

## ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертационную работу

Белозерова Александра Александровича

“Консервативная модель и численные методы для течений многофазных сжимаемых сред”,  
представленную к защите на соискание учёной степени кандидата физико-математических  
наук по специальности 05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и

комплексы программ

Численное моделирование течений многофазных сред является одной из распространённых технологических задач. Многообразие возможных режимов течений многофазных сред существенно усложняет построение соответствующих математических теорий, и зачастую делает технически невозможным проведение полных трёхмерных расчётов. Для покрытия практических нужд востребована разработка специализированных упрощённых моделей, описывающих при этом все интересующие режимы и типы течений, которые бы обеспечивали приемлемое время расчёта и точность предсказания результатов. Диссертация Белозерова Александра Александровича посвящена разработке таких новых математических моделей и численных методов описания течений многофазных жидкостей, а их отличительной особенностью является повышенное внимание, уделяемое вопросам математической корректности формулируемых моделей.

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка литературы и двух приложений.

В **введении** сформулирована новизна, значимость, цели и задачи работы, обоснована актуальность исследования, указаны положения, выносимые на защиту. Приведён обзор подходов к построению гиперболических систем уравнений и ключевые ссылки на широко используемые в настоящее время математические модели, а также сформулированы недостатки этих моделей. Дан обзор современных численных методов высокого порядка точности, применяемых для решения гиперболических систем уравнений.

В **первой главе** представлен вывод новой термодинамически согласованной гиперболической консервативной модели, описывающей течение сжимаемой смеси с произвольным количеством фаз, полученной в результате обобщения двухфазной модели. Из общей модели, описывающей трёхмерные течения многофазных сред, сформулирована одномерная 4-фазная модель, а также одномерная осредненная по сечению двухфазная модель, используемая для описания течения смеси в круглых трубах.

Во **второй главе** сформулированы вычислительные алгоритмы для расчёта одномерных 4-фазных течений и двухфазных течений в трубах в рамках осредненных по

сечению уравнений, основанные на схеме Рунге-Кутты 3-го порядка по времени и схеме GFORCE для расчёта потоков с TVD или WENO-реконструкцией значений переменных. Отдельное внимание уделяется постановке граничных условий и особенностям реализации алгоритма в случае мгновенной релаксации давлений фаз, что требует разработки специализированной неявной вычислительной процедуры. Предлагается модификация численного метода для вычисления объёмных концентраций, сохраняющая однородный фон начальных данных при наличии скачка концентраций.

В третьей главе приводится описание программной реализации вычислительного алгоритма для расчёта одномерных и двумерных течений смесей с произвольным числом фаз, созданной в пакете Matlab, и алгоритма для расчёта одномерных осредненных уравнений течения двухфазных смесей в круглых трубах, разработанного на языке программирования C/C++. Демонстрируются возможности программ для расчёта широкого круга задач. Исследуется влияние учёта конечной релаксации давления на устойчивость численного алгоритма и точность результатов.

В заключении сформулированы основные результаты диссертационной работы.

В Приложении А подробно описывается процедура осреднения, применявшаяся для вывода системы одномерных уравнений, осреднённых по сечению трубы. В Приложении Б приводятся собственные значения для линеаризованной системы одномерных уравнений течения многофазной смеси, осреднённых по сечению трубы.

К основным новым научным результатам, полученным в диссертации, относятся:

1. Термодинамически согласованная гиперболическая система уравнений, описывающая течение многофазной сжимаемой среды с произвольным количеством фаз в приближении общей энтропии.

2. Нестационарная осреднённая по сечению трубы одномерная модель течения двухфазной смеси.

3. Вычислительный алгоритм для расчёта начально-краевых задач на основе предложенных новых математических моделей. Алгоритм высокого порядка основан на схемах Рунге-Кутты 3-го порядка по времени и схеме GFORCE для расчёта потоков с TVD или WENO-реконструкцией переменных. Специализированные модификации алгоритма для расчёта течений с мгновенной релаксацией фаз и конфигураций течения с наличием скачка объёмных концентраций.

Достоверность полученных в диссертации результатов определяется выбором современных средств разработки программного обеспечения, широко используемых и проверенных численных методов, подробными методическими исследованиями сеточной сходимости результатов, сопоставлением результатов расчётов с аналитическими решениями,

опубликованными результатами расчётов других авторов и с экспериментальными данными. Актуальность и практическая значимость данной работы не вызывает сомнений, поскольку затрагиваемая тематика крайне востребована при разработке различных симуляторов, в частности, в нефтегазовой промышленности (моделирование течений в стволе скважины, моделирование трубопроводных систем и др.), а имеющиеся модели и вычислительные алгоритмы имеют ряд существенных ограничений, ограничивающих возможности таких симуляторов. Дальнейшее развитие осредненных одномерных моделей течений многофазных течений в трубах является критическим для разработки современного и эффективного программного обеспечения для сопровождения процесса добычи углеводородов. Основные результаты работы докладывались на 6 российских и международных конференциях и опубликованы в 6 научных работах, из которых 4 входят в перечень ВАК РФ.

