На правах рукописи

Аверина Татьяна Александровна

АЛГОРИТМЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНОЙ СТРУКТУРОЙ

01.01.07 — вычислительная математика,

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск – 2022

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте Вычислительной Математики и Математической Геофизики Сибирского отделения Российской академии наук (ИВМиМГ СО РАН)

Научный консультант:
Михайлов Геннадий Алексеевич, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН

Официальные оппоненты:
Григорьев Юрий Николаевич
доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий».
Кузнецов Дмитрий Феликсович
доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого».
Учайкин Владимир Васильевич
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической физики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Ульяновский государственный университет».

Ведущая организация:
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Новосибирский государственный технический университет.

Защита состоится 22 июня 2022 г. в 15 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 003.061.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук (ИВМиМГ СО РАН) по адресу: 630090, Новосибирск, проспект Академика Лаврентьева, 6, конференц-зал ИВМиМГ; тел. +7(383)330-71-59.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИВМиМГ СО РАН https://icmmg.nsc.ru/ru.
Автореферат разослан 17 марта 2022 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 003.061.01, д.ф.-м.н. — Рогазинский Сергей Валентинович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследований, степень её разработанности. Теоретическая и практическая значимость работы.

Многие модели динамических систем в самых различных областях науки: радиотехнике, статистической механике, автоматическом управлении, физике, химии, медицине, теории надежности и т.д., можно описать стохастическими дифференциальными уравнениями (СДУ).

Сложности численного решения нелинейных систем СДУ с помощью уравнений Колмогорова или кумулянтных уравнений делают актуальной задачу построения численных методов решения СДУ. При этом актуальной является задача построения численных методов решения СДУ с хорошими свойствами устойчивости. Использование устойчивых (асимптотически несмещенных) методов необходимо для численного решения СДУ на больших интервалах времени, а также для решения задач, описывающих разномасштабные процессы. Устойчивые численные методы решения СДУ необходимы для решения достаточно широкого класса научных задач, связанных в том числе с исследованием фазовых переходов как процессов ассоциации частиц в кластеры. Такие задачи связаны со многими приложениями, такими как образование аэрозолей в атмосфере, конденсация в высокоскоростных потоках газов, истекающих из сопла, полимеризация и кристаллизация, осаждение паров металлов и др.

Знание интервала асимптотической несмещенности метода позволяет выбирать размер шага интегрирования, при котором не допускается большой потери точности вычислений в задачах, связанных с оценкой дисперсии решения СДУ. Однако, существующие устойчивые численные методы решения СДУ являются трудоемкими. Поэтому актуальной является задача построения экономичных устойчивых численных методов решения СДУ.

Одной из важных задач теории управления является синтез такого управления динамической системой, что при ее эволюции сохраняются важные характеристики системы. В реальном пространстве на динамическую систему оказывают влияние случайные факторы. Наиболее удачно это случайное воздействие можно описать с помощью винеровских и пуассоновских процессов. Появляются математические модели, для решения которых необходима разработка численных методов, сохраняющих важные характеристики системы (первые интегралы). Для решения таких задач также необходимы методы, позволяющие решать СДУ с пуассоновской составляющей, зависящей от вектора фазовых координат динамической системы. Возникает задача построения алгоритмов моделирования общего пуассоновского процесса, идентифицируемого с пуассоновской мерой, зависящей от времени и от вектора фазовых координат.

Важной областью применения численных методов решения СДУ стали системы со случайной структурой (ССС). Это динамические системы со случайными изменениями условий функционирования, приводящими к внезапному изменению структуры в целом - к структурной неопределенности. Это, например, задачи автоматизации управления системой, имеющей на неперекрывающихся временных интервалах различные режимы работы и разные структуры. В иностранной литературе ССС с распределенными переходами называют СДУ с переключаемой диффузией (switching diffusion) или гибридные системы (hybrid systems), подразумевая непрерывную динамику и дискретные события смены структуры. Если интенсивности перехода зависят от фазовых координат, то такие системы называют системами с распределенными зависимыми переходами. В последнее время появилось много таких систем в экономике, на производстве, в технике, в биологии и медицине. Сложность получаемых моделей затрудняет аналитическое исследование решений таких систем и делает особо актуальной разработку статистических алгоритмов.

Для моделирования процесса смены структуры, как и для моделирования СДУ с пуассоновской составляющей, возникает задача построения экономичных алгоритмов моделирования общего пуассоновского процесса, зависящего от времени и от фазовых координат. В связи с этим представляется значимым разработать новые экономичные устойчивые алгоритмы моделирования систем со случайной структурой с распределенными зависимыми и независимыми переходами, имеющие широкую область применения, в том числе в задачах анализа, фильтрации и автоматического управления динамическими объектами.

Цели и задачи диссертационной работы:

- построение устойчивых (асимптотически несмещенных) численных методов решения систем СДУ;
- построение экономичных алгоритмов моделирования общих пуассоновских процессов;
- применение разработанных методов к статистическому анализу СДУ с пуассоновской составляющей и систем со случайной структурой;
- верификация построенных алгоритмов, сравнение с известными алгоритмами на решении практических и тестовых задач.

Научная новизна

• Построено семейство численных методов решения систем СДУ в смысле Стратоновича. Исследована согласованность, устойчивость (асимптотическая несмещенность), слабая сходимость и сходимость в среднеквадратическом смысле численных методов из предложенного семейства.

• Доказано, что численный метод решения СДУ, имеющий сильную сходимость численного решения к точному, сохраняет порядок сходимости при решении систем СДУ с первым интегралом, и тем самым дает возможность эффективного тестирования численных методов решения СДУ.

• Построены модифицированные численные методы решения СДУ, сохраняющие первый интеграл. Предложенная методика обеспечивает принадлежность моделируемых траекторий решения СДУ заданному гладкому многообразию.

• Построены алгоритмы статистического моделирования неоднородных пуассоновских точечных ансамблей и исследованы их сравнительные трудоемкости.

• Проведено сравнение построенных численных методов решения СДУ с известными численными методами.

• С целью повышения эффективности моделирования пуассоновских ансамблей со сложной интенсивностью построен специальный экономичный способ моделирования последовательности дискретных случайных величин.

• На основе численных методов решения СДУ и алгоритмов моделирования пуассоновских точечных ансамблей построены статистические алгоритмы моделирования систем со случайной структурой.

Методология и методы исследования. В диссертационной работе использовались:

— аппарат теории методов Монте-Карло, включая теорию численных методов решения СДУ,

— аппарат теории вероятностей, теории случайных процессов.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Построено семейство численных методов решения СДУ в смысле Стратоновича, исследованы их устойчивость (асимптотическая несмещенность), среднеквадратическая и слабая сходимости.

2. Построены модифицированные алгоритмы решения СДУ, сохраняющие первый интеграл. Предложенная методика обеспечивает принадлежность моделируемых траекторий решения СДУ заданному гладкому многообразию.

3. Построены эффективные алгоритмы моделирования пуассоновских точечных ансамблей со сложной интенсивностью на основе экономичных методов моделирования распределений.

4. Построен алгоритм приближенного «цифрового» моделирования неоднородных пуассоновских точечных ансамблей и доказана соответствующая слабая сходимость.

5. Построены экономичные алгоритмы моделирования пуассоновских точечных потоков.

6. Построены эффективные алгоритмы моделирования систем со случайной структурой с распределенными, зависимыми от фазовых координат, переходами на основе модифицированного метода максимального сечения. Доказана соответствующая теорема сходимости.

7. Построены и теоретически обоснованы эффективные методы, использующие разработанные алгоритмы моделирования пуассоновских ансамблей, для численного решения СДУ с пуассоновской составляющей в случае, когда пуассоновская мера зависит от времени и от фазовых координат.

8. Разработанные алгоритмы и их обоснование продемонстрированы на примере решения тестовых и ряда модельных задач, имеющих прикладное значение. Решены задачи фильтрации диффузионно-скачкобразных процессов и непрерывных систем с марковскими переключениями, а также задачи, связанные с вопросами фазовых переходов.

Степень достоверности и апробация результатов.

Достоверность полученных результатов основана на строгих доказательствах основных положений и подтверждается численными расчетами. Верификация результатов проведена на решении модельных и прикладных задач.

