

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт вычислительной математики и математической геофизики
Сибирского отделения Российской академии наук

На правах рукописи

АВЕРИНА Татьяна Александровна



АЛГОРИТМЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНОЙ СТРУКТУРОЙ

01.01.07 - Вычислительная математика

ДИ С С Е Р Т А Ц И Я
на соискание ученой степени
доктора физико - математических наук

Научный консультант
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н.
МИХАЙЛОВ Геннадий Алексеевич

НОВОСИБИРСК

2022

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений	20
1.1. Задача Коши для СДУ	20
1.2. Семейство численных методов решения СДУ в смысле Стратоновича	24
1.2.1. Разложение в ряд Тейлора точного и численного решений СДУ	28
1.2.2. Асимптотическая несмещенность, аппроксимация и сходимость методов	35
1.2.3. Конкретный вид построенных численных методов решения СДУ в смысле Стратоновича	43
1.3. Алгоритм решения СДУ с пуассоновской составляющей	47
1.4. Методы решения систем СДУ с первым интегралом	53
Глава 2. Алгоритмы моделирования пуассоновского точечного ансамбля	60
2.1. Специальный способ моделирования дискретных случайных величин	61
2.2. Алгоритмы моделирования пуассоновских точечных ансамблей и их оптимизация	68
2.3. Алгоритмы моделирования пуассоновских точечных потоков и их оптимизация	77
2.4. Алгоритмы моделирования общего пуассоновского процесса	82
Глава 3. Статистические алгоритмы моделирования систем со случайной структурой	85
3.1. Постановка задачи анализа ССС	85
3.2. Основные вероятностные характеристики решения и их статистические оценки	91
3.3. Системы со случайной структурой с распределенными переходами	97

3.3.1. Алгоритмы статистического моделирования процесса смены структуры в системах с распределенными переходами	100
3.3.2. Алгоритм статистического моделирования систем со случайной структурой с распределенными переходами	110
3.4. Алгоритм статистического моделирования системы с разделением времени и автономным управлением	113
3.5. Алгоритм статистического моделирования систем со случайной структурой и сосредоточенными переходами	116
3.6. Условная оптимизация статистического алгоритма	120
Глава 4. Решение тестовых и прикладных задач	124
4.1. Статистический анализ диффузионных систем с инвариантами	124
4.2. Сравнительный анализ алгоритмов моделирования пуассоновских процессов	142
4.3. Сравнительный анализ приближенных алгоритмов моделирования пуассоновских процессов	151
4.4. Сравнительный анализ алгоритмов моделирования ССС	167
4.4.1. Численный анализ систем с распределенными переходами	167
4.4.2. Задачи управления техническими объектами. Сравнение со спектральным методом	176
4.4.3. Сравнение с методом гауссовой аппроксимации	194
4.5. Задача о влиянии степени приоритета на качество управления	202
4.6. Статистический анализ систем со случайным периодом квантования сигналов во времени	211
4.7. Использование метода «максимального сечения» в задаче фильтрации диффузионно-скачкообразных процессов	216
4.8. Метод максимального сечения в задаче фильтрации для непрерывных систем с переключениями	226
4.9. Апробация асимптотически несмещенного метода на тестовых задачах, связанных с вопросами фазовых переходов	237
Заключение	250
Список литературы	252

Введение

Актуальность и значимость темы исследований, степень её разработанности.

В 40-х годах XX века были заложены основы теории стохастических дифференциальных уравнений (СДУ). Первоначально СДУ предназначались для описания на вероятностном языке диффузии в газах и жидкостях [218, 219, 323]. Однако впоследствии оказалось, что они являются очень удобным аппаратом для решения многих других физических и инженерных задач [122, 203, 207, 324].

Многие модели динамических систем в самых различных областях науки: радиотехнике, статистической механике, автоматическом управлении, химии, медицине, теории надежности и т.д., можно описать стохастическими дифференциальными уравнениями:

$$dy(t) = f(y(t))dt + \sigma(y(t))dw(t), \quad t \in [0, T]; \quad y(0) = y_0, \quad (0.1)$$

где $y(t)$ - векторный случайный процесс; $f(y)$ - вектор-функция, $\sigma(y)$ - матрица, $w(t)$ - вектор независимых в совокупности стандартных винеровских процессов.

К настоящему времени имеется огромная литература, посвященная стохастическим дифференциальным уравнениям, теория которых продолжает интенсивно развиваться. Наиболее полными и оригинальными математическими руководствами по стохастическим дифференциальным уравнениям и по нынешний день являются отечественные монографии И. И. Гихмана, А. В. Скорохода [123, 124], а также зарубежные монографии К. Ito [303, 304].

Как и при численном решении обыкновенных дифференциальных уравнений, правомерно возникает вопрос об устойчивости численных методов решения задачи Коши для СДУ.

Решение стохастического дифференциального уравнения

$$dy(t) = -\alpha y(t)dt + \sigma dw(t), \quad y(0) = y_0, \quad (0.2)$$

где α , σ - вещественные коэффициенты, при нормальном начальном значении y_0 является гауссовским процессом. Математическое ожида-

ние и дисперсия точного решения при $\alpha > 0$ имеют следующее асимптотическое поведение при $t \rightarrow \infty$:

$$m_y(t) = e^{-\alpha t} m_y(0) \rightarrow 0, \quad (0.3)$$

$$D_y(t) = e^{-2\alpha t} D_0 + \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}) \rightarrow \frac{\sigma^2}{2\alpha}, \quad (0.4)$$

где D_0 – дисперсия случайной величины y_0 .

Определение 0.1 [100]. Численный метод называется *устойчивым (асимптотически несмещенным)* с шагом $h > 0$, если при его применении с этим шагом к скалярному линейному СДУ (0.2) с $\alpha > 0$ распределение численного решения y_n при $n \rightarrow \infty$ сходится к нормальному распределению с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2/2\alpha$.

Определение 0.2 [100]. Интервал $(x_0, 0)$ называется *интервалом устойчивости (асимптотической несмещенности)* метода, если метод является асимптотически несмещенным с любым шагом $h > 0$, для которого $-\alpha h \in (x_0, 0)$.

В работе [176] было предложено назвать такую устойчивость асимптотической несмещенностью.

Знание интервала асимптотической несмещенности метода и приближенной оценки максимального по модулю собственного числа матрицы Якоби функции f позволяет выбирать размер шага интегрирования h , при котором не допускается большой потери точности вычислений в задачах, связанных с оценкой дисперсии решения СДУ.

Обзор работ по построению численных методов решения СДУ и их применению можно найти в работах Г. Н. Мильштейна и М. В. Третьякова [342], Д. Ф. Кузнецова [170], E. Platen and N. Bruti-Liberati [348]. Использование устойчивых (асимптотически несмещенных) методов необходимо для численного решения СДУ на больших интервалах времени [274], а также для решения задач, описывающих разномасштабные процессы [139]. Однако, существующие неявные устойчивые (асимптотически несмещенные) численные методы решения СДУ

являются очень трудоемкими. Поэтому актуальной является задача построения экономичных устойчивых численных методов решения СДУ.

Одной из важных задач теории управления является организация управления динамической системой таким образом, чтобы при ее эволюции сохранялись важные характеристики системы [131]. В реальном пространстве на динамическую систему оказывают влияние случайные факторы. Наиболее удачно это случайное воздействие можно описать с помощью винеровских и пуассоновских процессов. Появляются математические модели [146, 147], для моделирования которых необходима разработка численных методов, которые сохраняют важные характеристики системы (первые интегралы) [302]. Для решения таких моделей также необходимы методы, позволяющие решать СДУ с пуассоновской составляющей, зависящей от вектора фазовых координат. Возникает задача построения алгоритмов моделирования общего пуассоновского процесса, идентифицируемого с пуассоновской мерой, зависящей от времени и от вектора фазовых координат [298].

В конце 70-х годов XX века широкое распространение получили динамические системы со случайными изменениями условий функционирования, приводящими к внезапному изменению структуры в целом - к структурной неопределенности. Эти модели появились в ряде отраслей науки и в научных исследованиях, связанных с моделированием сложных явлений и процессов управления. Это задачи автоматизации управления системой, имеющей на неперекрывающихся временных интервалах различные режимы работы и разные структуры. Такие системы получили название систем со случайной структурой. Систематическое изложение таких задач и методов их анализа дано в работах И. Е. Казакова, В. М. Артемьева, В. А. Бухалева [116, 145]. Аналитическому моделированию стохастических систем посвящена монография И. М. Косачева, М. Г. Ерошенкова [157]. Задачи анализа систем со случайной структурой также рассматривались в работах В. А. Ганэ, В. Л. Степанова, В. Конторовича [121, 315], А. В. Пантелеева, И. Л. Сотсковой, [202] и др., а различные задачи синтеза оптимального

управления изучали А. Arapostathis, М. К. Ghosh и S. I. Marcus [290–292], К.А. Рыбаков [365] и др. Устойчивость дискретных систем со случайной структурой рассматривалась в работах П. В. Пакшина [200, 201, 286].

Состояние системы со случайной структурой характеризуется смешанным процессом $[\mathbf{y}(t), s(t)]^T$, описываемым при условии $s(t) = l$ стохастическим дифференциальным уравнением

$$d\mathbf{y}(t) = f^{(l)}(t, \mathbf{y}(t))dt + \sigma^{(l)}(t, \mathbf{y}(t))d\mathbf{w}(t), \quad t \in [0, T]; \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0.$$

Вектор фазовых координат $\mathbf{y}(t)$ для каждой структуры является многомерным марковским случайным процессом, а номер структуры $s(t)$ – целочисленным процессом с конечным числом состояний. Процесс $s(t)$ может быть марковским или условно марковским, зависящим от вектора $\mathbf{y}(t)$.

Переход системы из одной структуры в другую характеризуется функциями поглощения и восстановления. Разные способы задания функций поглощения и восстановления определяют разные типы систем со случайной структурой.

Системы с распределенными переходами особо выделяются среди систем со случайной структурой. В иностранной литературе такие системы называют СДУ с переключаемой диффузией (switching diffusion) или гибридные системы (hybrid systems), подразумевая непрерывную динамику и дискретные события смены структуры. Если интенсивности перехода не зависят от фазовых координат, то такие системы называют системами с **распределенными независимыми переходами**. Если интенсивности перехода зависят от фазовых координат - это системы с **распределенными зависимыми переходами**, они являются системами с условной марковской структурой и вероятности перехода дискретного случайного процесса $s(t)$ удовлетворяют условиям [145]

$$\begin{aligned} P(s(t + \Delta t) = r \mid s(t) = l, \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}) &= \lambda_{lr}(t, \mathbf{y})\Delta t + o(\Delta t), \\ P(s(t + \Delta t) = l \mid s(t) = l, \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}) &= 1 - \lambda_l(t, \mathbf{y})\Delta t + o(\Delta t), \\ s(t_0) = s_0, \quad l, r = 1, 2, \dots, S, \quad l &\neq r, \end{aligned}$$

где функция $\lambda_{lr}(t, \mathbf{y}): [t_0, T] \times R^{n_y} \rightarrow [0, +\infty)$ – *интенсивность* перехода из l -й структуры в r -ю, $\lambda_l(t, \mathbf{y}) = \sum_{r=1 \neq l}^S \lambda_{lr}(t, \mathbf{y})$.

Появилось много моделей, заданных такими системами, в экономике [285, 287, 306, 329, 330, 345, 352, 369, 379, 400], на производстве [288, 300, 326, 396], в технике [155, 158, 159], в биологии и медицине [276, 282, 343, 380, 391].

Сложность получаемых моделей затрудняет аналитическое исследование решений таких систем. Сложности, возникающие при решении указанных выше задач, на основе численных методов решения обобщенного уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова [202, 209, 211] или методов параметрической аппроксимации [143, 145, 268], делают особо актуальной разработку статистических алгоритмов.

В большинстве работ по численному решению рассматривается случай систем с распределенными независимыми переходами, когда процесс смены структуры не зависит от вектора состояния системы [234, 259, 292, 296, 297, 318, 319, 327, 362, 392, 394]. В качестве численных методов рассматриваются только различные модификации метода Эйлера–Маруямы. Методы моделирования систем с распределенными зависимыми переходами, когда процесс смены структуры зависит от вектора состояния системы, рассмотрены, например, в работах [355, 386–388, 390, 398, 399]. Однако и здесь, в качестве метода численного моделирования кроме метода Эйлера–Маруямы предложено не было. В работах [230, 233, 235, 275] построены явные и неявные численные методы, являющиеся обобщением методов Тейлора–Платена, Мильштейна и процесс смены структуры моделируется приближенным алгоритмом, как условно-марковский процесс с конечным числом состояний. Рассмотренные явные методы могут приводить к большой потере точности вычислений в задачах, связанных с оценкой дисперсии решения СДУ, вследствие сильных ограничений на шаг интегрирования из требований устойчивости. Неявные методы являются очень трудоемкими при решении систем СДУ. Поэтому *возникает актуальная задача построения экономичных устойчивых алгоритмов моделирования систем со*

случайной структурой с распределенными зависимыми и независимыми переходами .

Цели и задачи

Целью диссертационной работы является

- построение устойчивых (асимптотически несмещенных) численных методов решения систем стохастических дифференциальных уравнений;
- построение экономичных алгоритмов моделирования общих пуассоновских процессов;
- применение разработанных методов к статистическому анализу СДУ с пуассоновской составляющей и систем со случайной структурой;
- верификация построенных алгоритмов, сравнение с известными алгоритмами на решении практических и тестовых задач.

Научная новизна

● Построено семейство численных методов решения систем стохастических дифференциальных уравнений в смысле Стратоновича. Исследована согласованность, устойчивость (асимптотическая несмещенность), слабая сходимости и сходимости в среднеквадратическом смысле численных методов из предложенного семейства.

● Доказано, что численный метод решения СДУ, имеющий сильную сходимости численного решения к точному, сохраняет порядок сходимости при решении систем СДУ с первым интегралом, и тем самым дает возможность эффективного тестирования численных методов решения СДУ.

● Построены модифицированные численные методы решения СДУ, сохраняющие первый интеграл. Предложенная методика обеспечивает принадлежность моделируемых траекторий решения СДУ заданному гладкому многообразию.

- Построены алгоритмы статистического моделирования неоднородных пуассоновских точечных ансамблей и исследованы их сравнительные трудоемкости.

- Проведено сравнение построенных численных методов решения СДУ с известными численными методами.

- С целью повышения эффективности моделирования пуассоновских ансамблей со сложной интенсивностью, построен специальный экономичный способ моделирования последовательности дискретных случайных величин.

- На основе численных методов решения СДУ и алгоритмов моделирования пуассоновских точечных ансамблей построены статистические алгоритмы моделирования систем со случайной структурой.

Методология и методы исследования

В диссертационной работе использовались:

- аппарат теории методов Монте-Карло, включая теорию численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений,

- аппарат теории вероятностей, теории случайных процессов.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Построено семейство численных методов решения СДУ в смысле Стратоновича, исследованы их устойчивость (асимптотическая несмещенность), среднеквадратическая и слабая сходимости.
2. Построены модифицированные алгоритмы решения СДУ, сохраняющие первый интеграл. Предложенная методика обеспечивает принадлежность моделируемых траекторий решения СДУ заданному гладкому многообразию.
3. Построены эффективные алгоритмы моделирования пуассоновских точечных ансамблей со сложной интенсивностью на основе экономичных методов моделирования распределений.
4. Построен алгоритм приближенного «цифрового» моделирования неоднородных пуассоновских точечных ансамблей и доказана соответствующая слабая сходимость.

5. Построены экономичные алгоритмы моделирования пуассоновских точечных потоков.
6. Построены эффективные алгоритмы моделирования систем со случайной структурой с распределенными, зависимыми от фазовых координат, переходами на основе модифицированного метода максимального сечения. Доказана соответствующая теорема сходимости.
7. Построены и теоретически обоснованы эффективные методы, использующие разработанные алгоритмы моделирования пуассоновских ансамблей, для численного решения СДУ с пуассоновской составляющей в случае, когда пуассоновская мера зависит от времени и от фазовых координат.
8. Разработанные алгоритмы и их обоснование продемонстрированы на примере решения тестовых и ряда модельных задач, имеющих прикладное значение. Решены задачи фильтрации диффузионно-скачкообразных процессов и непрерывных систем с марковскими переключениями, а также задачи, связанные с вопросами фазовых переходов.

Соответствие паспорту специальности

Данное диссертационное исследование выполнено согласно паспорту специальности 01.01.07 «Вычислительная математика». Результаты диссертации удовлетворяют формуле специальности «вычислительная математика – область науки, к которой относятся разработка и теория методов численного решения математических задач, возникающих при моделировании естественнонаучных и прикладных проблем, а также реализация методов в практическом решении задач с применением современных ЭВМ» и соответствуют 1-му, 2-му и 4-му пунктам из основных направлений специальности:

- Создание алгоритмов численного решения задач алгебры, анализа, дифференциальных и интегральных уравнений, математиче-

ской физики, теории вероятностей и статистики, типичных для приложений математики к различным областям науки и техники.

- Разработка теории численных методов, анализ и обоснование алгоритмов, вопросы повышения их эффективности.
- Реализация численных методов в решении прикладных задач, возникающих при математическом моделировании естественнонаучных и научно-технических проблем, соответствие выбранных алгоритмов специфике рассматриваемых задач.

Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность полученных результатов основана на строгих доказательствах основных положений и подтверждается численными расчетами. Верификация результатов проведена на решении модельных и прикладных задач.

Основные научные результаты диссертации докладывались и обсуждались на Общественном научном семинаре Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (ИВМиМГ СО РАН), на объединенном семинаре ИВМиМГ СО РАН и кафедры вычислительной математики Механико-математического факультета Новосибирского государственного университета «Методы Монте-Карло в вычислительной математике и математической физике», а также на всероссийских и международных конференциях, в том числе:

- на международной конференции "Идентификация систем и задачи управления"(Москва 2003, 2004, 2005, 2006, 2012 гг.);
- на международной конференции по Вычислительной математике (Новосибирск 2002, 2004, 2011 гг.);
- на международной конференции IMACS Seminar on Monte Carlo Methods (Германия 2003 г.; Бельгия 2009 г.);
- на международной конференции по методам Монте-Карло и квази-Монте-Карло MC²QMC-2004(Франция 2004 г.; Германия 2006 г.; Канада 2008 г.);

- на международной конференции "St.Petersburg Workshop on Simulations"(Санкт-Петербург, 2005, 2009 гг.);
- на VII международной конференции "Large-Scale Scientific Computations"(June 4-8, 2009, Sozopol, Bulgaria, 2009 г.);
- на международной конференции "Актуальные проблемы математики, информатики, механики и теории управления"(Алматы, Казахстан, 2009);
- на VII IMACS Seminar on Monte Carlo Methods (Universite Libre de Bruxelles), Brussels, September 6-11, 2009;
- на VII международной конференции "Numerical Methods and Applications"(Боровец, Болгария, 2010);
- на международной конференции "Информационные и вычислительные технологии и системы (ИКВТС-2010)"(Улан-Удэ, 2010 г.);
- на международном симпозиуме "Обобщенные постановки и решения задач управления"(Улан-Батор, Монголия, 2010);
- на международной конференции "Мат. методы в технике и технологиях - ММТТ-24"(Киев, Украина, 2011);
- на международной конференции "Моделирование и оптимизация динамических систем и систем с распределенными параметрами"(Самара, 2011);
- Межд. конф. "Разностные схемы и их приложения ИПМ РАН, (Москва, 27-31.05.13г.);
- Intern. math. conf. «Bogolyubov readings DIF-2013. Dif. equations, theory of functions and their applications» 23-30.06.13, Sevastopol, UKRAINE;
- Межд. Азиатская школа-семинар по проблемам оптимизации сложных систем. (Кыргызстан, 2014 г. и 2015 г.; Новосибирск, 2016 г., 2017 г. и 2019 г.);
- Международной научно-технической конференции «АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЕСТЕСТВЕННО-НАУЧНЫХ И СОЦИАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ» (АЧМ?2015) г. Пенза, 28–30 октября 2015г.

— межд. конф. "Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики 19-23 октября 2015, Новосибирск,

— XV Межд. конф. "Авиация и космонавтика 14-18 ноября 2016, Москва, МАИ;

— межд. конф. «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов для решения задач математической физики», 5-11 сентября 2016 г., Новороссийск, Абрау-Дюрсо

— XX Юбилейная Международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным системам (ВМСППС'2017, Алушта, 24-31.05.2017г.) 2017;

— Межд. конф. по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу, г. Звенигород, Моск. Обл., 13-17 февраля 2017 г.;

— Международная конференция «Вычислительная и прикладная математика 2017» (ВПМ'17), 25-30 июня, 2017, Академгородок, Новосибирск;

— Международная конференция «Математика в современном мире», посвященную 60-летию образования Института математики, г. Новосибирск, 14 -19 августа 2017 г.;

— XI Всерос. научн. конф. с межд. участием "Мат. моделирование и краевые задачи"(27 -30 мая 2019, Самара;

— Международная конференция «Марчуковские научные чтения» (Академгородок, Новосибирск, 2019, 2020, 2021);

— Applied Methods of Statistical Analysis. Statistical Computation and Simulation, International Workshop 18-20 September, 2019. Novosibirsk State Technical University;

— Международная конференция «Колмогоровские чтения–IX. Общие проблемы управления и их приложения» (ОПУ – 2020), (Тамбов, 12 – 16 октября 2020 г.);

— Евразийская конференция по прикладной математике Новосибирск, Академгородок, 16-21 декабря 2021 г.;

Представленные в диссертационной работе результаты были получены в ходе выполнения исследований по государственным заданиям

(0251-2021-0002, 0315-2019-0002, 0315-2016-0002, 0315-2014-0002), гранту "Ведущие научные школы"00-15-96173, гранту Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ НШ-5111.2014.1, грантам РФФИ (№ 08-01-00334а, № 09-01-00798а, № 11-01-00282а, № 12-01-00490а, № 14-01-00787а, № 15-01-05052а, № 19-11-00003а).

Личный вклад автора

Все основные научные результаты диссертационной работы получены лично автором или при его непосредственном участии. В частности, вклад автора диссертационного исследования был определяющим при разработке, теоретическом и численном исследовании предложенных алгоритмов моделирования. Конфликт интересов с соавторами отсутствует.

Публикации По теме диссертационной работы Авериной Т.А. опубликовано более 50 печатных работ [1–31, 33–44, 47–92, 191, 192, 237, 238, 241–256, 367, 401], в том числе монография [45], 22 работы проиндексированы в системах Web of Science и/или Scopus [14, 16, 31–34, 40, 42, 46, 64, 69, 72, 73, 75, 77, 88, 191, 241, 243, 248, 253, 255]. Получены 2 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ (Программа ROS для решения автономной системы стохастических дифференциальных уравнений обобщенным двух стадийным методом Розенброка — № 2014615048; Программа вычисления вероятностных характеристик решения систем со случайной структурой с распределенными переходами методом Монте-Карло — № 2015611380). В опубликованных работах отражено основное содержание, результаты и выводы диссертационного исследования.

Объем и структура диссертации Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения, списка литературы. Диссертация изложена на 288 страницах, включает библиографический список из 402 наименований, содержит 60 рисунков и 49 таблиц.

Краткое содержание работы

Глава 1 диссертационной работы посвящена вопросам построения численных методов решения задачи Коши для стохастических диффе-

ренциальных уравнений. В параграфе 1.1 вводятся необходимые в дальнейшем определения. В параграфе 1.2 приводится общий вид рассматриваемого семейства численных методов решения СДУ в смысле Стратоновича. Семейство методов является обобщением методов типа Розенброка решения обыкновенных дифференциальных уравнений на случай стохастических дифференциальных уравнений. Оно также включает в себя и двухстадийные методы Рунге–Кутты, обобщенные для решения СДУ. Получены разложения в ряд Тейлора точного и численного решений задачи Коши для системы СДУ в смысле Стратоновича. Записаны уравнения согласованности, получено их решение и доказаны теоремы о слабой и среднеквадратической сходимости построенных методов. Свободные параметры методов выбирались из свойства асимптотической несмещенности методов.

В параграфе 1.3 рассмотрена задача Коши для СДУ с пуассоновской составляющей. Сформулирован принцип построения статистического алгоритма для ее решения, требующий умения моделировать общий пуассоновский процесс, зависящий от времени и вектора фазовых координат. Завершает первую главу параграф 1.4, в котором рассматриваются СДУ с первым интегралом. Доказана теорема о точности вычисления решения на многообразии численным методом, имеющим сильную сходимость, при условии, что точное решение с вероятностью единица лежит на гладком многообразии. Из-за погрешности численного метода решение не остается на многообразии. Построена методика коррекции численного метода, позволяющая оставаться решению на многообразии.

Глава 2 диссертационной работы посвящена вопросам построения экономических алгоритмов моделирования пуассоновского точечного ансамбля. В начале главы вводятся необходимые определения. В параграфе 2.1, с целью повышения эффективности моделирования пуассоновских точечных ансамблей со сложной интенсивностью, рассмотрены два экономических способа моделирования последовательности независимых дискретных случайных величин. Доказана теорема, в которой формули-

руется и обосновывается в многоэтапном варианте специальный способ моделирования независимых дискретных случайных величин с использованием одного базового случайного числа. В качестве второго экономичного способа построения последовательности независимых случайных величин, имеющих распределение Бернулли, рассмотрен метод А.А. Сидорова, основанный на использовании конечного числа случайных «битов». В параграфе 2.2 построены экономичные алгоритмы статистического моделирования неоднородного пуассоновского ансамбля со сложной интенсивностью. Рассмотрены также способы приближенного моделирования пуассоновских ансамблей. В частности, рассмотрен приближенный экономичный алгоритм, связанный с использованием конечного числа случайных «битов» в схеме Бернулли. Исследована трудоемкость такого алгоритма и доказана теорема о слабой сходимости соответствующего пуассоновского ансамбля к точному. Параграф 2.3 посвящен построению и исследованию алгоритмов моделирования пуассоновских точечных потоков, а также их оптимизации. Дополнительно рассмотрены еще два алгоритма моделирования пуассоновского точечного потока: 1) метод максимального сечения, основанный на моделировании обобщенной экспоненциальной плотности вероятности временных интервалов между соседними точками пуассоновского потока; 2) приближенный метод, использующий свойство ординарности пуассоновского потока. Построена оптимизация алгоритмов на основе специального экономичного способа моделирования последовательности независимых дискретных случайных величин. В параграфе 2.4 алгоритмы, построенные для моделирования пуассоновского точечного ансамбля, записаны для моделирования общего пуассоновского процесса, идентифицируемого с пуассоновской мерой.

В **Главе 3** диссертационной работы построены статистические алгоритмы моделирования систем со случайной структурой. В параграфе 3.1 приводится классификация систем со случайной структурой, формулируется общая постановка задачи анализа систем со случайной структурой в терминах СДУ, а также уравнений для безусловных и услов-

ных плотностей вектора состояния. Параграф 3.2 содержит описание основных вероятностных характеристик решения, и их статистические оценки. В параграфе 3.3 рассмотрена задача анализа систем со случайной структурой с распределенными переходами. На основе метода максимального сечения и его модификаций построены алгоритмы статистического моделирования процесса смены структуры и алгоритмы статистического моделирования систем со случайной структурой с зависимыми и независимыми переходами. Доказана теорема сходимости. В параграфе 3.4 описаны алгоритмы статистического моделирования систем с разделением времени и автономным управлением. В параграфе 3.5 рассмотрены алгоритмы статистического моделирования систем со случайной структурой и сосредоточенными переходами. Третью главу завершает параграф 3.6, в котором проведена условная оптимизация статистических алгоритмов, использующих численные методы решения СДУ.

В **Главе 4** представлены результаты по апробации разработанных численных методов и алгоритмов статистического моделирования. В параграфе 4.1 приведен сравнительный анализ точности восьми численных методов решения СДУ на трех системах СДУ, решения которых с вероятностью 1 находятся на заданных цилиндрических поверхностях второго порядка (эллиптическом, гиперболическом и параболическом цилиндрах). Был подтвержден первый порядок сильной сходимости построенных методов на системах СДУ с одним шумом. Также было подтверждено, что системы СДУ с первым интегралом можно использовать для тестовых расчетов с целью изучения сильной сходимости численных методов. Проведенное сравнение показало сохранение первого интеграла при проецировании приближенного решения на многообразии.

Параграф 4.2 посвящен сравнительному анализу алгоритмов моделирования пуассоновских процессов, на модельных примерах продемонстрирована эффективность разработанных модификаций алгоритмов моделирования пуассоновских процессов. В параграфе 4.3 проведен

сравнительный анализ приближенных алгоритмов моделирования пуассоновских процессов, построенных на основе свойства ординарности. В следующем параграфе 4.4 проведен сравнительный анализ алгоритмов моделирования систем со случайной структурой с распределенными переходами, рассмотрены задачи управления техническими объектами, полученные результаты сравниваются с известными приближенными методами. В параграфе 4.5 рассматривается задача о влиянии степени приоритета на качество управления. Статистический анализ систем со случайным периодом квантования сигналов во времени проведен в параграфе 4.6. Далее, в параграфах 4.7 и 4.8 проведена апробация метода максимального сечения в задаче фильтрации диффузионно-скачкообразных процессов и непрерывных систем с марковскими переключениями соответственно. В заключительном параграфе 4.9 проведена апробация асимптотически несмещенного метода (1.61) на тестовых задачах, связанных с вопросами фазовых переходов. В **Заключении** приведены основные результаты диссертационной работы и представлены перспективы дальнейшей разработки темы исследования.

Глава 1

Численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений

1.1. Задача Коши для СДУ

Введем необходимые понятия и определения.

Пусть $\{\Omega, \mathfrak{F}, P\}$ – полное вероятностное пространство.

Определение 1.1 [154]. Совокупность σ -алгебр $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$, $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}$, определенных для $t \geq 0$, называется *поток* σ -алгебр, если выполнены следующие условия:

1) σ -алгебра \mathfrak{F} полна относительно меры P (т. е. из $A \in \mathfrak{F}$, $P(A) = 0$ и $B \subset A$ следует, что $B \in \mathfrak{F}$), и \mathfrak{F}_0 содержит все события вероятности 0;

2) для $0 \leq s < t$ $\mathfrak{F}_s \subset \mathfrak{F}_t$ (\mathfrak{F}_t монотонно возрастает с t);

3) для всех $t \geq 0$ $\mathfrak{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathfrak{F}_s$ (\mathfrak{F}_t непрерывно справа по t).

Определение 1.2 [154]. Случайный векторный процесс $\xi(t)$, определенный для $t \geq 0$, *согласован с потоком* $\{\mathfrak{F}_t\}$, если $\xi(t)$ есть \mathfrak{F}_t -измеримый случайный вектор для каждого $t \geq 0$.

Определение 1.3 [154]. Случайный процесс $\mathbf{w}(t) = (w_1(t), \dots, w_{n_w}(t))^T$, $t \geq 0$, со значениями в R^{n_w} называется *n_w -мерным стандартным винеровским процессом*, если он удовлетворяет условиям:

1) является процессом с независимыми приращениями, т. е. для любых n , $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, случайные векторы $\mathbf{w}(t_1)$, $\mathbf{w}(t_2) - \mathbf{w}(t_1), \dots, \mathbf{w}(t_n) - \mathbf{w}(t_{n-1})$ взаимно независимы, причем $\mathbf{w}(0) = 0$;

2) является однородным процессом, т. е. распределения вектора $\mathbf{w}(t+h) - \mathbf{w}(t)$ не зависят от t ;

3) имеет гауссовское распределение с нулевым математическим ожиданием $E\mathbf{w}(t) = 0$ и корреляционной функцией $K_{\mathbf{w}}(t, s) = E(\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^\top(s)) = I \cdot \min(t, s)$, где I – единичная матрица размера $n_w \times n_w$.

Отметим, что траектории винеровского процесса с вероятностью единица непрерывны, но не дифференцируемы.

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ заданы:

- поток σ -алгебр $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \in [0, T]}$;
- n_w -мерный стандартный винеровский процесс $\mathbf{w}(t)$, $t \in [0, T]$, согласованный с $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \in [0, T]}$, приращения которого $\mathbf{w}(t + s) - \mathbf{w}(t)$ при $s > 0$ не зависят от σ -алгебры \mathfrak{F}_t ;
- \mathfrak{F}_0 – измеримый n_y -мерный случайный вектор \mathbf{y}_0 , независимый с $\mathbf{w}(t)$ при $t \geq 0$, причем $E(|\mathbf{y}_0|^2) < \infty$.

Задача Коши для системы стохастических дифференциальных уравнений ставится следующим образом: найти n_y -мерный согласованный с потоком $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ случайный процесс $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_{n_y}(t))^\top$, имеющий стохастический дифференциал

$$d\mathbf{y}(t) = f(t, \mathbf{y}(t))dt + \sum_{j=1}^{n_w} \sigma_{\cdot j}(t, \mathbf{y}(t))dw_j(t), \quad t \in [0, T]; \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \quad (1.1)$$

где $f(t, \mathbf{y})$ – измеримая по совокупности переменных n_y -мерная вектор-функция, $\sigma(t, \mathbf{y})$ – измеримая по совокупности переменных матричная функция размера $n_y \times n_w$; $\sigma_{\cdot j}$ – j -й столбец матрицы σ .

Существует другая, интегральная форма записи задачи Коши для систем СДУ:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_0^t f(\tau, \mathbf{y}(\tau))d\tau + \sum_{j=1}^{n_w} \int_0^t \sigma_{\cdot j}(\tau, \mathbf{y}(\tau))dw_j(\tau), \quad t \in [0, T]. \quad (1.2)$$

Интеграл

$$\int_0^t \sigma_{\cdot j}(\tau, \mathbf{y}(\tau)) dw_j(\tau)$$

определяется следующим образом.

Определение 1.4 [225]. *Стохастическим θ -интегралом* ($\theta \in [0, 1]$) по стандартному винеровскому процессу называется среднеквадратический предел

$$\begin{aligned} \int_0^t \sigma(\tau, \mathbf{y}(\tau)) d_\theta \mathbf{w}(\tau) &= \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{K-1} \sigma\left(t_n, (1-\theta)\mathbf{y}(t_n) + \theta\mathbf{y}(t_{n+1})\right) \times \\ &\times [\mathbf{w}(t_{n+1}) - \mathbf{w}(t_n)], \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $\{t_n\}$ – равномерная сетка на $[0, t]$ с шагом $h = t/K$, $t_0 = 0$.

Если $\theta = 0$, то стохастический интеграл (1.3) называется *интегралом Ито*. Для интеграла Ито принято обычное обозначение

$$\int_0^t \sigma(\tau, \mathbf{y}(\tau)) d\mathbf{w}(\tau) = \int_0^t \sigma(\tau, \mathbf{y}(\tau)) d_0 \mathbf{w}(\tau).$$

Интеграл Ито обладает замечательным свойством

$$\mathbb{E} \int_0^t \sigma(\tau, \mathbf{y}(\tau)) d\mathbf{w}(\tau) = 0.$$

Если $\theta = 1/2$, то стохастический интеграл (1.3) называется *интегралом Стратоновича*. Для интеграла Стратоновича принято обозначение

$$\int_0^t \sigma(\tau, \mathbf{y}(\tau)) \circ d\mathbf{w}(\tau) = \int_0^t \sigma(\tau, \mathbf{y}(\tau)) d_{1/2} \mathbf{w}(\tau).$$

Преимущество интеграла Стратоновича состоит в том, что с ним можно обращаться по обычным правилам (имеются в виду правила замены переменных, интегрирования по частям и т. п.).

В зависимости от того, в каком смысле понимается интеграл по винеровскому процессу, в таком смысле и будут пониматься стохастические дифференциальные уравнения (1.1) и (1.2). Связь между интегралами Ито и Стратоновича выражается формулой

$$\int_0^t \sigma_{\cdot j}(\tau, \mathbf{y}(\tau)) dw_j(\tau) = \int_0^t \sigma_{\cdot j}(\tau, \mathbf{y}(\tau)) \circ dw_j(\tau) - \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i=1}^{n_w} \frac{\partial \sigma_{\cdot j}}{\partial y_i} \sigma_{ij}(\tau, \mathbf{y}(\tau)) d\tau. \quad (1.4)$$

Поэтому всегда возможен переход от СДУ в смысле Ито к СДУ в смысле Стратоновича и наоборот. Отметим, что в случае, когда матрица σ не зависит от решения, СДУ в смысле Ито и соответствующее ему СДУ в смысле Стратоновича совпадают.

Следующая теорема устанавливает условия существования и единственности задачи Коши (1.1) для СДУ в смысле Ито [123].

Теорема 1.1. Пусть $f(t, \mathbf{y})$ и $\sigma(t, \mathbf{y})$ таковы, что для некоторой положительной постоянной K равномерно по t выполнены условия:

$$|f(t, \mathbf{y}_1) - f(t, \mathbf{y}_2)|^2 + |\sigma(t, \mathbf{y}_1) - \sigma(t, \mathbf{y}_2)|^2 \leq K |\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2|^2,$$

$$|f(t, \mathbf{y})|^2 + |\sigma(t, \mathbf{y})|^2 \leq K(1 + |\mathbf{y}|^2),$$

при $\mathbf{y}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in R^{n_y}$, где $|\sigma|^2 = \sum (\sigma_{ij})^2$, тогда для любого $\mathbf{y}_0 \in R^{n_y}$, $E|\mathbf{y}_0|^2 < \infty$ существует единственное решение $\mathbf{y}(t)$ рассматриваемой задачи Коши для СДУ в смысле Ито (1.1), причем $\mathbf{y}(t)$ – непрерывный марковский процесс и $E \left[\int_0^T |\mathbf{y}(t)|^2 dt \right] < \infty$.

Условия существования и единственности решения СДУ в смысле Стратоновича можно получить с учетом (1.4). В дальнейшем всегда будем предполагать, что функции f и σ имеют непрерывные ограниченные частные производные любого необходимого порядка.

Для одномерной плотности $p(t, \mathbf{y})$ распределения решения системы СДУ выполняется прямое уравнение Колмогорова [123]:

$$\frac{\partial p(t, \mathbf{y})}{\partial t} = - \sum_{i=1}^{n_y} \frac{\partial}{\partial y_i} [a_i(t, \mathbf{y}) p(t, \mathbf{y})] + \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^{n_y} \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_l} [b_{jl}(t, \mathbf{y}) p(t, \mathbf{y})], \quad (1.5)$$

$$p(0, \mathbf{y}) = p_0(\mathbf{y}),$$

где

$$a_i = \begin{cases} f_i, & \text{если (1.1) - СДУ Ито,} \\ f_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_w} \sum_{k=1}^{n_y} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \mathbf{y}_k} \sigma_{kj}, & \text{если (1.1) - СДУ Стратоновича,} \end{cases}$$

матрица диффузии $B(t, \mathbf{y}) = \sigma(t, \mathbf{y})\sigma^\top(t, \mathbf{y})$.

1.2. Семейство численных методов решения СДУ в смысле Стратоновича

Для статистического моделирования траекторий решения систем СДУ в смысле Стратоновича

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_0^t f(\mathbf{y}(\tau))d\tau + \sum_{j=1}^{n_w} \int_0^t \sigma_{\cdot j}(\mathbf{y}(\tau)) \circ dw_j(\tau), \quad t \in [0, T], \quad (1.6)$$

будем использовать семейство численных методов вида [49]

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + p_1 k_1 + p_2 k_2 + \sqrt{h}(q_{11}G_0 + q_{12}G_1 + q_{13}G_2)\zeta_n, \quad (1.7)$$

$$G_0 = \sigma(\mathbf{y}_n),$$

$$k_1 = [I - ha \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}]^{-1} [hf + q_1 \sqrt{h} G_0 \zeta_n + \frac{q_2 h}{2} \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{y}} \sigma \zeta_n^2],$$

$$G_1 = \sigma\left(\mathbf{y}_n + \alpha_1 k_1 + q_3 \sqrt{h} G_0 \zeta_n + \frac{q_4 h}{2} \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{y}} \sigma \zeta_n^2\right),$$

$$k_2 = [I - ha \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}]^{-1} \left[hf\left(\mathbf{y}_n + \alpha_2 k_1 + q_5 \sqrt{h} G_0 \zeta_n + \frac{q_6 h}{2} \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{y}} \sigma \zeta_n^2\right) + \right. \\ \left. + q_7 \sqrt{h} G_1 \zeta_n + \frac{q_8 h}{2} \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{y}} \sigma \zeta_n^2 \right],$$

$$G_2 = \sigma\left(\mathbf{y}_n + \alpha_3 k_1 + \alpha_4 k_2 + q_9 \sqrt{h} G_1 \zeta_n + \frac{q_{10} h}{2} \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{y}} \sigma \zeta_n^2\right).$$

Здесь все значения функций, у которых не указан аргумент, вычисляются в точке \mathbf{y}_n , где \mathbf{y}_n , $n = 0, 1, \dots, K$, - значения приближенного решения системы СДУ (1.6) в узлах сетки по времени $t_n = t_0 + nh$;

h – шаг интегрирования; a, p_i, q_i, α_i – вещественные параметры метода; ζ_n – n_w -мерный вектор независимых гауссовских случайных величин с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией; $\{\zeta_n\}$ независимы с $\{\mathbf{y}_n\}$;

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{y}} \sigma \zeta_n^2 = \sum_{j_1=1}^{n_w} \sum_{j_2=1}^{n_w} \sum_{i=1}^{n_y} \frac{\partial \sigma \cdot j_1}{\partial y_i} \sigma_{ij_2} \zeta_{j_1 n} \zeta_{j_2 n}. \quad (1.8)$$

Данное семейство является обобщением методов Розенброка [363] на случай стохастических дифференциальных уравнений. Методы Розенброка являются А-устойчивыми [281]. А-устойчивость методов Розенброка достигается с помощью параметра a . Наличие параметра a в обобщенных методах Розенброка также позволяет улучшить их свойства устойчивости.

Разные авторы используют различные определения аппроксимации и сходимости численного метода решения задачи Коши для СДУ. В диссертации будут рассматриваться аппроксимация и сходимость численного метода в среднеквадратическом смысле и в слабом смысле. Приведем необходимые определения. Для простоты полагаем, что $h = t_{n+1} - t_n = T/K$; $n = 0, \dots, K - 1$; $t_0 = 0$.

Будет рассматриваться следующее определение сходимости метода в среднеквадратическом смысле («mean-square method») [238].

Определение 1.5 [238]. Численный метод *аппроксимирует* точное решение задачи Коши для СДУ (1.6) с порядком p в среднеквадратическом смысле, если для условного математического ожидания выполняется равенство

$$\max_{0 \leq n \leq K-1} \mathbb{E}(|\mathbf{y}(t_{n+1}) - \mathbf{y}_{n+1}|^2 / \mathbf{y}_n = \mathbf{y}(t_n)) = \mathcal{O}(h^{p+1}) \text{ при } h \rightarrow 0.$$

Определение 1.6 [238]. Численный метод *сходится* с порядком p в среднеквадратическом смысле, если

$$\max_{1 \leq n \leq K} \mathbb{E}(|\mathbf{y}(t_n) - \mathbf{y}_n|^2 / \mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(0)) = \mathcal{O}(h^p) \text{ при } h \rightarrow 0.$$

Будем также говорить, что метод имеет порядок p в среднеквадратическом смысле.

В работе [314]) используется понятие сильной сходимости метода.

Определение 1.7 [314]. Численный метод имеет p -й порядок сильной сходимости, если

$$\max_{0 \leq n \leq K-1} \mathbb{E}(|\mathbf{y}(t_{n+1}) - \mathbf{y}_{n+1}| / \mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(t_0)) = \mathcal{O}(h^p) \text{ при } h \rightarrow 0.$$

Определение 1.8 [183]. Функция $g(\mathbf{y})$ принадлежит классу F , если найдутся такие постоянные $K > 0$ и $\kappa \geq 0$, что для всех $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_y}$ выполняется неравенство

$$|g(\mathbf{y})| \leq K(1 + |\mathbf{y}|^\kappa).$$

Определение 1.9 [183]. Численный метод *слабо аппроксимирует* точное решение задачи Коши для СДУ (1.6) с порядком p , если для любой функции $g(\mathbf{y})$, которая вместе со своими частными производными до порядка $2p + 2$ включительно принадлежит классу F , выполняется

$$\max_{0 \leq n \leq K-1} |\mathbb{E}(g(\mathbf{y}(t_{n+1})) - g(\mathbf{y}_{n+1}) / \mathbf{y}_n = \mathbf{y}(t_n))| = \mathcal{O}(h^{p+1}) \text{ при } h \rightarrow 0.$$

Определение 1.10 [183]. Численный метод *слабо сходится с порядком* p на решении задачи Коши для СДУ (1.6), если для любой функции $g(\mathbf{y})$, которая вместе со своими частными производными до порядка $2p + 2$ включительно принадлежит классу F , выполняется

$$\max_{0 \leq n \leq K-1} |\mathbb{E}(g(\mathbf{y}(t_{n+1})) - g(\mathbf{y}_{n+1}) / \mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(0))| = \mathcal{O}(h^p) \text{ при } h \rightarrow 0.$$

Будем говорить, что метод имеет p -й порядок слабой сходимости.

Также будет изучаться асимптотическая несмещенность численных методов решения СДУ [238].

Решение стохастического дифференциального уравнения

$$dy(t) = -\alpha y(t)dt + \sigma dw(t), \quad y(0) = y_0, \quad (1.9)$$

где α , σ – вещественные коэффициенты, при нормальном начальном значении y_0 является гауссовским процессом и называется *процессом Орнштейна – Уленбека*. Математическое ожидание и дисперсия точного решения при $\alpha > 0$ имеют следующее асимптотическое поведение при $t \rightarrow \infty$:

$$m_y(t) = e^{-\alpha t} m_y(0) \rightarrow 0, \quad (1.10)$$

$$D_y(t) = e^{-2\alpha t} D_0 + \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}) \rightarrow \frac{\sigma^2}{2\alpha}, \quad (1.11)$$

где D_0 – дисперсия случайной величины y_0 . Корреляционная функция точного решения (1.9) имеет вид

$$R_y(t, t + \tau) = D_y(t) e^{-\alpha|\tau|}.$$

Если $D_y(t) \equiv \text{const}$, то корреляционная функция процесса Орнштейна – Уленбека зависит только от τ . Отметим, что СДУ (1.9) в смысле Ито и в смысле Стратоновича неразличимы, так как $\sigma \equiv \text{const}$, и поэтому СДУ (1.9) может быть модельным для любых численных методов.

Определение 1.11 [106]. Численный метод называется *асимптотически несмещенным с шагом $h > 0$* , если при его применении с этим шагом к скалярному линейному СДУ (1.9) с $\alpha > 0$ распределение численного решения y_n при $n \rightarrow \infty$ сходится к нормальному распределению с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2/2\alpha$.

Определение 1.12 [106]. Интервал $(x_0, 0)$ называется *интервалом асимптотической несмещенности* метода, если метод является асимптотически несмещенным с любым шагом $h > 0$, для которого $-\alpha h \in (x_0, 0)$.

Определение 1.13 [106]. Численный метод называется *γ -асимптотически смещенным* при $0 < h \leq h_0$, если при его применении с фиксированным шагом h к скалярному линейному СДУ (1.9) с $\alpha > 0$ распределение численного решения y_n при $n \rightarrow \infty$ сходится к нормальному

распределению с нулевым математическим ожиданием и дисперсией \bar{d} , причем

$$\left| \frac{\bar{d}}{\sigma^2/2\alpha} - 1 \right| \leq \gamma.$$

Понятие асимптотической несмещенности метода можно определить и для систем СДУ.

Определение 1.14 [50]. Численный метод решения СДУ называется *асимптотически несмещенным* при $0 < h < h_0$, если при его применении с фиксированным шагом h к линейной системе СДУ с аддитивным шумом

$$dy(t) = Ay(t)dt + \sigma dw(t),$$

когда все собственные значения матрицы A имеют отрицательные вещественные части, распределение численного решения y_n при $n \rightarrow \infty$ сходится к нормальному распределению с нулевым математическим ожиданием и дисперсией D , удовлетворяющей уравнению Ляпунова

$$AD + DA^\top = -\sigma\sigma^\top.$$

Свойство асимптотической несмещенности метода согласуется с асимптотическим поведением распределения точного решения СДУ (1.9), в частности с поведением математического ожидания (1.10) и дисперсии (1.11) точного решения при $t \rightarrow \infty$.

1.2.1. Разложение в ряд Тейлора точного и численного решений СДУ

Построим разложение в ряд Тейлора точного решения однородной по времени задачи Коши для системы СДУ (1.6) в смысле Стратоновича [237]. Это разложение потребуется в дальнейшем для определения порядка согласованности численных методов решения СДУ.