По результатам изучения диссертационной работы Белозерова Александра Александровича имеется ряд следующих замечаний:

1. В первой главе плохо структурированы индексы используемых обозначений. Для одних и тех же переменных верхние и нижние индексы меняются по ходу повествования местами, используются различные мнимые индексы, по которым производится суммирование (например, индексы символов Кронекера в (1.2) и (1.7), индексы компонент скоростей фаз на стр. 20 и стр. 22 и ряд других). В отдельных выражениях используются трудновоспринимаемые «трёхэтажные» индексы. Некоторые переменные определены по тексту существенно дальше их первичного использования (например, вихри относительных скоростей определяются выражением (1.9), но упоминаются перед выражением (1.7)). Всё это существенно усложняет восприятие изложенного материала.

2. Из повествования неочевидно почему тождество (1.3) должно выполняться в начальный момент времени  $t=0$ .

3. В подразделе 1.1.3 представлено выражение для обобщённой внутренней энергии  $E$ , и приводится комментарий, что строгое доказательство выпуклости  $E$ , необходимой для гиперболичности системы, не проводилось. По-видимому, это связано со сложностью анализа данной величины для трёхмерной модели с произвольным количеством фаз. Вероятно, для редуцированных одномерных моделей с 2 и 4 фазами такой анализ было бы провести несколько проще? Комментарий по этому поводу в тексте диссертации отсутствует, хотя такие выкладки усилили бы теоретическую составляющую данной работы.

4. В описании алгоритма расщепления исходной системы не указано на каких этапах предлагается делать учёт релаксации давлений для схемы с «частичным расщеплением». Как влияет выбор номера стадии, на которой выполняется релаксация давления, на точность

результатов и на устойчивость численного алгоритма?

5. В подразделе 3.2.2 рассматривается тестовая задача течения 4-фазной смеси песка, нефти, воды и метана. В расчётах объёмная доля фазы песка задаётся равной 0.7. Насколько физичным является описание течения такой смеси в рамках многожидкостной модели? Учитываются ли какие-либо дополнительные обменные члены в правой части уравнений для корректного описания такого течения?

Автор указывает, что учёт конечности релаксации давления существенным образом сказывается на результате расчётов, что подтверждается графиками на рис. 3.6. Однако из этого не следует вывода какой из режимов течения больше соответствует физике явления?

6. При описании задачи в подразделе 3.2.3 обсуждаются особенности численного алгоритма для пробкового режима течения. Разработка устойчивых алгоритмов для моделирования пробковых течений в рамках многожидкостных моделей является крайне актуальной проблемой. Данный фрагмент текста целесообразно было вынести в главу 2 с описанием численного метода и обсудить более подробно, уделив внимание вопросам консервативности массы и импульса.

7. Для тестовой задачи оседания столба жидкости в поле силы тяжести в подразделе 3.3.1 (water faucet) представлены результаты расчёта для схем с различным количеством коррекций (одна, три или четыре). Показано, что с одной стороны, при увеличении количества этапов релаксации давления увеличивается точность расчёта, но с другой — теряется устойчивость схемы. Это вызывает ряд вопросов: (1) почему процесс уточнения решения приводит к нефизическим колебаниям на графиках распределения объёмных долей? (2) на каком основании можно утверждать, что принятая оптимальной схема с тремя коррекциями будет устойчивой при дальнейшем измельчении сетки?

Сопоставление результатов, приведённое в табл. 3.1, не даёт представления о точности результатов. Для схемы высокого порядка аппроксимации по пространству возможно ожидать соответствующий порядок сходимости невязок на гладком решении. Но в данном случае решение имеет скачок по объёмной доле, и выбранная L2-норма сравнения численного и аналитического решения является неинформативной. Если целью данной таблицы было показать реальный порядок сходимости, то следовало для этого рассматривать гладкие решения. В противном случае следовало выбирать другой критерий оценки близости решений.

