На правах рукописи

Белозеров Александр Александрович

Консервативная модель и численные методы для течений многофазных сжимаемых сред

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск – 2016

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет».

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук **Роменский Евгений Игоревич**

Официальные оппоненты:

Имомназаров Холматжон Худайназарович, доктор физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, г. Новосибирск, исполняющий обязанности заведующего лабораторией

Краснопольский Борис Иосифович, кандидат физико-математических наук, Научно-исследовательский институт механики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», г. Москва, старший научный сотрудник

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе Сибирского отделения Российской академии наук Федерального агентства научных организаций (ИТ СО РАН), г. Новосибирск

Защита состоится 17 января 2017 г. в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 003.061.02 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук (ИВМиМГ СО РАН) по адресу: 630090, г. Новосибирск, проспект Академика Лаврентьева, 6, ИВМиМГ СО РАН, тел. (383) 330-71-59.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук: http://icmmg.nsc.ru.

Автореферат разослан 25 октября 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д.ф.-м.н. Сорокин Сергей Борисович

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Математическое моделирование течений многофазных сжимаемых сред представляет интерес с точки зрения многих научных дисциплин и имеет большой потенциал для практического применения в различных инженерных областях. Задачи моделирования многофазных течений встречаются в таких областях как метеорология и океанология, а также при описании различных геологических процессов с использованием гидродинамического подхода, таких как конвективный массоперенос мантийных пород, фильтрационные течения и др. Другие области применения связаны с решением разнообразных инженерных и технологических задач: в области проектирования охладительных систем, разработки и описания динамики сыпучих смесей и технологических жидкостей. Отдельно стоит выделить нефтегазовую отрасль, где вычислительные модели многофазных сред востребованы как с точки зрения разведки месторождений полезных ископаемых и моделирования процессов в нефтеносных пластах, так и с точки зрения проектирования и оптимизации сложных систем транспортировки углеводородов.

Систематические исследования в области построения моделей многофазных течений были начаты в середине прошлого века. Теории, основанные на предложенном Х.А. Рахматулиным представлении двухфазных сред как взаимопроникающих континуумов, развивались в многочисленных работах российских и зарубежных ученых (Р.И. Нигматулин, М. Ишии и др.). В 1986 г. М. Байером и Д. Нунциато была предложена модель двухфазных сжимаемых течений с двумя давлениями, которая и по настоящее время широко используется многими авторами как для теоретических, так и для численных исследований.

Несмотря на актуальность и востребованность данной тематики, многие вопросы, связанные с физическими, математическими и вычислительными аспектами моделирования многофазных течений, требуют дальнейших исследований. На сегодняшний день не существует единого общепринятого подхода к построению математических моделей многофазных течений, а существующие модели обладают следующими недостатками: 1) нарушение гиперболичности системы определяющих уравнений модели, что затрудняет корректную постановку начально-краевых задач для таких уравнений и изучение их свойств; 2) наличие в системе уравнений, не приводимых к дивергентной форме, затрудняющее применение эффективных методов для численной реализации модели.

Таким образом, актуальной задачей является развитие подходов к математическому моделированию течений многофазных смесей, позволяющих обеспечить одновременное выполнение трёх требований, предъявляемых к математической модели: 1) гиперболичность системы определяющих уравнений; 2) дивергентный вид всех уравнений; 3) согласованность модели с законами термодинамики. Эти свойства обеспечивают математическую основу для корректной постановки начально-краевых задач и дают возможность для разработки высокоточных численных алгоритмов.

Цели и задачи диссертационной работы. Целью диссертационной работы является разработка термодинамически согласованной математической модели течений многофазной сжимаемой среды в случае произвольного количества фаз, обладающей следующими свойствами: определяющие уравнения модели имеют дивергентную форму и образуют гиперболическую систему; построение математической модели трубных газожидкостных течений, позволяющей описывать движение смеси в трубах сложной геометрии с учётом процессов межфазного взаимодействия; построение вычислительного алгоритма для численного решения уравнений предложенных моделей; разработка комплекса программ на основе численного алгоритма и проведение расчётов с целью валидации математических моделей и вычислительного алгоритма.

Для достижения поставленных целей были решены следующие задачи:

1. Построение математической модели многофазных сжимаемых течений в случае произвольного количества фаз в одноэнтропийном приближении с использованием подхода термодинамически согласованных систем, применённого ранее для построения моделей двухфазных сред [1].

