

## ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертационную работу **Авериной Татьяны Александровны** “Алгоритмы статистического моделирования решений стохастических дифференциальных уравнений и систем со случайной структурой” по специальности 01.01.07 - Вычислительная математика на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

### 1. Актуальность темы исследований

Многие модели динамических систем в различных областях науки: радиотехнике, статистической механике, автоматическом управлении, физике, химии, медицине, теории надежности и т.д., описываются стохастическими дифференциальными уравнениями (СДУ). Сложность численного решения нелинейных систем СДУ с помощью уравнений Колмогорова делают актуальной задачу построения численных методов решения СДУ. При этом актуальной является задача построения численных методов решения СДУ с хорошими свойствами устойчивости. Использование устойчивых методов необходимо для численного решения СДУ на больших интервалах времени, а также для решения задач, описывающих разномасштабные процессы. Устойчивые численные методы решения СДУ необходимы для решения достаточно широкого класса задач, связанных в том числе с исследованием фазовых переходов как процессов ассоциации частиц в кластеры. Такие задачи связаны со многими приложениями, такими как образование аэрозолей в атмосфере, конденсация в высокоскоростных потоках газов, истекающих из сопла, полимеризация и кристаллизация, осаждение паров металлов и др. Знание интервала асимптотической несмещенности метода позволяет выбирать величину шага интегрирования, при котором не допускается существенной потери точности вычислений в задачах, связанных с оценкой дисперсии решения СДУ. Однако, существующие устойчивые численные методы решения СДУ являются трудоемкими. Поэтому актуальной является задача построения экономичных устойчивых численных методов решения СДУ. Одной из важных задач теории управления является синтез такого управления динамической системой, что при ее эволюции сохраняются важные характеристики системы. В реальности на динамическую систему оказывают влияние случайные

факторы, которые наиболее адекватно описываются с помощью винеровских и пуассоновских случайных процессов. В связи с этим возникает задача построения алгоритмов моделирования общего пуассоновского процесса, идентифицируемого с пуассоновской мерой, зависящей от времени и от вектора фазовых координат. Важной областью применения численных методов решения СДУ стали системы со случайной структурой. Например, задачи автоматизации управления системой, имеющей на непересекающихся временных интервалах различные режимы работы и разные структуры. В последнее время появилось много таких систем в экономике, на производстве, в технике, в биологии и медицине. Сложность получаемых моделей затрудняет аналитическое исследование решений таких систем и делает особо актуальной разработку статистических алгоритмов. Для моделирования процесса смены структуры, как и для моделирования СДУ с пуассоновской составляющей, возникает задача построения экономичных алгоритмов моделирования общего пуассоновского процесса, зависящего от времени и от фазовых координат. В связи с этим представляется значимым разработать новые экономичные устойчивые алгоритмы моделирования систем со случайной структурой с распределенными зависимыми и независимыми переходами, имеющие широкую область применения, в том числе в задачах анализа, фильтрации и автоматического управления динамическими объектами.

Диссертационная работа соответствует паспорту специальности 01.01.07. Результаты диссертации удовлетворяют формуле специальности и соответствуют 1, 2 и 4 пунктам из основных направлений специальности.

## **2. Научная новизна исследований и полученных результатов**

Результаты, полученные в диссертационной работе, являются новыми, опубликованы более чем в 50 печатных работах, включая 22 статьи в журналах из списка, рекомендованного ВАК, получено 2 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Диссертация объемом 288 страниц включает введение, 4 главы основного содержания, заключение, библиографический список из 402 наименований, содержит 60 рисунков и 49 таблиц.

Во **введении** (16 стр.) обоснована актуальность и значимость темы

исследований, степень ее разработанности, сформулированы цели и задачи исследований, подчеркивается научная новизна проведенных исследований, перечислены используемые методы, сформулированы основные положения, выносимые на защиту. Приведено краткое содержание глав работы.