Задачу Коши для системы СДУ в смысле Стратоновича (1.6) можно записать в виде

$$\mathbf{y}(t+h) = \mathbf{y}(t) + \int_t^{t+h} f(\mathbf{y}(\tau))d\tau + \sum_{j=1}^{n_w} \int_t^{t+h} \sigma_{\cdot j}(\mathbf{y}(\tau)) \circ dw_j(\tau). \quad (1.12)$$

Проведя замену переменных $\tau = t + \tau_1$ и используя свойства однородности и независимости приращений винеровского процесса, получим

$$\mathbf{y}(t+h) = \mathbf{y}(t) + \int_0^h f(\mathbf{y}(t+\tau_1))d\tau_1 + \sum_{j_1=1}^{n_w} \int_0^h \sigma_{\cdot j_1}(\mathbf{y}(t+\tau_1)) \circ dw_{j_1}^t(\tau_1), \quad (1.13)$$

где $w_{j_1}^t(\tau_1) = w_{j_1}(t + \tau_1)$.

Так как с интегралом Стратоновича можно обращаться по обычным правилам, как если бы траектории диффузионных процессов были гладкими функциями, то для любой непрерывно дифференцируемой функции $\varphi(\mathbf{y})$ справедливо равенство

$$\varphi(\mathbf{y}(t)) = \varphi(\mathbf{y}(s)) + \int_s^t \mathbf{L}\varphi(\mathbf{y}(u))du + \sum_{j=1}^{n_w} \int_s^t \Lambda_j \varphi(\mathbf{y}(u)) \circ dw_j(u), \quad (1.14)$$

где $s < t$, \mathbf{L} и Λ_j – операторы дифференцирования:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\varphi(\mathbf{y}(s)) &= \sum_{j=1}^{n_y} \frac{\partial \varphi}{\partial y_j}(\mathbf{y}(s)) f_j(\mathbf{y}(s)), \\ \Lambda_j \varphi(\mathbf{y}(s)) &= \sum_{l=1}^{n_y} \frac{\partial \varphi}{\partial y_l}(\mathbf{y}(s)) \sigma_{lj}(\mathbf{y}(s)), \quad j = 1, \dots, n_w. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Для функций $f(\mathbf{y})$ и $\sigma(\mathbf{y})$ согласно (1.14) имеем

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}(t + \tau_1)) &= f(\mathbf{y}(t)) + \int_0^{\tau_1} \mathbf{L}f(\mathbf{y}(t + \tau_2))d\tau_2 + \\ &+ \sum_{j=1}^{n_w} \int_0^{\tau_1} \Lambda_j f(\mathbf{y}(t + \tau_2)) \circ dw_j^t(\tau_2), \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\cdot j_1}(\mathbf{y}(t + \tau_1)) &= \sigma_{\cdot j_1}(\mathbf{y}(t)) + \int_0^{\tau_1} \mathbf{L}\sigma_{\cdot j_1}(\mathbf{y}(t + \tau_2))d\tau_2 + \\ &+ \sum_{j_2=1}^{n_w} \int_0^{\tau_1} \Lambda_{j_2} \sigma_{\cdot j_1}(\mathbf{y}(t + \tau_2)) \circ dw_{j_2}^t(\tau_2). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Подставляя (1.16), (1.17) в (1.13), получаем

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(t+h) = & \mathbf{y}(t) + \sum_{j=1}^{n_w} \sigma_{\cdot j}(\mathbf{y}(t)) \Delta w_j^t(h) + hf(\mathbf{y}(t)) + \\
& + \sum_{j_1, j_2=1}^{n_w} \int_0^h \int_0^{\tau_1} \Lambda_{j_2} \sigma_{\cdot j_1}(\mathbf{y}(t+\tau_2)) \circ dw_{j_2}^t(\tau_2) \circ dw_{j_1}^t(\tau_1) + \\
& + \int_0^h \int_0^{\tau_1} \mathbf{L}f(\mathbf{y}(t+\tau_2)) d\tau_2 d\tau_1 + \sum_{j=1}^{n_w} \int_0^h \int_0^{\tau_1} \mathbf{L}\sigma_{\cdot j}(\mathbf{y}(t+\tau_2)) d\tau_2 \circ dw_j^t(\tau_1) + \\
& + \sum_{j=1}^{n_w} \int_0^h \int_0^{\tau_1} \Lambda_j f(\mathbf{y}(t+\tau_2)) \circ dw_j^t(\tau_2) d\tau_1, \quad (1.18)
\end{aligned}$$

где $\Delta w_j^t(h) = w_j(t+h) - w_j(t)$, $j = 1, \dots, n_w$. Используя свойство перестановочности интеграла и оператора дифференцирования и предполагая наличие у функций $f(\mathbf{y})$ и $\sigma(\mathbf{y})$ необходимых непрерывных частных производных, после рекуррентной подстановки (1.16) и (1.17) в (1.18) получим разложение в ряд Тейлора точного решения задачи Коши для системы СДУ (1.13) в смысле Стратоновича.

Запишем формулу разложения точного решения с остаточным членом ρ , для которого $E\rho = \mathbf{O}(h^2)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(t+h) = & \mathbf{y}(t) + \sum_{j=1}^{n_w} \sigma_{\cdot j}(\mathbf{y}(t)) \Delta w_j^t(h) + hf(\mathbf{y}(t)) + \\
& + \sum_{j_1, j_2=1}^{n_w} \Lambda_{j_2} \sigma_{\cdot j_1}(\mathbf{y}(t)) \int_0^h \Delta w_{j_2}^t(s) \circ dw_{j_1}^t(s) + \frac{h^2}{2} \mathbf{L}f(\mathbf{y}(t)) + \\
& + \sum_{j=1}^{n_w} \mathbf{L}\sigma_{\cdot j}(\mathbf{y}(t)) \int_0^h s \circ dw_j^t(s) + \sum_{j=1}^{n_w} \Lambda_j f(\mathbf{y}(t)) \int_0^h \Delta w_j^t(s) ds + \\
& + \sum_{j_1, j_2, j_3=1}^{n_w} \Lambda_{j_3} \Lambda_{j_2} \sigma_{\cdot j_1}(\mathbf{y}(t)) \int_0^h \int_0^{\tau_1} \Delta w_{j_3}^t(\tau_2) \circ dw_{j_2}^t(\tau_2) \circ dw_{j_1}^t(\tau_1) + \\
& + \rho = \tilde{\mathbf{y}}(t) + \rho. \quad (1.19)
\end{aligned}$$

Все стохастические интегралы в (1.19) являются интегралами Стратоновича.

Замечание. Разложение в ряд Тейлора точного решения системы СДУ в смысле Ито можно получить аналогичным образом, только надо помнить, что нельзя выполнять операции дифференцирования и интегрирования по обычным правилам, а всегда необходимо использовать формулу Ито дифференцирования сложной функции. Для СДУ в смысле Ито (1.12) в равенстве (1.14) операторы дифференцирования определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\varphi(\mathbf{y}(s)) &= \sum_{j=1}^{n_y} \frac{\partial \varphi}{\partial y_j}(\mathbf{y}(s)) f_j(\mathbf{y}(s)) + \frac{1}{2} \sum_{i_1, i_2=1}^{n_y} \sum_{j=1}^{n_w} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_{i_1} \partial y_{i_2}} \sigma_{i_1 j} \sigma_{i_2 j}(\mathbf{y}(s)), \\ \Lambda_j \varphi(\mathbf{y}(s)) &= \sum_{i=1}^{n_y} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}(\mathbf{y}(s)) \sigma_{ij}(\mathbf{y}(s)), \quad j = 1, \dots, n_w. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Разложение в ряд Тейлора точного решения задачи Коши СДУ в смысле Ито (1.13) получено в работе [349]. Разложение имеет также вид (1.19), только операторы дифференцирования определяются формулой (1.20) и все стохастические интегралы в (1.19) являются интегралами Ито. При $\sigma(\mathbf{y}) \equiv \text{const}$ разложение (1.19) значительно упрощается.

Заменяя в разложении (1.19) в ряд Тейлора точного решения системы СДУ в смысле Стратоновича операторы \mathbf{L} и Λ_j согласно (1.15), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t+h) &= \mathbf{y}(t) + \sum \sigma_{\cdot j} \xi_1^j + hf + \sum \frac{\partial \sigma_{\cdot j_1}}{\partial y_i} \sigma_{ij_2} \xi_2^{j_1 j_2} + \frac{h^2}{2} \sum \frac{\partial f}{\partial y_i} f_i + \\ &+ \sum \frac{\partial \sigma_{\cdot j}}{\partial y_i} f_i \xi_3^j + \sum \frac{\partial f}{\partial y_i} \sigma_{ij} \xi_4^j + \sum \frac{\partial \sigma_{\cdot j_1}}{\partial y_{i_1}} \frac{\partial \sigma_{i_1 j_2}}{\partial y_{i_2}} \sigma_{i_2 j_3} \xi_5^{j_1 j_2 j_3} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 \sigma_{\cdot j_1}}{\partial y_{i_1} \partial y_{i_2}} \sigma_{i_1 j_2} \sigma_{i_2 j_3} \xi_6^{j_1 j_2 j_3} + \rho = \tilde{\mathbf{y}}(t) + \rho, \end{aligned} \quad (1.21)$$

где

$$\begin{aligned} \xi_1^j &= \Delta w_j^t(h), & \xi_2^{j_1 j_2} &= \int_0^h \Delta w_{j_2}^t(\tau) \circ dw_{j_1}^t(\tau), \\ \xi_3^j &= \int_0^h \tau \circ dw_j^t(\tau), & \xi_4^j &= \int_0^h \Delta w_j^t(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

$$\xi_5^{j_1 j_2 j_3} = \int_0^h \int_0^{\tau_1} \Delta w_{j_3}^t(\tau_2) \circ dw_{j_2}^t(\tau_2) \circ dw_{j_1}^t(\tau_1),$$

$$\xi_6^{j_1 j_2 j_3} = \xi_5^{j_1 j_2 j_3} + \xi_5^{j_1 j_3 j_2} = \int_0^h \Delta w_{j_3}^t(\tau) \Delta w_{j_2}^t(\tau) \circ dw_{j_1}^t(\tau). \quad (1.22)$$

Здесь и ниже по умолчанию полагается суммирование по индексу i_k от 1 до n_y , а по индексу j_k – от 1 до n_w . Все коэффициенты в разложении (1.21) вычисляются в точке $\mathbf{y}(t)$.

Если возьмем следующие члены в разложении в ряд Тейлора точного решения задачи Коши для систем СДУ в смысле Стратоновича (1.13) (используя обозначения в формуле (1.19)), то

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t+h) &= \tilde{\mathbf{y}}(t) + \\ &+ \sum \Lambda_{j_4} \Lambda_{j_3} \Lambda_{j_2} \sigma_{\cdot j_1}(\mathbf{y}(t)) \int_0^h \int_0^{\tau} \int_0^{\tau_1} \Delta w_{j_4}^t(\tau_2) \circ dw_{j_3}^t(\tau_2) \circ dw_{j_2}^t(\tau_1) \circ dw_{j_1}^t(\tau) + \\ &+ \sum \Lambda_{j_2} \mathbf{L} \sigma_{\cdot j_1}(\mathbf{y}(t)) \int_0^h \int_0^{\tau} \Delta w_{j_2}^t(\tau_1) d\tau_1 \circ dw_{j_1}^t(\tau) + \\ &+ \sum \mathbf{L} \Lambda_{j_2} \sigma_{\cdot j_1}(\mathbf{y}(t)) \int_0^h \int_0^h \tau_1 \circ dw_{j_2}^t(\tau_1) \circ dw_{j_1}^t(\tau) + \\ &+ \sum \Lambda_{j_2} \Lambda_{j_1} f(\mathbf{y}(t)) \int_0^h \int_0^{\tau} \Delta w_{j_2}^t(\tau_1) \circ dw_{j_1}^t(\tau_1) d\tau + \rho_1, \quad (1.23) \end{aligned}$$

и $E\rho_1 = \mathcal{O}(h^3)$.

Заменяя в выражении (1.23) операторы \mathbf{L} и Λ_j согласно (1.15), после приведения подобных членов получаем (используя обозначения (1.21)):

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t+h) &= \tilde{\mathbf{y}}(t) + \sum \frac{\partial \sigma_{\cdot j_1}}{\partial y_{i_1}} \frac{\partial \sigma_{i_1 j_2}}{\partial y_{i_2}} \frac{\partial \sigma_{i_2 j_3}}{\partial y_{i_3}} \sigma_{i_3 j_4} \xi_7^{j_1 j_2 j_3 j_4} + \sum \frac{\partial \sigma_{\cdot j_1}}{\partial y_{i_1}} \frac{\partial f_{i_1}}{\partial y_{i_2}} \sigma_{i_2 j_2} \xi_8^{j_1 j_2} + \\ &+ \sum \frac{\partial \sigma_{\cdot j_1}}{\partial y_{i_1}} \frac{\partial \sigma_{i_1 j_2}}{\partial y_{i_2}} f_{i_2} \xi_9^{j_1 j_2} + \sum \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial \sigma_{i_1 j_1}}{\partial y_{i_2}} \sigma_{i_2 j_2} \xi_{10}^{j_1 j_2} + \\ &+ \sum \frac{\partial^2 \sigma_{\cdot j_1}}{\partial y_{i_1} \partial y_{i_2}} \frac{\partial \sigma_{i_1 j_2}}{\partial y_{i_3}} \sigma_{i_2 j_3} \sigma_{i_3 j_4} \xi_{11}^{j_1 j_2 j_3 j_4} + \sum \frac{\partial^2 \sigma_{\cdot j_1}}{\partial y_{i_1} \partial y_{i_2}} f_{i_1} \sigma_{i_2 j_2} \xi_{12}^{j_1 j_2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{6} \sum \frac{\partial^3 \sigma_{\cdot j_1}}{\partial y_{i_1} y_{i_2} y_{i_3}} \sigma_{i_1 j_2} \sigma_{i_2 j_3} \sigma_{i_3 j_4} \xi_{13}^{j_1 j_2 j_3 j_4} + \\
& + \frac{1}{2} \sum \frac{\partial \sigma_{\cdot j_1}}{\partial y_{i_1}} \frac{\partial^2 \sigma_{i_1 j_2}}{\partial y_{i_2} y_{i_3}} \sigma_{i_2 j_3} \sigma_{i_3 j_4} \xi_{14}^{j_1 j_2 j_3 j_4} + \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 a}{\partial y_{i_1} \partial y_{i_2}} \sigma_{i_1 j_1} \sigma_{i_2 j_2} \xi_{15}^{j_1 j_2} + \rho_1,
\end{aligned} \tag{1.24}$$

где ξ_1, \dots, ξ_6 из (1.22),

$$\begin{aligned}
\xi_7^{j_1 j_2 j_3 j_4} &= \int_0^h \int_0^\tau \int_0^{\tau_1} \Delta w_{j_4}^t(\tau) \circ dw_{j_3}^t(\tau_2) \circ dw_{j_2}^t(\tau_1) \circ dw_{j_1}^t(\tau), \\
\xi_8^{j_1 j_2} &= \int_0^h \int_0^\tau \Delta w_{j_2}^t(\tau_1) d\tau_1 \circ dw_{j_1}^t(\tau), \\
\xi_9^{j_1 j_2} &= \int_0^h \int_0^\tau \tau_1 dw_{j_2}^t(\tau_1) \circ dw_{j_1}^t(\tau), \\
\xi_{10}^{j_1 j_2} &= \int_0^h \int_0^\tau \Delta w_{j_2}^t(\tau_1) \circ dw_{j_1}^t(\tau_1) d\tau, \\
\xi_{11}^{j_1 j_2 j_3 j_4} &= \xi_7^{j_1 j_2 j_3 j_4} + \xi_7^{j_1 j_3 j_2 j_4} + \xi_7^{j_1 j_2 j_4 j_3} = \\
&= \int_0^h \Delta w_{j_3}^t(\tau) \int_0^\tau \Delta w_{j_4}^t(\tau_1) \circ dw_{j_2}^t(\tau_1) \circ dw_{j_1}^t(\tau), \\
\xi_{12}^{j_1 j_2} &= \xi_8^{j_1 j_2} + \xi_9^{j_1 j_2} = \int_0^h \tau \Delta w_{j_2}^t(\tau) \circ dw_{j_1}^t(\tau), \\
\xi_{13}^{j_1 j_2 j_3 j_4} &= \xi_{11}^{j_1 j_2 j_3 j_4} + \xi_{11}^{j_1 j_3 j_4 j_2} = \int_0^h \Delta w_{j_4}^t(\tau) \Delta w_{j_3}^t(\tau) \Delta w_{j_2}^t(\tau) \circ dw_{j_1}^t(\tau), \\
\xi_{14}^{j_1 j_2 j_3 j_4} &= \xi_7^{j_1 j_2 j_3 j_4} + \xi_7^{j_1 j_2 j_4 j_3} = \int_0^h \int_0^\tau \Delta w_{j_4}^t(\tau_1) \Delta w_{j_3}^t(\tau_1) \circ dw_{j_2}^t(\tau_1) \circ dw_{j_1}^t(\tau), \\
\xi_{15}^{j_1 j_2} &= \int_0^h \Delta w_{j_2}^t(\tau) \Delta w_{j_1}^t(\tau) d\tau, \quad j_1, j_2, j_3, j_4 = 1, \dots, n_w.
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Построим разложение в ряд Тейлора численного решения задачи Коши для СДУ Стратоновича (1.6), полученного методом вида (1.7).

Подставляя в (1.7) разложение в ряд Тейлора в окрестности точки $h = 0$ функций $G_1(h)$, $G_2(h)$, $k_1(h)$, $k_2(h)$, получаем

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{n+1} = & \mathbf{y}_n + \sum \sigma_{\cdot j} \eta_1^j + hf(p_1 + p_2) + \sum \frac{\partial \sigma_{\cdot j_1}}{\partial y_i} \sigma_{i j_2} \eta_2^{j_1 j_2} + \\
& + h^2 \sum \frac{\partial f}{\partial y_i} f_i [(p_1 + p_2)a + p_2 \alpha_2] + \sum \frac{\partial \sigma_{\cdot j}}{\partial y_i} f_i \eta_3^j + \sum \frac{\partial f}{\partial y_i} \sigma_{i j} \eta_4^j + \\
& + \sum \frac{\partial \sigma_{\cdot j_1}}{\partial y_{i_1}} \frac{\partial \sigma_{i_1 j_2}}{\partial y_{i_2}} \sigma_{i_2 j_3} \eta_5^{j_1 j_2 j_3} + \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 \sigma_{\cdot j_1}}{\partial y_{i_1} y_{i_2}} \sigma_{i_1 j_2} \sigma_{i_2 j_3} \eta_6^{j_1 j_2 j_3} + \\
& + \sum \frac{\partial \sigma_{\cdot j_1}}{\partial y_{i_1}} \frac{\partial \sigma_{i_1 j_2}}{\partial y_{i_2}} \frac{\partial \sigma_{i_2 j_3}}{\partial y_{i_3}} \sigma_{i_3 j_4} \eta_7^{j_1 j_2 j_3 j_4} + \sum \frac{\partial \sigma_{\cdot j_1}}{\partial y_{i_1}} \frac{\partial f_{i_1}}{\partial y_{i_2}} \sigma_{i_2 j_2} \eta_8^{j_1 j_2} + \\
& + \sum \frac{\partial \sigma_{\cdot j_1}}{\partial y_{i_1}} \frac{\partial \sigma_{i_1 j_2}}{\partial y_{i_2}} f_{i_2} \eta_9^{j_1 j_2} + \sum \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial \sigma_{i_1 j_1}}{\partial y_{i_2}} \sigma_{i_2 j_2} \eta_{10}^{j_1 j_2} + \\
& + \sum \frac{\partial^2 \sigma_{\cdot j_1}}{\partial y_{i_1} \partial y_{i_2}} \frac{\partial \sigma_{i_1 j_2}}{\partial y_{i_3}} \sigma_{i_2 j_3} \sigma_{i_3 j_4} \eta_{11}^{j_1 j_2 j_3 j_4} + \sum \frac{\partial^2 \sigma_{\cdot j_1}}{\partial y_{i_1} \partial y_{i_2}} f_{i_1} \sigma_{i_2 j_2} \eta_{12}^{j_1 j_2} + \\
& + \frac{1}{6} \sum \frac{\partial^3 \sigma_{\cdot j_1}}{\partial y_{i_1} y_{i_2} y_{i_3}} \sigma_{i_1 j_2} \sigma_{i_2 j_3} \sigma_{i_3 j_4} \eta_{13}^{j_1 j_2 j_3 j_4} + \\
& + \frac{1}{2} \sum \frac{\partial \sigma_{\cdot j_1}}{\partial y_{i_1}} \frac{\partial^2 \sigma_{i_1 j_2}}{\partial y_{i_2} y_{i_3}} \sigma_{i_2 j_3} \sigma_{i_3 j_4} \eta_{14}^{j_1 j_2 j_3 j_4} + \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 a}{\partial y_{i_1} \partial y_{i_2}} \sigma_{i_1 j_1} \sigma_{i_2 j_2} \eta_{15}^{j_1 j_2} + \rho_5,
\end{aligned} \tag{1.26}$$

где $E\rho_5 = \mathbf{O}(h^3)$,

$$\begin{aligned}
\eta_1^j &= \sqrt{h}(p_1 q_1 + p_2 q_7 + q_{11} + q_{12} + q_{13}) \xi_j; \\
\eta_2^{j_1 j_2} &= \frac{h}{2}(p_1 q_2 + p_2 q_8 + 2(p_2 q_7 + q_{12})(\alpha_1 q_1 + q_3) + \\
& + 2q_{13}(\alpha_3 q_1 + \alpha_4 q_7 + q_9)) \xi_{j_1} \xi_{j_2}; \\
\eta_3^j &= \sqrt{h^3}[\alpha_1(p_2 q_7 + q_{12}) + q_{13}(\alpha_3 + \alpha_4)] \xi_j; \\
\eta_4^j &= \sqrt{h^3}[a(p_1 q_1 + p_2 q_7) + p_2(\alpha_2 q_1 + q_5)] \xi_j; \\
\eta_5^j &= \frac{\sqrt{h^3}}{2}[(\alpha_1 q_2 + q_4)(p_2 q_7 + q_{12}) + q_{13}[\alpha_3 q_2 + \\
& + \alpha_4 q_8 + 2(\alpha_4 q_7 + q_9)(\alpha_1 q_1 + q_3) + q_{10}]] \xi_{j_1} \xi_{j_2} \xi_{j_3}; \\
\eta_6^{j_1 j_2 j_3} &= \sqrt{h^3}[(\alpha_1 q_1 + q_3)^2(p_2 q_7 + q_{12}) + q_{13}[\alpha_3 q_1 + \\
& + \alpha_4 q_7 + q_9]^2] \xi_{j_1} \xi_{j_2} \xi_{j_3};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_7^{j_1 j_2 j_3 j_4} &= \frac{h^2}{2} [(\alpha_1 q_2 + q_4)(\alpha_4 q_7 + q_9) q_{13}] \xi_{j_1} \xi_{j_2} \xi_{j_3} \xi_{j_4}; \\
\eta_8^{j_1 j_2} &= h^2 [a \alpha_1 q_1 (p_2 q_7 + q_{12}) + q_{13} (a(\alpha_3 q_1 + \alpha_4 q_7) + \\
&\quad + \alpha_4 (\alpha_2 q_1 + q_5))] \xi_{j_1} \xi_{j_2}; \\
\eta_9^{j_1 j_2} &= h^2 [q_{13} \alpha_1 (\alpha_4 q_7 + q_9)] \xi_{j_1} \xi_{j_2}; \\
\eta_{10}^{j_1 j_2} &= \frac{h^2}{2} [a(p_1 q_2 + p_2 q_8) + p_2 [\alpha_2 q_2 + q_6 + 2a q_7 (\alpha_1 q_1 + q_3)]] \xi_{j_1} \xi_{j_2}; \\
\eta_{11}^{j_1 j_2 j_3 j_4} &= \frac{h^2}{2} [(\alpha_1 q_1 + q_3)(\alpha_1 q_2 + q_4)(p_2 q_7 + q_{12}) + \\
&\quad + q_{13} (\alpha_3 q_2 + \alpha_4 q_8 + 2(\alpha_1 q_1 + q_3)(\alpha_4 q_7 + q_9)) + \\
&\quad + q_{10} [\alpha_3 q_1 + \alpha_4 q_7 + q_9]] \xi_{j_1} \xi_{j_2} \xi_{j_3} \xi_{j_4}; \\
\eta_{12}^{j_1 j_2} &= h^2 [\alpha_1 (\alpha_1 q_1 + q_3)(p_2 q_7 + q_{12}) + q_{13} (\alpha_3 + \alpha_4)(\alpha_3 q_1 + \\
&\quad + \alpha_4 q_7 + q_9)] \xi_{j_1} \xi_{j_2}; \\
\eta_{13}^{j_1 j_2 j_3 j_4} &= h^2 [(\alpha_1 q_1 + q_3)^3 (p_2 q_7 + q_{12}) + q_{13} (\alpha_3 q_1 + \\
&\quad + \alpha_4 q_7 + q_9)^3] \xi_{j_1} \xi_{j_2} \xi_{j_3} \xi_{j_4}; \\
\eta_{14}^{j_1 j_2 j_3 j_4} &= h^2 [q_{13} (\alpha_1 q_1 + q_3)^2 (\alpha_4 q_7 + q_9)] \xi_{j_1} \xi_{j_2} \xi_{j_3} \xi_{j_4}; \\
\eta_{15}^{j_1 j_2} &= h^2 [p_2 (\alpha_2 q_1 + q_5)^2] \xi_{j_1} \xi_{j_2}. \tag{1.27}
\end{aligned}$$

1.2.2. Асимптотическая несмещенность, аппроксимация и сходимость методов

Исследуем асимптотическую несмещенность, аппроксимацию и сходимость численных методов из семейства (1.7) [31].

Свойство асимптотической несмещенности метода согласуется с асимптотическим поведением распределения точного решения СДУ (1.9).

Численное решение \mathbf{y}_n модельного СДУ (1.9), полученное методом из семейства (1.7), является нормальной случайной величиной для каждого $n = 1, \dots, K$, если только \mathbf{y}_0 – нормальная случайная величина. В силу того, что нормальное распределение полностью определяется математическим ожиданием и дисперсией, для построения интервала

асимптотической несмещенности метода из семейства (1.7) достаточно показать, при каких αh выполняются условия:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E y_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} D y_n = \frac{\sigma^2}{2\alpha}, \quad (1.28)$$

где $D y_n$ – дисперсия случайной величины y_n .

Применяя метод из семейства (1.7) к СДУ (1.9), получаем

$$y_{n+1} = R(z)y_n + Q(z)\sigma\sqrt{h}\zeta_n, \quad (1.29)$$

где $z = \alpha h$, $\beta = q_{11} + q_{12} + q_{13}$ и

$$R(z) = \frac{1 + (2a - p_1 - p_2)z + (a^2 + p_2\alpha_2 - a(p_1 + p_2))z^2}{(1 + az)^2},$$

$$Q(z) = \left[\frac{1 + a\beta z - zp_2q_5}{1 + az} - \frac{\alpha_2 p_2 q_1 z}{(1 + az)^2} \right].$$

Математическое ожидание и дисперсия y_{n+1} соответственно равны:

$$E y_{n+1} = R(z)E y_n,$$

$$\begin{aligned} D y_{n+1} &= R^2(z)D y_n + Q^2(z)\sigma^2 h = \\ &= R^{2(n+1)}(z)D y_0 + Q^2(z)\sigma^2 h \left[1 + R^2(z) + R^4(z) + \dots + R^{2n} \right]. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Для того чтобы метод был асимптотически несмещенным при $h \leq h_0$, нужно, чтобы

$$|R(z)| < 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} D y_{n+1} = \frac{\sigma^2}{2\alpha}.$$

Условие $|R(z)| < 1$ выполняется для всех $z > 0$ при

$$p_1 + p_2 = 1, \quad a(p_1 + p_2) + p_2\alpha_2 = 1/2, \quad a \geq 1/4 \quad (1.31)$$

(первые два уравнения обеспечивают второй порядок сходимости на детерминированной системе ОДУ, т. е. при $\sigma \equiv 0$). Для дисперсии, согласно (1.30), имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D y_{n+1} = \frac{\sigma^2 h Q^2(z)}{1 - R^2(z)} = \varphi(z) \frac{\sigma^2}{2\alpha},$$

где

$$\varphi(z) = \frac{2zQ^2(z)}{1 - R^2(z)} = \frac{[z^2a(a\beta - p_2q_5) + z(a\beta - p_2q_5 + a - \alpha_2p_2q_1) + 1]^2}{[z^2(a - 1/2)^2 + 2z(a - 1/4) + 1][2z(a - 1/4) + 1]}.$$

Условие $\lim_{n \rightarrow \infty} Dy_{n+1} = \frac{\sigma^2}{2\alpha}$ будет выполнено для некоторых $0 < z \leq z_0$, если для этих z выполняется $\varphi(z) \equiv 1$. Из вида $\varphi(z)$ следует, что не существует $z_0 < \infty$ такого, что $\varphi(z) \equiv 1$ для всех $z \in (0, z_0)$.

Исследуем поведение функции $\varphi(z)$ при $z \rightarrow \infty$:

а) в случае, когда коэффициенты при старших степенях z в числителе и знаменателе отличны от нуля, $\varphi(z) \rightarrow \infty$;

б) если $[a\beta - p_2q_5 = 0, \quad a \neq 1/2]$ или $a = 0$, то $\varphi(z) \rightarrow 0$;

в) если $(a\beta - p_2q_5) = 0$ и $a = 1/2$, то

$$\varphi(z) = \frac{[z(1/2 - \alpha_2p_2q_1) + 1]^2}{[z/2 + 1]^2} \rightarrow (1 - 2\alpha_2p_2q_1)^2.$$

Следовательно, $\varphi(z) \equiv 1$ для всех $z \in (0, \infty)$ при $a\beta = p_2q_5$, $a = 1/2$ и $\alpha_2p_2q_1 = 0$.

При $z_0 < \infty$ функция $\varphi(z)$ будет близка к 1 для $z \in (0, z_0)$, если, например, a близко к $1/2$. То есть в этом случае для любого сколь угодно малого γ возможно построение γ -асимптотически смещенного метода.

Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 1.2. Семейство численных методов (1.7) содержит асимптотически несмещенные и γ -асимптотически смещенные численные методы. Асимптотически несмещенные численные методы из семейства (1.7) могут иметь только бесконечный интервал асимптотической несмещенности. Параметры асимптотически несмещенных методов должны удовлетворять уравнениям

$$a\beta = p_2q_5, \quad p_1 + p_2 = 1, \quad \alpha_2p_2 = 0, \quad a = 1/2. \quad (1.32)$$

При (1.31) и

$$a\beta = p_2q_5, \quad 1/4 \leq a < 1/2, \quad (1.33)$$

для любого сколь угодно малого γ возможно построение γ -асимптотически смещенного метода. Интервал γ -асимптотической смещенности будет определяться из неравенства

$$\left| \frac{[z(a - \alpha_2 p_2 q_1) + 1]^2}{[z^2(a - 1/2)^2 + 2z(a - 1/4) + 1][2z(a - 1/4) + 1]} - 1 \right| \leq \gamma. \quad (1.34)$$

Теперь найдем условия, при которых численный метод из семейства численных методов (1.7) сходится в среднеквадратическом смысле.

Теорема 1.3. Семейство численных методов (1.7) содержит подмножество численных методов, имеющих первый порядок среднеквадратической сходимости для произвольных систем СДУ и второй порядок для систем СДУ с одним шумом, а также в случае систем СДУ с постоянной матрицей σ . Параметры этих методов удовлетворяют уравнениям

$$p_1 + p_2 = 1, \quad p_1 q_1 + p_2 q_7 + q_{11} + q_{12} + q_{13} = 1, \quad (1.35)$$

$$\frac{p_1 q_2 + p_2 q_8}{2} + (\alpha_1 q_1 + q_3)(p_2 q_7 + q_{12}) + q_{13}(\alpha_3 q_1 + \alpha_4 q_7 + q_9) = \frac{1}{2}. \quad (1.36)$$

Доказательство. Из вида разложения точного решения СДУ в смысле Стратоновича в ряд Тейлора и из теоремы о порядке сходимости среднеквадратических аппроксимации [104, 184] следует, что для того, чтобы численный метод имел первый порядок среднеквадратической сходимости, достаточно, чтобы разложение численного решения в ряд Тейлора в окрестности точки t_n отличалось от

$$\mathbf{y}(t_n) + f(\mathbf{y}(t_n))h + \sum_{j=1}^{n_w} \sigma_{\cdot j}(\mathbf{y}(t_n)) \Delta w_j^t(h) + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{\cdot j}}{\partial y_i} \sigma_{ij} (\Delta w_j^t(h))^2 \quad (1.37)$$

на величину $\rho : E\rho = O(h^{p_1})$, $E\rho^2 = O(h^2)$, $p_1 \geq 3/2$. Сравнивая это разложение с разложением в ряд Тейлора численного решения, находим, что метод из семейства (1.7) имеет первый порядок среднеквадратической сходимости, если его параметры удовлетворяют уравнениям (1.35) (1.36).

Для того чтобы численный метод имел второй порядок среднеквадратической сходимости, достаточно, чтобы разложение численного решения в ряд Тейлора в окрестности точки t_n отличалось от

$$\mathbf{y}(t_n) + f(\mathbf{y}(t_n))h + \sum_{j=1}^{n_w} \sigma_{\cdot j}(\mathbf{y}(t_n)) \Delta w_j^t(h) + \frac{\partial \sigma_{\cdot j_1}}{\partial y_i} \sigma_{ij_2} \int_0^h \Delta w_{j_2}^t(\tau) \circ dw_{j_1}^t(\tau) \quad (1.38)$$

на величину ρ : $E\rho = O(h^{p_1})$, $E\rho^2 = O(h^3)$, $p_1 \geq 2$. Сравнивая это разложение с разложением численного решения в ряд Тейлора, находим, что методы из семейства (1.7) не могут иметь второй порядок среднеквадратической сходимости в случае произвольных систем СДУ из-за низкой точности аппроксимации случайных величин

$$\int_0^h \Delta w_{j_2}^t(\tau) \circ dw_{j_1}^t(\tau) \quad (1.39)$$

случайными величинами $\frac{1}{2}\xi_{j_1}\xi_{j_2}$ при $j_1 \neq j_2$. Однако для систем СДУ с одним шумом, а также в случае систем СДУ с постоянной матрицей σ пропадают члены, отличающие (1.38) от (1.37), поэтому в этих случаях построенные методы имеют второй порядок среднеквадратической сходимости. Теорема 1.3 доказана.

Метод имеет первый порядок аппроксимации первых двух моментов, если его параметры удовлетворяют системе уравнений (1.35), (1.36). Для того чтобы метод имел второй порядок аппроксимации первых двух моментов для систем СДУ с одним шумом, его параметры должны дополнительно удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} (\alpha_1 q_2 + q_4)(\alpha_4 q_7 + q_9) q_{13} &= \frac{1}{12}, \\ a\alpha_1 q_1 [p_2 q_7 + q_{12}] + q_{13} [a(\alpha_3 q_1 + \alpha_4 q_7) + \alpha_4(\alpha_2 q_1 + q_5)] &+ \\ + \frac{a}{2} [p_1 q_2 + p_2 q_8] + \frac{p_2}{2} [\alpha_2 q_2 + q_6] + ap_2 q_7 [\alpha_1 q_1 + q_3] &= \frac{1}{4}, \\ q_{13} \alpha_1 (\alpha_4 q_7 + q_9) &= \frac{1}{4}, \\ (\alpha_1 q_1 + q_3)(\alpha_1 q_2 + q_4)(p_2 q_7 + q_{12}) + q_{13}(\alpha_1 q_1 + q_3)^2(\alpha_4 q_7 + q_9) &+ \\ + q_{13}(\alpha_3 q_1 + \alpha_4 q_7 + q_9) [\alpha_3 q_2 + \alpha_4 q_8 + 2(\alpha_1 q_1 + q_3)(\alpha_4 q_7 + q_9) + q_{10}] &= \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_1(\alpha_1 q_1 + q_3)(p_2 q_7 + q_{12}) + q_{13}(\alpha_3 + \alpha_4)(\alpha_3 q_1 + \alpha_4 q_7 + q_9) &= \frac{1}{4}, \\
(p_2 q_7 + q_{12})(\alpha_1 q_1 + q_3)^3 + q_{13}(\alpha_3 q_1 + \alpha_4 q_7 + q_9)^3 &= \frac{1}{4}, \\
p_2(\alpha_2 q_1 + q_5)^2 &= \frac{1}{2}, \\
a(p_1 + p_2) + \alpha_2 p_2 &= \frac{1}{2}, \\
\alpha_1(q_{12} + p_2 q_7) + q_{13}(\alpha_3 + \alpha_4) &= \frac{1}{2}, \\
a(p_1 q_1 + p_2 q_7) + p_2(\alpha_2 q_1 + q_5) &= \frac{1}{2}, \\
(\alpha_1 q_2 + q_4)(q_{12} + p_2 q_7) + q_{13} \left[\alpha_3 q_2 + \alpha_4 q_8 + 2(\alpha_4 q_7 + q_9)(\alpha_1 q_1 + q_3) + \right. \\
\left. + q_{10} \right] &= \frac{1}{3}, \\
(\alpha_1 q_1 + q_3)^2(q_{12} + p_2 q_7) + q_{13} \left[\alpha_3 q_1 + \alpha_4 q_7 + q_9 \right]^2 &= \frac{1}{3}. \tag{1.40}
\end{aligned}$$

Таким образом, для того чтобы численный метод из семейства (1.7) имел второй порядок аппроксимации первых двух моментов для систем СДУ с одним шумом, необходимо решить систему из 15 уравнений [(1.35), (1.36), (1.40)], содержащую 20 параметров.

Так как система уравнений содержит 5 свободных параметров, то возможно наложение на метод еще некоторых условий. В качестве дополнительного условия потребуем выполнения уравнения из (1.33), которое дает возможность построения γ -асимптотически смещенных численных методов, полагая

$$\beta = q_5 = 0. \tag{1.41}$$

Считая a , q_2 , q_8 свободными параметрами, найдем общее решение 16 уравнений [(1.35), (1.36), (1.40), (1.41)], которое имеет вид

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{1/2 - y}{2Q(x - y)} = \frac{x(1/12 - x/3 + x\delta/2)}{2(\delta/4 - 1/9)}, \\
q_{13} &= (1 - xQ)/y = \frac{(x\delta - 1/3)(2x\delta/3 - x^2\delta^2 - 1/9)}{(x/3 - 1/4)(2x/3 - \delta x^2 - 1/4)}, \\
p_1 &= 1 - p_2, \quad p_2 = \frac{(1 - 2a)^2}{2}, \quad q_1 = q_7 = 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= 1/(1 - 2a), \quad \alpha_3 = y - 1/(4\alpha_1 q_{13}), \quad \alpha_4 = \kappa - \alpha_3, \\
q_3 &= x - \alpha_1, \quad q_4 = \alpha_1/3 - \alpha_1 q_2, \quad q_5 = 0, \\
q_6 &= \frac{2}{p_2} \left[\frac{1}{4} - q_{13} \alpha_2 \alpha_4 - q_{13} a \kappa - a(\alpha_1 Q + p_2 x) - \frac{a(p_1 q_2 + p_2 q_8)}{2} \right] - \alpha_2 q_2, \\
q_9 &= \frac{1}{(4\alpha_1 q_{13})} - \alpha_4, \\
q_{10} &= \frac{1/3 - Q(\alpha_1 q_2 + q_4)}{q_{13}} - \alpha_3 q_2 - \alpha_4 q_8 - \frac{x}{2\alpha_1 q_{13}}, \\
q_{12} &= Q - p_2, \quad q_{11} = -(q_{12} + q_{13}),
\end{aligned} \tag{1.42}$$

где использованы обозначения

$$\begin{aligned}
y &= \frac{x/3 - 1/4}{\delta x - 1/3}, \quad Q = \frac{1/9 - \delta/4}{x(2x/3 - \delta x^2 - 1/4)}, \\
\kappa &= \frac{x^2/3 - 5x/12 + 1/8}{2(x^2 \delta^2 - 2x\delta/3 + 1/9)}, \quad \delta = \frac{1 - p_1 q_2 + p_2 q_8}{2},
\end{aligned} \tag{1.43}$$

x – решение квадратного уравнения

$$\frac{2}{9}x^2\delta - \frac{1}{6}x\delta - \frac{2}{27}x^2 + \frac{1}{27}x + \frac{1}{72} = 0.$$

У построенных методов параметр a определяет интервал γ -асимптотической смещенности, заданный неравенством (1.34). Например,

1) при $a = 1/4$ получаем $\varphi(z) = 1/(1+z^2/16)$ и метод 0.05-асимптотически смещен при $0 < z \leq 0.9$;

2) при $a = 1/3$ получаем $\varphi(z) = (1+z/6)/(1+z/6+z^2/36)$ и метод 0.05-асимптотически смещен при $0 < z < 1.53$;

3) при $a = 3/8$ получаем $\varphi(z) = (1+z/4)/(1+z/8)^2$ и метод 0.05-асимптотически смещен при $0 < z \leq 1.79$.

Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 1.4. Семейство численных методов (1.7) содержит подмножество γ -асимптотически смещенных методов, имеющих второй порядок аппроксимации первых двух моментов для систем СДУ с одним шумом, с параметрами (1.41)–(1.43).

Теперь исследуем слабую сходимость численных методов из семейства (1.7).

Теорема 1.5. Семейство численных методов (1.7) содержит

а) подмножество численных методов, имеющих первый порядок слабой сходимости. Параметры этих методов удовлетворяют уравнениям (1.35), (1.36);

б) подмножество γ -асимптотически смещенных методов, имеющих второй порядок слабой сходимости для систем СДУ с одним шумом, а также в случае систем СДУ с постоянной матрицей σ . Параметры этих методов удовлетворяют уравнениям (1.41)–(1.43).

Доказательство. Пусть функция $g(\mathbf{y}) \in C^6(R^{n_y}, R)$ вместе со своими частными производными до шестого порядка включительно принадлежит классу F из определения 1.8. Если обозначим

$$\Delta = \mathbf{y}(t_{n+1}) - \mathbf{y}(t_n); \quad \bar{\Delta} = \mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n,$$

$\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_{n_y})^\top$, $\bar{\Delta} = (\bar{\Delta}_1, \dots, \bar{\Delta}_{n_y})^\top$, то разложение функции $g(\mathbf{y})$ по формуле Тейлора в окрестности точки $\mathbf{y}(t_n)$ по степеням Δ с остаточным членом шестой степени имеет вид

$$g(\mathbf{y}(t_{n+1})) = g(\mathbf{y}(t_n)) + \sum_{j=1}^5 \frac{1}{j!} \frac{\partial^j g(\mathbf{y}(t_n))}{\partial y_{i_1} \dots \partial y_{i_j}} \Delta_{i_1} \dots \Delta_{i_j} + K_1(\Delta), \quad (1.44)$$

где $i_l \in \{1, \dots, n_y\}$, $EK_1 = O(h^3)$, аналогично

$$g(\mathbf{y}_{n+1}) = g(\mathbf{y}_n) + \sum_{j=1}^5 \frac{1}{j!} \frac{\partial^j g(\mathbf{y}_n)}{\partial y_{i_1} \dots \partial y_{i_j}} \bar{\Delta}_{i_1} \dots \bar{\Delta}_{i_j} + K_1(\bar{\Delta}). \quad (1.45)$$

Тогда численный метод будет слабо аппроксимировать решение СДУ со вторым порядком, если

$$|\mathbb{E}([\Pi_{j=1}^p \Delta_{i_j} - \Pi_{j=1}^p \bar{\Delta}_{i_j}] / \mathbf{y}_n = \mathbf{y}(t_n))| \leq \tilde{K}_p(\mathbf{y}_n) h^3, \quad p = 1, \dots, 5,$$

$$\left| \mathbf{E} \left(\prod_{j=1}^6 \bar{\Delta}_{i_j} / \mathbf{y}_n = \mathbf{y}(t_n) \right) \right| = \tilde{K}_6(\mathbf{y}_n) h^3. \quad (1.46)$$

Так как построенные методы в общем случае аппроксимируют второй момент только с первым порядком, то очевидно, что в общем случае будет лишь первый порядок слабой аппроксимации. Однако, для систем СДУ с одним шумом, а также в случае систем СДУ с постоянной матрицей σ построенные методы имеют второй порядок слабой аппроксимации. Действительно, очевидно, что условия (1.46) при $p = 3$ и $p = 4$ систему из 15 уравнений (1.35), (1.40) дополняют уравнениями, соответствующими

$$\mathbf{E}\xi_1^2 = \mathbf{E}\eta_1^2, \quad \mathbf{E}(\xi_1^2 \xi_2) = \mathbf{E}(\eta_1^2 \eta_2), \quad \mathbf{E}\xi_1^4 = \mathbf{E}\eta_1^4, \quad (1.47)$$

а с учетом вида ξ_i, η_i уравнения (1.47) переходят в тождества. Условия (1.46) при $p = 5$ и $p = 6$ выполняются автоматически.

Тем самым показана слабая аппроксимация со вторым порядком для систем СДУ с одним шумом, а также в случае систем стохастических дифференциальных уравнений с постоянной матрицей σ . Как показано в [183, 342], для одношагового численного метода из слабой аппроксимации с порядком p численного решения задачи Коши для СДУ следует слабая сходимость одношагового численного метода с порядком p .

В случае γ -асимптотически смещенных методов, имеющих второй порядок слабой сходимости для систем СДУ с одним шумом, а также в случае систем СДУ с постоянной матрицей σ параметры методов имеют вид (1.41)–(1.43).

Теорема 1.5 доказана.

1.2.3. Конкретный вид построенных численных методов решения СДУ в смысле Стратоновича

В предыдущем параграфе были выписаны условия, при которых численный метод из семейства (1.7)

- является асимптотически несмещенным;
- является γ -асимптотически смещенным;

– имеет первый и второй порядки аппроксимации первых двух моментов;

– имеет первый и второй порядки среднеквадратической сходимости;

– имеет первый и второй порядки слабой сходимости.

Также было построено подмножество γ -асимптотически смещенных численных методов из семейства (1.7). Конкретный вид построенных методов получается после задания свободных параметров a , q_2 , q_8 и остальных параметров, согласно (1.42).

В некоторых задачах весьма затруднительно вычисление производных. Такие задачи можно решать методом из семейства (1.7) без вычисления производных, положив $a = q_2 = q_4 = q_6 = q_8 = q_{10} = 0$. В этом случае метод примет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) + \sqrt{h}\left(\frac{1}{6}G_0 + \frac{2}{3}G_1 + \frac{1}{6}G_2\right)\zeta_n, \\ k_1 &= f(\mathbf{y}_n), \quad k_2 = f(\mathbf{y}_n + hk_1 + \sqrt{h}G_0\zeta_n), \\ G_0 &= \sigma(\mathbf{y}_n), \quad G_1 = \sigma\left(\mathbf{y}_n + \frac{3}{4}hk_1 + \frac{1}{2}\sqrt{h}G_0\zeta_n\right), \\ G_2 &= \sigma\left(\mathbf{y}_n + \frac{3}{2}h(k_2 - k_1) + \sqrt{h}(2G_1 - G_0)\zeta_n\right). \end{aligned} \quad (1.48)$$

Параметры этого метода определены из системы уравнений, содержащейся в [(1.35), (1.36), (1.40)], где исключены уравнения, получаемые из условия

$$E\xi_{11} = E\eta_{11}, \quad E\xi_7 = E\eta_7.$$

Метод (1.48) для систем СДУ с одним шумом аппроксимирует второй момент решения со вторым порядком, а математическое ожидание со вторым порядком при $\sigma = \text{const}$.

Метод является 0.05-асимптотически смещенным при $0 < z \leq 0.4$.

Выделим из семейства методов (1.7) подсемейство вида

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + p_1k_1 + p_2k_2 + \sqrt{h}q(\sigma(\mathbf{y}_{n+1}^p) - \sigma(\mathbf{y}_n))\zeta_n, \\ k_1 &= [I - ha\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}]^{-1}[hf(\mathbf{y}_n) + \sqrt{h}\sigma(\mathbf{y}_n)\zeta_n], \end{aligned}$$

$$k_2 = [I - ha \frac{\partial f}{\partial y}]^{-1} [hf(\mathbf{y}_{n+1}^p) + \sqrt{h}\sigma(\mathbf{y}_{n+1}^p)\zeta_n],$$

$$\mathbf{y}_{n+1}^p = \mathbf{y}_n + sk_1 \quad (1.49)$$

с пятью параметрами s, a, p_1, p_2, q . Записав подсемейство в таком виде, мы уменьшили число вычислений за счет исключения членов вида $\frac{\partial \sigma}{\partial y}$ и за счет вычислений значений функций f и σ лишь в одной промежуточной точке. В записи методов (1.49) учтено условие (1.41). Параметры методов выберем так, чтобы метод имел первый порядок аппроксимации первых двух моментов (условия (1.35)) и второй порядок аппроксимации первых двух моментов для систем СДУ с одним шумом (1.9) (это первое уравнение из (1.35), уравнение (1.36), восьмое и десятое уравнения из (1.40)). Для методов вида (1.49) соответствующие уравнения примут вид

$$p_1 + p_2 = 1, \quad sp_2 = \frac{1}{2} - a, \quad s(p_2 + q) = \frac{1}{2}. \quad (1.50)$$

Общее решение системы уравнений (1.50) имеет вид

$$p_1 = 1 - p_2, \quad p_2 = \frac{1/2 - a}{s}, \quad q = \frac{a}{s}, \quad (1.51)$$

где s, a – свободные параметры. Параметр $a \geq 1/4$ определяет интервал 0.05-асимптотической смещенности.

