dS = \\ = & \frac{\rho_N}{\alpha_N}\frac{\partial e_N}{\partial \rho_N}(d\alpha_1 + \dots + d\alpha_{N-1}) + \frac{c_N}{\alpha_N}\frac{\partial e_N}{\partial \rho_N}d\rho - \frac{\rho}{\alpha_N}\frac{\partial e_N}{\partial \rho_N}(dc_1 + \dots + dc_N) + \frac{\partial e_N}{\partial S}dS. \end{aligned}$$

Заметим, что для $j = 1, 2, \dots, N-1$ верно

$$w_j^i - (c_1w_1^i + c_2w_2^i + \dots + c_{N-1}w_{N-1}^i) = (u_j^i - u^i) = \sum_{n=1}^N (u_j^i - u_n^i),$$

где $u^i = c_1u_1^i + \dots + c_Nu_N^i$. В итоге для E имеем

$$\begin{aligned} dE = & (e_1 + \rho_1\frac{\partial e_1}{\partial \rho_1} - e_N - \rho_N\frac{\partial e_N}{\partial \rho_N})dc_1 + (e_2 + \rho_2\frac{\partial e_2}{\partial \rho_1} - e_N - \rho_N\frac{\partial e_N}{\partial \rho_N})dc_2 + \\ & \dots + (e_{N-1} + \rho_{N-1}\frac{\partial e_{N-1}}{\partial \rho_{N-1}} - e_N - \rho_N\frac{\partial e_N}{\partial \rho_N})dc_{N-1} + (c_1\frac{\partial e_1}{\partial S} + \dots + c_1\frac{\partial e_N}{\partial S})dS + \\ & \frac{1}{\rho}(\rho_N^2\frac{\partial e_N}{\partial \rho_N} - \rho_1^2\frac{\partial e_1}{\partial \rho_1})d\alpha_1 + \frac{1}{\rho}(\rho_N^2\frac{\partial e_N}{\partial \rho_N} - \rho_2^2\frac{\partial e_2}{\partial \rho_2})d\alpha_2 + \dots + \frac{1}{\rho}(\rho_N^2\frac{\partial e_N}{\partial \rho_N} - \rho_{N-1}^2\frac{\partial e_{N-1}}{\partial \rho_{N-1}})d\alpha_{N-1} + \\ & \frac{c_1^2}{\alpha_1}\frac{\partial e_1}{\partial \rho_1} + \frac{c_2^2}{\alpha_2}\frac{\partial e_2}{\partial \rho_2} + \dots + \frac{c_N^2}{\alpha_N}\frac{\partial e_N}{\partial \rho_N} + \\ & + c_1(w_1^i - (c_1w_1^i + c_2w_2^i + \dots + c_{N-1}w_{N-1}^i))dw_1^i + \dots \\ & + c_{N-1}(w_{N-1}^i - (c_1w_1^i + c_2w_2^i + \dots + c_{N-1}w_{N-1}^i))dw_{N-1}^i. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\rho_j^2\partial e_j/\partial \rho_j = p_j$ и

$$dE = E_{c_1}dc_1 + E_{c_2}dc_2 + \dots + E_{c_{N-1}}dc_{N-1} + E_{\alpha_1}d\alpha_1 + E_{\alpha_2}d\alpha_2 + \dots + E_{\alpha_{N-1}}d\alpha_{N-1} +$$

$$+E_\rho d\rho + E_S dS + E_{w_1^i} dw_1^i + E_{w_2^i} dw_2^i + \dots + E_{w_{N-1}^i} dw_{N-1}^i,$$

получаем выражения для производных E через производные e_i и параметры фаз:

$$\begin{aligned} E_{c_j} &= H_j - H_N := (e_j + \frac{p_j}{\rho_j}) - (e_N + \frac{p_N}{\rho_N}), \quad j = 1, \dots, N-1, \\ E_\rho &= \frac{1}{\rho^2}(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 \dots + \alpha_N p_N), \\ E_{w_l^i} &= c_l \sum_{j=1}^N c_j (u_l^i - u_j^i), \quad i = 1, 2, 3; \quad l = 1, 2, \dots, N-1. \\ E_S = T &= c_1 \frac{\partial e_1}{\partial S} + \dots + c_N \frac{\partial e_N}{\partial S}, \quad E_{\alpha_j} = \frac{1}{\rho}(p_N - p_j), \quad j = 1, \dots, N-1. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Таким образом, для одноэнтروпийного приближения обобщённая внутренняя энергия E определена как осреднённая по массе внутренняя энергия фаз в сумме с кинетической энергией относительного движения (1.11). Все термодинамические силы можно выразить в терминах производных E как функции параметров состояния. Строгое доказательство выпуклости E , необходимой для гиперболичности системы, не проводилось. Однако численное исследование рассмотренных моделей показывает, что собственные значения одномерной системы вещественны в широкой области изменения параметров состояния, что даёт основания говорить о гиперболичности системы.

1.1.4. Определяющие уравнения в терминах параметров фаз

Для построения вычислительного алгоритма и проведения численных экспериментов оказывается более удобным представить систему определяющих уравнений в эквивалентном виде в терминах параметров отдельных фаз. Используя полученные выражения (1.14), систему можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho S u^k}{\partial x_k} &= Q, \\ \frac{\partial \rho \alpha_j}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^k \alpha_j}{\partial x_k} &= -\Phi_j, \quad j = 1, \dots, N-1, \end{aligned} \tag{1.15}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j \rho_j u_j^l \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j \rho_j u_j^l u_j^k + \delta_k^l \sum_{j=1}^N \alpha_j p_j \right) &= 0, \quad l = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial \alpha_j \rho_j}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_j \rho_j u_j^k}{\partial x_k} &= 0, \quad j = 1, \dots, N, \\ \frac{\partial (u_j^k - u_N^k)}{\partial t} + \frac{\partial (u_j^l u_j^l / 2 - u_N^l u_N^l / 2 + H_j - H_N)}{\partial x_k} &= -e_{klm} u^l \omega_j^m - \Lambda_k^j. \end{aligned}$$

Здесь, как и ранее, $\rho = \sum_{j=1}^N \alpha_j \rho_j$ – плотность смеси, $u^k = \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^N \alpha_j \rho_j u_j^k$ – скорость смеси, $p_j = \rho_j^2 \partial e_j / \partial \rho_j$ – давление j -й фазы, $H_j = e_j + p_j / \rho_j$ – энтальпия j -й фазы, а $T = c_1 \frac{\partial e_1}{\partial S} + \dots + c_1 \frac{\partial e_N}{\partial S}$ – температура смеси. Закон сохранения энергии (1.4) в терминах параметров фаз примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j \rho_j \left(e_j + \frac{1}{2} u_j^l u_j^l \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j \rho_j u_j^k \left(e_j + \frac{1}{2} u_j^l u_j^l + \frac{p_j}{\rho_j} \right) \right) = 0.$$

Для вихрей относительных скоростей ω_j^m получим выражение $\omega_j^m = e_{mkl} \frac{\partial (u_j^k - u_N^k)}{\partial x_l}$. Правые части (1.1.4) также можно выразить в терминах давлений и скоростей фаз:

$$\Phi_j = - \sum_{n=1}^N \phi_{jn} p_n, \quad \Lambda_j^k = \sum_{n=1}^{N-1} \lambda_{jn}^k c_n (u_n^k - u^k) = \sum_{n=1}^{N-1} \lambda_{jn}^k c_n \sum_{l=1}^N c_l (u_n^k - u_l^k),$$

где $\phi_{jN} = - \sum_{n=1}^{N-1} \phi_{jn}$, $j = 1, \dots, N-1$.

1.1.5. Сравнение с моделью типа Байера-Нунциато

Как было отмечено во введении, наиболее устоявшийся подход к моделированию течений двухфазных сжимаемых сред был предложен в работе Байера и Нунциато [23]. В данной теории двухфазная смесь рассматривается как две среды, каждая из которых описывается отдельной системой законов сохранения, а межфазное взаимодействие учитывается путём добавления дифференциальных и алгебраических членов в правые части законов сохранения. Полученная система оказывается гиперболической, однако привести все уравнения системы к дивергентному виду оказывается в общем случае невозможно. Существуют так-

же различные модификации модели Байера-Нунциато, см., например, работы [24, 26] и ссылки в них.

Используемый в настоящей работе подход предполагает описание многофазной смеси как единой сплошной среды. Для описания такой среды помимо традиционных физических величин, таких как плотность, скорость и энергия, вводятся некоторые дополнительные параметры состояния для учёта многофазного характера среды. Полученные определяющие уравнения имеют дивергентный вид и образуют гиперболическую систему. Возникает естественный вопрос о том, как соотносится развиваемый подход с подходом Байера-Нунциато.

Сравнение определяющих соотношений модели типа Байера-Нунциато и консервативной термодинамически согласованной модели было проведено в работе [30] для двухфазной изэнтропической модели и в работе [31] – для двухфазной модели с различными давлениями и температурами фаз. Было показано, что консервативную модель можно записать в форме модели типа Байера-Нунциато. Различие моделей в одномерном случае состоит в определении так называемых межфазной скорости и межфазного давления – искусственных параметров, входящих в уравнения моделей типа Байера-Нунциато. В многомерном случае различие дополняется возникновением слагаемого в правой части закона сохранения импульса, отвечающего за подъёмную силу. В моделях типа Байера-Нунциато эти силы не учитываются.

Было также представлено сравнение численных результатов, полученных с использованием моделей обоих типов. В работе [32] приведены результаты расчётов для однотемпературного приближения термодинамически согласованной модели в одномерном случае (задача "water faucet" и задача Римана о распаде разрыва), а в работе [68] – в двумерном случае на примере решения задачи с неустойчивостью Рихтмайера-Мешкова. Результаты сравнения показывают, что обе модели дают схожие численные решения изучаемых задач.

Вопрос построения моделей типа Байера-Нунциато для описания многофазных сред с количеством фаз, превышающим две, был рассмотрен лишь в

очень ограниченном числе работ. Во введении была упомянута работа [27], в которой предлагается одномерная модель для описания течений трёхфазной среды и приводится численное исследование некоторых тестовых задач. Обобщение модели на случай произвольного количества фаз не рассматривается в данной работе.

По аналогии с тем, как это было сделано в [30, 31], приведём уравнения системы (1.15) к форме близкой к модели типа Байера-Нунциато. Прежде всего заметим, что уравнения системы (1.15) для объёмных долей можно записать в эквивалентной форме, используя закон сохранения полной массы смеси:

$$\frac{\partial \alpha_j}{\partial t} + u^k \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \Phi_j, \quad j = 1, \dots, N-1. \quad (1.16)$$

Плотность каждой фазы удовлетворяет закону сохранения массы соответствующей фазы:

$$\frac{\partial \alpha_j \rho_j}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_j \rho_j u_j^k}{\partial x_k} = 0, \quad j = 1, \dots, N. \quad (1.17)$$

Законы сохранения импульса каждой фазы можно получить из закона сохранения полного импульса смеси и уравнений для относительных скоростей. Они будут иметь вид

$$\frac{\partial \alpha_j \rho_j u_j^k}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha_j \rho_j u_j^k u_j^l + \delta_{kl} \alpha_j p_j)}{\partial x_l} = A_j^k + B_j^k + C_j^k + D_j^k, \quad (1.18)$$

где

$$\begin{aligned} A_j^k &= -c_j \left(\sum_{l=1}^N p_l \frac{\partial \alpha_l}{\partial x_k} \right) + p_j \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_k}, \\ B_j^k &= \rho c_j \sum_{l=1}^N c_l (u_l^\alpha - u^\alpha) \left(\frac{\partial u_l^\alpha}{\partial x_k} - \frac{\partial u_l^k}{\partial x_\alpha} \right) - \rho c_j (u_j^\alpha - u^\alpha) \left(\frac{\partial u_j^\alpha}{\partial x_k} - \frac{\partial u_j^k}{\partial x_\alpha} \right), \\ C_j^k &= \rho c_j \sum_{l=1}^N c_l \frac{\partial H_l}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial x_k} - \rho c_j \frac{\partial H_j}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial x_k}, \quad D_j^k = \rho c_j \sum_{l=1}^N c_l \Lambda_k^l - \rho c_j \Lambda_k^j. \end{aligned}$$

В определении D_k^j для единства записи полагается $\Lambda_N^k \equiv 0$.

Можно видеть, что уравнения (1.16)–(1.18) соответствуют по форме модели типа Байера-Нунциато: записанные уравнения описывают N различных

сред, взаимодействие между которыми учитывается посредством дополнительных членов, массовых сил, в правых частях уравнений импульса. Член в правой части (1.18) включает четыре слагаемых. Первое из них, A_j^k , содержит градиенты объёмных долей с коэффициентом, соответствующим межфазному давлению в моделях типа Байера-Нунциато. B_j^k включает вихри скоростей фаз и отвечает за так называемые подъёмные силы. Третье слагаемое, C_j^k , пропорционально градиенту энтропии. D_j^k моделирует межфазное трение.

Таким образом, уравнения предлагаемой модели могут быть записаны в форме Байера-Нунциато, однако существенным отличием является наличие дополнительных массовых сил в уравнении импульса консервативной модели. То, каким образом эта разница проявляется при решении конкретных задач, является открытым вопросом.

Стоит также заметить, что приведённые выше построения, позволяющие привести изучаемую модель к форме Байера-Нунциато, справедливы только в случае непрерывных решений. Соотношение этих двух подходов для разрывных решений также представляет интерес и является предметом дальнейших исследований.

1.2. Одномерные уравнения для четырёхфазной среды в изэнтропическом приближении

Численное исследование сформулированной модели течений многофазной сжимаемой среды проводится на примере частного случая с количеством фаз равным 4 в одномерном случае. В главе 3 будет представлена серия численных экспериментов с решением задачи Римана о распаде разрыва для четырёхфазных смесей. Приведём уравнения четырёхфазной модели и опишем используемые замыкающие соотношения.

1.2.1. Определяющие уравнения

Уравнения для описания течений четырёхфазной среды можно легко получить из уравнений общей модели (1.15), положив $N = 4$. В одномерном случае определяется только одна компонента вектора скорости смеси и скоростей фаз: $u, u_k, k = 1, 2, 3, 4$. Для определения относительных скоростей в качестве базовой выбирается фаза с номером 4, то есть $w_k = u_k - u_4, k = 1, 2, 3$. Приведём окончательный вид одномерной системы:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho S u}{\partial x} = Q, \\
& \frac{\partial \rho \alpha_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho u \alpha_1}{\partial x} = -\Phi_1, \\
& \frac{\partial \rho \alpha_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho u \alpha_2}{\partial x} = -\Phi_2, \\
& \frac{\partial \rho \alpha_3}{\partial t} + \frac{\partial \rho u \alpha_3}{\partial x} = -\Phi_3, \\
& \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0, \\
& \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^4 \alpha_i \rho_i u_i + \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=1}^4 (\alpha_i \rho_i (u_i)^2 + \alpha_i p_i) = 0, \\
& \frac{\partial \alpha_1 \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_1 \rho_1 u_1}{\partial x} = 0, \\
& \frac{\partial \alpha_2 \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_2 \rho_2 u_2}{\partial x} = 0, \\
& \frac{\partial \alpha_3 \rho_3}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_3 \rho_3 u_3}{\partial x} = 0, \\
& \frac{\partial (u_1 - u_4)}{\partial t} + \frac{\partial (u_1 u_1 / 2 - u_4 u_4 / 2 + H_1 - H_4)}{\partial x} = -\Lambda_1, \\
& \frac{\partial (u_2 - u_4)}{\partial t} + \frac{\partial (u_2 u_2 / 2 - u_4 u_4 / 2 + H_2 - H_4)}{\partial x} = -\Lambda_2, \\
& \frac{\partial (u_3 - u_4)}{\partial t} + \frac{\partial (u_3 u_3 / 2 - u_4 u_4 / 2 + H_3 - H_4)}{\partial x} = -\Lambda_3.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Здесь $\rho = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2 + \alpha_3 \rho_3 + \alpha_4 \rho_4$, $p_j = \rho_j^2 \partial e_j / \partial \rho_j$, $H_j = e_j + p_j / \rho_j$. Члены в правых частях уравнений имеют вид

$$\Phi_j = - \sum_{n=1}^N \phi_{jn} p_n, \quad \Lambda_j = \sum_{n=1}^3 \lambda_{jn} c_n (u_n - u), \quad u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 + c_4 u_4.$$

Необходимо отметить, что при численной реализации модели закон баланса энтропии в полной системе определяющих соотношений (1.19) необходимо заменить на закон сохранения энергии, который имеет следующий вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^4 \rho_i \left(e_i + \frac{1}{2} (u_i)^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=1}^4 \alpha_i \rho_i u_i \left(e_i + \frac{(u_i)^2}{2} + \frac{p_i}{\rho_i} \right) = 0.$$

Закон сохранения энтропии, выполненный на гладких решениях, не выполняется на разрывах. Вместо этого на разрывных решениях имеет место возрастание энтропии [69]. Имея в виду этот факт, в качестве базового следует выбрать закон сохранения полной энергии смеси, выполненный как на гладких решениях, так и на разрывных. Значение энтропии смеси при этом вычисляется опосредованно с помощью численной процедуры, описанной в разделе 2.1.3.

1.2.2. Уравнение состояния для смеси жидкостей и газов

В качестве замыкающих соотношений для системы (1.19) используются уравнение политропного газа для газообразных составляющих смеси и двучленное уравнение состояния для жидких фаз [69, 70]. Заданной полагается внутренняя энергия каждой из фаз как функция от плотности соответствующей фазы и энтропии смеси. Уравнение состояния политропного газа даётся в виде

$$e(\rho, S) = A \left(\frac{\rho}{\rho^0} \right)^{\gamma-1} e^{S/c_V}, \quad (1.20)$$

где $A = \frac{C^2}{\gamma(\gamma-1)}$, C – скорость звука соответствующей фазы при нормальных условиях, γ – показатель адиабаты, ρ^0 – плотность фазы при нормальных условиях, а c_V – удельная теплоёмкость при постоянном объёме. Тогда давление и температура определяются по формулам

$$p(\rho, S) = \rho^2 \frac{\partial e}{\partial \rho} = \rho^0 (\gamma - 1) A \left(\frac{\rho}{\rho^0} \right)^{\gamma} e^{S/c_V}, \quad T = \frac{\partial e}{\partial S} = \frac{A}{c_V} \left(\frac{\rho}{\rho^0} \right)^{\gamma-1} e^{S/c_V},$$

Двучленное уравнение состояния имеет вид

$$e(\rho, S) = \frac{C^2}{\gamma(\gamma-1)} \left(\frac{\rho}{\rho^0} \right)^{\gamma-1} e^{S/c_V} + \frac{\rho_0 C^2 - \gamma p^0}{\gamma \rho}. \quad (1.21)$$

Соответствующие выражения для давления и температуры:

$$p(\rho, S) = \rho^2 \frac{\partial e}{\partial \rho} = \frac{\rho^0 C^2}{\gamma} \left(\frac{\rho}{\rho^0} \right)^\gamma e^{S/c_V} - \frac{\rho^0 C^2 - \gamma p^0}{\gamma},$$

$$T = \frac{\partial e}{\partial S} = \frac{C^2}{c_V \gamma (\gamma - 1)} \left(\frac{\rho}{\rho^0} \right)^{\gamma-1} e^{S/c_V}.$$

Здесь константа p^0 определяется из условия $p^0 = p(\rho^0, 0)$.

Считая что удельная внутренняя энергия каждой из четырёх фаз смеси $e_i = e_i(\rho_i, S)$, $i = 1, \dots, 4$ известна и имеет вид (1.20) или (1.21), обобщённую удельную внутреннюю энергию смеси можно определить в соответствии с формулой (1.11):

$$E = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 + c_4 e_4 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 c_j w_j^i w_j^i - \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^3 c_j w_j^i \right)^2.$$

1.3. Уравнения течения двухфазной газожидкостной смеси в трубах

В данном разделе представлена термодинамически согласованная модель течения двухфазной сжимаемой газожидкостной смеси с двумя давлениями в длинной трубе. Уравнения данной модели получены из уравнений общей модели двухфазных течений [30–32], на основе которой строилось обобщение на случай произвольного количества фаз, описанное в разделе 1.1. Уравнения рассматриваемой модели получены путём применения процедуры осреднения по сечению трубы к уравнениям общей модели. Предварительные попытки применения данного подхода для исследования трубных течений были сделаны в работе [71].

1.3.1. Общие трёхмерные уравнения для течений двухфазной сжимаемой среды

Рассмотрим модель двухфазной сжимаемой среды, описание которой можно найти в работах [30–32]. Также данные уравнения можно рассматривать как

частный случай описанной в разделе 1.1 модели (1.7) при количестве фаз $N = 2$.

В первую очередь приведём параметры состояния для описания двухфазной среды. Как и раньше, компоненты смеси характеризуются объёмными концентрациями α_1, α_2 , причём $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, плотностями ρ_1, ρ_2 и скоростями u_1^k, u_2^k , $k = 1, 2, 3$. Рассматривается одноэнтропийное приближение с энтропией смеси S в предположении малых вариаций температур фаз. Кроме того, определяются плотность смеси $\rho = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2$, компоненты скорости смеси $u_i = c_1 u_1^i + c_2 u_2^i$, где $c_1 = \alpha_1 \rho_1 / \rho$, $c_2 = \alpha_2 \rho_2 / \rho$, $i = 1, 2, 3$. Относительная скорость определяется как скорость фазы с номером 1 относительно фазы с номером 2 покомпонентно: $w_i = u_1^i - u_2^i$, $i = 1, 2, 3$. Система определяющих уравнений записывается в терминах независимых переменных $u_i, \rho, c_1, w_i, \alpha_1, S$ и обобщённой внутренней энергии E следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho S u_k}{\partial x_k} &= Q, \\ \frac{\partial \rho \alpha_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho \alpha_1 u_k}{\partial x_k} &= -\phi, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_k}{\partial x_k} &= 0, \\ \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i u_k + \rho^2 E_\rho + \rho w_i E_{w_k})}{\partial x_k} &= 0, \quad i = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial \rho c_1}{\partial t} + \frac{\partial (\rho c_1 u_k + \rho E_{w_k})}{\partial x_k} &= 0, \\ \frac{\partial w_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_k w_k + E_{c_1})}{\partial x_i} &= -e_{ikl} u_k \omega_l - \Lambda_i, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{1.22}$$

В уравнениях системы (1.22) присутствуют правые части Λ_i и ϕ , ответственные за межфазное трение и релаксацию давлений соответственно, которые выражаются через производные обобщённой внутренней энергии E :

$$\phi = \rho \frac{E_{\alpha_1}}{\tau}, \quad \Lambda_i = \lambda E_{w_i}. \tag{1.23}$$

Такой выбор диссипативных членов обеспечивает неотрицательность производства энтропии Q в правой части уравнения для энтропии системы (1.22)

$$Q = \frac{\rho}{E_S} \left(\frac{E_{\alpha_1}^2}{\tau_1} + \lambda E_{w_n}^2 \right) > 0,$$

если кинетические коэффициенты $\tau_1, \lambda > 0$.

В системе (1.22) присутствует дополнительный параметр – вихрь относительной скорости $\omega_j = e_{jkl} \frac{\partial(u_1^k - u_2^k)}{\partial x_l}$, введённый с целью сохранить дивергентную форму уравнения для относительных скоростей. Этот параметр должен удовлетворять тождеству

$$\frac{\partial \omega_j}{\partial t} + \frac{\partial (u_i \omega_j - u_j \omega_i + \Lambda_j)}{\partial x_i} = 0,$$

которое является прямым следствием из уравнения для относительных скоростей.

Для замыкания системы (1.22) необходимо определить обобщённую внутреннюю энергию E , а также её производные по параметрам состояния, входящие в уравнения системы. E определяется как сумма осреднённой по массе внутренней энергии фаз и кинетической энергии относительного движения фаз:

$$E(\rho, \alpha_1, c_1, S, w_i) = c_1 e_1(\rho_1, S) + (1 - c_1) e_2(\rho_2, S) + c_1 (1 - c_1) w_i w_i / 2,$$

что соответствует случаю $N = 2$ в формуле (1.11). Имея приведённую выше формулу, можно выразить производные:

$$\begin{aligned} E_\rho &= \frac{\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2}{\rho^2}, & E_{\alpha_1} &= \frac{p_2 - p_1}{\rho}, & E_{w_k} &= c_1 (1 - c_1) w_k, \\ E_{c_1} &= e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} - e_2 - \frac{p_2}{\rho_2} + (1 - 2c_1) \frac{w_k w_k}{2}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Зависимости $e_1(\rho_1, S)$ и $e_2(\rho_2, S)$ полагаются заданными, а давления фаз определяются как $p_1(\rho_1, S) = \rho_1^2 e_{\rho_1}$, $p_2(\rho_2, S) = \rho_2^2 e_{\rho_2}$.

Перепишем теперь уравнения системы (1.22) в терминах параметров фаз, подобно тому, как это было сделано для общей N -фазной модели в разделе 1.1.4. Кроме того, имея в виду, что в дальнейшем под фазой номер 1 будет пониматься жидкостная составляющая двухфазной смеси, а под фазой номер 2 – газообразная, сделаем следующие переобозначения: $\alpha_l = \alpha_1$, $\alpha_g = \alpha_2$, $p_l = p_1$, $p_g = p_2$, $u_l^k = u_1^k$, $u_g^k = u_2^k$, $e_l = e_1$, $e_g = e_2$. Индексом l будем обозначать параметры жидкой фазы, индексом g – параметры газообразной фазы. В этих обозначениях и

с учётом формул (1.24) систему (1.22) можно записать в следующем виде

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho \alpha_l}{\partial t} + \frac{\partial \rho \alpha_l u_k}{\partial x_k} &= -\phi, \\
\frac{\partial \alpha_l \rho_l}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_l \rho_l u_l^k}{\partial x_k} &= 0, \\
\frac{\partial \alpha_g \rho_g}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_g \rho_g u_g^k}{\partial x_k} &= 0, \\
\frac{\partial (\alpha_g \rho_g u_g^i + \alpha_l \rho_l u_l^i)}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha_g \rho_g u_g^i u_g^k + \alpha_l \rho_l u_l^i u_l^k + \alpha_g p_g + \alpha_l p_l)}{\partial x_k} &= \quad (1.25) \\
&= 0, \quad i = 1, 2, 3, \\
\frac{\partial (u_l - u_g)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{u_l^i u_l^i}{2} - \frac{u_g^i u_g^i}{2} + e_l + \frac{p_l}{\rho_l} - e_g - \frac{p_g}{\rho_g} \right) &= \\
&= e_{klj} u_i \omega_j - \Lambda_k, \quad k = 1, 2, 3, \\
\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho S u_k}{\partial x_k} &= Q.
\end{aligned}$$

Конечной целью является получение уравнений для описания течений в трубах, где важен учёт силы тяжести. Для этого в четвёртое уравнение системы (1.25) (законы сохранения полного импульса) добавляются правые части G_i , $i = 1, 2, 3$, отвечающие за соответствующие координатные компоненты массовых сил. Наличие дополнительного члена в правой части уравнения импульса необходимо будет учесть в формулировке закона сохранения энергии. Кроме того, поскольку будет рассматриваться изэнтропический случай в предположении малых вариаций температур, уравнение для энтропии смеси можно отбросить.

