

На правах рукописи



**Петракова Виктория Сергеевна**

## **Численные методы решения задач «среднего поля»**

Специальность 1.2.2 —  
«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Автореферат  
диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Красноярск — 2021

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Сибирский федеральный университет»

Научный руководитель: член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор

**Шайдуров Владимир Викторович**

Официальные оппоненты: **Шананин Александр Алексеевич**  
член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор,

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт» (Национальный исследовательский университет),  
заведующий кафедрой «Анализ систем и решений»

**Даутов Рафаил Замилович**

доктор физико-математических наук, профессор,  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет»,  
заведующий кафедрой вычислительной математики Института вычислительной математики и информационных технологий

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова»

Защита состоится 25 января 2022 г. в 15.00 на заседании диссертационного совета 24.1.047.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук (ИВМиМГ СО РАН) по адресу: 630090, г. Новосибирск, проспект Академика Лаврентьева, 6, конференц-зал ИВМиМГ СО РАН.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИВМиМГ СО РАН:  
<http://icmmg.nsc.ru>.

Автореферат разослан 23 ноября 2021 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета 24.1.047.01  
доктор физико-математических наук



Сорокин Сергей Борисович

## Общая характеристика работы

**Актуальность работы.** Математические модели «среднего поля» служат для изучения стратегического поведения агентов, являющихся частью популяций с огромным числом участников (агентов). Для возникновения статистических явлений в описании поведения таких систем межагентные взаимодействия должны быть достаточно «слабыми» или «регулярными». В предположении, что размер популяции стремится к бесконечности, динамика её совокупного поведения может быть описана небольшим числом уравнений. Этот подход изначально использовался в физике элементарных частиц, где он носит название теории «среднего поля» или теории самосогласованного поля. Физическая теория рассматривает взаимодействие многочисленных (но малых) компонентов через эмпирическую усредненную характеристику («среднее поле»), а влияние на систему каждого отдельно взятого компонента считается бесконечно малым. Модели игр «среднего поля» (ИСП) адаптируют теорию из статистической физики к случаям, когда физические частицы заменяются агентами, которые взаимодействуют в условиях стратегических ситуаций. Основное отличие от других способов моделирования межагентного взаимодействия заключается в том, чтобы принимать во внимание не только способность агентов принимать решения, но и способность каждого игрока учитывать интегральное состояние других агентов, которые одновременно разрабатывают свои индивидуальные стратегии. Таким образом, особенность теории ИСП заключается в учете взаимодействия между индивидуумом и популяцией. Теория игр «среднего поля» позволяет описать поведение индивидуального агента, который стремится оптимизировать свою локальную выгоду, следуя тенденции, задаваемой популяцией, а также динамику популяции, которая формируется совокупностью агентов.

В настоящее время теория игр «среднего поля» находит широкое применение в моделировании реальных стратегических ситуаций (как правило, экономических и социальных), поскольку большую роль при моделировании играет неоднородная структура связей между отдельными индивидуумами. Учёт структуры этих связей является решающим при описании коллективного поведения популяций с большим числом участников. Это приводит к появлению новых моделей, основанных на теории ИСП, которые требуют разработки эффективных численных алгоритмов. А актуальность проблемной области состоит как в оптимизации расходов, доходов и ресурсов для достижения социально-экономических целей, так и в прогнозе критических социально-экономических ситуаций.

**Степень научной разработанности проблемы.** Теория игр «среднего поля» («Mean field games» в оригинале) – относительно молодая область исследований, развитая Д.-М. Ласри и П.-Л. Лионсом и в то же время, независимо от них, группой П. Каинса и М. Хуанга (см. монографию «Bensoussan, A., Frehse J., Yam P. Mean Field Games and Mean Field Type Control Theory. New York: Springer-Verlag, 2013.– 128 p.» и ссылки в ней). Теория ИСП направлена на моделирование макроповедения систем, в которых задействовано большое количество рациональных агентов, играющих в дифференциальные игры. Считается, что на динамику игрока (агента) влияет как его положение и выбран-

ное управление, так и массовое (совокупное) положение других агентов. Каждый игрок стремится максимизировать свой доход, который зависит от выбранного им управления в условиях совокупности траекторий всех агентов, что приводит к поиску решения в терминах равновесия по Нэшу. Рационализация агентов позволила экономистам перенести идеи статистической физики в новый класс моделей, в которых вклад отдельного игрока не оказывает существенного влияния на поведение всей массы игроков, однако он сам действует рационально с учетом динамически складывающихся условий. Основоположники теории успешно идентифицировали предельную задачу (при стремлении числа игроков к бесконечности) как пару уравнений в частных производных. Одно из них записывается в форме уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана, а другое — уравнения Колмогорова (в физической интерпретации — Фоккера-Планка). Такой подход к моделированию позволяет преодолевать ограничения других методов прогнозирования. Например, динамическое программирование при описании динамики популяции учитывает взаимодействие отдельно взятого игрока только с локальным окружением (иначе задача становится вычислительно невыполнимой) и может столкнуться с трудностями при объяснении некоторых явлений, происходящих в результате общей неявной оптимизации. В свою очередь, положение, принятое в теории ИСП, что все игроки однотипны и их персональное влияние на систему пренебрежимо мало, позволяет заменить микроскопическую точку зрения на макроскопическую. Основное преимущество такого приближения состоит в том, что макроскопическое описание обладает относительно небольшим числом описываемых и заданных функций и параметров, поддающихся численной обработке. Более того, обычно чем больше однотипных агентов в рассматриваемой системе, тем точнее становится приближение.

Модели ИСП в настоящее время находят свое применение во многих областях науки: от традиционного финансового анализа до инженерных задач по распределенному управлению беспроводными сетями с большим числом передатчиков. Различные приложения и дополнительные модели можно найти в монографии (Caines P.E., Huang M., Malhamé R.P. Chapter in Handbook of Dynamic Game Theory. Berlin: Springer, 2018, – P. 345-372) и литературе в ней.