Приведем три метода с параметрами (1.51):

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{7}{8}k_1 + \frac{1}{8}k_2 + \frac{3}{8}\sqrt{h}(\sigma(\mathbf{y}_{n+1}^p) - \sigma(\mathbf{y}_n))\zeta_n,$$

$$k_1 = [I - \frac{3h}{8} \frac{\partial f}{\partial y}]^{-1} [hf(\mathbf{y}_n) + \sqrt{h}\sigma(\mathbf{y}_n)\zeta_n],$$

$$k_2 = [I - \frac{3h}{8} \frac{\partial f}{\partial y}]^{-1} [hf(\mathbf{y}_{n+1}^p) + \sqrt{h}\sigma(\mathbf{y}_{n+1}^p)\zeta_n],$$

$$\mathbf{y}_{n+1}^p = \mathbf{y}_n + k_1, \quad (1.52)$$

а также метод (1.49) при

$$a = 1/4, \quad p_2 = 1/4, \quad p_1 = 3/4, \quad q = 1/4, \quad s = 1 \quad (1.53)$$

или, например, при

$$a = 1/3, \quad p_2 = 1/6, \quad p_1 = 5/6, \quad q = 1/3, \quad s = 1. \quad (1.54)$$

Если положить $a = 0$, то получим метод, рассмотренный, например, в работе [164]:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + \frac{h}{2}(f(\mathbf{y}_{n+1}^p) + f(\mathbf{y}_n)) + \frac{1}{2}\sqrt{h}(\sigma(\mathbf{y}_{n+1}^p) - \sigma(\mathbf{y}_n))\zeta_n, \\ \mathbf{y}_{n+1}^p &= \mathbf{y}_n + hf(\mathbf{y}_n) + \sqrt{h}\sigma(\mathbf{y}_n)\zeta_n. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Теперь подберем параметры численных методов из подсемейства (1.49) так, чтобы построенные методы имели первый порядок аппроксимации первых двух моментов для произвольных систем СДУ и второй порядок при постоянной матрице σ . В этом случае параметры методов равны

$$p_1 = 1 - p_2, \quad p_2 = \frac{1}{2s^2}, \quad s = \frac{1}{1 - 2a}, \quad q = \frac{a}{s}. \quad (1.56)$$

Таким образом, требуя этих свойств от метода, мы однозначно определяем параметр s , который в (1.51) является свободным. Получаем аналог метода (1.52):

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + \frac{1}{32}k_1 + \frac{31}{32}k_2 + \frac{3}{32}\sqrt{h}(\sigma(\mathbf{y}_{n+1}^p) - \sigma(\mathbf{y}_n))\zeta_n, \\ k_1 &= [I - \frac{3h}{8}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}]^{-1}[hf(\mathbf{y}_n) + \sqrt{h}\sigma(\mathbf{y}_n)\zeta_n], \\ k_2 &= [I - \frac{3h}{8}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}]^{-1}[hf(\mathbf{y}_{n+1}^p) + \sqrt{h}\sigma(\mathbf{y}_{n+1}^p)\zeta_n], \\ \mathbf{y}_{n+1}^p &= \mathbf{y}_n + 4k_1; \end{aligned} \quad (1.57)$$

аналог метода (1.53):

$$a = 1/4, \quad p_2 = 1/8, \quad p_1 = 7/8, \quad q = 1/8, \quad s = 2, \quad (1.58)$$

и аналог метода (1.54):

$$a = 1/3, \quad p_2 = 17/18, \quad p_1 = 1/18, \quad q = 1/9, \quad s = 3. \quad (1.59)$$

Если параметры численного метода из семейства (1.7) удовлетворяют (1.32), (1.35) и (1.36), то это асимптотически несмещенный метод с первым порядком аппроксимации первых двух моментов. Так как в этом случае параметров больше, чем уравнений, то возможно построение целого множества подобных методов. Например, метод [100]:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \left[I - \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}_n) \right]^{-1} \times \\ \times \left(h f(\mathbf{y}_n) + \sqrt{h} \sigma(\mathbf{y}_n) \zeta_n + \frac{h}{2} \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}_n) \sigma(\mathbf{y}_n) \zeta_n^2 \right). \quad (1.60)$$

получается однозначно из системы уравнений (1.32), (1.35) и (1.36), если положить $p_2 = 0$.

Приведем пример асимптотически несмещенного численного метода с первым порядком аппроксимации первых двух моментов, в котором не требуется вычисления производной матрицы σ :

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \left[I - \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}_n) \right]^{-1} \frac{h}{2} (f(\mathbf{y}_n) + f(\mathbf{y}_n^p)) + \frac{\sqrt{h}}{2} (\sigma(\mathbf{y}_n) + \sigma(\mathbf{y}_n^p)) \zeta_n, \\ \mathbf{y}_n^p = \mathbf{y}_n + \sqrt{h} \sigma(\mathbf{y}_n) \zeta_n. \quad (1.61)$$

Согласно теореме 1.3, все рассмотренные в данном параграфе методы имеют первый порядок среднеквадратической сходимости для произвольных систем СДУ и второй порядок для систем СДУ с одним шумом, а также в случае систем СДУ с постоянной матрицей σ .

Численная верификация построенных методов и сравнение с другими известными методами будут проведены в главе, посвященной решению тестовых и прикладных задач.

1.3. Алгоритм решения СДУ с пуассоновской составляющей

Можно не только рассматривать стохастическое дифференциальное уравнение относительно винеровского процесса, но и ввести в уравнение компоненту, заданную интегралом по случайной пуассоновской мере.

Пусть $\{\Omega, \mathfrak{F}, P\}$ – основное вероятностное пространство; $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \in R_+}$ – неубывающий поток полных σ -подалгебр \mathfrak{F} , $R_+ = [0, \infty)$; (Γ, B_Γ) – измеримое пространство (B_Γ – σ -алгебра борелевских множеств на Γ), на котором задана некоторая конечная мера Π :

$$\Pi(B) = \int_B \pi(\theta) d\theta < \infty, \quad B \subset B_\Gamma.$$

На пространстве $U = R_+ \times \Gamma$ определена однородная пуассоновская мера ν [154] с мерой интенсивности Λ и характеристической мерой Π :

$$P(\nu(\tilde{U}) = k) = e^{-\Lambda(\tilde{U})} \frac{(\Lambda(\tilde{U}))^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$E\nu(\tilde{U}) = \Lambda(\tilde{U}) = \int_0^t \int_B \pi(\theta) d\theta dt = \Pi(B)t, \quad \tilde{U} = [0, t] \times B \subset U.$$

Для всякого $B \in B_\Gamma$ процесс $\nu_t(B) = \nu([0, t] \times B)$ является однородным пуассоновским процессом с интенсивностью $\Pi(B)$, согласованным с $\{\mathfrak{S}_t\}_{t \in R_+}$, причем

$$P(\nu_{t+s}(B) - \nu_t(B) = k) = e^{-\Pi(B)s} \frac{(\Pi(B)s)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad s \geq 0,$$

и, кроме того, при всех $t \geq 0$ величина $\nu_t(B)$ измерима относительно σ -алгебры \mathfrak{S}_t , а приращения $\nu_{t+s}(B) - \nu_t(B)$ при $s \geq 0$ не зависят от σ -алгебры \mathfrak{S}_t ;

Для попарно непересекающихся множеств B_1, \dots, B_n ($n = 1, 2, \dots$) из B_Γ процессы $\{\nu_t(B_i)\}_{t \in R_+}$ независимы в совокупности;

Для попарно непересекающихся множеств C_1, \dots, C_n ($n = 1, 2, \dots$) из $B_{R_+} \times B_\Gamma$ с вероятностью единица

$$\nu_t\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(C_i).$$

Пуассоновская мера ν однозначно определяется своей характеристической мерой Π .

Определение 1.15. [154]. Моментом остановки относительно потока $\{\mathfrak{S}_t\}_{t \in R_+}$ называется такая неотрицательная случайная величина τ со значениями в R_+ , что событие $\{\tau \leq t\} \in \mathfrak{S}_t$ для всех $t \in R_+$.

Для пуассоновской случайной меры ν [154] существуют последовательности моментов остановки τ_k и \mathfrak{S}_{τ_k} — измеримых величин $\theta_k \in \Gamma$ таких, что

$$\nu(C) = \sum_k I_{\{(\tau_k, \theta_k) \in C\}}, \quad C \in B_{R_+} \times B_\Gamma.$$

где $I_{\{x \in A\}}$ — индикаторная функция множества A .

Добавим в СДУ (1.1) пуассоновскую составляющую. Тогда задача Коши для систем стохастических дифференциальных уравнений с пуассоновской составляющей имеет вид [154]

$$d\mathbf{y}(t) = f(t, \mathbf{y})dt + \sum_{j=1}^{n_w} \sigma_{\cdot j}(t, \mathbf{y})dw_j(t) + \int_{\Gamma} v(t, \mathbf{y}(t^-), \theta)\nu(d\theta \times dt), \quad t \in [0, T],$$

(1.62)

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$$

или в интегральной форме

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t_0) + \int_0^t f(\tau, \mathbf{y})d\tau + \sum_{j=1}^{n_w} \int_0^t \sigma_{\cdot j}(\tau, \mathbf{y})dw_j(\tau) + \\ + \int_0^t \int_{\Gamma} v(\tau, \mathbf{y}(\tau^-), \theta)\nu(d\theta \times d\tau), \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

(1.63)

где $\mathbf{y}(t)$ – случайный процесс размерности n_y ; $\mathbf{w}(t)$ – n_w -мерный стандартный винеровский процесс; ν – пуассоновская мера на $[0, T] \times \Gamma$ с характеристической мерой Π , заданная неотрицательной функцией $\pi(\theta)$, $\Pi(\Gamma) < \infty$; $a(t, \mathbf{y})$ и $v(t, \mathbf{y}, \theta)$ – n_y -мерные вектор-функции; $\sigma(t, \mathbf{y})$ – матричная функция размера $n_y \times n_w$; $\sigma_{\cdot j}(t, \mathbf{y})$ – j -й столбец матрицы σ ; \mathbf{y}_0 – случайный вектор начальных значений. Так как решением СДУ (1.62) и (1.63) является непрерывный справа процесс без разрывов второго рода, то $\mathbf{y}(t^-)$ обозначает значение решения в точке t слева.

Если стохастический интеграл по винеровскому процессу $\mathbf{w}(t)$ в (1.63) понимается в смысле Ито, то СДУ (1.62) и (1.63) являются СДУ Ито; если стохастический интеграл по винеровскому процессу $\mathbf{w}(t)$ в (1.63) понимается в смысле Стратоновича, то СДУ (1.62) и (1.63) являются СДУ Стратоновича.

Стохастический интеграл по пуассоновской случайной мере ν определяется следующим образом:

$$\int_0^t \int_{\Gamma} v(\tau, \mathbf{y}(\tau^-), \theta)\nu(d\theta \times d\tau) = \sum_{\tau_k < t} v(\tau_k, \mathbf{y}(\tau_k^-), \theta_k),$$

(1.64)

если $\sum_k |v(\tau_k, \mathbf{y}(\tau_k^-), \theta_k)| < \infty$. То есть как функция верхнего предела этот интеграл представляет собой скачкообразный случайный процесс,

который изменяется скачком в случайные моменты времени $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, \dots$ на случайные значения $v(\tau_1, \mathbf{y}(\tau_1^-), \theta_1), \dots, v(\tau_k, \mathbf{y}(\tau_k^-), \theta_k) \dots$. Распределения моментов скачков τ_k и величин скачков θ_k определяются характеристической мерой Π .

Если в (1.62) или в (1.63) отсутствует пуассоновская составляющая ($v = 0$), то процесс $\mathbf{y}(t)$ называется *диффузионным*. Если отсутствует гауссовская составляющая ($\sigma = 0$), то процесс $\mathbf{y}(t)$ называется *скачкообразным*.

Принцип построения алгоритмов численного решения СДУ с пуассоновской составляющей. Так как $\Pi(\Gamma) < \infty$, то соответствующий общий пуассоновский процесс на каждом конечном промежутке времени имеет конечное число скачков. Обозначим $\tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{k_T} < T$ моменты скачков в порядке возрастания, где

$$k_T = \max\{k \in N : \tau_k < T\},$$

а $\theta_k \in \Gamma$, $k = 1, 2, \dots, k_T$, для которых $\nu(\{\theta_k\} \times \{\tau_k\}) = 1$. Тогда [154] на любом полуинтервале $[\tau_{k-1}, \tau_k)$ уравнение (1.63) эквивалентно

$$\bar{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{y}(\tau_{k-1}) + \int_{\tau_{k-1}}^t f(\bar{\mathbf{y}}, \tau) d\tau + \sum_{j=1}^{n_w} \int_0^t \sigma_{\cdot j}(\bar{\mathbf{y}}, \tau) dw_j(\tau). \quad (1.65)$$

И решение $\mathbf{y}(t)$ уравнения (1.63) определяется как

$$\mathbf{y}(t) = \begin{cases} \bar{\mathbf{y}}(t), & \text{при } t \in [\tau_{k-1}, \tau_k), \\ \bar{\mathbf{y}}(t) + v(\tau_k, \bar{\mathbf{y}}(\tau_k^-), \theta_k), & \text{при } t = \tau_k. \end{cases}$$

Если обозначим $\bar{\mathbf{y}}_{n+1}$ – численное решение в точке t_{n+1} , полученное методом решения СДУ, содержащего только винеровскую составляющую, где $h_{n+1} = t_{n+1} - t_n$ – шаг интегрирования в узле t_{n+1} , то решение задачи (1.63) запишется следующим образом [1]:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \begin{cases} \bar{\mathbf{y}}_{n+1}, & \text{если } t_{n+1} = \tau_k - \text{ не момент скачка,} \\ \bar{\mathbf{y}}_{n+1} + v(\tau_k, \bar{\mathbf{y}}_{n+1}, \theta_k), & \text{если } t_{n+1} = \tau_k - \text{ момент скачка,} \end{cases} \quad (1.66)$$

где значение случайного вектора θ_k моделируется согласно плотности

$$p(\theta) = \frac{\pi(\theta)}{\Pi(\Gamma)}, \quad (1.67)$$

а моменты скачков $\{\tau_k\}$ образуют пуассоновский точечный поток интенсивности $\Pi(\Gamma)$.

Обычно случайная пуассоновская мера является однородной. Но в некоторых случаях [203, 298] мера Π может зависеть от времени. Тогда характеристическая мера Π , задающая пуассоновскую случайную меру ν , определяется через функцию π следующим образом:

$$\Pi(t, B) = \int_B \pi(t, \theta) d\theta, \quad B \in \Gamma. \quad (1.68)$$

В этом случае пуассоновскую случайную меру $\nu([0, t] \times \Gamma)$ как функцию времени можно рассматривать как неоднородный пуассоновский процесс интенсивности

$$\lambda(t) = \Pi(t, \Gamma) = \int_{\Gamma} \pi(t, \theta) d\theta. \quad (1.69)$$

Ансамбль точек, заданных пуассоновской мерой ν , в области $U = [0, T] \times \Gamma$ распределен с плотностью

$$p(t, \theta) = \frac{\pi(t, \theta)}{\Lambda(U)} = \frac{\pi(t, \theta)}{\int_0^T \int_{\Gamma} \pi(t, \theta) d\theta dt} = \frac{\int_{\Gamma} \pi(t, \theta) d\theta}{\int_0^T \int_{\Gamma} \pi(t, \theta) d\theta dt} \cdot \frac{\pi(t, \theta)}{\int_{\Gamma} \pi(t, \theta) d\theta} = p(t) \psi(\theta|t).$$

Временные значения этих точек являются моментами разрыва решения СДУ, образуют пуассоновский точечный поток интенсивности $\lambda(t)$ и распределены с плотностью

$$p(t) = \frac{\lambda(t)}{\int_0^T \lambda(t) dt} = \frac{\int_{\Gamma} \pi(t, \theta) d\theta}{\int_0^T \int_{\Gamma} \pi(t, \theta) d\theta dt}.$$

Величина скачка θ в момент времени t распределена с плотностью

$$\psi(\theta|t) = \frac{\pi(t, \theta)}{\int_{\Gamma} \pi(t, \theta) d\theta} = \frac{\pi(t, \theta)}{\lambda(t)}, \quad (1.70)$$

т.е.

$$\pi(t, \theta) = \lambda(t)\psi(\theta|t). \quad (1.71)$$

Во многих практических задачах мера Π может зависеть как от времени, так и от фазовых координат $\Pi(t, \mathbf{y}(t), B)$. В работах [207, 298], при записи СДУ скачкообразного типа используется ни пуассоновская случайная мера, а соответствующий общий пуассоновский процесс: $Q(t) = \sum_{k=1}^{P(t)} \theta_k$, где $P(t)$ – пуассоновский процесс интенсивности $\lambda(t, \mathbf{y}(t)) = \Pi(t, \mathbf{y}(t), \Gamma)$, $\{\theta_k\}$ – последовательность независимых случайных величин, распределенных по закону

$$P(\theta_k \in d\theta | \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}) = \Pi(t, \mathbf{y}, d\theta) / \Pi(t, \mathbf{y}, \Gamma) \quad (\text{т.е. с плотностью})$$

$$p(\theta | \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}) = \pi(t, \mathbf{y}, \theta) / \Pi(t, \mathbf{y}, \Gamma), \quad \text{если } \Pi(t, \mathbf{y}, \Gamma) = \int_{\Gamma} \pi(t, \mathbf{y}, \theta) d\theta.$$

Таким образом, моделируя соответствующий общий пуассоновский процесс $Q(t)$, численное решение задачи (1.63) вычисляется согласно (1.66). В следующей главе будут построены экономичные алгоритмы моделирования пуассоновских точечных ансамблей, которые применимы для моделирования общих пуассоновских процессов.

1.4. Методы решения систем СДУ с первым интегралом

Рассматривается модель динамической системы, заданная векторным СДУ в смысле Ито:

$$dy(t) = f(t, \mathbf{y}(t))dt + \sigma(t, \mathbf{y}(t))d\mathbf{w}(t), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \quad (1.72)$$

где $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ — n_y -мерный вектор состояния; $t \in T = [t_0, T]$ — время, моменты времени t_0 и T заданы; $f(t, \mathbf{y}): T \times \mathbb{R}^{n_y} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ — n_y -мерная вектор-функция; $\sigma(t, \mathbf{y}): T \times \mathbb{R}^{n_y} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y \times n_w}$ — $(n_y \times n_w)$ -мерная матричная функция; $\mathbf{w}(t)$ — n_w -мерный стандартный винеровский процесс, $\mathbf{w}(t)$ и начальный вектор состояния $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^{n_y}$ независимы.

Определение 1.16 [130]. Неслучайная функция $M(t, \mathbf{y})$ называется первым (детерминированным) интегралом для системы (1.72), если она не равна постоянной и с вероятностью 1 на любой траектории решения уравнения (1.72) принимает постоянное значение, зависящее только от $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^{n_y}$.

Теорема 1.6 [130]. Пусть скалярная неслучайная функция $M(t, \mathbf{y})$ является первым интегралом для системы (1.72), $M(t, \mathbf{y}) \in C_{t, \mathbf{y}}^{1,2}([t_0, T] \times \mathbb{R}^{n_y})$. Тогда стохастический дифференциал случайного процесса $M(t, \mathbf{y}(t))$ определяется формулой Ито и приводит к условию:

$$dM(t, \mathbf{y}(t)) = 0.$$

Теорема 1.7 [130]. Предположим, что коэффициенты СДУ (1.72) непрерывны и ограничены вместе со своими частными производными по совокупности переменных t и \mathbf{y} . Тогда для того, чтобы функция $M(t, \mathbf{y})$ была первым интегралом СДУ (3.2), необходимо и достаточно выполнения следующих соотношений:

$$\sum_{i=1}^{n_y} \sigma_{il}(t, \mathbf{y}) \frac{\partial M(t, \mathbf{y})}{\partial y_i} = 0, \quad l = 1, 2, \dots, n_w; \quad (1.73)$$

$$\frac{\partial M(t, \mathbf{y})}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n_y} \left[f_i(t, \mathbf{y}) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_y} \sum_{l=1}^{n_w} \frac{\partial \sigma_{il}(t, \mathbf{y})}{\partial y_j} \sigma_{jl}(t, \mathbf{y}) \right] \frac{\partial M(t, \mathbf{y})}{\partial y_i} = 0. \quad (1.74)$$

Если модель динамической системы задавать эквивалентным векторным СДУ в смысле Стратоновича, т.е.

$$d\mathbf{y}(t) = a(t, \mathbf{y}(t))dt + \sigma(t, \mathbf{y}(t)) \circ d\mathbf{w}(t), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \quad (1.75)$$

где

$$a_i(t, \mathbf{y}) = f_i(t, \mathbf{y}) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_y} \sum_{l=1}^{n_w} \frac{\partial \sigma_{il}(t, \mathbf{y})}{\partial y_j} \sigma_{jl}(t, \mathbf{y}), \quad (1.76)$$

$$i = 1, 2, \dots, n_y,$$

можно переписать условие (1.74) в виде

$$\frac{\partial M(t, \mathbf{y})}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n_y} a_i(t, \mathbf{y}) \frac{\partial M(t, \mathbf{y})}{\partial y_i} = 0. \quad (1.77)$$

Через $M(t, \mathbf{y})$ будем обозначать произвольную функцию из множества, определяющего набор первых интегралов $\{M_j(t, \mathbf{y})\}$.

Наличие первого интеграла $M(t, \mathbf{y})$ означает, что с вероятностью 1 любая траектория решения уравнения (1.72) или (1.75) остается на гладком многообразии $M(t, \mathbf{y}) = C = \text{const}$ в $[t_0, T] \times \mathbb{R}^{n_y}$, где константа C определяется начальным вектором состояния \mathbf{y}_0 : $M(t_0, \mathbf{y}_0) = C$.

Пусть $\{t_k\}$ — равномерная сетка с заданным постоянным шагом h , определяющая разбиение отрезка времени $[t_0, T]$:

$$t_k = t_{k-1} + h, \quad k = 1, \dots, N; \quad t_N = T, \quad N = \frac{T - t_0}{h},$$

\mathbf{y}_k — численное решение СДУ (1.72) или (1.75) в момент времени t_k . Всегда полагаем, что начальное значение численного решения совпадает с начальным значением задачи Коши, т.е. $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(t_0)$.

При численном решении задач, связанных с исследованием стохастических динамических систем, траектории которых с вероятностью 1 остаются на заданном многообразии, интересует точность попадания на многообразии, а именно

$$\mathbb{E}[|M(t_k, \mathbf{y}(t_k)) - M(t_k, \mathbf{y}_k)|], \quad k = 1, \dots, N.$$

Теорема 1.8. Пусть $M(t, \mathbf{y}) \in C_{t, \mathbf{y}}^{1,2}([t_0, T] \times \mathbb{R}^{n_y})$ — скалярная неслучайная функция, которая является первым интегралом системы СДУ в смысле Стратоновича (1.75), причем

$$\left| \frac{\partial M(T, \mathbf{y})}{\partial y_i} \right| \leq M^*, \quad i = 1, 2, \dots, n_y. \quad (1.78)$$

Если численный метод решения (1.72) имеет p -й порядок сильной сходимости, то справедливо

$$\varepsilon_{\mathcal{M}} = \mathbb{E}[|M(T, \mathbf{y}(T)) - M(T, \mathbf{y}_N)|] = O(h^p), \quad h \rightarrow 0. \quad (1.79)$$

Доказательство. Разложим в ряд Тейлора функцию $M(T, \mathbf{y}_N)$ в окрестности точного решения $\mathbf{y}(T)$, тогда

$$M(T, \mathbf{y}(T)) - M(T, \mathbf{y}_N) = \left[\frac{\partial M(T, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}(T)} \right]^T (\mathbf{y}(T) - \mathbf{y}_N) + \rho,$$

$$\mathbb{E}\rho = o(\mathbb{E}|\mathbf{y}(T) - \mathbf{y}_N|).$$

Так как частные производные функции $M(T, \mathbf{y})$ ограничены (1.78), то

$$\mathbb{E} \left| \left[\frac{\partial M(T, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}(T)} \right]^T (\mathbf{y}(T) - \mathbf{y}_N) \right| \leq M^* \mathbb{E}|\mathbf{y}(T) - \mathbf{y}_N|.$$

Таким образом, если численный метод имеет порядок p сильной сходимости, то порядок сходимости в смысле отклонения траектории от многообразия при условии (1.78) также будет равен p :

$$\varepsilon_{\mathcal{M}} = O(h^p), \quad h \rightarrow 0.$$

Теорема доказана.

Полученный результат верен для максимального среднего отклонения во всех узлах сетки, т.е.

$$\varepsilon = \max_{0 \leq k \leq N} \mathbb{E}[|\mathbf{y}(t_k) - \mathbf{y}_k|] = O(h^p), \quad h \rightarrow 0,$$

$$\varepsilon_{\mathcal{M}} = \max_{0 \leq k \leq N} \mathbb{E}[|M(t_k, \mathbf{y}(t_k)) - M(t_k, \mathbf{y}_k)|] = O(h^p), \quad h \rightarrow 0.$$

Таким образом, СДУ с первым интегралом можно использовать в качестве тестов для проверки порядка сильной сходимости численной схемы. В главе, посвященной решению тестовых и прикладных задач, проведено сравнение численных методов при решении СДУ с первым интегралом.

Модифицированные численные методы решения СДУ с инвариантами

Обозначим через \mathbf{y}_k численное решение СДУ в смысле Стратоновича (1.75) в момент времени t_k , полагая, что начальное значение численного решения совпадает с начальным значением задачи Коши, т.е. $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(t_0)$.

Запишем численный метод решения СДУ (1.75) в общем виде

$$\mathbf{y}_{k+1} = F(t_k, \mathbf{y}_k, h), \quad (1.80)$$

где функция $F(t, \mathbf{y}, h)$ определяется правой частью конкретного численного метода решения СДУ.

Будем предполагать, что

$$M(t_k, \mathbf{y}_k) = C,$$

т.е. точка (t_k, \mathbf{y}_k) принадлежит заданной поверхности. В общем случае, из-за погрешности численного метода, в следующем узле сетки t_{k+1} численное решение \mathbf{y}_{k+1} условию $M(t_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1}) = C$ не удовлетворяет, т.е.

$$M(t_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1}) = C' \neq C.$$

Предлагаемая методика коррекции численного решения состоит в построении проекции точки \mathbf{y}_{k+1} на поверхность $M(t, \mathbf{y}) = C$ при $t = t_{k+1}$. Для этого

- найдем вектор нормали $\nabla M(t_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1})$ в точке $(t_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1})$ к поверхности $M(t, \mathbf{y}) = C'$;

- запишем параметрическое уравнение прямой в пространстве \mathbb{R}^{n_y} , проходящей через точку \mathbf{y}_{k+1} с направляющим вектором $\nabla M(t_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1})$:

$$\chi(\alpha) = \mathbf{y}_{k+1} + \alpha \nabla M(t_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1}), \quad \alpha \in \mathbb{R}; \quad (1.81)$$

- найдем точку пересечения прямой (1.81) и поверхности $M(t, \mathbf{y}) = C$ при $t = t_{k+1}$ как решение системы

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{y}}_{k+1} = \mathbf{y}_{k+1} + \alpha \nabla M(t_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1}), \\ M(t_{k+1}, \tilde{\mathbf{y}}_{k+1}) = C. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что проекция $\tilde{\mathbf{y}}_{k+1}$ точки \mathbf{y}_{k+1} на поверхность $M(t, \mathbf{y}) = C$ при $t = t_{k+1}$ определяется решением в общем случае нелинейного уравнения

$$M(t_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1} + \alpha \nabla M(t_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1})) = C \quad (1.82)$$

относительно параметра α . Такое уравнение может иметь несколько решений, однако требуется найти α , соответствующее минимальному расстоянию между точками \mathbf{y}_{k+1} и $\tilde{\mathbf{y}}_{k+1}$ в смысле евклидовой метрики, т.е. минимальному значению $|\alpha|$ из возможных. Таким образом,

$$\tilde{\mathbf{y}}_{k+1} = \mathbf{y}_{k+1} + \alpha^* \nabla M(t_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1}),$$

где

$$\alpha^* = \arg \min_{\alpha} \{|\alpha| : M(t_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1} + \alpha \nabla M(t_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1})) = C\}.$$

Предложенную методику коррекции численного решения можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Утверждение. Пусть СДУ в смысле Стратоновича имеет первый интеграл $M(t, \mathbf{y}) = C$, $M(t, \mathbf{y}) \in C^{1,1}([t_0, T] \times \mathbb{R}^{n_y})$ и частные производные функции $M(t, \mathbf{y})$ по координатам вектора \mathbf{y} ограничены, т.е. $|\nabla M(t, \mathbf{y})| < M^*$; \mathbf{y}_{k+1} — численное решение в момент времени t_{k+1} , полученное численным методом (1.80), имеющим p -й порядок потраекторной аппроксимации, т.е.

$$\mathbb{E}(|\mathbf{y}(t_{k+1}) - \mathbf{y}_{k+1}|/\mathbf{y}_k = \mathbf{y}(t_k)) = O(h^p) \quad \text{при } h \rightarrow 0, \quad (1.83)$$

причем

$$M(t_k, \mathbf{y}_k) = C, \quad M(t_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1}) = C' \neq C.$$

Тогда коррекция численного решения $\tilde{\mathbf{y}}_{k+1}$ в момент времени t_{k+1}

$$\tilde{\mathbf{y}}_{k+1} = \mathbf{y}_{k+1} + \alpha^* \nabla M(t_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1}), \quad (1.84)$$

где α^* удовлетворяет условию

$$\alpha^* = \arg \min_{\alpha} \{|\alpha| : M(t_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1} + \alpha \nabla M(t_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1})) = C\},$$

лежит на поверхности $M(t, \mathbf{y}) = C$ и сохраняет порядок потраекторной аппроксимации решения.

Доказательство.

По построению $M(t_{k+1}, \tilde{\mathbf{y}}_{k+1}) = C$. Тогда, аналогично доказательству выше, получаем, что из потраекторной аппроксимации (1.83) и ограниченности производных функции $M(t, \mathbf{y})$ по координатам вектора \mathbf{y} следует

$$\mathbb{E}|M(t_{k+1}, \tilde{\mathbf{y}}_{k+1}) - M(t_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1})| = O(h^p) \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Разложив в ряд Тейлора функцию $M(t_{k+1}, \tilde{\mathbf{y}}_{k+1})$ в точке $(t_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1})$ и оставив линейную часть, получаем

$$\begin{aligned} & |M(t_{k+1}, \tilde{\mathbf{y}}_{k+1}) - M(t_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1})| = \\ & = |M(t_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1} + \alpha^* \nabla M(t_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1})) - M(t_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1})| = \\ & = |[\nabla M(t_k, \mathbf{y}_k)]^T \alpha^* \nabla M(t_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1})| + \rho = |\alpha^*| \cdot |\nabla M(t_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1})|^2 + \rho, \end{aligned}$$

где $\rho = o(|\alpha^* \nabla M(t_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1})|)$.

Так как $|\nabla M(t, \mathbf{y})| < M^*$, то

$$\mathbb{E}\alpha^* = O(h^p),$$

$$\mathbb{E}|\mathbf{y}(t_{k+1}) - \tilde{\mathbf{y}}_{k+1}| \leq \mathbb{E}|\mathbf{y}(t_{k+1}) - \mathbf{y}_{k+1}| + \mathbb{E}|\alpha^* \nabla M(t_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1})| = O(h^p)$$

при $h \rightarrow 0$.

Отсюда следует, что предложенная коррекция численного решения не ухудшает порядок точности используемого численного метода. Утверждение доказано.

Проекцию (1.84) следует находить на каждом шаге используемого численного метода решения СДУ, учитывая, что α^* — это функция точки (t, \mathbf{y}) . После чего эта проекция используется на следующем шаге, т.е. вместо формулы (4.49) имеем

$$\mathbf{y}_{k+1} = F(t_k, \tilde{\mathbf{y}}_k, h) \tag{1.85}$$

и тогда $M(t_k, \tilde{\mathbf{y}}_k) = C$, $k = 0, 1, \dots, N$.

Глава 2

Алгоритмы моделирования пуассоновского точечного ансамбля

Настоящая глава посвящена построению и сравнительному анализу трудоемкости алгоритмов численного статистического моделирования неоднородных пуассоновских точечных ансамблей [227]. Данные алгоритмы потребуются для решения СДУ с пуассоновской составляющей и систем со случайной структурой (с распределенными переходами и с разделением времени).

Неоднородный *пуассоновский точечный ансамбль*

$$X(V) = (x_1, \dots, x_{\nu(V)}), \quad x_i \in V,$$

с функцией интенсивности $\lambda(y) \geq 0$ и мерой интенсивности $\Lambda(V) = \int_V \lambda(y) dy$ определяется соотношениями [69]

$$P(\nu(V) = k) = e^{-\Lambda(V)} \frac{(\Lambda(V))^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.1)$$

где V - произвольная область евклидова пространства R^n , имеющая конечную меру интенсивности $\Lambda(V) < \infty$. Случайные переменные $\nu(V_1), \nu(V_2)$ независимы для непересекающихся множеств V_1, V_2 .

Пуассоновский точечный ансамбль полностью определяется своей мерой интенсивности, причем математическое ожидание и дисперсия $\nu(V)$ равны:

$$E(\nu(V)) = D(\nu(V)) = \Lambda(V).$$

Пуассоновские точечные ансамбли допускают «суперпозицию» и «прореживание» [111].

Если X_1, X_2 - взаимно независимые пуассоновские точечные ансамбли на V с функциями интенсивности λ_1 и λ_2 , то их суперпози-

ция $X = X_1 \cup X_2$ является пуассоновским точечным ансамблем с функцией интенсивности $\lambda \equiv \lambda_1 + \lambda_2$.

Если ансамбль X получен из пуассоновского точечного ансамбля X_0 с функцией интенсивности λ_0 путем «прореживания», т. е. независимого исключения точек с некоторой вероятностью $p(x)$, то X является пуассоновским точечным ансамблем с функцией интенсивности $\lambda \equiv (1 - p)\lambda_0$.

Известен следующий рандомизированный алгоритм построения пуассоновского точечного ансамбля с интенсивностью $\lambda(x)$ (см., например, [111, 148]):

– реализуется целочисленная случайная величина $\nu(V)$ с распределением (2.1);

– если $\nu(V) = k$, то независимо реализуются k точек $\{x_i\}$, $i = 1, \dots, k$, соответственно плотности

$$f(x) = \frac{\lambda(x)}{\Lambda(V)}, \quad x \in V. \quad (2.2)$$

Опишем специальный способ моделирования дискретных случайных величин, который будет использован для оптимизации алгоритмов моделирования пуассоновских точечных ансамблей.

2.1. Специальный способ моделирования дискретных случайных величин

В работе [186] предложен экономичный способ моделирования случайных величин, плотности распределения которых представляют собой взвешенные суммы (смеси) эффективно моделируемых плотностей. Для моделирования таких величин предложено использовать модифицированный метод суперпозиции, который использует «двухэтапное» моделирование по одному и тому же значению случайного числа.

Пусть дискретная случайная величина ξ принимает два значения v_1 и v_2 и имеет распределение с параметром q

$$P(\xi = v_1) = q, \quad P(\xi = v_2) = 1 - q, \quad 0 < q < 1. \quad (2.3)$$

Обозначим реализацию этой случайной величины через $\eta^{(1)}$ и положим $q = p^{(1)}$. Тогда случайную величину ξ можно моделировать с помощью алгоритма 1.1 из [193]:

$$\eta^{(1)} = v_j, \quad \text{если } \beta^{(1)} \in \Delta_j^{(1)}, \quad j = 1, 2,$$

где $\beta^{(1)} = \alpha$ – равномерно распределенная случайная величина в интервале $(0, 1)$; $\Delta_1^{(1)} = (0, p^{(1)})$, $\Delta_2^{(1)} = (p^{(1)}, 1)$.

Замечание 1. При $v_1 = 1$, $v_2 = 2$ случайная величина $\eta^{(1)}$ равна номеру интервала, в который попало $\beta^{(1)}$. При $v_1 = 1$, $v_2 = 0$ случайная величина $\eta^{(1)}$ имеет распределение Бернулли с параметром $p^{(1)}$ и ее можно рассматривать как индикатор принадлежности $\beta^{(1)}$ интервалу $\Delta_1^{(1)}$.

Определим случайную величину

$$\beta^{(2)} = \begin{cases} \frac{\beta^{(1)}}{p^{(1)}}, & \text{если } \beta^{(1)} \in \Delta_1^{(1)}, \\ \frac{\beta^{(1)} - p^{(1)}}{1 - p^{(1)}}, & \text{если } \beta^{(1)} \in \Delta_2^{(1)}. \end{cases}$$

В [186] (см. также [193]) указано, что справедлива следующая лемма.

Лемма 2.1 [193]. Условное распределение случайной величины $\beta^{(2)}$ при условии $\eta^{(1)} = v_j$ ($j = 1, 2$) является равномерным в интервале $(0, 1)$, и, следовательно, безусловное распределение $\beta^{(2)}$ является равномерным в интервале $(0, 1)$.

Лемма 2.2. Случайные величины $\eta^{(1)}$ и $\beta^{(2)}$ являются независимыми.

Доказательство. При любом $\Delta = (c, d) \subseteq (0, 1)$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\eta^{(1)} = v_1, \beta^{(2)} \in \Delta) &= \mathbb{P}\left(\beta^{(1)} \in \Delta_1^{(1)}, \frac{\beta^{(1)}}{p^{(1)}} \in \Delta\right) = \\ &= \mathbb{P}\left(\beta^{(1)} \in \Delta_1^{(1)} \cap (p^{(1)}c, p^{(1)}d)\right) = \\ &= \mathbb{P}\left(\beta^{(1)} \in (p^{(1)}c, p^{(1)}d)\right) = p^{(1)}(d - c) = \mathbb{P}(\eta^{(1)} = v_1)\mathbb{P}(\beta^{(2)} \in \Delta); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(\eta^{(1)} = v_2, \beta^{(2)} \in \Delta) &= P\left(\beta^{(1)} \in \Delta_2^{(1)}, \frac{\beta^{(1)} - p^{(1)}}{1 - p^{(1)}} \in \Delta\right) = \\
&= P\left(\beta^{(1)} \in \Delta_2^{(1)} \cap (p^{(1)} + (1 - p^{(1)})c, p^{(1)} + (1 - p^{(1)})d)\right) = \\
&= (1 - p^{(1)})(d - c) = P(\eta^{(1)} = v_2)P(\beta^{(2)} \in \Delta).
\end{aligned}$$

Это означает, что случайные величины $\beta^{(2)}$ и $\eta^{(1)}$ независимы. Лемма 2.2 доказана.

Полученную равномерную случайную величину $\beta^{(2)}$ можно использовать для моделирования случайной величины $\eta^{(2)}$ с распределением, аналогичным (2.3), при $q = p^{(2)}$:

$$\eta^{(2)} = v_j, \text{ если } \beta^{(2)} \in \Delta_j^{(2)}, j = 1, 2, \quad \Delta_1^{(2)} = (0, p^{(2)}), \Delta_2^{(2)} = (p^{(2)}, 1),$$

а также для моделирования $\beta^{(3)}$ – равномерно распределенной случайной величины в интервале $(0, 1)$:

$$\beta^{(3)} = \begin{cases} \beta^{(2)}, & \text{если } \beta^{(2)} \in \Delta_1^{(2)}, \\ \frac{\beta^{(2)} - p^{(2)}}{1 - p^{(2)}}, & \text{если } \beta^{(2)} \in \Delta_2^{(2)}, \end{cases}$$

и т. д. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. Пусть задан набор $\{p^{(i)}\}$, $p^{(i)} \in (0, 1)$, и построены последовательности случайных величин $\{\beta^{(i)}\}$:

$$\beta^{(1)} = \alpha, \quad \beta^{(i+1)} = \begin{cases} \beta^{(i)}, & \text{если } \beta^{(i)} \in \Delta_1^{(i)} = (0, p^{(i)}), \\ \frac{\beta^{(i)} - p^{(i)}}{1 - p^{(i)}}, & \text{если } \beta^{(i)} \in \Delta_2^{(i)} = (p^{(i)}, 1), \end{cases}$$

и $\{\eta^{(i)}\}$:

$$\eta^{(i)} = v_j, \quad \text{если } \beta^{(i)} \in \Delta_j^{(i)}, \quad j = 1, 2,$$

где α – равномерно распределенная случайная величина в интервале $(0, 1)$, $i = 1, 2, \dots$. Тогда для любого натурального k верно следующее:

1) случайные величины $\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \dots, \beta^{(k+1)}$ являются равномерно распределенными в интервале $(0, 1)$;

2) случайные величины $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \dots, \eta^{(k)}$ имеют распределение (2.3) с параметрами $p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(k)}$ соответственно;

3) случайные величины $\eta^{(1)}, \dots, \eta^{(k)}, \beta^{(k+1)}$ являются независимыми.

Доказательство проводится методом математической индукции. Основание индукции дают леммы 2.1 и 2.2. Индуктивный переход для простоты обозначений покажем для $k = 2$. Случайные величины $\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \beta^{(3)}$ являются равномерно распределенными в интервале $(0, 1)$ согласно их определению и лемме 2.1.

Случайные величины $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}$ имеют распределение (2.3) с параметрами $p^{(1)}, p^{(2)}$ соответственно согласно их определению.

При любом наборе (j_1, j_2, Δ) , где $j_1, j_2 = 1, 2; \Delta \in (0, 1)$, имеем

$$\begin{aligned} & P(\eta^{(1)} = v_{j_1}, \eta^{(2)} = v_{j_2}, \beta^{(3)} \in \Delta) = \\ & = P\left(\eta^{(1)} = v_{j_1}, \beta^{(2)} \in \Delta_{j_2}^{(2)}, \frac{\beta^{(2)}}{p^{(2)}} \in \Delta, \beta^{(2)} \in \Delta_1^{(2)}\right) + \\ & + P\left(\eta^{(1)} = v_{j_1}, \beta^{(2)} \in \Delta_{j_2}^{(2)}, \frac{\beta^{(2)} - p^{(2)}}{1 - p^{(2)}} \in \Delta, \beta^{(2)} \in \Delta_2^{(2)}\right) = \\ & = P(\eta^{(1)} = v_{j_1})P(\eta^{(2)} = v_{j_2}, \beta^{(3)} \in \Delta) = \\ & = P(\eta^{(1)} = v_{j_1})P(\eta^{(2)} = v_{j_2})P(\beta^{(3)} \in \Delta), \end{aligned}$$

где учтена независимость случайных величин $\eta^{(1)}$ и $\beta^{(2)}$ (см. лемму 2.2), а также независимость $\eta^{(2)}$ и $\beta^{(3)}$, которая доказывается аналогично лемме 2.2. Из полученных соотношений следует независимость случайных величин $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \beta^{(3)}$. Таким образом, все утверждения теоремы 2.1 верны при $k = 2$. Случай $k > 2$ рассматривается аналогично. Теорема 2.1 доказана.

Изложенную выше методику можно обобщить для моделирования независимых дискретных случайных величин $\{\eta^{(i)}\}$ с распределением

$$P(\eta^{(i)} = v_j^{(i)}) = p_j^{(i)}, \quad j = 1, \dots, M^{(i)}, \quad M^{(i)} < \infty, \quad (2.4)$$

$$\sum_{j=1}^{M^{(i)}} p_j^{(i)} = 1, \quad i = 1, 2, \dots$$

Теорема 2.2. Пусть заданы натуральные $\{M^{(i)}\}$, наборы вероятностей $\sum_{j=1}^{M^{(i)}} p_j^{(i)} = 1$ и последовательности случайных величин $\{\beta^{(i)}\}$ и $\{\eta^{(i)}\}$:

$$\beta^{(i+1)} = \frac{\beta^{(i)} - \sum_{l=1}^{j-1} p_l^{(i)}}{p_j^{(i)}}, \quad \text{если } \beta^{(i)} \in \Delta_j^{(i)} = \left(\sum_{l=1}^{j-1} p_l^{(i)}, \sum_{l=1}^j p_l^{(i)} \right),$$

$$\eta^{(i)} = v_j^{(i)}, \quad \text{если } \beta^{(i)} \in \Delta_j^{(i)}, \quad j = 1, \dots, M^{(i)},$$

где $\beta^{(1)} = \alpha$ – равномерно распределенная случайная величина в интервале $(0, 1)$, $i = 1, 2, \dots$. Тогда для любого натурального k верно следующее:

- 1) случайные величины $\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \dots, \beta^{(k+1)}$ являются равномерно распределенными в интервале $(0, 1)$;
- 2) случайные величины $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \dots, \eta^{(k)}$ имеют распределение (2.4);
- 3) случайные величины $\eta^{(1)}, \dots, \eta^{(k)}, \beta^{(k+1)}$ являются независимыми.

Приведенный специальный способ моделирования случайных величин является более экономичным, чем стандартные методы, при моделировании последовательности дискретных случайных величин. С помощью построенного способа можно моделировать последовательность случайных величин с использованием лишь одного обращения к датчику псевдослучайных чисел.

Рассмотрим вопрос об ограничении на длину моделируемой последовательности в предлагаемом способе численной реализации выборочных значений случайных величин. Ограничение связано с тем, что в расчетах используют псевдослучайные числа, которые имеют конечное число двоичных разрядов, и операция деления псевдослучайного кода на малоразрядные $p^{(i)}$ ухудшает свойства равномерности.

Алгоритмы, соответствующие теоремам 2.1 и 2.2, следует координировать с точностью вычисления значений α , а именно, если длина l_k

прообраза множества значений $\beta^{(k)}$ на множестве значений исходного числа α меньше некоторой заданной подходящей величины ϵ , то следует заменить $\beta^{(k)}$ на независимое значение α . Так, в случае теоремы 2.1, когда $\eta_i = \mathbf{1}_{\beta^{(i)} < p^{(i)}}$, одним значением α можно пользоваться, пока

$$l_k = \prod_{i=1}^k \bar{p}_i \geq \epsilon, \quad \bar{p}_i = \begin{cases} p^{(i)}, & \text{если } \beta^{(i)} \in (0, p^{(i)}), \\ 1 - p^{(i)}, & \text{если } \beta^{(i)} \in (p^{(i)}, 1). \end{cases}$$

А в случае теоремы 2.2, когда $\eta_i = \mathbf{1}_{\beta^{(i)} < \bar{\Delta}^{(i)}}$, одним значением α можно пользоваться, пока

$$l_k = \prod_{i=1}^k \bar{\Delta}^{(i)} \geq \epsilon, \quad \bar{\Delta}^{(i)} = |\Delta_j^{(i)}|, \quad \text{если } \beta^{(i)} \in \Delta_j^{(i)}, \quad j = 1, \dots, M^{(i)}, \quad (2.5)$$

где ϵ – погрешность псевдослучайных чисел, обычно возникающая вследствие конечной разрядности двоичных кодов. В случае $l_k < \epsilon$ следует использовать новое независимое значение α .

При использовании для вычисления α метода вычетов [193] с числом двоичных разрядов, равным m , можно рекомендовать значение $\epsilon = 2^{-m/2}$.

Следствие 1. В случае $v_1 = 1, v_2 = 0$ последовательность $\{\eta^{(i)}\}$ является последовательностью независимых испытаний Бернулли с параметрами $\{p^{(i)}\}$, а случайная величина

$$N = \min\{n : \eta^{(n)} = 1\}$$

имеет обобщенное геометрическое распределение

$$P(N = k) = q_k = p^{(k)} \prod_{i=1}^{k-1} (1 - p^{(i)}), \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

Следствие 2. Предложенный в теореме 2.1 алгоритм моделирования обобщенного геометрического распределения (2.6) эквивалентен стандартному методу моделирования распределения (2.6) на основе равенства

$$P\left(\sum_{n=1}^{k-1} q_n \leq \alpha < \sum_{n=1}^k q_n\right) = q_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.7)$$

где α – равномерно распределенная случайная величина в интервале $(0, 1)$.

Доказательство. Из следствия 1 видно, что $\eta^{(1)} = \dots = \eta^{(k-1)} = 0$, $\eta^{(k)} = 1$ при $N = k$. Следовательно, $\beta^{(1)} \in (p^{(1)}, 1)$, \dots , $\beta^{(k-1)} \in (p^{(k-1)}, 1)$, $\beta^{(k)} \in (0, p^{(k)})$, а значит:

$$\begin{aligned} 0 < \beta^{(k)} &= \frac{\beta^{(k-1)} - p^{(k-1)}}{1 - p^{(k-1)}} < p^{(k)}, \\ &\sum_{n=k-1}^{k-1} p^{(n)} \prod_{i=k-1}^{n-1} (1 - p^{(i)}) < \beta^{(k-1)} = \\ &= \frac{\beta^{(k-2)} - p^{(k-2)}}{1 - p^{(k-2)}} < \sum_{n=k-1}^k p^{(n)} \prod_{i=k-1}^{n-1} (1 - p^{(i)}), \\ &\dots \\ &\sum_{n=1}^{k-1} p^{(n)} \prod_{i=1}^{n-1} (1 - p^{(i)}) < \alpha < \sum_{n=1}^k p^{(n)} \prod_{i=1}^{n-1} (1 - p^{(i)}) \end{aligned}$$

или

$$\sum_{n=1}^{k-1} q_n \leq \alpha < \sum_{n=1}^k q_n.$$

Следствие доказано.