Приведём окончательный вид системы

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho \alpha_l}{\partial t} + \frac{\partial \rho \alpha_l u_k}{\partial x_k} &= -\phi, \\
\frac{\partial \alpha_l \rho_l}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_l \rho_l u_l^k}{\partial x_k} &= 0, \\
\frac{\partial \alpha_g \rho_g}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_g \rho_g u_g^k}{\partial x_k} &= 0, \\
\frac{\partial (\alpha_g \rho_g u_g^i + \alpha_l \rho_l u_l^i)}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha_g \rho_g u_g^i u_g^k + \alpha_l \rho_l u_l^i u_l^k + \alpha_g p_g + \alpha_l p_l)}{\partial x_k} &= \quad (1.26) \\
&= -G_i, \quad i = 1, 2, 3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (u_l - u_g)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{u_l^i u_l^i}{2} - \frac{u_g^i u_g^i}{2} + e_l + \frac{p_l}{\rho_l} - e_g - \frac{p_g}{\rho_g} \right) = \\ = e_{klj} u_i \omega_j - \Lambda_k, \quad k = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

Член $-\phi$, содержащийся в правой части первого уравнения системы, отвечает за релаксацию давлений фаз к общей величине и, следуя [30, 31], имеет вид

$$-\phi = \frac{p_l - p_g}{\tau},$$

где коэффициент τ характеризует время релаксации давлений и может зависеть от параметров течения. Выражение в правой части уравнения для относительных скоростей состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое $e_{klj} u_i \omega_j$, как было отмечено ранее, вводится для сохранения дивергентного вида уравнения и включает величину $\omega_j = e_{jkl} \frac{\partial (u_g^k - u_l^k)}{\partial x_l}$, где e_{jkl} – символ Леви-Чивиты. Слагаемое $\Lambda_k = \lambda (u_l^k - u_g^k)$ моделирует межфазное трение.

Важным фактом является то, что решение системы (1.26) удовлетворяет закону сохранения энергии, который для данной формулировки системы примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\alpha_l \rho_l \left(e_l + \frac{|u_l|^2}{2} \right) + \alpha_g \rho_g \left(e_g + \frac{|u_g|^2}{2} \right) \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\alpha_l \rho_l u_l^k \left(e_l + \frac{|u_l|^2}{2} + \frac{p_l}{\rho_l} \right) + \alpha_g \rho_g u_g^k \left(e_g + \frac{|u_g|^2}{2} + \frac{p_g}{\rho_g} \right) \right) = \\ = (\alpha_l \rho_l u_l^i + \alpha_g \rho_g u_g^i) G_i - Q. \end{aligned}$$

Здесь $Q = \frac{(p_l - p_g)^2}{\tau} + \rho \lambda (u_l^k - u_g^k) (u_l^k - u_g^k)$ характеризует диссипацию энергии. $Q \geq 0$, если $\tau, \lambda > 0$. Таким образом, диссипация энергии возникает за счёт релаксации давлений и межфазного трения.

1.3.2. Вывод осреднённых уравнений для описания течений газожидкостной смеси в трубах

Уравнения трубного течения двухфазной смеси выводятся путём осреднения уравнений общей системы (1.26), приведённой в предыдущем разделе, по

сечению трубы.

Определяющие уравнения

Рассмотрим цилиндрическую систему координат (x, r, θ) . Будем считать, что труба направлена вдоль оси x и имеет радиус $R(x)$, зависящий от пространственной координаты x . Для вывода уравнений трубного течения следует рассмотреть систему (1.26) в цилиндрической системе координат. Обозначим через u_l, u_g скорости фаз в направлении координаты x , v_l, v_g – скорости фаз в направлении координаты r , а w_l, w_g – в направлении θ , $\mathbf{u}_l = (u_l, v_l, w_l)$, $\mathbf{u}_g = (u_g, v_g, w_g)$ – векторы скоростей фаз. На стенках трубы выполняется условие прилипания: $\mathbf{u}_l|_{r=R(x)} = \mathbf{u}_g|_{r=R(x)} = 0$.

Обозначим $A = \pi R^2$ – площадь сечения трубы. Пусть F – некоторый параметр течения, тогда осреднённый по сечению параметр $\langle F \rangle$ определяется следующим образом

$$\langle F \rangle = \frac{1}{A} \int_0^{R(x)} \int_0^{2\pi} F \cdot r dr d\theta.$$

Для вывода уравнений для осреднённых параметров потребуются также некоторые дополнительные предположения, а именно, полагается, что параметры течения мало отличаются от осреднённых и могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \rho_l &= \langle \rho_l \rangle + \Delta \rho_l, \rho_g = \langle \rho_g \rangle + \Delta \rho_g, \alpha_l = \langle \alpha_l \rangle + \Delta \alpha_l, \\ \alpha_g &= \langle \alpha_g \rangle + \Delta \alpha_g, u_l = \langle u_l \rangle + \Delta u_l, u_g = \langle u_g \rangle + \Delta u_g, \end{aligned} \quad (1.27)$$

где $\Delta \rho_l, \Delta \rho_g, \Delta \alpha_l, \Delta \alpha_g, \Delta u_l, \Delta u_g$ малы по сравнению с $\langle \rho_l \rangle, \langle \rho_g \rangle, \langle \alpha_l \rangle, \langle \alpha_g \rangle, \langle u_l \rangle, \langle u_g \rangle$. Полагается, что осреднённые значения радиальных и угловых составляющих скоростей фаз равны нулю: $\langle v_l \rangle = \langle v_g \rangle = \langle w_l \rangle = \langle w_g \rangle = 0$. Заметим также, что для любой функции G имеет место тождество

$$\int_0^{R(x)} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right) r dr d\theta = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{R(x)} \int_0^{2\pi} G r dr d\theta - \left(\int_0^{2\pi} G r d\theta \right) \bigg|_{r=R} \frac{dR}{dx}.$$

Рассмотрим процедуру осреднения уравнений на примере закона сохранения массы жидкой фазы, который в цилиндрической системе координат имеет следующий вид

$$\frac{\partial \alpha_l \rho_l}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_l \rho_l u_l}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \alpha_l \rho_l v_l}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \alpha_l \rho_l w_l}{\partial \theta} = 0. \quad (1.28)$$

Проинтегрируем по сечению трубы каждое слагаемое этого уравнения и сделаем следующие преобразования.

$$\begin{aligned} \int_0^{R(x)} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \alpha_l \rho_l}{\partial t} \right) r dr d\theta &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{R(x)} \int_0^{2\pi} \alpha_l \rho_l r dr d\theta = \frac{\partial A \langle \alpha_l \rho_l \rangle}{\partial t}, \\ \int_0^{R(x)} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \alpha_l \rho_l u_l}{\partial x} \right) r dr d\theta &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{R(x)} \int_0^{2\pi} \alpha_l \rho_l u_l r dr d\theta - \left[\int_0^{2\pi} \alpha_l \rho_l u_l r d\theta \right]_{r=R(x)} \frac{dR(x)}{dx} = \\ &= \frac{\partial A \langle \alpha_l \rho_l u_l \rangle}{\partial x} - \left[\int_0^{2\pi} \alpha_l \rho_l u_l r d\theta \right]_{r=R(x)} \frac{dR(x)}{dx} = \frac{\partial A \langle \alpha_l \rho_l u_l \rangle}{\partial x}, \end{aligned}$$

в последнем равенстве использовано условие $u_l|_{r=R(x)} = 0$.

Интегрируя третье слагаемое, получаем

$$\int_0^{R(x)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r \alpha_l \rho_l v_l}{\partial r} \right) r dr d\theta = \left[\int_0^{2\pi} \alpha_l \rho_l v_l r d\theta \right]_{r=R(x)} = -q_l(x),$$

здесь $q_l(x)$ – приток жидкости со стенки трубы в точке x . Данный приток жидкости является параметром, определяемым дополнительно в каждом конкретном случае. В случае отсутствия притока жидкости с границы нужно положить $q_l(x) = 0$.

Для четвёртого слагаемого (1.28) имеем

$$\int_0^{R(x)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \alpha_l \rho_l w_l}{\partial \theta} \right) r dr d\theta = \int_0^{R(x)} (\alpha_l \rho_l w_l)|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr = 0,$$

так как $\alpha_l \rho_l w_l|_{\theta=0} = \alpha_l \rho_l w_l|_{\theta=2\pi}$.

Таким образом, получим закон сохранения массы жидкости в терминах осреднённых параметров:

$$\frac{\partial A \langle \alpha_l \rho_l \rangle}{\partial t} + \frac{\partial A \langle \alpha_l \rho_l u_l \rangle}{\partial x} = q_l(x).$$

Выполнив аналогичные преобразования для остальных уравнений системы (1.26), мы получим полную систему, характеризующую движение двухфазной сжимаемой среды в трубе в терминах осреднённых по сечению трубы параметров. Подробный вывод остальных уравнений приведён в приложении А. Однако такие уравнения будут содержать осреднённые значения нелинейных функций, и для их выражения через средние параметры течения потребуются допущение о малости возмущений (1.27). Полагая, что $\Delta \rho_l, \Delta \rho_g, \Delta \alpha_l, \Delta \alpha_g, \Delta u_l, \Delta u_g$ малы по сравнению с $\langle \rho_l \rangle, \langle \rho_g \rangle, \langle \alpha_l \rangle, \langle \alpha_g \rangle, \langle u_l \rangle, \langle u_g \rangle$ соответственно и отбрасывая все члены, содержащие $\Delta \rho_l, \Delta \rho_g, \Delta \alpha_l, \Delta \alpha_g, \Delta u_l, \Delta u_g$, можно получить следующие выражения для нелинейных функций от параметров состояния, входящих в итоговые уравнения

$$\begin{aligned} \langle u_i^2 \rangle &= \langle u_i \rangle^2, \langle \alpha_i u_i^2 \rangle = \langle \alpha_i \rangle \langle u_i \rangle^2, i = l, g, \\ \langle \rho \rangle &= \langle \alpha_l \rangle \langle \rho_l \rangle + \langle \alpha_g \rangle \langle \rho_g \rangle, \langle u \rangle = (\langle \alpha_l \rangle \langle \rho_l \rangle \langle u_l \rangle + \langle \alpha_g \rangle \langle \rho_g \rangle \langle u_g \rangle) / \rho, \\ \langle \alpha_i p_i \rangle &= \langle \alpha_i \rangle \langle p_i \rangle, \langle p_i / \rho_i \rangle = \langle p_i \rangle / \langle \rho_i \rangle, i = l, g. \end{aligned}$$

Осреднённые значения внутренней энергии и давлений выражаются с помощью заданных замыкающих соотношений следующим образом

$$\langle e_i(\rho_i) \rangle = e_i(\langle \rho_i \rangle), \langle p_i(\rho_i) \rangle = p_i(\langle \rho_i \rangle), i = l, g.$$

Заметим также, что ввиду предположения малости возмущений будут верны равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} (\alpha_l \rho_l + \alpha_g \rho_g) d\theta \right]_{r=R(x)} &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} (\langle \alpha_l \rangle \langle \rho_l \rangle + \langle \alpha_g \rangle \langle \rho_g \rangle) d\theta \right]_{r=R(x)} = \\ &= \langle \alpha_l \rangle \langle \rho_l \rangle + \langle \alpha_g \rangle \langle \rho_g \rangle \end{aligned}$$

и аналогично

$$\frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} (e_l + p_l/\rho_l - e_g - p_g/\rho_g) d\theta \right]_{r=R(x)} = \langle e_l \rangle + \langle p_l \rangle / \langle \rho_l \rangle - \langle e_g \rangle - \langle p_g \rangle / \langle \rho_g \rangle.$$

Проделав данную процедуру для всех уравнений системы (1.26) (см. приложение А) с учётом всех приведённых предположений и переобозначив все параметры $\langle F \rangle = F$, получим следующую систему определяющих уравнений для описания течений двухфазной сжимаемой смеси в трубах:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A \rho \alpha_l}{\partial t} + \frac{\partial A \rho \alpha_l u}{\partial x} &= -\phi, \\ \frac{\partial A \alpha_g \rho_g}{\partial t} + \frac{\partial A \alpha_g \rho_g u_g}{\partial x} &= q_g(x), \\ \frac{\partial A \alpha_l \rho_l}{\partial t} + \frac{\partial A \alpha_l \rho_l u_l}{\partial x} &= q_l(x), \\ \frac{\partial A (\alpha_g \rho_g u_g + \alpha_l \rho_l u_l)}{\partial t} + \frac{\partial A (\rho_g \alpha_g u_g^2 + \rho_l \alpha_l u_l^2 + \alpha_g p_g + \alpha_l p_l)}{\partial x} &= \\ &= (\alpha_g p_g + \alpha_l p_l) \frac{dA}{dx} - G, \\ \frac{\partial A (u_l - u_g)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(A \left(\frac{u_l^2}{2} - \frac{u_g^2}{2} + e_l + \frac{p_l}{\rho_l} - e_g - \frac{p_g}{\rho_g} \right) \right) &= \\ &= \left(e_l + \frac{p_l}{\rho_l} - e_g - \frac{p_g}{\rho_g} \right) \frac{dA}{dx} - \Lambda. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Члены G и Λ в уравнении импульса и уравнении для относительной скорости отвечают за силы тяжести и трения и определяются как

$$\begin{aligned} G &= A \rho g \sin \beta + (\Phi_l + \Phi_g), \\ \Lambda &= \frac{\Phi_l}{\alpha_l \rho_l} - \frac{\Phi_g}{\alpha_g \rho_g}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в формуле для G моделирует силу тяжести в трубе с углом наклона β и с учётом осреднения по сечению, $g \approx 9,81$ м/с² – ускорение силы тяжести. Члены Φ_l , Φ_g отвечают за межфазное трение и трение фаз о стенки трубы. Для замыкания системы необходимо определить зависимости $e_l(\rho_l)$, $e_g(\rho_g)$, $p_l(\rho_l)$, $p_g(\rho_g)$, а также силы трения Φ_l и Φ_g .

Замыкающие соотношения

Уравнения состояния каждой из фаз полагаются известными в виде зависимостей внутренней энергии от плотности

$$e_l = e_l(\rho_l), \quad e_g = e_g(\rho_g).$$

В качестве уравнений состояния жидкой и газообразной фазы, как и при моделировании течений четырёхфазной смеси (см. подраздел 1.2.2), используются двучленное и политропное уравнения состояния соответственно. Приведём здесь эти уравнения без учёта энтропии, так как тепловые процессы в данной постановке не учитываются.

$$e_l(\rho_l) = \frac{C_{l0}^2}{\gamma_l(\gamma_l - 1)} \left(\frac{\rho_l}{\rho_{l0}} \right)^{\gamma_l - 1} + \frac{\rho_{l0}C_{l0}^2 - \gamma_l p^0}{\gamma_l \rho_l},$$

$$e_g(\rho_g) = \frac{C_{g0}^2}{\gamma_g(\gamma_g - 1)} \left(\frac{\rho_g}{\rho_{g0}} \right)^{\gamma_g - 1}.$$

Тогда, в соответствии с первым законом термодинамики, зависимость давлений фаз от их плотностей выражается следующим образом

$$p_l = p_l(\rho_l) = \rho_l^2 \frac{\partial e_l(\rho_l)}{\partial \rho_l}, \quad p_g = p_g(\rho_g) = \rho_g^2 \frac{\partial e_g(\rho_g)}{\partial \rho_g}.$$

Заметим, что в некоторых случаях уравнение состояния удобнее представлять в виде зависимости давления от плотности $p_l = p_l(\rho_l)$, $p_g = p_g(\rho_g)$, например для соотношений, заданных в табличной форме. В этом случае энергии фаз могут быть вычислены по известным давлениям как $e_l = \int (p_l / \rho_l^2) d\rho_l$, $e_g = \int (p_g / \rho_g^2) d\rho_g$.

Силы трения представляются в виде сумм:

$$\Phi_g = \Phi_{gw} + \Phi_i, \quad \Phi_l = \Phi_{lw} - \Phi_i.$$

Здесь Φ_{gw} и Φ_{lw} отвечают за трение газа и жидкости о стенку трубы, Φ_i – за межфазное трение, а для их вычисления используются формулы:

$$\Phi_{gw} = \frac{\rho_g u_g |u_g|}{2} f_g S_g, \quad \Phi_{lw} = \frac{\rho_l u_l |u_l|}{2} f_l S_l, \quad \Phi_i = \frac{\rho_g (u_g - u_l) |u_g - u_l|}{2} f_i S_i.$$

Здесь f_l, f_g, f_i – коэффициенты трения, зависящие от параметров течения, а S_l, S_g, S_i – периметры смачивания, характеризующие размеры областей контакта фаз со стенками и между собой (см. рисунок 1.1) и вычисляемые по формулам:

$$S_l = \gamma R, \quad S_g = (2\pi - \gamma) R, \quad S_i = 2R \sin \frac{\gamma}{2},$$

где γ – угол смачивания, зависящий от объёмной доли жидкости и вычисляемый как решение алгебраического уравнения

$$\alpha_l = \frac{\gamma - \sin \gamma}{2\pi}.$$

Определим коэффициенты трения в соответствии с одним из вариантов, приведенных в [72]. Заметим, что f_i определяется по аналогии с f_g , то есть предполагается, что при очень большой разнице в плотностях фаз, как в случае воды и воздуха, трение газа о жидкость может описываться по аналогии с трением газа о стенку трубы.

$$f_g = \frac{C_g}{Re_g^{n_g}}, \quad f_i = \frac{C_i}{Re_i^{n_i}}.$$

Здесь Re_g, Re_i – числа Рейнольдса

$$Re_g = \frac{D_g |u_g| \rho_g}{\mu_g}, \quad Re_i = \frac{D_g |u_g - u_l| \rho_g}{\mu_g},$$

где $D_g = 4\alpha_g A / (S_i + S_g)$ – гидравлический диаметр, а C_g, C_i, n_g, n_i – константы, значения которых будут различными для различных режимов течения в зависимости от значений чисел Рейнольдса:

$$C_g, C_i = \begin{cases} 16 & Re_g, Re_i \leq 2100 \\ 0,046 & Re_g, Re_i > 2100 \end{cases}, \quad n_g, n_i = \begin{cases} 1 & Re_g, Re_i \leq 2100 \\ 0,2 & Re_g, Re_i > 2100 \end{cases}.$$

Коэффициент трения жидкости о стенку трубы f_l определяется особым образом:

$$f_l = \begin{cases} 24/Re_l & Re_l \leq 2100 \\ 0,0262/(\alpha_l Re_l)^{0,139} & Re_l > 2100 \end{cases}.$$

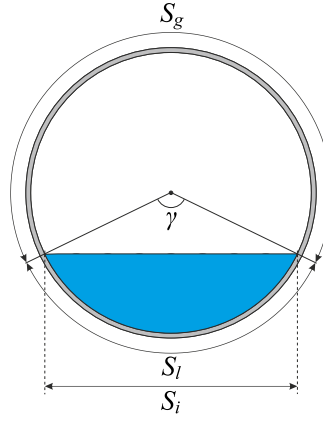


Рис. 1.1. Схема поперечного сечения трубы

Здесь

$$Re_l = \frac{D_l |u_l| \rho_l}{\mu_l}, \quad D_l = \frac{4\alpha_l A}{S_l}.$$

Для замыкания системы уравнений (1.29) необходимо также задать параметр τ , отвечающий за скорость релаксации давлений фаз. В некоторых рассматриваемых ниже тестовых расчетах использовано приближение мгновенной релаксации давлений, что соответствует предельному переходу $\tau \rightarrow 0$ в уравнении для α_l и приводит к необходимости численного решения уравнения $p_l = p_g$. Реализация данной процедуры описана в [32, 59] и будет приведена в главе 2.

1.3.3. Анализ характеристических свойств линеаризованной системы уравнений модели трубных течений

В данном разделе изучаются характеристические свойства линеаризованной системы, сформулированной в разделе 1.3.2. Данный анализ необходим для дальнейшего построения численного алгоритма решения предложенных уравнений и, в частности, для корректной обработки граничных условий. Наличие ненулевых членов в правых частях уравнений не играет роли при изучении характеристических свойств системы, поэтому в дальнейшем правые части будут опущены.

В терминах примитивных переменных $\mathbf{U} = (\alpha_l, \rho_l, \rho_g, u_l, u_g)^T$ систему (1.26)

без правых частей можно привести к виду, разрешённому относительно производных $\mathbf{U}$. Рассмотрим при этом линеаризованную систему, положив все коэффициенты при $\frac{\partial}{\partial x}$ постоянными и равными значениям в некоторый момент времени $t = t_0$ в некоторой точке $x = x_0$. Такая система будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_l}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \alpha_l}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho_l}{\partial t} + a_{10} \frac{\partial \alpha_l}{\partial x} + u_{l0} \frac{\partial \rho_l}{\partial x} + \rho_{l0} \frac{\partial u_l}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho_g}{\partial t} + a_{20} \frac{\partial \alpha_l}{\partial x} + u_{g0} \frac{\partial \rho_g}{\partial x} + \rho_{g0} \frac{\partial u_g}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u_l}{\partial t} + \frac{p_{g0} - p_{l0}}{\rho_0} \frac{\partial \alpha_l}{\partial x} + \frac{C_{l0}^2}{\rho_{l0}} \frac{\partial \rho_l}{\partial x} + u_{l0} \frac{\partial u_l}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u_g}{\partial t} + \frac{p_{g0} - p_{l0}}{\rho_0} \frac{\partial \alpha_l}{\partial x} + \frac{C_{g0}^2}{\rho_{g0}} \frac{\partial \rho_g}{\partial x} + u_{g0} \frac{\partial u_g}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (1.30)$$

где $a_{10} = \frac{\rho_{l0}\rho_{g0}\alpha_{g0}}{\alpha_{l0}\rho_0} (u_{l0} - u_{g0})$, $a_{20} = \frac{\rho_{l0}\rho_{g0}\alpha_{l0}}{\alpha_{g0}\rho_0} (u_{l0} - u_{g0})$, $b_0 = \frac{p_{g0} - p_{l0}}{\rho_0}$, а C_{l0} и C_{g0} – скорости звука, определяемые как $C_{l0}^2 = \left. \frac{dp_l}{d\rho_l} \right|_{\rho_l=\rho_{l0}}$, $C_{g0}^2 = \left. \frac{dp_g}{d\rho_g} \right|_{\rho_g=\rho_{g0}}$.

Запишем эту систему в матричной форме

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + B \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0 \quad (1.31)$$

с матрицей

$$B = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & u_l & \rho_l & 0 & 0 \\ b & \frac{C_l^2}{\rho_l} & u_l & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & u_g & \rho_g \\ b & 0 & 0 & \frac{C_g^2}{\rho_g} & u_g \end{pmatrix}, \quad (1.32)$$

где индексы «0» опущены. Выполнив несложные преобразования, можно найти характеристический многочлен

$$\chi(\lambda) = \det(B - \lambda I) = (u - \lambda) \left((u_l - \lambda)^2 - C_l^2 \right) \left((u_g - \lambda)^2 - C_g^2 \right)$$

и, решив уравнение $\chi(\lambda) = 0$, отыскать собственные значения матрицы $\mathbf{B}$:

$$\lambda_1 = u, \quad \lambda_{2,3} = u_l \pm C_l, \quad \lambda_{4,5} = u_g \pm C_g. \quad (1.33)$$

Для постановки граничных условий, а также для построения численного алгоритма на основе метода WENO, описанного в следующей главе, необходимо представить систему в терминах характеристических переменных, или инвариантов Римана. Поскольку матрица системы (1.32) размера 5×5 имеет 5 вещественных собственных значений (1.33) и, таким образом, 5 линейно независимых собственных векторов, она приводится к диагональной форме $B = T^{-1}DT$, где D – диагональная матрица с собственными числами матрицы B на диагонали, а T – невырожденная матрица левых собственных векторов. Таким образом, сделав замену $\mathbf{V} = T\mathbf{U}$, систему (1.31) можно записать в форме

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + D \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} = 0,$$

где $\mathbf{V} = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ – вектор характеристических переменных. Приведём здесь окончательный вид переменных v_i . Процедура приведения системы (1.30) к характеристической форме описана в приложении Б.

$$\begin{aligned} v_1 &= \alpha_l, \\ v_2 &= \alpha_+^l \alpha_l + \beta_+^l \rho_l + \delta_+^l u_l, \\ v_3 &= \alpha_-^l \alpha_l + \beta_-^l \rho_l + \delta_-^l u_l, \\ v_4 &= \alpha_+^g \alpha_l + \gamma_+^g \rho_g + \varepsilon_+^g u_g, \\ v_5 &= \alpha_-^g \alpha_l + \gamma_-^g \rho_g + \varepsilon_-^g u_g, \end{aligned} \tag{1.34}$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{\pm}^l &= -\frac{p_{g0} - p_{l0}}{\rho_0} \pm \frac{C_{l0} a_{10}}{\rho_{l0}}, & \alpha_{\pm}^g &= -\frac{p_{g0} - p_{l0}}{\rho_0} \pm \frac{C_{g0} a_{20}}{\rho_{g0}}, \\ \beta_{\pm}^l &= \pm \frac{(u_0 - u_{l0} \mp C_{l0}) C_{l0}}{\rho_{l0}}, & \gamma_{\pm}^g &= \pm \frac{(u_0 - u_{g0} \mp C_{g0}) C_{g0}}{\rho_{g0}}, \\ \delta_{\pm}^l &= u_0 - u_{l0} \mp C_{l0}, & \varepsilon_{\pm}^g &= u_0 - u_{g0} \mp C_{g0}. \end{aligned} \tag{1.35}$$

Здесь вновь пишем индекс «0», чтобы подчеркнуть, что характеристические переменные v_i выражаются через независимые примитивные переменные α_l , ρ_l , ρ_g , u_l , u_g по формулам (1.34) с коэффициентами (1.35), которые зависят уже от

линеаризованных значений примитивных переменных. Номер характеристической переменной в (1.34) соответствует номеру собственного значения (1.33), к которому он относится.