В **первой** главе (34 стр.) диссертационной работы рассматриваются вопросы построения численных методов решения задачи Коши для СДУ. В параграфе 1.1 вводятся необходимые определения. В параграфе 1.2 приводится общий вид семейства численных методов для СДУ Стратоновича. Данное семейство является обобщением численных методов типа Розенброка для обыкновенных дифференциальных уравнений на случай СДУ. Оно также включает в себя двухшаговые методы Рунге–Кутты для СДУ. Получено разложение Стратоновича–Тейлора решения задачи Коши для системы СДУ Стратоновича. Записаны уравнения согласованности, получено их решение и доказаны теоремы о слабой и среднеквадратической сходимости построенных методов. Свободные параметры методов выбирались из свойства асимптотической несмещенности. В параграфе 1.3 рассмотрена задача Коши для СДУ с пуассоновской составляющей. Сформулирован принцип построения статистического алгоритма для ее решения, требующий умения моделировать общий пуассоновский процесс, зависящий от времени и вектора фазовых координат. В параграфе 1.4 рассматриваются СДУ с первым интегралом. Доказана теорема о точности вычисления решения на многообразии численным методом, имеющим сильную сходимость, при условии, что точное решение с вероятностью 1 лежит на гладком многообразии. Построена методика коррекции численного метода, позволяющая решению оставаться на многообразии.

Во **второй** главе (23 стр.) диссертации рассматриваются вопросы построения экономичных алгоритмов моделирования пуассоновского точечного ансамбля. В начале главы вводятся необходимые определения. В параграфе 2.1, с целью повышения эффективности моделирования пуассоновских точечных ансамблей со сложной интенсивностью, рассмотрены два экономичных способа моделирования последовательности независимых дискретных случайных величин. Доказана теорема, в которой формулируется и обосновывается в многоэтапном

варианте специальный способ моделирования независимых дискретных случайных величин с использованием одного базового случайного числа. В качестве второго экономичного способа построения последовательности независимых случайных величин, имеющих распределение Бернулли, рассмотрен метод А.А. Сидорова, основанный на использовании конечного числа случайных “битов”. В параграфе 2.2 построены экономичные алгоритмы статистического моделирования неоднородного пуассоновского ансамбля со сложной интенсивностью. Рассмотрены также способы приближенного моделирования пуассоновских ансамблей. В частности, рассмотрен приближенный экономичный алгоритм, связанный с использованием конечного числа случайных “битов” в схеме Бернулли. Исследована трудоемкость такого алгоритма и доказана теорема о слабой сходимости соответствующего пуассоновского ансамбля к точному. Параграф 2.3 посвящен построению и исследованию алгоритмов моделирования пуассоновских точечных потоков, а также их оптимизации. Дополнительно рассмотрены два алгоритма моделирования пуассоновского точечного потока: метод максимального сечения, основанный на моделировании обобщенной экспоненциальной плотности вероятности временных интервалов между соседними точками пуассоновского потока и приближенный метод, использующий свойство ординарности пуассоновского потока. Предложена оптимизация алгоритмов на основе специального экономичного способа моделирования последовательности независимых дискретных случайных величин. В параграфе 2.4 алгоритмы, построенные для моделирования пуассоновского точечного ансамбля, записаны для моделирования общего пуассоновского процесса, идентифицируемого с пуассоновской мерой.

В **третьей** главе (40 стр.) диссертационной работы построены статистические алгоритмы моделирования систем со случайной структурой. В параграфе 3.1 приводится классификация систем со случайной структурой, формулируется общая постановка задачи анализа систем со случайной структурой в терминах СДУ, а также уравнений для безусловных и условных плотностей вектора состояния. Параграф 3.2 содержит описание основных вероятностных характеристик решения и их статистические оценки. В параграфе 3.3 рассмотрена задача анализа систем со случайной структурой с распределенными переходами. На основе метода максимального сечения и его модификаций

построены алгоритмы статистического моделирования процесса смены структуры и алгоритмы статистического моделирования систем со случайной структурой с зависимыми и независимыми переходами. Доказана теорема о сходимости. В параграфе 3.4 описаны алгоритмы статистического моделирования систем с разделением времени и автономным управлением. В параграфе 3.5 рассмотрены алгоритмы статистического моделирования систем со случайной структурой и сосредоточенными переходами. В параграфе 3.6 проведена условная оптимизация статистических алгоритмов, использующих численные методы для СДУ.