Поскольку теория ИСП предлагает описывать межагентное взаимодействие парой связанных дифференциальных уравнений параболического типа, большое внимание исследователей также уделяется поиску и разработке эффективных численных методов реализации таких моделей. Литературный обзор по различным модификациям моделей ИСП (например, многопопуляционные задачи, задачи с минорными игроками, задачи планирования) и численным алгоритмам решения как традиционных постановок ИСП, так и их модификаций, можно найти в обзорной статье (Shaydurov V.V., Kornienko V.S. “Mean Field Games” as mathematical models for control and optimization of business activity. J. Sib. Fed. Univ. Humanit. soc. Science. – 2019 – V. 12(4). – P. 701–715). Преимущественно, авторами предлагаются конечно-разностный и конечно-элементный подходы. Представляемая диссертация сосредоточена на построении аппроксимации уравнений параболического ти-

па с помощью Эйлера-Лагранжева метода аппроксимации операторов переноса, которое совместно с конечно-разностным подходом для эллиптической части операторов улучшает несколько важных свойств дискретных задач.

**Целью** данной работы является адаптация математических моделей, используемых в международном экономическом сообществе и описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных, к оптимизации затрат, доходов, достижению поставленных социальных и экономических целей, прогнозированию критических ситуаций для выбранной области моделирования; а также разработка и обоснование эффективных численных методов решения задач, описываемых такими математическими моделями.

Для достижения поставленной цели были поставлены следующие **задачи**.

1. Адаптировать математические модели «Игры среднего поля» для применения в области экологии, экономики отдельных отраслей и регионов для достижения заданных социальных и экономических целей и прогноза критических ситуаций.
2. Использовать модели для прогнозирования мезо- и макроповедения больших популяций (население, пользователи, клиенты или предприятия) в различных внешних условиях (экономических, социальных, экологических, политических).
3. Разработать и обосновать эффективные численные методы решения задач «среднего поля», описываемых системами дифференциальных уравнений в частных производных с новыми формулировками данных.

**Научная новизна.** Разработаны численные методы решения задач, описываемых математическими моделями игр «среднего поля», наследующие полезные свойства дифференциальных задач и приводящие к явным локальным правилам минимизации целевого функционала. Построены новые модели, основанные на традиционной постановке задач «среднего поля», но более адаптированные для экономико-социальных приложений.

**Практическая значимость.** Результаты, полученные в диссертационной работе, могут быть использованы для применения в области экологии, экономики отдельных отраслей, достижения социально-экономических целей и прогноза макроповедения мультиагентных систем под воздействием различных внешних условий (например, экономических, социальных, экологических или политических).

**Методология и методы исследования.** В настоящее время использование аппарата «игр среднего поля» в основном оправдано при прогнозировании макроповедения большого числа агентов во внешнеэкономической среде с учетом личной финансовой выгоды. В то же время теория игр «среднего поля» содержит возможности прогнозирования затрат (финансовых и организационных) для достижения других определенных экономических, экологических и социальных целей путем некоторой переформулировки известных динамических моделей. В качестве метода исследования в работе используется вычислительный эксперимент, включающий в себя следующие этапы: математическая формулировка задачи, построение численного алгоритма, его программная реализация, проведение расчетов и анализ полученных результатов.

## **Основные положения, выносимые на защиту.**

1. Модифицированные математические модели, основанные на теории игр «среднего поля» и применимые к оптимизационным задачам с неквадратичным контролем.
2. Новая математическая модель, основанная на теории игр «среднего поля» и применимая к оптимизационным задачам с ограничениями на финальное состояние агентов.
3. Новые вычислительные алгоритмы для одно- и двумерных оптимизационных задач, основанные на полулагранжевом приближении, наследующие полезные свойства дифференциальных задач и приводящие к явным локальным правилам минимизации целевого функционала.

**Достоверность** полученных результатов подтверждена проверкой и обоснованием сходимости численных методов, строгим выводе используемых моделей и обеспечением законов сохранения при построении вычислительных схем.

**Апробация работы.** Основные результаты исследования были представлены на следующих научных конференциях: XIX всероссийская конференция молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям (Кемерово, 2018); Открытая конференция молодых ученых ИВМ СО РАН (Красноярск, 2019); международная конференция «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики 2019» (Новосибирск, 2019); международная конференция «Марчуковские научные чтения 2020» (Новосибирск, 2020); XI и XII международная конференция по применению математических подходов в технических и естественных науках (Болгария, Албена, 2019, 2020).

Диссертационная работа докладывалась также на совместном семинаре Института вычислительного моделирования СО РАН и базовой кафедры вычислительных и информационных технологий Института математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета.

Работа выполнялась при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов: 17-01-00270, 20-01-00090) и Российского научного фонда (код проекта: 20-61-46017).

**Личный вклад** автора состоит в прямом участии в исследовании применимости полулагранжева метода к решению задач прогнозирования, численной оценке сходимости полученных методов, разработке вычислительных алгоритмов и комплекса программ, проведении расчетов, обработке и анализе полученных результатов, разработке модифицированных постановок задач «среднего поля», подготовке научных статей и докладов по теме диссертационной работы. Научному руководителю Шайдурову В.В. принадлежат постановки задач и общая оригинальная идея использования полулагранжева подхода в применении к моделям «игр среднего поля», критическое сравнение результатов с известными алгоритмами.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 14 печатных изданиях, из которых 3 изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 6 – в тезисах

докладов, 5 индексируются в базах данных Web of Science, 8 – в базах Scopus, из них 5 публикации индексируются одновременно в Web of Science и Scopus.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и четырех приложений. Полный объём диссертации составляет 153 страницы с 15 рисунками и 9 таблицами. Список литературы содержит 133 наименования.

## Содержание работы

Во **введении** кратко описан объект исследования, сформулирована цель диссертационной работы, а также выделены её задачи. Обоснована актуальность работы, теоретическая и практическая значимость, а также достоверность полученных результатов. Перечислены основные публикации по теме диссертации и дана общая характеристика работы.