2. Вывод нестационарных осреднённых одномерных уравнений для описания трубных течений с учётом эффектов межфазного трения и релаксации давлений фаз на основе модели двухфазной сжимаемой среды путём применения процедур осреднения по сечению трубы.

3. Разработка вычислительного алгоритма на основе конечно-объёмных методов высокого порядка точности Рунге-Кутты-TVD, Рунге-Кутты-WENO, а также модификаций базового алгоритма для учёта эффектов межфазного взаимодействия и более точного решения задач с наличием контактного разрыва.

4. Реализация вычислительного алгоритма в виде комплекса программ, позволяющего проводить численные эксперименты по расчёту начально-краевых задач для сформулированных моделей.

5. Валидация математических моделей и вычислительных алгоритмов на классических тестовых задачах.

Научная новизна. В работе сформулирована новая термодинамически согласованная математическая модель для описания течений многофазной сжимаемой среды с произвольным количеством фаз. Система определяющих дифференциальных уравнений модели является гиперболической, и все уравнения записываются в дивергентной форме. Построена модель трубных течений сжимаемых газожидкостных смесей с двумя давлениями. Разработаны высокоточные численные алгоритмы для решения уравнений предложенных моделей. Показана применимость модели трубных течений для решения важных с практической точки зрения задач пробковых течений в трубопроводах.

Теоретическая и практическая значимость. Предложенные математические модели способствуют развитию теоретических аспектов моделирования многофазных сжимаемых сред, а также исследованию практически важных задач в области геофизики и нефтегазовой индустрии. В работе продемонстрирована возможность достоверного описания с помощью сформулированной модели различных режимов трубных течений, в том числе пробковых течений, что имеет важное практическое значение для задач оптимизации трубопроводных систем и транспортировки углеводородов и может найти применение при разработке промышленных симуляторов. Развиваемый в работе подход и предложенные модели могут быть использованы для построения более сложных моделей многофазных течений с учётом межфазного массобмена и химических реакций.

Положения, выносимые на защиту:

1. Сформулирована модель течений многофазной сжимаемой среды с произвольным количеством фаз в приближении общей энтропии смеси. Определяющие дифференциальные уравнения модели имеют дивергентную форму и представляют собой термодинамически согласованную гиперболическую систему.

2. Получена нестационарная одномерная осреднённая модель двухфазных газожидкостных трубных течений с различными давлениями фаз. Дифференциальные уравнения модели имеют дивергентную форму и образуют гиперболическую систему.

3. Разработан вычислительный алгоритм на базе высокоточных методов Рунге-Кутты-TVD, Рунге-Кутты-WENO для численного решения начально-краевых задач для предложенных систем уравнений.

4. Создана вычислительная модель газожидкостных трубных течений, включающая определяющие уравнения, численные методы и комплекс программ.

5. На серии тестовых задач показана применимость модели для расчёта пробковых трубных течений, обусловленных сложной геометрией трубы, и гидродинамических пробковых течений.

Степень достоверности и апробация результатов. Предложенные в работе математические модели получены на основе подхода, обеспечивающего гиперболичность уравнений модели и их согласованность с законами термодинамики. Для построения вычислительных алгоритмов использованы методы адекватные математическим свойствам систем определяющих уравнений. Разработанный комплекс вычислительных программ прошёл верификацию на основе решения классических тестовых задач. Программная реализация алгоритмов и интерпретация результатов численных экспериментов осуществлялась с использованием современных средств разработки ПО, обработки и визуализации данных.

По материалам диссертации опубликовано 6 работ, 4 из которых – в рецензируемых изданиях, входящих в перечень ВАК. Результаты работы были представлены на следующих международных конференциях: 14th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2015), Родос, Греция, 23 – 29 сентября 2015; IMA Conference on Numerical Methods for Simulation, Оксфорд, Великобритания, 1 - 4 сентября 2015; The 13th Asian Symposium on Visualization, Новосибирск, 22 – 26 июня 2015; European Workshop on High Order Nonlinear Numerical Methods for Evolutionary PDEs: Theory and Applications (HONOM 2015), Тренто, Италия, 16 – 20 марта 2015; Advanced Mathematics, Computations and Applications 2014 (AMCA-14), Новосибирск, 8 – 11 июня 2014; 11th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2013), Родос, Греция, 21 – 27 сентября 2013.

Развёрнутые доклады по результатам диссертационной работы были представлены на различных научных семинарах институтов Сибирского Отделения РАН.