В **четвертой** главе (114 стр.) диссертации представлены результаты по апробации разработанных численных методов и алгоритмов. В параграфе 4.1 приведен сравнительный анализ точности восьми численных методов для СДУ с использованием трех систем СДУ, решения которых с вероятностью 1 находятся на заданных цилиндрических поверхностях второго порядка (эллиптическом, гиперболическом и параболическом цилиндрах). Был подтвержден порядок 1.0 сильной сходимости построенных методов для систем СДУ со скалярным шумом. Также было подтверждено, что системы СДУ с первым интегралом можно использовать для тестовых расчетов с целью изучения сильной сходимости численных методов. Проведенное сравнение показало сохранение первого интеграла при проецировании приближенного решения на многообразии. Параграф 4.2 посвящен сравнительному анализу алгоритмов моделирования пуассоновских процессов. На модельных примерах продемонстрирована эффективность разработанных модификаций алгоритмов моделирования пуассоновских процессов. В параграфе 4.3 проведен сравнительный анализ приближенных алгоритмов моделирования пуассоновских процессов, построенных на основе свойства ординарности. Параграф 4.4 посвящен сравнительному анализу алгоритмов моделирования систем со случайной структурой с распределенными переходами, рассмотрены задачи управления техническими объектами, полученные результаты сравниваются с известными приближенными методами. В параграфе 4.5 рассматривается задача о влиянии степени приоритета на качество управления. Статистический анализ систем со случайным периодом квантования сигналов во времени реализован в параграфе 4.6. В параграфах 4.7 и 4.8 проведена

апробация метода максимального сечения в задаче фильтрации диффузионно-скачкообразных случайных процессов и непрерывных систем с марковскими переключениями соответственно. В параграфе 4.9 осуществлена апробация асимптотически несмещенного метода на тестовых задачах, связанных с вопросами фазовых переходов.

В **заключении** (2 стр.) кратко сформулированы основные результаты диссертационной работы и представлены перспективы дальнейшей разработки темы исследования.

Основные результаты диссертации опубликованы и представлены на ряде научных конференций и семинаров, в том числе международного уровня. Диссертационная работа написана четко и грамотно. Автореферт отражает основное содержание диссертации.

### **3. Обоснованность и достоверность полученных результатов**

Достоверность полученных результатов основана на строгих доказательствах основных положений и подтверждена численными расчетами. Верификация результатов проведена с помощью решения модельных и прикладных задач. В диссертационной работе использовался аппарат теории методов Монте-Карло, включая теорию численных методов для СДУ, а также аппарат теории вероятностей и теории случайных процессов.

### **4. Научная и практическая ценность основных положений диссертации**

Научная ценность диссертации заключается в следующем. Построено семейство численных методов решения СДУ Стратоновича, исследованы их устойчивость (асимптотическая несмещенность), среднеквадратическая и слабая сходимости. Построены модифицированные алгоритмы решения СДУ, сохраняющие первый интеграл. Предложенная методика обеспечивает принадлежность моделируемых траекторий решения СДУ заданному гладкому многообразию. Построены эффективные алгоритмы моделирования пуассоновских точечных ансамблей со сложной интенсивностью на основе экономичных методов моделирования распределений. Построен алгоритм численного моделирования неоднородных пуассоновских точечных ансамблей и доказана соответствующая слабая сходимости. Построены экономичные алгоритмы численного моделирования пуассоновских