Основные научные результаты диссертации докладывались и обсуждались на Общеинститутском научном семинаре Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (ИВМиМГ СО РАН), на объединенном семинаре ИВМиМГ СО РАН и кафедры вычислительной математики Механико-математического факультета Новосибирского государственного университета «Методы Монте-Карло в вычислительной математике и математической физике», а также на всероссийских и международных конференциях, в том числе: межд. конф. "Идентификация систем и задачи управления"(Москва 2003, 2004, 2005, 2006, 2012 гг.); межд. конф. по Вычислительной математике (Новосибирск 2002, 2004, 2011 гг.); межд. конф. IMACS Seminar on Monte Carlo Methods (Германия 2003 г.; Бельгия 2009 г.); межд. конф.по методам Монте-Карло и квази-Монте-Карло MC2QMC-2004 (Франция 2004 г.; Германия 2006 г.; Канада 2008 г.); межд. конф. "St.Petersburg Workshop on Simulations"(Санкт-Петербург, 2005, 2009 гг.); VII межд. конф. "Large-Scale Scientific Computations"(June 4-8, 2009, Sozopol, Bulgaria); межд. конф. "Актуальные проблемы математики, информатики, механики и теории управления"(Алматы, Казахстан, 2009); VII IMACS Seminar on Monte Carlo

Methods (Universite Libre de Bruxelles), Brussels, September 6-11, 2009; VII межд. конф. "Numerical Methods and Applications"(Бороветц, Болгария, 2010); межд. конф. "Информационные и вычислительные технологии и системы (ИКВТС-2010)"(Улан-Удэ, 2010 г.); межд. симп. "Обобщенные постановки и решения задач управления"(Улан-Батор, Монголия, 2010); межд. конф. "Мат. методы в технике и технологиях - ММТТ-24"(Киев, Украина, 2011); межд. конф. "Моделирование и оптимизация динамических систем и систем с распределенными параметрами"(Самара, 2011); межд. конф. "Разностные схемы и их приложения ИПМ РАН, (Москва, 27-31.05.13г.); intern. math. conf. «Bogolyubov readings DIF-2013. Dif. equations, theory of functions and their applications» 23–30.06.13, Sevastopol, Ukraine; межд. Азиатская школа-семинар по проблемам оптимизации сложных систем (Кыргызстан, 2014 г. и 2015 г.; Новосибирск, 2016 г., 2017 г. и 2019 г.); межд. конф. «Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем» (АЧМ-2015) г. Пенза, 28–30 октября 2015г. межд. конф. "Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики 19-23 октября 2015, Новосибирск, XV межд. конф. "Авиация и космонавтика 14-18 ноября 2016, Москва, МАИ; межд. конф. «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов для решения задач математической физики», 5-11 сентября 2016 г., Новороссийск, Абрау-Дюрсо XX межд. конф. по вычислительной механике и современным прикладным системам (ВМСППС'2017, Алушта, 24-31.05.2017г.); межд. конф.по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу, г. Звенигород, Моск. Обл., 13-17 февраля 2017 г.; межд. конф. «Вычислительная и прикладная математика 2017» (ВПМ'17), 25-30 июня, 2017, Академгородок, Новосибирск; межд. конф. «Математика в современном мире», посвященную 60-летию образования Института математики, г. Новосибирск, 14 -19 августа 2017 г; XI Всерос. конф. с межд. участием "Мат. моделирование и краевые задачи"(27 -30 мая 2019, Самара; межд. конф. «Марчуковские научные чтения» (Академгородок, Новосибирск, 2019, 2020, 2021); Applied Methods of Statistical Analysis. Statistical Computation and Simulation, Int. Workshop 18-20 September, 2019. NSTU; межд. конф. «Колмогоровские чтения–IX. Общие проблемы управления и их приложения» (ОПУ – 2020), (Тамбов, 12 – 16 октября 2020 г.); Евразийская конф. по прикладной математике Новосибирск, Академгородок, 16-21 декабря 2021 г.

Личный вклад автора. Все основные научные результаты диссертационной работы получены лично автором или при его непосредственном участии. В частности, вклад автора диссертационного исследования был определяющим при разработке, теоретическом и численном исследовании предложенных алгоритмов моделирования. Конфликт интересов с соавторами отсутствует.

Публикации. По теме диссертационной работы Авериной Т.А. опубликовано более 50 печатных работах, в том числе одна монографии, 2 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ. Основные результаты диссертации опубликованы в журналах из списка ВАК [1-22].

Благодарности. Автор выражает искреннюю признательность и благодарность своему научному консультанту члену-корреспонденту РАН, д.ф.-м.н. Михайлову Г.А. за многолетнюю поддержку, постоянное внимание к работе и ценные рекомендации. Автору приятно выразить глубокую благодарность всем коллегам в ИВМиМГ СО РАН за профессиональные советы и создание доброжелательной атмосферы, способствующей проведению научных исследований.

Структура и объем. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения, списка литературы. Диссертация изложена на 288 страницах, включает библиографический список из 402 наименований, содержит 60 рисунков и 49 таблиц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, цель и задачи исследования, дается краткий обзор литературы по изучаемым в диссертации вопросам.

Глава 1 диссертационной работы посвящена вопросам численного решения задачи Коши для систем СДУ. Результаты первой главы опубликованы и использованы в работах автора [1, 5, 12, 13, 20-22]. В параграфе 1.1 вводятся необходимые в дальнейшем определения.

Зададим на полном вероятностном пространстве $\{\Omega, \Im, P\}$ с потоком σ-алгебр $\{\Im_t\}_{t\in[0,T]}$

- согласованный с $\{\Im_t\}_{t\in[0,T]}$ n_w-мерный стандартный винеровский процесс $\mathbf{w}(t)$, $t \in [0, T]$;
- $\Im_0$ – измеримый n_y-мерный случайный вектор $\mathbf{y_0}$, независимый с $\mathbf{w}(t)$ при $t \geq 0$, причем $\mathrm{E}(|\mathbf{y}_0|^2) < \infty$.
- n_y-мерная вектор-функция $f(t, \mathbf{y})$, измеримая по совокупности переменных,
- матричная функция $\sigma(t, \mathbf{y})$ размера $n_y \times n_w$ измеримая по совокупности переменных (($\sigma_{\cdot j}$ – j-й столбец матрицы σ).

Задача Коши для системы СДУ ставится следующим образом: найти n_y-мерный согласованный с потоком $\{\Im_t\}_{t\in[0,T]}$ случайный процесс $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), ..., y_{n_y}(t))^\top$, для которого с вероятностью 1 для всех $t \in [0, T]$ выполняется равенство

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_0^t f(\tau, \mathbf{y}(\tau))d\tau + \sum_{j=1}^{n_w} \int_0^t \sigma_{\cdot j}(\tau, \mathbf{y}(\tau))dw_j(\tau), \quad t \in [0, T], \tag{1.1}$$

где стохастический интеграл понимается в смысле Ито или в смысле Стратоновича. Для стохастического интеграла в смысле Стратоновича принято обозначение $\int_0^t \sigma(\tau, \mathbf{y}(\tau)) \circ d\mathbf{w}(\tau)$.

В параграфе 1.2 для статистического моделирования траекторий решения однородных по времени систем СДУ в смысле Стратоновича

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_0^t f(\mathbf{y}(\tau))d\tau + \sum_{j=1}^{n_w} \int_0^t \sigma_{\cdot j}(\mathbf{y}(\tau)) \circ dw_j(\tau), \quad t \in [0, T], \tag{1.2}$$

приводится общий вид семейства численных методов:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + p_1 k_1 + p_2 k_2 + \sqrt{h}(q_{11}G_0 + q_{12}G_1 + q_{13}G_2)\zeta_n, \tag{1.3}$$

$$G_0 = \sigma(\mathbf{y}_n), \quad k_1 = [I - ha\frac{\partial f}{\partial y}]^{-1}[hf + q_1\sqrt{h}G_0\zeta_n + \frac{q_2 h}{2}\frac{\partial \sigma}{\partial y}\sigma\zeta_n^2],$$

$$G_1 = \sigma\Big(\mathbf{y}_n + \alpha_1 k_1 + q_3\sqrt{h}G_0\zeta_n + \frac{q_4 h}{2}\frac{\partial \sigma}{\partial y}\sigma\zeta_n^2\Big),$$

$$k_2 = [I - ha\frac{\partial f}{\partial y}]^{-1}\Big[hf\Big(\mathbf{y}_n + \alpha_2 k_1 + q_5\sqrt{h}G_0\zeta_n + \frac{q_6 h}{2}\frac{\partial \sigma}{\partial y}\sigma\zeta_n^2\Big) +$$

$$+ q_7\sqrt{h}G_1\zeta_n + \frac{q_8 h}{2}\frac{\partial \sigma}{\partial y}\sigma\zeta_n^2\Big],$$

$$G_2 = \sigma\Big(\mathbf{y}_n + \alpha_3 k_1 + \alpha_4 k_2 + q_9\sqrt{h}G_1\zeta_n + \frac{q_{10} h}{2}\frac{\partial \sigma}{\partial y}\sigma\zeta_n^2\Big).$$

Здесь все значения функций, у которых не указан аргумент, вычисляются в точке $\mathbf{y}_n$, где $\mathbf{y}_n$, $n = 0, 1, \ldots, K$, – значения приближенного решения системы СДУ (1.2) в узлах сетки по времени $t_n = t_0 + nh$; h – шаг интегрирования; a, p_i, q_i, α_i – вещественные параметры метода; ζ_n – n_w-мерный вектор независимых гауссовских случайных величин с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией; $\{\zeta_n\}$ независимы с $\{\mathbf{y}_n\}$;

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y}\sigma\zeta_n^2 = \sum_{j_1=1}^{n_w}\sum_{j_2=1}^{n_w}\sum_{i=1}^{n_y} \frac{\partial \sigma_{\cdot j_1}}{\partial y_i}\sigma_{ij_2}\zeta_{j_1 n}\zeta_{j_2 n}. \tag{1.4}$$

Данное семейство является обобщением методов Розенброка на случай СДУ. Методы Розенброка являются А-устойчивыми. А-устойчивость методов Розенброка достигается с помощью параметра a. Наличие параметра

a в обобщенных методах Розенброка также позволяет улучшить их свойства устойчивости. Здесь же приводятся необходимые определения устойчивости (асимптотической несмещенности), аппроксимации и сходимости численных методов [1].