Личный вклад автора. Основные научные результаты диссертационной работы получены автором лично. Личный вклад автора состоит в участии в формулировке математических моделей, построении вычислительных алгоритмов, разработке пакетов программ, а также в постановке, проведении и интерпретации результатов численных экспериментов. В опубликованных в соавторстве работах личный вклад автора заключается в участии на всех этапах работы.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка литературы и двух приложений. Общий объём диссертации составляет 125 страниц с 23 рисунками и 3 таблицами. Список литературы включает 83 наименования.

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность диссертационной работы, приведён обзор литературы по теме исследования, сформулирована цель и аргументирована научная новизна работы, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В **первой главе** приводятся определяющие дифференциальные уравнения консервативной термодинамически согласованной модели течений многофазной сжимаемой среды в случае произвольного количества фаз. Проводится анализ свойств предложенных уравнений и даётся формулировка частного случая модели для описания четырёхфазной смеси, на примере которого в дальнейшем проводится численное исследование модели. Приводится вывод определяющих уравнений модели трубных течений газожидкостных смесей и анализ характеристических свойств уравнений, необходимый для дальнейшего построения численного алгоритма.

В разделе **1.1** вводятся параметры для описания динамики многофазной сжимаемой смеси N фаз, в числе которых собственные параметры фаз: объёмная концентрация k-й фазы α_k, плотность ρ_k и вектор скорости u_i^k $(i = 1, 2, 3)$, а также парметры, характеризующие смесь в целом: плотность смеси $\rho = \alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2 + ... + \alpha_N\rho_N$, средняя скорость $u_i = c_1u_i^1 + c_2u_i^2 + ... + c_Nu_i^N$, где $c_k = \alpha_k\rho_k/\rho$, $(k = 1, ..., N,\ c_1 + c_2 + ... + c_N = 1)$ – массовые концентрации. Определяются относительные скорости фаз $w_i^1 = u_i^1 - u_i^N, w_i^2 = u_i^2 - u_i^N, ..., w_i^{N-1} = u_i^{N-1} - u_i^N$. Для описания тепловых процессов используется приближение общей энтропии смеси S.

Уравнения модели течений многофазной сжимамое среды в случае произвольного количества фаз строятся как обобщение уравнений двухфазной модели, сформулированной в работе [1]. Уравнения формулируются в терминах параметров смеси, и в качестве независимых переменных выбираются величины $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{N-1}$,$\rho$,$u_i$,$c_1, c_2, ..., c_{N-1}$,$w_1^i, w_2^i, , ..., w_{N-1}^i$,$S$. Такая форма записи позволяет показать, что система определяющих уравнений допускает дополнительный закон сохранения энергии, что в рамках теории термодинамически согласованных систем [2] позволяет записать систему в симметрической гиперболической по Фридрихсу форме в терминах производящего потенциала и переменных.

Систему уравнений модели можно представить в эквивалентном виде в терминах индивидуальных параметров фаз, который оказывается более удобным при построении численного алгоритма и более наглядным с точки зрения законов механики:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho S u^k}{\partial x_k} = Q, \\
&\frac{\partial \rho \alpha_j}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^k \alpha_j}{\partial x_k} = -\Phi_j, \quad j = 1, ..., N-1, \\
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \rho_j u_j^l\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \rho_j u_j^l u_j^k + \delta_k^l \sum_{j=1}^{N} \alpha_j p_j\right) = 0, \quad l = 1, 2, 3, \\
&\frac{\partial \alpha_j \rho_j}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_j \rho_j u_j^k}{\partial x_k} = 0, \quad j = 1, ..., N, \\
&\frac{\partial \left(u_j^k - u_N^k\right)}{\partial t} + \frac{\partial \left(u_j^l u_j^l/2 - u_N^l u_N^l/2 + H_j - H_N\right)}{\partial x_k} = -e_{klm} u^l \omega_j^m - \Lambda_k^j.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Здесь $\rho = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \rho_j$ – плотность смеси, $u^k = \frac{1}{\rho}\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \rho_j u_j^k$ – скорость смеси, $p_j = \rho_j^2 \partial e_j / \partial \rho_j$ – давление j-й фазы, а $H_j = e_j + p_j/\rho_j$ – энтальпия j-й фазы. Закон сохранения энергии имеет вид

$$
\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \rho_j \left(e_j + \frac{1}{2} u_j^l u_j^l\right)\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \rho_j u^k \left(e_j + \frac{1}{2} u_j^l u_j^l + \frac{p_j}{\rho_j}\right)\right) = 0.
$$