Выводы

В данной главе сформулированы уравнения, описывающие динамику многофазной сжимаемой среды с произвольным количеством фаз. Получены нестационарные уравнения осреднённой одномерной модели для описания течений двухфазных сжимаемых смесей в длинных трубах. Уравнения полученных математических моделей обладают следующими важными свойствами:

- Уравнения образуют симметрическую гиперболическую по Фридрихсу систему;
- Все уравнения имеют дивергентный вид;
- Уравнения удовлетворяют законам термодинамики. Для уравнений многофазных течений выполнены законы сохранения энергии и неубывания энтропии. Для уравнений трубных течений выполнен закон диссипации энергии.

Перечисленные свойства дают математическую основу для корректной постановки начально-краевых задач, обеспечивают термодинамическую согласованность сформулированных моделей и позволяют использовать эффективные методы для их численной реализации.

Глава 2

Численный алгоритм

В настоящей главе описывается построение алгоритма для численного решения уравнений предложенных в главе 1 математических моделей.

В разделе 2.1 описана численная реализация изэнтропической модели четырёхфазной среды на основе конечно-объёмной схемы первого порядка по времени. Вычисление потоков через границы расчётных ячеек производится с помощью метода GFORCE (подраздел 2.1.1), а начальные данные задачи о распаде разрыва задаются с помощью TVD-реконструкции с лимитером типа minmod, описанной в подразделе 2.1.2. Для корректного воспроизведения разрывных решений исследуемой системы уравнений необходимо использовать закон сохранения энергии в качестве одного из определяющих уравнений модели. В связи с этим вычисление значения энтропии смеси на очередном временном слое требует включения в алгоритм дополнительной неявной процедуры, описанной в подразделе 2.1.3. В подразделе 2.1.4 приведён метод учёта в вычислительном алгоритме эффекта релаксации давлений фаз к общей величине в приближении мгновенной релаксации $\tau \rightarrow 0$. Подраздел 2.1.5 содержит описание модификации численного алгоритма, позволяющей минимизировать дефекты численной схемы при моделировании границы раздела двух сред в рамках континуальной модели.

В разделе 2.2 строится вычислительный алгоритм на основе высокоточных методов Рунге-Кутты-TVD и Рунге-Кутты-WENO для решения уравнений модели трубных газожидкостных течений, полученной в разделе 1.3 главы 1. Подраздел 2.2.1 содержит описание используемого для интегрирования по времени метода Рунге-Кутты третьего порядка. Вычисление потоков на границах расчётных ячеек осуществляется с помощью метода GFORCE, аналогично тому как это сделано в вычислительном алгоритме для четырёхфазной моде-

ли (см. подраздел 2.1.1). Начальные данные задачи Римана, необходимые для расчёта потоков, вычисляются одним из двух способов: TVD-реконструкцией (аналогично подразделу 2.1.2) с лимитером типа minmod или полиномиальной WENO-реконструкцией пятого порядка, описанной в подразделе 2.2.2. В 2.2.3 приведён способ модификации базового численного алгоритма для описания течений с малыми значениями чисел Маха. В подразделе 2.2.4 рассматривается численная реализация граничных условий с учётом характеристических свойств системы уравнений. Подраздел 2.2.5 содержит описание методики учёта эффекта релаксации давлений фаз в численном алгоритме, включая неявную процедуру коррекции параметров фаз и метод расщепления системы при интегрировании по времени.

2.1. Одномерные уравнения для четырёхфазной среды в изэнтропическом приближении

В данном разделе описывается численный алгоритм, использующий TVD метод второго порядка точности [43], для решения одномерной системы уравнений четырёхфазного течения. Эти уравнения записываются в виде системы законов сохранения

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{S}(\mathbf{U}), \quad (2.1)$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho \alpha_i \\ \rho c_i \\ w^i \\ \rho \left(E + \frac{u^2}{2} \right) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + \rho^2 E_\rho + \rho w^n E_{w^n} \\ \rho \alpha_i u \\ \rho u c_i + \rho E_{w^i} \\ u w^i + E_{c_i} \\ \rho u \left(E + \frac{u^2}{2} + \rho E_\rho + w^n E_{w^n} \right) + E_{c_k} E_{w^k} \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

а вектор правых частей имеет вид: $\mathbf{S}(\mathbf{U}) = (0, 0, -\Phi_i, 0, -\Lambda_i, 0)$. Для интегрирования по времени используются схема первого порядка на основе дискретных аналогов законов сохранения (2.1) в пространственно-временной ячейке $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [t^n, t^{n+1}]$ с шагами $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ и $\Delta t = t^{n+1} - t^n$:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}) + \Delta t \mathbf{S}_i, \quad (2.3)$$

где $\mathbf{U}^n$ – аппроксимация $\mathbf{U}$ в ячейке x_i в момент времени t^n , а $\mathbf{F}_{i+1/2}$ – численные потоки на границах ячеек. Для замыкания численного алгоритма используется описанный ниже метод расчёта потоков $\mathbf{F}_{i+1/2}$.

2.1.1. Метод вычисления потоков на границах между расчётными ячейками

В приведённых ниже тестовых расчётах для вычисления значений потоков на границах ячеек используется так называемый метод GFORCE [43], при котором поток $F_{i+1/2}^{GF}$ вычисляется как комбинация потоков Лакса-Фридрихса $F_{i+\frac{1}{2}}^{LF}$ и Лакса-Вендроффа $F_{i+\frac{1}{2}}^{LW}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{GF} &= \omega \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{LW} + (1 - \omega) \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{LF} \\ \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{LF} &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}(\mathbf{U}_L) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_R)) - \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t} (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L) \\ \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{LW} &= \mathbf{F}(\mathbf{U}_{LW}), \mathbf{U}_{LW} = \frac{1}{2} (\mathbf{U}_R + \mathbf{U}_L) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}(\mathbf{U}_L) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_R)) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Вычисление «правых» и «левых» величин $\mathbf{U}_R$ и $\mathbf{U}_L$, служащих начальными данными для задачи Римана о распаде разрыва, осуществляется с помощью TVD-реконструкции с использованием лимитеров [43].

2.1.2. TVD-реконструкция

Величины $\mathbf{U}_R$ и $\mathbf{U}_L$, необходимые для расчёта потоков (2.4), вычисляются для каждой ячейки с помощью линейной реконструкции значений $\mathbf{U}_i$. Ниже, в соответствии с [43], приведены формулы для вычисления каждой компоненты

векторов $\mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L$ с использованием minmod лимитера.

$$U_L = U_i^n - \frac{1}{2}\sigma_i, \quad U_R = U_i^n + \frac{1}{2}\sigma_i,$$

где σ_i определяется для каждой ячейки следующим образом

$$\sigma_i = \begin{cases} \max [0, \min (\Delta_{i-1/2}, \Delta_{i+1/2})], & \Delta_{i+1/2} \geq 0, \\ \min [0, \max (\Delta_{i-1/2}, \Delta_{i+1/2})], & \Delta_{i+1/2} < 0. \end{cases}$$

Здесь $\Delta_{i\pm 1/2}$ – разности значений U_i в соседних ячейках:

$$\Delta_{i-1/2} = U_i^n - U_{i-1}^n, \quad \Delta_{i+1/2} = U_{i+1}^n - U_i^n.$$

2.1.3. Вычисление энтропии смеси

Как было отмечено в разделе 1.2, при конструировании численного алгоритма закон баланса энтропии в системе (1.19) необходимо заменить законом сохранения энергии. Это связано с тем, что нас будет интересовать численное моделирование разрывных решений рассматриваемой системы, для которых закон сохранения энтропии не выполнен [69]. Вычисление значения энтропии смеси S при этом осуществляется неявным образом после вычисления значений всех остальных независимых переменных $\mathbf{U}$ на очередном временном слое.

Согласно данному в разделе 1.2 определению, внутренняя энергия четырёхфазной смеси в одномерном случае имеет вид

$$E = c_1 e_1(\rho_1, S) + c_2 e_2(\rho_2, S) + c_3 e_3(\rho_3, S) + c_4 e_4(\rho_4, S) + \\ + \frac{1}{2} (c_1 w_1^2 + c_2 w_2^2 + c_3 w_3^2) - \frac{1}{2} (c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3)^2.$$

Значения входящих в данное выражение параметров фаз: $c_i = \frac{U_{i+5}}{U_1}$ и $w_j = U_{i+8}$, а также $\rho_i = \frac{c_i \alpha_i}{\rho} = \frac{U_{i+5} U_{i+2}}{U_1^3}$, $i = 1, 2, 3$ выражаются через компоненты вектора $\mathbf{U}$ и считаются известными на текущем временном слое. Здесь и далее через U_i обозначены компоненты вектора $\mathbf{U}$ консервативных переменных из (2.2). Известна также полная энергия смеси

$$E_{total} = E + \frac{u^2}{2} = \frac{U_{12}}{\rho}.$$

Входящая в выражение полной энергии средняя скорость смеси также выражается через консервативные переменные: $u_i = \frac{U_2}{U_1}$.

Введём функцию

$$\mathcal{F}(S) = E_{total} - e(S) - A,$$

где

$$e(S) = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 + c_4 e_4,$$

$$A = \frac{u^2}{2} + \frac{1}{2} (c_1 w_1^2 + c_2 w_2^2 + c_3 w_3^2) - \frac{1}{2} (c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3)^2$$

и будем искать значение энтропии S как решение алгебраического уравнения

$$\mathcal{F}(S) = 0. \quad (2.5)$$

Уравнение (2.5) решается методом Ньютона. В качестве начального приближения задаётся $S^{(0)} = 0$, затем $S^{(n+1)}$ вычисляется как

$$S^{(n+1)} = S^{(n)} - \frac{\mathcal{F}(S^{(n)})}{\mathcal{F}'(S^{(n)})}.$$

Здесь n – номер итерации метода Ньютона. Сходимость процесса контролируется величиной приращения:

$$|S^{(n)} - S^{(n-1)}| \geq \varepsilon, \quad \varepsilon \sim 10^{-4}.$$

Вычисленное таким образом значение энтропии смеси используется для определения термодинамических параметров на следующем временном слое.

2.1.4. Неявная численная процедура для учёта эффекта релаксации давлений

В зависимости от конкретного случая, аппроксимация правых частей $\mathbf{S}_i$ в (2.1) может осуществляться различными способами. В ряде случаев оправдано предположение о мгновенной релаксации давлений к общей величине. Такое допущение справедливо, например, в задачах, где характерное время пробега волн

по характерному масштабу неоднородности среды много меньше интересующих временных масштабов.

При численной реализации данного эффекта правые части в уравнениях на объёмные концентрации опускаются, и в основном алгоритме решаются однородные уравнения

$$\frac{\partial \rho \alpha_j}{\partial t} + \frac{\partial \rho u \alpha_j}{\partial x} = 0 \quad j = 1, 2, 3.$$

Далее, в конце каждого шага по времени осуществляется коррекция объёмных концентраций и плотностей фаз путём решения системы из трёх уравнений:

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4. \quad (2.6)$$

Опишем процесс решения системы (2.6) более подробно. Введём функции $f_i = p_1 - p_i$, $i = 1, 2, 3$, и запишем систему (2.6) в виде

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.7)$$

Система (2.7) решается относительно переменных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ при фиксированных значениях величин

$$m_1 = \alpha_1 \rho_1, \quad m_2 = \alpha_2 \rho_2, \quad m_3 = \alpha_3 \rho_3, \quad S.$$

Значения $m_i = \alpha_i \rho_i = \frac{U_{i+2}}{U_1} \cdot \frac{U_{i+5} U_{i+2}}{U_1^3}$, $i = 1, 2, 3$ выражаются через компоненты вектора $\mathbf{U}$, а S вычисляется описанным в подразделе 2.1.3 образом. В этом случае давления фаз p_i , а значит и функции f_i , можно рассматривать как функции от α_i . Действительно,

$$p_i = \rho_i \frac{\partial e_i}{\partial \rho_i}(\rho_i, S) = \frac{m_i^2}{\alpha_i^2} \frac{\partial e_i}{\partial \rho_i} \left(\frac{m_i}{\alpha_i}, S \right). \quad (2.8)$$

Система (2.7) решается методом Ньютона. В качестве начального приближения задаются известные на данном временном слое значения объёмных концентраций, то есть $\alpha_i^0 = \frac{U_{i+2}}{U_1}$, $i = 1, 2, 3$. Итерационный процесс организуется

следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}^{(n)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}^{(n-1)} - (\mathcal{J}^{-1})^{(n-1)} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}^{(n-1)}. \quad (2.9)$$

Здесь $f_i^{(n)} = f_i(\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \alpha_3^{(n)})$. Элементы матрицы Якоби $\mathcal{J}$ определяются из соотношения (2.8):

$$\begin{aligned} j_{kl} &= \frac{\partial f_k}{\partial \alpha_l} = \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_l} - \frac{\partial p_{k+1}}{\partial \alpha_l}, \\ \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_i} &= -\frac{m_i^2}{\alpha_i^3} \left(2 \frac{\partial e_i}{\partial \rho_i} \left(\frac{m_i}{\alpha_i}, S \right) + \frac{m_i}{\alpha_i} \frac{\partial^2 e_i}{\partial \rho_i \partial \rho_i} \left(\frac{m_i}{\alpha_i}, S \right) \right), \quad i = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_j} &= 0, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad i \neq j, \\ \frac{\partial p_4}{\partial \alpha_i} &= \frac{m_4^2}{\alpha_4^3} \left(2 \frac{\partial e_4}{\partial \rho_i} \left(\frac{m_4}{\alpha_4}, S \right) + \frac{m_4}{\alpha_4} \frac{\partial^2 e_4}{\partial \rho_i \partial \rho_i} \left(\frac{m_4}{\alpha_4}, S \right) \right), \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

где

$$m_4 = \rho - m_1 - m_2 - m_3, \quad \alpha_4 = 1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3.$$

Сходимость процесса контролируется величиной нормы приращения. Процесс сходится, если

$$\|\bar{\alpha}^{(n)} - \bar{\alpha}^{(n-1)}\|_{\mathbb{R}^3} \leq \varepsilon, \quad \varepsilon \sim 10^{-6},$$

где $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

После завершения итерационного процесса производится коррекция значений плотностей фаз с учётом новых значений объёмных концентраций:

$$\rho_i = \frac{U_{i+5}}{\alpha_i}.$$

2.1.5. Схема для объёмных концентраций, сохраняющая однородный фон начальных данных

При решении некоторых задач необходимо уделять особое внимание аппроксимации объёмных долей α_i . Примером служат задачи с постоянными начальными значениями параметров фаз, таких как плотности и скорости фаз, в

присутствии значительного разрыва в начальных значениях объёмных концентраций. Поскольку структура рассматриваемой модели не допускает вырождения фаз (α_i не может быть равно 0), необходимость задания начальных условий с большим скачком объёмных концентраций может возникнуть, например, при моделировании частично разделённой смеси.

Эксперименты показывают, что базовый вычислительный алгоритм может давать нефизичные решения таких задач, содержащие существенные численные дефекты в области скачка концентраций. Устранить или по крайней мере существенно уменьшить такие численные дефекты удаётся с помощью специальной модификации схемы, при которой аппроксимация для α_i определяется особым образом. Общая идея построения подобной модификации изложена в работе [73]. Здесь приводится построение аналогичной численной процедуры для используемых методов вычисления потоков на границах расчётных ячеек.

Рассмотрим закон сохранения массы k -й фазы системы (2.1)–(2.2)

$$\frac{\partial \rho_k \alpha_k}{\partial t} + \frac{\partial \rho_k u_k \alpha_k}{\partial x} = 0. \quad (2.10)$$

Будем искать аппроксимацию α_k таким образом, чтобы при условии постоянства ρ_k и u_k в начальный момент времени $t = 0$, эти величины оставались постоянными и в любой момент $t > 0$. Пусть для решения уравнения (2.10) применяется разностная схема с использованием метода Лакса-Фридрихса для расчёта потоков на границах ячеек. Тогда в соответствии с формулами (2.4) для $\mathbf{F}_{i+1/2}^{LF}$ имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d(\rho_k \alpha_k)_i}{dt} = & -\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{1}{2} \left[(\rho_k u_k \alpha_k)_{i+1/2}^L + (\rho_k u_k \alpha_k)_{i+1/2}^R \right] - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \left[(\rho_k \alpha_k)_{i+1/2}^R - (\rho_k \alpha_k)_{i+1/2}^L \right] \right) + \\ & + \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{1}{2} \left[(\rho_k u_k \alpha_k)_{i-1/2}^L + (\rho_k u_k \alpha_k)_{i-1/2}^R \right] - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \left[(\rho_k \alpha_k)_{i-1/2}^R - (\rho_k \alpha_k)_{i-1/2}^L \right] \right). \end{aligned}$$

Перепишем последнее равенство, предположив, что начальные значения плотности и скорости фаз во всех ячейках постоянны, а скорости всех фаз, кроме

того, равны между собой: $(\rho_k)_i = R_k$ для всех i , $(u_k)_i = U$ для всех i и k . Кроме того, распишем производную по времени в левой части равенства:

$$\begin{aligned} & (\alpha_k)_i \frac{d(\rho_k)_i}{dt} + (\rho_k)_i \frac{d(\alpha_k)_i}{dt} = \\ & -\frac{R_k}{\Delta x} \left(\frac{U}{2} \left[(\alpha_k)_{i+1/2}^L + (\alpha_k)_{i+1/2}^R \right] - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \left[(\alpha_k)_{i+1/2}^R - (\alpha_k)_{i+1/2}^L \right] \right) + \\ & + \frac{R_k}{\Delta x} \left(\frac{U}{2} \left[(\alpha_k)_{i-1/2}^L + (\alpha_k)_{i-1/2}^R \right] - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \left[(\alpha_k)_{i-1/2}^R - (\alpha_k)_{i-1/2}^L \right] \right). \end{aligned}$$

Если в данном равенстве положить $(\rho_k)_i \frac{d(\alpha_k)_i}{dt}$ равным правой части, то получим равенство $(\alpha_k)_i \frac{d(\rho_k)_i}{dt} = 0$, означающее неизменность во времени значений $(\rho_k)_i$, так как $(\alpha_k)_i \neq 0$.

Выберем следующую аппроксимацию для производной $\frac{d(\alpha_k)_i}{dt}$:

$$\begin{aligned} & \frac{d(\alpha_k)_i}{dt} = \\ & -\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{1}{2} (u)_i^n \left[(\alpha_k)_{i+1/2}^L + (\alpha_k)_{i+1/2}^R \right] - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \left[(\alpha_k)_{i+1/2}^R - (\alpha_k)_{i+1/2}^L \right] \right) + \\ & + \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{1}{2} (u)_i^n \left[(\alpha_k)_{i-1/2}^L + (\alpha_k)_{i-1/2}^R \right] - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \left[(\alpha_k)_{i-1/2}^R - (\alpha_k)_{i-1/2}^L \right] \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Данное равенство может рассматриваться как аппроксимация уравнения баланса объёмных долей (третье уравнение системы (2.1), (2.2)) без учёта правой части в форме

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + u \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} = 0.$$

Формула (2.11) обеспечивает выполнение равенства $(\alpha_k)_i \frac{d(\rho_k)_i}{dt} = 0$ при обозначенных условиях $(\rho_k)_i = R_k$, $(u_k)_i = U$, и, таким образом, однородный фон начальных данных сохраняется во времени.

При использовании данного метода из базового алгоритма исключается интегрирование уравнений баланса объёмных долей, а вместо этого, вычисление значений $(\alpha_k)_i$ на следующем временном слое осуществляется с использованием схемы (2.11). Для интегрирования по времени в (2.11) используется тот же метод, что и в базовом алгоритме.

Применение описанного численного метода будет продемонстрировано в подразделе 3.2.3 на примере моделирования границы раздела жидкой и газообразной фаз.

2.2. Уравнения течения двухфазной газожидкостной смеси в трубах

Для численного решения уравнений (1.29), сформулированных в разделе 1.3, построены алгоритмы на основе методов Рунге-Кутты-TVD (RK-TVD) и Рунге-Кутты-WENO (RK-WENO). Интегрирование по времени осуществляется с помощью так называемых SSPRK (Strong Stability Preserved Runge-Kutta) методов Рунге-Кутты – сохраняющих монотонность схем, детально описанных в работе [52]. Для вычисления значений потоков через границы ячеек используется метод GFORCE [43], описание которого уже приводилось в подразделе 2.1.1 при построении вычислительного алгоритма для модели четырёхфазной среды. Для расчёта «правых» и «левых» величин, необходимых для определения потоков, используется один из двух видов реконструкции данных в расчётных ячейках: TVD-реконструкция с лимитером типа minmod [46], которая также использовалась в алгоритме для модели четырёхфазной среды (см. подраздел 2.1.2) или полиномиальная WENO-реконструкция 5-го порядка [46]. Обработка граничных условий осуществляется с учётом характеристической структуры определяющих уравнений модели, описанной в подразделе 1.3.3 главы 1. Особое внимание уделяется реализации учёта релаксации давлений фаз к общей величине в численном алгоритме. Это обусловлено тем, что рассматриваемые в работе приближения мгновенной релаксации давлений и релаксации за малое конечное время вызывают трудности при явном интегрировании, связанные с жёсткостью системы.

Сформулируем уравнения модели и перейдём к детальному описанию основных этапов вычислительного алгоритма. В приведённых в главе 3 задачах

рассматриваются трубы постоянного сечения при $A = \text{const}$, поэтому в данном случае уравнения нестационарной одномерной осреднённой модели (1.29) могут быть записаны в общем виде как

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{Q}(\mathbf{U}), \quad (2.12)$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \alpha_l \\ \alpha_g \rho_g \\ \alpha_l \rho_l \\ \alpha_g \rho_g u_g + \alpha_l \rho_l u_l \\ u_l - u_g \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho \alpha_l u \\ \alpha_g \rho_g u_g \\ \alpha_l \rho_l u_l \\ \alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_l \rho_l u_l^2 \\ \frac{u_l^2}{2} - \frac{u_g^2}{2} + e_l + \frac{p_l}{\rho_l} - e_g - \frac{p_g}{\rho_g} \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{U}$ – вектор консервативных переменных, $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ – вектор потоков, $\mathbf{Q}(\mathbf{U}) = A^{-1}(\phi, 0, 0, -G, -\Lambda)^T$ – вектор правых частей.

2.2.1. Интегрирование по времени: метод Рунге-Кутты 3-го порядка

Рассмотрим конечно-объёмную дискретизацию системы уравнений (2.12) в пространственной ячейке равномерной сетки $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ с шагом $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$:

$$\frac{d\mathbf{U}_i}{dt} + \frac{\mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}}{\Delta x} = \mathbf{Q}(x_i, \mathbf{U}_i). \quad (2.13)$$

Решение (2.13) сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений, если известны значения потоков $F_{i\pm 1/2}$ на границах между ячейками. Для численного интегрирования данного уравнения используется метод Рунге-Кутты, при описании которого удобно использовать следующую запись уравнения (2.13)

$$\frac{d\mathbf{U}_i}{dt} = L(\mathbf{U}), \quad \text{где} \quad L(\mathbf{U}) = -\frac{\mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}}{\Delta x} + \mathbf{Q}(x_i, \mathbf{U}_i).$$

В приведённых обозначениях формулы метода Рунге-Кутты третьего порядка [52] имеют вид

$$\mathbf{U}^{(0)} = \mathbf{U}^n,$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}^{(i)} &= \mathbf{U}^{(i-1)} + \frac{1}{2}\Delta t L \left(\mathbf{U}^{(i-1)} \right), \quad i = 1, \dots, m-1, \\
\mathbf{U}^{(m)} &= \sum_{k=0}^{m-2} \alpha_{m,k} \mathbf{U}^{(k)} + \alpha_{m,m-1} \left(\mathbf{U}^{(m-1)} + \frac{1}{2}\Delta t L \left(\mathbf{U}^{(m-1)} \right) \right), \\
\mathbf{U}^{n+1} &= \mathbf{U}^{(m)},
\end{aligned} \tag{2.14}$$

где $m = 4$, а коэффициенты $\alpha_{m,k}$ выбираются следующим образом: $\alpha_{4,0} = 0$, $\alpha_{4,1} = 2/3$, $\alpha_{4,2} = 0$, $\alpha_{4,3} = 1/3$. Здесь $\mathbf{U}^n$ и $\mathbf{U}^{n+1}$ – значения решения на n -ом и $(n+1)$ -ом временных слоях, а шаг по времени Δt определяется из условия Куранта-Фридрихса-Леви

$$\Delta t \leq K_{CFL} \min_i \left(\frac{\Delta x}{C_i^{max}} \right),$$

где $K_{CFL} < 1$ – число Куранта-Фридрихса-Леви, C_i^{max} – максимальная скорость распространения возмущений в точке i .