Определение 1.1. Численный метод называется устойчивым (*асимптотически несмещенным*) в интервале $(x_0, 0)$, если при его применении к модельному СДУ

$$dy(t) = -\alpha y(t)dt + \sigma dw(t), \quad \alpha > 0, \quad \sigma = const, \quad y(0) = y_0, \tag{1.5}$$

с фиксированным шагом $h > 0$ таким, что $-\alpha h \in (x_0, 0)$, распределение численного решения y_n при $n \to \infty$ сходится к гауссовскому распределению с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2/2\alpha$. Интервал $(x_0, 0)$ называется *интервалом асимптотической несмещенности* метода.

Свойство асимптотической несмещенности метода согласуется с асимптотиеским поведением точного решения СДУ (1.5).

Определение 1.2. Численный метод называется γ-*асимптотически смещенным* в интервале $(x_0, 0)$, если при его применении к модельному СДУ (1.5) с фиксированным шагом h таким, что $-\alpha h \in (x_0, 0)$, распределение численного решения y_n при $n \to \infty$ сходится к гауссовскому распределению с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\bar{d}$, причем $\left|\bar{d}/\Big(\sigma^2/(2\alpha)\Big) - 1\right| \leq \gamma$.

В параграфе 1.2.1 построены разложения в ряд Тейлора точного и численного решений задачи Коши для системы СДУ в смысле Стратоновича. Параметры методов выбираются из требований устойчивости методов и аппроксимации первых двух моментов точного решения со вторым порядком. Параметров оказывается больше, чем уравнений и поэтому часть параметров выбирается свободными, а остальные выражаются явно через них. Записаны уравнения согласованности, получено общее решение. В параграфе 1.2.2 исследована асимптотическая несмещенность, аппроксимация и сходимость численных методов из семейства (1.3). Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1.1. *Семейство численных методов* (1.3) *содержит асимптотически несмещенные и γ-асимптотически смещенные численные методы. Асимптотически несмещенные численные методы из семейства* (1.3) *могут иметь только бесконечный интервал асимптотической несмещенности.*

[1] Artemiev S. S., Averina T. A. Numerical Analysis Systems of Ordinary and Stochastic Differential Equations. Utrecht, The Netherlands: VSP, 1997; Кузнецов Д. Ф. Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. СПб.: Изд-во Политехнического ун-та, 2009.

Теорема 1.2. *Семейство численных методов* (1.3) *содержит подмножество численных методов, имеющих первый порядок среднеквадратической сходимости для произвольных систем СДУ и второй порядок для систем СДУ с одним шумом, а также в случае систем СДУ с постоянной матрицей* σ.

Теорема 1.3. *Семейство численных методов* (1.3) *содержит подмножество* γ*-асимптотически смещенных методов, имеющих второй порядок аппроксимации первых двух моментов в скалярном случае и для систем СДУ с постоянной матрицей* σ.

Теорема 1.4. *Семейство численных методов* (1.3) *содержит*

а) подмножество численных методов, имеющих первый порядок слабой сходимости.

б) подмножество γ*-асимптотически смещенных методов, имеющих второй порядок слабой сходимости в скалярном случае и для систем СДУ с постоянной матрицей* σ.

В параграфе 1.2.3 построены конкретные численные методы решения СДУ в смысле Стратоновича.

У построенных методов параметр a определяет интервал γ-асимптотической смещенности. Например,
1) при $a = 1/4$ интервал 0.05-асимптотической смещенности $(-0.91, 0)$;
2) при $a = 1/3$ интервал 0.05-асимптотической смещенности $(-1.53, 0)$;
3) при $a = 3/8$ интервал 0.05-асимптотической смещенности $(-1.79, 0)$.
Заметим, что у метода Эйлера–Маруямы интервал 0.05-асимптотической смещенности $(-0.095, 0)$.

В некоторых задачах весьма затруднительно вычисление производных. Такие задачи можно решать методом из семейства (1.3) без вычисления производных, положив $a = q_2 = q_4 = q_6 = q_8 = q_{10} = 0$:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) + \sqrt{h}(\frac{1}{6}G_0 + \frac{2}{3}G_1 + \frac{1}{6}G_2)\zeta_n,\\
&k_1 = f(\mathbf{y}_n), \quad k_2 = f(\mathbf{y}_n + hk_1 + \sqrt{h}G_0\zeta_n),\\
&G_0 = \sigma(\mathbf{y}_n), \quad G_1 = \sigma(\mathbf{y}_n + \frac{3}{4}hk_1 + \frac{1}{2}\sqrt{h}G_0\zeta_n),\\
&G_2 = \sigma(\mathbf{y}_n + \frac{3}{2}h(k_2 - k_1) + \sqrt{h}(2G_1 - G_0)\zeta_n).
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Интервал 0.05-асимптотической смещенности $(-0.4, 0)$.

Приведем метод со вторым порядком слабой сходимости в скалярном случае:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{7}{8}k_1 + \frac{1}{8}k_2 + \frac{3}{8}\sqrt{h}(\sigma(\mathbf{y}^p_{n+1}) - \sigma(\mathbf{y}_n))\zeta_n, \quad \mathbf{y}^p_{n+1} = \mathbf{y}_n + k_1,\\
&k_1 = [I - \frac{3h}{8}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}]^{-1}[hf(\mathbf{y}_n) + \sqrt{h}\sigma(\mathbf{y}_n)\zeta_n],\\
&k_2 = [I - \frac{3h}{8}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}]^{-1}[hf(\mathbf{y}^p_{n+1}) + \sqrt{h}\sigma(\mathbf{y}^p_{n+1})\zeta_n]
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

и метод со вторым порядком слабой сходимости для систем СДУ с постоянной матрицей σ:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{1}{32}k_1 + \frac{31}{32}k_2 + \frac{3}{32}\sqrt{h}(\sigma(\mathbf{y}^p_{n+1}) - \sigma(\mathbf{y}_n))\zeta_n,\ \mathbf{y}^p_{n+1} = \mathbf{y}_n + 4k_1,\\
&k_1 = [I - \frac{3h}{8}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}]^{-1}[hf(\mathbf{y}_n) + \sqrt{h}\sigma(\mathbf{y}_n)\zeta_n],\\
&k_2 = [I - \frac{3h}{8}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}]^{-1}[hf(\mathbf{y}^p_{n+1}) + \sqrt{h}\sigma(\mathbf{y}^p_{n+1})\zeta_n].
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

Возможно построение целого семейства асимптотически несмещенных методов с первым порядком аппроксимации первых двух моментов. Приведем пример асимптотически несмещенного численного метода, в котором не требуется вычисления производной матрицы σ и который при решении обыкновенных дифференциальных уравнений имеет второй порядок сходимости:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \left[I - \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}_n)\right]^{-1}\frac{h}{2}\left(f(\mathbf{y}_n) + f(\mathbf{y}^p_n)\right) + \frac{\sqrt{h}}{2}\left(\sigma(\mathbf{y}_n) + \sigma(\mathbf{y}^p_n)\right)\zeta_n,\\
&\mathbf{y}^p_n = \mathbf{y}_n + \sqrt{h}\sigma(\mathbf{y}_n)\zeta_n.
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

Согласно теореме 1.2, все рассмотренные в данном параграфе методы имеют первый порядок среднеквадратической сходимости для произвольных систем СДУ и второй порядок для систем СДУ с одним шумом, а также в случае систем СДУ с постоянной матрицей σ.

В параграфе 1.3 рассмотрен вопрос решения СДУ с пуассоновской составляющей. Задача Коши для систем СДУ с пуассоновской составляющей имеет вид

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t_0) + \int_0^t f(\tau, \mathbf{y}(\tau))d\tau + \sum_{j=1}^{n_w}\int_0^t \sigma_{\cdot j}(\tau, \mathbf{y}(\tau))dw_j(\tau) +\\
+ \int_0^t\int_\Gamma v(\tau, \mathbf{y}(\tau^-), \theta)\nu(d\theta \times d\tau), \quad t \in [0, T],
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

ν – согласованная с потоком $\Im_t$ пуассоновская случайная мера на измеримом пространстве $[0,T] \times \Gamma$, которая задана характеристической мерой

Π, $\Pi(\Gamma) < \infty$; $v(t, \mathbf{y}, \theta)$ - n_y-мерная вектор-функция, измеримая по совокупности переменных, $\mathbf{y}(t^-)$ обозначает значение решения в точке t слева; остальные обозначения такие же, как в (1.2).

Стохастический интеграл по пуассоновской случайной мере ν определяется следующим образом:

$$\int_0^t \int_\Gamma v(\tau, \mathbf{y}(\tau^-), \theta)\nu(d\theta \times d\tau) = \sum_{\tau_k < t} v(\tau_k, \mathbf{y}(\tau_k^-), \theta_k), \qquad (1.11)$$

если $\sum_k |v(\tau_k, \mathbf{y}(\tau_k^-), \theta_k)| < \infty$. Во многих практических задачах мера Π может зависеть как от времени, так и от фазовых координат $\Pi(t, \mathbf{y}(t), \Gamma)$. Пуассоновскую случайную меру можно идентифицировать с общим пуассоновским процессом[2] $Q(t) = \Sigma_{k-1}^{P(t)} \theta_k$. где $P(t)$ – пуассоновский процесс интенсивности $\lambda(t, \mathbf{y}(t)) = \Pi(t, \mathbf{y}(t), \Gamma)$, $\{\theta_k\}$ – последовательность независимых случайных векторов, распределенных по закону
$P(\theta_k \in d\theta | \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}) = \Pi(t, \mathbf{y}, d\theta)/\Pi(t, \mathbf{y}, \Gamma)$ (т.е. с плотностью
$p(\theta | \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}) = \pi(t, \mathbf{y}, \theta)/\Pi(t, \mathbf{y}, \Gamma)$, если $\Pi(t, \mathbf{y}, \Gamma) = \int_\Gamma \pi(t, \mathbf{y}, \theta) d\theta)$.