Из приведенных выше выкладок видно, что одним значением α можно пользоваться, пока $l_k = p^{(k)} \prod_{i=1}^{k-1} (1 - p^{(i)})$ превосходит допустимую погрешность псевдослучайных чисел. В случае $l_k < \epsilon$ следует использовать новое независимое значение α .

Метод А. А. Сидорова.

Далее рассмотрим второй способ моделирования последовательности независимых «битов» с вероятностью $p = 0_2 p^{(1)} \dots p^{(m)}$ (запись в двоичной системе исчисления), названный в [188] методом А. А. Сидорова (оригинальный источник в настоящее время не известен).

Если компьютер экономно реализует последовательности $\{\eta_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, независимых стандартных случайных «битов» таких, что

$P(\eta_k = 1) = P(\eta_k = 0) = 1/2$, то с помощью логических операций на этой основе можно получать последовательности бернуллиевских независимых случайных «битов» с

$$P(\eta_k = 1) = 0_2 p^{(1)} \dots p^{(m)} = p^{(1)} 2^{-1} + \dots + p^{(m)} 2^{-m},$$

где $p^{(i)}$ – значение i -го двоичного разряда, равное 0 или 1. Для этого используется представление

$$\eta_k = \alpha_1^{(k)} \delta[p^{(1)}] \alpha_2^{(k)} \delta[p^{(2)}] \dots \alpha_m^{(k)} \delta[p^{(m)}] 0, \quad \delta[x] = \begin{cases} \wedge, & \text{при } x = 0, \\ \vee, & \text{при } x = 1, \end{cases} \quad (2.8)$$

причем α_i – последовательность независимых случайных величин, равномерно распределенных в $(0, 1)$, записанных в двоичной системе исчисления $\alpha_i = 0_2 \alpha_i^{(1)} \dots \alpha_i^{(k)} \dots$, $i = 1, \dots, m$, а логические операции \wedge и \vee реализуются следующим образом:

$$\alpha_i^{(k)} \wedge \alpha_j^{(k)} = \begin{cases} 1, & \text{при } \alpha_i^{(k)} = \alpha_j^{(k)} = 1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\alpha_i^{(k)} \vee \alpha_j^{(k)} = \begin{cases} 0, & \text{при } \alpha_i^{(k)} = \alpha_j^{(k)} = 0, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Алгоритм А. А. Сидорова особенно удобен для использования на компьютерах типа квантовых (см., например, [284]), в которых предусмотрена реализация стандартных случайных «битов».

2.2. Алгоритмы моделирования пуассоновских точечных ансамблей и их оптимизация

При моделировании пуассоновского точечного ансамбля рандомизированным алгоритмом, плотность $f(x)$ (2.2) может не допускать достаточно эффективного стандартного алгоритма численного моделирования. В таких случаях можно использовать специальные алгоритмы

суперпозиции или исключения, а так же их модификации [193]. Рассмотрим алгоритмы моделирования неоднородных пуассоновских точечных ансамблей в случае сложной для моделирования плотности.

Рассмотрим два вида такой плотности:

I) *существует мажоранта $\lambda_0(x) \geq \lambda(x)$, $x \in V$, такая что плотность*

$$f_0(x) = \frac{\lambda_0(x)}{\Lambda_0(V)}, \quad x \in V \quad (2.9)$$

допускает эффективный алгоритм моделирования;

II) *функция интенсивности допускает «расслоение»:*

$$\lambda(x) = \sum_{i=1}^M \lambda_i(x), \quad (2.10)$$

и существуют эффективные алгоритмы моделирования плотностей $f_i(x) = \lambda_i(x)/\Lambda_i$.

Алгоритмы, использующие свойства пуассоновских точечных ансамблей

1. В случае **(I)** существования мажоранты можно построить следующий алгоритм моделирования неоднородного пуассоновского точечного ансамбля, использующий свойство «прореживания».

«Алгоритм исключения из реализации ансамбля»:

- реализуется значение k случайной величины $\nu_0(V)$, распределенной по закону Пуассона с параметром $\Lambda_0(V) = \int_V \lambda_0(y) dy$;
- реализуются точки x_1, \dots, x_k в области V независимо соответственно плотности (2.9);
- точки x_i последовательно исключаются с вероятностями $p_i = 1 - \frac{\lambda(x_i)}{\lambda_0(x_i)}$, $i = 1, \dots, k$.

Вычислим S – трудоемкость этого алгоритма. Его вычислительные затраты равны

$$s = \sum_{i=1}^{\nu_0} (s_{\lambda_0}^{(i)} + t_r) + t_{\Pi}^{(0)},$$

где $s_{\lambda_0}^{(i)}$ – случайные вычислительные затраты на моделирование i -й случайной точки, распределенной с плотностью (2.9), t_r – затраты на «попытку» исключения точки, а $t_{\Pi}^{(0)}$ – затраты на моделирование случайной величины ν_0 , распределенной по закону Пуассона с параметром $\Lambda_0(V)$. Используя тождество Вальда, отсюда получаем

$$S = Es = \Lambda_0(T_{\lambda_0} + T_r) + T_{\Pi}^{(0)}, \quad T_{\lambda_0} = Es_{\lambda_0}^{(i)}, \quad T_r = Et_r, \quad T_{\Pi}^{(0)} = Et_{\Pi}^{(0)}.$$

2. В случае (II) «расслоения» функции интенсивности можно использовать свойство «суперпозиции» пуассоновских точечных ансамблей.

«Алгоритм суперпозиции ансамблей»:

– для $i = 1, \dots, M < +\infty$

- реализуется значение k_i случайной величины, распределенной по закону Пуассона с параметром $\Lambda_i(V) = \int_V \lambda_i(y) dy$;
- реализуются точки x_1, \dots, x_{k_i} в области V независимо соответственно плотности $f_i(x) = \frac{\lambda_i(x)}{\Lambda_i(V)}$;

– объединяются все полученные точки (это дает реализацию пуассоновского точечного ансамбля с интенсивностью $\lambda(x)$ в области V).

Этот алгоритм можно использовать и в случае $M = +\infty$, однако для этого требуется выделить в (2.10) достаточно малый «остаток»:

$$\lambda(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(x) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) + \sum_{i=N+1}^{\infty} \lambda_i(x) = \lambda^{(1)}(x) + \lambda^{(2)}(x)$$

и для моделирования ансамбля с интенсивностью $\lambda^{(2)}(x)$ использовать специальный, возможно, сложный алгоритм.

Теперь определим трудоемкость алгоритма использования суперпозиции ансамблей при $M < +\infty$:

$$s = \sum_{j=1}^M \left(\sum_{i=1}^{\nu_j} s_{\lambda_j}^{(i)} + t_{\Pi}^{(j)} \right),$$

где $s_{\lambda_j}^{(i)}$ – затраты на моделирование i -й случайной точки, распределенной с плотностью $f_j(x) = \lambda_j(x)/\Lambda_j(V)$, а $t_{\Pi}^{(j)}$ – затраты на моделирование случайной величины ν_j , распределенной по закону Пуассона с параметром $\Lambda_j(V)$. Используя тождество Вальда, отсюда получаем

$$S = \mathbb{E}s = \sum_{j=1}^M (\Lambda_j T_{\lambda_j} + T_{\Pi}^{(j)}), \quad T_{\lambda_j} = \mathbb{E}s_{\lambda_j}^{(i)}, \quad T_{\Pi}^{(j)} = \mathbb{E}t_{\Pi}^{(j)}.$$

Заметим, что в построенном «алгоритме суперпозиции ансамблей» невозможно использовать модифицированный метод суперпозиции.

Алгоритмы, использующие специальные методы моделирования распределений. В случае (I) существования мажоранты можно использовать мажорантный метод исключения для моделирования распределения с плотностью (2.2). Получаем следующий алгоритм моделирования неоднородного пуассоновского точечного ансамбля.

«Алгоритм мажорантного метода исключения»:

- реализуется значение k случайной величины $\nu(V)$, распределенной по закону Пуассона с параметром $\Lambda(V) = \int_V \lambda(y) dy$;
- реализуются точки x_1, \dots, x_k в области V независимо соответственно плотности (2.2) мажорантным методом исключения с мажорантой $\lambda_0(x)$.

Для этого алгоритма имеем:

$$s = \sum_{i=1}^{\nu} s_{\lambda}^{(i)} + t_{\Pi},$$

где $s_{\lambda}^{(i)}$ – случайные вычислительные затраты на моделирование i -й случайной точки, распределенной с плотностью (2.2), t_{Π} – затраты на моделирование случайной величины ν , распределенной по закону Пуассона с параметром $\Lambda(V)$.

Учитывая трудоемкость мажорантного метода исключения, отсюда получаем

$$S = Es = \Lambda \frac{\Lambda_0}{\Lambda} (T_{\lambda_0} + T_r) + T_{\Pi} = \Lambda_0 (T_{\lambda_0} + T_r) + T_{\Pi},$$

где T_{Π} – трудоемкость моделирования случайной величины ν , распределенной по закону Пуассона с параметром $\Lambda(V)$; T_{λ_0} – трудоемкость моделирования случайной точки, распределенной с плотностью (2.9); T_r – трудоемкость исключения точки.

Поскольку $\Lambda(V) \leq \Lambda_0(V)$, то $T_{\Pi} \leq T_{\Pi}^0$. Таким образом, трудоемкость этого алгоритма несколько меньше, чем трудоемкость «алгоритма исключения из реализации ансамбля». Использование в обоих алгоритмах модифицированного метода исключения одинаково улучшает оба алгоритма.

В случае (II) «расслоения» функции интенсивности можно использовать метод суперпозиции для моделирования распределения с плотностью $f(x)$. Таким образом, в данном случае имеем следующий алгоритм моделирования неоднородного пуассоновского точечного ансамбля с использованием суперпозиции распределений.

«Алгоритм суперпозиции распределений»:

- реализуется значение k случайной величины, распределенной по закону Пуассона с параметром $\Lambda(V) = \int_V \lambda(y) dy$;
- реализуются точки x_1, \dots, x_k в области V независимо с плотностью (2.2) методом суперпозиции.

Определим трудоемкость алгоритма использования суперпозиции распределений:

$$s = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^M p_j s_{\lambda_j}^{(i)} + t_{\Pi},$$

где $s_{\lambda_j}^{(i)}$ – затраты на моделирование i -й случайной точки, распределенной с плотностью $f_j(x) = \lambda_j(x)/\Lambda_j(V)$, а t_{Π} – затраты на моделирование случайной величины ν , распределенной по закону Пуассона с параметром $\Lambda(V)$.

Учитывая, что $p_j = \Lambda_j(V)/\Lambda(V)$, получаем

$$S = Es = \sum_{j=1}^M \Lambda_j T_{\lambda_j} + T_{\Pi}, \quad T_{\lambda_j} = Es_{\lambda_j}^{(i)}, \quad T_{\Pi} = Et_{\Pi}.$$

Поскольку $T_{\Pi} \leq \sum_{j=1}^M T_{\Pi}^{(j)}$, то трудоемкость этого алгоритма несколько меньше, чем трудоемкость «алгоритма суперпозиции ансамблей».

Уменьшить трудоемкость «алгоритма суперпозиции распределений» можно, используя модифицированный метод суперпозиции.

Кроме того, алгоритм использования суперпозиции распределений непосредственно применим и при $M = +\infty$.

Приближенное «цифровое» моделирование пуассоновских точечных ансамблей

Построим приближенный алгоритм моделирования пуассоновских точечных ансамблей [69]. Для простоты изложения приближенного алгоритма в качестве области V рассмотрим ограниченное множество $L_n = [0, a]^n \subset R^n$, т. е. V – гиперкуб в n -мерном евклидовом пространстве.

Для построения приближенной модели пуассоновского точечного ансамбля $X(V)$ с кусочно-непрерывной функцией интенсивности $\lambda(x)$ область V разобьем прямоугольной сеткой с ячейками объема ΔV , центры которых обозначим

$$\{x_i\}, \quad i = 1, \dots, n_{\Delta}(V),$$

где $n_{\Delta}(V)$ – число ячеек внутри области V . В каждой ячейке независимо реализуются точки x_i с вероятностями $\lambda(x_i)\Delta V$, т. е. с вероятностью $1 - \lambda(x_i)\Delta V$ ячейка номера i остается пустой. Полученный таким образом случайный ансамбль точек $X_{\Delta}(V)$ назовем ΔV -пуассоновским.

Пусть $\lambda(x) \leq \lambda_0 \forall x \in V$. Алгоритм приближенного моделирования пуассоновского точечного ансамбля с функцией интенсивности $\lambda(x)$ конструируется следующим образом:

- 1) задается прямоугольная сетка с ячейками объема ΔV , причем число ячеек равно $n_{\Delta}(V)$;
- 2) моделируются независимые бернуллиевские случайные величины $\{\eta_i\}$ с параметром $p = \lambda_0 \Delta V$, $i = 1, \dots, n_{\Delta}(V)$; при этом $\eta_i = 1$

означает, что точка x_i (центральная точка i -й ячейки) реализована;

- 3) точки, в которых $\eta_i = 1$, с вероятностью $p_i = 1 - \lambda(x_i)/\lambda_0$ исключаются;
- 4) из оставшихся точек строится требуемая реализация ΔV -пуассоновского точечного ансамбля:

$$X_{\Delta}(V) = (x_1, \dots, x_{\nu_{\Delta}(V)}), \quad \nu_{\Delta}(V) \leq n_{\Delta}(V).$$

Последовательность исключений в этом алгоритме целесообразно моделировать, используя одно значение случайного числа α , как указано в теореме 2.1.

Прежде чем перейти к доказательству слабой сходимости ΔV -пуассоновского точечного ансамбля $X_{\Delta}(V)$ к пуассоновскому точечному ансамблю $X(V)$ с данной интенсивностью λ при $\Delta V \rightarrow 0$, введем некоторые определения и обозначения.

Определение 2.1 [115]. Случайные элементы ξ_n называются сходящимися по распределению к ξ ($\xi_n \xrightarrow{D} \xi$), если слабо сходятся распределения $P_{\xi_n} \Rightarrow P_{\xi}$ при $n \rightarrow \infty$.

Для случайных мер в евклидовом пространстве данное определение эквивалентно следующему [115].

Определение 2.2 [115]. Случайные меры $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ на V слабо сходятся к случайной мере ξ ($\xi_n \xrightarrow{D} \xi$), если

$$(\xi_n(B_1), \xi_n(B_2), \dots, \xi_n(B_l)) \xrightarrow{D} (\xi(B_1), \xi(B_2), \dots, \xi(B_l))$$

для любых ограниченных подобластей $B_1, \dots, B_l \subset V$, $l \in \mathbb{N}$.

Случайное число точек рассматриваемого ΔV -пуассоновского точечного ансамбля в подобласти B обозначим $\nu_{\Delta}(B)$, $B \subset V$. Согласно построению:

$$\nu_{\Delta}(B) = \sum_{i=1}^{n_{\Delta}(B)} \zeta_i; \quad \text{P}(\zeta_i = 1) = \lambda(x_i)\Delta V, \quad \text{P}(\zeta_i = 0) = 1 - \lambda(x_i)\Delta V,$$

причем случайные величины $\{\zeta_i\}$ независимы.

Отметим, что совокупность $\{\nu_{\Delta}(B), B \subset V\}$ определяет случайную точечную меру ν_{Δ} на V .

Справедливы следующие утверждения для построенного ΔV -пуассоновского точечного ансамбля.

Лемма 2.3. *Случайное число точек ΔV -пуассоновского точечного ансамбля в произвольной подобласти $B \subset V$ слабо сходится к $\nu(B)$ при $\Delta V \rightarrow 0$, т. е. $\nu_{\Delta}(B) \xrightarrow{D} \nu(B)$, где*

$$\text{P}(\nu(B) = k) = e^{-\Lambda(B)} \frac{\Lambda(B)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Доказательство осуществляется методом производящих функций по аналогии с [148].

Теорема 2.3. *Случайный ΔV -пуассоновский точечный ансамбль $X_{\Delta}(V)$ слабо сходится к пуассоновскому точечному ансамблю $X(V)$ интенсивности λ при $\Delta V \rightarrow 0$.*

Доказательство. Пусть B_1, \dots, B_l – совокупность областей из V . Будем полагать, что области не пересекаются (так как всегда можно перейти от пересекающихся областей к не пересекающимся с увеличением их числа). Тогда случайные величины $\{\nu_{\Delta}(B_i)\}$ являются независимыми и на основании леммы 2.3

$$\left(\nu_{\Delta}(B_1), \nu_{\Delta}(B_2), \dots, \nu_{\Delta}(B_l) \right) \xrightarrow{D} \left(\nu(B_1), \nu(B_2), \dots, \nu(B_l) \right), \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

Отсюда (см. [115]) следует слабая сходимость случайных мер: $\nu_{\Delta} \xrightarrow{D} \nu$, т. е. слабая сходимость случайного ΔV -пуассоновского точечного ансамбля $X_{\Delta}(V)$ к пуассоновскому точечному ансамблю $X(V)$, при $\Delta V \rightarrow 0$. Теорема 2.3 доказана.

Можно построить следующий экономичный способ построения «цифрового» ΔV -пуассоновского точечного ансамбля. Пусть λ_0 – константа с конечным числом двоичных разрядов и

$$p = \lambda_0 \Delta V = \lambda_0 2^{-k(\Delta V)} = 0_2 p^{(1)} \dots p^{(m)}, \quad k(\Delta V) \in \mathbb{N}, \quad (2.11)$$

где $k(\Delta V) \asymp |\ln(\Delta V)|$ и $m = k(\Delta V) + C = O(k(\Delta V))$. Тогда, если в п. 2 алгоритма моделирование $\{\eta_i\}$ производить на основе представлений (2.8), то моделирование ΔV -ансамбля осуществляется с трудоемкостью порядка $O(|\ln(\Delta V)|)$.

Отметим, что рассматриваемая слабая сходимость точечных случайных мер означает слабую сходимость распределений функционалов вида

$$\int_V f(x) \nu_\Delta(dx),$$

где $f(x)$ – непрерывная неотрицательная функция [115].

2.3. Алгоритмы моделирования пуассоновских точечных потоков и их оптимизация

Построенные алгоритмы моделирования пуассоновских точечных ансамблей можно использовать для моделирования общего пуассоновского процесса и пуассоновских точечных потоков.

Также известно [225], что для пуассоновского процесса плотность вероятности временных интервалов между соседними точками является экспоненциальной. Поэтому обычно пуассоновский процесс строят, пользуясь экспоненциальным распределением.

Интенсивность $\lambda(t)$, $t > 0$, пуассоновского процесса определяет обобщенное экспоненциальное распределение времени ожидания τ следующей точки после точки t' :

$$f(u|t') = \lambda(t' + u) \exp\left(-\int_0^u \lambda(t' + s) ds\right), \quad u > 0, \quad \lambda(u) > 0. \quad (2.12)$$

Так называемый метод «максимального сечения» (метод выравнивания) используется для решения ряда прикладных задач, математические модели которых связаны с неоднородными пуассоновскими процессами [179, 193, 227]. Этот метод был сформулирован и обоснован в работе [278] для случая постоянной мажоранты (т. е. для постоянного максимального сечения).

Предположим, что

$$\lambda(t) \leq \lambda_m(t) < c < +\infty, \quad \int_0^\infty \lambda(t) dt = +\infty.$$

Для выполнения последнего равенства в задачах теории переноса частиц ограниченную среду дополняют до бесконечной абсолютным плотителем, для которого $\lambda \equiv \lambda_{capture} > 0$ [193, стр. 258].

Символами α , α_1 , α_2, \dots будем обозначать независимые случайные числа, равномерно распределенные в интервале $(0, 1)$.

Запишем **метод максимального сечения в общем случае временной мажоранты**. Пусть $\zeta_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, где ξ_k – последовательность случайных величин, распределенных с условными плотностями

$$f_m(u|t', \zeta_{k-1}) = \lambda_m(t' + \zeta_{k-1} + u) \exp\left(-\int_0^u \lambda_m(t' + \zeta_{k-1} + s) ds\right),$$

и пусть

$$N = \min\{n : \alpha_n \leq \lambda(t' + \zeta_n)/\lambda_m(t' + \zeta_n)\}, \quad \tau = \zeta_N. \quad (2.13)$$

Тогда τ имеет обобщенное экспоненциальное распределение с плотностью (2.12).

Свойство «прореживания» пуассоновских точечных ансамблей дает обоснование сформулированного алгоритма, так как «прореживание» с вероятностью $1 - \lambda(t)/\lambda_m(t)$ пуассоновского точечного потока интенсивности $\lambda_m(t)$ дает пуассоновский точечный поток интенсивности $\lambda(t)$, для которого время ожидания τ распределено обобщенно экспоненциально с плотностью (2.12).

Нетрудно видеть, что в алгоритме максимального сечения для фиксированной последовательности $\zeta = \{\zeta_k\}$ реализуется условное обобщенное геометрическое распределение с вероятностями:

$$q_n = P(N = n | \zeta) = \frac{\lambda(t' + \zeta_n)}{\lambda_m(t' + \zeta_n)} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\lambda(t' + \zeta_k)}{\lambda_m(t' + \zeta_k)}\right).$$

Такое распределение более экономно реализуется стандартным методом [193], сравнительно с соотношением (2.13).

В этом параграфе используется обозначение p_n вместо $p^{(n)}$.

Лемма 2.4. Для геометрического распределения (2.6) выполняется равенство

$$\sum_{n=1}^k q_n = 1 - \prod_{n=1}^k (1 - p_n).$$

Доказательство проводится методом математической индукции. Основание индукции легко проверяется при $n = 2$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^2 q_n &= p_1 + p_2(1 - p_1) = 1 - (1 - p_1) + \\ &+ p_2(1 - p_1) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) = 1 - \prod_{k=1}^2 (1 - p_k). \end{aligned}$$

Допустим, что лемма верна для k . Докажем, что она верна и для $k + 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{k+1} q_n &= q_{k+1} + \sum_{n=1}^k q_n = p_{k+1} \prod_{n=1}^k (1 - p_n) + 1 - \prod_{n=1}^k (1 - p_n) = \\ &= 1 - (1 - p_{k+1}) \prod_{n=1}^k (1 - p_n) = 1 - \prod_{n=1}^{k+1} (1 - p_n). \end{aligned}$$

Лемма 2.4 доказана.

Дополнительно заметим, что в связи с моделированием обобщенного геометрического распределения для детерминированных вероятностей можно сформулировать следующее утверждение.

Лемма 2.5. *Если*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{n-1} (1 - p_k) < +\infty,$$

то для распределения (2.6) имеем $EN \leq EN^2 < +\infty$.

Доказательство. Соотношение $EN < +\infty$ здесь следует из равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} np_n \prod_{k=1}^{n-1} (1 - p_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=k}^{\infty} p_r \prod_{i=1}^{r-1} (1 - p_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{n-1} (1 - p_k).$$

Соотношение $EN^2 < +\infty$ доказывается аналогично, путем изменения порядка суммирования в соответствующей сумме. Лемма 2.5 доказана.

Для метода максимального сечения это означает, что в соотношении (2.13), с учетом выражения величины $\sum q_k$ и леммы 2.4, можно перейти к равенству [69]

$$N = \min\left\{n : 1 - \alpha > \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\lambda(t' + \zeta_k)}{\lambda_m(t' + \zeta_k)}\right)\right\}. \quad (2.14)$$

Модифицированный метод максимального сечения (2.14) использует одно псевдослучайное число и поэтому является более экономичным, так как псевдослучайное число α реализуется на ЭВМ с использованием большого числа арифметических операций. Кроме того, уменьшение количества используемых значений α снижает конструктивную размерность алгоритма, связанную с многомерной равномер-

ностью используемых псевдослучайных чисел [220]. Условия, обеспечивающие контроль допустимой погрешности при моделировании модифицированным методом максимального сечения (2.14), подробно рассмотрены в разделе, посвященном специальному способу моделирования дискретных случайных величин.

Приближенные алгоритмы моделирования пуассоновского процесса.

Неоднородный пуассоновский процесс $P(t)$ интенсивности $\lambda(t)$ обладает следующим свойством ординарности:

$$P(P(t+h) - P(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h), \quad h \rightarrow 0.$$

Пусть задана равномерная сетка $\{t_k\}$ ($t_0 = 0, t_k = kh, t_k \leq T$).

Алгоритм моделирования соответствующего пуассоновского точечного потока на основе свойства ординарности состоит в следующем.

Алгоритм 1 (на основе свойства ординарности). *В каждом узле равномерной временной сетки $\{t_k\}$*

1) *моделируется α_k — случайная величина, имеющая равномерное распределение в интервале $(0, 1)$ и проверяется вероятностное условие:*

$$\alpha_k \leq \lambda(t_k)h, \tag{2.15}$$

2) *если условие (2.15) выполнено, то узел t_k является точкой моделируемого пуассоновского потока.*

Можно оптимизировать этот алгоритм, используя экономичный способ моделирования случайных величин, рассмотренный выше. Оптимизация алгоритма позволяет уменьшить трудоемкость вычислений в результате уменьшения числа вызовов генератора псевдослучайных чисел.

Алгоритм 2 (оптимизация алгоритма 1):

0) *моделируется α — случайная величина, имеющая равномерное распределение в интервале $(0, 1)$; $k := 1, \beta^{(k)} = \alpha$;*

1) *$p^{(k)} = \lambda(t_k)h$, проверяется условие*

$$\beta^{(k)} \leq p^{(k)}, \quad (2.16)$$

и полагается

$$\beta^{(k+1)} = \begin{cases} \frac{\beta^{(k)}}{p^{(k)}}, & \text{если } \beta^{(k)} < p^{(k)}, \\ \frac{\beta^{(k)} - p^{(k)}}{1 - p^{(k)}}, & \text{если } \beta^{(k)} > p^{(k)}; \end{cases}$$

- 2) если условие (2.16) выполнено, то узел t_k является точкой моделируемого пуассоновского потока;
- 3) $k := k + 1$. Если $t_k < T$, то идем на 1), иначе *STOP*.

Условия, обеспечивающие контроль допустимой погрешности при моделировании алгоритмом 2, подробно рассмотрены в параграфе 2.1. Сравнение этих алгоритмов и проверка статистической адекватности алгоритма 2 проведены в главе "Решение тестовых и прикладных задач".

2.4. Алгоритмы моделирования общего пуассоновского процесса

Если математическая модель задана СДУ с пуассоновской составляющей, то при численном решении требуется моделировать общий пуассоновский процесс.

Рассмотрим целочисленную случайную пуассоновскую меру ν на пространстве $V = R_+ \times \Gamma$, с мерой интенсивности Λ и характеристической мерой Π :

$$P(\nu(\tilde{U}) = k) = e^{-\Lambda(\tilde{U})} \frac{(\Lambda(\tilde{U}))^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.17)$$

$$E\nu(\tilde{U}) = \Lambda(\tilde{U}) = \int_0^T \Pi(t, B) dt, \quad \Pi(t, B) = \int_B \pi(t, \theta) d\theta, \quad S = [0, T] \times B \subset R_+ \times \Gamma.$$

Эту случайную пуассоновскую меру ν можно идентифицировать с общим пуассоновским процессом на пространстве $R_+ \times \Gamma$ с интенсивностью $\pi(t, \theta)$ и мерой интенсивности $\Lambda(S) = \int_0^T \int_B \pi(t, \theta) d\theta dt$ (если π не зависит от t , то пуассоновская мера называется однородной). Для простоты применения перепишем некоторые построенные в предыдущих параграфах алгоритмы моделирования пуассоновских ансамблей в обозначениях, принятых для СДУ с пуассоновской составляющей (1.62). При решении СДУ реализация общего пуассоновского процесса $(t_1, \theta_1), \dots, (t_{k-1}, \theta_{k-1}), \dots$, задает моменты разрывов решения и величину разрывов.

Алгоритмы моделирования общего пуассоновского процесса на $V = [0, T] \times \Gamma$ с мерой интенсивности

$$\Lambda(V) = \int_0^T \int_{\Gamma} \pi(t, \theta) d\theta dt.$$

Метод 1:

- 1) моделируем значение k случайной величины $\xi(V)$, распределенной по закону Пуассона (2.17) с параметром $\Lambda(V) = \int_0^T \Pi(t, \Gamma) dt$ (для однородной пуассоновской меры $\Lambda(V) = \Pi(\Gamma)T$);

- 2) моделируем k точек в области V независимо с плотностью
- $$p(t, \theta) = \frac{\pi(t, \theta)}{\Lambda(V)} \quad \left(\text{для однородной пуассоновской меры } p(t) = \frac{1}{T}, \right.$$
- где $t \in [0, T]$; $p(\theta) = \frac{\pi(\theta)}{\Pi(\Gamma)}$, где $\theta \in \Gamma$).

В случае, если плотность $p(\theta, t)$ трудна для моделирования, но существует мажоранта $\pi_0(t, \theta) \geq \pi(t, \theta)$ и для плотности

$$p_0(t, \theta) = \frac{\pi_0(t, \theta)}{\Lambda_0(V)}, \quad \Lambda_0(V) = \int_0^T \int_{\Gamma} \pi_0(t, \theta) d\theta dt$$

существует эффективный алгоритм моделирования, то запишем еще два метода. Обозначим

$$\Pi(t, \Gamma) = \int_{\Gamma} \pi(t, \theta) d\theta, \quad \lambda_0(t) = \Pi_0(t, \Gamma) = \int_{\Gamma} \pi_0(t, \theta) d\theta, \quad t \in [0, T].$$

Метод 2 (исключение из реализаций ансамбля):

- 1) моделируем значение k случайной величины $\xi_0(V)$, распределенной по закону Пуассона (2.17) с параметром $\Lambda_0(V)$;
- 2) моделируем k точек t_1^0, \dots, t_k^0 в области $[0, T]$ независимо с плотностью $p(t) = \frac{\Pi_0(t, \Gamma)}{\Lambda_0(V)}$;
- 3) точки t_i^0 последовательно исключаются с вероятностями $p_i = 1 - \frac{\Pi(t_i^0, \Gamma)}{\Pi_0(t_i^0, \Gamma)}$, $i = 1, \dots, k$;
- 4) в оставшихся точках t_1^0, \dots, t_l^0 , $l \leq k$, моделируем θ_i^0 независимо с плотностью $p(\theta | t_i^0) = \frac{\pi(t_i^0, \theta)}{\Pi(t_i^0, \Gamma)}$, $i = 1, \dots, l$, где $y \in \Gamma$.

В методе 1 и в методе 2 при решении СДУ нужно упорядочить временные точки.

Пуассоновскую случайную меру $\nu([0, t] \times \Gamma)$ как функцию времени можно рассматривать как неоднородный пуассоновский процесс интенсивности

$$\lambda(t) = \Pi(t, \Gamma) = \int_{\Gamma} \pi(t, \theta) d\theta. \quad (2.18)$$

Сформулируем алгоритм, использующий модифицированный метод максимального сечения, для моделирования общего пуассоновского процесса, идентифицированного с пуассоновской мерой.

Метод 3 (использование модифицированного метода максимального сечения). Если смоделирована реализация общего пуассоновского процесса $(t_1, \theta_1), \dots, (t_{k-1}, \theta_{k-1})$, где t_1, \dots, t_{k-1} – упорядоченная последовательность моментов времени, то моделирование (t_k, θ_k) осуществляется по алгоритму:

пусть $\zeta_n = \sum_{i=1}^n \eta_i$, где η_i – последовательность независимых случайных величин, распределенных с условными плотностями: $f_0(u|t', \zeta_{i-1}) = \lambda_0(t_{k-1} + \zeta_{i-1} + u) \exp(-\int_0^u \lambda_0(t' + \zeta_{i-1} + s)ds)$ и пусть

$$N = \min\{n : 1 - \alpha > \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{\lambda(t_{k-1} + \zeta_i)}{\lambda_0(t_{k-1} + \zeta_i)}\right)\},$$

где α – равномерно распределенная в $(0, 1)$ случайная величина. Тогда $t_k = t_{k-1} + \zeta_N$, а случайная величина θ_k моделируется независимо с плотностью $p(\theta | t_k) = \pi(t_k, \theta)/\lambda(t_k)$, где $\theta \in \Gamma$.

В случае однородной пуассоновской меры, а также в случае зависимости от времени, методы 1–3 не вносят дополнительной погрешности в решение СДУ.

Особо отметим, что если при решении СДУ требуется моделирование общего пуассоновского процесса, идентифицированного с пуассоновской случайной мерой, зависящей от времени, от вектора фазовых координат $\mathbf{y}(t)$, то во всех рассмотренных алгоритмах функция интенсивности и характеристическая мера так же зависят от времени и от вектора фазовых координат

$$\lambda(t, \mathbf{y}(t)) = \Pi(t, \mathbf{y}(t), \Gamma) = \int_{\Gamma} \pi(t, \mathbf{y}(t), \theta) d\theta. \quad (2.19)$$

Слабая сходимость полученного приближенного пуассоновского ансамбля доказывается аналогично теореме 2.3.

Глава 3

Статистические алгоритмы моделирования систем со случайной структурой

Системы со случайной структурой (ССС) являются важной областью применения численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений (СДУ). Систематическое изложение теории систем со случайной структурой и методов их анализа дано в работе И.Е. Казакова, В.М. Артемьева, В.А. Бухалева «Анализ систем со случайной структурой» [143]. В диссертации будет использована терминология и обозначения из этой книги.

3.1. Постановка задачи анализа СССР

Под *системами со случайной (переменной) структурой, заданной стохастическими дифференциальными уравнениями* понимаются динамические системы, поведение которых на случайных интервалах времени характеризуется различными структурами и описывается различными уравнениями [96, 143, 145, 157].

К системам со случайной структурой относятся:

- системы поиска, захвата и сопровождения сигнала;
- системы, имеющие срыв управления или слежения;
- системы с периодическим случайным повторением процессов поиска, захвата, срыва управления;
- системы управления, в которых связи между функциональными элементами меняются в зависимости от состояния (системы с переменной структурой управляющего устройства);

- системы с возможными нарушениями, в которых возможен случайный отказ функционирования некоторых цепей в случайные моменты времени.

Рассмотрим процесс $[\mathbf{y}(t), s(t)]^\top$, где $s(t)$ – дискретный случайный процесс с конечным множеством состояний $\{1, 2, \dots, S\}$, S – число структур системы, а $\mathbf{y}(t)$ – n_y -мерный непрерывный случайный процесс, описываемый при условии $s(t) = l$ стохастическим дифференциальным уравнением в форме Стратоновича [145]:

$$d\mathbf{y}(t) = a^{(l)}(t, \mathbf{y}(t))dt + \sigma^{(l)}(t, \mathbf{y}(t)) \circ d\mathbf{w}(t), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \quad (3.1)$$

или в эквивалентной форме Ито:

$$d\mathbf{y}(t) = f^{(l)}(t, \mathbf{y}(t))dt + \sigma^{(l)}(t, \mathbf{y}(t))d\mathbf{w}(t), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0. \quad (3.2)$$

Здесь $t \in [t_0, T]$; $\mathbf{w}(t)$ – n_w -мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от \mathbf{y}_0 ; $a^{(l)}(t, \mathbf{y})$, $f^{(l)}(t, \mathbf{y}): [t_0, T] \times R^{n_y} \rightarrow R^{n_y}$ – вектор-функции размера n_y , связанные соотношением [225]

$$f_i^{(l)}(t, \mathbf{y}) = a_i^{(l)}(t, \mathbf{y}) + \frac{1}{2} \sum_{j_1=1}^{n_y} \sum_{j_2=1}^{n_w} \frac{\partial \sigma_{ij_2}^{(l)}(t, \mathbf{y})}{\partial y_{j_1}} \sigma_{j_1 j_2}^{(l)}(t, \mathbf{y}), \quad i = 1, \dots, n,$$

$\sigma^{(l)}(t, \mathbf{y})$ – матричная функция размера $n_y \times n_w$; l – номер структуры, $l = 1, 2, \dots, S$.

Заметим, что если $\sigma^{(l)}(t, \mathbf{y})$ не зависит от \mathbf{y} , то функции $f^{(l)}(t, \mathbf{y})$ и $a^{(l)}(t, \mathbf{y})$ совпадают. В этом случае не будем оговаривать, в каком смысле понимается уравнение, описывающее процесс $\mathbf{y}(t)$.

Состояние системы характеризуется смешанным процессом $[\mathbf{y}(t), s(t)]^\top$. Вектор фазовых координат $\mathbf{y}(t)$ для каждой структуры является многомерным марковским случайным процессом, а номер структуры $s(t)$ – дискретным целочисленным процессом с конечным числом состояний. Процесс $s(t)$ может быть марковским или условно марковским, зависящим от вектора $\mathbf{y}(t)$.

По принятой в [145] терминологии $s(t)$ называется *процессом смены структуры*, процесс $[\mathbf{y}(t), s(t)]^\top$ – *процессом со случайной структурой*.

Кроме того, при фиксированном $t \in [t_0, T]$ будем называть $\mathbf{y}(t)$ *вектором состояния*, а $[\mathbf{y}(t), s(t)]^\top$ – *расширенным вектором состояния*.

Совместная плотность вероятности $p(t, \mathbf{y})$ вектора $[\mathbf{y}(t), s(t)]^\top$ имеет вид

$$p(t, \mathbf{y}) = \sum_{l=1}^S p^{*(l)}(t, \mathbf{y}), \quad p^{*(l)}(t, \mathbf{y}) = P^{(l)}(t) p^{(l)}(t, \mathbf{y}), \quad l = 1, 2, \dots, S, \quad (3.3)$$

где

$$P^{(l)}(t) = \int_{R^{n_y}} p^{*(l)}(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad l = 1, 2, \dots, S, \quad (3.4)$$

– вероятность того, что система находится в l -м состоянии в момент времени t ; $p^{(l)}(t, \mathbf{y})$ – условная функция плотности фазовых координат системы при $s(t) = l$, нормированная к единице. Взвешенная условная плотность вероятности непоглощенных реализаций $p^{*(l)}(t, \mathbf{y})$ не нормирована к единице, но удовлетворяет следующему условию нормировки:

$$\sum_{l=1}^S \int_{R^{n_y}} p^{*(l)}(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1, \quad t \in [t_0, T]. \quad (3.5)$$

Здесь и в дальнейшем * означает, что отсутствует нормировка, т. е. речь идет о непоглощенных реализациях.

Переход системы из l -го в r -е состояние характеризуется функциями поглощения реализаций $v_{lr}^*(t, \mathbf{y})$, $v_{ll}^*(t, \mathbf{y}) = 0$, $l, r = 1, \dots, S$. Восстановление l -го состояния характеризуется функциями восстановления $u_{rl}^*(t, \mathbf{y})$, $u_{ll}^*(t, \mathbf{y}) = 0$, $l, r = 1, \dots, S$. Эти функции связаны зависимостью

$$u_{rl}^*(t, \mathbf{y}) = \alpha_{rl}(t, \mathbf{y}) v_{rl}^*(t, \mathbf{y}).$$

При $\alpha_{rl}(t, \mathbf{y}) = 1$ происходит восстановление реализаций без потерь.

Разные задания функций поглощения и восстановления определяют разные типы систем со случайной структурой.

Обобщенное уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова для одномерной функции плотности вероятности $p^{*(l)}(t, \mathbf{y})$ для каждого l -го состояния системы с учетом поглощения реализаций имеет вид [143]

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^{*(l)}(t, \mathbf{y})}{\partial t} &= -\operatorname{div} \pi^{*(l)}(t, \mathbf{y}) - \sum_{r=1 \neq l}^S v_{lr}^*(t, \mathbf{y}) + \sum_{r=1 \neq l}^S u_{rl}^*(t, \mathbf{y}), \\ p^{*(l)}(t, \mathbf{y}) \Big|_{t=t_0} &= p_0^{*(l)}(\mathbf{y}), \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $p_0^{*(l)}(\mathbf{y})$ – функция плотности вероятности распределения фазовых координат \mathbf{y}_0 в начальный момент времени t_0 , $\pi^{*(l)}(t, \mathbf{y})$ – вектор плотности потока вероятности непоглощенных реализаций с компонентами

$$\begin{aligned} \pi_k^{*(l)}(t, \mathbf{y}) &= \left[a_k^{(l)}(t, \mathbf{y}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_y} \sum_{j=1}^{n_w} \frac{\partial \sigma_{kj}^{(l)}}{\partial y_i} \sigma_{ij}^{(l)} \right] p^{*(l)}(t, \mathbf{y}) - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_y} \frac{\partial}{\partial y_j} [B_{kj}^{(l)} p_1^{*(l)}(t, \mathbf{y})], \end{aligned} \quad (3.7)$$

$\mathbf{B}^{(l)} = \sigma^{(l)} \sigma^{(l)\top}$. Для нормированной одномерной функции плотности вероятности

$$p^{(l)}(t, \mathbf{y}) = \frac{p^{*(l)}(t, \mathbf{y})}{\mathbf{P}^{(l)}(t)}$$

имеет место уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^{(l)}(t, \mathbf{y})}{\partial t} &= -\operatorname{div} \pi^{(l)}(t, \mathbf{y}) - \frac{\dot{\mathbf{P}}^{(l)}(t)}{\mathbf{P}^{(l)}(t)} p^{(l)}(t, \mathbf{y}) - \sum_{r=1}^S v_{lr}(t, \mathbf{y}) + \\ &+ \sum_{r=1}^S \frac{\mathbf{P}^{(r)}(t)}{\mathbf{P}^{(l)}(t)} u_{rl}(t, \mathbf{y}), \quad p^{(l)}(t, \mathbf{y}) \Big|_{t=t_0} = p_0^{(l)}(\mathbf{y}), \end{aligned} \quad (3.8)$$

где v_{lr} , u_{rl} , $\pi^{(l)}$ – нормированные функции поглощения, восстановления и плотности потока вероятности:

$$v_{lr} = \frac{v_{lr}^*}{\mathbf{P}^{(l)}}, \quad u_{rl} = \frac{u_{rl}^*}{\mathbf{P}^{(r)}}, \quad \pi^{(l)} = \frac{\pi^{*(l)}}{\mathbf{P}^{(l)}}.$$

Дифференциальные уравнения для функций $\mathbf{P}^{(l)}(t)$ имеют вид

$$\dot{\mathbf{P}}^{(l)}(t) = - \sum_{r=1 \neq l}^S \int_{\mathbf{R}^{n_y}} v_{lr}^*(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y} + \sum_{r=1 \neq l}^S \int_{\mathbf{R}^{n_y}} u_{rl}^*(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (3.9)$$

или

$$\dot{P}^{(l)}(t) = -P^{(l)} \sum_{r=1 \neq l}^S F_{lr}(t) + \sum_{r=1 \neq l}^S P^{(r)} R_{lr}(t), \quad P^{(l)}(t_0) = P_{l0},$$

где $F_{lr}(t) = \int_{R^{n_y}} v_{lr}(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$, $R_{rl}(t) = \int_{R^{n_y}} u_{rl}(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$ – нормированные потоки поглощения и восстановления соответственно.

Эти уравнения также определяют функции плотности вероятности распределения времени перехода из l -го состояния

$$p^{(l)}(t) = \dot{P}^{(l)}(t) \text{sign}(\dot{P}^{(l)}(t)).$$

Построенные в диссертации численные методы решения СДУ и алгоритмы моделирования пуассоновских ансамблей применимы для решения разных типов систем со случайной структурой.

Классификация систем со случайной структурой.

1. Системы с сосредоточенными переходами.

В инженерной практике, навигации, робототехнике возникают задачи комплексной автоматизации управления на различных этапах. Каждый из этих этапов может резко отличаться по характеру движения объекта управления и описываться различными уравнениями. В частности, некоторые фазовые координаты объекта управления на разных этапах имеют или должны иметь значения, принадлежащие определенной области фазового пространства. Автоматизация таких процессов достигается с помощью комбинированных систем управления. Переход от одной системы к другой должен совершаться автоматически при попадании определенных фазовых координат в заданную область. В параграфе 3.5 описаны алгоритмы решения систем с сосредоточенными переходами. В параграфе 4.4.3 приведены сравнительные численные расчеты статистическим алгоритмом и методом гауссовой аппроксимации.

2. Системы с разделением времени.

Если имеется S объектов и в каждый момент времени идет управление только одним объектом. Системы с разделением времени задаются плотностями распределений случайных промежутков времени между переходами из одной структуры в другую. Алгоритм решения этих си-

стем описан в параграфе 3.4, а в параграфе 4.5 просчитана задача о влиянии приоритета на качество управления.

3. Системы со случайным периодом квантования сигналов во времени.

Среди различных способов применения радиоизотопных измерителей большое место занимают локационные системы, предназначенные для измерения параметров, определяющих пространственное положение объекта, таких как угловые координаты, дальность, углы ориентации. Если в течение времени эти параметры изменяются и система измеряет их с заданной степенью точности, она называется следящей. Радиоизотопные локационные следящие системы используются в космической технике в задачах стыковки сближающихся аппаратов, в робототехнике, при управлении атомными энергетическими установками и в ряде других случаев.

Системы со случайным периодом квантования можно описать стохастическими дифференциальными уравнениями с пуассоновской составляющей [98, 145] с пуассоновской мерой, зависящей от вектора состояния. Причем очень часто эта зависимость не может быть перенесена в коэффициенты. В параграфе 4.6 проведены сравнительные расчеты построенных статистических алгоритмов.

4. Системы с распределенными переходами (switching diffusion)

Это важный класс систем со случайной структурой, имеющих несколько состояний. Переход системы из одного состояния в другое случаен, т. е. совершается в случайные моменты времени. Если переход не зависит от значений фазовых координат системы, то это системы с *распределенными независимыми переходами*. Моменты перехода обладают свойствами ординарности, отсутствием последействия и вероятностью перехода из l -й структуры к r -й за малый интервал Δt .

На основе построенных численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений и разработанных алгоритмов моделирования пуассоновских процессов, будут построены статистические ал-

горитмы решения систем со случайной структурой с распределенными переходами. Эти алгоритмы описаны в параграфе 3.3. В параграфе 4.4 проведен сравнительный анализ построенного статистического алгоритма со спектральным методом на задаче анализа системы стабилизации малого искусственного спутника, находящегося под действием гравитационного и управляющего моментов, с учетом возможного отказа управляющего устройства. В параграфе 4.7 проведены численные расчеты для задачи фильтрации диффузионно-скачкообразных процессов, а в параграфе 4.8 - задачи фильтрации для непрерывных систем с марковскими переключениями.

Все построенные алгоритмы статистического моделирования систем со случайной структурой выделяются универсальностью и гибкостью по отношению к изменениям исходной модели.

3.2. Основные вероятностные характеристики решения и их статистические оценки

Следует заметить, что погрешность оценки вероятностных характеристик решения, полученных с помощью статистического алгоритма, будет складываться из ошибки численного метода и статистической ошибки. Поэтому, прежде чем перейти к построению алгоритмов моделирования систем со случайной структурой, ниже будут приведены основные вероятностные характеристики решения и их статистические оценки. В параграфе 3.6 будет проведена условная оптимизация построенных статистических алгоритмов и получено соотношение между шагом h и объемом выборки N .

Вероятностные характеристики решения и их статистические оценки

При решении задач со случайной структурой возникает потребность в вычислении вероятностных характеристик решения [7]. Некоторые из них мы приведем ниже.