2.2.2. WENO-реконструкция 5-го порядка по пространству

Для процедуры WENO-реконструкции используется линеаризованный вариант системы (2.12) в характеристической форме, в которой правые части опускаются. Пусть линеаризованная система (2.12) имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + B \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0,$$

где B – матрица линеаризованных коэффициентов. Такая система, будучи гиперболической, приводится к диагональной форме заменой $\mathbf{V} = T\mathbf{U}$, где $\mathbf{V}$ – вектор характеристических переменных, а T – невырожденная матрица левых собственных векторов матрицы A . Тогда $A = T^{-1}DT$, где D – диагональная матрица с собственными числами матрицы A на диагонали, и преобразованная система имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + D \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} = 0.$$

WENO-реконструкция осуществляется единообразно для всех компонент вектора $\mathbf{V}$, поэтому мы ограничимся описанием метода для одной скалярной вели-

чины, являющейся решением уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \lambda \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Рассмотрим ячейку $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$. Для данной ячейки определяются «правые» и «левые» величины, которые будут получены как результат реконструкции: $v_{i-1/2}^R = v(x_{i-1/2} + 0)$, $v_{i+1/2}^L = v(x_{i+1/2} - 0)$. Для данной ячейки вычисляются так называемые индикаторы гладкости:

$$\begin{aligned}\beta_0 &= \frac{13}{12}(v_i - 2v_{i+1} + v_{i+2})^2 + \frac{1}{4}(3v_i - 4v_{i+1} + v_{i+2})^2, \\ \beta_1 &= \frac{13}{12}(v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1})^2 + \frac{1}{4}(v_{i-1} - v_{i+1})^2, \\ \beta_2 &= \frac{13}{12}(v_{i-2} - 2v_{i-1} + v_i)^2 + \frac{1}{4}(v_{i-2} - 4v_{i-1} + 3v_{i+2})^2,\end{aligned}$$

затем нелинейные весовые коэффициенты

$$\omega_k = \frac{\alpha_k}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2}, \quad \alpha_k = \frac{d_k}{(\beta_k + \varepsilon)^2}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Малая величина ε (обычно берётся $\varepsilon = 10^{-6}$) вводится с целью избежать обращения знаменателя в нуль, а коэффициенты d_k будут различны для вычисления правых и левых величин. Правые и левые величины вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}v_{i-1/2}^R &= \frac{1}{6}(\omega_0(2v_{i+2} - 7v_{i+1} + 11v_i) + \omega_1(-v_{i+1} + 5v_i + 2v_{i-1}) + \\ &\quad + \omega_2(-v_{i-2} + 5v_{i-1} + 2v_i))\end{aligned}$$

при $d_0 = \frac{1}{10}, d_1 = \frac{3}{5}, d_2 = \frac{3}{10}$,

$$\begin{aligned}v_{i+1/2}^L &= \frac{1}{6}(\omega_0(-v_{i+2} + 5v_{i+1} + 2v_i) + \omega_1(-v_{i-1} + 5v_i + 2v_{i+1}) + \\ &\quad + \omega_2(2v_{i-2} - 7v_{i-1} + 11v_i))\end{aligned}$$

при $d_0 = \frac{3}{10}, d_1 = \frac{3}{5}, d_2 = \frac{1}{10}$.

После того как $\mathbf{V}_L$ и $\mathbf{V}_R$ найдены по приведённым выше формулам, реконструированные значения примитивных переменных, необходимые для расчёта потоков (2.4), вычисляются обратной заменой

$$\mathbf{U}_L = T^{-1}\mathbf{V}_L, \mathbf{U}_R = T^{-1}\mathbf{V}_R. \quad (2.15)$$

Заметим, что поскольку в данных формулах участвуют ячейки с номерами, выходящими за пределы нумерации внутренних ячеек расчетной области, для реконструкции данных в окрестности границ необходимо ввести дополнительные фиктивные точки с обоих концов расчётной области. Следуя [46], в этих точках задаются достаточно большие значения параметров, возрастающие от границы. Заданные таким образом большие фиктивные значения служат лишь для унификации процедуры реконструкции во всех точках и не приводят к возникновению больших значений реконструированных функций внутри области, поскольку большие значения обрезаются за счёт нелинейных весовых коэффициентов ω . Вычисление потоков в граничных ячейках затем осуществляется отдельно в соответствии с краевыми условиями задачи с использованием приходящих на границу характеристических переменных и без учёта значений в фиктивных точках.

2.2.3. Модификация схемы для описания течений с малыми значениями чисел Маха

При решении некоторых задач необходима дополнительная коррекция реконструированных значений скоростей фаз u_{lL} , u_{lR} , u_{gL} , u_{gR} , полученных путём WENO-реконструкции. Оказывается, что методика коррекции скоростей для течений с малым числом Маха, описанная в работе [74], позволяет существенно улучшить численное решение в ряде случаев. Скорректированные значения выражаются через известные «левые» и «правые» значения скоростей, полученные по формулам (2.15), следующим образом

$$\begin{aligned} u_{lL}^* &= \frac{u_{lL} + u_{lR}}{2} + z_l \frac{u_{lL} - u_{lR}}{2}, & u_{lR}^* &= \frac{u_{lL} + u_{lR}}{2} + z_l \frac{u_{lR} - u_{lL}}{2}, \\ u_{gL}^* &= \frac{u_{gL} + u_{gR}}{2} + z_g \frac{u_{gL} - u_{gR}}{2}, & u_{gR}^* &= \frac{u_{gL} + u_{gR}}{2} + z_g \frac{u_{gR} - u_{gL}}{2}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где

$$\begin{aligned} z_l &= \min(M_l, 1), & M_l &= \max(M_{lL}, M_{lR}), \\ z_g &= \min(M_g, 1), & M_g &= \max(M_{gL}, M_{gR}), \end{aligned}$$

а M_{iL} , M_{iR} , $i = l, g$ – это числа Маха для реконструированных значений скоростей:

$$M_{lL} = \frac{u_{lL}}{C_{lL}}, \quad M_{lR} = \frac{u_{lR}}{C_{lR}}, \quad M_{gL} = \frac{u_{gL}}{C_{gL}}, \quad M_{gR} = \frac{u_{gR}}{C_{gR}}.$$

Здесь C_{iL} , C_{iR} , $i = l, g$ – скорости звука газа и жидкости, вычисленные по реконструированным значениям параметров фаз.

На дальнейших этапах численного алгоритма реконструированные значения скоростей фаз u_{lL} , u_{lR} , u_{gL} , u_{gR} заменяются скорректированными значениями u_{lL}^* , u_{lR}^* , u_{gL}^* , u_{gR}^* .

2.2.4. Граничные условия

В данном разделе описывается задание граничных условий в общем виде для задач моделирования трубных течений, представленных в разделе 3.3 главы 3, с помощью модели, описанной в разделе 1.3.2 главы 1. Численные эксперименты, связанные с моделированием течений четырёхфазных смесей, описанные в разделе 3.2, представляют собой решения задачи Римана о распаде разрыва с различными начальными условиями. При исследовании таких задач интерес представляет эволюция разрыва в начальных значениях некоторых параметров течения, задаваемого внутри расчётной области. Сама расчётная область при этом полагается безграничной, что моделируется соответствующим переопределением значений переменных в крайних ячейках сетки. Вопрос постановки граничных условий в этом случае не рассматривается.

Во всех представленных в главе 3 численных экспериментах по моделированию трубных течений рассматривается одна из трёх конфигураций граничных условий. В первом случае на левом конце трубы задаются постоянные скорости жидкости и газа, а правый конец полагается открытым, что математически означает задание постоянных и равных значений давлений фаз на границе расчётной области. Во втором случае правый конец трубы также полагается открытым, а левый конец – закрытым, что означает равенство нулю граничных

значений скоростей фаз. Таким образом этот случай сводится к первому. В третьем случае оба конца трубы полагаются закрытыми, то есть нулевые скорости задаются и на входе, и на выходе. Таким образом, при формальном описании граничных условий можно ограничиться перечисленными случаями.

Условия на входе. Считаем, что на левой границе расчётной области заданы постоянные скорости фаз и концентрация жидкости:

$$u_l^b = U_l, \quad u_g^b = U_g, \quad \alpha_l^b = A. \quad (2.17)$$

Верхним индексом b всюду будем обозначать значение соответствующей величины на границе области. Необходимо корректно определить граничные значения оставшихся независимых переменных – плотностей фаз ρ_l, ρ_g . Для этого используется тот факт, что характеристические переменные v_3 и v_5 линеаризованной системы (1.30), соответствующие собственным значениям $\lambda_3 = u_l - C_l$ и $\lambda_5 = u_g - C_g$, сохраняют значения вдоль характеристик системы, приходящих на левую границу: $\frac{dx}{dt} = \lambda_3$ и $\frac{dx}{dt} = \lambda_5$ соответственно. Таким образом, можно считать, что значения v_3 и v_5 в первой расчётной ячейке переносятся на границу области. Для v_3 это означает

$$v_3^b = (v_3)_1.$$

Обратимся к выражениям (1.34), (1.35) характеристических переменных v_i через примитивные переменные $\alpha_l, \rho_l, \rho_g, u_l, u_g$, данным в разделе 1.3.3. Раскроем обе части приведённого тождества в соответствии с этими формулами:

$$\alpha_-^l \alpha_l^b + \beta_-^l \rho_l^b + \delta_-^l u_l^b = \alpha_-^l (\alpha_l)_1 + \beta_-^l (\rho_l)_1 + \delta_-^l (u_l)_1.$$

Подставим известные из граничных условий величины:

$$\alpha_-^l A + \beta_-^l \rho_l^b + \delta_-^l U_l = \alpha_-^l (\alpha_l)_1 + \beta_-^l (\rho_l)_1 + \delta_-^l (u_l)_1.$$

Считая, что значения величин в первой ячейке $(\cdot)_1$ известны на текущем временном слое, из последнего равенства можем выразить значение ρ_l на границе:

$$\rho_l^b = (\rho_l)_1 + K_1^l ((\alpha_l)_1 - A) + K_2^l ((u_l)_1 - U_l), \quad K_1^l = \frac{\alpha_-^l}{\beta_-^l}, \quad K_2^l = \frac{\delta_-^l}{\beta_-^l}. \quad (2.18)$$

Выполнив аналогичные преобразования для тождества $v_5^b = (v_5)_1$, получим выражение для граничного значения плотности газа

$$\rho_g^b = (\rho_g)_1 + K_1^g ((\alpha_l)_1 - A) + K_2^g ((u_g)_1 - U_g), K_1^g = \frac{\alpha_-^g}{\gamma_-^g}, K_2^g = \frac{\varepsilon_-^g}{\gamma_-^g}. \quad (2.19)$$

Данные (2.17) в совокупности с выражениями (2.18) и (2.19) полностью определяют краевые условия на левой границе расчётной области.

В задачах, где левый конец трубы полагается закрытым, граничные условия можно задавать двумя способами. С одной стороны, это соответствует частному случаю условий (2.17)–(2.19) при $U_l = U_g = 0$. С другой стороны, нулевые скорости на границе можно моделировать с помощью введения фиктивной ячейки с номером 0 левее границы расчётной области. Значения скоростей фаз в фиктивной ячейке полагаются равными по модулю, но противоположными по знаку значениям скоростей в первой, приграничной ячейке. Значения остальных параметров течения в фиктивной ячейке полагаются равными значениям в первой ячейке:

$$(\alpha_l)_0 = (\alpha_l)_1, (\rho_l)_0 = (\rho_l)_1, (\rho_g)_0 = (\rho_g)_1, (u_l)_0 = -(u_l)_1, (u_g)_0 = -(u_g)_1.$$

Условия на выходе: открытый конец. Рассмотрим случай, когда на правой границе расчётной области задаётся условие равенства давлений фаз некоторому постоянному значению p_{atm} . Зная уравнения состояния и выражения для давлений фаз, описанные в разделе 1.3.2 главы 1, можно получить значения плотностей фаз при условии $p_l(\rho_l) = p_g(\rho_g) = p_{atm}$. То есть можно считать, что на правой границе заданы значения плотностей фаз

$$\rho_l^b = R_l, \quad \rho_g^b = R_g, \quad (2.20)$$

где $R_l = \rho_l(p_{atm})$, $R_g = \rho_g(p_{atm})$. Заметим, что поскольку $\alpha_l = v_1$, значение α_l сохраняется вдоль характеристики $\frac{dx}{dt} = u_0$, приходящей на правую границу. То есть

$$\alpha_l^b = (\alpha_l)_N. \quad (2.21)$$

Для вычисления граничных значений u_l и u_g рассмотрим характеристические переменные v_2 и v_4 , значения которых постоянны на соответствующих звуковых характеристиках. Для u_l имеем:

$$v_2^b = (v_2)_N,$$

$$\alpha_+^l \alpha_l^b + \beta_+^l R_l + \delta_+^l u_l^b = \alpha_+^l (\alpha_l)_N + \beta_+^l (\rho_l)_N + \delta_+^l (u_l)_N.$$

Учитывая, что $\alpha_l^b = (\alpha_l)_N$, получаем выражение для значения скорости жидкости на границе:

$$u_l^b = (u_l)_N + \frac{\beta_+^l}{\delta_+^l} ((\rho_l)_N - R_l). \quad (2.22)$$

Аналогичное выражение для скорости газа можно получить, рассмотрев тождество $v_4^b = (v_4)_N$. Приведём конечную формулу:

$$u_g^b = (u_g)_N + \frac{\gamma_+^g}{\varepsilon_+^g} ((\rho_g)_N - R_g). \quad (2.23)$$

Условия на правой границе полностью определяются выражениями (2.20) – (2.23).

Условия на выходе: закрытый конец. В этом случае, как и в случае с закрытым левым концом, задавать граничные условия можно двумя способами. Поскольку нас не будут интересовать постановки задач с втеканием смеси в правый конец трубы, то есть с ненулевыми заданными граничными скоростями, можем ограничиться использованием «антисимметричных» условий на правой границе. Для этого в фиктивной ячейке с номером $N + 1$ задаются значения

$$(\alpha_l)_{N+1} = (\alpha_l)_N, (\rho_l)_{N+1} = (\rho_l)_N, (\rho_g)_{N+1} = (\rho_g)_N,$$

$$(u_l)_{N+1} = -(u_l)_N, (u_g)_{N+1} = -(u_g)_N,$$

полностью определяющие граничные условия на правом конце.

2.2.5. Учёт эффекта релаксации давлений

Неявная численная процедура для учёта эффекта релаксации давлений

В тестовых расчётах, приведенных ниже, использовался один из двух вариантов учёта эффекта релаксации давлений: приближение мгновенной релаксации давлений и релаксация за конечное время [32, 59]. В случае использования приближения мгновенной релаксации давлений, на первом этапе осуществляется расчёт по разностной схеме, в которой в уравнении для α_l (последнее уравнение системы (1.29)) отброшена правая часть, моделирующая релаксацию давлений. Затем, после выполнения шага по времени, производится процедура выравнивания давлений фаз. Она осуществляется коррекцией объемных концентраций и плотностей фаз с использованием значений консервативных переменных $\alpha_l \rho_l, \alpha_g \rho_g$, вычисленных из второго и третьего уравнений системы (1.29). Таким образом, в конце каждого шага по времени в каждой точке по известным вычисленным значениям $\theta_l = (\alpha_l \rho_l)_i^{n+1}, \theta_g = (\alpha_g \rho_g)_i^{n+1}$ решается нелинейное алгебраическое уравнение $p_l((\rho_l)_i^{n+1}) = p_g((\rho_g)_i^{n+1})$ для объемной концентрации жидкой фазы $(\alpha_l)_i^{n+1}$, где $(\rho_l)_i^{n+1} = \frac{\theta_l}{(\alpha_l)_i^{n+1}}, (\rho_g)_i^{n+1} = \frac{\theta_g}{(1-\alpha_l)_i^{n+1}}$. Уравнение решается методом Ньютона, и после отыскания $\alpha_{fin} = (\alpha_l)_i^{n+1}$ вычисляются $(\rho_l)_i^{n+1} = \frac{\theta_l}{\alpha_{fin}}, (\rho_g)_i^{n+1} = \frac{\theta_g}{(1-\alpha_{fin})}$.

В случае конечного времени релаксации давлений, что соответствует конечному значению параметра $\tau > 0$, численное интегрирование последнего уравнения системы (1.29) вызывает трудности, так как малые значения τ приводят к возникновению большой жёсткости системы. Поэтому для учёта релаксации давлений с конечным временем также реализован неявный метод.

Конечно-объёмная аппроксимация уравнения для α_l

$$\frac{\partial A \rho \alpha_l}{\partial t} + \frac{\partial A \rho \alpha_l u}{\partial x} = \frac{p_l - p_g}{\tau}$$

записывается следующим образом

$$(\rho\alpha)_i^{(n+1)} = (\rho\alpha)_i^{(n)} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\rho\alpha)_{i+1/2} - (\rho\alpha)_{i-1/2} \right) + \frac{\Delta t}{\tau} \left(p_l \left((\rho_l)_i^{(n+1)} \right) - p_g \left((\rho_g)_i^{(n+1)} \right) \right), \quad (2.24)$$

где $(\rho\alpha)_{i+1/2}$, $(\rho\alpha)_{i-1/2}$ вычисляются с помощью используемого метода расчёта потоков. Далее, как и в случае с мгновенной релаксацией, зная величины $\theta_l = (\alpha_l \rho_l)_i^{n+1}$, $\theta_g = (\alpha_g \rho_g)_i^{n+1}$ как результат интегрирования законов сохранения массы фаз, мы можем решить уравнение (2.24) как нелинейное алгебраическое уравнение для $(\alpha_l)_i^{n+1}$.

Метод расщепления исходной системы

Для интегрирования по времени определяющих уравнений модели используется метод Рунге-Кутты (см. раздел 2.2.1), предполагающий разбиение шага по времени на промежуточные стадии. Решаемая система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменной t имеет вид

$$\frac{d\mathbf{U}_i}{dt} = L(\mathbf{U}), \quad \text{где} \quad L(\mathbf{U}) = -\frac{\mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}}{\Delta x} + \mathbf{Q}(x_i, \mathbf{U}_i).$$

На каждой внутренней стадии метода необходимо производить вычисление вектора $L(\mathbf{U}^{(m-1)})$ на основе значений параметров с предыдущей стадии. Поскольку $L(\mathbf{U})$ содержит член правых частей $\mathbf{Q}(x_i, \mathbf{U}_i)$, ответственный за учёт межфазного взаимодействия, то при явном интегрировании возмущения, вносимые правой частью, будут также учитываться на всех внутренних стадиях метода Рунге-Кутты. Однако поскольку для учёта эффекта релаксации давлений используется неявная процедура, описанная выше и представляющая собой апостериорную корректировку параметров течения, возможны различные варианты её включения в алгоритм Рунге-Кутты. Под «полным расщеплением» системы будем иметь в виду способ учёта релаксации давлений, при котором на всех внутренних стадиях метода Рунге-Кутты решается уравнение баланса объёмных долей с нулевой правой частью, а неявная процедура осуществляется единожды в конце шага по времени. Будем ссылаться на такой метод как на

1PR. «Частичным расщеплением» будем называть учёт релаксации давлений на выборочных стадиях – 2PR или 3PR в зависимости от количества стадий, на которых включена процедура релаксации. Учёт эффекта релаксации давлений без расщепления исходной системы предполагает четырёхкратное применение неявной численной процедуры на всех внутренних стадиях метода Рунге-Кутты и в конце шага по времени – 4PR.

Результаты численных экспериментов показывают, что выбор того или иного способа расщепления системы может существенно влиять на точность численного решения и устойчивость вычислительного алгоритма. В разделе [3.3.1](#) это продемонстрировано на примере решения тестовой задачи Water Faucet.

Выводы

В данной главе построены вычислительные алгоритмы на основе высокоточных методов Рунге-Кутты-TVD и Рунге-Кутты-WENO для решения определяющих уравнений моделей, предложенных в главе [1](#). Разработаны модификации базового вычислительного алгоритма, в том числе неявная численная процедура для учёта эффекта релаксации давлений, применяемая совместно с методом расщепления системы при интегрировании по времени, а также схема для вычисления объёмных концентраций, сохраняющая однородный фон начальных данных в присутствии скачка концентраций.

Глава 3

Программная реализация и численные эксперименты

В данной главе описывается программная реализация построенных вычислительных алгоритмов и приводятся результаты численных экспериментов.

Раздел 3.1 содержит краткое описание комплекса программ, реализующего разработанные в главе 2 численные алгоритмы.

В разделе 3.2 приведены постановки и результаты численных экспериментов для изэнтропической модели четырёхфазной среды. В подразделе 3.2.1 рассмотрено решение задачи Римана о распаде разрыва для смеси жидкостей с условными параметрами с целью показать соответствие численных результатов свойствам решаемых уравнений. В подразделе 3.2.2 рассматривается задача о распаде разрыва для смеси воды, нефти, песка и газа в контексте влияния эффекта релаксации давлений на решение. В подразделе 3.2.3 рассмотрена задача с наличием скачка объёмных концентраций в начальных данных с целью демонстрации применения схемы для вычисления объёмных концентраций, сохраняющей однородный фон начальных данных, описанной в подразделе 2.1.5 главы 2. В подразделе 3.2.4 приведён иллюстративный пример решения задачи о распаде разрыва для смеси семи условных жидкостей.

В разделе 3.3 приведены решения классических тестовых задач моделирования трубных газожидкостных течений. В подразделах 3.3.1–3.3.3 рассмотрены задачи, для которых численные решения, полученные с помощью развиваемой модели и методов, сравниваются с точными решениями упрощённых моделей. В подразделах 3.3.4 и 3.3.5 приведены результаты моделирования пробковых течений, обусловленных сложной геометрией трубы. В подразделе 3.3.6 рассматриваются пробковые течения в горизонтальной трубе, вызванные действием межфазного трения.

3.1. Комплекс программ

Для реализации вычислительного алгоритма модели многофазных течений в изэнтропическом приближении, описанного в разделе 2.1, проведения вычислений, а также обработки и визуализации выходных данных был использован пакет прикладных программ MATLAB со встроенной средой разработки. Реализованный комплекс программ позволяет проводить вычисления для одномерных и двумерных задач с заданными начальными условиями. Алгоритм предусматривает возможность задания произвольного количества фаз, а также независимого включения в базовую схему различных модификаций, рассмотренных в разделе 2.1. На рисунке 3.1 приведена блок-схема, описывающая основные этапы вычислительного алгоритма в программной реализации.

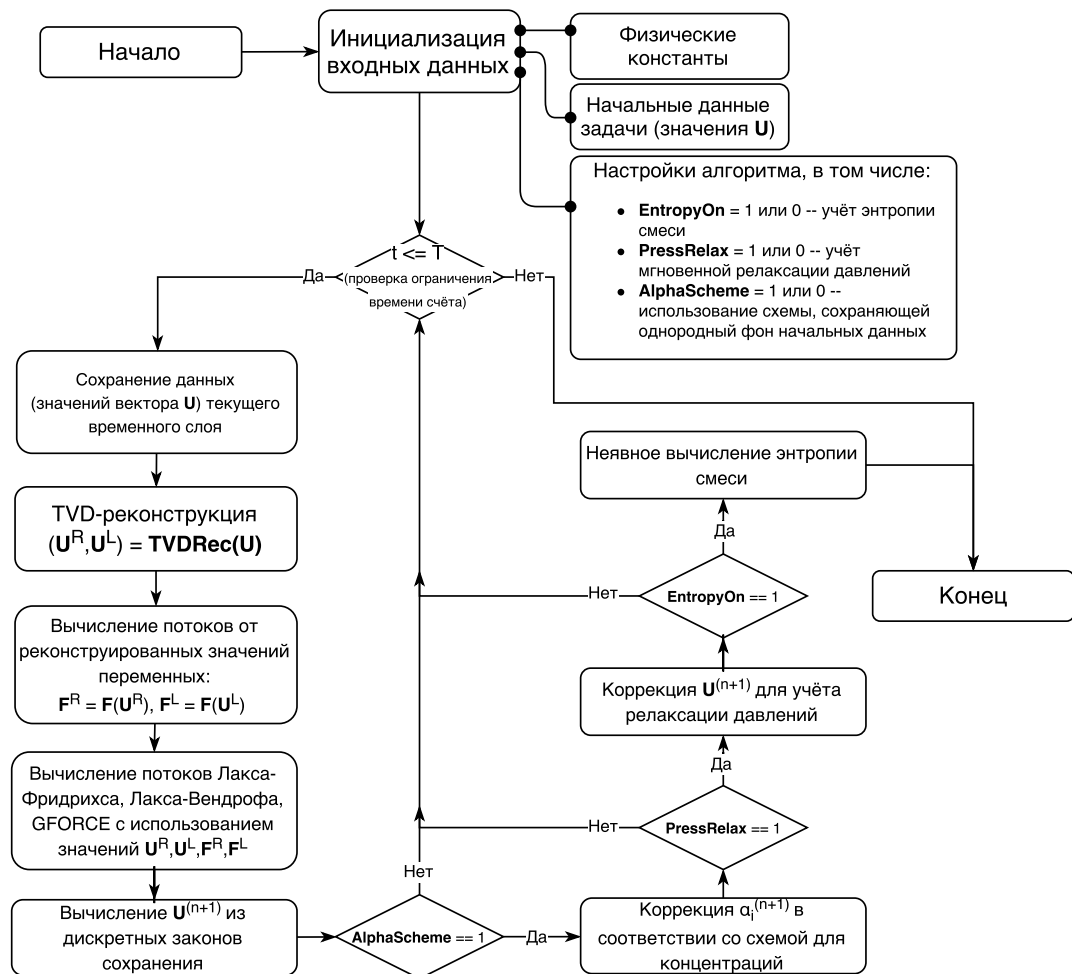


Рис. 3.1. Блок-схема вычислительного алгоритма для общей модели многофазной среды

Вычислительный алгоритм для модели трубных течений, описанный в разделе 2.2, реализован в виде комплекса программ на языке Си с использованием интегрированной среды разработки программного обеспечения Microsoft Visual Studio. Комплекс программ позволяет проводить расчёты для широкого спектра задач с различными начальными и граничными значениями параметров фаз, геометрическими параметрами трубы и константами, характеризующими физические свойства фаз. Учтена возможность выбора одного из двух типов реконструкции данных для решения задачи Римана о распаде разрыва в базовом алгоритме: TVD-реконструкция с использованием лимитера minmod или WENO-реконструкция 5-го порядка. Также в программном коде предусмотрена возможность включения/исключения в базовый численный алгоритм используемых модификаций метода, таких как модификация схемы для описания течений с малыми значениями чисел Маха, расщепление системы для учёта эффекта релаксации давлений и д.р.

Все перечисленные выше данные, а также информация о размере расчётной сетки, времени расчёта и частоте записи выходных данных, считываются программой из входного файла. Выходные данные записываются в 10 файлов, каждый из которых содержит таблицу значений одного из параметров α_l , α_g , ρ_l , ρ_g , ρ , u_l , u_g , u , p_l , p_g в каждой ячейке расчётной области в моменты времени, определяемые заданной частотой записи. Дальнейшая обработка и визуализация выходных данных осуществляется с помощью классических пакетов прикладных программ, таких как MATLAB.

На рисунках 3.2, 3.3 приведены блок-схемы, описывающие основные этапы вычислительного алгоритма.