Таким образом, моделируя соответствующий общий пуассоновский процесс $Q(t)$, численное решение задачи (1.10) вычисляется согласно

$$\mathbf{y}_{n+1} = \begin{cases} \bar{\mathbf{y}}_{n+1}, & \text{если} \quad t_{n+1} = \tau_k - \text{ не момент скачка,} \\ \bar{\mathbf{y}}_{n+1} + v(\tau_k, \bar{\mathbf{y}}_{n+1}, \theta_k), \text{если} & t_{n+1} = \tau_k - \text{момент скачка,} \end{cases}$$

где $\bar{\mathbf{y}}_{n+1}$ – численное решение в точке t_{n+1}, полученное любым численным методом решения (1.1). Временная сетка адаптирована к скачку и включает моменты скачков. В следующей главе построены экономичные алгоритмы моделирования общих пуассоновских процессов.

Завершает первую главу параграф 1.4, в котором рассматриваются СДУ с первым интегралом. Рассматривается модель динамической системы, заданная векторным СДУ в смысле Стратоновича:

$$d\mathbf{y}(t) = f\big(t, \mathbf{y}(t)\big)dt + \sigma\big(t, \mathbf{y}(t)\big) \circ d\mathbf{w}(t), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \qquad (1.12)$$

Определение 1.3. Неслучайная функция $M(t, \mathbf{y})$ называется первым (детерминированным) интегралом[3] для системы (1.12), если она не равна постоянной и с вероятностью 1 на любой траектории решения уравнения (1.12) принимает постоянное значение, зависящее только от $\mathbf{y}_0 \in R^{n_y}$.

При численном решении многих задач управления интересует точность попадания на многообразие, а именно

[2] Пугачев В. С., Синицын И. Н. Теория стохастических систем. М.: Логос, 2000. Hanson F. B. Applied Stochastic Processes and Control for Jump-Diffusions: Modeling, Analysis and Computation. SIAM, 2007.

[3] Дубко В.А. Интегральные инварианты для одного класса систем стохастических дифференциальных уравнений // Доклады АН УССР. Серия А, 1984. № 1. С. 18–21.

$$\mathrm{E}\big[|M\big(t_n, \mathbf{y}(t_n)\big) - M(t_n, \mathbf{y}_n)|\big], \quad n = 1, \ldots, N.$$

Теорема 1.5. *Пусть* $M(t, \mathbf{y}) \in C^{1,2}_{t,\mathbf{y}}([t_0, T] \times R^{n_y})$ *— скалярная неслучайная функция, которая является первым интегралом системы СДУ в смысле Стратоновича* (1.12), *причем*

$$\left|\frac{\partial M(T, y)}{\partial y_i}\right| \leq M^*, \quad i = 1, 2, \ldots, n_y. \tag{1.13}$$

Если численный метод решения (1.12) *имеет p-й порядок сильной сходимости, то справедливо*

$$\varepsilon_{\mathcal{M}} = \mathrm{E}\big[|M\big(T, \mathbf{y}(T)\big) - M(T, \mathbf{y}_N)|\big] = O(h^p), \quad h \to 0. \tag{1.14}$$

Полученный результат верен для максимального среднего отклонения во всех узлах сетки, т.е.

$$\varepsilon = \max_{0 \leq n \leq N} \mathrm{E}\big[|\mathbf{y}(t_n) - \mathbf{y}_n|\big] = O(h^p), \quad h \to 0,$$

$$\varepsilon_{\mathcal{M}} = \max_{0 \leq n \leq N} \mathrm{E}\big[|M\big(t_n, \mathbf{y}(t_n)\big) - M(t_n, \mathbf{y}_n)|\big] = O(h^p), \quad h \to 0.$$

Поскольку из-за погрешности численного метода решение не остается на многообразии, построена методика коррекции численного метода, позволяющая оставаться решению на многообразии.

Утверждение. *Пусть СДУ в смысле Стратоновича имеет первый интеграл* $M(t, \mathbf{y}) = C$, $M(t, \mathbf{y}) \in C^{1,1}([t_0, T] \times R^{n_y})$ *и частные производные функции* $M(t, \mathbf{y})$ *по координатам вектора* $\mathbf{y}$ *ограничены, т.е.* $|\nabla M(t, \mathbf{y})| < M^*$; $\mathbf{y}_{n+1}$ *— численное решение в момент времени* t_{k+1}, *имеющее p-й порядок потраекторной аппроксимации, т.е.*

$$\mathrm{E}\big(|\mathbf{y}(t_{n+1}) - \mathbf{y}_{n+1}|/\mathbf{y}_n = \mathbf{y}(t_n)\big) = O(h^p) \quad \textit{при} \quad h \to 0, \tag{1.15}$$

причем $M(t_n, \mathbf{y}_n) = C$, $M(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}) = C' \neq C$.

Тогда коррекция численного решения $\tilde{\mathbf{y}}_{n+1}$ *в момент времени* t_{n+1}

$$\tilde{\mathbf{y}}_{n+1} = \mathbf{y}_{n+1} + \alpha^* \nabla M(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}), \tag{1.16}$$

где α^* *удовлетворяет условию* $\alpha^* = \arg\min\limits_{\alpha}\big\{|\alpha| \colon M\big(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1} + \alpha \nabla M(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1})\big) = C\big\}$, *лежит на поверхности* $M(t, \mathbf{y}) = C$ *и сохраняет порядок потраекторной аппроксимации решения.*

Проекцию (1.16) следует находить на каждом шаге используемого численного метода решения СДУ, учитывая, что α^* — это функция точки $(t, \mathbf{y})$.

Глава 2 посвящена построению и сравнительному анализу трудоемкости алгоритмов численного статистического моделирования неоднородных пуассоновских точечных ансамблей. Данные алгоритмы потребуются для решения СДУ с пуассоновской составляющей и систем со случайной структурой (с распределенными переходами и с разделением времени). Результаты второй главы опубликованы и использованы в работах автора [1, 2, 4, 7-9, 14-17, 20, 21]. Неоднородный *пуассоновский точечный ансамбль*

$$X(V) = (x_1, \dots, x_{\nu(V)}), \quad x_i \in V,$$

с функцией интенсивности $\lambda(y) \geq 0$ и мерой интенсивности $\Lambda(V) = \int_V \lambda(y) dy$ определяется соотношениями

$$P(\nu(V) = k) = e^{-\Lambda(V)} \frac{(\Lambda(V))^k}{k!}, \quad \mathrm{E}(\nu(V)) = D(\nu(V)) = \Lambda(V), \quad k = 0, 1, 2, ..., \tag{2.1}$$

где V - произвольная область евклидова пространства R^n, имеющая конечную меру интенсивности $\Lambda(V) < \infty$. Случайные переменные $\nu(V_1), \nu(V_2)$ независимы для непересекающихся множеств V_1, V_2. Пуассоновский точечный ансамбль полностью определяется своей мерой интенсивности, допускает «суперпозицию» и «прореживание». Известен следующий рандомизированный алгоритм построения пуассоновского точечного ансамбля с интенсивностью $\lambda(x)$:

– *реализуется целочисленная случайная величина $\nu(V)$ с распределением* (2.1);

– *если $\nu(V) = k$, то независимо реализуются k точек $\{x_i\}$, $i = 1 \dots, k$, соответственно плотности*

$$f(x) = \frac{\lambda(x)}{\Lambda(V)}, \quad x \in V. \tag{2.2}$$

В параграфе 2.1, с целью повышения эффективности моделирования пуассоновских точечных ансамблей со сложной интенсивностью, рассмотрены два экономичных способа моделирования последовательности независимых дискретных случайных величин. Доказана теорема, в которой формулируется и обосновывается в многоэтапном варианте специальный способ моделирования независимых дискретных случайных величин с использованием одного базового случайного числа.

Теорема 2.6. *Пусть задан набор $\{p^{(i)}\}$, $p^{(i)} \in (0, 1)$, и построены последовательности случайных величин $\{\beta^{(i)}\}$:*

$$\beta^{(1)} = \alpha, \quad \beta^{(i+1)} = \begin{cases} \dfrac{\beta^{(i)}}{p^{(i)}}, & \textit{если} \quad \beta^{(i)} \in \Delta_1^{(i)} = (0, p^{(i)}), \\ \dfrac{\beta^{(i)} - p^{(i)}}{1 - p^{(i)}}, & \textit{если} \quad \beta^{(i)} \in \Delta_2^{(i)} = (p^{(i)}, 1), \end{cases}$$

и $\{\eta^{(i)}\}$*:*

$$\eta^{(i)} = v_j, \quad \textit{если} \quad \beta^{(i)} \in \Delta_j^{(i)}, \quad j = 1, 2,$$

где α *– равномерно распределенная случайная величина в интервале* $(0,1)$*,* $i = 1, 2, \ldots$ *Тогда для любого натурального* k *верно следующее:*
1) случайные величины $\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \ldots, \beta^{(k+1)}$ *являются равномерно распределенными в интервале* $(0,1)$*;*
2) случайные величины $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots, \eta^{(k)}$ *имеют распределение Бернулли с параметрами* $p^{(1)}$*,* $p^{(2)}$*, …,* $p^{(k)}$ *соответственно;*
3) случайные величины $\eta^{(1)}$*,…,* $\eta^{(k)}$*,* $\beta^{(k+1)}$ *являются независимыми.*

Данная методика обобщена для моделирования независимых дискретных случайных величин $\{\eta^{(i)}\}$ с распределением

$$\mathrm{P}(\eta^{(i)} = v_j^{(i)}) = p_j^{(i)}, \ \ j = 1, \ldots, M^{(i)}, \ \ M^{(i)} < \infty, \ \ \sum_{j=1}^{M^{(i)}} p_j^{(i)} = 1, \ \ i = 1, 2, \ldots \tag{2.3}$$

Рассмотрен вопрос об ограничении на длину моделируемой последовательности в предлагаемом способе численной реализации выборочных значений случайных величин.