**Первая глава** посвящена обзору развития теории игр «среднего поля», её приложений и новых разработок в области численного решения таких задач. Представлена общая схема численного решения задач «среднего поля», используемая в последующих главах. Также в **разделе 1.4** показана применимость и преимущество применения полулагранжевых методов к решению задач такого типа. Представлен исторический обзор развития полулагранжевых методов численного решения дифференциальных уравнений.

Во **второй главе** традиционная одномерная (по пространству) постановка дифференциальной ИСП расширена для случая, когда функция управления имеет неквадратичную зависимость от выбранной игроком стратегии. Таким образом, рассматривается следующая задача оптимизации: минимизировать функционал стоимости вида

$$J(m, \alpha) = \int_0^T \int_0^1 (F(\alpha, t, x) m + g(t, x, m)) dx dt \quad (1)$$

с ограничением на распределение агентов в виде дифференциального уравнения Фоккера-Плана-Колмогорова (ФПК):

$$\frac{\partial m}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \frac{\partial(\alpha m)}{\partial x} = 0 \quad \text{на } (0, T) \times (0, 1), \quad (2)$$

$$m(0, x) = m_0(x) \quad \forall x \in [0, 1], \quad \partial m / \partial x(t, 0) = \partial m / \partial x(t, 1) = 0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3)$$

с начальными и краевыми условиями (3). Здесь  $J(m, \alpha)$  – общий вклад агентов в систему, выраженный в виде функционала стоимости;  $m(t, x)$  – распределение агентов в момент времени  $t \in [0, T]$  по состояниям  $x \in [0, 1]$ ;  $\alpha(t, x)$  – стратегия (контроль) игрока;  $F(\alpha, t, x)$  – функция управления системой (стоимость реализации стратегии  $\alpha(t, x)$  при каждом  $t$  и  $x$ );  $g(t, x, m)$  – текущий платеж, не связанный с реализацией стратегии, а  $\sigma^2$  – константа, характеризующая стохастичность динамики системы. Будем считать функцию  $g(t, x, \bar{m})$  с числовым параметром  $\bar{m} \in \mathbf{R}$  кусочно-гладкой со следующим условием:

$$g(t, x, \tilde{m}) - g(t, x, \bar{m}) \leq (\tilde{m} - \bar{m}) b(t, x, \bar{m}), \quad \text{где } b(t, x, \bar{m}) = \frac{\partial g}{\partial \bar{m}}(t, x, \bar{m}) \quad (4)$$

для всех допустимых значений аргумента  $\tilde{m}$  и  $\bar{m}$  из  $\mathbf{R}$ .

Введем в рассмотрение гладкую функцию  $v(t, x) \in C^\infty([0, T] \times \bar{\Omega})$ , используемую в качестве множителя Лагранжа для задачи оптимизации вида  $\inf_{\alpha} J(m, \alpha)$  с учетом (1) и ограничений в виде (2). Построим функцию Лагранжа

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(m, \alpha, v) := & J(m, \alpha) + \int_0^T \int_0^1 \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial v}{\partial x} \right) m \, dx \, dt - \\ & - \int_0^1 (v(T, x)m(T, x) - v(0, x)m_0(x)) \, dx. \end{aligned} \quad (5)$$

Решаемая задача минимизации может быть представлена как задача поиска седловой точки Лагранжиана (5). Дифференцирование Лагранжиана по соответствующим компонентам приводит к уравнению Гамильтона-Якоби-Беллмана (ГЯБ)

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial v}{\partial x} = -F(\alpha, t, x) - b(t, x, m) \quad \text{на } (0, T) \times (0, 1), \quad (6)$$

$$v(T, x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1], \quad \partial v / \partial x(t, 0) = \partial v / \partial x(t, 1) = 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad (7)$$

с начальными и граничными условиями (7) и условию оптимальности выбранной игроком стратегии в форме нелинейного уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}(\alpha, t, x) + \frac{\partial v}{\partial x}(t, x) = 0 \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, 1]. \quad (8)$$

Отметим, что в случае квадратичной зависимости функции  $F(\alpha, t, x)$  от  $\alpha$  уравнение (8) принимает вид линейного относительно  $\alpha$  уравнения, что существенно упрощает применение численных методов. Однако в действительности функция управления динамической системой  $F(\alpha, t, x)$  может иметь более сложные зависимости, поскольку на стратегию игрока могут оказывать влияние дополнительные внешние факторы. Для гарантии существования и единственности решения (8) наложим следующие ограничения на функцию  $F(\bar{\alpha}, t, x)$  (с числовым параметром  $\bar{\alpha} \in \mathbf{R}$ ):

1.  $\frac{\partial F}{\partial \bar{\alpha}}(\bar{\alpha}, t, x)$  кусочно-непрерывна  $\forall (\bar{\alpha}, t, x)$  и строго монотонна по  $\bar{\alpha} \in (-\infty, +\infty)$ ;
2.  $F(0, t, x) = \frac{\partial F}{\partial \bar{\alpha}}(0, t, x) = 0$  на  $[0, T] \times [0, 1]$ .

В разделе 2.2 предложена вычислительная схема для уравнения (2), основанная на комбинации Эйлера-Лагранжева приближения оператора переноса, входящего в дифференциальный оператор уравнения (2), и конечно-разностного приближения части оператора, отвечающего за диффузию. Решение задачи будем искать на равномерной по времени и пространству сетке  $\{t_k = k\tau; x_{i+1/2} = (i + 1/2)h, k = 0, \dots, M, i = -1, \dots, N\}$  в виде кусочно-линейной функции  $m^h(t, x)$  на каждом временном слое  $t_k$ , непрерывной на  $[0, 1]$  и линейной на каждом  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ . Предложенная схема аппроксимирует уравнение Фоккера-Планка (2) с порядком  $O(\tau + h^2)$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{8\tau} - \frac{\sigma^2}{2h^2} \right) m_{k,i-1/2}^h + \left( \frac{3}{4\tau} + \frac{\sigma^2}{h^2} \right) m_{k,i+1/2}^h + \left( \frac{1}{8\tau} - \frac{\sigma^2}{2h^2} \right) m_{k,i+3/2}^h = \\ = \gamma_{k,i+1/2}^1 m_{k-1,i-1/2}^h + \gamma_{k,i+1/2}^2 m_{k-1,i+1/2}^h + \gamma_{k,i+1/2}^3 m_{k-1,i+3/2}^h \end{aligned} \quad (10)$$