точечных потоков. Построены эффективные алгоритмы численного моделирования систем со случайной структурой с распределенными, зависимыми от фазовых координат, переходами на основе модифицированного метода максимального сечения. Доказана соответствующая теорема о сходимости. Построены и теоретически обоснованы эффективные методы, использующие разработанные алгоритмы моделирования пуассоновских ансамблей, для численного решения СДУ с пуассоновской составляющей в случае, когда пуассоновская мера зависит от времени и от фазовых координат. Разработанные алгоритмы и их обоснование продемонстрированы на примере решения тестовых и ряда модельных задач, имеющих прикладное значение. Решены задачи фильтрации диффузионно-скачкообразных процессов и непрерывных систем с марковскими переключениями, а также задачи, связанные с вопросами фазовых переходов.

Практическая ценность заключается в том, что разработанные устойчивые (асимптотически несмещенные) численные методы решения СДУ могут быть использованы для решения широкого класса научных задач, связанных в том числе с исследованием фазовых переходов как процессов ассоциации частиц в кластеры. Построенные экономичные статистические алгоритмы моделирования систем со случайной структурой с распределенными переходами могут быть использованы для решения задач в экономике, на производстве, в биологии и медицине, где появилось много моделей, заданных такими системами. Важным приложением разработанных алгоритмов является их использование в задачах оптимальной фильтрации для систем со случайной структурой с непрерывным временем. В настоящее время с использованием оптимизирующих компиляторов, которые позволяют наиболее эффективно задействовать вычислительные ресурсы процессоров, можно реализовать построенные алгоритмы для сложных динамических систем, обеспечивая при этом решение задачи оптимальной фильтрации в реальном времени. При необходимости реализации более быстрых и не требующих обработки большого объема данных алгоритмов субоптимальной фильтрации алгоритмы, построенные на основе метода статистического моделирования, могут применяться для сравнения.

## **5. Замечания по диссертационной работе.**

1. В диссертационной работе (см., например, параграфы 1.1, 1.2, 4.1) автор использует словосочетания “СДУ в смысле Стратоновича” и “СДУ в смысле Ито”. В то же время в диссертации используются термины “СДУ Стратоновича” и “СДУ Ито” (см., например, стр. 33, 222). В целях унификации терминологии в диссертационной работе, а также в целях сокращения записи имело бы смысл использовать единую терминологию (“СДУ Стратоновича”, “СДУ Ито”) на протяжении всей работы.

2. В параграфе 1.2.1 используется словосочетание “разложение в ряд Тейлора” применительно к решениям СДУ Стратоновича и СДУ Ито. Более точно было бы использовать термины “разложение Ито–Тейлора” и “разложение Стратоновича–Тейлора”, поскольку они являются общепринятыми в подобных ситуациях.

3. С целью улучшения читаемости работы, вместо обозначений  $n_w, n_x, n_y$  (стр. 20, 21, 25, 29, 30, 92, 97, 217) возможно стоило бы использовать обозначения без индексов:  $n, m, k$ .

4. В параграфе 1.3 подразумевается адаптация временной сетки к скачкам пуассоновского процесса (временная сетка включает моменты скачков пуассоновского процесса), но тогда шаг интегрирования становится фактически переменным. Скорее всего это не сказывается на порядках точности разработанных методов, но желательно было бы добавить обсуждение этого вопроса.

5. В теореме 3.5 (стр. 122) используется точность вычислений в норме пространства  $L_2$ . Здесь было бы полезно добавить пояснения, почему выбрано именно пространство  $L_2$ , поскольку более естественным пространством для плотностей является  $L_1$ .

6. По мнению оппонента, в завершении каждой главы было бы целесообразно привести основные выводы, которые конкретизировали бы полученные в соответствующей главе результаты.

## **6. Заключение о работе**

Представленная диссертационная работа является завершенной научной работой, содержит новые подходы к решению важной научной задачи, имеющей практическую значимость, и выполнена на высоком научном уровне. Представленные в диссертации исследования обладают научной новизной и достоверностью, все полученные выводы научно обоснованы. Основные положения диссертационной работы в