Если компьютер экономно реализует последовательности $\{\eta_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, независимых стандартных случайных «битов» таких, что $\mathrm{P}(\eta_k = 1) = \mathrm{P}(\eta_k = 0) = 1/2$, то с помощью логических операций на этой основе можно получать последовательности бернуллиевских независимых случайных «битов» с

$$\mathrm{P}(\eta_k = 1) = 0_2 p^{(1)} \ldots\, p^{(m)} = p^{(1)} 2^{-1} + \cdots + p^{(m)} 2^{-m},$$

где $p^{(i)}$ – значение i-го двоичного разряда, равное 0 или 1 (метод А.А. Сидорова[4]). Для этого используется представление

$$\eta_k = \alpha_1^{(k)} \delta[p^{(1)}] \alpha_2^{(k)} \delta[p^{(2)}] \ldots\, \alpha_m^{(k)} \delta[p^{(m)}] 0, \quad \delta[x] = \begin{cases} \wedge, & \text{при } x = 0, \\ \vee, & \text{при } x = 1, \end{cases} \tag{2.4}$$

где α_i – последовательность независимых случайных величин, равномерно распределенных в $(0,1)$, записанных в двоичной системе исчисления

[4]Михайлов Г. А. Некоторые вопросы теории методов Монте-Карло. Новосибирск: Наука, 1974.

$\alpha_i = 0_2\alpha_i^{(1)} \ldots\ \alpha_i^{(k)} \ldots,\ i = 1, \ldots, m$. Этот алгоритм особенно удобен для использования на компьютерах типа квантовых, в которых предусмотрена реализация стандартных случайных «битов».

В параграфе 2.2 построены экономичные алгоритмы статистического моделирования неоднородного пуассоновского ансамбля в случае сложной для моделирования плотности $f(x)$ (2.2). Рассмотрены два вида такой плотности:

I) *существует мажоранта $\lambda_0(x) \geq \lambda(x)$, $x \in V$, такая что плотность*

$$f_0(x) = \frac{\lambda_0(x)}{\Lambda_0(V)}, \quad x \in V \tag{2.5}$$

допускает эффективный алгоритм моделирования;

II) *функция интенсивности допускает «расслоение»:*

$$\lambda(x) = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i(x), \tag{2.6}$$

и существуют эффективные алгоритмы моделирования плотностей $f_i(x) = \lambda_i(x)/\Lambda_i$.

Построены следующие алгоритмы.

Алгоритмы, использующие свойства пуассоновских точечных ансамблей:

1. «Алгоритм исключения из реализации ансамбля», в случае (**I**) существования мажоранты, использующий свойство «прореживания».

2. «Алгоритм суперпозиции ансамблей», в случае (**II**) «расслоения» функции интенсивности, использующий свойство «суперпозиции» пуассоновских точечных ансамблей. Этот алгоритм можно использовать и в случае $M = +\infty$.

Алгоритмы, использующие специальные методы моделирования распределений.

1. «Алгоритм мажорантного метода исключения», в случае (**I**) существования мажоранты, использующий мажорантный метод исключения для моделирования распределения с плотностью (2.2).

2. «Алгоритм суперпозиции распределений» в случае (**II**) «расслоения» функции интенсивности, использующий метод суперпозиции.

Показано, что трудоемкость алгоритмов, использующих специальные методы моделирования распределений меньше, чем трудоемкость алгоритмов, использующих свойства пуассоновских точечных ансамблей.

Уменьшить трудоемкость «алгоритма суперпозиции распределений» можно, используя модифицированный метод суперпозиции. Использование модифицированного метода исключения одинаково улучшает «алгоритм исключения из реализации ансамбля» и «алгоритм мажорантного метода исключения».

Рассмотрен способ построения приближенного алгоритма моделирования пуассоновских точечных ансамблей. Для простоты изложения приближенного алгоритма в качестве области V рассмотрено ограниченное множество $L_n = [0, a]^n \subset R^n$.

Пусть $\lambda(x) \leq \lambda_0 \ \forall \ x \in V$. Алгоритм приближенного моделирования пуассоновского точечного ансамбля с функцией интенсивности $\lambda(x)$ конструируется следующим образом:

1) задается прямоугольная сетка с ячейками объема ΔV, причем число ячеек равно $n_\Delta(V)$;
2) моделируются независимые бернуллиевские случайные величины $\{\eta_i\}$ с параметром $p = \lambda_0 \Delta V$, $i = 1, \ldots, n_\Delta(V)$; при этом $\eta_i = 1$ означает, что точка x_i (центральная точка i-й ячейки) реализована;
3) точки, в которых $\eta_i = 1$, с вероятностью $p_i = 1 - \lambda(x_i)/\lambda_0$ исключается;
4) из оставшихся точек строится требуемая реализация ΔV-пуассоновского точечного ансамбля:

$$X_\Delta(V) = (x_1, \ldots, x_{\nu_\Delta(V)}), \quad \nu_\Delta(V) \leq n_\Delta(V).$$

Последовательность независимых бернуллиевских случайных величин и исключений в этом алгоритме целесообразно моделировать, используя одно значение случайного числа α, как указано в теореме 2.6.

Теорема 2.7. *Случайный ΔV-пуассоновский точечный ансамбль $X_\Delta(V)$ слабо сходится к пуассоновскому точечному ансамблю $X(V)$ интенсивности λ при $\Delta V \to 0$.*

Слабая сходимость точечных случайных мер означает слабую сходимость распределений функционалов вида

$$\int_V f(x) \nu_\Delta(dx),$$

где $f(x)$ – непрерывная неотрицательная функция [5].

Можно построить следующий экономичный способ построения «цифрового» ΔV-пуассоновского точечного ансамбля. Пусть λ_0 – константа с конечным числом двоичных разрядов и

[5] Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. М.:Физматлит,2005.

$$p = \lambda_0 \Delta V = \lambda_0 2^{-k(\Delta V)} = 0_2 p^{(1)} ... p^{(m)}, \qquad k(\Delta V) \in \mathbb{N}, \tag{2.7}$$

где $k(\Delta V) \asymp |\ln(\Delta V)|$ и $m = k(\Delta V) + C = O(k(\Delta V))$. Тогда, если в п. 2 алгоритма моделирование $\{\eta_i\}$ производить на основе представлений (2.4), то моделирование ΔV-ансамбля осуществляется с трудоемкостью порядка $\mathrm{O}\big(|\ln(\Delta V)|\big)$.

Построенные алгоритмы моделирования пуассоновских точечных ансамблей применимы для моделирования пуассоновских точечных потоков и общих пуассоновских процессов.

Параграф 2.3 посвящен построению и исследованию двух дополнительных алгоритмов моделирования пуассоновских точечных потоков, а также их оптимизации.

1. Модифицированный метод «максимального сечения» (метод выравнивания). Интенсивность $\lambda(t)$, $t > 0$, пуассоновского процесса определяет обобщенное экспоненциальное распределение времени ожидания τ следующей точки (после точки t')

$$f(u|t') = \lambda(t'+u)\exp(-\int_0^u \lambda(t'+s)ds), \quad u > 0, \quad \lambda(u) > 0. \tag{2.8}$$

Предположим, что

$$\lambda(t) \le \lambda_m(t) < c < +\infty,$$

Для метода максимального сечения [6] с использованием теоремы 2.6 построена экономичная модификация, использующая одно псевдослучайное число α:

Пусть $\zeta_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, *где* ξ_k *– последовательность случайных величин, распределенных с условными плотностями*

$$f_m(u; \zeta_{k-1}) = \lambda_m(\zeta_{k-1}+u)\exp(-\int_0^u \lambda_m(\zeta_{k-1}+s)ds),$$

и пусть

$$N = \min\{n : 1-\alpha > \prod_{k=1}^n (1 - \frac{\lambda(\zeta_k)}{\lambda_m(\zeta_k)})\}. \tag{2.9}$$

Тогда τ *имеет обобщенное экспоненциальное распределение.*

2. Приближенные алгоритмы моделирования пуассоновского процесса. Неоднородный пуассоновский процесс $P(t)$ интенсивности $\lambda(t)$ обладает следующим свойством ординарности:

$$\mathrm{P}\big(P(t+h) - P(t) = 1\big) = \lambda(t)h + o(h), \quad h \to 0.$$

Метод на основе свойства ординарности состоит в следующем. В каждом узле временной сетки t_k ($h_k = h$) проверяется вероятностное условие разрыва траектории:

[6] Михайлов Г. А., Войтишек А. В. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. М.: Академия, 2006.

$$\alpha_k \leq \lambda(t_k)h, \tag{2.10}$$

где α_k - независимые равномерные случайные величины в $(0, 1)$.