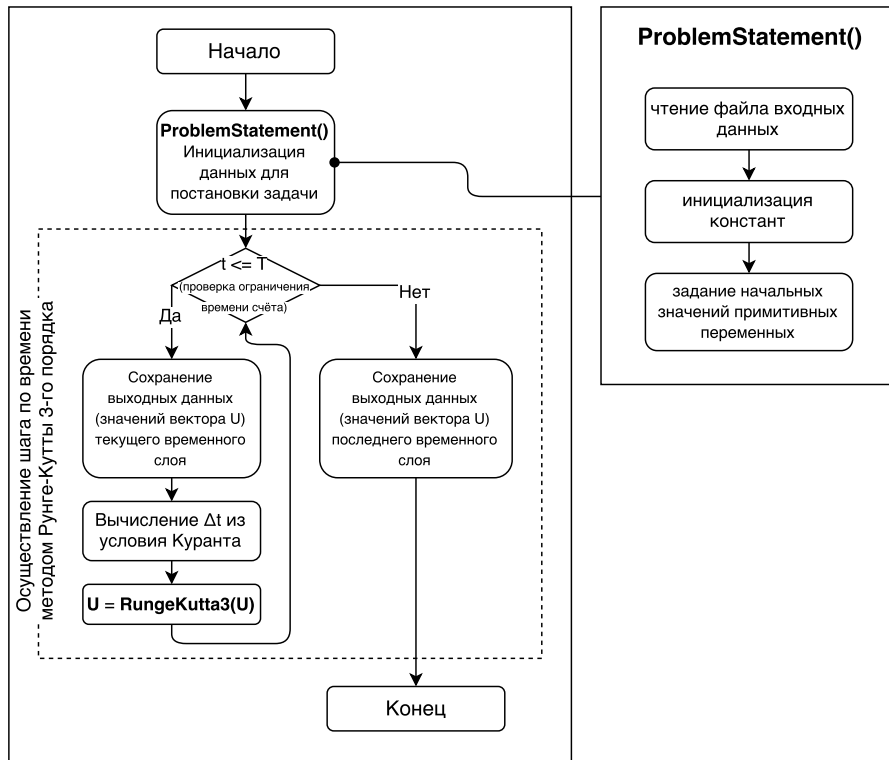


Рис. 3.2. Блок-схема вычислительного алгоритма для модели трубных течений

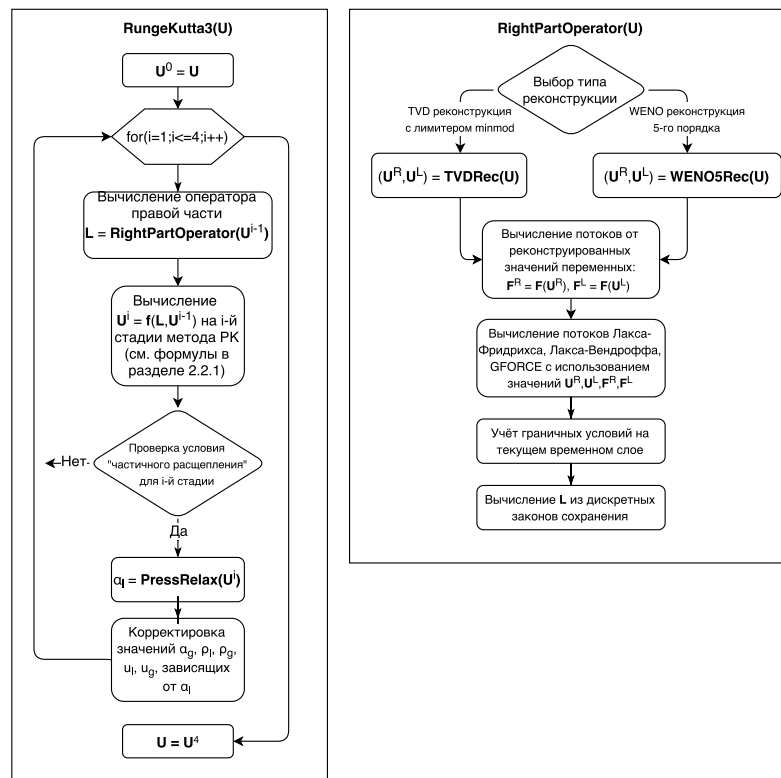


Рис. 3.3. Блок-схемы отдельных функций в составе вычислительного алгоритма для модели трубных течений

3.2. Изэнтропическая модель для четырёхфазной сжимаемой среды

В данном разделе приводятся результаты численного моделирования задачи Римана о распаде разрыва для четырёхфазных смесей, целью которого является проверка корректности вычислительного алгоритма, а также численное исследование характеристических свойств модели. Кроме того, рассматриваются задачи с постоянными начальными значениями плотностей и скоростей фаз в присутствии скачка объёмной концентрации. Эти результаты приводятся с целью продемонстрировать преимущество схемы для сохранения постоянного фона начальных данных, описанной в разделе 2.1.5, при решении подобных задач.

3.2.1. Задача Римана для четырёхфазной смеси модельных жидкостей

Рассмотрим сначала задачу симметричного соударения для смеси четырёх жидкостей с искусственно выбранными параметрами. Полагается, что каждая из четырёх условных жидкостей описывается двучленным уравнением состояния вида (1.21) с константами $\rho_{01} = 1000 \text{ кг/м}^3$, $\rho_{02} = 1200 \text{ кг/м}^3$, $\rho_{03} = 1400 \text{ кг/м}^3$, $\rho_{04} = 1600 \text{ кг/м}^3$, $C_{01} = 1500 \text{ м/с}$, $C_{02} = 1700 \text{ м/с}$, $C_{03} = 1900 \text{ м/с}$, $C_{04} = 2100 \text{ м/с}$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 2,8$. Цель данного теста – продемонстрировать, что количество ударных волн, распространяющихся в каждую сторону от начального разрыва и воспроизводимых численным методом, соответствует количеству звуковых характеристик системы, то есть 4 для случая четырёхфазной смеси. Константы ρ_{0i} и C_{0i} выбраны указанным образом с целью получения более наглядной картины процесса. В расчётах не учитывается релаксация давлений и межфазное трение, энтропия смеси полагается равной нулю. В начальный момент времени составляющие смеси имеют равные объёмные доли во всех точках расчётной области: $\alpha_i(0, x) = 0,25$, а также равные давления:

$p_i(0, x) = p_{atm} = 10^5$ Па, $i = 1, 2, 3, 4$, $x \in [0, 1]$. Скорость соударения $U = 500$ м/с. То есть в левой половине одномерной области в начальный момент времени все скорости фаз равны U , в правой половине – $-U$:

$$u_i(0, x) = \begin{cases} U, & 0 \leq x \leq 0,5 \\ -U, & 0,5 < x \leq 1 \end{cases}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Вычисления проводились на сетке с 3000 ячеек. На рисунке 3.4 представлен профиль плотности смеси в некоторый момент времени. На рисунке отчётливо видны четыре пары ударных волн, симметрично распространяющихся в обе стороны от начального разрыва, что соответствует характеристическим свойствам системы определяющих дифференциальных уравнений.

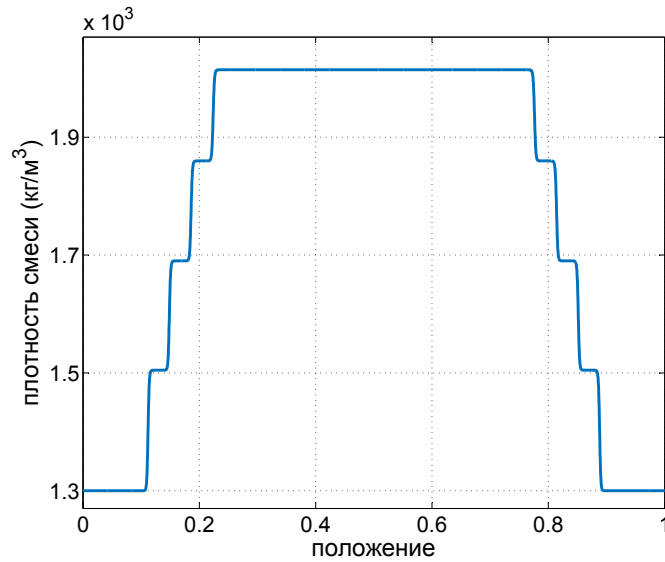


Рис. 3.4. Профиль плотности смеси для задачи симметричного соударения для смеси четырёх модельных жидкостей со скоростью $U = 500$ м/с

Для той же смеси решается задача симметричного разлёта со скоростью $U = 20$ м/с:

$$u_i(0, x) = \begin{cases} -U, & 0 \leq x \leq 0,5 \\ U, & 0,5 < x \leq 1 \end{cases}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

На рисунке 3.5 также представлены результаты расчёта на сетке с 3000 ячеек для плотности смеси в некоторый момент времени после начала эксперимента.

Наблюдаемые четыре пары волн разрежения согласуются с характеристическими свойствами модели.

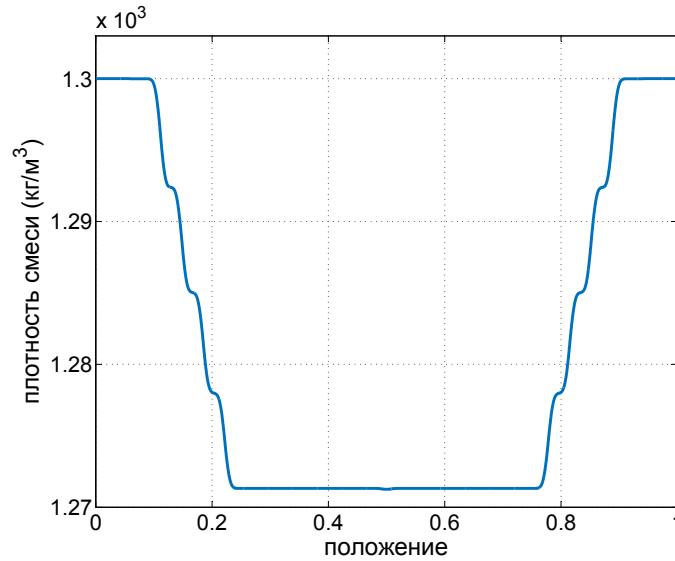


Рис. 3.5. Профиль плотности смеси для задачи симметричного разлёта для смеси четырёх модельных жидкостей со скоростью $U = 20$ м/с

3.2.2. Эффект мгновенной релаксации давлений для «нефтяной смеси»

Для реальных физических задач, при моделировании которых учитывается релаксация давлений фаз и термодинамические процессы, волновая структура может быть более сложной, и не всегда удаётся наблюдать чёткое разделение ударных волн и волн разрежения, соответствующих каждой фазе. Рассмотрим численное решение задачи Римана для смеси четырёх фаз, физические параметры которых соответствуют песку, нефти, воде и метану. Три фазы рассматриваются как жидкости с уравнением состояния вида 1.21 и параметрами $\rho_{01} = 1600$ кг/м³, $\rho_{02} = 850$ кг/м³, $\rho_{03} = 1000$ кг/м³, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 2,8$, $C_{01} = 2000$ м/с, $C_{02} = 1250$ м/с, $C_{03} = 1540$ м/с, $c_{V1} = 0,96$ кДж/(кг·К), $c_{V2} = 0,88$ кДж/(кг·К), $c_{V3} = 4,2$ кДж/(кг·К). Четвёртая фаза описывается уравнением состояния политропного газа (1.20) с константами $\rho_{04} = 0,66$ кг/м³,

$\gamma_4 = 1,4$, $C_{04} = 430$ м/с, $c_{V4} = 0,7$ кДж/(кг·К). В начальный момент времени смесь покоится, а в давлениях фаз задаётся разрыв в середине области:

$$p_i(0, x) = \begin{cases} 10^6 \text{ Па}, & 0 \leq x \leq 0,5 \\ 10^5 \text{ Па}, & 0,5 < x \leq 1 \end{cases}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Начальные значения объёмных концентраций постоянны на всей области и равны $\alpha_1 = 0,7$, $\alpha_2 = 0,1$, $\alpha_3 = 0,09$, $\alpha_4 = 0,11$.

Кривые 1 и 2 на рисунке 3.6 соответствуют давлению смеси при расчёте без учёта релаксации давлений и с мгновенной релаксацией давлений соответственно. Данные профили давления соответствуют одному и тому же моменту времени $t > 0$ после начала эксперимента, расчёт проводился для сетки с 750 ячеек. Для кривой 1 можно видеть четыре ударных волны, распространяющихся вправо, и четыре волны разрежения, идущих влево от точки разрыва. Если используется приближение мгновенной релаксации давлений (кривая 2), структура волн имеет иной вид. Наблюдаемая картина может трактоваться как одна ударная волна, распространяющаяся вправо, и одна волна разрежения, распространяющаяся влево.

Данный пример показывает, что учёт эффекта релаксации давлений фаз может очень существенно сказываться на численном решении, что будет продемонстрировано и в дальнейшем на примере задач трубных течений.

3.2.3. Задача с разрывом в начальной концентрации

Физические процессы, в которых участвуют различные вещества с границей раздела, можно моделировать с помощью многофазной модели, задавая разрывные значения объёмных концентраций. При этом нужно иметь в виду, что рассматриваемая модель не допускает вырождения фаз, то есть никакое из α_i не может быть равно 0. Таким образом, граница раздела моделируется выделением области в пространстве, где преобладает одна из сред, то есть $\alpha_i = 1 - \varepsilon$ близко к единице для некоторого i , а концентрации остальных фаз близки к ну-

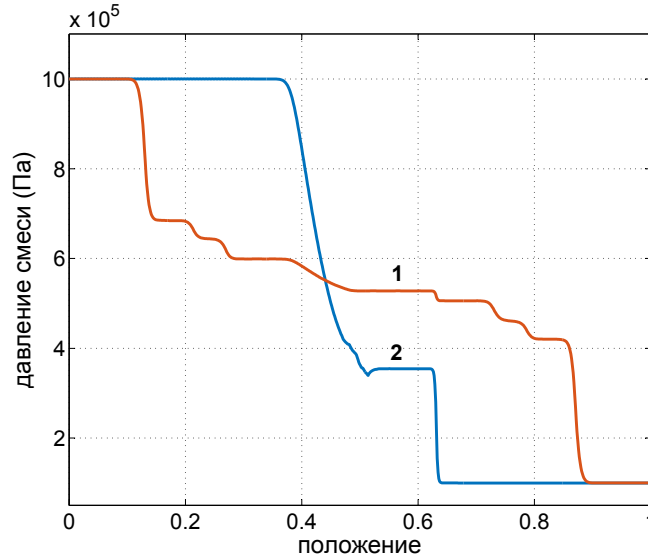


Рис. 3.6. Профиль давления смеси для задачи Римана с разрывом в давлении. Кривые 1 и 2 соответствуют расчётам без учёта релаксации давлений и с учётом релаксации давлений в мгновенном приближении соответственно

лю: $\alpha_j = \varepsilon/N$ для $j \neq i$. При этом равенство 0 или 1 какого-либо из α_i избегают, искусственно ограничивая область возможных значений α_i .

При моделировании границ раздела на основе различных математических моделей с использованием численных схем типа Годунова, а также других методов, воспроизводящих разрывные решения, возникают трудности, связанные с появлением нефизичных осцилляций в области границы раздела.

Результаты моделирования границы раздела двух сред с помощью предлагаемой модели и методов также демонстрируют наличие численных дефектов в окрестности разрыва, которые удаётся устранить, используя модификацию базового численного алгоритма, описанную в разделе 2.1.5.

Ниже представлены результаты моделирования границы раздела вода-воздух. Для этого используется описанная четырёхфазная модель в изэнтропическом приближении, где фазы полагаются попарно тождественными. При этом фазы с номерами 1 и 2, соответствующие воде, описываются двучленным уравнением состояния 1.21 с параметрами: $\rho_{01} = \rho_{02} = 1000 \text{ кг/м}^3$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 2,8$, $C_{01} = C_{02} = 1540 \text{ м/с}$. Фазы с номерами 3 и 4, соответствующие воздуху, опи-

сываются уравнением состояния политропного газа (1.20) с $\rho_{03} = \rho_{04} = 1 \text{ кг/м}^3$, $\gamma_3 = \gamma_4 = 1,4$, $C_{03} = C_{04} = 374 \text{ м/с}$. В начальных данных задаётся скачок в объёмных концентрациях

$$\alpha_1(0, x) = \alpha_2(0, x) = \begin{cases} 0,499, & 0 \leq x \leq 0,5 \\ 0,001, & 0,5 < x \leq 1 \end{cases},$$

$$\alpha_3(0, x) = \alpha_4(0, x) = \begin{cases} 0,001, & 0 \leq x \leq 0,5 \\ 0,499, & 0,5 < x \leq 1 \end{cases}.$$

Такое распределение объёмных долей означает, что левая половина рассматриваемой области на 99,8% заполнена водой, в то время как правая половина содержит такую же объёмную долю воздуха. Скорость смеси во всей расчётной области полагается постоянной $u_l = u_g = u = 1 \text{ м/с}$.

На рисунке 3.7 (а) приведены профили плотности фаз и плотности смеси в центральной части расчётной области через 15 шагов по времени при расчёте без использования схемы для концентрации. Можно видеть существенные численные дефекты в области скачка концентрации, проявляющиеся сразу после запуска алгоритма даже при расчёте с очень малыми значениями числа Куранта (для приведённого расчёта $CFL \sim 0,04$). В дальнейшем вычислительный алгоритм теряет стабильность. Однако при решении той же задачи с использованием схемы для концентраций разрыв α успешно воспроизводится с сохранением постоянного фона начальных данных. На рисунке 3.7 (б) приведены профили тех же величин через 2000 шагов по времени после начала расчёта с использованием схемы для концентраций и $CFL = 0,4$. Вычисления для обеих задач проводились на сетке с 2000 ячеек с использованием потока Лакса-Фридрихса, то есть при $\omega = 0$ в формулах (2.4).

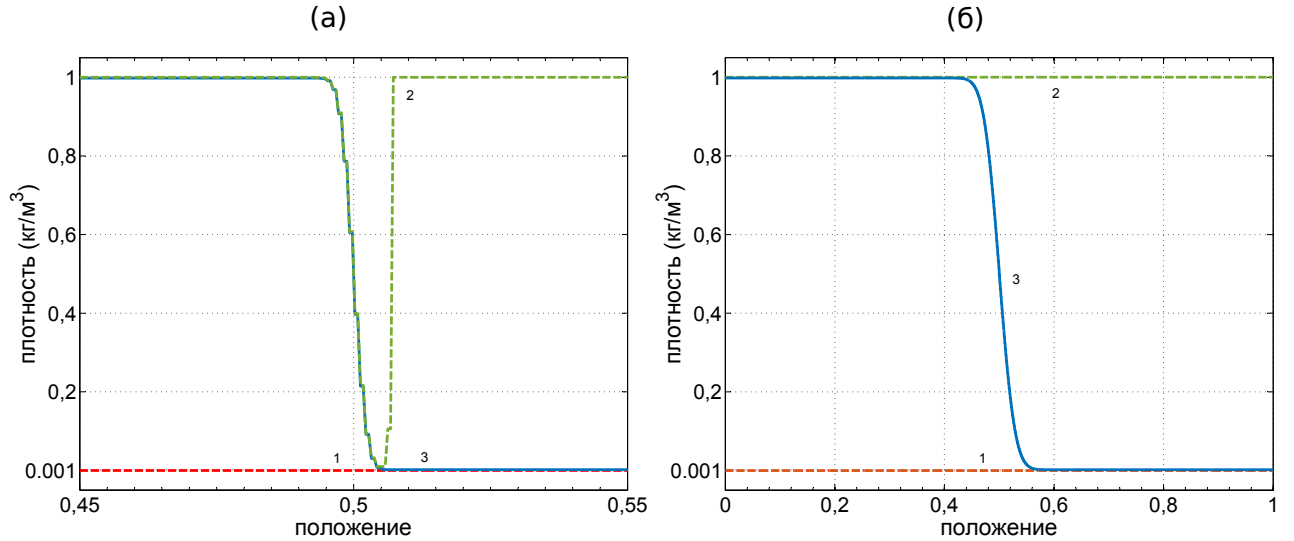


Рис. 3.7. Плотность воды, воздуха и смеси (кривые 1, 2, 3 соответственно). (а) – расчёт без использования схемы для концентраций, 15 шагов по времени, $CFL = 0,04$. (б) – расчёт с использованием схемы для концентраций, 2000 шагов по времени, $CFL = 0,4$

3.2.4. Задача Римана для смеси семи модельных жидкостей

Структура уравнений общей модели, описанной в главе 1, допускает, что количество фаз N может быть произвольным, при этом все описанные свойства уравнений будут справедливы при любом N . В данном примере приводится решение задачи симметричного соударения для многофазной смеси с количеством фаз $N = 7$ с целью продемонстрировать практическую возможность применения вычислительной модели для описания течений с произвольным количеством фаз.

Рассматривается смесь жидкостей, каждая из которых, как и ранее, описывается двучленным уравнением состояния 1.21. Параметры выбираются следующим образом $\rho_{0i} = 1000 + 200 \cdot (i - 1) = 1000, 1200, 1400, \dots$ кг/м³, $C_{0i} = 1500 + 200 \cdot (i - 1) = 1500, 1700, 1900, \dots$ м/с, $\gamma_i = 2, 8$, $i = 1, \dots, 7$. В начальный момент объёмные концентрации всех фаз полагаются равными: $\alpha_i = 1/7$,

$i = 1, \dots, 7$, и задаётся условие соударения со скоростью $U = 500$ м/с:

$$u_i(0, x) = \begin{cases} U, & 0 \leq x \leq 0,5 \\ -U, & 0,5 < x \leq 1 \end{cases}, \quad i = 1, \dots, 7.$$

На рисунке 3.8 приведён профиль плотности смеси в некоторый момент времени после начала эксперимента. Вычисления проводились на сетке с 2000 ячеек. На графике прослеживаются семь пар ударных волн, что согласуется с характеристическими свойствами системы для $N = 7$.

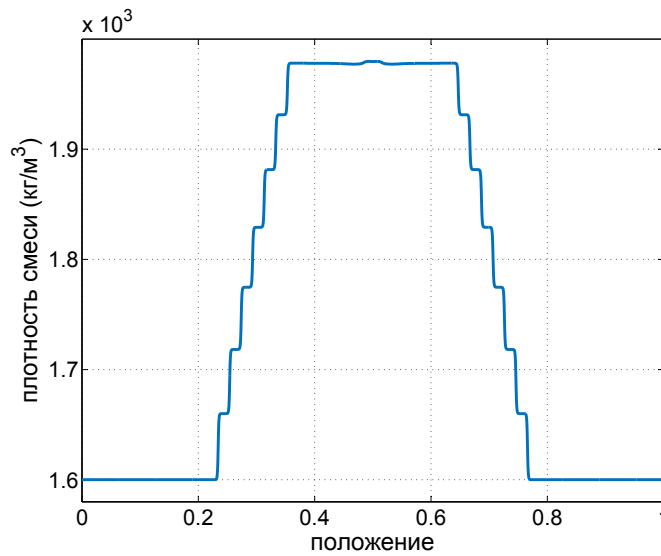


Рис. 3.8. Плотность смеси для задачи симметричного соударения для смеси семи модельных жидкостей со скоростью $U = 500$ м/с

3.3. Моделирование трубных течений

Состоятельность предлагаемой модели и эффективность численных методов продемонстрированы в этом разделе на серии классических тестовых задач, используемых для верификации двухфазных моделей. Все расчёты проводились в предположении мгновенной релаксации давлений, за исключением задачи о течении в горизонтальной трубе, где рассматривалась также конечная скорость релаксации.

В тестовых примерах рассмотрены течения смеси воздуха и воды, и в качестве уравнений состояния для них используются соответственно уравнение состояния политропного газа и двучленное уравнение состояния:

$$\begin{aligned} e_g(\rho_g) &= \frac{C_{0g}^2}{\gamma_g(\gamma_g - 1)} \left(\frac{\rho_g}{\rho_{0g}} \right)^{\gamma_g - 1}, \\ e_l(\rho_l) &= \frac{C_{0l}^2}{\gamma_l(\gamma_l - 1)} \left(\frac{\rho_l}{\rho_{0l}} \right)^{\gamma_l - 1} + \frac{\rho_{l0}C_{0l}^2 - \gamma_l p_0}{\gamma_l \rho_l}. \end{aligned}$$

В этом случае давления фаз вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} p_g(\rho_g) &= \frac{\rho_{0g}C_{0g}^2}{\gamma_g} \left(\frac{\rho_g}{\rho_{0g}} \right)^{\gamma_g}, \\ p_l(\rho_l) &= \frac{\rho_{0l}C_{0l}^2}{\gamma_l} \left(\frac{\rho_l}{\rho_{0l}} \right)^{\gamma_l} - \frac{\rho_{l0}C_{0l}^2 - \gamma_l p_0}{\gamma_l}. \end{aligned}$$

Константы в уравнениях состояния выбирались следующими: $\rho_{0l} = 10^3$ кг/м³, $\rho_{0g} = 1$ кг/м³ – плотности воды и воздуха при нормальных условиях, $C_{0l} = 1543$ м/с, $C_{0g} = 374$ м/с – скорости звука в воде и воздухе при нормальных условиях, $p_0 = 10^5$ Па – атмосферное давление, $\gamma_l = 2,8$, $\gamma_g = 1,4$ – показатели адиабаты. Коэффициенты динамической вязкости для воды и газа полагаются равными $\mu_l = 10^{-3}$ Па·с, $\mu_g = 1,7 \cdot 10^{-5}$ Па·с.

3.3.1. Задача Water Faucet

Рассматривается вертикальная труба с открытым нижним концом, в начальный момент времени содержащая однородный столб жидкости, окружённый газом (рис. 3.9). В верхний конец трубы подаётся смесь с фиксированными скоростями фаз и объёмными концентрациями. Система находится под действием силы тяжести, и со временем столб жидкости истончается книзу. Данная задача является классическим тестовым примером, изучаемым, начиная с [75].

Рассмотрим трубу длиной $L = 12$ м. В начальный момент времени давления фаз полагаются равными атмосферному давлению: $p_l(0, x) = p_g(0, x) = 10^5$ Па. Начальные объёмные концентрации воды и газа полагаются равными $\alpha_l(0, x) = 0,8$ и $\alpha_g(0, x) = 0,2$ соответственно, скорости воды и газа: $u_l(0, x) =$

10 м/с, $u_g(0, x) = 0$ м/с. В качестве граничных условий на входе трубы задаётся фиксированная объёмная концентрация $\alpha_l(t, 0) = 0.8$ и скорости фаз $u_l(t, 0) = 10$ м/с, $u_g(t, 0) = 0$ м/с. На выходе давления воды и газа полагаются постоянными и равными атмосферному давлению: $p_l(t, L) = p_g(t, L) = p(t, L) = 10^5$ Па.