1. **Вероятность** l -й структуры (или вероятности состояния, $l = 1, \dots, S$):

$$P^{(l)}(t) = P(s(t) = l), \quad \sum_{l=1}^S P^{(l)}(t) = 1.$$

2. **Плотность условного распределения** $\mathbf{y}(t)$ при $s(t) = l$:

$$p^{(l)}(t, \mathbf{y}) = p(\mathbf{y}(t)|s(t) = l), \quad \int_{R^{n_y}} p^{(l)}(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1.$$

3. **Взвешенная условная плотность** $\mathbf{y}(t)$ при $s(t) = l$:

$$p^{*(l)}(t, \mathbf{y}) = P^{(l)}(t)p^{(l)}(t, \mathbf{y})$$

удовлетворяет следующему условию нормировки:

$$\sum_{l=1}^S \int_{R^{n_y}} p^{*(l)}(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1.$$

4. **Условный начальный момент** k -го порядка при $s(t) = l$ ($k = k_1 + \dots + k_n$):

$$\varpi_k^{(l)}(t) = \varpi_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(l)}(t) = E(y_1^{k_1} \dots y_n^{k_n})^{(l)}(t) = \int_{R^{n_y}} y_1^{k_1} \dots y_n^{k_n} p^{(l)}(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

5. **Начальный взвешенный момент** k -го порядка при $s(t) = l$:

$$\varpi_k^{*(l)}(t) = E(y_1^{k_1} \dots y_n^{k_n})^{*(l)}(t) = \int_{R^{n_y}} y_1^{k_1} \dots y_n^{k_n} p^{*(l)}(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

6. **Безусловный начальный момент** k -го порядка:

$$\varpi_k(t) = E(y_1^{k_1} \dots y_n^{k_n})(t) = \sum_{l=1}^S \varpi_k^{(l)}(t)P^{(l)}(t) = \sum_{l=1}^S \varpi_k^{*(l)}(t).$$

7. **Условный центральный второй момент** при $s(t) = l$:

$$\Theta^{(l)}(t) = \int_{R^{n_y}} (\mathbf{y} - \mathbf{m}^{(l)})(\mathbf{y} - \mathbf{m}^{(l)})^\top p^{(l)}(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{m}^{(l)}(t) = \varpi_1^{(l)}(t).$$

8. **Центральный взвешенный второй момент** при $s(t) = l$:

$$\Theta^{*(l)}(t) = \int_{R^{n_y}} (\mathbf{y} - \mathbf{m}^{(l)})(\mathbf{y} - \mathbf{m}^{(l)})^\top p^{*(l)}(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

9. **Безусловный центральный второй момент**:

$$\Theta(t) = \sum_{l=1}^S \int_{R^{n_y}} (\mathbf{y} - \mathbf{m})(\mathbf{y} - \mathbf{m})^\top p^{*(l)}(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{m}(t) = \varpi_1(t),$$

$$\Theta(t) = \sum_{l=1}^S \left[\Theta^{*(l)}(t) + \mathbf{m}^{*(l)}(t)(\mathbf{m}^{*(l)})^\top(t) \right] - \mathbf{m}(t)\mathbf{m}^\top(t).$$

Пусть N – объем выборки (общее число моделируемых траекторий); $N_k^{(l)}$ – число траекторий, находящихся в l -м состоянии в момент времени t_k ($\sum_{l=1}^S N_k^{(l)} = N$ для всех t_k); $y_{idk}^{(l)}$ обозначает i -ю компоненту численного решения \mathbf{y}_k в момент времени t_k на d -й траектории в l -й структуре.

Нам будут интересовать:

1. Безусловные

- a) вектор математического ожидания $\mathbf{m}(t) = \varpi_1(t)$ ($m_i(t) = E(y_i)(t)$);
- b) матрица вторых моментов $\Phi(t) = \varpi_2(t)$ ($\Phi_{ij}(t) = E(y_i y_j)(t)$);
- c) матрица центральных вторых моментов $\Theta(t) = \Phi(t) - \mathbf{m}(t)\mathbf{m}^\top(t)$.

Их статистические оценки в момент времени t_k имеют вид

$$\bar{m}_{ik} = \frac{\sum_{d=1}^N y_{idk}}{N}, \quad \bar{\Phi}_{ijk} = \frac{\sum_{d=1}^N y_{idk} y_{jdk}}{N},$$

$$\bar{\Theta}_{ijk} = \frac{\sum_{d=1}^N (y_{idk} - \bar{m}_{ik})(y_{jdk} - \bar{m}_{jk})}{N}.$$

2. **Условные** $\mathbf{m}^{(l)}(t)$, $\Phi^{(l)}(t)$, $\Theta^{(l)}(t)$. Их статистические оценки в момент времени t_k имеют вид

$$\bar{m}_{ik}^{(l)} = \frac{\sum_{d=1}^{N_k^{(l)}} y_{idk}^{(l)}}{N_k^{(l)}}, \quad \bar{\Phi}_{ijk}^{(l)} = \frac{\sum_{d=1}^{N_k^{(l)}} y_{idk}^{(l)} y_{jdk}^{(l)}}{N_k^{(l)}},$$

$$\bar{\Theta}_{ijk}^{(l)} = \frac{\sum_{d=1}^{N_k^{(l)}} (y_{idk}^{(l)} - \bar{m}_{ik}^{(l)})(y_{jdk}^{(l)} - \bar{m}_{jk}^{(l)})}{N_k^{(l)}}.$$

3. Взвешенные $\mathbf{m}^{*(l)}(t)$, $\Phi^{*(l)}(t)$ и $\Theta^{*(l)}(t)$.

Их статистические оценки в момент времени t_k имеют вид

$$\bar{m}_{ik}^{*(l)} = \frac{\sum_{d=1}^{N_k^{(l)}} y_{idk}^{(l)}}{N}, \quad \bar{\Phi}_{ijk}^{*(l)} = \frac{\sum_{d=1}^{N_k^{(l)}} y_{idk}^{(l)} y_{jdk}^{(l)}}{N},$$

$$\bar{\Theta}_{ijk}^{*(l)} = \frac{\sum_{d=1}^{N_k^{(l)}} (y_{idk}^{(l)} - \bar{m}_{ik}^{(l)})(y_{jdk}^{(l)} - \bar{m}_{jk}^{(l)})}{N}.$$

Замечание [160]. Пусть x_1, \dots, x_N – независимые случайные величины, каждая из которых имеет функцию распределения $F(x)$ (математическое ожидание m , центральный второй момент μ_2 (дисперсия), центральный четвертый момент μ_4). Тогда статистические оценки математического ожидания \bar{x} и центрального второго момента m_2

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad m_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

имеют следующие математические ожидания и дисперсии:

$$E(\bar{x}) = m, \quad E(\bar{x} - m)^2 = \frac{\mu_2}{N}, \quad E(m_2) = \frac{N-1}{N} \mu_2,$$

$$E(m_2^2) - (E(m_2))^2 = \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{N} - \frac{2(\mu_4 - 2\mu_2^2)}{N^2} + \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{N^3}.$$

4. **Вероятности** нахождения системы в l -й структуре в момент времени t_k оцениваются по формуле

$$\bar{P}_k^{(l)} = \frac{N_k^{(l)}}{N}.$$

5. **Гистограмма маргинальной плотности условного распределения** $p^{(l)}(t_k, y_k)$ строится следующим образом:

а) $[a_i^{(l)}, b_i^{(l)}]$ – область изменения $y_i^{(l)}(t_k)$ – равномерно разбивается на q частей с шагом $h = \frac{b_i^{(l)} - a_i^{(l)}}{q}$; обозначим δ_j – j -й интервал области, $j = 1, \dots, q$;

б) моделируем $d = 1, \dots, N$ траекторий и в момент t_k на каждой траектории для i -й компоненты решения, находящейся в l -й структуре, считаем, сколько $y_{idk}^{(l)}$ попало в j -й интервал; полученное значение обозначим $N_{jk}^{(l)}$ ($\sum_{j=1}^q N_{jk}^{(l)} = N_k^{(l)}$);

с) в качестве приближенного значения для $p^{(l)}(t_k, y_i)$ на интервале δ_j берется величина

$$\bar{p}_j = \frac{N_{jk}^{(l)}}{Nh\bar{P}_k^{(l)}}.$$

6. Гистограмма маргинальной плотности распределения $p(t_k, y_i)$ строится следующим образом:

а) $[a_i, b_i]$ – область изменения $y_i(t_k)$ – равномерно разбивается на q частей с шагом $h = \frac{b_i - a_i}{q}$; обозначим δ_j – j -й интервал области, $j = 1, \dots, q$;

б) моделируем $n = 1, \dots, N$ траекторий и в момент t_k на каждой траектории для i -й компоненты решения считаем, сколько y_{idk} попало в j -й интервал; полученное значение обозначим N_{jk} ($\sum_{j=1}^q N_{jk} = N$);

с) в качестве приближенного значения для $p(t_k, y_i)$ – плотности распределения $y_i(t_k)$ на интервале δ_j – берется величина

$$\bar{p}_j = \frac{N_{jk}}{Nh}.$$

Уравнения на моменты и вероятности состояний. Обобщенное уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова (ФПК) для одномерной плотности распределения $p^{*(l)}(t, \mathbf{y})$ для каждого l -го состояния системы со случайной структурой (3.1) с учетом поглощения и восстановления реализаций имеет вид (3.6).

Из обобщенного уравнения ФПК можно получить дифференциальные уравнения на безусловный начальный момент порядка k :

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_k(t) = & \sum_{l=1}^S \int_{R^{n_y}} (\pi^{*(l)}(t, \mathbf{y}))^\top \text{grad}_{\mathbf{y}} (y_1^{k_1} \dots y_n^{k_n}) d\mathbf{y} - \\ & - \int_{R^{n_y}} y_1^{k_1} \dots y_n^{k_n} \left[\sum_{r=1 \neq l}^S v_{lr}^*(t, \mathbf{y}) - \sum_{r=1 \neq l}^S u_{rl}^*(t, \mathbf{y}) \right] d\mathbf{y}. \quad (3.10) \end{aligned}$$

Дифференциальные уравнения для безусловного центрального второго момента ($i, j = 1$) имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}_{ij}(t) = & \sum_{l=1}^S \int_{R^{n_y}} (\pi^{*(l)}(t, \mathbf{y}))^\top \text{grad}_{\mathbf{y}}(y_i - m_i)(y_j - m_j) d\mathbf{y} - \\ & - \int_{R^{n_y}} (y_i - m_i)(y_j - m_j) \left[\sum_{r=1 \neq l}^S v_{lr}^*(t, \mathbf{y}) - \sum_{r=1 \neq l}^S u_{rl}^*(t, \mathbf{y}) \right] d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

3.3. Системы со случайной структурой с распределенными переходами

Этот тип задач характерен для систем, имеющих несколько состояний. Переход системы из одного состояния в другое случаен, т. е. совершается в случайные моменты времени. Если переход не зависит от значений фазовых координат системы, то это системы с **распределенными независимыми переходами**. Моменты перехода обладают свойствами ординарности, отсутствием последействия и вероятностью перехода из l -й структуры к r -й за малый интервал Δt :

$$p_{lr}(\Delta t) = \lambda_{lr}(t)\Delta t + o(\Delta t), \quad (3.11)$$

где $o(\Delta t)$ является малой величиной порядка не ниже $(\Delta t)^2$, а λ_{rl} называется *интенсивностью перехода* из l -й структуры к r -й. Такое поглощение реализаций называют пуассоновским. Компоненты функции поглощения имеют аналитический вид:

$$v_{lr}^*(t, \mathbf{y}) = \lambda_{lr}(t)p_1^{*(l)}(t, \mathbf{y}). \quad (3.12)$$

Если интенсивности перехода зависят от фазовых координат, то такие системы называют с **распределенными зависимыми переходами**, они являются системами с условной марковской структурой и вероятности перехода дискретного случайного процесса $s(t)$ удовлетворяют условиям [145]

$$\begin{aligned} P(s(t + \Delta t) = r \mid s(t) = l, \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}) &= \lambda_{lr}(t, \mathbf{y})\Delta t + o(\Delta t), \\ P(s(t + \Delta t) = l \mid s(t) = l, \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}) &= 1 - \lambda_l(t, \mathbf{y})\Delta t + o(\Delta t), \\ s(t_0) = s_0, \quad l, r = 1, 2, \dots, S, \quad l &\neq r, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где функция $\lambda_{lr}(t, \mathbf{y}): [t_0, T] \times R^{n_y} \rightarrow [0, +\infty)$ – *интенсивность* перехода из l -й структуры в r -ю, $\lambda_l(t, \mathbf{y}) = \sum_{r=1 \neq l}^S \lambda_{lr}(t, \mathbf{y})$. Данное условие обеспечивает при любом фиксированном $\mathbf{y} \in R^{n_y}$ отсутствие нескольких переключений процесса $s(t)$ за малый интервал времени Δt . Компоненты функций поглощения и восстановления имеют вид

$$v_{lr}^*(t, \mathbf{y}) = \lambda_{lr}(t, \mathbf{y}) p_1^{*(l)}(t, \mathbf{y}), \quad (3.14)$$

$$u_{lr}^*(t, \mathbf{y}) = \int_{R^{n_y}} v_{lr}^*(t, \mathbf{y}') p^{*(r)}(t, \mathbf{y}) q_{lr}(t, \mathbf{y}|t, \mathbf{y}') d\mathbf{y}', \quad u_{ll}^*(t, \mathbf{y}) = v_{ll}^*(t, \mathbf{y}) = 0,$$

где $q_{lr}(t, \mathbf{y}|t, \mathbf{y}')$ – условная функция плотности вероятности восстановления r -й структуры из l -й.

Вид функции $q_{lr}(t, \mathbf{y}|t, \mathbf{y}')$ определяется физическим содержанием задачи и характеризует начальные условия при восстановлении процесса в r -м состоянии при переходе из l -го состояния. Могут иметь место различные условия восстановления, определяемые функциями q_{lr} . В частности, если

$$q^{lr}(t, \mathbf{y}|t, \mathbf{y}') = \delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}'), \quad (3.15)$$

то восстановление точное («жесткое», «без потерь»), т. е. конечные условия процесса в l -м состоянии совпадают с начальными в r -м состоянии. Если условная плотность восстановления

$$q^{lr}(t, \mathbf{y}|t, \mathbf{y}') = \delta(\mathbf{y} - \gamma^{(r)}(t)), \quad (3.16)$$

то имеют место несвязанные условия восстановления. При восстановлении процесс всегда начинается с заданной функции времени $\gamma^{(r)}(t)$. Если условная плотность вероятности не зависит от предыдущего состояния

$$q^{lr}(t, \mathbf{y}|t, \mathbf{y}') = \psi^{(r)}(\mathbf{y}), \quad (3.17)$$

то имеет место общий случай процесса с несвязанными условиями восстановления.

В общем случае условная функция $q_{lr}(t, \mathbf{y}|t, \mathbf{y}')$ может иметь произвольный закон распределения фазового вектора $\mathbf{y}(t)$ в состоянии r при заданном $\mathbf{y}'(t)$ в состоянии l .

По принятой в [145] терминологии система, описываемая уравнениями (3.1), (3.13) (или (3.2), (3.13)), называется *стохастической мультиструктурной системой с распределенными переходами между структурами*, или *системой со случайной структурой с распределенными переходами*.

Наиболее полной вероятностной характеристикой расширенного вектора состояния является упорядоченная совокупность *ненормированных плотностей распределения* $p^{*(l)}(t, \mathbf{y}) : [t_0, T] \times R^{n_y} \rightarrow [0, +\infty)$ вектора состояния, $l = 1, 2, \dots, S$, удовлетворяющих условию нормировки (3.5).

Ненормированные плотности распределения $p^{*(l)}(t, \mathbf{y})$ удовлетворяют системе обобщенных уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова (3.6) и в случае восстановления без потерь имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^{*(l)}(t, \mathbf{y})}{\partial t} = & - \sum_{i=1}^{n_y} \frac{\partial}{\partial y_i} \left[f_i^{(l)}(t, \mathbf{y}) p^{*(l)}(t, \mathbf{y}) \right] + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n_y} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \left[b_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{y}) p^{*(l)}(t, \mathbf{y}) \right] - \\ & - \lambda_l(t, \mathbf{y}) p^{*(l)}(t, \mathbf{y}) + \sum_{r=1 \neq l}^S \lambda_{rl}(t, \mathbf{y}) p^{*(r)}(t, \mathbf{y}), \quad l = 1, 2, \dots, S, \end{aligned} \quad (3.18)$$

с начальными и краевыми условиями

$$p^{*(l)}(t, \mathbf{y}) \Big|_{t=t_0} = p_0^{*(l)}(\mathbf{y}), \quad p^{*(l)}(t, \mathbf{y}) \Big|_{\mathbf{y}=\pm\infty} = 0, \quad l = 1, 2, \dots, S,$$

где $b_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{y})$ – элементы матрицы диффузии.

Вероятность того, что в момент времени t система находится в l -й структуре, т. е. $s(t) = l$, задается выражением (3.4), а плотность вероятности $p^{(l)}(t, \mathbf{y})$ вектора состояния при условии $s(t) = l$ связана с $p^{*(l)}(t, \mathbf{y})$ соотношением (3.3). Безусловная плотность вероятности $p(t, \mathbf{y})$ вектора состояния определяется в виде

$$p(t, \mathbf{y}) = \sum_{l=1}^S p^{*(l)}(t, \mathbf{y}) \quad \text{или} \quad p(t, \mathbf{y}) = \sum_{l=1}^S P^{(l)}(t) p^{(l)}(t, \mathbf{y}). \quad (3.19)$$

Начальное состояние $[\mathbf{y}_0, s_0]^\top$ описывается заданными ненормированными плотностями распределения $p_0^{*(l)}(\mathbf{y})$, $l = 1, 2, \dots, S$.

Таким образом, *задача анализа систем, описываемых уравнениями* (3.1), (3.13) (или (3.2), (3.13)), состоит в нахождении ненормированных плотностей распределения $p^{*(l)}(t, \mathbf{y})$ вектора состояния по заданным

функциям $a^{(l)}(t, \mathbf{y})$ (или $f^{(l)}(t, \mathbf{y})$), $\sigma^{(l)}(t, \mathbf{y})$, интенсивностям $\lambda_{lr}(t, \mathbf{y})$ и ненормированным плотностям распределения $p_0^{*(l)}(\mathbf{y})$; $l, r = 1, 2, \dots, S$.

Наряду с нахождением функций $p^{*(l)}(t, \mathbf{y})$ можно рассматривать задачу нахождения маргинальных плотностей вероятности и моментных характеристик вектора состояния (в том числе взвешенных и условных), а также задачу определения вероятностных характеристик времени перехода из одной структуры в другую [145, 202, 241].

Эти задачи можно решать путем интегрирования обобщенного уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова – многомерного уравнения в частных производных второго порядка для функции плотности вероятности решения. Трудности, возникающие на этом пути решения задач, связаны со сложностью вычислительных процедур решения уравнений в частных производных. Другое направление решения основывается на различных аппроксимациях искомой функции плотности вероятности фазовых координат с помощью функциональных рядов. В результате получается система обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов разложений – вероятностных моментов, кумулянтов или других величин, зависящих от времени. Основные трудности, возникающие на этом пути решения задач, связаны со сложностью получения оценок приближения.

3.3.1. Алгоритмы статистического моделирования процесса смены структуры в системах с распределенными переходами

Данный параграф посвящен отдельному рассмотрению процесса смены структуры в системах с зависимыми и независимыми распределенными переходами. Для его моделирования будет обосновано применение метода максимального сечения и рандомизированного метода максимального сечения, а также их модификаций.

Условие (3.13) обеспечивает отсутствие нескольких переключений процесса $s(t)$ за малый интервал времени Δt . Моменты смены структуры представляют пуассоновский точечный поток.

Напомним, что обобщенное экспоненциальное распределение случайной величины ξ с функцией интенсивности λ имеет вид

$$p_{\xi}(x) = \lambda(x)e^{-\int_0^x \lambda(u)du}, \quad x > 0, \quad \lambda(x) \geq 0 \quad (3.20)$$

При условии $s(t) = l$ промежутки τ_{lr} времен перехода из l -й к r -й структуре имеют обобщенное экспоненциальное распределение с плотностями

$$p_{\tau_{lr}}(x) = \lambda_{lr}(t+x)e^{-\int_0^x \lambda_{lr}(t+u)du}, \quad x > 0, \quad l, r = 1, 2, \dots, S, \quad r \neq l, \quad (3.21)$$

и смена структуры происходит в момент времени $\tilde{t} = t + \tau_0$, где

$$\tau_0 = \min_{r \neq l} \tau_{lr}. \quad (3.22)$$

Для простоты, обозначение $\lambda(t)$ подразумевает $\lambda(t, \mathbf{y}(t))$.

Теорема 3.1. Пусть задана система со случайной структурой (3.1) с независимыми распределенными переходами (3.13) и τ_{lr} , $r = 1, 2, \dots, S$, $r \neq l$ – промежутки времен перехода из l -й к r -й структуре, распределенные при условии $s(t) = l$ с плотностями (3.21). Тогда, при условии $s(t) = l$:

1) случайная величина τ_0 (3.22) имеет обобщенное экспоненциальное распределение с плотностью

$$p_{\tau_0}(\tau) = \lambda_l(t+\tau)e^{-\int_0^{\tau} \lambda_l(t+u)du}, \quad \tau > 0; \quad (3.23)$$

2) номер новой структуры $s(t + \tau_0)$ является случайной величиной η , для которой

$$P(\eta = r | \tau_0 = \tau) = \frac{\lambda_{lr}(t+\tau)}{\lambda_l(t+\tau)}, \quad r = 1, 2, \dots, S, \quad r \neq l. \quad (3.24)$$

Доказательство. Функция распределения случайной величины τ_0 при условии $s(t) = l$ имеет вид

$$F_{\tau_0}(x) = P(\tau_0 < x) = 1 - P(\tau_0 > x) = 1 - e^{-\int_0^x \lambda_l(t+u)du},$$

так как

$$\begin{aligned} P(\tau_0 > x) &= P(\tau_{l1} > x, \tau_{l2} > x, \dots, \tau_{l,l-1} > x, \tau_{l,l+1} > x, \dots, \tau_{lS} > x) = \\ &= \prod_{r=1 \neq l}^S P(\tau_{lr} > x) = \prod_{r=1 \neq l}^S e^{-\int_0^x \lambda_{lr}(t+u)du} = e^{-\int_0^x \lambda_l(t+u)du}. \end{aligned}$$

Дифференцируя функцию распределения по x , получаем плотность (3.23).

Рассмотрим совместное распределение случайной величины τ_0 и случайной величины η , задающей номер соответствующей структуры. Вероятность того, что $\eta = r$, равна

$$\begin{aligned} P(\eta = r | \tau_0 = \tau) &= P(\tau_{lr} = \tau, \tau_{li} > \tau (i = 1, \dots, S; i \neq l, i \neq r) | \tau_0 = \tau) = \\ &= \frac{P(\tau_{lr} = \tau, \tau_{li} > \tau (i = 1, \dots, S; i \neq l, i \neq r))}{P(\tau_0 = \tau)} = \\ &= \frac{\lambda_{lr}(t + \tau) e^{-\int_0^\tau \lambda_{lr}(t+u)du} \prod_{i \neq l, i \neq r}^S e^{-\int_0^\tau \lambda_{li}(t+u)du}}{\lambda_l(t + \tau) e^{-\int_0^\tau \lambda_l(t+u)du}} = \frac{\lambda_{lr}(t + \tau)}{\lambda_l(t + \tau)}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Из теоремы 3.1 видно, что для моделирования целочисленного процесса помера структуры $s(t)$ нужно уметь моделировать:

- случайную величину с плотностью (3.23) (задающую время нахождения системы в текущей структуре);
- случайную величину с распределением (3.24) (задающую номер следующей структуры).

Если обозначим t_k – момент смены структуры, а s_k – номер новой структуры, то

$$s(t) = s_k \quad \text{при} \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad t \leq T. \quad (3.25)$$

Применим специальный способ моделирования дискретных случайных величин, описанный во второй главе, для моделирования требуемых распределений (3.23), (3.24). Символами $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ будем обозначать независимые случайные числа, равномерно распределенные в интервале $(0, 1)$. Моделирование с помощью «генератора» псевдослучайных чисел будем обозначать как $\alpha := \text{RAND}$. В работе [193] рассмотрены различные типы «генераторов» стандартных случайных чисел.

Моделирование обобщенного экспоненциального распределения (3.23). Стандартный метод (метод обратной функции) моделирования непрерывной случайной величины ξ с функцией распределения $F(x)$

$$\xi = F^{-1}(\alpha)$$

для обобщенного экспоненциального распределения с плотностью (3.23) сводится к решению уравнения

$$\int_0^\xi \lambda_l(t+u) du = -\ln(\alpha). \quad (3.26)$$

Поэтому в случае постоянных интенсивностей перехода

$$\lambda_{lr}(t) \equiv \bar{\lambda}_{lr}, \quad \lambda_l \equiv \bar{\lambda}_l = \sum_{i \neq l}^S \bar{\lambda}_{lr} \quad (3.27)$$

моделирование времени нахождения системы в текущей структуре осуществляется по формуле

$$\tau = -\ln(\alpha) / \bar{\lambda}_l. \quad (3.28)$$

В общем случае реализация формулы (3.26) может быть достаточно трудоемкой. Поэтому для моделирования распределения (3.23) можно использовать метод максимального сечения, который был подробно рассмотрен в параграфе 2.3 для переменной мажоранты

$$\lambda_{lr}(t) \leq \bar{\lambda}_{lr}(t), \quad \lambda_l(t) \leq \bar{\lambda}_l(t) = \sum_{i \neq l}^S \bar{\lambda}_{lr}(t), \quad t > 0, \quad (3.29)$$

если функции $\bar{\lambda}_l(t)$ вычисляются достаточно просто.

Запишем **метод максимального сечения для моделирования случайной величины τ_0 с условным распределением (3.23) при условии $s(t) = l$.**

Пусть $\zeta_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, где ξ_k – последовательность случайных величин, распределенных с условными плотностями

$$f(x|s(t) = l, \zeta_{k-1}) = \bar{\lambda}_l(t + \zeta_{k-1} + x) \exp\left(-\int_0^x \bar{\lambda}_l(t + \zeta_{k-1} + s) ds\right),$$

и пусть

$$N = \min\{n : \alpha_n \leq \lambda_l(t + \zeta_n) / \bar{\lambda}_l(t + \zeta_n)\}, \quad \tau_0 = \zeta_N. \quad (3.30)$$

Тогда τ_0 имеет обобщенное экспоненциальное распределение с плотностью (3.23).

Метод максимального сечения основан на правиле прореживания пуассоновского точечного потока [111]: оставляя точки пуассоновского потока интенсивности $\bar{\lambda}_l(x)$ с вероятностью

$$p = \frac{\lambda_l(x)}{\bar{\lambda}_l(x)}, \quad (3.31)$$

мы получаем пуассоновский точечный поток интенсивности

$$\bar{\lambda}_l(x) * p = \bar{\lambda}_l(x) * \frac{\lambda_l(x)}{\bar{\lambda}_l(x)} = \lambda_l(x).$$

Моделирование дискретного распределения (3.24). Запишем распределение (3.24) в виде

$$P(\eta = v_j) = p_j, \quad j = 1, \dots, M, \quad \sum_{j=1}^M p_j = 1.$$

Стандартный метод моделирования этого распределения состоит в следующем [193]: моделируется α и полагается

$$\eta = v_j, \quad \text{если} \quad \sum_{i=1}^{j-1} p_i < \alpha \leq \sum_{i=1}^j p_i, \quad p_0 = 0. \quad (3.32)$$

Используя рассмотренные способы моделирования обобщенного экспоненциального распределения с плотностью (3.23), можно сформулировать следующие алгоритмы моделирования процесса смены структуры для решения систем со случайной структурой (3.1) с распределенными переходами (3.13).

Алгоритм 1а (для систем с постоянными интенсивностями перехода (3.27)).

- 0) $k := 0$; моделируем s_k согласно заданному начальному условию $s(t_0)$;
- 1) $l := s_k$; $\alpha := \text{RAND}$; $\tau = -\frac{\ln \alpha}{\bar{\lambda}_l}$ (время нахождения в l -й структуре (3.28));
- 2) $t_{k+1} = t_k + \tau$; если $t_{k+1} \geq T$, то STOP;
- 3) $\alpha := \text{RAND}$;

$$\text{если} \quad \sum_{i=1 \neq l}^{r-1} \frac{\bar{\lambda}_{li}}{\bar{\lambda}_l} < \alpha \leq \sum_{i=1 \neq l}^r \frac{\bar{\lambda}_{li}}{\bar{\lambda}_l}, \quad \text{то} \quad s_{k+1} = r;$$

- 4) $k := k + 1$, идем на 1).

Алгоритм 1б (использование метода максимального сечения).

- 0) $k := 0$; моделируем s_k согласно заданному начальному условию $s(t_0)$;
- 1) $l := s_k$; моделируем τ – возможное время нахождения системы в текущей структуре по методу максимального сечения:
 - 1.1) $\tau := 0$;
 - 1.2) моделируем ξ как значение случайной величины с условной плотностью $p(x) = \bar{\lambda}_l(t_k + x)e^{-\int_0^x \bar{\lambda}_l(t_k + u) du}$, $x > 0$ и полагаем $\tau := \tau + \xi$;

1.3) $t_{k+1} = t_k + \tau$; если $t_{k+1} \geq T$, то STOP;

1.4) $\alpha := \text{RAND}$; если $\alpha > \frac{\lambda_l(t_{k+1})}{\bar{\lambda}_l(t_{k+1})}$, то идем на 1.2);

2) $\alpha := \text{RAND}$;

если $\sum_{i=1 \neq l}^{r-1} \frac{\lambda_{li}(t_{k+1})}{\bar{\lambda}_{li}(t_{k+1})} < \alpha \leq \sum_{i=1 \neq l}^r \frac{\lambda_{li}(t_{k+1})}{\bar{\lambda}_{li}(t_{k+1})}$, то $s_{k+1} = r$;

3) $k := k + 1$, идем на 1).

Алгоритмы 1a и 1b были использованы в работе [72] в алгоритмах моделирования систем со случайной структурой с постоянными и с переменными интенсивностями перехода.

В некоторых случаях, при большом числе структур S , достаточно трудоемко вычислять сумму функций при вычислении вероятностей прорезживания (3.31). В этих случаях для уменьшения трудоемкости можно использовать представление вероятности в виде

$$p = \frac{\lambda_l(x)}{\bar{\lambda}_l(x)} = \sum_{i=1 \neq l}^S \frac{\lambda_{li}(x)}{\bar{\lambda}_{li}(x)} = \sum_{i=1 \neq l}^S \frac{\bar{\lambda}_{li}(x)}{\bar{\lambda}_{li}(x)} * \frac{\lambda_{li}(x)}{\bar{\lambda}_{li}(x)}. \quad (3.33)$$

Метод максимального сечения, использующий представление (3.33), также называют рандомизированным методом максимального сечения [194].

Построим алгоритм моделирования процесса смены структуры, использующий рандомизированный метод максимального сечения.

Алгоритм 1с (использование рандомизированного метода максимального сечения).

0) $k := 0$; моделируем s_k согласно заданному начальному условию $s(t_0)$;

1) $l := s_k$; моделируем возможное время перехода из l -й структуры и возможный номер новой структуры по методу мажорантной частоты:

1.1) $\tau := 0$;

1.2) моделируем ξ как значение случайной величины с условной плотностью $p(x) = \bar{\lambda}_l(t_k + x)e^{-\int_0^x \bar{\lambda}_l(t_k + u)du}$, $x > 0$ и полагаем $\tau := \tau + \xi$;

1.3) полагаем $t_{k+1} = t_k + \tau$; если $t_{k+1} \geq T$, то STOP;

1.4) $\alpha := \text{RAND}$;

$$\text{если } \sum_{i=1 \neq l}^{j-1} \frac{\bar{\lambda}_{li}(t_{k+1})}{\bar{\lambda}_l(t_{k+1})} < \alpha \leq \sum_{i=1 \neq l}^j \frac{\bar{\lambda}_{li}(t_{k+1})}{\bar{\lambda}_l(t_{k+1})}, \quad \text{то } r = j;$$

1.5) $\alpha := \text{RAND}$; если $\alpha > \frac{\lambda_{lr}(t_{k+1})}{\bar{\lambda}_l(t_{k+1})}$, то идем на 1.2);

2) $s_{k+1} = r$; $k := k + 1$, идем на 1).

Теорема 3.2. Целочисленный случайный процесс $s(t)$, построенный с помощью алгоритма 1а, является процессом смены структуры для системы (3.1), (3.13) с постоянными интенсивностями перехода $\{\lambda_{lr} \equiv \bar{\lambda}_{lr}\}$. Целочисленные случайные процессы, построенные с помощью алгоритмов 1б, 1с, являются процессами смены структуры для системы (3.1), (3.13) с распределенными переходами при условии (3.29).

Доказательство основано на приведенных выше рассуждениях и на теоремах, доказанных в работах [191, 194].

Сформулированная теорема 2.2 позволяет построить экономичную реализацию предложенных алгоритмов, т.е. экономично моделировать последовательность независимых случайных величин с требуемыми дискретными распределениями с помощью одного случайного числа.

На основании теоремы 2.2 и (2.5) запишем алгоритмы 1б и 1с, использующие моделирование только одного случайного числа α .

Модифицированный алгоритм 1б (использование модифицированного метода максимального сечения):

0) $k := 0$; моделируем s_k согласно заданному начальному условию $s(t_0)$;

$\alpha := \text{RAND}$; $\beta := \alpha$; $lk := 1$;

1) $l := s_k$; моделируем возможное время нахождения системы в текущей структуре:

1.1) $\tau := 0$;

1.2) моделируем ξ как значение случайной величины с условной плотностью $p(x) = \bar{\lambda}_l(t_k + x)e^{-\int_0^x \bar{\lambda}_l(t_k + u)du}$, $x > 0$ и полагаем $\tau := \tau + \xi$;

1.3) $t_{k+1} = t_k + \tau$; если $t_{k+1} \geq T$, то STOP;

1.4) $p := \frac{\lambda_l(t_{k+1})}{\bar{\lambda}_l(t_{k+1})}$;

если $\beta > p$, то $\beta := \frac{(\beta - p)}{1 - p}$, $lk := lk * (1 - p)$, СМ* и идем на 1.2),

иначе $\beta := \frac{\beta}{p}$, $lk := lk * p$, СМ*;

2) моделируем номер следующей структуры:

если $\sum_{i=1 \neq l}^{r-1} \frac{\lambda_{li}(t_{k+1})}{\lambda_l(t_{k+1})} < \beta \leq \sum_{i=1 \neq l}^r \frac{\lambda_{li}(t_{k+1})}{\lambda_l(t_{k+1})}$, то

$s_{k+1} = r$, $p1 = \sum_{i=1 \neq l}^{r-1} \frac{\lambda_{li}(t_{k+1})}{\lambda_l(t_{k+1})}$, $p = \frac{\lambda_{lr}(t_{k+1})}{\lambda_l(t_{k+1})}$, $\beta := \frac{\beta - p1}{p}$, $lk := lk * p$, СМ*;

3) $k := k + 1$, идем на 1).

Модифицированный алгоритм 1с (использование модифицированного рандомизированного метода максимального сечения):

0) $k := 0$; моделируем s_k согласно заданному начальному условию $s(t_0)$;

$\alpha := \text{RAND}$; $\beta := \alpha$; $lk := 1$;

1) $l := s_k$; моделируем возможное время перехода из l -й структуры и возможный номер новой структуры по методу «мажорантной частоты»:

1.1) $\tau := 0$;

1.2) моделируем ξ как значение случайной величины с условной плотностью $p(x) = \bar{\lambda}_l(t_k + x)e^{-\int_0^x \bar{\lambda}_l(t_k + u)du}$, $x > 0$ и полагаем $\tau := \tau + \xi$;

1.3) полагаем $t_{k+1} = t_k + \tau$; если $t_{k+1} \geq T$, то STOP;

1.4) если $\sum_{i=1 \neq l}^{j-1} \frac{\bar{\lambda}_{li}(t_{k+1})}{\bar{\lambda}_l(t_{k+1})} < \beta \leq \sum_{i=1 \neq l}^j \frac{\bar{\lambda}_{li}(t_{k+1})}{\bar{\lambda}_l(t_{k+1})}$, то

$$r = j, p1 = \sum_{i=1 \neq l}^{r-1} \frac{\bar{\lambda}_{li}(t_{k+1})}{\bar{\lambda}_l(t_{k+1})}, p = \frac{\bar{\lambda}_{lr}(t_{k+1})}{\bar{\lambda}_l(t_{k+1})}, \beta = \frac{\beta - p1}{p}, lk := lk * p, CM*;$$

1.5) $p := \frac{\lambda_{lr}(t_{k+1})}{\lambda_{lr}(t_{k+1})}$;

если $\beta > p$, то $\beta := \frac{(\beta - p)}{1 - p}$, $lk := lk * (1 - p)$, CM* и идем на 1.2),

иначе $\beta := \frac{\beta}{p}$, $lk := lk * p$, CM*;

2) $s_{k+1} = r$, $k := k + 1$, идем на 1).

Замечание. Переменная lk соответствует lk из (2.5), а оператор CM* проверяет условие в (2.5) и в случае его невыполнения моделируется новое случайное число:

CM*: если $lk < \varepsilon$, то $\alpha := \text{RAND}$, $\beta := \alpha$, $lk := 1$.

В главе 4 будет численно показано, что при моделировании неоднородных пуассоновских процессов экономичная модификация метода максимального сечения уменьшает время счета более чем на 10 %, за счет уменьшения обращений к «генератору» псевдослучайных чисел. Использование этих экономичных модификаций метода максимального сечения для моделирования процесса смены структуры в системах с распределенными переходами также позволит уменьшить время расчетов.

Построенные алгоритмы, использующие рандомизированный метод максимального сечения для моделирования процесса смены структуры, рекомендуется использовать при большом числе структур, когда достаточно трудоемко вычислять сумму функций при вычислении вероятностей прорезживания.

3.3.2. Алгоритм статистического моделирования систем со случайной структурой с распределенными переходами

В предыдущем параграфе были построены статистические алгоритмы моделирования процесса смены структуры (3.25), т. е. совокупности пар точек $\{t_k, s_k\}$, задающих момент смены структуры t_k и номер новой структуры s_k . С учетом этих алгоритмов, и так как каждая структура задана соответствующей ей системой стохастических дифференциальных уравнений, можно записать следующий

Алгоритм статистического моделирования решения системы со случайной структурой с распределенными переходами с постоянной интенсивностью переходов:

- 1) моделируем процесс смены структуры $\{t_k, s_k\}$, $k = 0, \dots, K$, $s_K = T$ одним из алгоритмов, построенных в предыдущем разделе;
- 2) $k := 0$;
- 3) на интервале $[t_k, t_{k+1}]$ численным методом СДУ решаем уравнения (3.1) для s_k -й структуры, находим y_{k+1} - вектор состояния системы в момент времени t_{k+1} ;
- 4) если $k + 1 < K$, то
 - 4а) обновляем y_{k+1} согласно $q_{s_k s_{k+1}}(y, t|y', t)$ – условной функции плотности вероятности восстановления s_{k+1} -й реализаций из s_k -й;
 - 4б) $k := k + 1$ и идем на 3);
- 5) если $k + 1 = K$, то STOP.

Вид функции q_{lr} определяется физическим содержанием задачи и характеризует начальные условия при восстановлении процесса в r -й структуре при переходе из l -й структуры.

Для систем с распределенными зависимыми переходами, когда интенсивность перехода зависит от вектора состояния, нельзя заранее для каждой траектории смоделировать процесс смены структуры на всем интервале интегрирования.

Алгоритм статистического моделирования решения системы со случайной структурой с распределенными переходами с переменной интенсивностью перехода:

- 1) $k := 0$;
- 2) моделируем возможный момент смены структуры t_{k+1} одним из алгоритмов, построенных в предыдущем разделе;
- 3) на интервале $[t_k, t_{k+1}]$ численным методом СДУ решаем уравнения (3.1) для s_k -й структуры, находим y_{k+1} - вектор состояния системы в момент времени t_{k+1} ;
- 4) если $k + 1 < K$, то
 - 4а) проверяем условие смены структуры. Если оно не выполнено, то $k := k + 1$ и идем на 2), иначе обновляем y_{k+1} согласно $q_{s_k s_{k+1}}(y, t | y', t)$, вычисляем номер новой структуры s_{k+1} ;
 - 4б) $k := k + 1$ и идем на 3);
- 5) если $k + 1 = K$, то STOP.

Выбор численного метода решения конкретной системы СДУ и шага интегрирования h определяется видом этой системы и требуемой точностью вычисления вероятностных характеристик выходных процессов. Для различных структур могут использоваться разные численные методы с различными шагами интегрирования.

Существует много численных методов решения задачи Коши для СДУ. В главе 1 построено семейство численных методов решения задачи Коши для СДУ в смысле Стратоновича.

Пусть для решения l -й структуры используется численный метод, который слабо сходится с порядком p_l на решении задачи Коши для СДУ и h_l обозначает максимальный шаг, используемый для решения этим методом. Пусть временная сетка включает равномерную сетку с шагом h и моменты скачков t_k .

Определение 3.1 . Численное решение системы со случайной структурой *слабо сходится* с порядком p , если для любой достаточно гладкой функции $g(\mathbf{y})$

$$\max_{1 \leq k \leq K} |\mathbb{E}_{t_0, \mathbf{y}_0} g(\mathbf{y}(t_k)) - \mathbb{E}_{t_0, \mathbf{y}_0} g(\mathbf{y}_k)| = O(h^p), \quad h \rightarrow 0, \quad (3.34)$$

где \mathbf{y}_k – численное решение в момент времени t_k , h – максимальный шаг интегрирования, $t_K = T$, \mathbb{E} – операция вычисления математического ожидания; $\mathbb{E}_{t_0, \mathbf{y}_0} g(\mathbf{y}(t_k)) = \mathbb{E}(g(\mathbf{y}(t_k)) | \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0)$.

На точность вычисления решения влияют:

- 1) порядки сходимости используемых численных методов решения СДУ;
- 2) точность моделирования моментов смены структуры;
- 3) точность моделирования условий восстановления в новой структуре.

Исследуем слабую сходимость [42] численного решения системы со случайной структурой с распределенными переходами при точном восстановлении реализаций и моделировании моментов смены структуры одним из построенных точных алгоритмов.

Теорема 3.3. *Численное решение системы со случайной структурой (3.1) с распределенными независимыми переходами (3.11), полученное с помощью построенных алгоритмов, имеет p -й порядок слабой сходимости, где*

$$p = \min_{l=1, \dots, S} p_l$$

и p_l – порядок слабой сходимости численного метода решения задачи Коши для СДУ, используемого для решения l -й структуры, $l = 1, \dots, S$.

Доказательство. В построенных алгоритмах, в случае систем с независимыми переходами, алгоритмическая вероятность нахождения системы в l -й структуре $P_k^{(l)}$ совпадает с точной вероятностью $P^{(l)}(t_k)$. Для любой точки временной сетки t_k имеем

$$\begin{aligned} & |E_{t_0, y_0} g(\mathbf{y}(t_k)) - E_{t_0, y_0} g(\mathbf{y}_k)| = \\ & = \left| \sum_{l=1}^S E_{t_0, y_0} (g(\mathbf{y}(t_k)) | s(t_k) = l) P^{(l)}(t_k) - \sum_{l=1}^S E_{t_0, y_0} (g(\mathbf{y}_k) | s_k = l) P_k^{(l)} \right| = \\ & = \left| \sum_{l=1}^S \left[E_{t_0, y_0} (g(\mathbf{y}(t_k)) | s(t_k) = l) - E_{t_0, y_0} (g(\mathbf{y}_k) | s_k = l) \right] P^{(l)}(t_k) \right| \leq \\ & \leq Ch^p \sum_{l=1}^S P^{(l)}(t_k) \leq Ch^p, \end{aligned}$$

а значит, выполнено (3.34) и теорема доказана.

Численное решение систем с распределенными зависимыми переходами, найденное с помощью построенных алгоритмов, также слабо сходится к точному решению (см. доказательство слабой сходимости приближенных алгоритмов моделирования пуассоновских точечных ансамблей в разделе 2.2). Но при моделировании систем с зависимыми переходами возникает дополнительная погрешность, которая может уменьшать порядок сходимости.

Результаты верификации построенных алгоритмов решения систем со случайной структурой с распределенными переходами приведены в главе, где рассмотрено решение тестовых и прикладных задач.

3.4. Алгоритм статистического моделирования системы с разделением времени и автономным управлением

В условиях ограниченного ресурса средств обработки информации и числа датчиков возникает необходимость их рационального использования в сложных системах управления. Одним из таких способов является последовательное использование этих устройств для поочередного

обслуживания объектов. При этом мы приходим к управлению в режиме разделения времени. В некоторых случаях *системы с разделением времени* можно описать как *системы со случайной структурой с распределенными переходами*.

Исследование вопросов качества управления динамическими объектами в режимах разделения времени является задачей, представляющей большой практический интерес.

Если имеется S объектов, в каждый момент времени идет управление только одним объектом, происходит восстановление без потерь и закон изменения процесса $s(t)$ не зависит от фазовых координат $y(t)$, то говорят об управлении *системой с разделением времени и автономным управлением*. Система с разделением времени находится в l -й структуре, если идет управление l -м объектом.

Для системы с разделением времени необходимо задать:

- 1) СДУ (3.1) в смысле Стратоновича для каждой структуры и
- 2) $(p_{lr}(\tau))$, $l, r = 1, \dots, S$, $l \neq r$ – плотности распределения случайных промежутков времени τ между переходами из одной структуры в другую.

Приближенными методами решения систем с разделением времени являются:

- 1) интегрирование обобщенного уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова (3.6) – уравнения в частных производных второго порядка для плотности распределения решения;
- 2) метод двухмоментной параметрической аппроксимации неизвестных плотностей условного распределения известными функциями, зависящими от первых двух моментов;
- 3) метод статистического моделирования.

Трудности, возникающие при решении методом первого типа, связаны со сложностью вычислительных процедур решения уравнений в частных производных. Серьезным недостатком методов второго типа яв-

ляется сложность получения оценок приближения и то, что изменение исходной модели вызывает существенное изменение уравнений для вероятностных характеристик.

Рассмотрим алгоритм статистического моделирования для численного решения систем с разделением времени с автономным управлением [6, 7]. Этот алгоритм отличается универсальностью и возможностью одновременного вычисления различных вероятностных характеристик решения (в том числе и плотности распределения).

I. Алгоритм численного моделирования перехода из l -го состояния для систем с разделением времени с автономным управлением:

- 0) пусть в момент t_k система находилась в l -м состоянии и вектор состояния равен \mathbf{y}_k ;
- 1) для всех $i \neq l$ моделируем τ_{li} – время перехода из l -го состояния в i -е согласно заданной плотности p_{li} ;
- 2) вычисляем момент выхода из l -го состояния $t_{k+1} = t_k + \tau_{lr}$,

$$\tau_{lr} = \min_{i \neq l} \tau_{li}; \quad (3.35)$$

- 3) на интервале $[t_k, t_{k+1}]$ численным методом для СДУ решаем уравнения (3.1) для l -й структуры, находим \mathbf{Y}_{k+1} – вектор состояния системы в момент времени t_{k+1} ;
- 4) меняем номер структуры на r -й.

Для конкретных плотностей p_{li} с помощью метода обратной функции [136] может быть получена конкретная моделирующая формула для τ_{li} . Также возможна модификация п. 1 и 2 для уменьшения вычислений, если удастся найти закон распределения τ_{lr} (3.35).

Например, как показано в предыдущем параграфе, для экспоненциальных плотностей

$$p_{lr}(\tau) = \lambda_{lr} \exp(-\lambda_{lr}\tau), \quad \tau \geq 0, \quad l, r = 1, \dots, n_Y, \quad l \neq r, \quad (3.36)$$

случайная величина τ_{lr} (3.35) распределена с плотностью

$$p_l(\tau) = \lambda_l \exp(-\lambda_l \tau), \quad \lambda_l = \sum_{i \neq l} \lambda_{li}, \quad \tau \geq 0, \quad (3.37)$$

а номер соответствующей r -й структуры распределен с вероятностями

$$p_r = \frac{\lambda_{lr}}{\lambda_l}. \quad (3.38)$$

1а. Алгоритм численного моделирования перехода из l -го состояния для систем с разделением времени с экспоненциальной плотностью перехода (3.36) (п. 0, 3, 4 как в алгоритме I):

- 1) моделируем момент выхода из l -й структуры $t_{k+1} = t_k + \tau$, где τ – случайная величина с плотностью распределения (3.37) (по формуле $\tau = -\frac{\ln \alpha}{\lambda_l}$, α – равномерно распределенная на интервале $(0, 1)$ случайная величина);
- 2) вычисляем r -й номер следующей структуры, распределенный с вероятностью (3.38) (см. [136]).

3.5. Алгоритм статистического моделирования систем со случайной структурой и сосредоточенными переходами

К системам со случайной структурой и сосредоточенными переходами относится, например, слежение за источником сигнала специальным следящим устройством. Фазовая координата, характеризующая положение источника (объекта), должна находиться в пределах заданной области. При выходе из этой области нарушается функционирование системы как следящей, срывается процесс слежения. Система переходит в другой режим, в котором также должно быть обеспечено управление, при котором произойдет возврат к первому состоянию. Автоматизация этих процессов приводит к комбинированной системе, состоящей из двух структур. Аналогичные задачи возникают в навигации летательных аппаратов при необходимости обеспечения различных заданных режимов полета, переходы в которые совершаются в случайные

моменты времени при достижении некоторыми фазовыми координатами определенных границ.

Подобные задачи являются частным видом динамических систем со случайной структурой и образуют класс систем с сосредоточенными переходами [145]. Процесс $s(t)$ является условно марковским, и зависимость от $\mathbf{y}(t)$ проявляется функционально. Моменты перехода из одного состояния в другое функционально связаны с фазовыми координатами. Переходы от одной структуры к другой могут происходить в те моменты, когда процесс $\mathbf{y}(t)$ достигнет определенных границ. Потому эти системы также называют системами с условной марковской структурой с сосредоточенными переходами [145].