В уравнениях системы (1) правые части $-\Phi_j$ и $-\Lambda_j^k$ отвечают за релаксацию давлений фаз к общему значению и межфазное трение: $\Phi_j = \rho \sum_{n=1}^{N-1} \phi_{jn} E_{\alpha_n}$, $\Lambda_j^k = \sum_{n=1}^{N-1} \lambda_{jn}^k E_{w_n^k}$, где ϕ_{jn} и $\lambda_{jn}^1, \lambda_{jn}^2, \lambda_{jn}^3$ – элементы матриц кинетических коэффициентов. Производство энтропии Q порождается диссипацией и выражается через $-\Phi_j$ и $-\Lambda_j^k$. В правой части уравнения для относительных скоростей возникает слагаемое $-e_{klm} u^l \omega_j^m$, где e_{klm} – символ Леви-Чивиты. Здесь дополнительные переменные ω_j^m, имеющие смысл вихрей относительных скоростей, вводятся с целью сохранения дивергентной формы уравнения для относительных скоростей.

В разделе **1.2** анализируется возможность записи уравнений сформулированной модели в форме модели Байера-Нунциато, наиболее широко используемой для описания многофазных течений.

Раздел **1.3** содержит формулировку четырехфазной модели, которая в дальнейшем используется для тестовых расчетов.

В разделе **1.4** приводится вывод нестационарных осреднённых одномерных уравнений для описания трубных течений газожидкостной смеси. Уравнения получены путём осреднения по сечению трубы уравнений трёхмерной модели двухфазного течения, которая является частным случаем модели (1) при $N = 2$.

Система уравнений газожидкостных трубных течений имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial A\alpha_g\rho_g}{\partial t} + \frac{\partial A\alpha_g\rho_g u_g}{\partial x} = q_g(x),\\
&\frac{\partial A\alpha_l\rho_l}{\partial t} + \frac{\partial A\alpha_l\rho_l u_l}{\partial x} = q_l(x),\\
&\frac{\partial A(\alpha_g\rho_g u_g + \alpha_l\rho_l u_l)}{\partial t} + \frac{\partial A\left(\rho_g\alpha_g u_g^2 + \rho_l\alpha_l u_l^2 + \alpha_g p_g + \alpha_l p_l\right)}{\partial x} = \\
&\qquad\qquad = (\alpha_g p_g + \alpha_l p_l)\frac{dA}{dx} - G,\\
&\frac{\partial A(u_l - u_g)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(A\left(\frac{u_l^2}{2} - \frac{u_g^2}{2} + e_l + \frac{p_l}{\rho_l} - e_g - \frac{p_g}{\rho_g}\right)\right) = \\
&\qquad\qquad = \left(e_l + \frac{p_l}{\rho_l} - e_g - \frac{p_g}{\rho_g}\right)\frac{dA}{dx} - \Lambda,\\
&\frac{\partial A\rho\alpha_l}{\partial t} + \frac{\partial A\rho\alpha_l u}{\partial x} = \phi.
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь x – пространственная координата вдоль оси трубы; t – время; α_i, ρ_i, u_i, p_i, e_i – объемная доля, плотность, скорость, давление и внутренняя энергия i-ой фазы ($i = l, g$ обозначает жидкость или газ); $\rho = \alpha_l\rho_l + \alpha_g\rho_g$ и $u = c_l u_l + c_g u_g$ – плотность и скорость смеси, $c_i = \alpha_i\rho_i/\rho$ – массовая концентрация i-ой фазы. Отметим, что должно быть выполнено условие $\alpha_l + \alpha_g = 1$. Поперечное сечение трубы $A(x) = \pi R^2(x)$ считается переменным.

Первые два уравнения системы (2) – законы сохранения массы газа и жидкости, третье уравнение представляет собой закон сохранения полного импульса смеси, четвертое – дивергентное уравнение для относительной скорости фаз. Последнее уравнение описывает изменение объёмной доли жидкости и отвечает за релаксацию давлений фаз к общему значению, где, следуя [1], $\varphi = (p_l - p_g)/\tau$, где τ характеризует скорость выравнивания давлений фаз и может зависеть от параметров состояния.