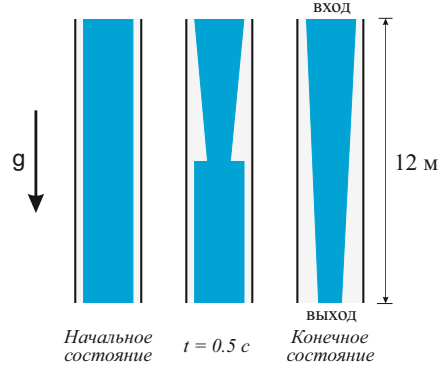


Рис. 3.9. Схематическое представление теста "Water Faucet"

Точное решение $\alpha_g(x, t)$ данной задачи в предположении несжимаемости жидкой фазы имеет вид [75]

$$\alpha_g(t, x) = \begin{cases} 1 - \frac{\alpha_l^0 u_l^0}{\sqrt{(u_l^0)^2 + 2gx}}, & x < u_l^0 t + \frac{gt^2}{2} \\ 1 - \alpha_l^0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (3.1)$$

На рисунке 3.10 представлено сравнение численных решений данной задачи, полученных различными методами: методом MUSCL-Hancock в работе [32] и методом RK-WENO в сочетании с методом GFORCE для вычисления численных потоков на границах ячеек. Результаты, полученные методом MUSCL-Hancock в работе [32], приведены на рисунке 3.10а. Метод RK-WENO используется в сочетании с одним из трёх вариантов расщепления исходной системы уравнений для учёта эффекта мгновенной релаксации давлений. Результаты, приведённые на графике 3.10б, получены с использованием «полного расщепления» системы (1.29). На промежуточных стадиях метода Рунге-Кутты первое уравнение системы (1.29) решается без учёта правой части φ , и коррекция параметров,

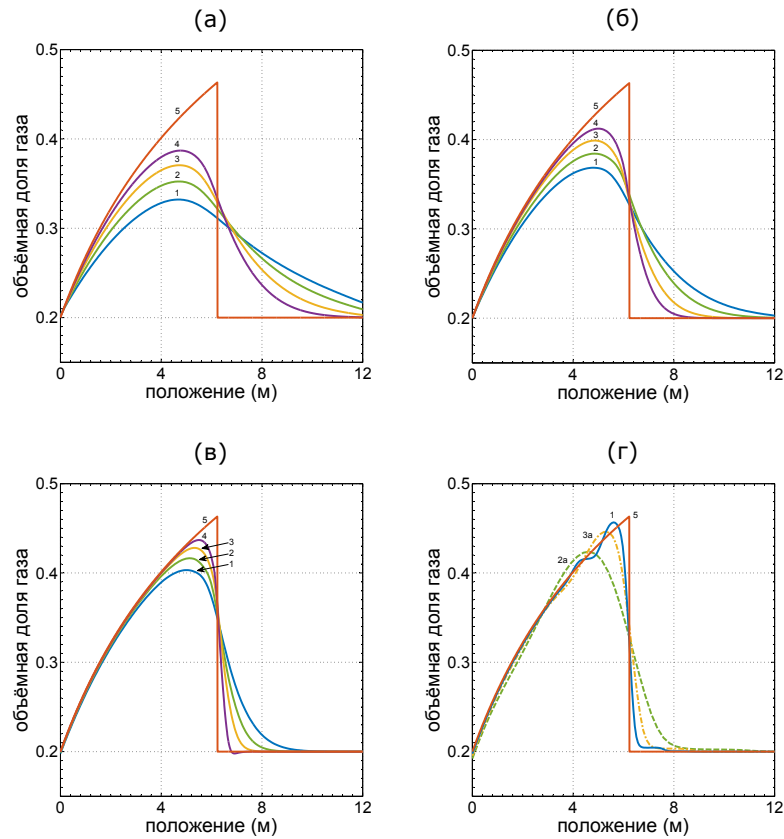


Рис. 3.10. Объёмная доля газа в зависимости от расстояния от верхнего края трубы. 200, 400, 800, 1600 ячеек (кривые 1, 2, 3, 4 соответственно); 50, 100 ячеек (кривые 2а, 3а); аналитическое решение (3.1) (кривая 5). (а) – метод MUSCL-Хансcock 2-го порядка; (б) – RK-WENO 1PR; (в) – RK-WENO 3PR; (г) – RK-WENO 4PR

моделирующая эффект релаксации и описанная в подразделе 2.2.5, осуществляется единожды в конце шага по времени. Назовём такой метод RK-WENO 1PR. Возможно также «частичное расщепление» системы, при котором решаются те же уравнения, но коррекция параметров осуществляется также и на некоторых промежуточных стадиях метода Рунге-Кутты. Такой подход позволяет получить более точное решение, однако является более ресурсозатратным. График 3.10в демонстрирует результаты, полученные с трёхкратной коррекцией параметров: на первой, второй и последней стадиях метода Рунге-Кутты (RK-WENO 3PR). Учёт эффекта релаксации давлений на всех стадиях метода Рунге-Кутты (RK-WENO 4PR), то есть без расщепления исходной системы, позволяет получить ещё более точный результат (см. рис. 3.10г), однако в данном случае

метод теряет стабильность при измельчении сетки. Приведённые результаты, а также данные таблицы 3.1 показывают, что метод RK-WENO с расщеплением исходной системы на сетке с 200-ми ячейками даёт решение, сопоставимое по точности с решением, полученным методом MUSCL-Hancock для 800 ячеек. Осуществление коррекции параметров на выборочных внутренних стадиях метода Рунге-Кутты позволяет улучшить результат. Решение, полученное методом с трёхкратной коррекцией параметров на 200 ячейках, оказывается точнее результата расчета с однократной коррекцией на сетке с 800-ми ячейками.

	число ячеек					
	50	100	200	400	800	1600
MUSCL-Hancock			0,23125	0,20186	0,17273	0,14654
RK-WENO 1PR			0,17284	0,15056	0,12319	0,10280
RK-WENO 3PR			0,12501	0,10593	0,08782	0,06780
RK-WENO 4PR	0,11625	0,07864	0,05594			

Таблица 3.1. Отношение нормы погрешности численного решения к норме аналитического решения (3.1) в пространстве L_2 для различных методов

3.3.2. Задача сепарации

В данном тесте рассматривается закрытая с обоих концов вертикальная труба длиной 7,5 м, содержащая однородную смесь воды и воздуха в объёмном соотношении 1/1. Под действием силы тяжести вода оседает на дно сосуда, а воздух скапливается в верхней части. В качестве начальных данных задаётся $\alpha_l(0, x) = \alpha_g(0, x) = 0,5$, $u_l(0, x) = u_g(0, x) = 0$ м/с и $p_l(0, x) = p_g(0, x) = 10^5$ Па. В качестве граничных условий задаются нулевые скорости фаз на обоих концах трубы: $u_l(t, 0) = 0$ м/с, $u_g(t, 0) = 0$ м/с. Точное решение данной задачи

для объёмной концентрации жидкости [76] имеет вид

$$\alpha_l(t, x) = \begin{cases} 1, & x < \frac{1}{2}gt^2 \\ 0,5, & \frac{1}{2}gt^2 \leq x < L - \frac{1}{2}gt^2 \\ 0, & x > L - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad (3.2)$$

Данная задача решалась методом Рунге-Кутты-WENO с мгновенной релаксацией давлений на трёх стадиях метода Рунге-Кутты. На рисунке 3.11 представлены результаты вычисления объёмной доли жидкости на промежуточной стадии процесса ($t = 0,6$ с.) и после установления.

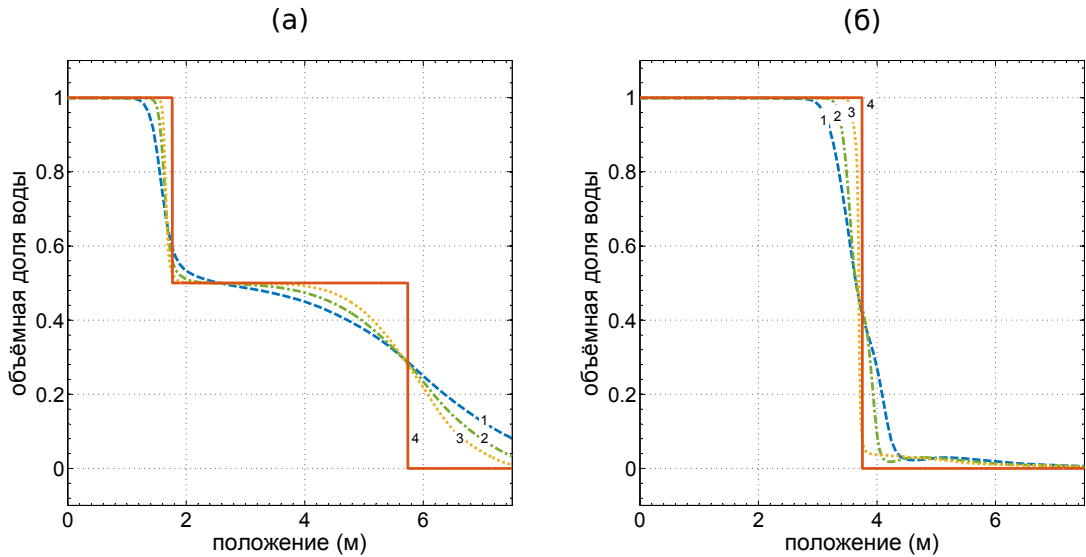


Рис. 3.11. Объёмная доля жидкости в зависимости от расстояния от нижнего края трубы при расчёте методом RK-WENO 3PR. 100, 200, 400 ячеек (кривые 1, 2, 3 соответственно). (а) – решение в момент $t = 0,6$ с. (б) – установившееся решение, $t = 1,5$ с. Кривая 4 – точное решение (3.2) для соответствующего t .

Можно видеть, что численное решение достаточно хорошо аппроксимирует точное решение для установившегося процесса, в то время как для промежуточного решения имеются существенные расхождения с точным решением, особенно в области верхнего конца трубы. Данная неточность может быть следствием грубой аппроксимации граничных условий задачи и требует дополнительного

рассмотрения. Возможным путём решения данной проблемы является применение методов повышения точности аппроксимации граничных условий для задач гиперболического типа с использованием WENO-реконструкции [77–79].

3.3.3. Течение газожидкостной смеси в наклонной трубе

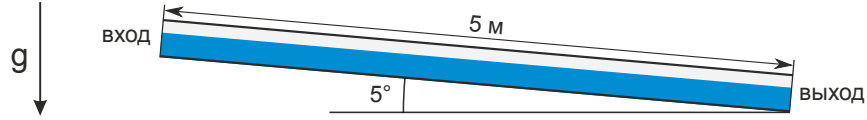


Рис. 3.12. Схематическое представление задачи

В данном параграфе приводится сравнение численного решения с полуаналитическим решением для установившегося течения в наклонной трубе.

Рассматривается прямая труба с уклоном 5° к горизонту (рисунок 3.12). Труба имеет длину $L = 5$ м и диаметр $d = 0,051$ м. В левый, более высокий конец трубы подаётся смесь воздуха и воды с фиксированными значениями $\alpha_l(t, 0) = 0,3$, $\nu_l(t, 0) = \alpha_l u_l = 1$ м/с, $\nu_g(t, 0) = \alpha_g u_g = 3$ м/с. На выходе задаётся атмосферное давление: $p_l(t, L) = p_g(t, L) = p_{atm}$. Начальные условия: $\alpha_l(0, x) = 0,3$, $\nu_l(0, x) = \alpha_l u_l = 1$ м/с, $\nu_g(0, x) = \alpha_g u_g = 3$ м/с.

«Эталонное» установившееся решение данной задачи получено численно путём решения стационарной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с данными выше граничными условиями. Стационарная система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) получается из исходной одномерной системы (1.29) в предположении равенства давлений фаз $p_l = p_g = p$ и имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\alpha_l \rho_l u_l) &= 0, \\ \frac{d}{dx} (\alpha_g \rho_g u_g) &= 0, \\ \frac{d}{dx} (\alpha_l \rho_l u_l^2 + \alpha_g \rho_g u_g^2 + p) &= f_1, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u_l^2 - u_g^2}{2} + e_l - e_g + \left(\frac{1}{\rho_l} - \frac{1}{\rho_g} \right) p \right) = f_2.$$

В данном тесте в дополнение к базовому численному алгоритму используется модификация схемы для описания течений с малым значением числа Маха (см. раздел 2.2.3). Применение этой модификации для данной задачи позволяет стабилизировать решение, полученное методом Рунге-Кутты-WENO.

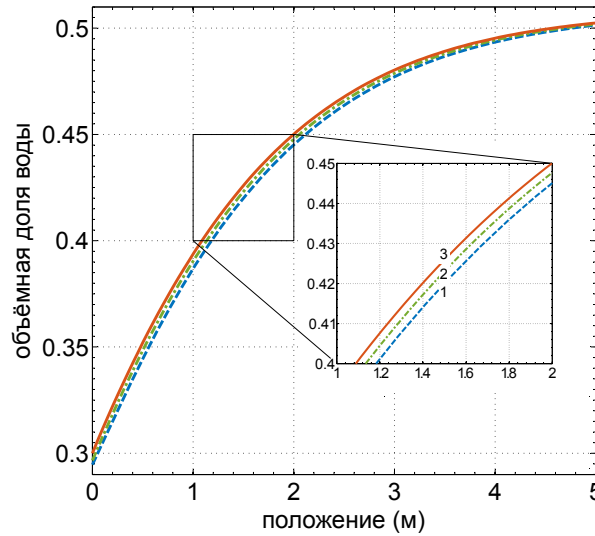


Рис. 3.13. Объёмная доля жидкости при расчёте методом RK-WENO для сеток с 40 (кривая 1) и 80 (кривая 2) ячейками, $t = 10$ с. Кривая 3 изображает решение стационарной системы (3.3).

На рисунке 3.13 приведено сравнение решения стационарной системы (3.3) с численными решениями, полученными методом Рунге-Кутты-WENO на расчётных сетках с количеством ячеек 40 и 80 на момент времени 10 с. Результаты расчётов демонстрируют очень хорошее соответствие численного установившегося решения исходной системы для описания трубных течений решению упрощённой стационарной системы ОДУ (3.3).

3.3.4. Задача о V-трубе

Рассматривается труба V-образной формы общей длиной 60 м с изгибом посередине (см. рисунок 3.14) и дополнительным изгибом в точке C . Допол-

нительный изгиб предусмотрен для уменьшения влияния граничных условий, заданных в точке D , на картину течения в V-образной конфигурации. В качестве граничных условий задаются значения скоростей и объёмных долей на входе трубы: $\alpha_l(t, 0) = 0,8$, $\alpha_g(t, 0) = 0,2$, $u_l(t, 0) = 1$ м/с, $u_g(t, 0) = 10$ м/с, а также атмосферное давление на выходе: $p(t, L) = 10^5$ Па. Поскольку на систему действует сила тяжести, в области нижнего изгиба (точка B) начинает скапливаться вода, блокирующая поток воздуха. Со временем давление газа в левой части трубы возрастает, и газ прорывает водяную пробку, после чего процесс повторяется. Ожидается, что определённые конфигурации граничных условий через некоторое время приводят к устойчивому периодическому режиму вне зависимости от начального распределения смеси в трубе.

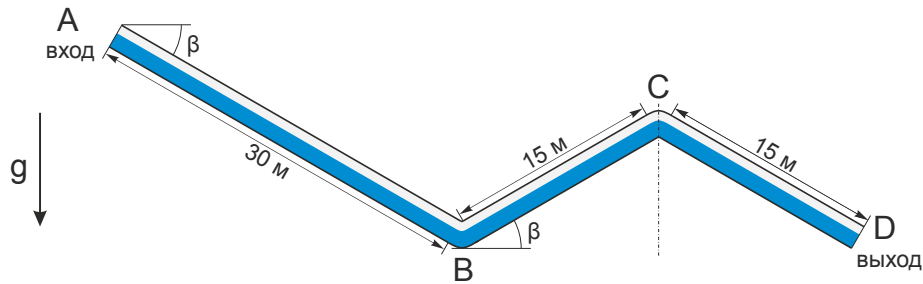


Рис. 3.14. Схематическое представление задачи о V-трубе

На рисунке 3.15 изображена зависимость от времени значения объёмной доли жидкости в точках изгиба трубы при расчёте с использованием метода RK-TVD для трубы с углом изгиба $\beta = 30^\circ$. Наблюдается установившийся периодический режим с интервалами почти полного преобладания жидкой фазы ($\alpha_l \approx 1$). Нужно заметить, что структура уравнений модели не допускает полного вырождения одной из фаз, т.е. α_l или α_g не могут быть равны 0 или 1. Данная особенность вынуждает нас вводить искусственное ограничение на область изменения объёмных долей в расчётах: $\varepsilon \leq \alpha_l, \alpha_g \leq 1 - \varepsilon$. В данном эксперименте полагается $\varepsilon = 10^{-5}$.

Отметим, что в трубопроводах сложной формы экспериментально наблю-

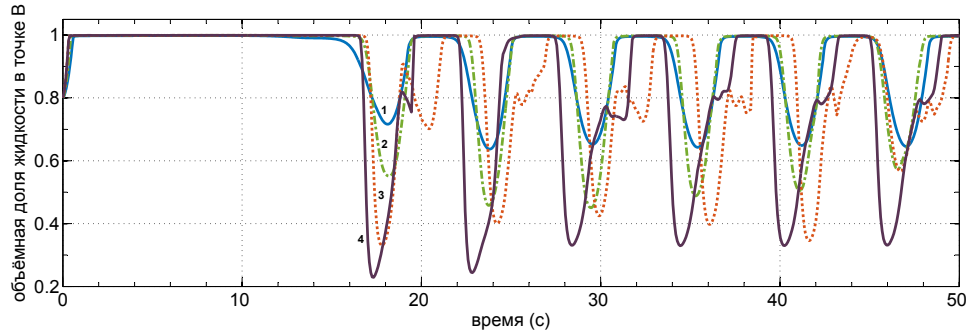


Рис. 3.15. Зависимость значения объёмной доли жидкости в точке В от времени при расчёте методом RK-TVD на сетках: 400, 800, 1600 и 3200 ячеек (кривые 1, 2, 3 и 4 соответственно).

количество ячеек расчётной сетки	400	800	1600	3200
средний период образования пробок (с)	4,3900	4,2775	4,2125	4,3950

Таблица 3.2. Средний период образования пробок (с) при расчёте методом RK-TVD

даются периодические пробковые течения, образование которых вызвано силой тяжести и приводит к перекрытию трубы в окрестности ее изгиба [54]. В проведенных численных экспериментах были получены периодические режимы течения с образованием пробок жидкости, что качественно согласуется с экспериментами. Можно видеть, что расчёты с использованием сеток с различным количеством ячеек дают решения с близкими значениями периода (см. таблицу 3.2). Таким образом, рассмотренный пример демонстрирует принципиальную возможность использования сформулированных термодинамически согласованных уравнений для моделирования течений в изогнутых трубах.

Применение WENO-реконструкции для рассмотренной выше постановки приводит к потере устойчивости вычислительного алгоритма при измельчении сетки и хаотическому поведению решения. Однако метод RK-WENO удаётся успешно применить для моделирования пробковых течений в трубе сложной геометрии для упрощённой постановки задачи, в которой не учитываются силы трения. На рисунке 3.16 приведены результаты расчётов для задачи с аналогичными начальными и граничными условиями для V-трубы с углом изгиба

$\beta = 70^\circ$. Данные результаты показывают соответствие численных решений, полученных разными методами. При этом можно видеть преимущество метода RK-WENO для данной задачи, который позволяет получить численное решение сопоставимое по точности с решением, полученным методом RK-TVD с использованием в четыре раза более мелкой расчётной сетки.

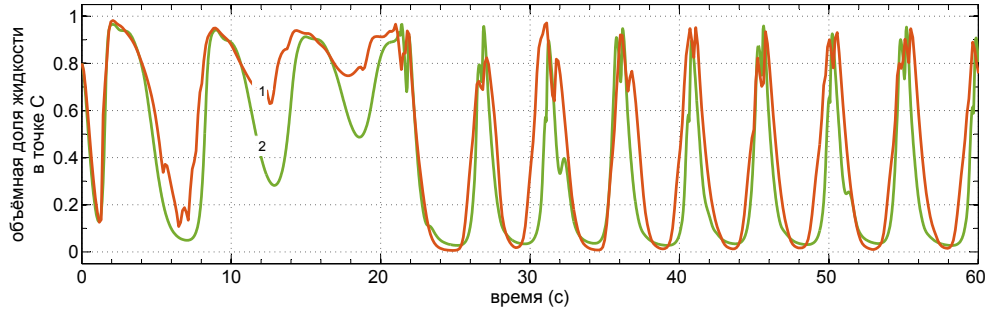


Рис. 3.16. Зависимость значения объёмной доли жидкости в точке C от времени при расчёте методом RK-WENO на сетке с 200 ячеек (кривая 1) и методом RK-TVD на сетке с 800 ячеек (кривая 2).

3.3.5. Задача о L-трубе

Ещё одна постановка для моделирования пробковых течений, обусловленных геометрией трубы, изображена на рисунке 3.17. Рассматривается труба общей длины $L = 42$ м, состоящая из горизонтальной секции длиной 25 м и вертикальной секции длиной 13,5 м. Как и в задаче 3.3.4, для обеспечения корректности граничных условий на выходе из трубы используется дополнительная нисходящая секция длиной 3,5 м. Диаметр трубы 0,053 м. На левом конце трубы задаются постоянные значения скоростей жидкости и газа $u_l = 0,127$ м/с, $u_g = 5$ м/с и объёмной концентрации жидкости $\alpha_l = 0,8$, а на выходе из трубы — атмосферное давление: $p_l(t, L) = p_g(t, L) = p_{atm}$. Начальные значения скоростей и концентраций в трубе совпадают с граничными значениями на входе: $u_l(0, x) = 0,127$ м/с, $u_g(0, x) = 5$ м/с, $\alpha_l(0, x) = 0,8$.

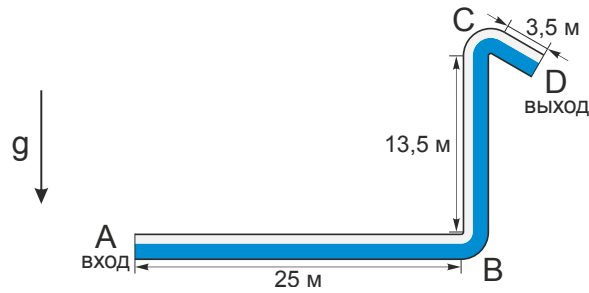


Рис. 3.17. Схематическое представление задачи о L-трубе

Данная задача изучалась в контексте работы [80], где приводятся результаты экспериментального исследования пробковых течений в трубе с аналогичными параметрами. На рисунке 3.18 приведены зависимости объемной доли жидкости (а) и давления (б) в точке сочленения горизонтальной и вертикальной секций трубы, полученные численно с использованием метода Рунге-Кутты-TVD на сетке с 800 ячеек.

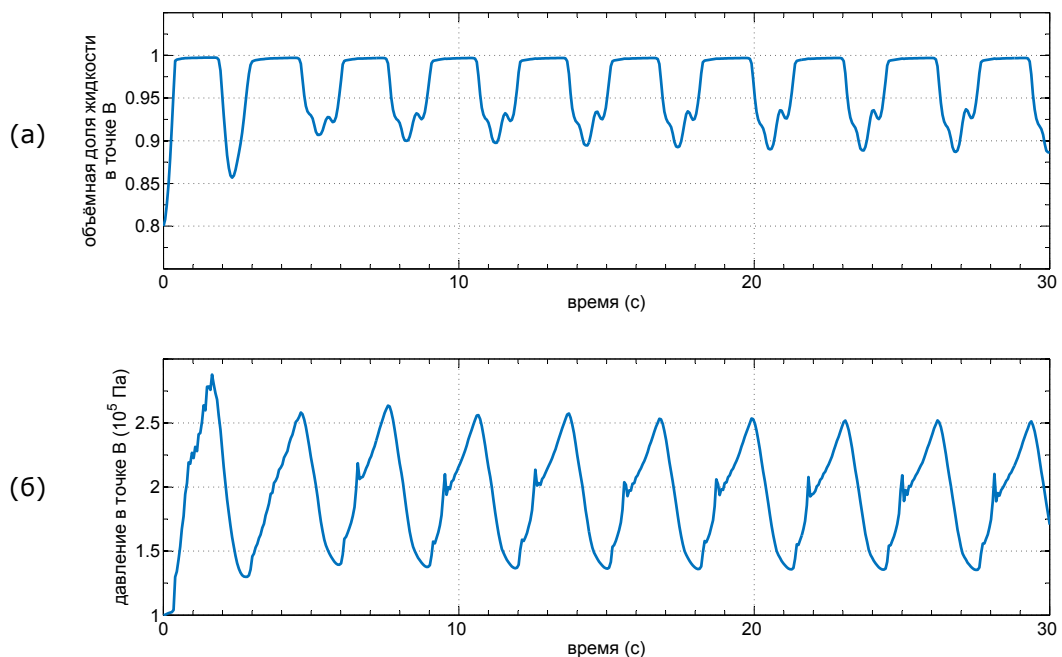


Рис. 3.18. Зависимость параметров течения в точке В от времени при расчёте методом RK-TVD на сетке с 800 ячеек.

Можно видеть, что с помощью развиваемой вычислительной модели удаётся

ся воспроизвести устойчивый пробковый режим течения для данной постановки. Однако полученные численные результаты далеки от экспериментальных данных из упомянутой работы [80], где приводятся профили давления в горизонтальной части трубы. Вероятной причиной этого является некорректное с физической точки зрения описание сил трения в вертикальной части трубы, так как в предлагаемой модели используется приближение стратифицированного течения для определения коэффициентов трения.