1) **Алгоритм 1**: α_k моделируются на каждом шаге с помощью генератора псевдослучайных чисел;
2) **Алгоритм 2**: α_k моделируются согласно теореме 2.6.

Алгоритм 2 использует экономичный способ моделирования дискретных случайных величин (как показано в параграфе 4.3, оптимизация алгоритма 1 позволяет значительно уменьшить трудоемкость вычислений в результате уменьшения числа вызовов генератора псевдослучайных чисел).

В параграфе 2.4 алгоритмы, построенные для моделирования пуассоновского точечного ансамбля, записаны для моделирования общего пуассоновского процесса, идентифицируемого с пуассоновской мерой.

В **Главе 3** диссертационной работы построены статистические алгоритмы моделирования систем со случайной структурой. Результаты третьей главы опубликованы и использованы в работах автора [2 - 4, 6, 10, 11, 18, 20, 21].

В параграфе 3.1 приводится классификация систем со случайной структурой, формулируется общая постановка задачи анализа систем со случайной структурой в терминах СДУ, а также уравнений для безусловных и условных плотностей вектора состояния.

Под *системами со случайной (переменной) структурой* понимаются динамические системы, поведение которых на случайных интервалах времени характеризуется различными структурами и описывается различными уравнениями. Состояние системы характеризуется смешанным процессом $[\mathbf{y}(t), s(t)]^\top$, где $s(t)$ – дискретный случайный процесс с конечным множеством состояний $\{1, 2, \ldots, S\}$, S – число структур системы, а вектор фазовых координат $\mathbf{y}(t)$ – n_y-мерный непрерывный случайный процесс, описываемый при условии $s(t) = l$ уравнением в смысле Стратоновича:

$$d\mathbf{y}(t) = a^{(l)}(t, \mathbf{y}(t))dt + \sigma^{(l)}(t, \mathbf{y}(t)) \circ d\mathbf{w}(t), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \tag{3.1}$$

или эквивалентным СДУ в смысле Ито:

$$d\mathbf{y}(t) = f^{(l)}(t, \mathbf{y}(t))dt + \sigma^{(l)}(t, \mathbf{y}(t))d\mathbf{w}(t), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0. \tag{3.2}$$

Здесь $t \in [t_0, T]$; $\mathbf{w}(t)$ – n_w-мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от $\mathbf{y}_0$; $a^{(l)}(t, \mathbf{y})$, $f^{(l)}(t, \mathbf{y})$ – n_y-мерные вектор-функции, $\sigma^{(l)}(t, \mathbf{y})$ – матричная функция размера $n_y \times n_w$; l – номер структуры, $l = 1, 2, \ldots, S$.

Классификация систем со случайной структурой:

1. Системы с распределенными переходами (switching diffusion) Переходы от одной структуры в другую заданы интенсивностями переходов и моменты перехода образуют пуассоновский точечный поток. [Алгоритмы моделирования таких систем построены в параграфе 3.3. Сранительный анализ построенных алгоритмов проведен в параграфах 4.4.1 (на тестовых примерах), в параграфе 4.4.2 (сравнение со спектральным методом), в параграфе 4.8 (для решения задачи фильтрации для непрерывных систем с переключением)].

2. Системы с разделением времени задаются плотностями распределений случайных промежутков времени между переходами из одной структуры в другую. [Алгоритм моделирования систем с разделением времени с автономным управлением построен в параграфе 3.4. С помощью построенного алгоритма решена задача о влиянии степени приоритета на качество управления в параграфе 4.5.]

3. Системы с сосредоточенными переходами. Переход от одной системы к другой должен совершаться при попадании определенных фазовых координат в заданную область. [Алгоритмы моделирования таких систем построены в параграфе 3.5. Сравнительный анализ статистического алгоритма с методом гауссовой аппроксимации проведен в параграфе 4.4.3.]

4. Системы со случайным периодом квантования сигналов во времени Примером такой системы являются радиоизотопные локационные следящие системы, предназначенные для измерения параметров, определяющих пространственное положение объекта. Математическая модель такой системы задается СДУ с пуассоновской составляющей, с пуассоновской мерой, зависящей от вектора состояния.[Сравнительные расчеты алгоритмов моделировани СДУ с пуассоновской составляющей приведены в параграфе 4.6.]

Параграф 3.2 содержит описание основных вероятностных характеристик решения систем со случайной структурой, и их статистические оценки.

В параграфе 3.3 рассмотрена задача анализа систем со случайной структурой с распределенными переходами. Если интенсивности перехода зависят от фазовых координат, то такие системы называют системами с **распределенными зависимыми переходами**, вероятности перехода дискретного случайного процесса $s(t)$ удовлетворяют условиям

$$\mathrm{P}\big(s(t+\Delta t)=r \mid s(t)=l,\ \mathbf{y}(t)=\mathbf{y}\big)=\lambda_{lr}(t,\mathbf{y})\Delta t+o(\Delta t),$$
$$\mathrm{P}\big(s(t+\Delta t)=l \mid s(t)=l,\ \mathbf{y}(t)=\mathbf{y}\big)=1-\lambda_{l}(t,\mathbf{y})\Delta t+o(\Delta t),$$

$$s(t_0) = s_0, \quad l, r = 1, 2, \ldots, S, \quad l \neq r, \tag{3.3}$$

где функция $\lambda_{lr}(t, \mathbf{y})\colon [t_0, T] \times R^{n_y} \to [0, +\infty)$ – *интенсивность* перехода из l-й структуры в r-ю, $\lambda_l(t, \mathbf{y}) = \sum_{r=1 \neq l}^{S} \lambda_{lr}(t, \mathbf{y})$.

Задача анализа систем, описываемых уравнениями (3.1), (3.3) (*или* (3.2), (3.3)), состоит в нахождении ненормированных плотностей распределения вектора состояния по заданным функциям $a^{(l)}(t, \mathbf{y})$ (или $f^{(l)}(t, \mathbf{y})$), $\sigma^{(l)}(t, \mathbf{y})$, интенсивностям $\lambda_{lr}(t, \mathbf{y})$ и ненормированным плотностям распределения $p_0^{*(l)}(\mathbf{y})$; $l, r = 1, 2, \ldots, S$.

В параграфе 3.3.1 построены алгоритмы моделирования процесса смены структуры для решения систем со случайной структурой (3.1) с распределенными переходами (3.3):

Алгоритм 1a (*для систем с постоянными интенсивностями перехода*;

Алгоритм 1b (*использование метода максимального сечения*);

Алгоритм 1c (*использование рандомизированного метода максимального сечения*).

На основе теоремы 2.6 построены модификации алгоритмов:

Модифицированный алгоритм 1b (использование модифицированного метода максимального сечения);

Модифицированный алгоритм 1c (использование модифицированного рандомизированного метода максимального сечения).

Построенные алгоритмы, использующие рандомизированный метод максимального сечения для моделирования процесса смены структуры, рекомендуется использовать при большом числе структур, когда достаточно трудоемко вычислять сумму функций при вычислении вероятностей прореживания.

В параграфе 3.3.2 построены алгоритмы решения ССС с распределенными переходами, с использованием построенных статистических алгоритмов моделирования процесса смены структуры и численных методов решения СДУ.

Теорема 3.8. *Численное решение системы со случайной структурой (3.1) (или (3.2)) с распределенными независимыми переходами, полученное с помощью построенных алгоритмов, имеет p-й порядок слабой сходимости, где*

$$p = \min_{l=1,\ldots,S} p_l$$

и p_l – порядок слабой сходимости численного метода решения задачи Коши для СДУ, используемого для решения l-й структуры, $l = 1, \ldots S$.

В общем случае, для систем с распределенными, зависимыми от фазовых координат, переходами слабая сходимость численного решения к точному следует из слабой сходимости приближенных алгоритмов моделирования пуассоновских точечных ансамблей (параграф 2.2).

В параграфе 3.4 описаны алгоритмы статистического моделирования систем с разделением времени.

• I. Алгоритм численного моделирования перехода из l-го состояния для систем с разделением времени с автономным управлением;

• Ia. Алгоритм численного моделирования перехода из l-го состояния для систем с разделением времени с экспоненциальной плотностью перехода.

В параграфе 3.5 рассмотрены алгоритмы статистического моделирования систем со случайной структурой и сосредоточенными переходами. Моменты смены структуры связаны с фазовыми координатами. Переходы от одной структуры к другой происходят в те моменты, когда процесс $\mathbf{y}(t)$ достигнет определенных границ. Описаны следующие алгоритмы:

• Алгоритм численного моделирования перехода из l-го состояния для систем с сосредоточенными переходами с полным поглощением на границе.

• Модифицированный алгоритм численного моделирования перехода из l-го состояния, который предполагает повышение порядка слабой сходимости (он состоит в переходе от дискретного численного метода – к непрерывному, в котором учитывается вероятность невыхода траектории из области за время $h = t_{k+1} - t_k$).