$\forall i = 0, \dots, N-1 \forall k = 1, \dots, M$  с коэффициентами

$$\begin{aligned}\gamma_{k,i+1/2}^1 &= \frac{1}{8\tau} \left( 1 + \frac{4\tau}{h} \alpha_{k,i} \right), \quad \gamma_{k,i+1/2}^3 = \frac{1}{8\tau} \left( 1 - \frac{4\tau}{h} \alpha_{k,i+1} \right), \\ \gamma_{k,i+1/2}^2 &= \frac{1}{8\tau} \left( 3 + \frac{4\tau}{h} \alpha_{k,i} \right) + \frac{1}{8\tau} \left( 3 - \frac{4\tau}{h} \alpha_{k,i+1} \right)\end{aligned}\quad (11)$$

и начальным условием  $m_{0,i+1/2}^h = m_0(x_{i+1/2})$ . Для выполнения краевых условий в (3) положим  $m_{k,-1/2}^h = m_{k,1/2}^h$  и  $m_{k,N+1/2}^h = m_{k,N-1/2}^h$ . Отметим, что при выполнении условий

$$\tau |\alpha_{k,i}^h| < h/4; \quad h^2 \leq 4\tau\sigma^2 \quad \forall k = 0, \dots, M \quad \forall i = 0, \dots, N-1,$$

(10), записанная в матричной форме, обладает М-свойством.

Вместо функционала стоимости (1) будем рассматривать его дискретный аналог

$$J^h(m^h, \alpha^h) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{N-1} (r_{k,i+1/2}^h m_{k,i+1/2}^h + g_{k,i+1/2}^h) \tau h. \quad (12)$$

Здесь  $g_{k,i+1/2}^h = g(t_k, x_{i+1/2}, m_{k,i+1/2}^h)$ , а  $r_{k,i+1/2}^h = F(\alpha_{k+1,i}^h, t_k, x_i)/2 + F(\alpha_{k+1,i+1}^h, t_k, x_{i+1})/2$ .

В работе показано, что дискретные уравнения ФПК и ГЯБ имеют сопряженные операторы в соответствующих векторных пространствах  $L_1$  и  $L_\infty$ . Это приводит к следующей конечно-разностной схеме с порядком  $O(\tau + h^2)$  для уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана:

$$\begin{aligned}\left( \frac{1}{8\tau} - \frac{\sigma^2}{2h^2} \right) v_{k,i-1/2}^h + \left( \frac{3}{4\tau} + \frac{\sigma^2}{h^2} \right) v_{k,i+1/2}^h + \left( \frac{1}{8\tau} - \frac{\sigma^2}{2h^2} \right) v_{k,i+3/2}^h = \\ = \gamma_{k+1,i-1/2}^3 v_{k+1,i-1/2}^h + \gamma_{k+1,i+1/2}^2 v_{k+1,i+1/2}^h + \gamma_{k+1,i+3/2}^1 v_{k+1,i+3/2}^h + \\ + z_{k,i+1/2}^h \quad \forall k = M-1, \dots, 0 \quad \forall i = 0, \dots, N-1;\end{aligned}\quad (13)$$

$$z_{k,i+1/2}^h = b_{k,i+1/2}^h + r_{k,i+1/2}^h; \quad v_{M,i+1/2}^h = 0 \quad \forall i = 0, \dots, N-1;$$

$$v_{k,-1/2}^h = v_{k,1/2}^h, \quad v_{k,N+1/2}^h = v_{k,N-1/2}^h \quad \forall k = M-1, \dots, 0$$

с коэффициентами (11). Для уравнения (8) аппроксимация выбрана в виде

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}(\alpha_{k,i}^h, t_k, x_i) + \frac{v_{k,i+1/2}^h - v_{k,i-1/2}^h}{h} = 0 \quad \forall k = M-1, \dots, 0 \quad \forall i = 0, \dots, N-1. \quad (14)$$

Также в работе показано, что для схем (10), (13) справедливы следующие оценки устойчивости:

$$\max_{0 \leq k \leq M} \|m^h(t_k, \cdot)\|_{1,h} \leq \|m_0(\cdot)\|_{1,h} + T \max_{0 \leq k \leq M} \|\varepsilon^h(t_k, \cdot)\|_{1,h}, \quad (15)$$

где  $\left\{ \varepsilon_{k,i+1/2}^h \right\}_{i=0, \dots, N-1}^{k=0, \dots, M}$  некоторая погрешность в правой части (10). И

$$\max_{0 \leq k \leq M} \|v^h(t_k, \cdot)\|_{\infty,h} \leq T \max_{0 \leq k \leq M} \|z^h(t_k, \cdot)\|_{\infty,h}. \quad (16)$$

Представленные оценки устойчивости (с учетом аппроксимации) ведут к сходимости разностных схем (10), (13) с порядком  $O(\tau + h^2)$  в соответствующих векторных пространствах.

В разделе 2.2.3 сформулирован итерационный алгоритм решения задачи минимизации функционала (1) с учетом (2), который заключается в последовательном решении сначала дискретного аналога уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана (13); нахождении оптимальной на текущей итерации стратегии  $\alpha_{k,i}^h$ , удовлетворяющей (8) и расчета текущего распределения агентов  $m_{k,i+1/2}^h$  для выбранной стратегии по схеме (10). Итерация повторяется, пока значение (12) не достигнет своего минимума с требуемой точностью. В работе также показано, что условия выбора оптимальной стратегии (14) действительно доставляют минимум дискретному функционалу стоимости (12) и обеспечивают условия наискорейшего спуска.