3.3.6. Пробковый режим течения газожидкостной смеси в горизонтальной трубе

Причиной возникновения пробкового режима течения смеси, рассмотренного в задачах 3.3.4–3.3.5, главным образом является действие силы тяжести в совокупности с геометрией трубы. Имеется другой механизм образования пробковых течений, связанный с действием силы межфазного трения. Такого рода течения наблюдаются и изучаются, в том числе экспериментально, в горизонтальных трубах (см., например, [72, 81] и цитированную там литературу) и носят название гидродинамических пробковых течений. При некоторых соотношениях расходов жидкости и газа, на границе стратифицированного течения может развиваться неустойчивость типа Кельвина-Гельмгольца, приводящая к образованию волн на поверхности жидкости. При возрастании амплитуды волн возможно перекрытие поперечного сечения трубы жидкой фазой и переход течения от волнового режима к пробковому. В работе [82] приводится карта режимов течения газожидкостной смеси в горизонтальной трубе, устанавливающая границы перехода течения из одного режима в другой в зависимости от приведённых скоростей (скорость, умноженная на объёмную долю) жидкости и газа (см. Рис. 3.19).

В этом параграфе продемонстрирована применимость нестационарной осреднённой одномерной модели с двумя давлениями к описанию гидродинамических пробковых течений в трубах. Рассмотрим горизонтальную трубу длиной 37 м,

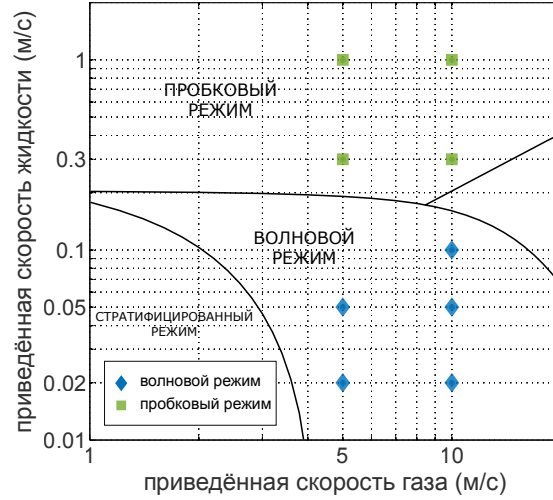


Рис. 3.19. Карта режимов течения газожидкостной смеси в горизонтальной трубе. Сплошными линиями показаны границы значений приведённых скоростей, соответствующие тому или иному режиму [82]. Символами $\diamond$ и $\square$ отмечены значения, для которых проводились расчёты методом RK-TVD.

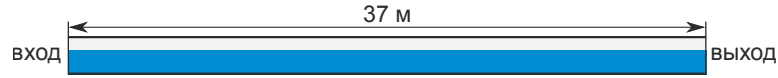


Рис. 3.20. Схематическое представление задачи

заполненную водой и воздухом (рис. 3.20). В качестве граничных условий задаются значения приведённых скоростей ($\nu_i = \alpha_i u_i, i = l, g$) и объёмных долей на входе трубы: $\alpha_l(t, 0) = 0,67$, $\alpha_g(t, 0) = 0,33$, $\nu_l(t, 0) = 1$ м/с, $u_g(t, 0) = 10$ м/с, а также атмосферное давление на выходе: $p(t, L) = 10^5$ Па. В качестве начальных данных задаются скорости воды $v_l = 10^{-3}$ м/с и воздуха $v_g = 10^{-2}$ м/с и объемная доля жидкости $\alpha_l = 0,67$.

На рисунке 3.21 приведены графики объемной доли воды в середине трубы в зависимости от времени, полученные в результате расчётов с мгновенной релаксацией давлений для 800, 1600 и 3200 счётных ячеек. Видно, что в каждом случае возникает периодическое пробковое течение, однако сходимость при измельчении сетки отсутствует. Более того, для 3200 точек режим течения приобретает хаотический характер. По-видимому, полученный эффект обусловлен

тем, что рассматриваемое течение является неустойчивым, причём характер неустойчивости таков, что скорость роста возмущения увеличивается с увеличением частоты начальных возмущений. Этот эффект наблюдается численно: с увеличением числа счетных ячеек численный метод разрешает более высокочастотные волны, которые растут с большей скоростью, что приводит к нерегулярному поведению решения.

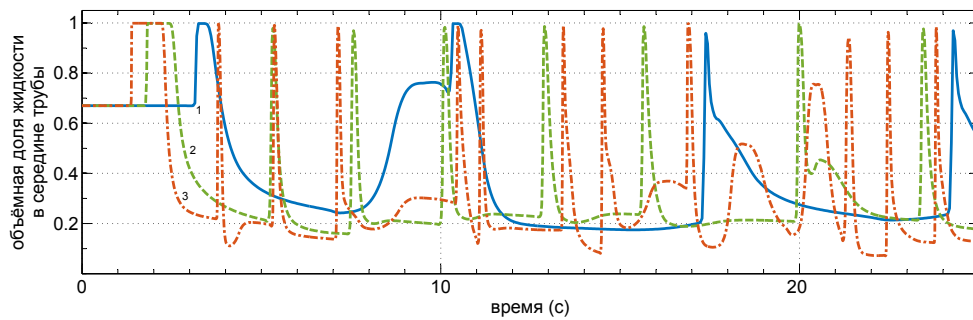


Рис. 3.21. Зависимость значения объёмной доли жидкости в середине трубы от времени при расчёте методом RK-TVD с мгновенной релаксацией давлений на сетках: 800, 1600, 3200 ячеек (кривые 1, 2, 3 соответственно).

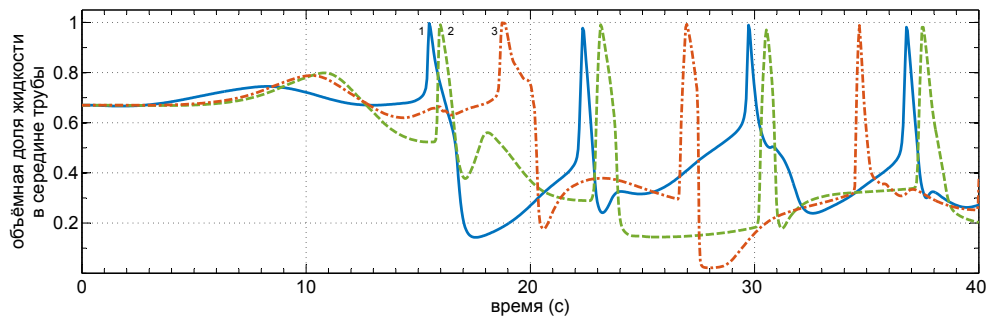


Рис. 3.22. Зависимость значения объёмной доли жидкости в середине трубы от времени при расчёте методом RK-TVD с конечным временем релаксации давлений на сетках: 400, 800, 1600 (кривые 1, 2, 3 соответственно).

Для того чтобы понять, как скорость релаксации давлений влияет на поведение решения, были проведены расчёты с конечной скоростью релаксации.

	количество ячеек расчётной сетки			
	400	800	1600	3200
RK-TVD с мгновенной релаксацией давлений	—	6,40171	2,90793	—
RK-TVD с конечным временем релаксации давлений ($\tau = 0,01$)	7,09491	7,16153	7,17757	

Таблица 3.3. Средний период образования пробок (с) при расчёте методом RK-TVD с мгновенной релаксацией давлений и с конечным временем релаксации

На рисунке 3.22 приведены значения объемной концентрации жидкости, полученные в расчётах с конечной скоростью релаксации при $\tau = 0,01$ для 400, 800 и 1600 точек сетки. Здесь видно, что течение также имеет периодический пробковый характер, однако период образования пробок слабо зависит от числа точек. Таблица 3.3 содержит данные о зависимости среднего периода пробкового течения от количества ячеек расчётной сетки в обоих случаях. Приведённые результаты демонстрируют отсутствие сходимости по периоду в предположении мгновенной релаксации давлений и наличие сходимости при фиксированном τ . Это дает основания предполагать, что модель с конечным временем релаксации может быть использована для адекватного описания гидродинамических пробковых течений, вызываемых неустойчивостью межфазной границы и наблюдаемых в экспериментах. Вопрос выбора зависимости τ от параметров течения требует дальнейшего изучения.

Для проверки правдоподобности результатов расчётов для задач течения в горизонтальной трубе была использована упомянутая выше карта режимов, используемая многими авторами при изучении результатов численного и экспериментального моделирования [81, 83]. Результаты расчётов для определённых сочетаний скоростей жидкости и газа, соответствующих пробковому и волновому режимам течения, с использованием метода Рунге-Кутты-TVD демонстрируют согласованность с данной картой режимов (Рис. 3.19).

Выводы

В данной главе приводится описание комплекса программ, позволяющего проводить расчёты начально-краевых задач для систем определяющих уравнений моделей, предложенных в главе 1, на основе вычислительных алгоритмов, разработанных в главе 2. Приведены результаты серии численных экспериментов. Состоятельность общей модели течений многофазной смеси с произвольным количеством фаз продемонстрирована на примерах решения задачи Римана о распаде разрыва для четырёхфазной изэнтропической модели. Для вычислительной модели газожидкостных трубных течений показана согласованность результатов вычислений с имеющимися в литературе точными решениями классических тестовых задач. Продemonстрирована применимость модели для решения важных с практической точки зрения задач транспортировки газожидкостных смесей по трубопроводам и описания различных режимов течений, в том числе пробковых течений. Изучено влияние способа учёта релаксации давления в численном алгоритме на точность решения и устойчивость алгоритма. Исследовано влияние значения параметра релаксации τ на периодическую картину пробкового течения и сходимость численного метода.

Заключение

В работе рассмотрены задачи построения вычислительных моделей для описания динамики многофазных сред, включающие несколько аспектов: формулировку уравнений, разработку вычислительного алгоритма для их решения, реализацию алгоритма в программном коде и дальнейшее проведение численных экспериментов с целью верификации моделей и исследования их чувствительности к изменению тех или иных параметров.

В первой главе сформулированы уравнения двух математических моделей: общей модели течений многофазной сжимаемой среды с произвольным количеством фаз и нестационарной одномерной осреднённой модели трубных газожидкостных течений. Общая многофазная модель получена как обобщение на случай произвольного количества фаз предложенной ранее консервативной модели двухфазной среды. Для полученной системы уравнений в рамках теории термодинамически согласованных систем обосновано свойство симметрической гиперболичности по Фридрихсу. Уравнения модели газожидкостных течений получены путём применения процедуры осреднения по сечению трубы к трёхмерным уравнениям консервативной модели двухфазной среды. Системы определяющих уравнений обеих моделей представляют собой новые, термодинамически согласованные формулировки уравнений течений сжимаемых многофазных смесей.

Во второй главе описаны численные алгоритмы, разработанные для решения полученных уравнений. Свойства дивергентности и гиперболичности, на которых делается акцент, позволяют положить в основу алгоритма эффективные высокоточные методы и осуществлять корректную обработку граничных условий с учётом проведённого характеристического анализа систем уравнений.

В третьей главе описаны результаты численного исследования предложенных моделей. Показано соответствие результатов расчётов теоретическим свойствам уравнений, а также известным решениям некоторых модельных задач.

Показана возможность применения нестационарной одномерной осреднённой модели для описания течений в трубах различной геометрии.

Приведём основные результаты работы:

1. Сформулирована модель течений многофазной сжимаемой среды с произвольным количеством фаз в приближении общей энтропии смеси. Модель представляет собой термодинамически согласованную гиперболическую систему уравнений в дивергентной форме.
2. Получена нестационарная одномерная осреднённая модель газожидкостных трубных течений. Все уравнения модели записываются в дивергентной форме и образуют гиперболическую систему.
3. Разработан и реализован в виде комплекса программ вычислительный алгоритм на базе методов высокого порядка точности Рунге-Кутты-TVD, Рунге-Кутты-WENO, позволяющий проводить расчёты начально-краевых задач для предложенных систем уравнений. Разработаны модификации базового алгоритма для учёта эффекта релаксации давлений фаз и решения задач с наличием скачка объёмных концентраций в начальных данных.
4. Показана состоятельность и эффективность разработанных вычислительных моделей на примерах тестовых задач. Продемонстрирована применимость нестационарной одномерной осреднённой модели для описания различных режимов трубных течений газожидкостных смесей, в том числе пробковых режимов двух типов: пробковых течений, обусловленных сложной геометрией трубы, и гидродинамических пробковых течений. Исследована зависимость точности решения от способа учёта эффекта релаксации давлений в численном алгоритме. Для гидродинамических пробковых течений изучено влияние величины релаксационного параметра на периодическую картину течения и устойчивость алгоритма.

Дальнейшее развитие работы предполагает более глубокое изучение вли-

яния параметра релаксации давлений τ на периодические численные решения на основе линейного анализа устойчивости, что, возможно, позволит установить критерии выбора τ как функции параметров состояния. Можно предположить, что корректное определение τ позволит достичь большей согласованности численных результатов с экспериментальными данными моделирования гидродинамических пробковых течений. Другим направлением дальнейших исследований является построение на основе развиваемого подхода более сложных моделей многофазных сред с учётом межфазного массообмена, позволяющих моделировать процессы выделения и поглощения газа жидкой фазой.

Список литературы

1. Рахматулин Х. А. Основы газовой динамики взаимопроникающих движений сплошных сред // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20, № 2. С. 184–195.
2. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978.
3. Ishii M. Thermo-fluid dynamic theory of two-phase flow // NASA STI/Recon Technical Report A. 1975. Vol. 75. P. 29657.
4. Soo S. Fluid dynamics of multiphase systems. Blaisdell book in the pure and applied sciences. Blaisdell Pub. Co., 1967.
5. Телетов С. Г. Вопросы гидродинамики двухфазных смесей // Вестник МГУ. Серия математики. 1958. № 2. С. 15–27.
6. Anderson T. B., Jackson R. Fluid Mechanical Description of Fluidized Beds. Equations of Motion // Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals. 1967. Vol. 6, no. 4. P. 527–539.
7. Крайко А. Н., Стернин Л. Е. К теории течений двухскоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами // Прикладная математика и механика. 1965. Т. 29, № 3. С. 418–429.
8. Stewart H., Wendroff B. Two-phase flow: models and methods // Journal of Computational Physics. 1984. Vol. 56, no. 3. P. 363–409.
9. Staedtke H., Franchello G., Worth B. et al. Advanced three-dimensional two-phase flow simulation tools for application to reactor safety (ASTAR) // Nuclear Engineering and Design. 2005. Vol. 235, no. 2. P. 379–400.
10. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983.
11. Ландау Л. Д. Теория сверхтекучести гелия II // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1941. Т. 11. С. 592.
12. Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. Л. Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970.

13. Bedford A., Drumheller D. S. A variational theory of immiscible mixtures // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1978. Vol. 68, no. 1. P. 37–51.
14. Халатников И. М., Покровский В. Н. Гамильтонов формализм в классической и двухжидкостной гидродинамике // Письма в ЖЭТФ. 1976. Т. 23. Вып. 11. С. 653–656.
15. Geurst J. Variational principles and two-fluid hydrodynamics of bubbly liquid/gas mixtures // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 1986. Vol. 135, no. 2. P. 455–486.
16. Chen J. R., Richardson S. M., Saville G. Modelling of two-phase blowdown from pipelines — I. A hyperbolic model based on variational principles // Chemical Engineering Science. 1995. Vol. 50. P. 695–713.
17. Gavrilyuk S., Gouin H., Perepechko Y. V. Hyperbolic Models of Homogeneous Two-Fluid Mixtures // Meccanica. 1998. Vol. 33, no. 2. P. 161–175.
18. Gavrilyuk S., Saurel R. Mathematical and Numerical Modeling of Two-phase Compressible Flows with Micro-inertia // Journal of Computational Physics. 2002. Vol. 175, no. 1. P. 326–360.
19. Доровский В. Н. Континуальная теория фильтрации // Геология и геофизика. 1989. № 7. С. 39–45.
20. Блохин А. М., Доровский В. Н. Проблемы математического моделирования в теории многоскоростного континуума. Новосибирск, 1994.
21. Dorovsky V. Mathematical models of two-velocity media // Mathematical and Computer Modelling. 1995. Vol. 21, no. 7. P. 17 – 28.
22. Доровский В. Н., Перепечко Ю. В. Гидродинамическая модель раствора в трещиновато-пористых средах // Геология и геофизика. 1996. Т. 37, № 9. С. 123–134.
23. Baer M., Nunziato J. A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials // International Journal of Multiphase Flow. 1986. Vol. 12, no. 6. P. 861–889.
24. Saurel R., Abgrall R. A multiphase Godunov method for compressible multifluid

- and multiphase flows // Journal of Computational Physics. 1999. Vol. 150, no. 2. P. 425–467.
25. Le Métayer O., Massoni J., Saurel R. Modelling evaporation fronts with reactive Riemann solvers // Journal of Computational Physics. 2005. Vol. 205, no. 2. P. 567–610.
 26. Zein A., Hantke M., Warnecke G. Modeling phase transition for compressible two-phase flows applied to metastable liquids // Journal of Computational Physics. 2010. Vol. 229, no. 8. P. 2964–2998.
 27. Hérard J.-M. A three-phase flow model // Mathematical and computer modelling. 2007. Vol. 45, no. 5. P. 732–755.
 28. Romensky E. Thermodynamics and hyperbolic systems of balance laws in continuum mechanics // Godunov methods. Springer, 2001. P. 745–761.
 29. Годунов С. К., Роменский Е. И. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. М.: Научная книга, 1998.
 30. Romenski E., Toro E. Compressible two-phase flows: two-pressure models and numerical methods // Comput. Fluid Dyn. J. 2004. Vol. 13. P. 403–416.
 31. Romenski E., Resnyansky A., Toro E. Conservative hyperbolic model for compressible two-phase flow with different phase pressures and temperatures // Quarterly of applied mathematics. 2007. Vol. 65, no. 2. P. 259–279.
 32. Romenski E., Drikakis D., Toro E. Conservative models and numerical methods for compressible two-phase flow // Journal of Scientific Computing. 2010. Vol. 42, no. 1. P. 68–95.
 33. Romenski E. Hyperbolic systems of conservation laws for compressible multiphase flows based on thermodynamically compatible systems theory // Numerical Analysis and Applied Mathematics ICNAAM 2012: International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics / AIP Publishing. Vol. 1479. 2012. P. 62–65.
 34. La Spina G., de' Michieli Vitturi M. High-resolution finite volume central schemes for a compressible two-phase model // SIAM Journal on Scientific Com-

- puting. 2012. Vol. 34, no. 6. P. B861–B880.
35. Zeidan D. On a Further Work of Two-phase Mixture Conservation Laws // Numerical Analysis and Applied Mathematics ICNAAM 2011: International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics / AIP Publishing. Vol. 1389. 2011. P. 163–166.
 36. Bratland O. [Pipe Flow 2: Multi-phase Flow Assurance](http://www.drbratland.com/free-book-pipe-flow-2-multi-phase-flow-assurance/). 2009. URL: <http://www.drbratland.com/free-book-pipe-flow-2-multi-phase-flow-assurance/>.
 37. Ishii M., Hibiki T. Thermo-fluid dynamics of two-phase flow. Springer Science & Business Media, 2010.
 38. Stewart H. B., Wendroff B. Two-phase flow: models and methods // Journal of Computational Physics. 1984. Vol. 56, no. 3. P. 363–409.
 39. Staedtke H., Franchello G., Worth B. et al. Advanced three-dimensional two-phase flow simulation tools for application to reactor safety (ASTAR) // Nuclear Engineering and Design. 2005. Vol. 235, no. 2. P. 379–400.
 40. Zhibaedov V. D., Lebedeva N. A., Osipov A. A., Sin'kov K. F. On the hyperbolicity of one-dimensional models for transient two-phase flow in a pipeline // Fluid Dynamics. 2016. Vol. 51, no. 1. P. 56–69.
 41. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сб. 1959. Т. 47(89), № 3. С. 271–306.
 42. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // Journal of Computational Physics. 1983. Vol. 49, no. 3. P. 357–393.
 43. Toro E. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. Springer, 1999. Vol. 16.
 44. Harten A., Engquist B., Osher S., Chakravarthy S. R. Uniformly High Order Accurate Essentially Non-oscillatory Schemes, III // Journal of Computational Physics. 1987. Vol. 71, no. 2. P. 231–303.
 45. Liu X.-D., Osher S., Chan T. Weighted Essentially Non-oscillatory Schemes // Journal of Computational Physics. 1994. Vol. 115, no. 1. P. 200–212.

46. Shu C.-W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws: Tech. Rep. NASA CR-97-206253 ICASE Report No. 97-65: Institute for Computer Applications in Science and Engineering, 1997.
47. Qiu J., Shu C.-W. Runge–Kutta Discontinuous Galerkin Method Using WENO Limiters // SIAM Journal on Scientific Computing. 2005. Vol. 26, no. 3. P. 907–929.
48. Zahran Y. H. An efficient TVD-WENO method for conservation laws // Numerical Methods for Partial Differential Equations. 2009. Vol. 25, no. 6. P. 1443–1467.
49. Дмитриев М. Н., Роменский Е. И. WENO/Рунге-Кутта метод высокой точности для моделирования упругих волн // Уфимский математический журнал. 2010. Т. 2. С. 12.
50. Hermes V., Klioutchnikov I., Olivier H. Linear stability of WENO schemes coupled with explicit Runge–Kutta schemes // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2012. Vol. 69, no. 6. P. 1065–1095.
51. Романьков А. С., Роменский Е. И. Метод Рунге–Кутты/WENO для расчета уравнений волн малой амплитуды в насыщенной упругой пористой среде // Сибирский журнал вычислительной математики. 2014. Т. 17, № 3. С. 259–271.
52. Gottlieb S. On high order strong stability preserving Runge–Kutta and multi step time discretizations // Journal of Scientific Computing. 2005. Vol. 25, no. 1. P. 105–128.
53. Gregory G. A., Scott D. S. Correlation of liquid slug velocity and frequency in horizontal cocurrent gas-liquid slug flow // AIChE Journal. 1969. Vol. 15, no. 6. P. 933–935.
54. Henau V. d., Raithby G. D. A study of terrain-induced slugging in two-phase flow pipelines // International Journal of Multiphase Flow. 1995. Vol. 21, no. 3. P. 365–379.

55. Ujang P. M., Lawrence C. J., Hale C. P., Hewitt G. F. Slug initiation and evolution in two-phase horizontal flow // International Journal Of Multiphase Flow. 2006. Vol. 32. P. 527–552.
56. Gu H., Guo L. Experimental Investigation of Slug Development on Horizontal Two-phase Flow // Chinese Journal of Chemical Engineering. 2008. Vol. 16, no. 2. P. 171–177.
57. Erich Zakarian. Modélisation et Analyse des Instabilités d'Écoulements Diphasiques dans les Conduites Pétrolières du Type Pipeline-riser: Ph. D. thesis. 2011.
58. Stamatis Kalogerakos. Slug initiation and prediction using high accuracy methods - applications with field data: Ph. D. thesis / Cranfield University. Cranfield, UK, 2011.
59. Romenski E., Belozerov A., Peshkov I. Conservative formulation for compressible multiphase flows // Quarterly of Applied Mathematics. 2016. Vol. 74, no. 1. P. 113–136.
60. Белозеров А. А., Роменский Е. И., Лебедева Н. А. Моделирование течений сжимаемой газожидкостной смеси в трубах на основе теории термодинамически согласованных систем // Сибирский журнал чистой и прикладной математики. 2016. Т. 16, № 1. С. 40–56.
61. Belozerov A., Romenski E., Lebedeva N. Conservative model and numerical simulations of compressible two-phase pipe flows // AIP Conference Proceedings. 2016. Vol. 1738, no. 1.
62. Romenski E., Belozerov A., Peshkov I. Thermodynamically compatible hyperbolic conservative model of compressible multiphase flow: Application to four phase flow // AIP Conference Proceedings. 2013. Vol. 1558. P. 120–123.
63. Belozerov A. A., Romenski E. I., Peshkov I. M. Thermodynamically compatible hyperbolic conservative model of compressible multiphase flow // Тезисы Международной конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики – 2014». 2014. С. 10.

64. Belozarov A. A., Romenski E. I., Lebedeva N. A. Conservative model and numerical methods for compressible two-phase pipe flow // The 13th Asian symposium on visualization. Abstarcts. 2015. P. 22–23.
65. Friedrichs K. Symmetric hyperbolic linear differential equations // Communications on pure and applied Mathematics. 1954. Vol. 7, no. 2. P. 345–392.
66. Dafermos C. Hyperbolic conservation laws in continuum physics, volume 325 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. 2005.
67. де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964.
68. La Spina G., de'Michieli Vitturi M., Romenski E. A compressible single temperature conservative two-phase model with phase transition // International Journal for Numerical Methods in Fluids. accepted.
69. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
70. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
71. Shaposhnikov D., Lebedeva N., Starostin A. Slug capturing scheme for gas-liquid pipe flows based on two-pressure two-fluid model // AIP Conference Proceedings. 2015. Vol. 1648, no. 1. P. 630003.
72. Bonizzi M., Andreussi P., Banerjee S. Flow regime independent, high resolution multi-field modelling of near-horizontal gas-liquid flows in pipelines // International Journal of Multiphase Flow. 2009. Vol. 35, no. 1. P. 34–46.
73. Saurel R., Abgrall R. A Simple Method for Compressible Multifluid Flows // SIAM Journal on Scientific Computing. 1999. Vol. 21, no. 3. P. 1115–1145.
74. Thornber B., Mosedale A., Drikakis D. et al. An improved reconstruction method for compressible flows with low Mach number features // Journal of Computational Physics. 2008. Vol. 227, no. 10. P. 4873 – 4894.
75. Ransom V. H. Numerical Benchmark Test No. 2.1: Faucet Flow // Multiphase Science and Technology. 1987. Vol. 3, no. 1-4. P. 465–467.

76. Evje S., Flåtten T. Weakly implicit numerical schemes for a two-fluid model // SIAM Journal on Scientific Computing. 2005. Vol. 26, no. 5. P. 1449–1484.
77. Tan S., Shu C.-W. Inverse Lax-Wendroff procedure for numerical boundary conditions of conservation laws // Journal of Computational Physics. 2010. Vol. 229, no. 21. P. 8144–8166.
78. Tan S., Shu C.-W. A high order moving boundary treatment for compressible inviscid flows // Journal of Computational Physics. 2011. Vol. 230, no. 15. P. 6023–6036.
79. Tan S., Wang C., Shu C.-W., Ning J. Efficient implementation of high order inverse Lax-Wendroff boundary treatment for conservation laws // Journal of Computational Physics. 2012. Vol. 231, no. 6. P. 2510–2527.
80. Fabre J., Peresson L. L., Corteville J. et al. Severe Slugging in Pipeline/Riser Systems // SPE Production Engineering. 1990. Vol. 5, no. 03. P. 299–305.
81. Issa R. I., Kempf M. H. W. Simulation of slug flow in horizontal and nearly horizontal pipes with the two-fluid model // International Journal of Multiphase Flow. 2003. Vol. 29, no. 1. P. 69–95.
82. Taitel Y., Dukler A. E. A model for predicting flow regime transitions in horizontal and near horizontal gas-liquid flow // AIChE Journal. 1976. Vol. 22, no. 1. P. 47–55.
83. Barnea D., Taitel Y. Kelvin-Helmholtz stability criteria for stratified flow: viscous versus non-viscous (inviscid) approaches // International Journal of Multiphase Flow. 1993. Vol. 19, no. 4. P. 639–649.