8. Исследование течений в V-трубах или W-трубах является одной из распространённых задач. Параметры задачи в подразделе 3.3.4 следовало выбирать таким образом, чтобы результаты расчётов можно было сопоставить с экспериментальными не только качественно (образование периодического течения), но и количественно. Все ранее

приведенные в тексте диссертации результаты были получены для схемы RK-WENO, однако в данном случае её использование приводило к неустойчивым результатам. Следовало привести какие-либо комментарии по поводу возможных причин такого поведения вычислительного алгоритма.

При моделировании пробковых режимов течения выбрано пороговое неснижаемое значение объёмной доли  $10^{-5}$ . Как изменение этого порогового значения влияет на результаты расчётов?

9. В работе рассмотрены два существенно различных класса разностных схем для гиперболических систем уравнений. На ряде тестовых задач обсуждается вопрос точности и необходимого размера расчётных сеток. Но с практической точки зрения также представляется интересным вопрос эффективности расчётов. Позволяет ли использование более грубой расчётной сетки и WENO-реконструкции получить выигрыш общего времени расчёта по сравнению с более подробными сетками и TVD-реконструкцией? Соответствующие методические результаты, представляются, органично дополнили бы настоящую работу.

10. Диссертантом в работе показано, что конечное время релаксации давления существенным образом сказывается на результатах расчётов и позволяет в ряде случаев стабилизировать периодический характер течения. Вместе с тем, крайне важным для понимания места предложенной в работе модели с двумя давлениями был бы фундаментальный вывод о преимуществах и недостатках данной модели для решения прикладных задач по сравнению с широко используемыми в настоящее время моделями типа Бауэра-Нунциато или моделями с одним давлением.

11. В работе также имеется ряд опечаток и технических замечаний:

- а) По-видимому, в формуле (1.1) пропущен символ Кронекера.
- б) Термины «уравнения трубного течения», используемый на стр. 44 и далее, и «полуаналитическое решение» на стр. 93, являются жаргоном.
- в) В формуле (1.26) указан лишний множитель  $r$  в числителе под производной по угловой координате.
- г) В критерии сходимости итераций при нахождении энтропии на стр. 59 перепутан знак неравенства.
- д) В разделе 2.1.3 имеется путаница между индексами, определяющими номер компоненты вектора независимых переменных  $\mathbf{U}$  и номер ячейки сетки. Использованы индексы  $i+8$ ,  $i+5$  и пр., однако из текста сложно понять что именно они означают.
- е) Имеется опечатка в индексах выражений перед формулой (2.7), в текущем виде  $f_i$  будет тождественно равно нулю, чего не должно быть исходя из последующего изложения.

- ж) На графиках, приведённых на рис. 3.7, в подписи к оси ординат потерян множитель  $10^3$ .  
з) Точность результатов до 4-5 значащих цифр после запятой, приведённых в табл. 3.1-3.3, является избыточной. Достаточно было ограничиться 2 значащими цифрами.  
и) Ссылки [9] и [39] в списке литературы дублируются.

Несмотря на указанные выше замечания, часть из которых носит рекомендательный, технический характер или выступает в роли напутствия в дальнейших исследованиях, докторская работа Белозерова Александра Александровича «Консервативная модель и численные методы для течений многофазных сжимаемых сред» является законченной научно-исследовательской работой. Содержание автореферата достаточно полно отражает результаты, изложенные в докторской диссертации. Докторская диссертация соответствует специальности 05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ, и отвечает требованиям Министерства образования и науки РФ, предъявляемым к докторским диссертациям на соискание учёной степени кандидата наук, установленным «Положением о порядке присуждения учёных степеней», утверждённым Постановлением правительства РФ от 24.09.2013 № 842. Автор докторской диссертации Белозеров Александр Александрович заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.18 - математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Официальный оппонент,  
к.ф.-м.н., старший научный сотрудник  
лаб. общей аэродинамики НИИ механики МГУ

Краснопольский  
Борис Иосифович

23.12.2016

Краснопольский Борис Иосифович

Кандидат физико-математических наук, специальность ВАК 01.02.05 — механика жидкости, газа и плазмы, старший научный сотрудник лаборатории общей аэродинамики Научно-исследовательского института механики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», [www.imec.msu.ru](http://www.imec.msu.ru).

Адрес: 119192, Москва, Мичуринский проспект, д. 1.

Рабочий телефон: 8-495-939-5287

Электронный адрес: [krasnopolsky@imec.msu.ru](mailto:krasnopolsky@imec.msu.ru)

Подпись старшего научного сотрудника лаборатории общей аэродинамики НИИ механики МГУ, к.ф.-м.н. Краснопольского Б.И. заверяю

Директор

НИИ механики МГУ, к.ф.-м.н.