В разделе 2.3 предложенный численный алгоритм апробирован на задаче экономического взаимодействия в условиях наличия альтернативных ресурсов. Использована модель экономического взаимодействия, в которой рассматривается континуум агентов-потребителей, где каждый агент представляет собой домохозяйство, решающее вопрос об отоплении, имея выбор между затратами на установку и содержание термоизоляции помещения или дополнительными затратами на электричество. Рассмотрен случай кусочно-непрерывного управления, когда затраты на переход агента из одного состояния в другое зависят от сезона, в который осуществляется переход, и от текущего состояния агента. Рассмотрены также случай разрывного управления, с методической точки зрения означающий, что для некоторого фрагмента состояний  $(t, x)$  управление не зависит от стратегии, выбранной игроком, а также случай, когда игрок для некоторых состояний  $(t, x)$  может иметь две альтернативные стратегии. (рисунок 1).

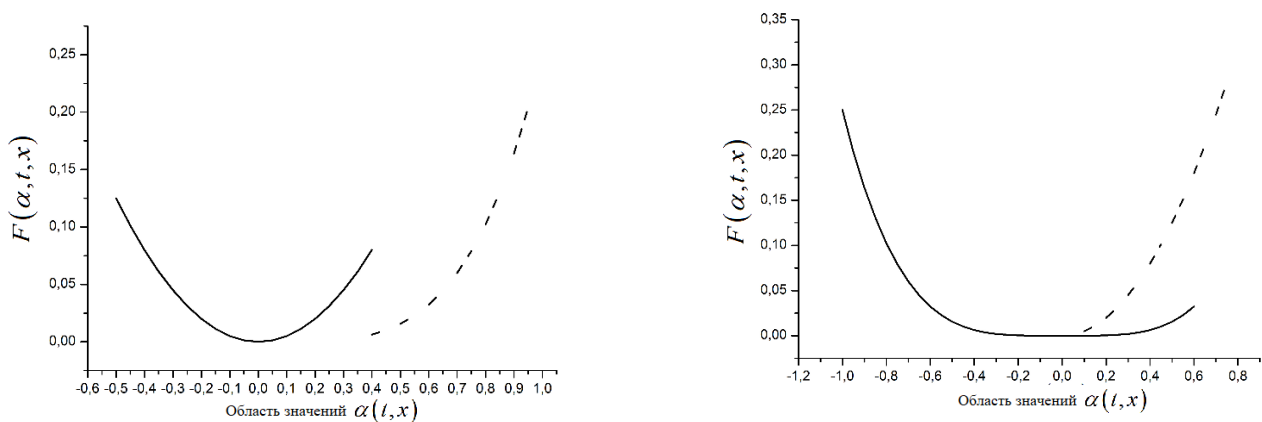


Рис. 1: Используемые функции управления  $F(\bar{\alpha}, t, x)$  в зависимости от параметра  $\bar{\alpha}$

В разделе также численно показано, что заявленный порядок сходимости вычислительных схем достигается. В разделе 2.4 приведены выводы по главе и сравнение предложенного вычислительного алгоритма с работами другими авторами.

В **третьей главе** представлено численное решение оптимизационной задачи с ограничением на финальное распределение агентов (задачи планирования). Здесь необходимо оптимальным образом довести плотность распределения игроков от начальной конфигурации  $m_0(t, x)$  до финального, заранее заданного распределения  $m_{\text{tag}}(x)$  на горизонте времени. С этой точки зрения финальная выплата  $v(T, x)$  может быть рассмотрена как контроль, используемый для достижения желаемого финального распределения.

Функционал (1) дополним функцией  $G_T(x, m(T, x))$ , используемой для принуждения к заданному состоянию, которую будем рассматривать зависимой только от финального распределения агентов. Таким образом, рассматривается следующий функционал стоимости:

$$J(m, \alpha) = \int_0^T \int_0^1 (F(\alpha, t, x) m + g(t, x, m)) dx dt + \int_0^1 G_T(x, m(T, x)) dx \quad (17)$$

снова с ограничением в виде дифференциального уравнения (2), (3) и условиями (4), (9). Дифференцирование Лагранжиана (5) полученной задачи с учетом другого функционала в виде (17) приводит к уравнению Гамильтона-Якоби-Беллмана вида

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial v}{\partial x} = -F(\alpha, t, x) - \frac{\partial g(t, x, m)}{\partial m} - \delta(T-t) \frac{\partial G_T}{\partial m}(x, m(T, x)) \quad (18)$$

на  $(0, T) \times (0, 1)$  с начальными и краевыми условиями (7). Здесь  $\delta(T-t)$  –  $\delta$ -функция. Условия оптимальности выбранной игроком стратегии, как и прежде, представлены в виде (8).

В **разделе 3.2** предложен алгоритм последовательного приближения к заданному финальному состоянию. В целом, он повторяет алгоритм, изложенный в разделе 2.2.3, с той лишь разницей, что дифференцирование Лагранжиана для сеточной задачи оптимизации приводит к начальным условиям для схемы (13) в виде  $\mathbb{A}v_{M,\cdot}^h = \eta(x, m_{M,\cdot}^h)$ , где  $\eta(x, \bar{m}) = (\partial G_T / \partial \bar{m})(x, \bar{m})$ ,  $\bar{m} \in \mathbf{R}$ , а  $\mathbb{A}$  – трехдиагональная матрица, составленная из соответствующих коэффициентов в левой части (13). В разделе также показано, что выполняется следующая оценка для схемы (13) с ненулевым начальным условием:

$$\max_{0 \leq k \leq M} \|v^h(t_k, \cdot)\|_{\infty, h} \leq \|\eta(\cdot)\|_{\infty, h} + T \max_{0 \leq k \leq M-1} \|z^h(t_k, \cdot)\|_{\infty, h}. \quad (19)$$