Приложение А

Вывод уравнений осреднённой модели трубных течений

В разделе 1.3.2 описана процедура вывода осреднённых одномерных уравнений для описания трубных газожидкостных течений на примере закона сохранения массы жидкой фазы. Полученное уравнение в терминах осреднённых величин имеет следующий вид

$$\frac{\partial A \langle \alpha_l \rho_l \rangle}{\partial t} + \frac{\partial A \langle \alpha_l \rho_l u_l \rangle}{\partial x} = q_l(x). \quad (\text{A.1})$$

Приведём подробный вывод остальных уравнений системы (1.29).

Закон сохранения массы газообразной фазы

Запишем формулировку закона сохранения в цилиндрических координатах и будем действовать по аналогии с процедурой осреднения для закона сохранения массы жидкости.

$$\frac{\partial \alpha_g \rho_g}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_g \rho_g u_g}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \alpha_g \rho_g v_g}{\partial r} = 0.$$

Проинтегрируем по сечению трубы каждое слагаемое левой части данного уравнения и сделаем следующие преобразования. Всюду учитываем данное ранее определение осреднённой величины $\langle F \rangle = \frac{1}{A} \int_0^R \int_0^{2\pi} F \cdot r dr d\theta$.

$$\begin{aligned} 1. \quad & \int_0^{R(x)} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \alpha_g \rho_g}{\partial t} \right) r dr d\theta = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{R(x)} \int_0^{2\pi} \alpha_g \rho_g r dr d\theta = \frac{\partial A \langle \alpha_g \rho_g \rangle}{\partial t}, \\ 2. \quad & \int_0^{R(x)} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \alpha_g \rho_g u_g}{\partial x} \right) r dr d\theta = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{R(x)} \int_0^{2\pi} \alpha_g \rho_g u_g r dr d\theta - \\ & - \left[\int_0^{2\pi} \alpha_g \rho_g u_g r d\theta \right]_{r=R(x)} \frac{dR(x)}{dx} = \frac{\partial A \langle \alpha_g \rho_g u_g \rangle}{\partial x} - \left[\int_0^{2\pi} \alpha_g \rho_g u_g r d\theta \right]_{r=R(x)} \frac{dR(x)}{dx} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial A \langle \alpha_g \rho_g u_g \rangle}{\partial x}. \text{ Исползовано условие } u_g|_{r=R(x)} = 0.$$

$$3. \int_0^{R(x)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r \alpha_g \rho_g v_g}{\partial r} \right) r dr d\theta = \left[\int_0^{2\pi} \alpha_g \rho_g v_g r d\theta \right]_{r=R(x)} = -q_g(x).$$

Через $q_g(x)$ обозначен приток газа со стенки трубы в точке x .

$$4. \int_0^{R(x)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \alpha_g \rho_g w_g}{\partial \theta} \right) r dr d\theta = \int_0^{R(x)} (\alpha_g \rho_g w_g)|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr = 0,$$

так как $\alpha_g \rho_g w_g|_{\theta=0} = \alpha_g \rho_g w_g|_{\theta=2\pi}$.

Таким образом, получим закон сохранения массы газа в терминах осреднённых параметров:

$$\frac{\partial A \langle \alpha_g \rho_g \rangle}{\partial t} + \frac{\partial A \langle \alpha_g \rho_g u_g \rangle}{\partial x} = q_g(x). \quad (\text{A.2})$$

Закон сохранения полного импульса

Закон сохранения импульса смеси в направлении x цилиндрических координат запишется следующим образом.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (\alpha_l \rho_l u_l + \alpha_g \rho_g u_g)}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha_l \rho_l u_l^2 + \alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_l p_l + \alpha_g p_g)}{\partial x} + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial r (\alpha_l \rho_l u_l v_l + \alpha_g \rho_g u_g v_g)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\alpha_l \rho_l u_l w_l + \alpha_g \rho_g u_g w_g)}{\partial \theta} = -G_i \end{aligned}$$

Проинтегрируем данное уравнение по сечению. Для отдельных слагаемых левой части получим:

$$1. \int_0^{R(x)} \int_0^{2\pi} \frac{\partial (\alpha_l \rho_l u_l + \alpha_g \rho_g u_g)}{\partial t} r dr d\theta = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{R(x)} \int_0^{2\pi} (\alpha_l \rho_l u_l + \alpha_g \rho_g u_g) r dr d\theta = \\ = \frac{\partial A (\langle \alpha_l \rho_l u_l \rangle + \langle \alpha_g \rho_g u_g \rangle)}{\partial t},$$

$$2. \int_0^{R(x)} \int_0^{2\pi} \frac{\partial (\alpha_l \rho_l u_l^2 + \alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_l p_l + \alpha_g p_g)}{\partial x} r dr d\theta =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{R(x)} \int_0^{2\pi} (\alpha_l \rho_l u_l^2 + \alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_l p_l + \alpha_g p_g) r dr d\theta - \\
&- \left[\int_0^{2\pi} (\alpha_l \rho_l u_l^2 + \alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_l p_l + \alpha_g p_g) r d\theta \right]_{r=R(x)} \frac{dR(x)}{dx} = \\
&= \frac{\partial A (\langle \alpha_l \rho_l u_l^2 \rangle + \langle \alpha_g \rho_g u_g^2 \rangle + \langle \alpha_l p_l \rangle + \langle \alpha_g p_g \rangle)}{\partial x} - \\
&- \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} (\alpha_l p_l + \alpha_g p_g) d\theta \right]_{r=R(x)} \frac{dA}{dx}.
\end{aligned}$$

Здесь было использовано условие $u_l|_{r=R(x)} = u_g|_{r=R(x)} = 0$ и равенство $\frac{dA}{dx} = 2\pi R \frac{dR}{dx}$.

$$\begin{aligned}
3. \quad &\int_0^{R(x)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r (\alpha_l \rho_l u_l v_l + \alpha_g \rho_g u_g v_g)}{\partial r} \right) r dr d\theta = \left[\int_0^{2\pi} (\alpha_l \rho_l u_l v_l + \alpha_g \rho_g u_g v_g) r d\theta \right]_{r=R(x)} \\
&= 0, \text{ так как } u_l|_{r=R(x)} = u_g|_{r=R(x)} = 0. \\
4. \quad &\int_0^{R(x)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (\alpha_l \rho_l u_l w_l + \alpha_g \rho_g u_g w_g)}{\partial \theta} \right) r dr d\theta = \int_0^{R(x)} (\alpha_l \rho_l u_l w_l + \alpha_g \rho_g u_g w_g) \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr = \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем осреднённое уравнение полного импульса в направлении x :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial A (\langle \alpha_l \rho_l u_l \rangle + \langle \alpha_g \rho_g u_g \rangle)}{\partial t} + \frac{\partial A (\langle \alpha_l \rho_l u_l^2 \rangle + \langle \alpha_g \rho_g u_g^2 \rangle + \langle \alpha_l p_l \rangle + \langle \alpha_g p_g \rangle)}{\partial x} - \\
&- \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} (\alpha_l p_l + \alpha_g p_g) d\theta \right]_{r=R(x)} \frac{dA}{dx} = - \langle G_i \rangle. \quad (\text{A.3})
\end{aligned}$$

Дивергентные уравнения для относительных скоростей

Приведём уравнения для компонент относительной скорости в цилиндрической системе координат:

$$\begin{aligned}\frac{\partial (u_l - u_g)}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} &= \varepsilon_{1lj} u_l \omega_j - \Lambda_1, \\ \frac{\partial (v_l - v_g)}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial r} &= \varepsilon_{2lj} u_l \omega_j - \Lambda_2, \\ \frac{\partial (w_l - w_g)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} &= \varepsilon_{3lj} u_l \omega_j - \Lambda_3,\end{aligned}$$

где

$$F = \frac{u_l^2 + v_l^2 + w_l^2}{2} - \frac{u_g^2 + v_g^2 + w_g^2}{2} + e_l + \frac{p_l}{\rho_l} - e_g - \frac{p_g}{\rho_g}.$$

Рассмотрим уравнение для $u_l - u_g$. Интегрирование первого слагаемого по сечению даст

$$\int_0^{R(x)} \int_0^{2\pi} \frac{\partial (u_l - u_g)}{\partial t} r dr d\theta = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{R(x)} \int_0^{2\pi} (u_l - u_g) r dr d\theta = \frac{\partial A(\langle u_l \rangle - \langle u_g \rangle)}{\partial t}.$$

Проинтегрируем второе слагаемое:

$$\begin{aligned}& \int_0^{R(x)} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_l^2 + v_l^2 + w_l^2}{2} - \frac{u_g^2 + v_g^2 + w_g^2}{2} + e_l + \frac{p_l}{\rho_l} - e_g - \frac{p_g}{\rho_g} \right) r dr d\theta = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{R(x)} \int_0^{2\pi} \left(\frac{u_l^2 + v_l^2 + w_l^2}{2} - \frac{u_g^2 + v_g^2 + w_g^2}{2} + e_l + \frac{p_l}{\rho_l} - e_g - \frac{p_g}{\rho_g} \right) r dr d\theta - \\ & - \left[\int_0^{2\pi} \left(\frac{u_l^2 + v_l^2 + w_l^2}{2} - \frac{u_g^2 + v_g^2 + w_g^2}{2} + e_l + \frac{p_l}{\rho_l} - e_g - \frac{p_g}{\rho_g} \right) r d\theta \right]_{r=R(x)} \frac{dR(x)}{dx}.\end{aligned}$$

Поскольку значения компонент скоростей v_l , v_g и w_l , w_g малы, соответствующие члены второго порядка можно отбросить. Членом $\varepsilon_{1lj} u_l \omega_j$ в правой части также можно пренебречь в силу малости скоростей, так как он содержит произведения скоростей и производных относительных скоростей. Таким образом, осреднённое уравнение для относительной скорости $u_l - u_g$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial A(\langle u_l \rangle - \langle u_g \rangle)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(A \left(\frac{\langle u_l^2 \rangle}{2} - \frac{\langle u_g^2 \rangle}{2} + \langle e_l \rangle + \left\langle \frac{p_l}{\rho_l} \right\rangle - \langle e_g \rangle - \left\langle \frac{p_g}{\rho_g} \right\rangle \right) \right) - \\ - \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \left(e_l + \frac{p_l}{\rho_l} - e_g - \frac{p_g}{\rho_g} \right) d\theta \right]_{r=R(x)} \frac{dA}{dx} = -\langle \Lambda_1 \rangle. \quad (\text{A.4}) \end{aligned}$$

Уравнения для относительных скоростей в радиальном и угловом направлениях можно не рассматривать в виду малости v_l, v_g, w_l, w_g .

Уравнение баланса объёмных долей

Рассмотрим уравнение баланса объёмных долей, которое в цилиндрических координатах будет иметь вид

$$\frac{\partial \rho \alpha_l}{\partial t} + \frac{\partial \rho \alpha_l u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \rho \alpha_l v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho \alpha_l w}{\partial \theta} = -\varphi,$$

где $\rho = \alpha_l \rho_l + \alpha_g \rho_g$, $u = (\alpha_l \rho_l u_l + \alpha_g \rho_g u_g) / \rho$, $v = (\alpha_l \rho_l v_l + \alpha_g \rho_g v_g) / \rho$, $w = (\alpha_l \rho_l w_l + \alpha_g \rho_g w_g) / \rho$. Как и ранее, проинтегрируем уравнение по сечению трубы.

Для отдельных слагаемых левой части равенства получим:

$$\begin{aligned} 1. \int_0^{R(x)} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \rho \alpha_l}{\partial t} r dr d\theta &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{R(x)} \int_0^{2\pi} \rho \alpha_l r dr d\theta = \frac{\partial A \langle \alpha_l \rho_l \rangle}{\partial t}, \\ 2. \int_0^{R(x)} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \rho \alpha_l u}{\partial x} r dr d\theta &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{R(x)} \int_0^{2\pi} \rho \alpha_l u r dr d\theta - \left[\int_0^{2\pi} \rho \alpha_l u r d\theta \right]_{r=R(x)} \frac{dR(x)}{dx} = \\ &= \frac{\partial A \langle \rho \alpha_l u \rangle}{\partial x} - \left[\int_0^{2\pi} \rho \alpha_l u r d\theta \right]_{r=R(x)} \frac{dR(x)}{dx} = \frac{\partial A \langle \rho \alpha_l u \rangle}{\partial x}, \\ 3. \int_0^{R(x)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial r \rho \alpha_l v}{\partial r} r dr d\theta &= \left[\int_0^{2\pi} \rho \alpha_l v r d\theta \right]_{r=R(x)} = 0, \\ 4. \int_0^{R(x)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial \rho \alpha_l w}{\partial \theta} r dr d\theta &= \left[\int_0^{R(x)} (\rho \alpha_l w) \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr \right]_{r=R(x)} = 0. \end{aligned}$$

В результате имеем:

$$\frac{\partial A \langle \alpha_l \rho_l \rangle}{\partial t} + \frac{\partial A \langle \rho \alpha_l u \rangle}{\partial x} = - \langle \varphi \rangle. \quad (\text{A.5})$$

Таким образом, получена система определяющих уравнений (A.1)–(A.5) для описания трубных течений газожидкостной смеси в терминах осреднённых по сечению трубы величин:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A \langle \alpha_l \rho_l \rangle}{\partial t} + \frac{\partial A \langle \alpha_l \rho_l u_l \rangle}{\partial x} = q_l(x), \\ & \frac{\partial A \langle \alpha_g \rho_g \rangle}{\partial t} + \frac{\partial A \langle \alpha_g \rho_g u_g \rangle}{\partial x} = q_g(x), \\ & \frac{\partial A (\langle \alpha_l \rho_l u_l \rangle + \langle \alpha_g \rho_g u_g \rangle)}{\partial t} + \frac{\partial A (\langle \alpha_l \rho_l u_l^2 \rangle + \langle \alpha_g \rho_g u_g^2 \rangle + \langle \alpha_l p_l \rangle + \langle \alpha_g p_g \rangle)}{\partial x} - \\ & - \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} (\alpha_l p_l + \alpha_g p_g) d\theta \right]_{r=R(x)} \frac{dA}{dx} = - \langle G_i \rangle, \\ & \frac{\partial A (\langle u_l \rangle - \langle u_g \rangle)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(A \left(\frac{\langle u_l^2 \rangle}{2} - \frac{\langle u_g^2 \rangle}{2} + \langle e_l \rangle + \left\langle \frac{p_l}{\rho_l} \right\rangle - \langle e_g \rangle - \left\langle \frac{p_g}{\rho_g} \right\rangle \right) \right) - \\ & - \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \left(e_l + \frac{p_l}{\rho_l} - e_g - \frac{p_g}{\rho_g} \right) d\theta \right]_{r=R(x)} \frac{dA}{dx} = - \langle \Lambda_1 \rangle, \\ & \frac{\partial A \langle \alpha_l \rho_l \rangle}{\partial t} + \frac{\partial A \langle \rho \alpha_l u \rangle}{\partial x} = - \langle \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Приложение Б

Приведение системы уравнений трубных течений к характеристической форме

Приведём линеаризованную систему уравнений модели трубных течений без учёта правых частей (1.30):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \alpha_l}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \alpha_l}{\partial x} &= 0 \\
 \frac{\partial \rho_l}{\partial t} + a_{l0} \frac{\partial \alpha_l}{\partial x} + u_{l0} \frac{\partial \rho_l}{\partial x} + \rho_{l0} \frac{\partial u_l}{\partial x} &= 0 \\
 \frac{\partial \rho_g}{\partial t} + a_{20} \frac{\partial \alpha_l}{\partial x} + u_{g0} \frac{\partial \rho_g}{\partial x} + \rho_{g0} \frac{\partial u_g}{\partial x} &= 0 \\
 \frac{\partial u_l}{\partial t} + \frac{p_{g0} - p_{l0}}{\rho_0} \frac{\partial \alpha_l}{\partial x} + \frac{C_l^2}{\rho_{l0}} \frac{\partial \rho_l}{\partial x} + u_{l0} \frac{\partial u_l}{\partial x} &= 0 \\
 \frac{\partial u_g}{\partial t} + \frac{p_{g0} - p_{l0}}{\rho_0} \frac{\partial \alpha_l}{\partial x} + \frac{C_g^2}{\rho_{g0}} \frac{\partial \rho_g}{\partial x} + u_{g0} \frac{\partial u_g}{\partial x} &= 0.
 \end{aligned} \tag{Б.1}$$

Будем искать характеристические переменные v_i , соответствующие собственным значениям λ_i , как линейные комбинации примитивных переменных, такие что

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial v_i}{\partial x} = 0. \tag{Б.2}$$

Рассмотрим поочерёдно собственные значения λ_i линеаризованной системы, определённые в (1.33).

1. $\lambda_1 = u_0$

Из вида первого уравнения системы (Б.1) с учётом (Б.2) сразу следует, что характеристическая переменная, соответствующая $\lambda_1 = u_0$, равна α_l : $v_1 = \alpha_l$.

2. $\lambda_{2,3} = u_{l0} \pm C_l$

Будем искать $v_{1,2}$, такие что

$$\frac{\partial v_{1,2}}{\partial t} + (u_{l0} \pm C_l) \frac{\partial v_{1,2}}{\partial x} = 0 \tag{Б.3}$$

Умножим уравнения системы (Б.1) на коэффициенты просуммируем:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial \alpha_l}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \alpha_l}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho_l}{\partial t} + a_{10} \frac{\partial \alpha_l}{\partial x} + u_{l0} \frac{\partial \rho_l}{\partial x} + \rho_{l0} \frac{\partial u_l}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho_g}{\partial t} + a_{20} \frac{\partial \alpha_l}{\partial x} + u_{g0} \frac{\partial \rho_g}{\partial x} + \rho_{g0} \frac{\partial u_g}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u_l}{\partial t} + \frac{p_{g0} - p_{l0}}{\rho_0} \frac{\partial \alpha_l}{\partial x} + \frac{C_l^2}{\rho_{l0}} \frac{\partial \rho_l}{\partial x} + u_{l0} \frac{\partial u_l}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u_g}{\partial t} + \frac{p_{g0} - p_{l0}}{\rho_0} \frac{\partial \alpha_l}{\partial x} + \frac{C_g^2}{\rho_{g0}} \frac{\partial \rho_g}{\partial x} + u_{g0} \frac{\partial u_g}{\partial x} = 0 \end{array} \right] \times \begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \varepsilon \end{matrix} +$$

В результате, сгруппировав слагаемые под $\frac{\partial}{\partial t}$ и $\frac{\partial}{\partial x}$, получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\alpha \alpha_l + \beta \rho_l + \gamma \rho_g + \delta u_l + \varepsilon u_g) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\alpha u_0 + \beta a_{10} + \gamma a_{20} + (\delta + \varepsilon) \frac{p_{l0} - p_{g0}}{\rho_0} \right) \alpha_l + \right. \\ & \left. \left(\beta u_{l0} + \delta \frac{C_l^2}{\rho_{l0}} \right) \rho_l + \left(\gamma u_{g0} + \varepsilon \frac{C_g^2}{\rho_{g0}} \right) \rho_g + (\beta \rho_{l0} + \delta u_{l0}) u_l + (\gamma \rho_{g0} + \varepsilon u_{g0}) u_g \right] = 0. \end{aligned}$$

В результате под производной $\frac{\partial}{\partial t}$ мы имеем линейную комбинацию примитивных переменных с неопределёнными коэффициентами. Приравняем выражение под $\frac{\partial}{\partial x}$ соответствующей части равенства (Б.3).

$$\frac{\partial}{\partial x} [\dots] = (u_{l0} \pm C_l) \frac{\partial}{\partial x} (\alpha \alpha_l + \beta \rho_l + \gamma \rho_g + \delta u_l + \varepsilon u_g).$$

Приравняв коэффициенты при производных соответствующих переменных, получим систему линейных уравнений для отыскания коэффициентов $\alpha, \dots, \varepsilon$:

$$\alpha (u_0 - u_{l0} \mp C_l) + \beta a_{10} + \gamma a_{20} + (\delta + \varepsilon) \frac{p_{g0} - p_{l0}}{\rho_0} = 0 \quad (1)$$

$$\mp \beta C_l + \delta \frac{C_l^2}{\rho_{l0}} = 0 \quad (2)$$

$$\gamma (u_{g0} - u_{l0} \mp C_l) + \varepsilon \frac{C_g^2}{\rho_{g0}} = 0 \quad (3)$$

$$\beta \rho_{l0} \mp \delta C_l = 0 \quad (4)$$

$$\gamma \rho_{g0} + \varepsilon (u_{g0} - u_{l0} \mp C_l) = 0 \quad (5)$$

Сделав приведённые ниже преобразования, можно видеть, что $\varepsilon = 0$ и, таким образом, $\gamma = 0$ в предположении $|u_{g0} - u_{l0} \mp C_l| \neq C_g$.

$$(3) \times \rho_{g0} - (5) \times (u_{g0} - u_{l0} \mp C_l) \Rightarrow \varepsilon (C_g^2 - (u_{g0} - u_{l0} \mp C_l)^2) = 0 \Rightarrow \varepsilon = 0.$$

Следующее преобразование позволяет выразить α через δ :

$$(1) \times \rho_{l0} - (4) \times a_{10} \Rightarrow \alpha (u_0 - u_{l0} \mp C_l) \rho_{l0} + \delta \left(\rho_{l0} \frac{p_{g0} - p_{l0}}{\rho_0} \pm C_l a_{10} \right) = 0.$$

Полагая δ произвольным, приходим к системе

$$\alpha = -\delta \frac{\frac{p_{g0} - p_{l0}}{\rho_0} \pm \frac{C_l a_{10}}{\rho_{l0}}}{u_0 - u_{l0} \mp C_l}$$

$$\beta = \pm \delta \frac{C_l}{\rho_{l0}}$$

$$\gamma = 0$$

$$\delta - \text{произвольно}$$

$$\varepsilon = 0.$$

Пусть $\delta = u_0 - u_{l0} \mp C_l$, тогда окончательно получим:

$$\alpha_{\pm}^l = -\frac{p_{g0} - p_{l0}}{\rho_0} \pm \frac{C_l a_{10}}{\rho_{l0}}$$

$$\beta_{\pm}^l = \pm \frac{(u_0 - u_{l0} \mp C_l) C_l}{\rho_{l0}}$$

$$\gamma_{\pm}^l = 0$$

$$\delta_{\pm}^l = u_0 - u_{l0} \mp C_l$$

$$\varepsilon_{\pm}^l = 0.$$

Здесь и далее $\alpha_{\pm}^i, \dots, \varepsilon_{\pm}^i$ обозначают коэффициенты, соответствующие собственным значениям $\lambda = u_{i0} \pm C_i$, где $i = l, g$. Учитывая что $\gamma = \varepsilon = 0$, характеристические переменные, соответствующие второму и третьему собственным значениям, можно записать в виде

$$v_{2,3} = v_{u_{l0} \pm C_l} = \alpha_{\pm}^l \alpha_l + \beta_{\pm}^l \rho_l + \delta_{\pm}^l u_l.$$

$$\mathbf{3.} \quad \lambda_{4,5} = u_{g0} \pm C_g$$

Оставшиеся две характеристические переменные определяются аналогично. Система уравнений для нахождения коэффициентов имеет вид

$$\alpha (u_0 - u_{g0} \mp C_g) + \beta a_{10} + \gamma a_{20} + (\delta + \varepsilon) \frac{p_{g0} - p_{l0}}{\rho_0} = 0 \quad (1)$$

$$\beta (u_{l0} - u_{g0} \mp C_g) + \delta \frac{C_l^2}{\rho_{l0}} = 0 \quad (2)$$

$$\mp \gamma C_g + \varepsilon \frac{C_g^2}{\rho_{g0}} = 0 \quad (3)$$

$$\beta \rho_{l0} + \delta (u_{l0} - u_{g0} \mp C_g) = 0 \quad (4)$$

$$\gamma \rho_{g0} \mp \varepsilon C_g = 0. \quad (5)$$

Проделав аналогичные преобразования:

$$(2) \times \rho_{l0} - (4) \times (u_{l0} - u_{g0} \mp C_l); \quad (1) \times \rho_{g0} - (5) \times a_{20},$$

получим, что $\delta = \beta = 0$, а α можно выразить через ε . Система с произвольным ε имеет вид

$$\alpha = -\delta \frac{\frac{p_{g0} - p_{l0}}{\rho_0} \pm \frac{C_g a_{20}}{\rho_{20}}}{u_0 - u_{20} \mp C_2}$$

$$\beta = 0$$

$$\gamma = \pm \varepsilon \frac{C_g}{\rho_{g0}}$$

$$\delta = 0$$

ε – произвольно.

Положив $\varepsilon = u_0 - u_{g0} \mp C_g$, получим

$$\alpha_{\pm}^g = -\frac{p_{g0} - p_{l0}}{\rho_0} \pm \frac{C_g a_{20}}{\rho_{g0}}$$

$$\beta_{\pm}^g = 0$$

$$\gamma_{\pm}^g = \pm \frac{(u_0 - u_{g0} \mp C_g) C_g}{\rho_{g0}}$$

$$\delta_{\pm}^g = 0$$

$$\varepsilon_{\pm}^g = u_0 - u_{g0} \mp C_g.$$

Характеристические переменные, соответствующие $\lambda_{4,5}$:

$$v_{4,5} = v_{u_{g0} \pm C_g} = \alpha_{\pm}^g \alpha_l + \gamma_{\pm}^g \rho_g + \varepsilon_{\pm}^g u_g.$$

В терминах найденных переменных v_i , $i = 1, \dots, 5$ исходная линеаризованная система (Б.1) записывается в характеристической форме (Б.2).