Для системы, у которой переход от l -й структуры к r -й возможен при достижении реализациями случайного процесса в фазовом пространстве некоторых границ, т. е. происходит поглощение реализаций на границе S_{lr} , разделяющей l -ю структуру от r -й, функция поглощения имеет аналитический вид [143]:

$$v_{lr}^*(t, \mathbf{y}) = \delta[S_{lr}(\mathbf{y}) - \gamma_{lr}(t)](\mathbf{n}_{lr}^0 \pi^{*(l)}(\mathbf{y}, t)), \quad (3.39)$$

$$u_{lr}^*(t, \mathbf{y}) = \int_{R^{n_y}} v_{lr}^*(t, \mathbf{y}') p^{*(r)}(t, \mathbf{y}) q_{lr}(t, \mathbf{y} | t, \mathbf{y}') d\mathbf{y}', \quad u_{ll}^*(t, \mathbf{y}) = v_{ll}^*(t, \mathbf{y}) = 0,$$

где $q_{lr}(t, \mathbf{y} | t, \mathbf{y}')$ – условная функция плотности вероятности восстановления r -й структуры из l -й; δ – дельта-функция; $S_{lr}(\mathbf{Y}) - \gamma_{lr}(t) = 0$ – уравнение $(n - 1)$ -мерной гиперповерхности, записанное в параметрическом виде, где S_{lr} – скалярная функция компонент вектора \mathbf{y} ; $\gamma_{lr}(t)$ – заданная действительная скалярная функция или постоянная величина; \mathbf{n}_{lr}^0 – орт внешней нормали к гиперповерхности S_{lr} , круглые скобки – символ скалярного произведения векторов, $\pi^{*(l)}(t, \mathbf{y})$ – вектор плотности потока вероятности непоглощенных реализаций.

Так как каждая структура описывается системой стохастических дифференциальных уравнений, то численный алгоритм должен в себя включать: решение систем СДУ численным методом, моделирование условий поглощения и условий восстановления [3, 241].

Моделирование условий поглощения для мультиструктурных систем с сосредоточенными переходами будет сводиться к проверке условий выхода на границу.

Пусть система описывается СДУ в смысле Стратоновича (3.1). Рассмотрим случай восстановления без потерь (это означает, что в случае смены структуры начальное значение процесса в новом состоянии равно конечному значению процесса в предыдущем состоянии).

Алгоритм численного моделирования перехода из l -го состояния для систем с сосредоточенными переходами с функцией поглощения вида (3.39):

- 0) пусть в момент t_k система находилась в l -м состоянии и вектор состояния равен y_k ;
- 1) численным методом для СДУ решаем уравнения (3.1) для l -й структуры с шагом h и находим y_{k+1} – вектор состояния системы в момент времени $t_{k+1} = t_k + h$; $k := k + 1$;
- 2) проверяем условие выхода решения на границу S_{li} для всех $i \neq l$. Если выхода не было, то переходим к п. 1. Если был выход на границу S_{lr} , то меняем номер структуры на r -й.

В работе [293] показано, что для решения диффузии с поглощением в открытой области Ω порядок слабой сходимости дискретного метода Эйлера–Маруямы понижается с 1 до $1/2$, т. е.

$$|E(J\chi(t < t^*) - J(h)\chi(t < t^*(h)))| \leq K_1 e^{ct} h^{1/2},$$

где t^* – момент первого выхода траектории из области ($t^*(h)$ – для численного решения).

Подобное справедливо и для любого другого численного метода решения задачи Коши для СДУ: наличие поглощения понижает порядок метода.

Однако, если численный метод решения задачи Коши для СДУ модифицировать одним из способов, рассмотренных в работах [293] и [341],

то модифицированный метод будет иметь прежний порядок слабой сходимости.

Способы повышения порядка слабой сходимости состоят в следующем.

Первый способ состоит в переходе от дискретного численного метода – к непрерывному, в котором учитывается вероятность невыхода траектории из области за время $h = t_{k+1} - t_k$:

$$p(z_1, z_2, h) := P\left(\forall t \in [t_k, t_{k+1}] \quad \mathbf{y}(t) \in \Omega | y(t_k) = z_1, y(t_{k+1}) = z_2\right).$$

В одномерном случае $p(z_1, z_2, h)$ связана с распределением \inf и \sup броуновского моста и их аналитическое представление можно найти в справочнике [266]. Для больших размерностей и для областей общего вида вероятности $p(z_1, z_2, h)$ могут быть получены с помощью асимптотических разложений [258]. Как показано в работе [293], непрерывный метод Эйлера имеет первый порядок слабой сходимости при решении задачи Коши с поглощением.

Второй способ увеличения порядка сходимости – использование блуждания по малым сферам и шарам [341].

Модификация алгоритма будет состоять в модификации численных методов решения задачи Коши для СДУ с поглощением с целью повышения их порядка сходимости.

Модифицированный алгоритм численного моделирования перехода из l -го состояния для систем с сосредоточенными переходами с функцией поглощения вида (3.39):

- 0) пусть в момент t_k система находилась в l -м состоянии и вектор состояния равен y_k ;
- 1) модифицированным численным методом для СДУ с поглощением решаем (3.1) для l -й структуры и проверяем условия выхода на границы областей S_{li} для всех $i \neq l$ и находим $t_0^*(h)$ – уточненный первый момент выхода из областей – и r – номер соответствующей ему структуры;

- 2) $t_k := t_0^*(h)$, $y_k := y_{t_0^*(h)}$;
 3) меняем номер структуры на r -й; вычисляем y_k согласно заданной условной плотности восстановления q_{lr} .

3.6. Условная оптимизация статистического алгоритма

При решении рассматриваемых задач построенными статистическими алгоритмами важной является проблема оптимального (согласованного) выбора параметров статистического алгоритма при вычислении математического ожидания некоторого функционала от решения: шага численного метода h и размера выборки N . Ставится следующая *задача условной оптимизации* [190]: найти минимум трудоемкости

$$\min_{h, N} S(h, N) \quad \text{при} \quad T^{(B)}(h, N) = \gamma,$$

где γ – фиксированное положительное число, а $T^{(B)}$ – верхняя граница погрешности в норме функционального пространства B . Общая схема решения этой задачи такова: из соотношения для $T^{(B)}(h, N)$ один из параметров (например, N) выражается через другой (h), и соответствующее выражение подставляется в выражение для S , при этом получается функция одного переменного h , которая исследуется на минимум.

Полагаем, что трудоемкость имеет вид произведения $S(h, N) = C n_h N$ (здесь $n_h = (T - t_0)/h$ – число шагов по времени).

Теорема 3.4. [10] Пусть $J_N(h)$ – оценка некоторого функционала от решения системы со случайной структурой (3.1) в момент времени $t_{k_1} \in [t_0, T]$, полученная статистическим алгоритмом. Тогда минимум трудоемкости вычисления функционала достигается при $N_{opt} \asymp \gamma^{-2}$, $h_{opt} \asymp \gamma^{1/p}$, где γ – требуемая точность вычислений.

Доказательство. Обозначим \hat{y}_t – кусочно-линейный процесс, полученный по значениям y_k , а также введем обозначения для функционалов от решения

$$f(h) := f(\hat{y}_t), \quad J(h) := \mathbb{E}f(h), \quad J := \mathbb{E}f(y_t).$$

Для оценки некоторого функционала от решения системы (3.1) численным методом моделируется N траекторий процесса и величина $J(h)$ оценивается средним арифметическим полученных выборочных значений $f(h)$:

$$J_N(h) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f^{(i)}(h), \quad \mathbb{E}J_N(h) = J(h).$$

Погрешность оценки $J_N(h)$ определяется величиной

$$|\mathbb{E}(J - J_N(h))| \leq |J - J(h)| + \mathbb{E}|J(h) - J_N(h)| \leq C_1 h^p + \frac{\sqrt{Df(h)}}{\sqrt{N}}, \quad (3.40)$$

где D – дисперсия.

Нас будет интересовать только порядок по γ оптимальных параметров h_{opt} и N_{opt} . Так как трудоемкость S пропорциональна произведению $n_h N$ (где n_h – число шагов по времени), то достаточно приравнять погрешность численного метода $C_1 h^p$ и статистическую погрешность C_2/\sqrt{N} и получить требуемый порядок из соотношения

$$C_1 h^p + \frac{C_2}{\sqrt{N}} = \gamma.$$

Для уравнивания численной и статистической погрешностей получаем, что условно оптимальным является число испытаний

$$N = O(h^{-2p}). \quad (3.41)$$

Тогда для требуемой погрешности γ имеет место соотношение вида

$$N_{opt} \asymp \gamma^{-2}, \quad h_{opt} \asymp \gamma^{1/p},$$

а соответствующая трудоемкость имеет порядок $S \asymp \gamma^{-2-1/p}$ [10]. Теорема 3.4 доказана.

Теперь рассмотрим проблему оптимального (согласованного) выбора параметров статистического алгоритма при вычислении гистограммы решения: шага численного метода h , размера выборки N и шага гистограммы h_g .

Теорема 3.5. [10] Пусть $\pi^*(x)$ – гистограмма маргинальной плотности $p(x)$ ($x \in [a, b]$) в момент времени $t_{k_1} \in [t_0, T]$, полученная статистическим алгоритмом при решении систем со случайной структурой (3.1). Тогда минимум трудоемкости вычисления гистограммы достигается при $n_{g,opt} \asymp \gamma^{-1}$, $N_{opt} \asymp \gamma^{-3}$, $h_{opt} \asymp \gamma^{1/p}$, где γ – требуемая точность вычислений в норме пространства $L_2([a, b])$.

Доказательство. Вычислим функциональную оценку погрешности уклонения гистограммы $\pi^*(x)$ одномерной случайной величины $\hat{\xi} = y_k$, $a \leq y_k \leq b$ (с плотностью $\hat{p}(x)$) от графика плотности $p(x)$ случайной величины $y(t_k)$ в норме пространства $L_2([a, b])$:

$$\begin{aligned} B^2(p, \pi^*) &= \left(\mathbb{E} \|p(x) - \pi^*(x)\|_{L_2([a, b])} \right)^2 \leq \left(\mathbb{E} \left\{ \int_a^b [p(x) - \pi^*(x)]^2 dx \right\}^{1/2} \right)^2 \leq \\ &\leq \int_a^b \mathbb{E} [p(x) - \pi^*(x)]^2 dx = \int_a^b D\pi^*(x) dx + \int_a^b [p(x) - \mathbb{E}\pi^*(x)]^2 dx. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Будем считать шаг гистограммы постоянным, т. е. $h_g = (b - a)/n_g$. Тогда гистограмма $\pi^*(x)$ определяется

$$\pi^*(x) = \frac{m_k}{Nh_g}, \quad x \in I_k = [a + (k - 1)h_g, a + kh_g],$$

где m_k – число наблюдений случайной величины $\hat{\xi} = y_k$, попавших в отрезок I_k . Заметим, что m_k является случайной величиной с биномиальным распределением и означает число успехов в N независимых испытаниях Бернулли с вероятностью успеха $\hat{p}_k = \int_{I_k} \hat{p}(x) dx$. Поэтому $Dm_k = N\hat{p}_k(1 - \hat{p}_k)$ и первое слагаемое в (3.42) имеет вид

$$\int_a^b D\pi^*(x) dx = \sum_{k=1}^{n_g} \int_{I_k} D \frac{m_k}{Nh_g} dx = \sum_{k=1}^{n_g} \int_{I_k} \frac{\hat{p}_k(1 - \hat{p}_k)}{Nh_g^2} dx = \frac{C_1}{Nh_g} = \frac{C_1 n_g}{N}.$$

Если $\frac{d^2 \hat{p}}{dx^2}$ ограничена, то для второго слагаемого в (3.42) имеем

$$\|p(x) - \mathbb{E}\pi^*(x)\| \leq \|p(x) - \hat{p}(x)\| + \|\hat{p}(x) - \mathbb{E}\pi^*(x)\| \leq c_2 h^p + \frac{c_3}{n_g},$$

где учтено, что численный метод решения СДУ слабо сходится с порядком p .

Таким образом,

$$B^2(p, \pi^*) \leq C_1 n_g / N + C_2 h^{2p} + C_3 n_g^{-2}. \quad (3.43)$$

Для получения оптимальных параметров $n_{g,opt}$, N_{opt} и h_{opt} достаточно приравнять получившиеся погрешности и получить требуемый порядок из соотношения

$$C_1 n_g / N + C_2 h^{2p} + C_3 n_g^{-2} = \gamma^2.$$

Получаем, что условно оптимальными являются следующие соотношения:

$$n_g = O(N^{1/3}), \quad N = O(h^{-3p}). \quad (3.44)$$

Оптимальный порядок величин h , n_g , N таков:

$$n_{g,opt} \asymp \gamma^{-1}, \quad N_{opt} \asymp \gamma^{-3}, \quad h_{opt} \asymp \gamma^{1/p}.$$

Выбирая параметры таким образом, получаем

$$B(p, \pi^*) \leq CN^{-1/3}.$$

Теорема 3.5 доказана.

Таким образом, мы показали, что если численный метод решения СДУ имеет p -й порядок слабой сходимости, то при вычислении функционалов от решения условно оптимальным является число испытаний, вычисленное по формуле (3.41), а при вычислении гистограммы – по формуле (3.44).

Результаты численных экспериментов, подтверждающие полученные результаты, приведены в следующей главе. Во всех численных расчетах, по умолчанию, для моделирования равномерно распределенных случайных величин на интервале $(0, 1)$ использовался «генератор» псевдослучайных чисел RAND [136] (с модулем 2^{40} и множителем 5^{17}).

При численной реализации методов независимые пары нормально распределенных случайных величин ζ_1, ζ_2 с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией вычислялась по формуле: $\zeta = \sqrt{-2 \ln \alpha_1} \cos 2\pi \alpha_2$, где α_1 и α_2 – независимые равномерно распределенные случайные величины на интервале $(0, 1)$ [135].

Глава 4

Решение тестовых и прикладных задач

4.1. Статистический анализ диффузионных систем с инвариантами

Ограничимся двумерным случаем ($n_y = 2$) и в качестве примеров многообразий

$$M(t, \mathbf{y}) = M(\mathbf{y}) = M(y_1, y_2) = C = \text{const}, \quad [t_0, T] \times \mathbb{R}^2,$$

рассмотрим поверхности второго порядка: эллиптический, гиперболический и параболический цилиндры. Для таких цилиндров построим двумерные системы линейных СДУ с одним мультипликативным шумом, траектории которых с вероятностью 1 остаются на заданном многообразии.

Стохастическая система задана двумя уравнениями в смысле Ито:

$$\begin{aligned} dy_1(t) &= f_1(t, \mathbf{y}(t))dt + \sigma_1(t, \mathbf{y}(t))dw(t), & y_1(t_0) &= y_{10}, \\ dy_2(t) &= f_2(t, \mathbf{y}(t))dt + \sigma_2(t, \mathbf{y}(t))dw(t), & y_2(t_0) &= y_{20}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $t \in [t_0, T]$, $w(t)$ — скалярный стандартный винеровский случайный процесс ($n_{yw} = 1$). Эквивалентные (4.1) СДУ в смысле Стратоновича имеют вид:

$$\begin{aligned} dy_1(t) &= a_1(t, \mathbf{y}(t))dt + \sigma_1(t, \mathbf{y}(t)) \circ dw(t), & y_1(t_0) &= y_{10}, \\ dy_2(t) &= a_2(t, \mathbf{y}(t))dt + \sigma_2(t, \mathbf{y}(t)) \circ dw(t), & y_2(t_0) &= y_{20}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Так как в СДУ входит одномерный винеровский процесс, то вместо матрицы $\sigma(t, \mathbf{y})$ получается вектор, который мы обозначили как $[\sigma_1(t, \mathbf{y}) \ \sigma_2(t, \mathbf{y})]^T$. Коэффициенты уравнений (4.1), (4.2) определяются согласно общему алгоритму из [147]:

$$\begin{aligned}
 a_1(t, \mathbf{y}) &= \frac{H_1(t, \mathbf{y})}{C(t, \mathbf{y})}, \quad a_2(t, \mathbf{y}) = \frac{H_2(t, \mathbf{y})}{C(t, \mathbf{y})}, \\
 \sigma_1(t, \mathbf{y}) &= q_0(t, \mathbf{y}) \frac{\partial M(t, \mathbf{y})}{\partial y_2}, \quad \sigma_2(t, \mathbf{y}) = -q_0(t, \mathbf{y}) \frac{\partial M(t, \mathbf{y})}{\partial y_1},
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

где

$$\begin{aligned}
 C(t, \mathbf{y}) &= q_3(t, \mathbf{y}) \frac{\partial M(t, \mathbf{y})}{\partial y_1} - q_2(t, \mathbf{y}) \frac{\partial M(t, \mathbf{y})}{\partial y_2}, \\
 H_1(t, \mathbf{y}) &= q_1(t, \mathbf{y}) \frac{\partial M(t, \mathbf{y})}{\partial y_2}, \quad H_2(t, \mathbf{y}) = -q_1(t, \mathbf{y}) \frac{\partial M(t, \mathbf{y})}{\partial y_1}.
 \end{aligned}$$

Коэффициент сноса в уравнении Ито (4.1) вычисляется согласно соотношению (1.76). Функции $q_0(t, \mathbf{y})$, $q_1(t, \mathbf{y})$, $q_2(t, \mathbf{y})$ и $q_3(t, \mathbf{y})$ выбираются произвольным образом, чтобы были выполнены условия существования и единственности решения СДУ.

Пример 1. Построим двумерную стохастическую динамическую систему с вектором состояния $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2]^T$, находящуюся под непрерывными случайными воздействиями, траектории которой с вероятностью 1 остаются на эллиптическом (круговом) цилиндре

$$M(t, y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2 = C = \text{const.}$$

Коэффициенты в СДУ Стратоновича (4.2) имеют вид

$$\begin{aligned}
 a_1(t, \mathbf{y}) &= \frac{y_2 q_1(t, \mathbf{y})}{y_1 q_3(t, \mathbf{y}) - y_2 q_2(t, \mathbf{y})}, \\
 a_2(t, \mathbf{y}) &= -\frac{y_1 q_1(t, \mathbf{y})}{y_1 q_3(t, \mathbf{y}) - y_2 q_2(t, \mathbf{y})}, \\
 \sigma_1(t, \mathbf{y}) &= 2y_2 q_0(t, \mathbf{y}), \quad \sigma_2(t, \mathbf{y}) = -2y_1 q_0(t, \mathbf{y}).
 \end{aligned}$$

Функции $q_0(t, \mathbf{y})$, $q_1(t, \mathbf{y})$, $q_2(t, \mathbf{y})$ и $q_3(t, \mathbf{y})$ выберем так, чтобы стохастическая система была линейной. Для этого положим

$$\begin{aligned}
 q_0(t, \mathbf{y}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad q_1(t, \mathbf{y}) = 1, \quad q_2(t, \mathbf{y}) = \frac{1}{y_2}, \quad q_3(t, \mathbf{y}) = \frac{2}{y_1}, \\
 y_1 q_3(t, \mathbf{y}) - y_2 q_2(t, \mathbf{y}) &\equiv 1.
 \end{aligned}$$

Требуемая система СДУ в смысле Стратоновича имеет вид

$$\begin{aligned} dy_1(t) &= y_2(t)dt + \sqrt{2}y_2(t) \circ dw(t), & y_1(0) &= y_{10}, \\ dy_2(t) &= -y_1(t)dt - \sqrt{2}y_1(t) \circ dw(t), & y_2(0) &= y_{20}, \end{aligned}$$

которой эквивалентна система СДУ в смысле Ито:

$$\begin{aligned} dy_1(t) &= (-y_1(t) + y_2(t))dt + \sqrt{2}y_2(t)dw(t), & y_1(0) &= y_{10}, \\ dy_2(t) &= (-y_1(t) - y_2(t))dt - \sqrt{2}y_1(t)dw(t), & y_2(0) &= y_{20}. \end{aligned}$$

Начальные значения выбираются из условия $y_{10}^2 + y_{20}^2 = C$.

Пример 2. Построим двумерную стохастическую динамическую систему с вектором состояния $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2]^T$, находящуюся под непрерывными случайными воздействиями, траектории которой с вероятностью 1 остаются на гиперболическом цилиндре

$$M(t, y_1, y_2) = y_1 y_2 = C = \text{const.}$$

СДУ в смысле Стратоновича, которым удовлетворяет случайный процесс $\mathbf{y}(t) = [y_1(t) \ y_2(t)]^T$, как и ранее, имеют вид (4.2). Находим коэффициенты в этих уравнениях:

$$\begin{aligned} a_1(t, \mathbf{y}) &= -\frac{y_1 q_1(t, \mathbf{y})}{y_1 q_2(t, \mathbf{y}) - y_2 q_3(t, \mathbf{y})}, \\ a_2(t, \mathbf{y}) &= \frac{y_2 q_1(t, \mathbf{y})}{y_1 q_2(t, \mathbf{y}) - y_2 q_3(t, \mathbf{y})}, \\ \sigma_1(t, \mathbf{y}) &= y_1 q_0(t, \mathbf{y}), & \sigma_2(t, \mathbf{y}) &= -y_2 q_0(t, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Выберем эти функции так, чтобы стохастическая система была линейной. Например,

$$\begin{aligned} q_0(t, \mathbf{y}) &= 1, & q_1(t, \mathbf{y}) &= 1, & q_2(t, \mathbf{y}) &= \frac{2}{y_1}, & q_3(t, \mathbf{y}) &= \frac{1}{y_2}, \\ & & & & & & & y_1 q_2(t, \mathbf{y}) - y_2 q_3(t, \mathbf{y}) \equiv 1. \end{aligned}$$

Таким образом, требуемая система СДУ в смысле Стратоновича имеет вид

$$\begin{aligned} dy_1(t) &= -y_1(t)dt + y_1(t) \circ dw(t), & y_1(0) &= y_{10}, \\ dy_2(t) &= y_2(t)dt - y_2(t) \circ dw(t), & y_2(0) &= y_{20}, \end{aligned}$$

которой соответствует система СДУ в смысле Ито:

$$\begin{aligned}
 dy_1(t) &= -\frac{y_1(t)}{2}dt + y_1(t)dw(t), & y_1(0) &= y_{10}, \\
 dy_2(t) &= \frac{3y_2(t)}{2}dt - y_2(t)dw(t), & y_2(0) &= y_{20}.
 \end{aligned}$$

Начальные значения выбираются из условия $y_{10}y_{20} = C$.

Заметим, что для этой системы уравнения связаны только тем, что в них входит один и тот же винеровский процесс $w(t)$.

Пример 3. Построим двумерную стохастическую динамическую систему с вектором состояния $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2]^T$, находящуюся под непрерывными случайными воздействиями, траектории которой должны с вероятностью 1 оставаться на параболическом цилиндре

$$M(t, y_1, y_2) = y_2 - y_1^2 = C = \text{const.}$$

СДУ в смысле Стратоновича, которым удовлетворяет случайный процесс $\mathbf{y}(t)$, как и ранее, имеют вид (4.2). Записываем коэффициенты для этих уравнений согласно формулам (4.3):

$$\begin{aligned}
 a_1(t, \mathbf{y}) &= -\frac{q_1(t, \mathbf{y})}{2y_1q_3(t, \mathbf{y}) + q_2(t, \mathbf{y})}, \\
 a_2(t, \mathbf{y}) &= -\frac{2y_1q_1(t, \mathbf{y})}{2y_1q_3(t, \mathbf{y}) + q_2(t, \mathbf{y})}, \\
 \sigma_1(t, \mathbf{y}) &= q_0(t, \mathbf{y}), & \sigma_2(t, \mathbf{y}) &= 2y_1q_0(t, \mathbf{y}).
 \end{aligned}$$

Выберем эти функции так, чтобы стохастическая система была линейной. Например,

$$\begin{aligned}
 q_0(t, \mathbf{y}) &= 1, & q_1(t, \mathbf{y}) &= 1, & q_2(t, \mathbf{y}) &= -1, & q_3(t, \mathbf{y}) &= \frac{1}{y_1}, \\
 & & & & & & & 2y_1q_3(t, \mathbf{y}) + q_2(t, \mathbf{y}) \equiv 1.
 \end{aligned}$$

Таким образом, получаем требуемые СДУ в смысле Стратоновича:

$$\begin{aligned}
 dy_1(t) &= -dt + dw(t), & y_1(0) &= y_{10}, \\
 dy_2(t) &= -2y_1(t)dt + 2y_1(t) \circ dw(t), & y_2(0) &= y_{20}.
 \end{aligned}$$

Соответствующие СДУ в смысле Ито (4.1) имеют вид

$$\begin{aligned} dy_1(t) &= -dt + dw(t), & y_1(0) &= y_{10}, \\ dy_2(t) &= (1 - 2y_1(t))dt + 2y_1(t)dw(t), & y_2(0) &= y_{20}. \end{aligned}$$

Начальные значения выбираются из условия $y_{20} - y_{10}^2 = C$.

В работах [313,321] линейные системы с мультипликативным шумом использовались для тестирования численных методов решения СДУ, для экспериментального определения порядка сходимости, а также для иллюстрации соответствующего теоретического результата. Построенные СДУ также можно использовать для этих целей.

Рассмотрим часто используемые схемы, применяемые для численного решения СДУ: четыре численных метода для решения СДУ в смысле Ито и четыре численных метода для решения СДУ в смысле Стратоновича. Эти методы на произвольных нелинейных системах СДУ с несколькими шумами и переменной матрицей диффузии имеют порядок сильной сходимости $p = 1/2$. Но на линейных системах СДУ с аддитивным или мультипликативным шумом, а также в случае произвольных систем с одним шумом могут иметь порядок $p = 1$.

Численные методы решения СДУ в смысле Ито (3.2). I1. Метод Эйлера–Маруямы [338]:

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + hf(t_k, \mathbf{y}_k) + \sqrt{h}\sigma(t_k, \mathbf{y}_k)\Delta W_k.$$

I2. Метод Мильштейна [181,342]:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + hf(t_k, \mathbf{y}_k) + \sqrt{h}\sigma(t_k, \mathbf{y}_k)\Delta W_k + \\ + \frac{h}{2} \frac{\partial \sigma(t_k, \mathbf{y}_k)}{\partial \mathbf{y}} \sigma(t_k, \mathbf{y}_k) (\Delta W_k^2 - 1). \end{aligned}$$

I3. Метод Платена [313]:

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + hf(t_k, \mathbf{y}_k) + \frac{\sqrt{h}}{2} (\sigma(t_k, \mathbf{y}_k^p) - \sigma(t_k, \mathbf{y}_k)) (\Delta W_k^2 - 1),$$

$$\mathbf{y}_k^p = \mathbf{y}_k + \sqrt{h}\sigma(t_k, \mathbf{y}_k)\Delta W_k.$$

I4. Обобщенный метод типа Розенброка [105]:

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + \left[I - \frac{h}{2} \frac{\partial f(t_k, \mathbf{y}_k)}{\partial \mathbf{y}} \right]^{-1} [hf(t_k, \mathbf{y}_k) + \sqrt{h}\sigma(t_k, \mathbf{y}_k)\Delta W_k].$$

Численные методы решения СДУ в смысле Стратоновича
(3.1).

S1. Стохастический метод Эйлера–Коши (метод Хьюна) [269, 270]:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{k+1} &= \mathbf{y}_k + \frac{h}{2} (a(t_k, \mathbf{y}_k) + a(t_{k+1}, \mathbf{y}_k^p)) + \\ &\quad + \frac{\sqrt{h}}{2} (\sigma(t_k, \mathbf{y}_k) + \sigma(t_{k+1}, \mathbf{y}_k^p)) \Delta W_k, \\ \mathbf{y}_k^p &= \mathbf{y}_k + hf(t_k, \mathbf{y}_k) + \sqrt{h}\sigma(t_k, \mathbf{y}_k)\Delta W_k, \\ f_i(t, \mathbf{y}) &= a_i(t, \mathbf{y}) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_y} \sum_{l=1}^{n_{yw}} \frac{\partial \sigma_{il}(t, \mathbf{y})}{\partial y_j} \sigma_{jl}(t, \mathbf{y}), \quad l = 1, 2, \dots, n_y. \end{aligned}$$

S2. Обобщенный метод типа Рунге–Кутты [197, 311]:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{k+1} &= \mathbf{y}_k + \frac{h}{2} (a(t_k, \mathbf{y}_k) + a(t_{k+1}, \mathbf{y}_k^p)) + \\ &\quad + \frac{\sqrt{h}}{2} (\sigma(t_k, \mathbf{y}_k) + \sigma(t_{k+1}, \mathbf{y}_k^p)) \Delta W_k, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{y}_k^p = \mathbf{y}_k + ha(t_k, \mathbf{y}_k) + \sqrt{h}\sigma(t_k, \mathbf{y}_k)\Delta W_k.$$

S3. Метод (1.60) из семейства обобщенных методов типа Розенброка:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{k+1} &= \mathbf{y}_k + \left[I - \frac{h}{2} \frac{\partial a(t_k, \mathbf{y}_k)}{\partial \mathbf{y}} \right]^{-1} \times \\ &\quad \times \left[ha(t_k, \mathbf{y}_k) + \sqrt{h}\sigma(t_k, \mathbf{y}_k)\Delta W_k + \frac{h}{2} \frac{\partial \sigma(t_k, \mathbf{y}_k)}{\partial \mathbf{y}} \sigma(t_k, \mathbf{y}_k)\Delta W_k^2 \right]. \end{aligned}$$

S4. Метод (1.61) из семейства обобщенных методов типа Розенброка:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{k+1} &= \mathbf{y}_k + \frac{h}{2} \left[I - \frac{h}{2} \frac{\partial a(t_k, \mathbf{y}_k)}{\partial \mathbf{y}} \right]^{-1} [a(t_k, \mathbf{y}_k) + a(t_k, \mathbf{y}_k^p)] + \\ &\quad + \frac{\sqrt{h}}{2} (\sigma(t_k, \mathbf{y}_k) + \sigma(t_k, \mathbf{y}_k^p)) \Delta W_k, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{y}_k^p = \mathbf{y}_k + \sqrt{h}\sigma(t_k, \mathbf{y}_k)\Delta W_k.$$

В этих формулах h — шаг численного интегрирования, ΔW_k — случайная величина ($n_{y_w} = 1$), имеющая стандартное нормальное распределение, а I — единичная матрица размера $n_y \times n_y$. Отметим, что методы типа Розенброка ранее хорошо зарекомендовали себя на решении жестких и осциллирующих систем [47], в задачах физики плазмы [402] а также при анализе стохастических систем со случайной структурой [241, 249].

Проведем сравнительное тестирование численных методов П–И4 и S1–S4 на решении построенных систем СДУ с первыми интегралами. Будем оценивать точность попадания на многообразии. Не ограничивая общности, положим $t_0 = 0$ и $T = 1$, т.е. будем рассматривать стохастические динамические системы на отрезке времени $T = [0, 1]$. Для каждого примера будем моделировать $L = 1000$ траекторий, т.е. строить дискретную аппроксимацию $\{\mathbf{y}_k^i\}$, $i = 1, 2, \dots, L$, согласно приведенным выше разностным схемам и вычислять среднее значение отклонения траектории от многообразия в последнем узле $t_N = T$:

$$\hat{\varepsilon}_{\mathcal{M}} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \varepsilon_{\mathcal{M}}^i, \quad \varepsilon_{\mathcal{M}}^i = |M(t_0, \mathbf{y}_0) - M(T, \mathbf{y}_N^i)|,$$

а также доверительный интервал $(\hat{\varepsilon}_{\mathcal{M}} - \Delta_{\mathcal{M}}, \hat{\varepsilon}_{\mathcal{M}} + \Delta_{\mathcal{M}})$, где

$$\Delta_{\mathcal{M}} = \frac{3\hat{\sigma}_{\mathcal{M}}}{\sqrt{L}}, \quad \hat{\sigma}_{\mathcal{M}} = \sqrt{\frac{1}{L-1} \sum_{i=1}^L (\varepsilon_{\mathcal{M}}^i - \hat{\varepsilon}_{\mathcal{M}})^2}.$$

Для примера 1 на рис. 4.1 изображены три выборочные траектории в пространстве $[t_0, T] \times \mathbb{R}^2$ и соответствующее многообразие (круговой цилиндр). Изображены траектории, полученные методом Эйлера–Маруямы с шагом $h = 10^{-4}$. Начальные данные $y_{10} = y_{20} = 1$, т.е. многообразие задано уравнением $y_1^2 + y_2^2 = 2$.

На рис. 4.2 показаны те же три выборочные траектории случайного процесса $\mathbf{y}(t)$ (две координаты; каждой из выборочных траекторий соответствует свой цвет: синий, красный и зеленый, второй координате

по сравнению с первой соответствует менее насыщенный цвет; чёрными точками показаны значения функции $M(t_k, \mathbf{y}_k)$ на выборочных траекториях; на последнем рисунке изображены фазовые траектории).

В табл. 4.1 для примера 1 указаны средние значения отклонения траектории от многообразия для последнего момента времени $T = 1$:

$$\delta = |M(1, \mathbf{y}_N) - M(0, \mathbf{y}_0)|,$$

в зависимости от шага численного интегрирования h для всех численных методов.

Таблица 4.1. Отклонение от заданного многообразия в зависимости от шага численного интегрирования h .

Метод \ h	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
I1	1.443204 ± 0.206981	0.450203 ± 0.034758	0.143137 ± 0.010697	0.044666 ± 0.003283	0.014794 ± 0.001058
I2	1.149368 ± 0.125147	0.088330 ± 0.005355	0.008114 ± 0.000465	0.000859 ± 0.000047	0.000082 $\pm 4.8 \cdot 10^{-6}$
I3	1.078042 ± 0.120383	0.087776 ± 0.005325	0.008541 ± 0.000492	0.000826 ± 0.000046	0.000086 $\pm 4.8 \cdot 10^{-6}$
I4	1.139588 ± 0.119916	0.420895 ± 0.033167	0.140775 ± 0.010492	0.045774 ± 0.003404	0.014345 ± 0.001054
S1	0.365840 ± 0.065877	0.021486 ± 0.001495	0.001996 ± 0.000046	0.000200 $\pm 1.4 \cdot 10^{-6}$	0.000020 $\pm 4.4 \cdot 10^{-8}$
S2	0.840842 ± 0.04571	0.062603 ± 0.001449	0.006003 ± 0.000027	0.000600 $\pm 8.0 \cdot 10^{-7}$	0.000060 $\pm 4.1 \cdot 10^{-8}$
S3	0.774899 ± 0.083525	0.063376 ± 0.003144	0.005986 ± 0.000250	0.000607 ± 0.000027	0.000061 $\pm 2.7 \cdot 10^{-6}$
S4	0.867613 ± 0.111446	0.063182 ± 0.003264	0.006152 ± 0.000263	0.000590 ± 0.000026	0.000061 $\pm 2.6 \cdot 10^{-6}$

Аналогичные численные результаты для примера 2 приведены на рис. 4.3, 4.4 и в табл. 4.2. Показаны три выборочные траектории случайного процесса $\mathbf{y}(t)$, их проекции на фазовую плоскость и соответствующее многообразие (гиперболический цилиндр). Начальные данные $y_{10} = y_{20} = 1$. Многообразие задано уравнением $y_1 y_2 = 1$. Обо-

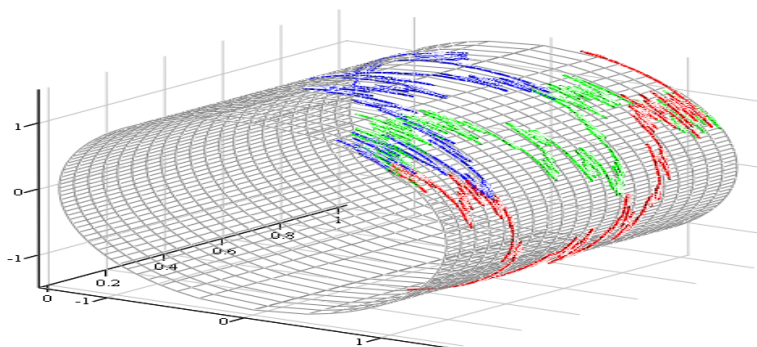


Рис. 4.1. Выборочные траектории случайного процесса $y(t)$ на эллиптическом цилиндре. Пример 1.

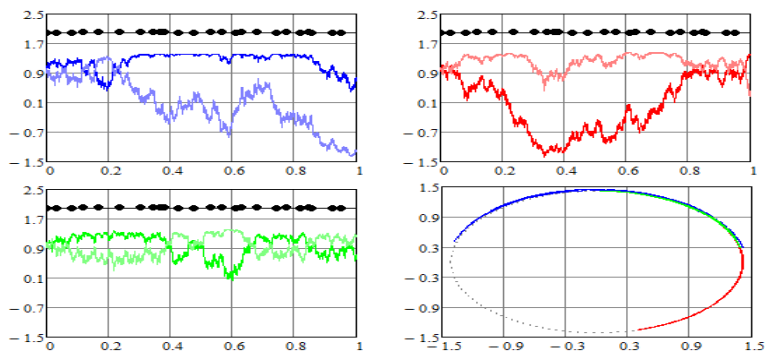


Рис. 4.2. Выборочные траектории случайного процесса $y(t)$ (координаты, значение первого интеграла, фазовые траектории). Пример 1.

значения на всех рисунках не отличаются от обозначений, принятых в предыдущем примере.

Таблица 4.2. Отклонение от заданного многообразия в зависимости от шага численного интегрирования h .

Метод \ h	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
I1	0.416696 ± 0.028371	0.113617 ± 0.008081	0.035294 ± 0.002567	0.011450 ± 0.000814	0.003470 ± 0.000248
I2	0.171229 ± 0.013459	0.016133 ± 0.001152	0.001660 ± 0.000118	0.000163 ± 0.000011	0.000016 $\pm 1.1 \cdot 10^{-6}$
I3	0.171229 ± 0.013459	0.016133 ± 0.001152	0.001660 ± 0.000118	0.000163 ± 0.000011	0.000016 $\pm 1.1 \cdot 10^{-6}$
I4	0.424998 ± 0.029986	0.112359 ± 0.008093	0.035204 ± 0.002576	0.011421 ± 0.000842	0.003585 ± 0.000263
S1	0.042785 ± 0.005742	0.002569 ± 0.000182	0.000253 $\pm 5.4 \cdot 10^{-6}$	0.000025 $\pm 1.8 \cdot 10^{-7}$	$2.5 \cdot 10^{-6}$ $\pm 5.6 \cdot 10^{-9}$
S2	0.101521 ± 0.008504	0.007664 ± 0.000238	0.000755 $\pm 7.2 \cdot 10^{-6}$	0.000075 $\pm 2.4 \cdot 10^{-7}$	$7.5 \cdot 10^{-6}$ $\pm 7.4 \cdot 10^{-9}$
S3	0.120541 ± 0.011117	0.010317 ± 0.000723	0.001029 ± 0.000072	0.000104 $\pm 7.1 \cdot 10^{-6}$	0.000010 $\pm 6.8 \cdot 10^{-7}$
S4	0.115426 ± 0.010234	0.010241 ± 0.000716	0.001028 ± 0.000072	0.000104 $\pm 7.1 \cdot 10^{-6}$	0.000010 $\pm 6.8 \cdot 10^{-7}$

Численные результаты для примера 3 представлены аналогично предыдущим примерам на рис. 4.5, 4.6 и в табл. 4.3. Показаны проекции на фазовую плоскость и соответствующее многообразие (параболический цилиндр). Начальные данные $y_{10} = y_{20} = 1$. Многообразие задается уравнением $y_2 - y_1^2 = 0$. Обозначения на всех рисунках не отличаются от обозначений, принятых в предыдущих примерах.

Численные результаты, приведенные в таблицах демонстрируют у всех методов, кроме методов I1 и I4, уменьшение погрешности в 10 раз при уменьшении шага интегрирования в 10 раз, что говорит о первом порядке сходимости. А у методов I1 и I4 при уменьшении шага интегрирования в 10 раз погрешность уменьшается в $\sqrt{10} \approx 3$ раза, что говорит о порядке сходимости $p = 1/2$.

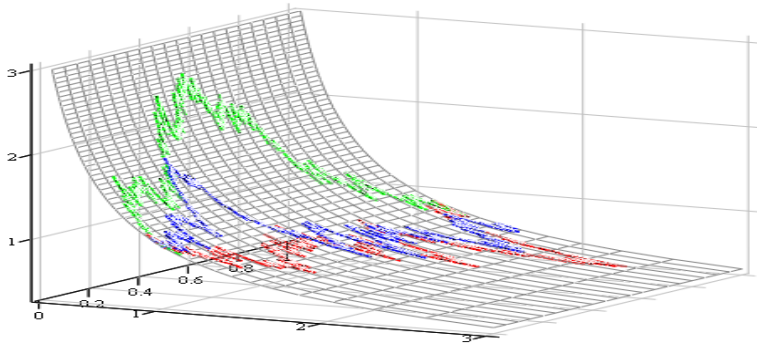


Рис. 4.3. Выборочные траектории случайного процесса $y(t)$ на гиперболическом цилиндре. Пример 2.

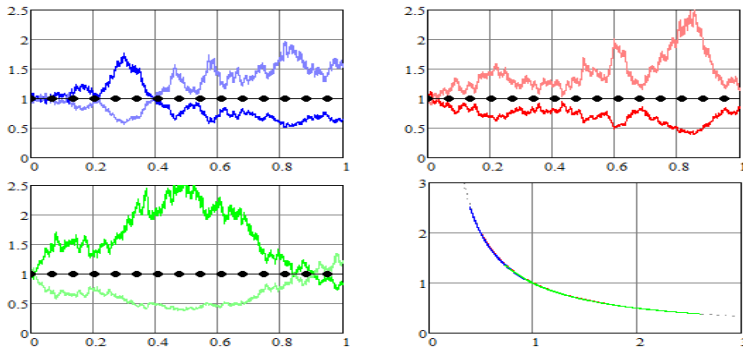


Рис. 4.4. Выборочные траектории случайного процесса $y(t)$ (координаты, значение первого интеграла, фазовые траектории). Пример 2.

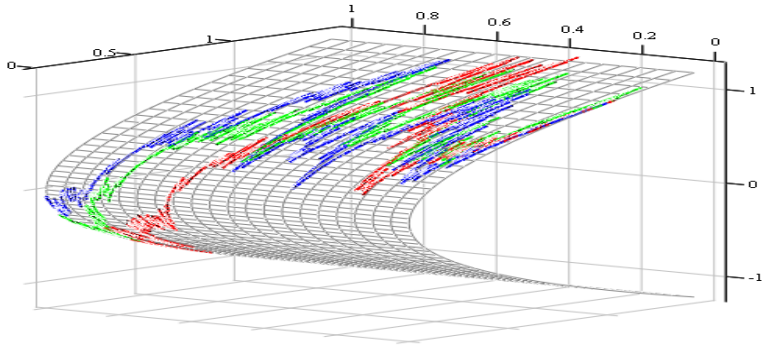


Рис. 4.5. Выборочные траектории случайного процесса $y(t)$ на параболическом цилиндре. Пример 3.

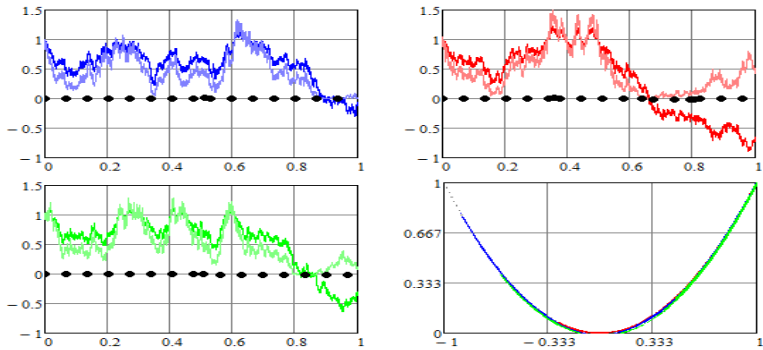


Рис. 4.6. Выборочные траектории случайного процесса $y(t)$ (координаты, значение первого интеграла, фазовые траектории). Пример 3.

Таблица 4.3. Отклонение от заданного многообразия в зависимости от шага численного интегрирования h .

Метод \ h	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
I1	0.404348 ± 0.034043	0.110330 ± 0.007721	0.036083 ± 0.002561	0.011291 ± 0.000805	0.003658 ± 0.000251
I2	0.189218 ± 0.013683	0.018010 ± 0.001288	0.001795 ± 0.000130	0.000174 ± 0.000012	0.000017 $\pm 1.2 \cdot 10^{-6}$
I3	0.189218 ± 0.013683	0.018010 ± 0.001288	0.001795 ± 0.000130	0.000174 ± 0.000012	0.000017 $\pm 1.2 \cdot 10^{-6}$
I4	0.385230 ± 0.027334	0.117109 ± 0.008169	0.036255 ± 0.002681	0.011237 ± 0.000792	0.003625 ± 0.000254
S1	0.000000 ± 0.000000	$2.8 \cdot 10^{-15}$ ± 0.000000	$8.6 \cdot 10^{-14}$ $\pm 9.4 \cdot 10^{-15}$	$2.7 \cdot 10^{-13}$ $\pm 6.3 \cdot 10^{-14}$	$4.4 \cdot 10^{-12}$ $\pm 5.3 \cdot 10^{-13}$
S2	0.000000 ± 0.000000	0.000000 ± 0.000000	$2.8 \cdot 10^{-15}$ ± 0.000000	$8.6 \cdot 10^{-15}$ ± 0.000000	$2.7 \cdot 10^{-14}$ $\pm 2.9 \cdot 10^{-15}$
S3	0.085590 ± 0.006150	0.008142 ± 0.000580	0.000814 ± 0.000058	0.000076 $\pm 5.7 \cdot 10^{-6}$	$7.8 \cdot 10^{-6}$ $\pm 5.4 \cdot 10^{-7}$
S4	0.085590 ± 0.006150	0.008142 ± 0.000580	0.000814 ± 0.000058	0.000076 $\pm 5.7 \cdot 10^{-6}$	$7.8 \cdot 10^{-6}$ $\pm 5.4 \cdot 10^{-7}$

Методика построения СДУ, решения которых с вероятностью 1 находятся на заданном гладком многообразии, показала, что СДУ в смысле Стратоновича более естественны для описания таких процессов.

Также было подтверждено, что системы СДУ с первым интегралом можно использовать для тестовых расчетов с целью изучения сильной сходимости численных методов. Сравнительный анализ точности восьми численных методов на трех системах СДУ, решения которых с вероятностью 1 находятся на заданных цилиндрических поверхностях второго порядка (эллиптическом, гиперболическом и параболическом цилиндрах) подтвердил их свойства сильной сходимости. Для метода Эйлера–Маруямы (I1) и обобщенного метода типа Розенброка для СДУ в смысле Ито (I4) во всех примерах порядок сходимости в смысле отклонения траектории от многообразия равен $p = 1/2$. Остальные методы

на тестовых двумерных линейных СДУ с мультипликативным скалярным шумом продемонстрировали первый порядок $p = 1$ (хотя в общем случае у методов порядок $p = 1/2$).

Модификация численных алгоритмов моделирования траекторий СДУ с первым интегралом.

Из-за погрешности численного метода моделируемые траектории не принадлежат заданному многообразию, а лежат в некоторой его окрестности, которая определяется шагом численного интегрирования и порядком сходимости численного метода. При построении программного управления с вероятностью 1 для динамических систем при наличии случайных возмущений нахождение траектории на заданном многообразии является важным. В параграфе 1.4 была проведена модификация численных алгоритмов моделирования траекторий с целью уменьшения погрешности отклонения от многообразия до нуля.

Рассмотрены результаты тестирования метода Эйлера–Маруямы и метода (1.61) из семейства обобщенных методов типа Розенброка с учетом дополнительной коррекции численного решения и без нее на системах СДУ с инвариантами.

Как показано выше, на рассматриваемых примерах метод Эйлера–Маруямы имеет порядок сильной сходимости $1/2$, а метод типа Розенброка - первый порядок сильной сходимости.

Исследовалась потраекторная сходимость численных методов, сравнивались точное и численное решения. Также оценивалась точность вычисления первых двух моментов решения при $t = T = 1$.

Во всех примерах моделировалось $L = 10^5$ траекторий.

Введем следующие обозначения:

$$\varepsilon = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L |\mathbf{y}(T) - \mathbf{y}_N^l|, \quad \tilde{\varepsilon} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L |\mathbf{y}(T) - \tilde{\mathbf{y}}_N^l|,$$

где при вычислении ε взята дискретная аппроксимация $\{\mathbf{y}_k^l\}$, полученная численным методом без учета коррекции, а при вычислении $\tilde{\varepsilon}$ взята дискретная аппроксимация $\{\tilde{\mathbf{y}}_k^l\}$, полученная с учетом коррекции (1.84) и (1.85). Кроме того, будем вычислять

$$\varepsilon_M = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L |M(T, \mathbf{y}_N^l) - M(0, \mathbf{y}_0)|.$$

Эта величина характеризует точность попадания дискретной аппроксимации (без учета коррекции) на заданную поверхность $M(t, \mathbf{y}) = M(0, \mathbf{y}_0)$ (точность вычисления первого интеграла).