В **разделе 3.3** алгоритм последовательного приближения к заданному финальному состоянию апробирован на модельной экономической задаче из раздела 2.3 с функциями  $F(t, x, \alpha)$  и  $G_T(x, m(T, x))$  в виде

$$F = \begin{cases} \alpha^2/2, & \text{если } \alpha \leq 0, \\ \exp(\alpha) - \alpha - 1 & \text{иначе.} \end{cases}; \quad G_T = \begin{cases} (m(T, x) - m_{\text{tag}}(x))^2, & m \leq m_{\text{tag}}(x), \\ (m(T, x) - m_{\text{tag}}(x))^4 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Численно показана сходимость процесса с заявленным порядком. Показано, что вид функции  $G_T(x, m(T, x))$  определяет своего рода «штраф» за отклонение распределения на горизонте времени от заданного целевого распределения. Так, например, если выбирать функцию  $G_T(x, m(T, x))$  в виде более сильного штрафа

$G_T(x, m(T, x)) = (m(T, x) - m_{\text{tag}}(x))^2/\varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – положительный параметр, то при стремлении  $\varepsilon \rightarrow 0$  можно добиться достаточно близкого приближения к заданной целевой функции на горизонте времени (рисунок 2) за счет увеличения общих расходов. В разделе также приведено сравнение предложенного вычислительного алгоритма с используемыми в работах других авторов.

**Четвертая глава** посвящена постановке двумерной игры «среднего поля» и обобщению численного алгоритма, рассмотренного в второй главе, на двумерный случай путем аппроксимации одномерных операторов, действующих вдоль каждой пространственной переменной. Положим  $\Omega = (0, H_1) \times (0, H_2)$  с границей  $\Gamma$  и замыканием  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ . Обозначим  $n(x, y) = (n_1(x, y), n_2(x, y))$  – внешняя нормаль в точке  $(x, y)$  на границе  $\Gamma$ . Рассмотрим следующую оптимизационную задачу: минимизировать функционал стоимости

$$J(m, \alpha, \beta) = \int_0^T \left( \exp(-rt) \int_{\Omega} (d_1 \alpha^2 m/2 + d_2 \beta^2 m/2 + g(t, x, y, m)) d\Omega \right) dt, \quad (20)$$

где  $d_1, d_2$  – положительные константы; функции  $\alpha(t, x, y), \beta(t, x, y)$  отражают усилия, направленные на изменение значения плотности агентов  $m(t, x, y)$  на  $\bar{\Omega}$ ;  $r \geq 0$  – безрисковая процентная ставка. Ограничение на распределение агентов  $m(t, x, y)$  зададим в виде двумерного уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова с начальными и граничными условиями:

$$\frac{\partial m}{\partial t} - \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} - \frac{\sigma_2^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} + \frac{\partial(\alpha m)}{\partial x} - \frac{\partial(\beta m)}{\partial y} = 0 \quad \text{на } (0, T) \times \Omega, \quad (21)$$

$$m(0, x, y) = m_0(x, y) \quad \text{на } \bar{\Omega} \quad \text{и} \quad \partial m / \partial n = 0 \quad \text{на } [0, T] \times \Gamma, \quad (22)$$

где  $\partial m / \partial n$  означает производную по нормали на границе  $\Gamma$ , а  $\sigma_1, \sigma_2$  – фиксированные константы, характеризующие динамику мультиагентной системы.

Оптимальность функций контроля  $\alpha(t, x, y), \beta(t, x, y)$  обеспечивается двумерным уравнением Гамильтона-Якоби-Беллмана

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\sigma_2^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial v}{\partial x} - \beta \frac{\partial v}{\partial y} = - \exp(-rt) (f + d_1 \alpha^2/2 + d_2 \beta^2/2) \quad \text{на } (0, T) \times \Omega,$$

$$v(T, x, y) = 0 \quad \text{на } \bar{\Omega}; \quad \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{на } [0, T] \times \Gamma.$$

и условиями

$$\alpha = - \frac{\exp(rt)}{d_1} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \beta = \frac{\exp(rt)}{d_2} \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{на } [0, T] \times \bar{\Omega}. \quad (23)$$

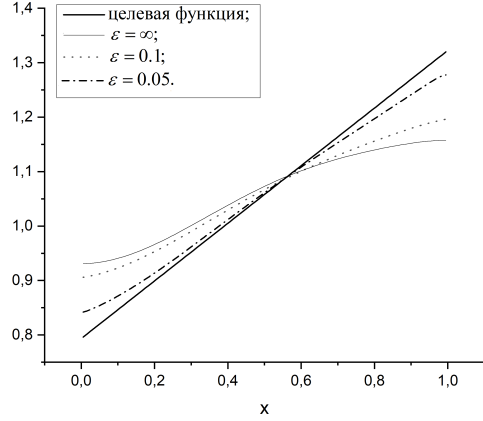


Рис. 2: Сравнение различных приближенных  $\tilde{m}(T, x)$  в зависимости от величины штрафа

В разделе 4.2 построены конечно-разностные схемы решения двумерных уравнений Фоккера-Планка-Колмогорова и Гамильтона-Якоби-Беллмана. Рассмотрим два одномерных оператора, действующих вдоль каждой пространственной переменной

$$f_1(m(t, x, y)) = \frac{1}{2} \frac{\partial m}{\partial t} - \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \frac{\partial(\alpha m)}{\partial x}, \quad f_2(m(t, x, y)) = \frac{1}{2} \frac{\partial m}{\partial t} - \frac{\sigma_2^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} - \frac{\partial(\beta m)}{\partial y}.$$

Отметим, что  $f_1 + f_2 = 0$  вследствие (21). Каждый одномерный оператор  $f_1, f_2$  может быть аппроксимирован согласно схеме, предложенной в разделе 2.2, если вторая независимая переменная зафиксирована. Комбинация построенных аппроксимаций дает вычислительную схему первого порядка аппроксимации по временной переменной и второго по пространственным по аналогии с одномерным случаем. Также в разделе 4.2 показаны условия сходимости построенных схем; показано, что дискретные аналоги (23) доставляют минимум сеточному аналогу функционала (20). Представлены оценки устойчивости для выбранных конечно-разностных схем, аналогичные (15), (16) и вычислительный алгоритм, аналогичный изложенному в разделе 2.2.3 с той лишь разницей, что вычисления производятся по схемам, построенным для двумерного случая.