Члены G и Λ в уравнении импульса и уравнении для относительной скорости отвечают за силы тяжести и трения: $G = A\rho g\sin\beta + (\Phi_l + \Phi_g)$, $\Lambda = \frac{\Phi_l}{\alpha_l\rho_l} - \frac{\Phi_g}{\alpha_g\rho_g}$. Первое слагаемое в формуле для G моделирует силу тяжести в трубе с углом наклона β, g – ускорение силы тяжести. Φ_l, Φ_g отвечают за межфазное трение и трение фаз о стенки трубы. Для замыкания системы необходимо определить зависимости $e_l(\rho_l)$, $e_g(\rho_g)$, $p_l(\rho_l)$, $p_g(\rho_g)$, а также силы трения Φ_l и Φ_g, что делается в соответствии с имеющимися в литературе данными.

Во **второй главе** описывается построение вычислительного алгоритма для решения определяющих уравнений предложенных моделей. Базовый алгоритм строится для равномерной сетки на основе конечно-объёмных методов высокого порядка точности Рунге-Кутты-TVD (RK-TVD) и Рунге-Кутты-WENO (RK-WENO) в сочетании с методом GFORCE [3] для вычисления потоков на границах расчётных ячеек. Для учёта релаксации давлений фаз используется неявный метод. Разработана модификация схемы для вычисления объёмных концентраций, сохраняющая однородный фон начальных данных при наличии скачка концентраций.

В разделе **2.1** приводится описание вычислительного алгоритма для модели четырёхфазной среды, записанной в виде

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{S}(\mathbf{U}).$$

Для интегрирования по времени используются схема первого порядка на основе дискретных аналогов законов сохранения в пространственно-временной ячейке $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [t^n, t^{n+1}]$ с шагами $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ и $\Delta t = t^{n+1} - t^n$:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}\right) + \Delta t \mathbf{S}_i, \tag{3}$$

где $\mathbf{U}_i^n$ – значение $\mathbf{U}$ в i-й ячейке в момент времени t^n, а $\mathbf{F}_{i\pm 1/2}$ – численные потоки на границах ячеек. Для замыкания численного алгоритма используется метод GFORCE расчёта потоков, при котором поток $F_{i+1/2}$ вычисляется как комбинация потоков Лакса-Фридрихса и Лакса-Вендрофа. Вычисление «правых» и «левых» величин $\mathbf{U}_R$ и $\mathbf{U}_L$, служащих начальными данными для задачи Римана, осуществляется с помощью TVD-реконструкции с использованием лимитера типа minmod [3].

При конструировании численного алгоритма закон сохранения энтропии в основной системе необходимо заменить законом сохранения энергии. Вычисление значения энтропии смеси при этом осуществляется с помощью метода Ньютона после вычисления значений всех консервативных переменных $\mathbf{U}$ на очередном временном слое.

В зависимости от конкретного случая, аппроксимация правых частей $\mathbf{S}_i$ может осуществляться различными способами. В ряде случаев используется предположение о мгновенной релаксации давлений к общей величине. Это справедливо в задачах, где характерное время пробега волн по характерному масштабу неоднородности среды много меньше интересующих временных масштабов. При численной реализации мгновенной релаксации правые части в уравнениях для объёмных концентраций опускаются, и в основном алгоритме решаются однородные уравнения $\frac{\partial \rho \alpha_j}{\partial t} + \frac{\partial \rho u \alpha_j}{\partial x} = 0$. Далее, в конце каждого шага по времени осуществляется коррекция объёмных концентраций и плотностей фаз путём численного решения системы алгебраических уравнений: $p_1 = p_2 = p_3 = p_4$.

Раздел **2.2** содержит описание вычислительного алгоритма для решения уравнений трубных течений газожидкостной смеси. Конечно-объёмная дискретизация уравнений модели (2) записывается в виде

$$\frac{d\mathbf{U}_i}{dt} = L\left(\mathbf{U}\right), \quad \text{где} \quad L\left(\mathbf{U}\right) = -\frac{\mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}}{\Delta x} + \mathbf{Q}\left(x_i, \mathbf{U}_i\right).$$

Решение системы сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений, если известны значения потоков $F_{i\pm1/2}$ на границах между ячейками. Для интегрирования по времени используется метод третьего порядка типа Рунге-Кутты SSPRK (Strong Stability Preserved Runge-Kutta) [4].