Приведем формулы для оценок первых двух моментов по дискретной аппроксимации $\{\mathbf{y}_k^l\}$:

$$m_i = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L (\mathbf{y}_N^l)_i, \quad \Gamma_{ij} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L (\mathbf{y}_N^l)_i (\mathbf{y}_N^l)_j, \quad i, j = 1, 2,$$

а также по дискретной аппроксимации $\{\tilde{\mathbf{y}}_k^l\}$:

$$\tilde{m}_i = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L (\tilde{\mathbf{y}}_N^l)_i, \quad \tilde{\Gamma}_{ij} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L (\tilde{\mathbf{y}}_N^l)_i (\tilde{\mathbf{y}}_N^l)_j, \quad i, j = 1, 2.$$

Для двумерных систем СДУ в примерах 1–3 были заданы следующие начальные значения $y_{10} = y_{20} = 1$, т.е. поверхности определяются уравнениями:

- $y_1^2 + y_2^2 = C = 2$ (круговой цилиндр),
- $y_1 y_2 = C = 1$ (гиперболический цилиндр),
- $y_2 - y_1^2 = C = 0$ (параболический цилиндр).

Результаты статистического моделирования примера 1 методами П1 и S4 приведены в таблицах. Моделирование проводилось для шагов численного интегрирования $h = 0.1; 0.01; 0.001; 0.0001$. Результаты статистического моделирования примера 1 приведены в таблицах 4.4, 4.5, примера 2 — в таблицах 4.6, 4.7, примера 3 — в таблицах 4.8, 4.9.

В таблицах 4.4, 4.6, 4.8 приведены отклонения численного решения от точного. Оценки первого момента приведены в таблицах 4.5, 4.7, (в последних строках этих таблиц приведены точные значения соответствующих моментов).

На рис. 4.7 дополнительно для примера 1 показаны результаты численного моделирования на расширенном временном интервале $[0, 10]$ с

шагом численного интегрирования $h = 0.01$. Слева приведены три рисунка для метода Эйлера–Маруямы, а справа – для метода типа Розенброка:

- траектории на заданных поверхностях,
- траектории координаты $y_1(t)$,
- траектории координаты $y_2(t)$.

Красным цветом показано численное решение без коррекции; синим — с коррекцией; черным цветом показана траектория, соответствующая точному решению. Но на всех графиках точное решение почти совпадает с численным решением с учетом коррекции. Особо отметим, что моделирование этих траекторий проводилось по одной и той же выборочной траектории винеровского процесса.

На графиках с траекториями на заданных поверхностях видно, что 1) без коррекции решения метод типа Розенброка считает точнее и показывает лучшие свойства устойчивости, чем метод Эйлера–Маруямы, 2) коррекция решения приводит к сохранению инварианта системы. Графики с координатами траекторий демонстрируют, что коррекция численного решения приводит также и к уточнению каждой компоненты решения.

Графики наглядно демонстрируют результаты численных экспериментов, приведенные в таблицах.

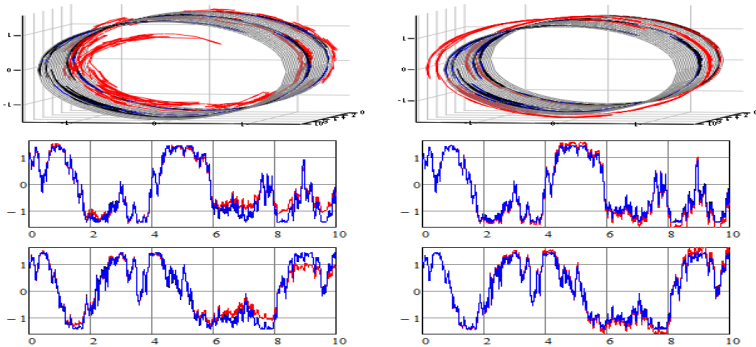


Рис. 4.7. Выборочные траектории с учетом коррекции и без нее (пример 1).

Таблица 4.4. Отклонение приближенного решения от точного (пример 1).

h	Метод I1		Метод S4	
	$\tilde{\varepsilon} (\varepsilon)$	ε_M	$\tilde{\varepsilon} (\varepsilon)$	ε_M
10^{-1}	0.187 (0.518)	1.407	0.114 (0.275)	0.738
10^{-2}	0.030 (0.163)	0.446	0.019 (0.032)	0.062
10^{-3}	0.0032 (0.051)	0.143	0.0020 (0.0032)	0.0061
10^{-4}	0.00033 (0.016)	0.045	0.00021 (0.00032)	0.00060

Таблица 4.5. Оценки математического ожидания (пример 1).

h	Метод I1		Метод S4	
	$\tilde{m}_1 (m_1)$	$\tilde{m}_2 (m_2)$	$\tilde{m}_1 (m_1)$	$\tilde{m}_2 (m_2)$
10^{-1}	0.571 (0.495)	-0.096 (-0.165)	0.451 (0.472)	-0.093 (-0.160)
10^{-2}	0.522 (0.510)	-0.113 (-0.121)	0.497 (0.503)	-0.113 (-0.119)
10^{-3}	0.512 (0.511)	-0.115 (-0.116)	0.510 (0.510)	-0.114 (-0.114)
10^{-4}	0.511 (0.511)	-0.110 (-0.110)	0.511 (0.511)	-0.112 (-0.112)
exact	0.508	-0.111	0.508	-0.111

Таблица 4.6. Отклонение приближенного решения от точного (пример 2).

h	Метод I1		Метод S4	
	$\tilde{\varepsilon} (\varepsilon)$	ε_M	$\tilde{\varepsilon} (\varepsilon)$	ε_M
10^{-1}	0.750 (0.858)	0.400	0.385 (0.397)	0.107
10^{-2}	0.218 (0.269)	0.114	0.046 (0.045)	0.010
10^{-3}	0.069 (0.085)	0.036	0.0046 (0.0045)	0.0010
10^{-4}	0.022 (0.027)	0.011	0.00047 (0.00046)	0.00010

Таблица 4.7. Оценки математического ожидания (пример 2).

h	Метод I1		Метод S4	
	$\tilde{m}_1 (m_1)$	$\tilde{m}_2 (m_2)$	$\tilde{m}_1 (m_1)$	$\tilde{m}_2 (m_2)$
10^{-1}	0.611 (0.597)	3.954 (4.044)	0.615 (0.634)	4.129 (4.219)
10^{-2}	0.611 (0.609)	4.425 (4.435)	0.606 (0.608)	4.436 (4.448)
10^{-3}	0.607 (0.607)	4.467 (4.468)	0.607 (0.607)	4.447 (4.448)
10^{-4}	0.605 (0.605)	4.478 (4.478)	0.605 (0.605)	4.496 (4.496)
exact	0.607	4.482	0.607	4.482

Таблица 4.8. Отклонение приближенного решения от точного (пример 3).

h	Метод I1		Метод S4	
	$\tilde{\varepsilon} (\varepsilon)$	ε_M	$\tilde{\varepsilon} (\varepsilon)$	ε_M
10^{-1}	0.311 (0.381)	0.381	0.062 (0.080)	0.080
10^{-2}	0.087 (0.113)	0.113	0.0057 (0.0080)	0.0080
10^{-3}	0.028 (0.036)	0.036	0.00057 (0.00080)	0.00080
10^{-4}	0.0087 (0.011)	0.011	0.00006 (0.00008)	0.00008

Таблица 4.9. Оценки математического ожидания (пример 3).

h	Метод I1		Метод S4	
	$\tilde{m}_1 (m_1)$	$\tilde{m}_2 (m_2)$	$\tilde{m}_1 (m_1)$	$\tilde{m}_2 (m_2)$
10^{-1}	0.059 (0.00047)	0.962 (0.907)	0.025 (0.0021)	1.019 (1.009)
10^{-2}	0.0031 (-0.0020)	0.991 (0.985)	0.0090 (0.0069)	0.998 (0.997)
10^{-3}	0.0030 (0.0025)	1.007 (1.006)	0.0029 (0.0027)	1.007 (1.007)
10^{-4}	-0.0019 (-0.0020)	0.999 (0.999)	-0.00012 (-0.00014)	1.000 (1.000)
exact	0.000	1.000	0.000	1.000

4.2. Сравнительный анализ алгоритмов моделирования пуассоновских процессов

Проведем сравнение алгоритмов моделирования пуассоновских процессов.

Для оценки математического ожидания численно моделируется N траекторий. Напомним, что при приближенном вычислении математического ожидания $E\xi$ случайной величины ξ с конечной дисперсией σ^2 по формуле $\bar{\xi}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i$ при заданном уровне доверия $(1 - \varepsilon)$ имеет место соотношение [135]

$$P\left(|\bar{\xi}_N - E\xi| \leq \gamma(\varepsilon) \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\gamma(\varepsilon)}^{+\gamma(\varepsilon)} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 1 - \varepsilon,$$

где $\gamma(\varepsilon)$ – константа, определяемая выбором величины ε . При $\varepsilon = 0.003$ получаем $\gamma(\varepsilon) = 3$, т. е. при достаточно большом N значение $E\xi$ с вероятностью $p = 0.997$ принадлежит доверительному интервалу

$$\left(\bar{\xi}_N - \frac{3\sigma}{\sqrt{N}}, \bar{\xi}_N + \frac{3\sigma}{\sqrt{N}}\right).$$

Чем больше дисперсия σ , тем больший объем выборки N требуется для вычисления оценки математического ожидания с заданной точностью.

Для оценки математического ожидания численно моделируется N траекторий и величина $E\xi(t_i)$ оценивается средним арифметическим полученных выборочных значений $\xi(t_i)$

$$\xi_N(t_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \xi^{(j)}(t_i).$$

Погрешность оценки $\epsilon(t_i) = |E\xi(t_i) - \xi_N(t_i)|$ определяется величиной $\frac{\sqrt{D\xi(t_i)}}{\sqrt{N}}$.

В таблицах с результатами численных экспериментов приведены доверительные интервалы для оценки математического ожидания. Время расчета указано в секундах.

Тест 1. Моделирование **однородного** пуассоновского процесса $\xi(t)$, $t \geq 0$ с интенсивностью λ . Известно, что $E\xi(t) = \lambda t$. Для оценки математического ожидания моделировалось 10^6 траекторий на интервале $[0, T]$, $T = 2$.

Сравним два метода моделирования однородного пуассоновского процесса. Запишем эти методы применительно к данному тесту с указанием формул моделирования. Для моделирования целого значения k , распределенного по закону Пуассона с параметром a использовалась формула (см. алгоритм 1.2 из [135]):

$$k = \min\left\{\prod_{i=0}^k \alpha_i < e^a\right\},$$

где α_i – независимые равномерно распределенные случайные величины на $(0, 1)$

Метод 1, (2.2):

- 1) моделируем целое k по закону Пуассона с параметром λT ;
- 2) моделируем k точек $\{\tau_i\}_{i=1}^k$ в интервале $[0, T]$ независимо с плотностью $p(x) = \frac{1}{T}$ (по формуле $\tau_i = \alpha_i T$, где α_i – независимые равномерно распределенные случайные величины на $[0, 1]$);
- 3) упорядочим точки $\{\tau_i\}_{i=1}^k$ и полагаем $\xi(\tau_i) = i$.

Метод 2 (параграф 2.3):

- 1) моделируем последовательность независимых значений τ_1, τ_2, \dots с экспоненциальной плотностью $p(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$ (по формуле $\tau_i = -\frac{\ln \alpha_i}{\lambda}$, где α_i – независимые равномерно распределенные случайные величины на $[0, 1]$);
- 2) полагаем $t_i = \sum_{j=1}^i \tau_j$, $\xi(t_i) = i$, пока $t_i \leq T$.

Результаты статистического моделирования приведены в табл. 4.10. Математическое ожидание оценивалось в точках $t_i = 0.02 + t_{i-1}$, $i = 1, \dots, 100$, $t_0 = 0$.

Таблица 4.10. Погрешность оценки математического ожидания и время счета для разных интенсивностей (тест 1)

λ	Метод 1		Метод 2	
	$\epsilon \pm \frac{\sqrt{D\xi(2)}}{\sqrt{N}}$	$t_{\text{сч}}$	$\epsilon \pm \frac{\sqrt{D\xi(2)}}{\sqrt{N}}$	$t_{\text{сч}}$
0.6	0.00036 ± 0.0011	5.22	0.00034 ± 0.0011	5.23
2	0.00032 ± 0.0017	6.54	0.00027 ± 0.0017	6.19
4	0.0025 ± 0.002	8.54	0.0043 ± 0.002	7.71
10	0.0074 ± 0.003	18.6	0.0066 ± 0.003	11.98

В табл. 4.10 помещены полученные абсолютные погрешности оценки математического ожидания в последней точке и время счета для различных параметров λ . Из таблицы видно, что при малых интенсивностях оба метода сравнимы по времени счета. При больших λ метод 1 считает дольше, так как много времени тратится на упорядочение моментов $\{\tau_i\}_{i=1}^k$.

Тест 2. Моделирование **неоднородного** пуассоновского процесса $\xi(t)$, $t \geq 0$ с интенсивностью $\lambda(t) = \lambda_m e^{-2t}$ и $E\xi(t) = \frac{\lambda_m}{2}(1 - e^{-2t})$. Для оценки математического ожидания моделировалось 10^6 траекторий на интервале $[0, T]$, $T = 2$.

Для этого теста рассмотрим три метода. Введем следующие обозначения: метод 1 (использующий формулу (2.2)), метод 2 (метод исключения из реализаций ансамбля, параграф 2.2), метод 3 (метод максимального сечения из параграфа 2.3). Запишем методы применительно к данному тесту с указанием формул моделирования.

Метод 1, (2.2):

- 1) моделируем целое k по закону Пуассона с параметром $\Lambda([0, T]) = \frac{\lambda_m}{2}(1 - e^{-2T})$;

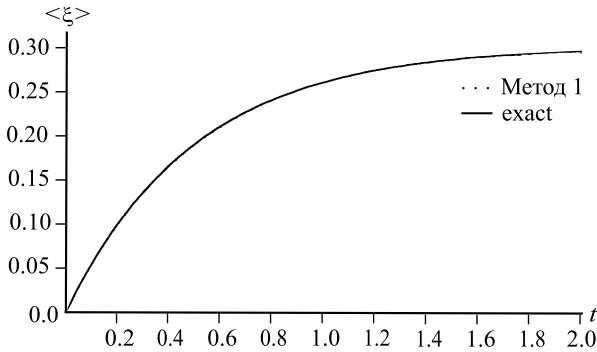


Рис. 4.8. График математического ожидания (тест 2)

- 2) моделируем k точек $\{\tau_i\}_{i=1}^k$ на $[0, T]$ независимо с плотностью $p(x) = \frac{\lambda(x)}{\int_0^T \lambda(t) dt} = \frac{2e^{-2x}}{1 - e^{-2T}}$ (по формуле $\tau_i = -\frac{\ln(1 - \alpha_i(1 - e^{-2T}))}{2}$, где α_i – независимые равномерно распределенные случайные величины на $[0, 1]$);
- 3) упорядочим точки $\{\tau_j\}_{j=1}^k$ и полагаем $\xi(\tau_j) = j$.

В методе 2 (метод исключения из реализаций ансамбля) и методе 3 (метод максимального сечения) рассмотрена постоянная мажоранта $\lambda_0 = \lambda_m$ на всем интервале $[0, T]$.

Метод 2 (метод исключения) :

- 1) полагаем $\lambda_0 = \lambda_m$ и моделируем целое k по закону Пуассона с параметром $\lambda_0 T$;
- 2) моделируем k точек $\{\tau_i\}_{i=1}^k$ в интервале $[0, T]$ независимо с плотностью $p(x) = \frac{1}{T}$;
- 3) исключаем i -ю точку с вероятностью $p_i = 1 - e^{-2\tau_i}$, $i = 1, \dots, k$;
- 4) оставшиеся точки упорядочим $\{\tau_i\}_{i=1}^l$, $l \leq k$ и полагаем $\xi(\tau_i) = i$.

Результаты статистического моделирования приведены на рис. 4.8 и в табл. 4.11. На рис. 4.8 приведены графики точного математическо-

Таблица 4.11. Погрешность оценки математического ожидания и время счета для разных интенсивностей (тест 2)

λ	Метод 1		Метод 2		Метод 3	
	ϵ	$t_{сч}$	ϵ	$t_{сч}$	$\epsilon \pm \frac{\sqrt{D\xi(2)}}{\sqrt{N}}$	$t_{сч}$
0.6	0.0004	5.38	0.0003	5.7	0.0005 ± 0.00055	6.07
2	0.0004	5.89	0.001	7.44	0.001 ± 0.001	8.09
4	0.0006	6.61	0.002	9.78	0.0001 ± 0.0017	10.84
10	0.001	8.84	0.002	17.18	0.0012 ± 0.002	19.07

го ожидания и оценка методом 1 на интервале $[0, 2]$ для $\lambda = 0.6$. Полученные оценки остальными методами не приведены ввиду сильного наложения графиков.

В табл. 4.11 приведены полученные абсолютные погрешности ϵ оценки математического ожидания в последней точке и время счета $t_{сч}$ для различных параметров λ . Из таблицы видно, что при малых интенсивностях ($\lambda < 1$) все методы сравнимы по времени счета. При больших λ метод 1 считает быстрее других методов.

При использовании в методе «максимального сечения» кусочно-постоянной мажоранты уменьшается время счета в результате уменьшения числа исключений. Также отметим, что метод «максимального сечения» универсален и реализуется для любого распределения, а при моделировании методом 1 плотность может не допускать достаточно эффективного стандартного алгоритма численного моделирования.

Следующий тест посвящен сравнению метода 1 и метода максимального сечения, сформулированных для моделирования пуассоновского процесса с заданной пуассоновской случайной мерой.

Тест 3. Стационарное решение задачи Коши

$$y(t) = y(0) + \int_0^t ad\tau - \int_0^t \int_0^1 y(\tau^-)\theta\nu(d\theta \times d\tau), \quad (4.4)$$

где пуассоновская мера ν на $[0, 1] \times R_+$ задана мерой $\Pi(d\theta) = \lambda(1 - \theta)^{\lambda-1}d\theta$, является гамма-распределением с параметрами a, λ , а плот-

ность распределения имеет вид $p(x) = x^\lambda \exp(-x/a)/(a^{\lambda+1}\lambda!)$ [227]. Математическое ожидание решения имеет вид

$$Ey(t) = Ey_0 \cdot e^{-t/(\lambda+1)} + a(1 - e^{-t/(\lambda+1)})/(\lambda + 1).$$

При численном решении (4.4) параметры принимали следующие значения: $a = 1$, $\lambda = 3$. Начальное значение моделировалось как равномерная случайная величина на $[0, 1]$. Численное решение в узлах сетки определялось по формуле

$$y_{n+1} = \begin{cases} y_{n+1}^-, & \text{если } t_{n+1} \text{ не является моментом скачка,} \\ y_{n+1}^-(1 - \xi_{k+1}), & \text{если } t_{n+1} \text{ является моментом скачка,} \end{cases}$$

где $y_{n+1}^- = y_n + t_{k+1} - t_k$.

Моделирование значений случайной величины с плотностью

$$p(x) = 3(1 - \theta)^2, \quad \theta \in [0, 1],$$

осуществлялось по формуле

$$\xi_{k+1} = 1 - (\alpha_k)^{1/3},$$

где α_k – равномерная случайная величина на $T = 10$.

Результаты статистического моделирования приведены на рис. 4.9, 4.10 и в табл. 4.12. На рис. 4.9 приведены график плотности стационарного решения и гистограммы, полученные численным методом 1 при $t = 5$ и $t = 20$. На рис. 4.9 видно, что при $t = 5$ решение еще не является стационарным.

На рис. 4.10 приведены графики точного математического ожидания (exact) и оценки (m_3), полученные методом 1. Графики, полученные методом «максимального сечения», не приводятся, так как они визуально совпадают с графиками, полученными методом 1.

В таблице приведены полученные абсолютные погрешности ϵ оценки математического ожидания и время счета $t_{\text{сч}}$ при $t = 5$ и $t = 20$. В этом примере, как и в тесте 1, метод 1 считает дольше.

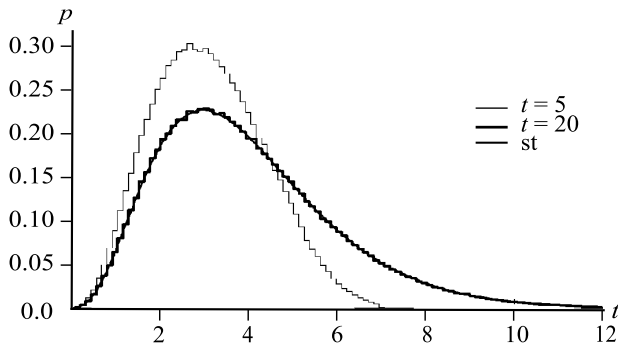


Рис. 4.9. График стационарной плотности (st) и ее оценки при $t = 5$ и $t = 20$ (тест 3)

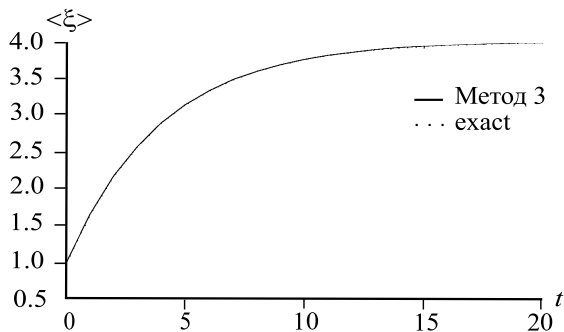


Рис. 4.10. График математического ожидания (тест 3)

Проведем сравнение двух алгоритмов: метода максимального сечения (2.13) и его модификации (2.14), предназначенных для моделирования неоднородного пуассоновского процесса.

Тест 4. Моделирование неоднородного пуассоновского процесса $\xi(t)$, $t \in [0, 2]$ с интенсивностью $\lambda(t) = \lambda_m e^{-2t}$ и $E\xi(t) = \frac{\lambda_m}{2}(1 - e^{-2t})$.

Полагаем $\lambda_0(t) \equiv \lambda_m$ на всем интервале $[0, T]$. Результаты статистического моделирования приведены ниже. В таблицах указаны полученные абсолютные погрешности ϵ оценки математического ожидания в последней точке и время счета $t_{сч}$ для различных пара-

Таблица 4.12. Погрешность оценки математического ожидания и время счета для разных интенсивностей (тест 3)

T	Метод 1		Метод 3	
	$\epsilon \pm \frac{\sqrt{D\xi(T)}}{\sqrt{N}}$	$t_{\text{сч}}$	$\epsilon \pm \frac{\sqrt{D\xi(T)}}{\sqrt{N}}$	$t_{\text{сч}}$
5	0.0002 ± 0.0017	6.63	0.0002 ± 0.0017	6.13
20	0.0008 ± 0.006	26.33	0.0002 ± 0.006	18.41

метров λ_m . В табл. 4.13 приведены результаты расчетов при использовании «генератора» псевдослучайных чисел RAND [136] (с модулем 2^{40} и множителем 5^{17}), а в табл. 4.14 – для «генератора» псевдослучайных чисел RND128 [340] (с модулем 2^{128} и множителем 5^{100109}).

Результаты численного моделирования демонстрируют уменьшение трудоемкости вычислений при использовании модифицированного «максимального сечения». Из таблиц видно, что оценки, полученные обоими методами, попадают в доверительные интервалы, а модифицированный метод «максимального сечения» считает быстрее более чем на 10 %.

Статистическое соответствие оценок, полученных методом «максимального сечения» и его модификацией, является дополнительным критерием удовлетворительности используемых «генераторов» псевдослучайных чисел RAND и RND128.

Проведенные численные эксперименты демонстрируют возможность применения различных методов Монте-Карло для моделирования однородных и неоднородных пуассоновских процессов.

Таблица 4.13. Погрешность оценки математического ожидания и время счета для разных интенсивностей, датчик RAND [135]

λ_m	метод (2.13)		метод (2.14)	
	$\epsilon \pm \frac{\sqrt{D\xi(2)}}{\sqrt{N}}$	$t_{сч}$	$\epsilon \pm \frac{\sqrt{D\xi(2)}}{\sqrt{N}}$	$t_{сч}$
0.6	0.0006 ± 0.0005	6.76	0.0003 ± 0.0005	6.06
2	0.0004 ± 0.0010	8.82	0.0006 ± 0.0010	8.07
4	0.0007 ± 0.0014	12.41	0.0010 ± 0.0014	10.86
10	0.0006 ± 0.0022	22.54	0.0016 ± 0.0022	19.13

Таблица 4.14. Погрешность оценки математического ожидания и время счета для разных интенсивностей, датчик RND128 [340]

λ_m	метод (2.13)		метод (2.14)	
	$\epsilon \pm \frac{\sqrt{D\xi(2)}}{\sqrt{N}}$	$t_{сч}$	$\epsilon \pm \frac{\sqrt{D\xi(2)}}{\sqrt{N}}$	$t_{сч}$
0.6	0.0006 ± 0.0005	7.17	0.0002 ± 0.0005	6.41
2	0.0007 ± 0.0010	10.10	0.0008 ± 0.0010	8.67
4	0.0008 ± 0.0014	14.35	0.0004 ± 0.0014	12.25
10	0.0002 ± 0.0022	27.28	0.0027 ± 0.0022	22.19

4.3. Сравнительный анализ приближенных алгоритмов моделирования пуассоновских процессов

В параграфе 2.3 рассмотрены приближенные алгоритмы моделирования пуассоновского процесса, построенные на основе свойства ординарности

$$P(P(t+h) - P(t) = 1 | X(t) = x) = \lambda(t, x)h + o(h), \quad h \rightarrow 0.$$

Метод на основе свойства ординарности состоит в следующем. В каждом узле равномерной сетки t_k ($h_k = h$) проверяется вероятностное условие разрыва траектории. Узел t_k является моментом разрыва, если

$$\alpha_k \leq \lambda(t_k, X_k)h, \quad (4.5)$$

где α_k — случайная величина, имеющая равномерное распределение в интервале $(0, 1)$.

Проведенные в параграфе 4.7 сравнительные расчеты трех алгоритмов показали, что использование метода на основе свойства ординарности увеличивает время решения задачи оптимальной фильтрации из-за большого количества вызовов генератора псевдослучайных чисел. Если временная сетка состоит из N_h узлов и для получения приближенной оптимальной оценки вектора состояния объекта наблюдения требуется моделирование N_{tr} траекторий, то для проверки неравенства (4.5) требуется моделирование $N_\alpha = N_h N_{tr}$ независимых равномерных случайных чисел.

Представим S_{prog} - время работы программы, использующей формулу (4.5) для моделирования пуассоновского точечного потока, как

$$S_{prog} = S_\alpha + S, \quad (4.6)$$

где S_α - время, затрачиваемое на проверку условия (4.5) и S - время, затрачиваемого на все остальные вычисления. Очевидно, что S_α пропорционально $t_\alpha N_\alpha$, где t_α - время вычисления равномерного псевдослучайного числа, N_α - число вызовов генератора для проверки нера-

венства (4.5). Заметим, что в S также может входить вызов генератора, но для других целей.

Если вычислять α_k с затратами меньшими, чем вызов генератора, или уменьшить число вызовов генератора N_α , то можно уменьшить трудоемкость алгоритма (а значит и время счета). Это уменьшение будет тем значительнее, чем больше доля первого слагаемого в S_{prog} . Возможно максимальное уменьшение времени счета в k раз, где

$$k = \frac{S_{prog}}{S}. \quad (4.7)$$

В данном параграфе проведем проверку статистической адекватности алгоритма на основе свойства ординарности и его модификацию с помощью решения тестовых задач.

Рассмотрим два алгоритма из параграфа 2.3, которые состоят в использовании формулы (4.5):

- 1) **Алгоритм 1:** α_k моделируются на каждом шаге с помощью генератора псевдослучайных чисел;
- 2) **Алгоритм 2:** α_k моделируются согласно предложенной модификации (2.16) с помощью одного равномерного случайного числа.

При применении алгоритма 2 в случае (4.5), нужно положить

$$\alpha_i = \beta^{(i)}, \quad p^{(i)} = \lambda(t_i, X_i)h, \quad i = 1, \dots, T/h. \quad (4.8)$$

Применяемая методика теоретически обоснована для случайных чисел. Для псевдослучайных чисел требуется проверка. Алгоритм, соответствующий теореме, следует координировать с точностью вычисления значений α

Напомним, что одним значением α можно пользоваться, пока

$$l_k = \prod_{i=1}^k \bar{p}_i \geq \epsilon, \quad \bar{p}_i = \begin{cases} p^{(i)}, & \text{если } \beta^{(i)} \in (0, p^{(i)}), \\ 1 - p^{(i)}, & \text{если } \beta^{(i)} \in (p^{(i)}, 1). \end{cases} \quad (4.9)$$

При использовании для вычисления α метода вычетов с числом двоичных разрядов, равным m , обычно рекомендуется значение $\epsilon = 2^{-m/2}$.

Методика, применяемая в алгоритме 2, теоретически обоснована для случайных чисел. Для псевдослучайных чисел, которые получаются с помощью конкретного генератора и используются при вычислениях, требуется проверка.

Так как в дальнейшем предполагается использовать предложенный алгоритм 2 для данных большого объема (длинный временной интервал, большой объем выборки) в параллельной реализации на суперкомпьютере, то целесообразно делать проверку алгоритма для случайных чисел, полученных с помощью «многоразрядного» генератора псевдослучайных чисел. Поэтому для моделирования равномерно распределенных случайных величин в интервале $(0, 1)$ использовался генератор псевдослучайных чисел RND128 (с модулем 2^{128} и множителем 5^{100109}). Расчеты проводились на PC с процессором Intel Core i5 3330 (3.00 ГГц).

Генератор RND128 является мультипликативным с числом двоичных разрядов $m = 128$, поэтому для проверки применяемой методики можно использовать одно псевдослучайное число, пока выполнено условие (4.9), где $\epsilon = 2^{-64}$.

При моделировании пуассоновского точечного потока алгоритмом 2 рассматривались четыре варианта прекращения моделирования по одному случайному числу:

- вар 1) с помощью одного α моделируются 10 равномерно распределенных случайных величин в интервале $(0, 1)$ $\{\alpha_i\}$, $i = 1, \dots, 10$, согласно (4.8), теоремы 2.1,
- вар 2) с помощью одного α моделируются 100 равномерно распределенных случайных величин в интервале $(0, 1)$ $\{\alpha_i\}$, $i = 1, \dots, 100$, согласно (4.8), теоремы 2.1,
- вар 3) с помощью одного α , согласно (4.8), теоремы 2.1 и замечания (4.9) моделируется последовательность $\{\alpha_i\}$, при $\epsilon = 2^{-30}$.
- вар 4) с помощью одного α , согласно (4.8), теоремы 2.1 и замечания (4.9) моделируется последовательность $\{\alpha_i\}$, при $\epsilon = 2^{-64}$.

В алгоритме 2 для проверки неравенства (4.5) для каждой траектории, в каждом узле временной сетки моделируются случайные величины β и η согласно формулам теоремы 2.1. Если в формуле (4.8) вероятность «успеха» постоянна

$$p^{(i)} = p = const,$$

то равномерные случайные числа теоремы 2.1 имеют коэффициент корреляции

$$\rho_u = \frac{E((\alpha - E\alpha)(\beta - E\beta))}{\sqrt{E(\alpha - E\alpha)}\sqrt{E(\beta - E\beta)}} = 1 - 2p + 2p^2, \quad (4.10)$$

а соответствующие бернуллиевские случайные величины независимы и

$$\rho_b = 0, \quad E\eta = p, \quad D\eta = E(\eta - m)^2 = p. \quad (4.11)$$

Используем пример (4.10) - (4.11) для вычислительного эксперимента, чтобы показать, что при моделировании пуассоновского точечного потока алгоритмом 2 при постоянной вероятности «успеха» p в формуле (4.8), получаются последовательность равномерных случайных величин $\{\alpha_i\}$ с коэффициентом корреляции (4.10) и соответствующая ей последовательность бернуллиевских случайных величин $\{\eta_i\}$ с нулевым коэффициентом корреляции (4.11).

Тест 1. Рассмотрим задачу

$$dX(t) = \int_{\Theta} \theta \nu(dt \times d\theta), \quad X(0) = X_0 \quad (4.12)$$

с параметрами:

$$\Theta = \{1\}, \quad X_0 = 0, \quad \lambda(t) \equiv \lambda = 10, \quad t \in [0, 1],$$

решением которой является простейший пуассоновский процесс $X(t)$ с **постоянной интенсивностью** λ , $EX(t) = DX(t) = \lambda \equiv 10$.

Моделирование проводилось алгоритмом 2 на временном интервале $[0, 1]$ с шагом $h = 0.001$ и числом траекторий $N_{tr} = 10^3$, $N_{tr} = 10^4$, $N_{tr} = 10^5$. Для заданных параметров получаем:

$$p = 0.01, \quad \rho_u = 0.9802.$$

Оценки коэффициентов корреляции для разного объема выборки для четырех вариантов алгоритма 2 приведены в таблице 4.15 (для равномерной последовательности) и в таблице 4.16 (для бернуллиевской последовательности). В этих таблицах, а также в таблицах для последующих тестов, использованы обозначения:

- $\tilde{\rho}_i$ - оценка коэффициента корреляции для i -го варианта, $i = 1, 2, 3, 4$;
- \tilde{m} - оценка математического ожидания;
- \tilde{d} - оценка дисперсии;
- δ - абсолютная погрешность оценки математического ожидания;
- N_α - число вызовов генератора псевдослучайных чисел для проверки неравенства (4.5);
- N_S - число вызовов генератора псевдослучайных чисел не связанных с проверкой неравенства (4.5);
- $t_{сч}$ - время счета в секундах.

Таблица 4.15. Оценки коэффициента корреляции для полученных равномерных случайных чисел (тест 1)

N_h	N_{tr}	ρ_u	$\tilde{\rho}_1$	$\tilde{\rho}_2$	$\tilde{\rho}_3$	$\tilde{\rho}_4$
10^3	10^3	0.9802	0.88278	0.97039	0.97785	0.97945
10^3	10^4		0.88228	0.97044	0.9778	0.9788
10^3	10^5		0.88226	0.97040	0.9777	0.9789

Таблица 4.16. Оценки коэффициента корреляции для полученных бернуллиевских случайных чисел (тест 1)

N_h	N_{tr}	ρ_b	$\tilde{\rho}_1$	$\tilde{\rho}_2$	$\tilde{\rho}_3$	$\tilde{\rho}_4$
10^3	10^3	0	0.00056	0.00030	-0.000589	0.000664
10^3	10^4		0.00017	$6 \cdot 10^{-7}$	-0.000475	-0.000203
10^3	10^5		0.00005	0.00002	-0.00002	0.000153

Таблица 4.17. Численные результаты для полученных бернуллиевских случайных чисел: оценки среднего и дисперсии, погрешность оценки среднего и доверительный интервал, число вызовов генератора RND128 (тест 1)

Вариант	N_h	N_{tr}	\tilde{m}	\tilde{d}	$\delta \pm \frac{\sqrt{DX}}{\sqrt{N_{tr}}}$	N_α
1	10^3	10^3	0.009922	0.009024	0.000078 ± 0.000099	10^5
	10^3	10^4	0.010013	0.009913	0.000013 ± 0.000031	10^6
	10^3	10^5	0.009987	0.009888	0.000013 ± 0.000010	10^7
2	10^3	10^3	0.009851	0.009754	0.000151 ± 0.000099	10^4
	10^3	10^4	0.010012	0.009912	0.000012 ± 0.000031	10^5
	10^3	10^5	0.010003	0.009903	0.000003 ± 0.000010	10^6
3	10^3	10^3	0.009886	0.009788	0.000114 ± 0.000099	2475
	10^3	10^4	0.009975	0.009875	0.000025 ± 0.000031	24860
	10^3	10^5	0.010022	0.009922	0.000022 ± 0.000010	249596
4	10^3	10^3	0.010080	0.009976	0.000080 ± 0.000100	1217
	10^3	10^4	0.010047	0.009946	0.000047 ± 0.000032	12152
	10^3	10^5	0.010020	0.009920	0.000020 ± 0.000010	121235

Из таблицы 4.15 видно, что полученная последовательность равномерных случайных чисел в $(0, 1)$ является зависимой. Чем больше длина моделируемой последовательности по одному случайному числу, тем ближе коэффициент корреляции к точному значению.

Из таблицы 4.16 видно, что полученная бернуллиевская последовательность является некоррелируемой.

Оценки вероятностных характеристик в момент времени $t = 1$, полученные алгоритмом 2 при моделирования бернуллиевских случайных величин и пуассоновского точечного потока с постоянной интенсивностью (тест 1) приведены в таблицах 4.17 и 4.18, соответственно. В таблицах приводится величина доверительного интервала "одно σ ". Из таблиц видно, что полученные оценки совпадают в пределах статистической погрешности для всех 4-х вариантов алгоритма 2.

Приведённые оценки коэффициента корреляции (таблица 4.16), математического ожидания и дисперсии (таблица 4.17) подтверждают

возможность применения предложенной методики для моделирования независимой бернуллиевской последовательности с помощью одного псевдослучайного числа, пока выполнено условие (4.9).

Из таблицы 4.18 видно, что полученные бернуллиевские последовательности позволяют моделировать пуассоновский точечный поток и результаты совпадают в пределах статистической погрешности для всех рассматриваемых четырех вариантов.

Таблица 4.18. Вероятностные характеристики, полученные алгоритмом 2 при моделировании пуассоновского потока с постоянной интенсивностью (тест 1)

Вариант	N_h	N_{tr}	\tilde{m}	\tilde{d}	$\delta \pm \frac{\sqrt{DX}}{\sqrt{N_{tr}}}$	N_α
1	10^3	10^3	9.922	10.074	0.078 ± 0.1	10^5
	10^3	10^4	10.0133	9.854	0.013 ± 0.031	10^6
	10^3	10^5	9.98663	9.7802	0.013 ± 0.0099	10^7
2	10^3	10^3	9.851	9.735	0.149 ± 0.099	10^4
	10^3	10^4	10.012	9.960	0.012 ± 0.032	10^5
	10^3	10^5	10.003	9.894	0.0033 ± 0.0099	10^6
3	10^3	10^3	9.886	9.163	0.114 ± 0.096	2475
	10^3	10^4	9.975	9.856	0.025 ± 0.031	24860
	10^3	10^5	10.022	9.916	0.022 ± 0.010	249596
4	10^3	10^3	10.078	9.786	0.007 ± 0.019	1217
	10^3	10^4	10.047	10.044	0.047 ± 0.031	12152
	10^3	10^5	10.020	9.990	0.022 ± 0.010	121235

Далее проведем сравнительный анализ алгоритма 1 и его модификации при моделировании пуассоновского точечного потока **переменной интенсивности**. В качестве примера рассмотрим задачу (4.12) с параметрами:

$$\lambda(t) = 2\rho t, \quad t \in [0, 1],$$

и точное решение:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \int_{\Theta} \theta \nu(dt \times d\theta), \quad X(0) = X_0.$$

Согласно свойствам пуассоновской меры получаем следующие уравнения на первый и второй моменты решения:

$$EX(t) = EX(0) + \int_0^t \int_{\Theta} \theta \pi(t, \theta) d\theta dt, \quad EX(0) = EX_0, \quad EX^2(0) = EX_0^2,$$

$$EX^2(t) = EX^2(0) + 2EX(0) \cdot \int_0^t \int_{\Theta} \theta \pi(t, \theta) d\theta dt + \int_0^t \int_{\Theta} \theta^2 \pi(t, \theta) d\theta dt + \left(\int_0^t \int_{\Theta} \theta \pi(t, \theta) d\theta dt \right)^2.$$

Согласно равенству (1.71), получаем:

$$EX(t) = EX(0) + \int_0^t \lambda(t) \int_{\Theta} \theta \psi(\theta|t) d\theta dt, \quad EX(0) = EX_0, \quad EX^2(0) = EX_0^2,$$

$$EX^2(t) = EX^2(0) + 2EX(0) \cdot \int_0^t \lambda(t) \int_{\Theta} \theta \psi(\theta|t) d\theta dt + \int_0^t \lambda(t) \int_{\Theta} \theta^2 \psi(\theta|t) d\theta dt + \left(\int_0^t \lambda(t) \int_{\Theta} \theta \psi(\theta|t) d\theta dt \right)^2.$$

Тест 2. Рассмотрим задачу (4.12) и зададим

$$\Theta = \{1\}, \quad X_0 = 0,$$

т.е. в качестве Θ рассмотрим одноточечное множество. В этом случае величина скачка всегда равна единице и решением является неоднородный пуассоновский процесс интенсивности $\lambda(t)$ с математическим ожиданием и дисперсией

$$EX(t) = DX(t) = \int_0^t \lambda(t) dt.$$

С учетом (4.12), получаем:

$$EX(t) = DX(t) = \varrho t^2, \quad EX(0) = DX(0) = 0.$$

Тест 3. Рассмотрим задачу (4.12) и зададим

$$\Theta = R, \quad X_0 = 0, \quad \psi(\theta|t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\theta^2}{2}},$$

т.е. в качестве Θ рассмотрим всю вещественную ось и величина скачка имеет стандартное нормальное распределение. В этом случае решением является неоднородный общий пуассоновский процесс интенсивности $\lambda(t)$ и, с учетом (4.12):

$$EX(t) = 0, \quad EX(0) = 0, \quad EX^2(0) = 0,$$

$$DX(t) = EX^2(t) = \int_0^t \lambda(t) dt = \varrho t^2.$$

Полученные оценки вероятностных характеристик смоделированного пуассоновского точечного потока в момент времени $t = 1$ приведены в таблицах 4.19 - 4.23 (тест 2) и в таблицах 4.24 - 4.28 (тест 3). Расчеты проводились с шагом $h = 0.001$ для разных интенсивностей ($\lambda(t) = t$, $\lambda(t) = 2t$, $\lambda(t) = 10t$) и разного числа траекторий ($N_{tr} = 10^4$, $N_{tr} = 10^5$). Из таблиц видно, что

- оценки, полученные обоими методами, попадают в доверительные интервалы,
- и предложенная модификация алгоритма 1 уменьшила время счета.

В таблице 4.29 приведено M - число вызовов генератора псевдослучайных чисел и затраченное время (в секундах) на их вызов генератором RND128.

В тесте 3 моделируется общий неоднородный пуассоновский процесс со скачками, имеющими стандартное нормальное распределение, моделирование которых требует дополнительные вызовы генератора. Поэтому в таблицах 4.24 - 4.28 также приведено N_S - число этих дополнительных вызовов генератора.

Нетрудно оценить, что для пуассоновского процесса интенсивности $\lambda(t)$ на интервале $[0, T]$ требуется гауссовских случайных величин $N_S \approx \lambda \cdot T \cdot N_{tr}$, где $\lambda(t) \leq \lambda$. В нашем случае $\lambda(t) = 2\varrho t$, $T = 1$. Поэтому $N_S \approx 10^5$ (для $N_{tr} = 10^4$) и $N_S \approx 10^6$ (для $N_{tr} = 10^5$) и, как видно из таблицы 4.29, время вызова генератора RND128 незначительно, по сравнению со временем счета.

Моделирование пар независимых стандартных нормальных случайных величин ζ_1, ζ_2 осуществлялось по формулам [94]:

$$\zeta_1 = \sqrt{-2 \ln \alpha_1} \cos 2\pi\alpha_2, \quad \zeta_2 = \sqrt{-2 \ln \alpha_1} \sin 2\pi\alpha_2,$$

Таблица 4.19. Численные результаты, полученные алгоритмом 1 с использованием генератора RND128 (тест 2)

ϱ	N_{tr}	\tilde{m}	\tilde{d}	$\delta \pm \frac{\sqrt{DX}}{\sqrt{N_{tr}}}$	N_α	$t_{сч}$
0.5	10^4	0.5050	0.5057	0.0050 ± 0.0071	10^7	1.67
1	10^4	0.9924	0.9805	0.0076 ± 0.0099	10^7	1.67
5	10^4	4.9980	4.9475	0.0020 ± 0.0222	10^7	1.67
5	10^5	5.0241	4.9725	0.0241 ± 0.0070	10^8	16.67

Таблица 4.20. Численные результаты, полученные алгоритмом 2 (вариант 1) с использованием генератора RND128 (тест 2)

ϱ	N_{tr}	\tilde{m}	\tilde{d}	$\delta \pm \frac{\sqrt{DX}}{\sqrt{N_{tr}}}$	N_α	$t_{сч}$
0.5	10^4	0.5076	0.5101	0.0076 ± 0.0071	10^6	0.62
1	10^4	1.0073	1.0239	0.0073 ± 0.0101	10^6	0.62
5	10^4	4.9891	5.1211	0.0109 ± 0.0226	10^6	0.62
5	10^5	5.0045	4.9548	0.0045 ± 0.0070	10^7	6.23

Таблица 4.21. Численные результаты, полученные алгоритмом 2 (вариант 2) с использованием генератора RND128 (тест 2)

ϱ	N_{tr}	\tilde{m}	\tilde{d}	$\delta \pm \frac{\sqrt{DX}}{\sqrt{N_{tr}}}$	N_α	$t_{сч}$
0.5	10^4	0.4944	0.51037	0.0056 ± 0.0071	10^5	0.50
1	10^4	0.9827	1.0064	0.0173 ± 0.0100	10^5	0.53
5	10^4	5.013	4.9842	0.0130 ± 0.0223	10^5	0.51
5	10^5	5.0062	4.9780	0.0062 ± 0.0071	10^6	5.14

Таблица 4.22. Численные результаты, полученные алгоритмом 2 (вариант 3, $\epsilon < 2^{-30}$) с использованием генератора RND128 (тест 2)

ϱ	N_{tr}	\tilde{m}	\tilde{d}	$\delta \pm \frac{\sqrt{DX}}{\sqrt{N_{tr}}}$	N_α	$t_{сч}$
0.5	10^4	0.4977	0.50959	0.0053 ± 0.0071	1702	0.53
1	10^4	1.0096	1.00671	0.0096 ± 0.0100	3362	0.53
5	10^4	4.9761	4.9091	0.0239 ± 0.0222	13152	0.53
5	10^5	5.0110	4.9704	0.0110 ± 0.0071	132282	5.34

Таблица 4.23. Численные результаты, полученные алгоритмом 2 (вариант 4, $\epsilon < 2^{-64}$) с использованием генератора RND128 (тест 2)

ϱ	N_{tr}	\tilde{m}	\tilde{d}	$\delta \pm \frac{\sqrt{DX}}{\sqrt{N_{tr}}}$	N_α	$t_{сч}$
0.5	10^4	0.5187	0.5231	0.0187 ± 0.0072	974	0.53
1	10^4	0.9991	0.9915	0.0009 ± 0.0099	1727	0.53
5	10^4	5.0050	4.9601	0.0050 ± 0.0222	6980	0.55
5	10^5	5.0004	4.9799	0.0004 ± 0.0071	69756	5.34

Таблица 4.24. Численные результаты, полученные алгоритмом 1 с использованием генератора RND128 (тест 3)

ϱ	N_{tr}	\tilde{m}	\tilde{d}	$\delta \pm \frac{\sqrt{DX}}{\sqrt{N_{tr}}}$	N_α	$t_{сч}$	N_S
0.5	10^4	0.0117	0.4979	0.0117 ± 0.0070	10^7	1.67	9924
1	10^4	0.0163	1.0439	0.0163 ± 0.0102	10^7	1.69	19894
5	10^4	-0.0308	5.0110	0.0308 ± 0.0223	10^7	1.69	100424
5	10^5	-0.0085	5.0342	0.0085 ± 0.0071	10^8	16.92	1005718

Таблица 4.25. Численные результаты, полученные алгоритмом 2 (вариант 1) с использованием генератора RND128 (тест 3)

ϱ	N_{tr}	\tilde{m}	\tilde{d}	$\delta \pm \frac{\sqrt{DX}}{\sqrt{N_{tr}}}$	N_α	$t_{сч}$	N_S
0.5	10^4	0.0038	0.5356	0.0038 ± 0.0073	10^6	0.61	10198
1	10^4	-0.0090	1.0408	0.0090 ± 0.0102	10^6	0.63	20170
5	10^4	-0.0412	5.0340	0.0412 ± 0.0224	10^6	0.63	100454
5	10^5	-0.0028	4.9663	0.0028 ± 0.0070	10^7	6.34	999350

Таблица 4.26. Численные результаты, полученные алгоритмом 2 (вариант 2) с использованием генератора RND128 (тест 3)

ϱ	N_{tr}	\tilde{m}	\tilde{d}	$\delta \pm \frac{\sqrt{DX}}{\sqrt{N_{tr}}}$	N_α	$t_{сч}$	N_S
0.5	10^4	0.0092	0.5113	0.0092 ± 0.0072	10^5	0.50	9984
1	10^4	0.0061	0.9977	0.0061 ± 0.0100	10^5	0.50	19982
5	10^4	0.0147	4.8989	0.0147 ± 0.0221	10^5	0.51	99692
5	10^5	0.0004	4.9999	0.0004 ± 0.0070	10^6	5.21	998886

Таблица 4.27. Численные результаты, полученные алгоритмом 2 (вариант 3, $\epsilon < 2^{-30}$) с использованием генератора RND128 (тест 3)

ϱ	N_{tr}	\tilde{m}	\tilde{d}	$\delta \pm \frac{\sqrt{DX}}{\sqrt{N_{tr}}}$	N_α	$t_{сч}$	N_S
0.5	10^4	-0.0027	0.5109	0.0027 ± 0.0071	1718	0.53	10062
1	10^4	0.0010	0.9780	0.0010 ± 0.0099	3341	0.54	20018
5	10^4	0.0032	5.0659	0.0032 ± 0.0225	13137	0.55	99468
5	10^5	0.0074	4.9998	0.0074 ± 0.0070	131992	5.50	999380

Таблица 4.28. Численные результаты, полученные алгоритмом 2 (вариант 4, $\epsilon < 2^{-64}$) с использованием генератора RND128 (тест 3)

ϱ	N_{tr}	\tilde{m}	\tilde{d}	$\delta \pm \frac{\sqrt{DX}}{\sqrt{N_{tr}}}$	N_α	$t_{сч}$	N_S
0.5	10^4	0.0096	0.5257	0.0096 ± 0.0073	953	0.53	10018
1	10^4	0.0071	1.0021	0.0071 ± 0.0100	1750	0.54	19928
5	10^4	0.0084	4.9749	0.0084 ± 0.0223	6974	0.55	99240
5	10^5	-0.0018	4.9349	0.0018 ± 0.0070	69871	5.54	1002102

где α_1, α_2 - независимые равномерные случайные числа в $(0, 1)$.