В разделе 4.3 вычислительный алгоритм применен к анализу ситуации торговли квотами на эмиссию в условиях различной налоговой политики. Здесь рассматривается континуум агентов, взаимодействующих на макроэкономическом уровне. В рамках этой модели агенты являются производителями, выбросы которых регулируются правительством. Правительство выделяет или продает ограниченное количество квот на выброс диоксида углерода за период времени. Производители, которые хотят увеличить свой допустимый уровень выброса, могут покупать квоты у других агентов, желающих их продать. В разделе 4.3.2 предложено её численное решение. Результаты вычислительного эксперимента показали, что из-за высокой конкуренции агенты имеют тенденцию не оставаться в общей массе, а выбирать отличный от других уровень эмиссии, однако при текущем уровне базового налога агенты не превышают разрешенный уровень выбросов. В разделе было также численно показано, что заявленный порядок сходимости достигается.

Пятая глава посвящена поиску численного решения двумерных задач «среднего поля» в случае, когда диффузионные процессы, происходящие вдоль пространственных переменных, связаны между собой. Будем считать, что для построения модели используется та же вычислительная область и функционал (20), что и в главе 4. В случае смешанной диффузии рассмотрим уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова в виде

$$\frac{\partial m}{\partial t} - \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} - \frac{\sigma_2^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} - \gamma \sigma_1 \sigma_2 \frac{\partial^2 m}{\partial x \partial y} + \frac{\partial(\alpha m)}{\partial x} + \frac{\partial(\beta m)}{\partial y} = 0 \quad \text{на } (0, T) \times \Omega \quad (24)$$

с начальными и граничными условиями (22). Здесь  $\gamma \in (-1, 1)$  – коэффициент корреляции.

Отметим, что использование подхода Эйлера-Лагранжа, аналогичного используемому в главе 4, в применении к уравнению типа (24) приводит к ограничениям на шаг сетки вида

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\sigma_1\sigma_2} \frac{h_1}{\tau} < \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \frac{1}{h_1} - \frac{|\gamma|}{h_2}, \quad \frac{1}{8\sigma_2\sigma_1} \frac{h_2}{\tau} < \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \frac{1}{h_2} - \frac{|\gamma|}{h_1}, \\ 3/8\tau + \sigma_1^2/h_1^2 + \sigma_2^2/h_2^2 - |\gamma| \sigma_1\sigma_2/h_1h_2 > 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Из-за большей строгости ограничений (25) в главе предложена вычислительная схема первого порядка аппроксимации по времени и пространству, основанная на конечно-разностном приближении. Введем в рассмотрение дискретную равномерную сетку по времени и пространству:

$$\begin{aligned} t_k &= k\tau, \quad k = 0, \dots, M, \quad \tau = T/M; \\ x_{i+1/2} &= (i + 1/2)h_1, \quad i = -1, \dots, N_1, \quad h_1 = H_1/N_1; \\ y_{j+1/2} &= (j + 1/2)h_2, \quad j = -1, \dots, N_2, \quad h_2 = H_2/N_2; \end{aligned}$$

В работе предложена следующая конечно-разностная схема порядка  $O(\tau + h_1 + h_2)$  соответствующая уравнению (24):

$$\begin{aligned} A_{i+1/2, j+1/2} * M_{k, i+1/2, j+1/2}^h &= \gamma_{k, i+1/2, j+1/2}^1 m_{k-1, i-1/2, j+1/2}^h + \\ &+ \gamma_{k, i+1/2, j+1/2}^2 m_{k-1, i+1/2, j+1/2}^h + \gamma_{k, i+1/2, j+1/2}^3 m_{k-1, i+3/2, j+1/2}^h + \\ &+ \gamma_{k, i+1/2, j+1/2}^4 m_{k-1, i+1/2, j-1/2}^h + \gamma_{k, i+1/2, j+1/2}^5 m_{k-1, i+1/2, j+3/2}^h \end{aligned} \quad (26)$$

где  $A_{i+1/2, j+1/2} * M_{k, i+1/2, j+1/2}^h$  представляет операцию покомпонентного умножения соответствующих элементов матриц с последующим суммированием:

$$\begin{aligned} A_{i+1/2, j+1/2} * M_{k, i+1/2, j+1/2} &= a_{i-1/2, j+3/2} m_{k, i-1/2, j+3/2} + a_{i+1/2, j+3/2} m_{k, i+1/2, j+3/2} + \\ &+ a_{i+3/2, j+3/2} m_{k, i+3/2, j+3/2} + a_{i-1/2, j+1/2} m_{k, i-1/2, j+1/2} + a_{i+1/2, j+1/2} m_{k, i+1/2, j+1/2} + \\ &+ a_{i+3/2, j+1/2} m_{k, i+3/2, j+1/2} + a_{i-1/2, j-1/2} m_{k, i-1/2, j-1/2} + a_{i+1/2, j-1/2} m_{k, i+1/2, j-1/2} + \\ &+ a_{i+3/2, j-1/2} m_{k, i+3/2, j-1/2} \end{aligned}$$

с элементами матрицы  $A_{i+1/2, j+1/2}$ :

$$\begin{aligned} a_{i-1/2, j+3/2} &= a_{i+3/2, j-1/2} = 0; \quad a_{i+1/2, j+3/2} = a_{i+1/2, j-1/2} = -\sigma_1^2/2h_1^2 + |\gamma|\sigma_1\sigma_2/2h_1h_2; \\ a_{i-1/2, j+1/2} &= a_{i+3/2, j+1/2} = -\sigma_2^2/2h_2^2 + |\gamma|\sigma_1\sigma_2/2h_1h_2; \\ a_{i+3/2, j+3/2} &= a_{i-1/2, j-1/2} = -|\gamma|\sigma_1\sigma_2/2h_1h_2; \\ a_{i+1/2, j+1/2} &= 1/\tau + \sigma_1^2/h_1^2 + \sigma_2^2/h_2^2 - |\gamma|\sigma_1\sigma_2/h_1h_2. \end{aligned} \quad (27)$$