Для вычисления потоков на границах между ячейками используется упомянутый выше метод GFORCE в сочетании с одним из двух типов реконструкции данных для вычисления «правых» и «левых» величин $\mathbf{U}_R$ и $\mathbf{U}_L$: TVD-реконструкция с использованием лимитера типа minmod или полиномиальная WENO-реконструкция пятого порядка [5]. Для учёта релаксации давлений с конечным временем реализован неявный метод. Аппроксимация граничных условий осуществляется стандартным образом с учётом характеристической структуры линеаризованных уравнений [6].

В **третьей главе** приводится краткое описание программной реализации вычислительных алгоритмов и рассматриваются результаты численных экспериментов.

Раздел **3.1** содержит описание комплекса программ и блок-схемы, дающие общее представление об основных этапах вычислительного алгоритма в программной реализации.

В разделе **3.2** приводятся результаты тестовых расчётов для изэнтропической модели четырёхфазной сжимаемой среды, представляющие собой численное решение задачи Римана о распаде разрыва с различными конфигурациями начальных условий. Целью данных тестов является верификация вычислительной модели и демонстрация соответствия численных результатов математическим свойствам уравнений. Рассматриваются задачи симметричного соударения и разлёта для смеси четырёх модельных жидкостей. Результаты расчётов показывают, что количество ударных волн (или волн разрежения), распространяющихся в каждую сторону от начального разрыва и воспроизводимых численным методом, соответствует количеству звуковых характеристик системы, что означает, что вычислительная модель качественно верно передает физические особенности течения.

Раздел **3.3** включает серию задач моделирования течений газожидкостной смеси в трубах различной геометрии. Приведём некоторые из них.

Задача Water Faucet. Рассматривается вертикальная труба длиной 12 метров с открытым нижним концом, в начальный момент времени содержащая однородный столб жидкости, окружённый газом, в присутствии силы тяжести. В верхний конец трубы подаётся смесь с фиксированными скоростями фаз и объёмными концентрациями. Данная задача является классическим примером, изучаемым в литературе. В начальный момент времени давления фаз полагаются равными атмосферному давлению. Начальные объёмные концентрации воды и газа полагаются равными $0,8$ и $0,2$ соответственно, а скорости воды и газа – 10 м/с и 0 м/с. В качестве граничных условий на входе трубы задаётся фиксированная объёмная концентрация жидкости $0,8$ и скорости жидкости 10 м/с и газа 0 м/с. На выходе давления воды и газа полагаются постоянными и равными атмосферному давлению. Точное решение $\alpha_g(x,t)$ данной задачи в предположении несжимаемости жидкости известно из литературы, на рис. 1 кривая 5 изображает объемную долю газа для этого решения.

На рис. 1 представлены графики численных решений для объёмной концентрации газа на момент времени $t = 0,5$ с. Решения получены методом RK-WENO в сочетании с методом GFORCE для вычисления потоков и «частичным расщеплением» системы для учёта эффекта мгновенной релаксации. При таком способе расщепления неявный метод для релаксации давлений применяется на первой, второй и последней стадиях четырёхстадийного метода Рунге-Кутты. В работе также приводится анализ других способов учёта эффекта релаксации давлений для данной задачи. Результаты расчётов показывают, что метод RK-WENO с трёхкратной релаксацией даёт оптимальный результат с точки зрения точности решения и устойчивости вычислительного алгоритма.

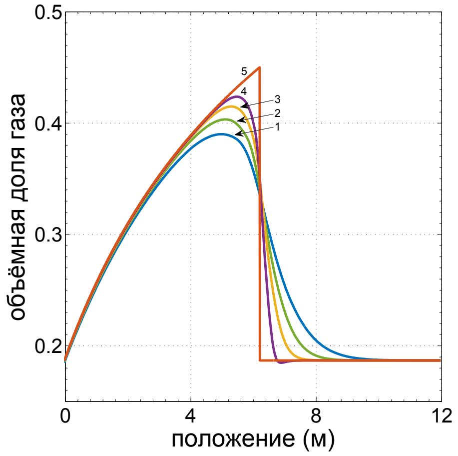

Рис. 1: Объёмная доля газа в зависимости от расстояния от верхнего края трубы. 200, 400, 800, 1600 ячеек (кривые 1, 2, 3, 4 соответственно), аналитическое решение (кривая 5)