В параграфе 3.6 проведена условная оптимизация статистических алгоритмов. При решении рассматриваемых задач построенными статистическими алгоритмами важной является проблема оптимального (согласованного) выбора параметров статистического алгоритма при вычислении математического ожидания некоторого функционала от решения: шага численного метода h и размера выборки N. Ставится следующая *задача условной оптимизации*: найти минимум трудоемкости

$$\min_{h,N} S(h,N) \quad \text{при} \quad T^{(B)}(h,N) = \gamma,$$

где γ – фиксированное положительное число, а $T^{(B)}$ – верхняя граница погрешности в норме функционального пространства B.

Теорема 3.9. *Пусть $J_N(h)$ – оценка некоторого функционала от решения системы со случайной структурой* (3.1) *в момент времени $t_{k_1} \in [t_0, T]$, полученная статистическим алгоритмом. Тогда минимум трудоемкости вычисления функционала достигается при $N_{opt} \asymp \gamma^{-2}$, $h_{opt} \asymp \gamma^{1/p}$, где γ – требуемая точность вычислений.*

Исследована проблема оптимального (согласованного) выбора параметров статистического алгоритма при вычислении гистограммы решения: шага численного метода h, размера выборки N и шага гистограммы h_g.

Теорема 3.10. *Пусть $\pi^*(x)$ – гистограмма маргинальной плотности $p(x)$ ($x \in [a,b]$) в момент времени $t_{k_1} \in [t_0, T]$, полученная статистическим алгоритмом при решении систем со случайной структурой* (3.1). *Тогда минимум трудоемкости вычисления гистограммы достигается при $n_{g,opt} \asymp \gamma^{-1}$, $N_{opt} \asymp \gamma^{-3}$, $h_{opt} \asymp \gamma^{1/p}$, где γ – требуемая точность вычислений в норме пространства $L_2\big([a,b]\big)$.*

В **главе 4** представлены результаты по апробации разработанных численных методов и алгоритмов статистического моделирования. Результаты четвертой главы опубликованы и использованы в работах автора [1, 2, 6 - 13, 16 - 19, 22]. В параграфе 4.1 приведен сравнительный анализ точности восьми численных методов решения СДУ на трех примерах, решения которых с вероятностью 1 находятся на заданных цилиндрических поверхностях второго порядка (эллиптическом, гиперболическом и параболическом цилиндрах). Был подтвержден первый порядок сильной сходимости построенных методов на системах СДУ с одним шумом. Также было подтверждено, что системы СДУ с первым интегралом можно использовать для тестовых расчетов с целью изучения сильной сходимости численных методов. Проведенное сравнение показало сохранение первого интеграла при проецировании приближенного решения на многообразие.

Параграф 4.2 посвящен сравнительному анализу алгоритмов моделирования пуассоновских процессов. На модельных примерах продемонстрирована эффективность разработанных модификаций алгоритмов моделирования пуассоновских процессов. Результаты численного моделирования демонстрируют уменьшение трудоемкости вычислений при использовании модифицированного метода максимального сечения более чем на 10 %. Проведенные численные эксперименты показывают возможность применения различных методов Монте-Карло для моделирования однородных и неоднородных пуассоновских процессов.

В параграфе 4.3 проведен сравнительный анализ приближенных алгоритмов моделирования пуассоновских процессов, построенных на основе свойства ординарности. В параграфе на тестовых примерах проведена численная проверка алгоритма 2. Проведенные расчеты подтверждают статистическую адекватность предложенного метода. Многократное использование одного и того же псевдослучайного числа при моделировании пуассоновского точечного процесса показало, что результаты совпадают в пределах статистической погрешности. Предложенная модификация алгоритма 1 позволяет существенно уменьшить время счета в задачах, когда затрачиваемое время моделирования псевдослучайных чисел при использовании проверки условия (2.10) сравнимо с общим временем счета.

В параграфе 4.4 проведены численные испытания построенных алгоритмов моделирования систем со случайной структурой с распределенны-

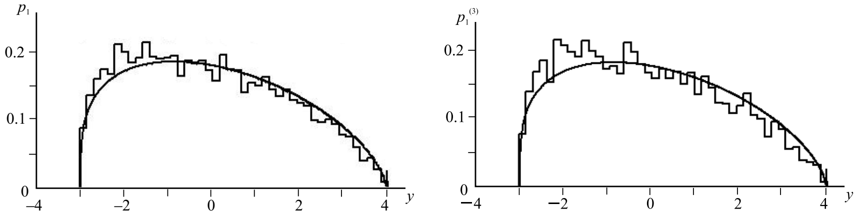

Рис. 4.1. Стационарная безусловная и условная плотности вероятности 3-го состояния и гистограммы их оценок (для постоянных интенсивностей переходов)

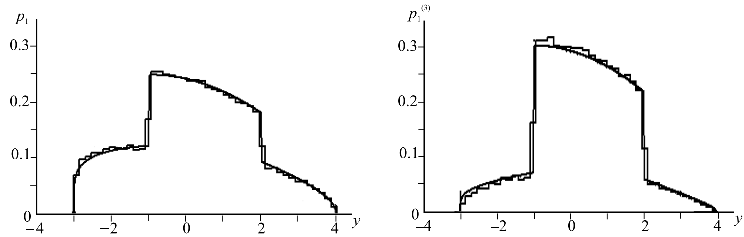

Рис. 4.2. Стационарная безусловная и условная плотности вероятности 3-го состояния и гистограммы их оценок (для интенсивностей, зависящих от фазовой координаты)

ми переходами на тестовых примерах. В качестве примера для проверки статистического алгоритма 1b из параграфа 3.3.2, предназначенного для решения систем с распределенными, зависимыми от фазовых координат, переходами, рассмотрена задача с известным аналитическим решением, с тремя структурами, которая отражает основные особенности динамических систем, когда интенсивности перехода зависят от фазовых координат: скачкообразный характер случайных процессов, статистическую зависимость переходов от значений переменных. Спектральный метод не смог просчитать систему ввиду зависимостей интенсивностей от фазовых координат. На рис. 4.1 и 4.2 приводятся точные графики стационарных плотностей вероятности и полученные гистограммы. Из рисунков видно, что зависимость интенсивностей перехода от фазовых координат изменила вид плотности вероятности решения. Результаты численных экспериментов демонстрируют хорошее приближение распределения решения и универсальность статистического алгоритма. В параграфе 4.4.2 решена задача анализа релейной следящей системы управления. Аналитическое решение для таких систем можно найти лишь в исключительных случаях. Поэтому рассмотренная задача анализа систем управления ансамблем траекторий с

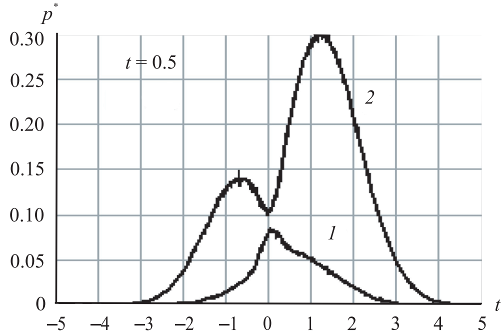

Рис. 4.3. Сечения ненормированных плотностей распределения в момент времени $t = 0.5$ (для первой структуры – *1*, для второй структуры – *2*)

учетом случайного изменения структуры просчитана построенным в параграфе 3.3.2 статистическим алгоритмом 1b и спектральным методом. Параметры статистического алгоритма выбираются согласно условной оптимизации алгоритма. Проведено сравнение полученных результатов. Найдены оценки вероятностей работы системы в режимах нормального функционирования и срыва слежения, ненормированные плотности распределения (рис. 4.3), а также математическое ожидание и дисперсия состояния системы.

Кроме того рассматривалась модельная задача анализа системы стабилизации малого искусственного спутника, находящегося под действием гравитационного и управляющего моментов, с учетом возможного отказа управляющего устройства. Отметим, что задача рассматривается как задача анализа нелинейных систем управления ансамблем траекторий с учетом случайного изменения структуры системы.

При решении методом статистического моделирования оценивались первые два момента решения и строились гистограммы распределений координат вектора состояния. Для обеих задач все результаты сравнивались со спектральным методом решения. При сопоставимой точности метод статистического моделирования обеспечивает более быстрые расчеты, а при сопоставимом времени вычислений он обеспечивает большую точность.

В параграфе 4.4.3 проведено сравнение разработанных статистических алгоритмов с методом гауссовской аппроксимации на задаче анализа процесса захвата с полным поглощением на границе. Получены оценки вероятности захвата, плотности вероятности распределения времени захвата, нормированного потока поглощения и вероятностных моментов решения. Для двумерной задачи полного поглощения метод гауссовой аппроксимации так же, как и для одномерной задачи, плохо оценивает вероятностные моменты решения. Интегральные характеристики решения метод гауссовой аппроксимации вычисляет тоже с большой погрешностью.

В параграфе 4.5 рассматривается задача о влиянии степени приоритета на качество управления. В качестве примера рассматриваются два одинаковых объекта и изучается влияние приоритета на точность управления первым объектом. С ростом приоритета первого объекта математическое ожидание и дисперсия ошибки первого объекта уменьшаются, а второго – увеличиваются. Скорость изменения моментов зависит от значений интенсивностей и параметров модели. Сравнивалось качество управления объектом при наличии приоритета и экспоненциальных и эрланговых законах распределения интервалов обслуживания. Для численного решения систем СДУ в смысле Стратоновича использован обобщенный метод типа Розенброка.