Коэффициенты  $\gamma_{k, i+1/2, j+1/2}^s$ ,  $s = 1, \dots, 5$  в (26) имеют вид

$$\begin{aligned} \gamma_{k, i+1/2, j+1/2}^1 &= \max \{0, \alpha_{k, i, j+1/2}/h_1\}, \quad \gamma_{k, i+1/2, j+1/2}^3 = \max \{0, -\alpha_{k, i+1, j+1/2}/h_1\}, \\ \gamma_{k, i+1/2, j+1/2}^4 &= \max \{0, \beta_{k, i+1/2, j}/h_2\}, \quad \gamma_{k, i+1/2, j+1/2}^5 = \max \{0, -\beta_{k, i+1/2, j+1}/h_2\}, \\ \gamma_{k, i+1/2, j+1/2}^2 &= 1/\tau - \gamma_{k, i+3/2, j+1/2}^1 - \gamma_{k, i-1/2, j+1/2}^3 - \gamma_{k, i+1/2, j+3/2}^4 - \gamma_{k, i+1/2, j-1/2}^5 \end{aligned} \quad (28)$$

$\forall i = 0, \dots, N_1 - 1, j = 0, \dots, N_2 - 1$ . В этом случае внедиагональные элементы матрицы в левой части (26) не положительны при выполнении условий

$$|\gamma|\sigma_2/\sigma_1 \leq h_2/h_1 \leq \sigma_2/|\gamma|\sigma_1.$$

Вычислительная схема для уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана со смешанной диффузией следует автоматически из сопряженности соответствующих дискретных

операторов уравнений ФПК и ГЯБ. В **разделе 5.2** также показаны оставшиеся условия сходимости построенных схем. Представлены оценки устойчивости для выбранных конечно-разностных схем, аналогичные (15), (16) и вычислительный алгоритм.

В **разделе 5.3** рассматривается численное решение задачи, предложенной в разделе 4.3.1 для ситуации, когда процесс эмиссии и процесс проведения переговоров имеют ненулевую корреляцию. Результаты показывают, что при выбранном уровне базового налога, агенты стремятся к проведению переговоров и торговле квотами на выбросы, в отличие от предыдущего случая, описанного в главе 4, что приводит к росту числа агентов с максимально разрешенным уровнем выбросов.

В **заключении** дано краткое обобщение полученных результатов. Отмечено, что в рамках работы создан программный комплекс, реализующий вычислительные схемы, предложенные в главах 2 – 5 для различных одномерных и двумерных моделей игр «среднего поля». Вместе с тем,

1. рассмотрены новые постановки, основанные на теории игр «среднего поля» и применимые к оптимизационным задачам с неквадратичным контролем и задачам с ограничениями на финальное состояние;
2. построенные модели адаптированы для применения в области экологии, экономики отдельных отраслей и регионов, для достижения заданных социальных и экономических целей и прогноза критических ситуаций;
3. предложены оригинальные численные схемы решения задач, описываемых как традиционными моделями игр «среднего поля», так и их некоторыми модификациями.

Также для предложенных вычислительных схем приведены оценки устойчивости; в приложениях продемонстрирован порядок аппроксимации. Приведены численные оценки сходимости на конкретных постановках задач.

В **приложениях А, В** рассмотрены вопросы аппроксимации предложенных в главах 2 и 5 разностных схем. **Приложение Б** содержит развернутое описание аппроксимационных матриц для двумерных ИСП. В **приложении Г** представлена копия свидетельства о регистрации программы для ЭВМ.

## Список опубликованных работ по теме диссертации

### Публикации в рецензируемых научных изданиях:

1. Kornienko V., Computation of Mean-Field Equilibria with Correlated Stochastic Processes / V. Shaydurov, S. Zhang, V. Kornienko // Lecture Notes in Computer Science. – 2019. – V. 11386. – P. 468-475. DOI: 10.1007/978-3-030-11539-5\_54
2. Kornienko V.S., “Mean Field Games” as mathematical models for control and optimization of business activity / V.V. Shaydurov, V.S. Kornienko // J. Sib. Fed. Univ. Humanit. soc. Science. – 2019 – V. 12(4). – P. 701–715. DOI: 10.17516/1997– 1370–0418.
3. Kornienko V., Approximations of two-dimensional Mean Field Games with nonsymmetric controls / V. Shaydurov, S. Zhang, V. Kornienko // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2020. – V. 367. – Art. № 112461. DOI: 10.1016/j.cam.2019.112461.
4. Kornienko V., Mean Field Game Problem with non-quadratic control function / V. Shaydurov, V. Kornienko // AIP Conference Proceedings. – 2019. – V. 2164. – Art. № 110012. DOI: 10.1063/1.5130857.
5. Корниенко В.С. Конечно-разностный аналог задачи равновесия «среднего поля» / Шайдуров В.В., Корниенко В.С., Кареева Е.Д. // Вычислительные технологии – 2020. – Т. 25, № 4. – С. 31-41. DOI: 10.25743/ICT.2020.25.4.004.
6. Kornienko V. The Euler-Lagrange Approximation of the Mean Field Game for the Planning Problem / Shaydurov V., Kornienko V., Zhang S. // Lobachevskii Journal of Mathematics – 2020. – Т. 41, № 12. – С. 2703-2714. DOI: 10.1134/S1995080220120380.
7. Kornienko V., A finite-difference solution of Mean Field problem with a predefined control resource / V. Shaydurov, V. Kornienko // AIP Conference Proceedings. – 2020. – V. 2302. – Art. № 110004. DOI: 10.1063/5.0033646.
8. Kornienko V., A finite-difference solution of mean field problem with the fractional derivative for subdiffusion / V. Shaydurov, S. Zhang, V. Kornienko // AIP Conference Proceedings. – 2020. – V. 2302. – Art. № 020001. DOI: 10.1063/5.0033606.

### Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ:

1. Корниенко В.С. Программный комплекс для оптимизации управления мультиагентной системой/ 20.01.2020/ Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020610341. Роспатент