Задача о V-трубе. Рассматривается труба V-образной формы общей длиной 60 м с изгибом посередине (см. рис. 2) и дополнительным изгибом в точке C, добавленным для уменьшения влияния граничных условий, заданных в точке D, на течение в V-образной конфигурации. В качестве граничных условий на входе трубы задаются значения скоростей жидкости 1 м/с и газа 10 м/с и объёмных долей жидкости $0,8$ и газа $0,2$, а также атмосферное давление 10^5 Па на выходе. Поскольку на систему действует сила тяжести, в области нижнего изгиба (точка B) начинает скапливаться вода, блокирующая поток воздуха. Со временем давление газа в левой части трубы возрастает, и газ прорывает водяную пробку, после чего процесс повторяется. Оказывается, что определённые конфигурации граничных условий на входе через некоторое время приводят к периодическому режиму течения вне зависимости от начального распределения смеси в трубе. На рис. 3 изображена зависимость от времени значения объёмной

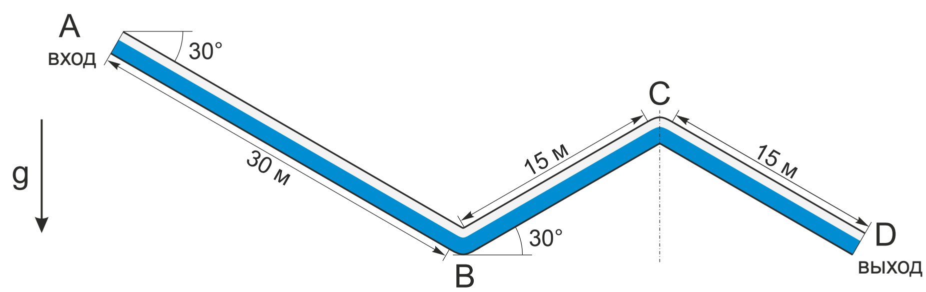

Рис. 2: Схематическое представление задачи о V-трубе

доли жидкости в точке B при расчёте с использованием метода RK-TVD. Наблюдается установившийся периодический режим с интервалами почти полного преобладания жидкой фазы ($\alpha_l \approx 1$).

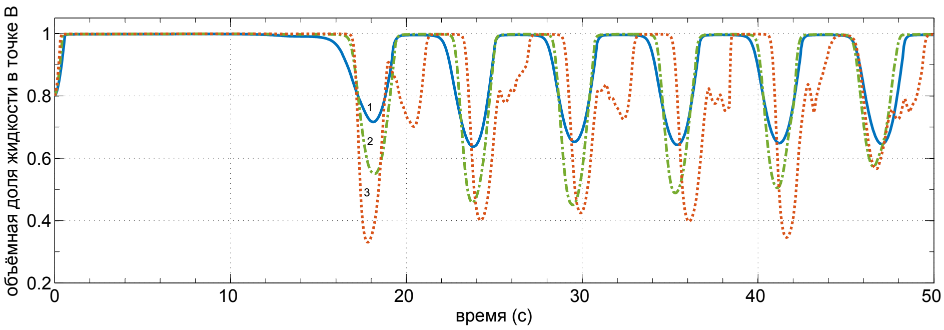

Рис. 3: Зависимость значения объёмной доли жидкости от времени в точке B при расчёте методом RK-TVD на сетках: 400 ячеек (кривая 1), 800 (кривая 2), 1600 (кривая 3).

Пробковый режим течения газожидкостной смеси в горизонтальной трубе. Причиной возникновения пробкового режима течения смеси, рассмотренного в задаче о V-трубе, главным образом является действие силы тяжести в совокупности с геометрией трубы. Другой механизм образования пробковых течений связан с действием силы межфазного трения, приводящей к развитию неустойчивости на межфазной границе стратифицированной газожидкостной смеси. Такого рода течения наблюдаются и изучаются, в том числе экспериментально, в горизонтальных трубах (см., например, [7] и цитированную там литературу) и носят название гидродинамических пробковых течений.

Рассмотрим горизонтальную трубу длиной 37 м, заполненную водой и воздухом. В качестве граничных условий на входе трубы задаются значения приведённых скоростей ($\nu_i = \alpha_i u_i, i = l, g$) воды 1 м/с и газа 10 м/с, а также объёмных долей воды и газа $0,67$ и $0,33$ соответственно. На выходе трубы задаётся атмосферное давление 10^5 Па. В качестве начальных данных задаются приведённые скорости воды 1 м/с и воздуха 10 м/с и объемная доля воды $0,67$.