Показано, что для эрланговых законов распределения интервалов перехода маргинальные плотности ведут себя аналогично экспоненциальному распределению. Таким образом, при экспоненциальном и эрланговом законе управления ошибки незначительно отличаются друг от друга. А рассмотренный алгоритм одинаково хорошо считает, требуя незначительных изменений при моделировании времени обслуживания.

Статистический анализ систем со случайным периодом квантования сигналов во времени проведен в параграфе 4.6. Рассмотренные задачи являются примерами систем с двумя структурами со случайным периодом квантования с интенсивностями переходов, зависящими от вектора состояния системы. Для моделирования процесса смены структуры применялись алгоритм 1b (использование метода максимального сечения) и модифицированный алгоритм 1b (использование модифицированного метода максимального сечения) из параграфа 3.3. Использование модифицированного метода максимального сечения позволило уменьшить вычислительное время за счет уменьшения числа обращений к «генератору» псевдослучайных чисел.

Далее, в параграфе 4.7 рассмотрена задача фильтрации диффузионно-скачкообразных процессов. Эта задача предполагает оценивание вектора состояния стохастической системы в соответствии с заданным критерием качества по результатам косвенных измерений при наличии шумов. На рис. 4.4 показана выборочная траектория случайного процесса $X(t)$ и ее оценка $\hat{X}(t)$ в типовой задаче оценивания состояния системы. Модель системы задана линейным СДУ с пуассоновской составляющей (пуассоновская мера зависит как от времени, так и от фазовой координаты), а измеритель описывается нелинейным СДУ. Применен алгоритм типа фильтра частиц на основе асимптотически несмещенного метода (1.9) и модифицированного метода максимального сечения для моделирования соответствующего общего пуассоновского процесса.

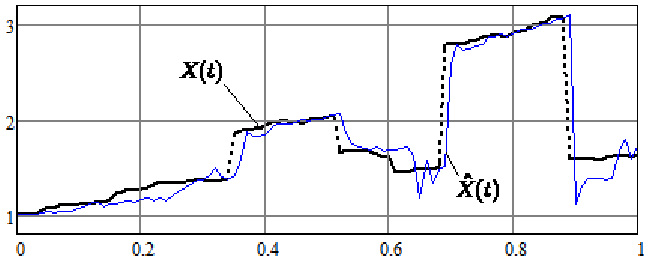

Рис. 4.4. Выборочная траектория случайного процесса $X(t)$ и ее оценка $\hat{X}(t)$ модифицированным методом максимального сечения.

В параграфе 4.8 рассмотренна задача оптимальной фильтрации, которая состоит в оценивании текущего состояния $(X(t), s(t))$ системы по результатам измерений $Y(t)$. Математическая модель системы включает нелинейные СДУ, правая часть которых определяет структуру динамической системы, или режим функционирования. Алгоритмы типа фильтров частиц для оценивания текущего состояния систем со случайной структурой построены на основе метода статистического моделирования с использованием разработанных численных методов решения СДУ и экономичной модификации метода максимального сечения. Показано преимущество модифицированного метода максимального сечения.

В заключительном параграфе 4.9 проведена апробация асимптотически несмещенного метода (1.9) на тестовых задачах, связанных с вопросами фазовых переходов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации рассмотрены вопросы построения и использования численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений в смысле Стратоновича и систем со случайной структурой. Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. Построено семейство численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений в смысле Стратоновича, исследованы их устойчивость (асимптотическая несмещенность), среднеквадратическая и слабая сходимости.

2. Построены модифицированные алгоритмы решения СДУ, сохраняющие первый интеграл. Предложенная методика обеспечивает принадлежность моделируемых траекторий решения СДУ заданному гладкому многообразию.

3. Построены эффективные алгоритмы моделирования пуассоновских точечных ансамблей со сложной интенсивностью, на основе экономичных методов моделирования распределений.

4. Построен алгоритм приближенного «цифрового» моделирования неоднородных пуассоновских точечных ансамблей и доказана соответствующая слабая сходимость.

5. Построены экономичные алгоритмы моделирования пуассоновских точечных потоков.

6. Построены эффективные алгоритмы моделирования систем со случайной структурой с распределенными, зависимыми от фазовых координат, переходами на основе модифицированного метода максимального сечения. Доказана соответствующая теорема сходимости.

7. Построены и теоретически обоснованы эффективные методы, использующие разработанные алгоритмы моделирования пуассоновских ансамблей, для численного решения СДУ с пуассоновской составляющей в случае, когда пуассоновская мера зависит от времени и от фазовых координат.

8. Разработанные алгоритмы и их обоснование продемонстрированы на примере решения тестовых и ряда модельных задач, имеющих прикладное значение. Решены задачи фильтрации диффузионно-скачкообразных процессов и непрерывных систем с марковскими переключениями, а также задачи, связанные с вопросами фазовых переходов.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Монография

1. Аверина Т.А. Статистическое моделирование решений стохастических дифференциальных уравнений и систем со случайной структурой. Новосибирск. Изд-во СО РАН. 2019.

Публикации автора в журналах перечня ВАК, Web of Science, Scopus

1. Аверина Т.А. Об одном методе моделирования неоднородного пуассоновского точечного процесса // Сибирский журнал вычислительной математики. 2022. Т. 25. № 1. С. 1-15.
2. Аверина Т.А. Использование модификаций метода максимального сечения для моделирования систем со случайной структурой с распределенными переходами // Сибирский журнал вычислительной математики. 2016. Т. 19. № 3. С. 235-247.
3. Аверина Т.А. Построение и обоснование статистических алгоритмов моделирования решений систем со случайной структурой, заданной стохастическими дифференциальными уравнениями // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2015. Т. 20. № 5. С. 986-991.
4. Аверина Т.А. Модифицированный алгоритм статистического моделирования систем со случайной структурой с распределенными переходами // Сибирский журнал вычислительной математики. 2013. Т. 16. № 2. С. 97-105.
5. Аверина Т.А. Устойчивые численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений в смысле Стратоновича // Вестник Бурятского государственного университета. 2012. № 9. С. 91-94
6. Аверина Т.А. Алгоритмы анализа систем управления ансамблем траекторий с учетом случайного изменения структуры и скачков // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 3 (20). С. 22-31.
7. Аверина Т.А. Исследование влияния пуассоновских дельта-импульсов в задачах радиотехники // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2013. Т. 18. № 5-2. С. 2431-2432.
8. Аверина Т.А. Новые алгоритмы статистического моделирования неоднородных пуассоновских ансамблей // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010. Т. 50. № 1. С. 16-23.

9. Аверина Т.А. Методы статистического моделирования неоднородного пуассоновского ансамбля // Сибирский журнал вычислительной математики. 2009. Т. 12. № 4. С. 361-374.
10. Averina, T.A. Algorithm of statistical simulation of dynamic systems with distributed change of structure (2004) Monte Carlo Methods and Applications, 10 (3-4), pp. 221-226.
11. Averina, T.A. Algorithm for statistical simulation of two types of random-structure systems (2001) Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling, 16 (6), pp. 467-482.
12. Аверина Т.А., Рыбаков К.А. Модификация численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений с первым интегралом // Сибирский журнал вычислительной математики. 2019. Т. 22. № 3. С. 243-259.
13. Averina, T.A., Karachanskaya, E.V., Rybakov, K.A. Statistical analysis of diffusion systems with invariants (2018) Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling, 33 (1), pp. 1-13.
14. Аверина Т.А., Михайлов Г.А. Алгоритмы точного и приближенного статистического моделирования пуассоновских ансамблей // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010. Т. 50. № 6. С. 1005-1016.
15. Михайлов Г.А., Аверина Т.А. Алгоритм "максимального сечения"в методе Монте-Карло // Доклады Академии наук. 2009. Т. 428. № 2. С. 163-165.
16. Averina, T.A., Rybakov, K.A. Maximum cross section method in the filtering problem for continuous systems with Markovian switching (2021) Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling, 36 (3), pp. 127-137.
17. Averina, T.A., Rybakov, K.A. Using maximum cross section method for filtering jump-diffusion random processes (2020) Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling, 35 (2), pp. 55-67.
18. Аверина Т.А., Рыбаков К.А. Два метода анализа стохастических мультиструктурных систем с распределенными переходами // Сибирский журнал вычислительной математики. 2008. Т. 11. № 1. С. 1-18.
19. Аверина Т.А., Рыбаков К.А. Анализ систем управления ансамблем траекторий с учетом случайного изменения структуры на примере системы стабилизации малого искусственного спутника // Труды МАИ. 2010. № 41.

20. Аверина Т.А., Рыбаков К.А. Новые методы анализа воздействия эрланговских дельта-импульсов в задачах радиотехники // Журнал радиоэлектроники. 2014. № 11.
21. Аверина Т.А., Рыбаков К.А. Новые методы анализа воздействия пуассоновских дельта-импульсов в задачах радиотехники // Журнал радиоэлектроники. 2013. № 1.
22. Аверина Т.А., Змиевская Г.И. Неравновесная стадия фазового перехода первого рода: стохастические модели и алгоритмы решения // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2017. № 115. С. 1-32.

Программы для ЭВМ

1. Аверина Т.А. Программа ROS для решения автономной системы стохастических дифференциальных уравнений обобщенным двух стадийным методом Розенброка. Свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2014615048, дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 15 мая 2014 г.
2. Аверина Т.А. Программа вычисления вероятностных характеристик решения систем со случайной структурой с распределенными переходами методом Монте-Карло. Свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015611380, дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 28 января 2015 г.