Расчёты для данной задачи проводились как в приближении мгновенной релаксации давлений, так и для малых конечных значений τ. Оказывается, что в каждом случае возникает периодическое пробковое течение, однако при использовании приближения мгновенной релаксации давлений сходимость при измельчении сетки отсутствует. По-видимому, полученный эффект обусловлен тем, что рассматриваемое течение является неустойчивым, причём скорость роста неустойчивости возрастает с увеличением частоты возмущения. Этот эффект наблюдается численно: с увеличением числа счетных ячеек численный метод разрешает более высокочастотные волны, которые растут с большей скоростью, что приводит к нерегулярному поведению решения.

Оказывается, что конечная релаксация давлений может обеспечить устойчивый характер периодичности пробкового течения. Таблица 1 содержит данные о зависимости среднего периода пробкового течения от количества ячеек расчётной сетки в обоих случаях: при расчёте с использованием приближения мгновенной релаксации и при конечном $\tau = 0,01$. Здесь видно, что при конечном τ течение также имеет периодический пробковый характер, однако период образования пробок слабо зависит от числа точек. Результаты численных экспериментов дают основания предполагать, что модель с конечным временем релаксации может быть использована для адекватного описания гидродинамических пробковых течений, вызываемых неустойчивостью стратифицированного течения и наблюдаемых в экспериментах. Вопрос выбора зависимости τ от параметров течения требует дальнейшего изучения.

	число ячеек			
	400	800	1600	3200
RK-TVD с мгновенной релаксацией давлений	–	6,402	2,908	–
RK-TVD с конечным временем релаксации давлений ($\tau = 0,01$)	7,095	7,162	7,178	

Таблица 1: Средний период образования пробок (с) при расчёте методом RK-TVD с мгновенной релаксацией давлений и с конечным временем релаксации

В **заключении** сформулированы основные результаты работы и обозначены планы дальнейших исследований. В **приложении А** приведён вывод нестационарных осреднённых одномерных уравнений для описания трубных течений газожидкостной смеси. В **приложении Б** изложена процедура приведения линеаризованной системы уравнений трубных течений к характеристическому виду.

Список публикаций по теме исследования

1. Romenski E., Belozerov A., Peshkov I. Conservative formulation for compressible multiphase flows // Quarterly of Applied Mathematics. 2016. Vol. 74, no. 1. P. 113–136.
2. Белозеров А. А., Роменский Е. И., Лебедева Н. А. Моделирование течений сжимаемой газожидкостной смеси в трубах на основе теории термодинамически согласованных систем // Сибирский журнал чистой и прикладной математики. 2016. Т. 16, № 1. С. 40–56.
3. Belozerov A., Romenski E., Lebedeva N. Conservative model and numerical sim-

ulations of compressible two-phase pipe flows // AIP Conference Proceedings. 2016. Vol. 1738, no. 1.
4. Romenski E., Belozerov A., Peshkov I. Thermodynamically compatible hyperbolic conservative model of compressible multiphase flow: Application to four phase flow // AIP Conference Proceedings. 2013. Vol. 1558. P. 120–123.
5. Belozerov A. A., Romenski E. I., Peshkov I. M. Thermodynamically compatible hyperbolic conservative model of compressible multiphase flow // Тезисы Международной конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики – 2014». 2014. С. 10.
6. Belozerov A. A., Romenski E. I., Lebedeva N. A. Conservative model and numerical methods for compressible two-phase pipe flow // The 13th Asian symposium on visualization. Abstarcts. 2015. P. 22–23.

Цитированная литература

1. Romenski E., Drikakis D., Toro E. Conservative models and numerical methods for compressible two-phase flow // Journal of Scientific Computing. 2010. Vol. 42, no. 1. P. 68–95.
2. Годунов С. К., Роменский Е. И. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. Новосибирск: Научная книга, 1998.
3. Toro E. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. Springer, 1999. Vol. 16.
4. Gottlieb S. On high order strong stability preserving Runge–Kutta and multi step time discretizations // Journal of Scientific Computing. 2005. Vol. 25, no. 1. P. 105–128.
5. Shu C.-W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws: Tech. Rep. NASA CR-97-206253 ICASE Report No. 97-65: Institute for Computer Applications in Science and Engineering, 1997.
6. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
7. Bonizzi M., Andreussi P., Banerjee S. Flow regime independent, high resolution multi-field modelling of near-horizontal gas–liquid flows in pipelines // International Journal of Multiphase Flow. 2009. Vol. 35, no. 1. P. 34–46.