Из сравнения времени вызова генератора RND128 (таблица 4.29) и времени счета алгоритмом 1 теста 2 (таблица 4.19) и теста 3 (таблица 4.24) видно, что в обоих тестах вызов генератора для проверки неравенства (4.5) составляет $\sim 70\%$ от общего времени счета задачи. Таким образом:

- использование алгоритма 2 в рассматриваемых тестовых примерах целесообразно и позволило уменьшить время счета приблизительно в три раза.

Сравнение 4-х вариантов алгоритма 2 позволяет сделать вывод, что

- для уменьшения трудоемкости вычислений и времени счета достаточно использовать построение десяти случайных чисел по одному псевдослучайному числу, так как дальнейшее увеличение последовательности не приводит к их заметному уменьшению.

Таблица 4.29. Число и время вызовов генератора псевдослучайных чисел RND128 и RAND

M	t_{RND128}	t_{RAND}
10^5	0.01	0.00
10^6	0.11	0.04
10^7	1.19	0.41
10^8	11.9	3.97

В таблице 4.29 также приведено время, затрачиваемое на M вызовов «классического» генератора псевдослучайных чисел RAND с модулем 2^{40} и множителем 5^{17} (использовалась программа из книги [206]). Если не требуется проведения параллельных вычислений, и при расчетах требуется обращений к генератору 10^9 и меньше, то можно использовать генератор RAND, который прошел всестороннее многолетнее тестирование. Из таблицы видно, что генератор RAND работает в три раза быстрее, чем RND128. В следующем разделе будет рассмотрено применение генератора RAND для рассматриваемой задачи.

Вычислительные эксперименты (генератор RAND)

Генератор RAND является мультипликативным с числом двоичных разрядов $m = 40$, значит для проверки применяемой методики можно использовать одно псевдослучайное число, пока выполнено условие (4.9), где $\epsilon = 2^{-20}$. Поэтому при расчетах алгоритмом 2 рассматривались только вариант 1 и вариант 2. Во всех тестовых примерах также вычислялось математическое ожидание и дисперсия моделируемого пуассоновского точечного потока в момент времени $t = 1$.

Таблица 4.30. Численные результаты, полученные алгоритмом 1 с использованием генератора RAND (тест 2)

ϱ	N_{tr}	\tilde{m}	\tilde{d}	$\delta \pm \frac{\sqrt{DX}}{\sqrt{N_{tr}}}$	N_α	$t_{сч}$
0.5	10^4	0.5069	0.5156	0.0069 ± 0.0072	10^7	0.89
1	10^4	1.0086	1.0163	0.0086 ± 0.0101	10^7	0.91
5	10^4	5.0264	4.9537	0.0264 ± 0.0222	10^7	0.90
5	10^5	5.0104	4.9504	0.0104 ± 0.0070	10^8	8.99

Таблица 4.31. Численные результаты, полученные алгоритмом 2 (вариант 1) с использованием генератора RAND (тест 2)

ϱ	N_{tr}	\tilde{m}	\tilde{d}	$\delta \pm \frac{\sqrt{DX}}{\sqrt{N_{tr}}}$	N_α	$t_{сч}$
0.5	10^4	0.4962	0.4984	0.0038 ± 0.0071	10^6	0.53
1	10^4	0.9794	0.9802	0.0206 ± 0.0099	10^6	0.53
5	10^4	4.9716	4.8984	0.0284 ± 0.0070	10^6	0.53
5	10^5	4.9984	4.9738	0.0016 ± 0.0222	10^7	5.36

Таблица 4.32. Численные результаты, полученные алгоритмом 2 (вариант 2) с использованием генератора RAND (тест 2)

ϱ	N_{tr}	\tilde{m}	\tilde{d}	$\delta \pm \frac{\sqrt{DX}}{\sqrt{N_{tr}}}$	N_α	$t_{сч}$
0.5	10^4	0.4855	0.4788	0.0145 ± 0.0069	10^5	0.50
1	10^4	0.9893	0.9738	0.0107 ± 0.0099	10^5	0.50
5	10^4	4.9998	4.9212	0.0002 ± 0.0070	10^5	0.50
5	10^5	5.0060	4.9542	0.0060 ± 0.0222	10^6	4.95

Таблица 4.33. Численные результаты, полученные алгоритмом 1 с использованием генератора RAND (тест 3)

ϱ	N_{tr}	\tilde{m}	\tilde{d}	$\delta \pm \frac{\sqrt{DX}}{\sqrt{N_{tr}}}$	N_α	$t_{сч}$	N_S
0.5	10^4	-0.0015	0.4784	0.0015 ± 0.0069	10^7	0.92	10114
1	10^4	-0.0059	0.9967	0.0059 ± 0.0100	10^7	0.91	20280
5	10^4	-0.0288	5.0650	0.0029 ± 0.0225	10^7	0.90	99984
5	10^5	-0.0019	4.9958	0.0019 ± 0.0070	10^8	9.17	1001586

Таблица 4.34. Численные результаты, полученные алгоритмом 2 (вариант 1) с использованием генератора RAND (тест 3)

ϱ	N_{tr}	\tilde{m}	\tilde{d}	$\delta \pm \frac{\sqrt{DX}}{\sqrt{N_{tr}}}$	N_α	$t_{сч}$	N_S
0.5	10^4	0.0023	0.4923	0.0023 ± 0.0070	10^6	0.56	9690
1	10^4	-0.0051	0.9889	0.0051 ± 0.0099	10^6	0.54	19856
5	10^4	-0.0046	4.9753	0.0045 ± 0.0225	10^6	0.54	99376
5	10^5	-0.0121	5.0069	0.0121 ± 0.0070	10^7	5.51	999268

Таблица 4.35. Численные результаты, полученные алгоритмом 2 (вариант 2) с использованием генератора RAND (тест 3)

ϱ	N_{tr}	\tilde{m}	\tilde{d}	$\delta \pm \frac{\sqrt{DX}}{\sqrt{N_{tr}}}$	N_α	$t_{сч}$	N_S
0.5	10^4	-0.0110	0.4866	0.0110 ± 0.0070	10^5	0.50	9724
1	10^4	-0.0110	0.9959	0.0110 ± 0.0100	10^5	0.52	19938
5	10^4	-0.0441	5.0548	0.0441 ± 0.0070	10^5	0.50	99704
5	10^5	-0.0071	5.0290	0.0071 ± 0.0225	10^6	5.11	1000590

Результаты статистического моделирования с использованием генератора RAND для теста 2 приведены в таблицах 4.30 - 4.32. Эти таблицы аналогичны таблицам 4.19 - 4.21 с использованием генератора RND128. Результаты статистического моделирования с использованием генератора RAND для теста 3 приведены в таблицах 4.33 - 4.35. Эти таблицы аналогичны таблицам 4.24 - 4.26 с использованием генератора RND128. Как видно из таблиц:

- все полученные оценки лежат в доверительном интервале,
- применение алгоритма 2 позволило уменьшить время счета,

- применение алгоритма 2 целесообразно применять при использовании и генератора RND128, и генератора RAND.

Еще раз отметим, что для моделирования пуассоновского точечного потока в тесте 3 часть S формулы (4.6) содержит вычислительные затраты, связанные с вызовом генератора псевдослучайных чисел для моделирования гауссовских случайных величин. В рассматриваемом примере число вызовов генератора $N_S \approx 10^5$ (для $N_{tr} = 10^4$) и $N_p \approx 10^6$ (для $N_{tr} = 10^5$). Как видно из таблицы 4.29 время вызова генераторов RAND незначительно, по сравнению со временем счета.

Для моделирования пуассоновского точечного потока алгоритмами 1 и 2 используются «длинные» серии независимых выборочных значений бернуллиевских случайных величин $\{\eta^{(i)}\}$. Только в алгоритме 1 для моделирования каждой бернуллиевской случайной величины требуется вызов генератора, а в алгоритме 2 - возможно многократное использование одного и того же псевдослучайного числа.

Расчёты показали, что при моделировании пуассоновского точечного потока более экономичным является многократное использование одного и того же псевдослучайного числа генератора RND128, чем однократное использование псевдослучайного числа, полученного с помощью генератора RAND.

Проведенные расчеты подтверждают статистическую адекватность предложенного метода. Многократное использование одного и того же псевдослучайного числа при моделировании пуассоновского точечного потока показало, что результаты совпадают в пределах статистической погрешности.

Предложенная модификация алгоритма 1 позволяет существенно уменьшить время счета в задачах, когда затрачиваемое время моделирования псевдослучайных чисел при использовании проверки условия (4.5) сравнимо с общим временем счета. Сравнение 4-х вариантов модифицированного алгоритма на таких задачах позволяет сделать вывод, что для уменьшения трудоемкости вычислений достаточно использо-

вать построение десяти случайных чисел по одному псевдослучайному числу.

Сравнение проведенных расчетов с применением генератора RND128 и генератора RAND показало, что при моделировании пуассоновского точечного потока, более экономичным является многократное использование одного и того же псевдослучайного числа генератора RND128, чем однократное использование псевдослучайного числа, полученного с помощью генератора RAND.

Построенный алгоритм 2 может быть применен как при решении задач анализа, синтеза, фильтрации, так и при решении задачи прогнозирования [312] для стохастических систем диффузионно - скачкообразного типа.

4.4. Сравнительный анализ алгоритмов моделирования ССС

4.4.1. Численный анализ систем с распределенными переходами

В предыдущей главе были построены статистические алгоритмы моделирования систем с распределенными переходами. В данном параграфе проведем численные испытания построенных алгоритмов с использованием метода (1.61) на системах со случайной структурой с распределенными независимыми и зависимыми от времени переходами.

Пример 1. Линейная система имеет две структуры, каждая из которых описывается уравнением первого порядка с различным коэффициентом усиления

$$dy(t) = (-b^{(l)}y + c)dt + \sigma dw(t), \quad c = \text{const} > 0, \quad l = 1, 2. \quad (4.13)$$

Переход от первой структуры ко второй и обратно происходит путем переключения коэффициента усиления b в случайные моменты времени. Нормированные функции поглощения имеют вид

$$\nu_{12}(t, \mathbf{y}) = \nu_{12}(t)p_1^{(1)}(t, \mathbf{y}), \quad \nu_{21}(t, \mathbf{y}) = \nu_{21}(t)p_1^{(2)}(t, \mathbf{y}).$$

Требуется определить: вероятностные моменты координаты y ; вероятности пребывания системы в первом и втором состояниях; функции плотности вероятности распределения времени перехода; числовые вероятностные характеристики времени перехода системы из первого состояния во второе и обратно.

Первые два момента и вероятности состояния удовлетворяют следующим ОДУ [143]:

$$\begin{aligned} \dot{m}^{(1)} &= -b^{(1)} \cdot m^{(1)} - \nu_{21}(m^{(1)} - m^{(2)})P^{(2)}/P^{(1)} + c, \\ \dot{m}^{(2)} &= -b^{(2)} \cdot m^{(2)} - \nu_{12}(m^{(2)} - m^{(1)})P^{(1)}/P^{(2)} + c, \\ \dot{D}^{(1)} &= -2b^{(1)} \cdot D^{(1)} + \sigma^2 - \nu_{21}(D^{(1)} - D^{(2)})P^{(2)}/P^{(1)}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned}\dot{D}^{(2)} &= -2b^{(2)} \cdot D^{(2)} + \sigma^2 - \nu_{12}(D^{(2)} - D^{(1)})P^{(1)}/P^{(2)}, \\ \dot{P}^{(1)} &= -P^{(1)}\nu + \nu_{21}, \quad \nu = \nu_{12} + \nu_{21}, \quad P^{(2)} = 1 - P^{(1)}.\end{aligned}$$

Рассмотрим постоянные интенсивности перехода и параметры:

$$b^{(1)} = 1, \quad b^{(2)} = 2, \quad c = 1/2, \quad \sigma = 1, \quad y_0 = 1, \quad (4.15)$$

$$\nu_{12} = 0.02, \quad \nu_{21} = 0.01. \quad (4.16)$$

При численном решении СДУ обобщенным методом типа Розенброка (1.61) процесс номера структуры моделировался алгоритмом 1а из параграфа 3.3. В этой задаче существует установившийся режим, для которого $P^{(1)} = 1/3$, $P^{(2)} = 2/3$. Так как интенсивности перехода малы, для выхода в установившийся режим задачу приходится решать на длительном временном интервале $[0, 200]$. Метод (1.61) является асимптотически несмещенным, поэтому шаг вычислений можно было взять достаточно большим: $h = 0.1$. Для оценки функционалов от решения моделировалось $N = 10^5$ траекторий.

На рис. 4.11 приведены графики точных значений безусловных величин: математического ожидания (тонкая линия) и дисперсии (жирная линия). Полученные методом (1.61) оценки этих величин обозначены точками. На рис. 4.12 приведены графики точных значений вероятности нахождения системы в первом состоянии (тонкая линия) и вероятности нахождения системы во втором состоянии (жирная линия). Полученные методом (1.61) оценки этих величин обозначены точками. Вычисленные значения сильно совпадают с точными, поэтому графики практически сливаются.

На рис. 4.13 приведены плотность вероятности распределения времени перехода из первого состояния (жирная линия) и ее оценка – гистограмма, полученная методом (1.61) (тонкая линия). На рисунке видно их хорошее совпадение.

Были получены следующие оценки математического ожидания времени перехода из первого состояния во второе и обратно: $\tilde{m}_t^{(1)} = 21.47$,

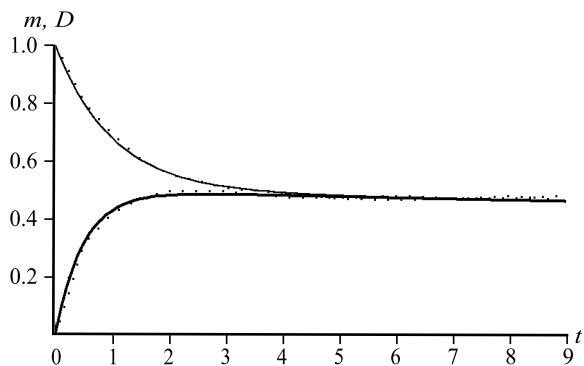


Рис. 4.11. Безусловные моменты (пример 1)

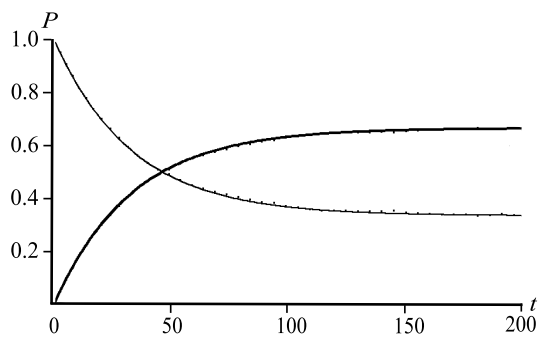


Рис. 4.12. Вероятности состояний (пример 1)

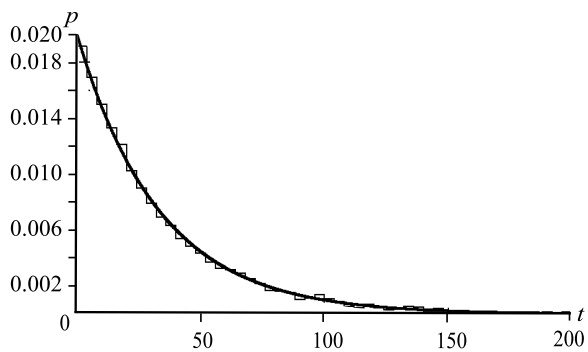


Рис. 4.13. Плотность вероятности времени перехода из первого состояния

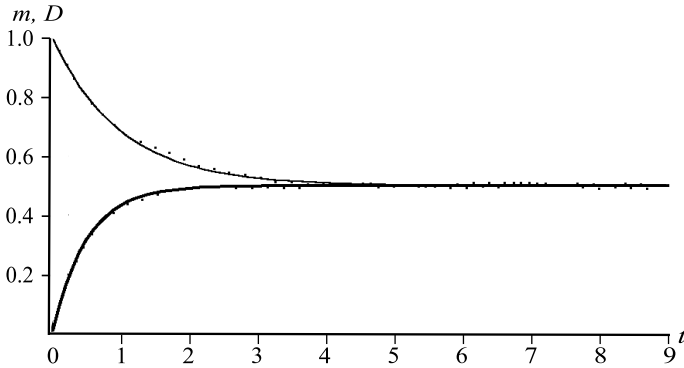


Рис. 4.14. Моменты для первой структуры (пример 2)

$\tilde{m}_t^{(2)} = 21.47$. Точные значения равны $m_t^{(1)} = m_t^{(2)} = 22.2(2)$. Относительная ошибка равна 3 %.

Пример 2. Задача (4.13), (4.15) из примера 1, но с интенсивностями перехода, зависящими от времени:

$$\nu_{12}(t) = 0.02(1 - e^{-t}), \nu_{21}(t) = 0.1(1 - e^{-0.01t}).$$

Требуется определить вероятности пребывания системы в первом и втором состояниях и вероятностные моменты координаты Y .

Эта задача была просчитана с использованием алгоритма 1b из параграфа 3.3, для определения номера структуры, с шагом $h = 0.1$, моделировалось 10^5 траекторий. На рис. 4.14 приведены графики точного математического ожидания (тонкая линия) и точной дисперсии (жирная линия) для первой структуры. Полученные методом (1.61) оценки этих величин обозначены точками.

На рис. 4.15 приведены графики точных значений вероятности нахождения системы в первом состоянии (тонкая линия) и вероятности нахождения системы во втором состоянии (жирная линия). Полученные методом (1.61) оценки этих величин обозначены точками.

Изменение интенсивностей перехода существенно повлияло на вероятности состояния и почти не изменило вероятностные моменты. Так

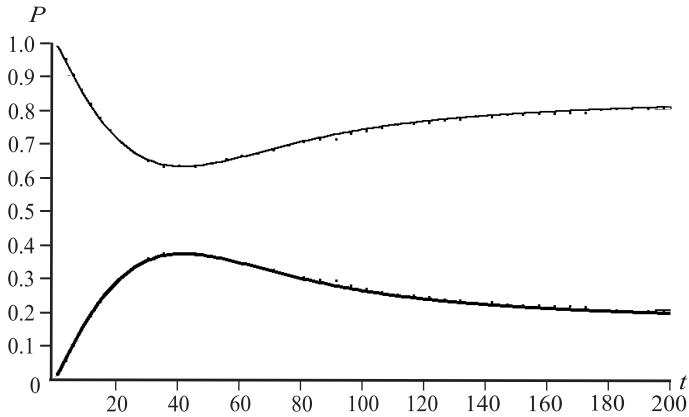


Рис. 4.15. Вероятности состояний (пример 2)

же, как и в предыдущем примере, при вычислении вероятностных моментов максимальная относительная ошибка составила 2.5 %, а при вычислении вероятностей состояния – 1 %.

Проведенные тестовые расчеты показали, что данный алгоритм позволяет с высокой точностью вычислять вероятностные характеристики решения динамических систем со случайной структурой с распределенными независимыми и зависимыми от времени переходами [3].

В качестве примера для проверки статистического алгоритма из параграфа 3.3.2, предназначенного для решения систем с переменной интенсивностью перехода, рассмотрим задачу с известным аналитическим решением [145], которая отражает основные особенности динамических систем с условной марковской структурой:

- скачкообразный характер случайных процессов,
- статистическую зависимость переходов от значений переменных.

Нас будут интересовать:

- точность вычисления распределения предложенным алгоритмом,
- как влияет на вид распределения зависимость интенсивностей от вектора состояния системы.

Спектральный метод не смог просчитать системы с условной марковской структурой ввиду зависимости интенсивностей от вектора состояния.

Рассмотрим непрерывную линейную систему с условно марковской структурой [145]. Система описывается уравнением

$$dy(t) = a^{(l)}(-y + u^{(l)})dt, \quad l = 1, 2, 3, \quad (4.17)$$

$$a^{(1)} = a^{(2)} = a; \quad a^{(3)} = 0; \quad u^{(1)} = u_1; \quad u^{(2)} = -u_2; \quad u^{(3)} = u_1 \cup u_2.$$

В третьем состоянии система нейтральна ($a^{(3)} = 0$). Дискретный процесс $s(t)$ – непрерывная условная марковская цепь с тремя состояниями, заданная условными интенсивностями переходов $\nu_{lr}(t, y)$:

$$\nu_{12}(t, y) = \nu_1, \quad \nu_{13}(t, y) = \begin{cases} \lambda_1, & b_1 < y < 2u_1 - b_1; \\ \lambda_2, & y \leq b_1, y \geq 2u_1 - b_1; \end{cases} \quad (4.18)$$

$$\nu_{21}(t, y) = \nu_2, \quad \nu_{23}(t, y) = \begin{cases} \lambda_1, & -2u_2 + b_2 < y < -b_2; \\ \lambda_2, & y \leq -2u_2 + b_2, y \geq -b_2; \end{cases}$$

$$\nu_{31}(t, y) = \begin{cases} \frac{\omega_2 \nu_2}{\nu_1 + \nu_2}, & b_1 < y < 2u_1 - b_1; \\ \frac{\omega_1 \nu_2}{\nu_1 + \nu_2}, & y \leq b_1, \quad y \geq 2u_1 - b_1; \end{cases}$$

$$\nu_{32}(t, y) = \begin{cases} \frac{\omega_2 \nu_1}{\nu_1 + \nu_2}, & -2u_2 + b_2 < y < -b_2; \\ \frac{\omega_1 \nu_1}{\nu_1 + \nu_2}, & y \leq -2u_2 + b_2, \quad y > -b_2; \end{cases}$$

где $b_1 = u_1 - \delta_0$, $b_2 = u_2 - \delta_0$; $b_1, b_2, u_1, u_2, \delta_0, \nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2, \omega_1, \omega_2$ – заданные константы. Требуется найти условные (при фиксированных состояниях структуры) и безусловный законы распределения процесса $y(t)$ в установившемся режиме. Точные выражения для стационарных (установившихся) условных и безусловных плотностей вероятности можно найти в [145] (стр. 180). Так как в общем случае выражения для плотностей являются достаточно громоздкими, приведем их вид, когда интенсивности перехода не зависят от фазовых координат ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$).

Стационарная безусловная плотность вероятности определяется формулой

$$p_1(y) = \begin{cases} C(u_2 + y)^{\alpha-1}(u_1 - y)^{\beta-1}, & y \in [-u_2, u_1], \\ 0, & y \notin [-u_2, u_1], \end{cases} \quad (4.19)$$

$$\alpha = \frac{1}{a} \left(\frac{\lambda \nu_1}{\nu_1 + \nu_2} + \nu_2 \right), \quad \beta = \frac{1}{a} \left(\frac{\lambda \nu_2}{\nu_1 + \nu_2} + \nu_1 \right),$$

где C – неопределенная постоянная, которая находится из условия нормировки $p_1(y)$.

Стационарные условные плотности вероятности процесса $y(t)$ имеют вид:

$$p_1^{(1)}(y) = Cg_1 \frac{\omega(u_2 + y)^\alpha(u_1 - y)^{\beta-1}}{(u_1 + u_2)(\omega + \lambda)}, \quad y \in [-u_2, u_1], \quad g_1 = 1;$$

$$p_1^{(2)}(y) = Cg_2 \frac{\omega(u_2 + y)^{\alpha-1}(u_1 - y)^\beta}{(u_1 + u_2)(\omega + \lambda)}, \quad y \in [-u_2, u_1], \quad g_2 = 1;$$

$$p_1^{(3)}(y) = Cg_3 \frac{\lambda(u_2 + y)^{\alpha-1}(u_1 - y)^{\beta-1}}{(\omega + \lambda)}, \quad y \in [-u_2, u_1], \quad g_3 = 1;$$

$$p_1^{(1)}(y) = p_2^{(1)}(y) = p_3^{(1)}(y) = 0, \quad y \notin [-u_2, u_1].$$

Из вида стационарных плотностей вероятностей можно сделать следующие выводы:

- даже в случае линейной системы с марковской структурой и при гауссовских начальных распределениях стационарные условные и безусловные распределения процесса $y(t)$ будут негауссовскими (при $u_1 = 1, u_2 = 0$ распределения являются β -распределениями);
- в системах с условной марковской структурой, где переходы из одного состояния в другое неоднородны по области изменения фазовых координат, отклонение законов распределения от гауссовского еще более выражено. В случае зависимости от y интенсивностей перехода аналитический вид плотностей сохраняется, но коэффициенты g_1, α и β становятся разрывными и зависят от y [145].

Так как структуры заданы линейными СДУ с нулевым шумом, то для численного решения систем СДУ использовался численный метод решения ОДУ – классический метод Рунге – Кутты четвертого порядка. Посмотрим, как предложенный алгоритм из параграфа 3.3.2, использующий для моделирования процесса номера структуры алгоритм 1b из параграфа 3.3, будет оценивать распределение решения. Задача (4.17)–(4.18) была просчитана на интервале $[0, 200]$ с шагом $h = 0.05$. Стационарные характеристики решения оценивались в последней точке. При численном решении задавались:

$$a = 1, \quad b_1 = 2, \quad b_2 = 1, \quad u_1 = 4, \quad u_2 = 3, \quad \delta_0 = 2, \quad y(0) = 1, \quad l(0) = 1.$$

Для оценки функционалов от решения моделировалось 10^6 траекторий. Было просчитано два теста.

Пример 3. Дискретный процесс $l(t)$ – непрерывная марковская цепь с тремя состояниями, заданная постоянными интенсивностями переходов (4.18), где

$$\nu_1 = 1.5, \quad \nu_2 = 1.1, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0.3, \quad \omega_1 = \omega_2 = 0.5.$$

На рис. 4.16–4.19 приводятся точные графики стационарных плотностей вероятности и полученные гистограммы при $T = 200$. Точное распределение хорошо согласуется с результатами вычислений.

Также оценивались стационарные вероятности состояния. В установленном режиме $P^{(1)} = 0.274$ (0.263), $P^{(2)} = 0.351$ (0.364), $P^{(3)} = 0.375$ (0.373). В скобках указаны полученные оценки. Максимальная относительная ошибка составила 4 %.

Пример 4. Дискретный процесс $l(t)$ – непрерывная условная марковская цепь с тремя состояниями, заданная условными интенсивностями переходов (4.17), где

$$\nu_1 = 1.5, \quad \nu_2 = 1.1, \quad \lambda_1 = 0.1, \quad \lambda_2 = 0.3, \quad \omega_1 = 0.2, \quad \omega_2 = 0.5.$$

На рис. 4.20–4.23 приводятся точные графики стационарных плотностей вероятности и полученные гистограммы. Точные значения и полученные оценки стационарных вероятностей состояния равны: $P^{(1)} =$

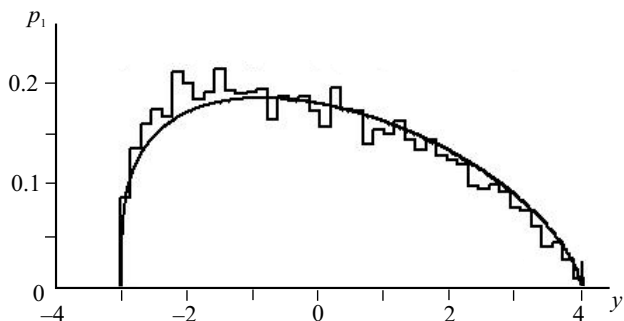


Рис. 4.16. Стационарная безусловная плотность вероятности и гистограмма ее оценки (Пример 3)

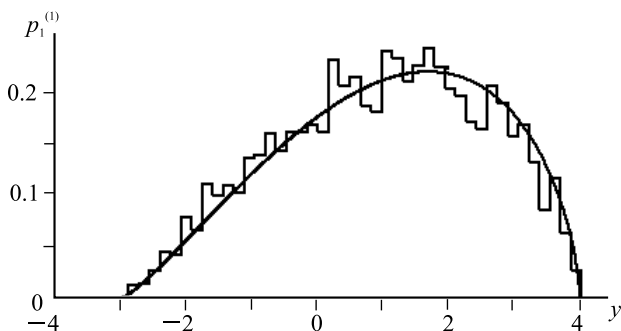


Рис. 4.17. Стационарная условная плотность вероятности 1-го состояния и гистограмма ее оценки (Пример 3)

0.222 (0.220), $P^{(2)} = 0.285$ (0.305), $P^{(3)} = 0.493$ (0.474). В скобках указаны полученные оценки. Максимальная относительная ошибка составила 7 %.

Из рисунков видно, что зависимость интенсивностей перехода от вектора состояния изменила вид плотности вероятности решения. Результаты численных экспериментов демонстрируют хорошее приближение распределения решения и универсальность статистического алгоритма.

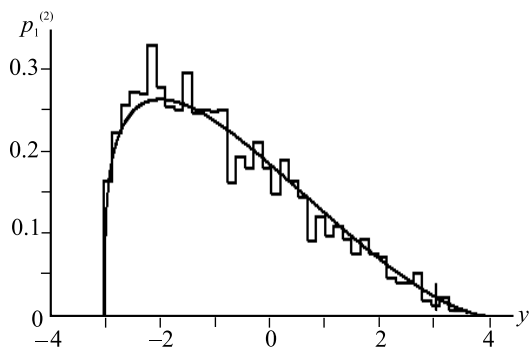


Рис. 4.18. Стационарная условная плотность вероятности 2-го состояния и гистограмма ее оценки (Пример 3)

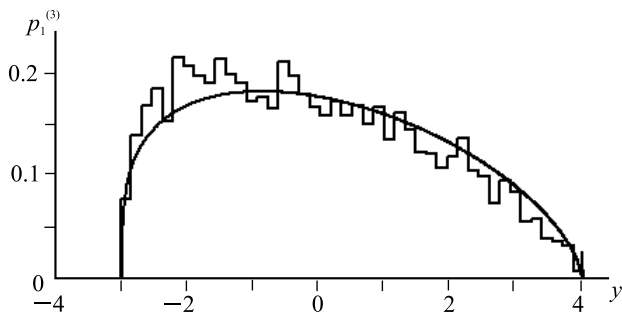


Рис. 4.19. Стационарная условная плотность вероятности 3-го состояния и гистограмма ее оценки (Пример 3)

4.4.2. Задачи управления техническими объектами. Сравнение со спектральным методом

Системы со случайной структурой являются математическими моделями мультирежимных стохастических систем автоматического управления, для которых характерно в случайные моменты времени скачкообразное изменение отдельных параметров или структуры, т. е. совокупности функциональных элементов и связей между ними.

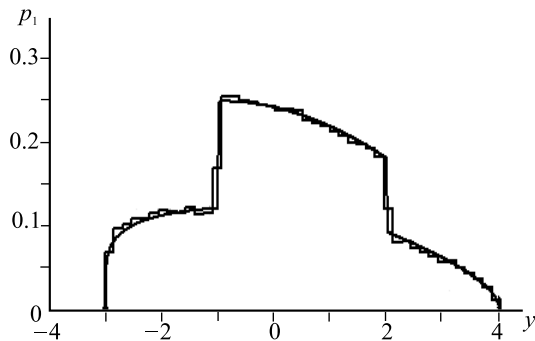


Рис. 4.20. Стационарная безусловная плотность вероятности и гистограмма ее оценки (Пример 4)

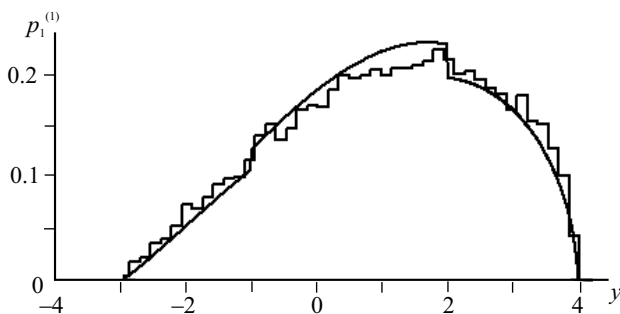


Рис. 4.21. Стационарная условная плотность вероятности 1-го состояния и гистограмма ее оценки (Пример 4)

Аналитическое решение для таких систем можно найти лишь в исключительных случаях. Поэтому рассмотренная ниже задача анализа систем управления ансамблем траекторий с учетом случайного изменения структуры будет просчитана построенным в параграфе 4.4 статистическим алгоритмом и спектральным методом. Параметры статистического алгоритма будут выбираться согласно условной оптимизации алгоритма. Будет проведено сравнение полученных результатов.

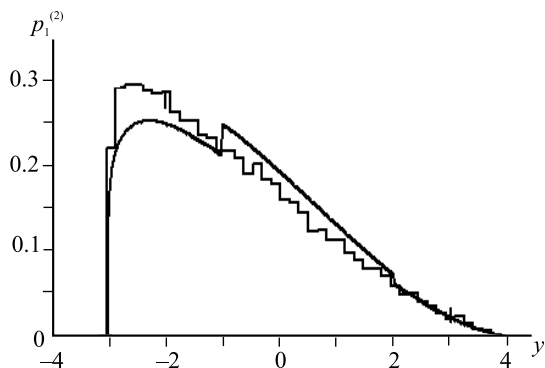


Рис. 4.22. Стационарная условная плотность вероятности 2-го состояния и гистограмма ее оценки (Пример 4)

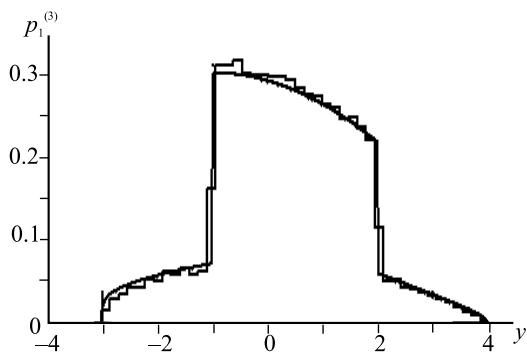


Рис. 4.23. Стационарная условная плотность вероятности 3-го состояния и гистограмма ее оценки (Пример 4)

Метод статистического моделирования основан на непосредственном моделировании системы управления при воздействии случайных возмущений с последующей статистической обработкой результатов. В основе спектрального метода [202] лежит переход к детерминированной задаче (к решению обобщенных уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова) с последующей параметризацией плотности вероятности вектора состо-

яния системы. Оба метода позволяют оценивать любые вероятностные характеристики выходных процессов, в том числе и плотность вероятности.

Применение методов статистического моделирования и спектрального метода при анализе систем с распределенными переходами имеет ряд преимуществ по сравнению с другими приближенными методами [145, 226], например, методами функциональной аппроксимации (метод ортогонального разложения, метод полигауссовой аппроксимации), позволяющими перейти от обобщенных уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова к системе обыкновенных дифференциальных уравнений достаточно большой размерности для коэффициентов некоторого функционального ряда, аппроксимирующего плотность вероятности или характеристическую функцию. Другие подходы, а именно методы гауссовой и двухмоментной параметрической аппроксимации, требуют задания структуры априори неизвестной плотности вероятности.

Вопросы, связанные с актуальностью разработки и применения малых искусственных спутников стандарта CubeSat (наноспутников и пикоспутников), достаточно подробно освещены в работах [180, 310, 366]. В качестве примеров можно привести международную систему Disaster Monitoring Constellation, позволяющую производить мониторинг катастроф по всему миру; проект AAUSAT, предназначенный для получения детальных изображений Земли; норвежский спутник nCube, отслеживающий перемещение кораблей по территориальным водам Норвегии; спутник UWE-1 (Вюрцбургский университет), позволяющий анализировать использование технологий TCP/IP для телеметрических и телекомандных данных с учетом проблем задержек и помех; японский проект XI, созданный для демонстрации и тестирования систем спутниковой платформы с использованием готовых элементов, включая проверку аппаратуры спутника в условиях реального орбитального полета.

Учет возможных отказов управляющего устройства (например, срывов стабилизации) в случайные моменты времени приводит к необходимости использования моделей систем со случайной структурой [145].

Рассматривается модельная задача анализа системы стабилизации малого искусственного спутника, находящегося под действием гравитационного и управляющего моментов, с учетом возможного отказа управляющего устройства. Отметим, что задача рассматривается как задача анализа нелинейных систем управления ансамблем траекторий [215] с учетом случайного изменения структуры системы.

Наряду с оценкой точности нахождения вероятностных характеристик приведено время, затрачиваемое на решение задачи (для расчетов использовался ПК с процессором Intel Celeron 2 ГГц и 256 МБ оперативной памяти). Для решения этой задачи применяются два метода: построенный метод статистического моделирования, основанный на моделировании траекторий системы управления, и спектральный метод [202]. Так как точное решение неизвестно, то совпадение численных решений, полученных разными методами, позволяет судить о точности решения задачи.

Расчет задачи анализа системы стабилизации

Возмущенное движение спутника, находящегося под действием гравитационного и управляющего моментов, в плоскости орбиты описывается следующими уравнениями:

$$\frac{d\theta(\tau)}{d\tau} = q(\tau), \quad \frac{dq(\tau)}{d\tau} = -3\Omega^2\beta \sin\theta(\tau) \cos\theta(\tau) + Lv(\tau),$$

где θ – угол отклонения оси спутника по отношению к радиус-вектору центра масс, q – угловая скорость вращения вокруг центра масс, Ω – угловая скорость обращения спутника по круговой орбите, L и β – константы, зависящие от конструкции спутника, v – управление [126].

В [366] показано, что при малых колебаниях спутника с учетом возможного отказа управляющего устройства его движение приближенно описывается уравнениями

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = y_2(t), \quad \frac{dy_2(t)}{dt} = -y_1(t) + (2 - k)u(t), \quad k = 1, 2,$$

где $\tau = \alpha t$, $\theta = \gamma y_1$ и $q = \delta y_2$, а числа α , γ и δ выбраны таким образом, что

$$\frac{\alpha\delta}{\gamma} = 1, \quad \frac{3\Omega^2\beta\alpha\gamma}{\delta} = 1, \quad \frac{\alpha L}{\delta} = 1, \quad t \in [0, 1].$$

Случай $k = 1$ соответствует режиму нормального функционирования, а случай $k = 2$ – режиму отказа, т. е. срыву стабилизации.

Будем предполагать, что начальные условия $y_{10} = y_1(0)$ и $y_{20} = y_2(0)$ принадлежат некоторому ограниченному множеству $\Omega \in R^2$, характеризующему неопределенность задания начальных данных, и описывающему заданной плотностью распределения $p_0(y_1, y_2)$. При отсутствии информации о законе распределения величин y_{10} и y_{20} можно положить

$$p_0(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{1}{\text{mes } \Omega}, & (y_1, y_2) \in \Omega, \\ 0, & (y_1, y_2) \notin \Omega. \end{cases}$$

В случайные моменты времени возможен отказ управляющего устройства с последующим восстановлением режима нормального функционирования. Интенсивности отказа и восстановления в общем случае зависят от времени и задаются функциями $\lambda_{12}(t)$ и $\lambda_{21}(t)$ соответственно [145]. В начальный момент времени система функционирует нормально с вероятностью $P_0^{(1)} < 1$. Таким образом, параметр k принимает значения дискретного случайного процесса $s(t)$ с двумя состояниями.

Задача анализа системы стабилизации заключается в нахождении ненормированных плотностей распределения

$$p^{*(1)}(t, y_1, y_2), \quad p^{*(2)}(t, y_1, y_2)$$

вектора состояния $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2]^T$ по заданным характеристикам: начальной плотности $p_0(y_1, y_2)$, вероятности $P_0^{(1)}$ нормального функционирования системы в начальный момент времени, интенсивностям $\lambda_{12}(t)$ и $\lambda_{21}(t)$.

Ненормированные плотности распределения удовлетворяют следующей системе обобщенных уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова:

$$\frac{\partial p^{*(1)}(t, y_1, y_2)}{\partial t} = -y_2 \frac{\partial p^{*(1)}(t, y_1, y_2)}{\partial y_1} - \frac{\partial((-y_1 + u(t))p^{*(1)}(t, y_1, y_2))}{\partial y_2} -$$

$$\begin{aligned}
& -\lambda_{12}(t)p^{*(1)}(t, y_1, y_2) + \lambda_{21}(t)p^{*(2)}(t, y_1, y_2), \\
\frac{\partial p^{*(2)}(t, y_1, y_2)}{\partial t} &= -y_2 \frac{\partial p^{*(2)}(t, y_1, y_2)}{\partial y_1} + y_1 \frac{\partial p^{*(2)}(t, y_1, y_2)}{\partial y_2} - \\
& -\lambda_{21}(t)p^{*(2)}(t, y_1, y_2) + \lambda_{12}(t)p^{*(1)}(t, y_1, y_2), \\
p^{(1)}(0, y_1, y_2) &= P_0^{(1)}p_0(y_1, y_2), \quad p^{(2)}(0, y_1, y_2) = (1 - P_0^{(1)})p_0(y_1, y_2).
\end{aligned}$$

В качестве конкретного численного примера рассмотрим задачу нахождения вероятностей $P^{(k)}(t)$ работы системы в режимах нормального функционирования и срыва стабилизации, маргинальных плотностей вероятности $p_i(t, y_i)$, математических ожиданий $m_i(t)$ и вторых начальных моментов $\Psi_i(t)$ координат вектора состояния:

$$\begin{aligned}
P^{(k)}(t) &= \int_{R^2} p^{*(k)}(t, y_1, y_2) dy_1 dy_2, \quad k = 1, 2; \\
p_1(t, y_1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(t, y_1, y_2) dy_2, \quad p_2(t, y_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t, y_1, y_2) dy_1; \\
m_i(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y_i p_i(t, y_i) dy_i, \quad \Psi_i(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y_i^2 p_i(t, y_i) dy_i, \quad i = 1, 2,
\end{aligned}$$

где $p(t, y_1, y_2) = p^{*(1)}(t, y_1, y_2) + p^{*(2)}(t, y_1, y_2)$ – плотность вероятности вектора состояния. Пусть y_{10} и y_{20} являются независимыми случайными величинами, имеющими усеченное нормальное распределение с параметрами $m_{10} = -0.3$, $D_{10} = 1$ и $m_{20} = 0.1$, $D_{20} = 1$ соответственно, т. е.

$$p_0(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\gamma} \exp\left(-\frac{(y_1 + 0.3)^2 + (y_2 - 0.1)^2}{2}\right), & (y_1, y_2) \in \Omega, \\ 0, & (y_1, y_2) \notin \Omega, \end{cases}$$

где

$$\gamma = \int_{\Omega} \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{(y_1 + 0.3)^2 + (y_2 - 0.1)^2}{2}\right) dy_1 dy_2, \quad \Omega = [-5, 5] \times [-5, 5].$$

Управляющее воздействие задано соотношением

$$u(t) = -0.2(1 - \operatorname{tg} 1 - 2 \operatorname{tg}^2 1) \cos t - 0.2(3 + 3 \operatorname{tg} 1 + 2 \operatorname{tg}^2 1) \sin t \quad (4.20)$$

и в среднем обеспечивает минимальный расход энергии, а также стабилизацию спутника в момент времени $t = 1$, т. е. математические ожидания величин $y_1(1)$ и $y_2(1)$ равны нулю. Интенсивности отказа и восстановления заданы функциями $\lambda_{12}(t) = 0.2$ и $\lambda_{21}(t) = 0.1$ соответственно. В начальный момент времени система функционирует нормально с вероятностью $P_0^{(1)} = 0.95$.

При решении задачи методом статистического моделирования использовались алгоритм 1а (см. параграф 4.3) и метод типа Розенброка (1.61) с шагом $h = 0.01$; число моделируемых траекторий $N = 10^6$; для построения гистограммы отрезок $[-4, 4]$ изменения координат вектора состояния равномерно разбивался на 100 частей. Оценки функционалов от решения и гистограммы вычислялись одновременно. Время счета составило 3 минуты. Погрешность вычисления функционалов от решения составляет $O(h)$ (для получения такой точности достаточно было брать $N = 10^4$). Выбранные параметры задачи ($N = 10^6$, $h = 10^{-2}$, $n_g = 100$) являются оптимальными параметрами для получения наилучшей оценки гистограммы при выбранном шаге $h = 10^{-2}$ и гарантируют погрешность вычисления гистограммы в норме пространства $L_2([-\infty, \infty])$ порядка $O(h)$. Дальнейшее уменьшение шага гистограммы или шага численного метода точность вычисления гистограммы не увеличивает. Дополнительные расчеты проводились при $h = 10^{-2}$ и $n_g = 500$, а также при $h = 10^{-3}$ и $n_g = 500$. Погрешность гистограммы не уменьшается, хотя время вычислений увеличивается (при $h = 10^{-3}$ в 10 раз).

При получении искомым характеристикам спектральным методом в качестве базисной системы для представления функций времени были выбраны полиномы Лежандра (порядок усечения $L_0 = 8$), а в качестве базисных систем для представления функций координат вектора состояния – функции Эрмита (порядки усечения $L_1 = L_2 = 12$). Время счета составило 8 минут. Дальнейшее небольшое увеличение порядков усечения спектральных характеристик ($L_1 = L_2 = 16$) практически не отражается на точности решения.

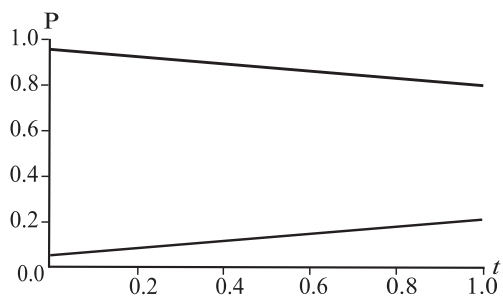


Рис. 4.24. Вероятности режимов работы системы стабилизации

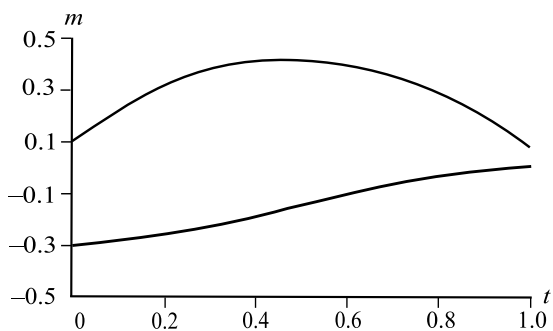


Рис. 4.25. Математические ожидания координат вектора состояния

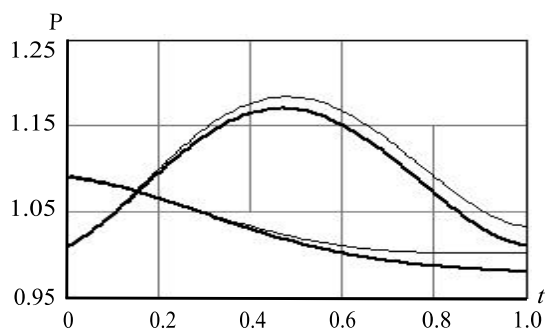


Рис. 4.26. Вторые начальные моменты координат вектора состояния

Результаты расчетов представлены на рис. 4.24–4.26 (тонкой линией показаны характеристики, полученные методом статистического моделирования, а толстой – характеристики, полученные спектральным методом). Графики демонстрируют практически полное совпадение численных решений, полученных обоими методами, для математических ожиданий координат вектора состояния и небольшие расхождения для вторых начальных моментов. Эти расхождения обусловлены тем, что в спектральном методе искомые ненормированные плотности распределения аппроксимируются функциями, представляющими собой произведение плотности нормального распределения по y_1, y_2 и полинома переменных t, y_1, y_2 , порядок которого определяется усечениями спектральных характеристик. При этом неизбежны колебания плотности вблизи нуля, и условие нормировки оказывается лишь приближенным, что в первую очередь отражается на точности вычисления моментов вектора состояния (особенно моментов высокого порядка) при небольших порядках усечения спектральных характеристик.

Из проведенных численных экспериментов видно, что оба метода обеспечивают достаточную для приложений точность анализа систем управления ансамблем траекторий с учетом случайного изменения структуры. Точность оценок, полученных методом статистического моделирования, зависит от шага интегрирования h и числа моделируемых траекторий N . Точность оценок, полученных спектральным методом, зависит от выбора базисных систем и порядков усечения L_0, \dots, L_n .

Погрешность метода статистического моделирования можно оценить, не пользуясь точным решением. Поэтому погрешность спектрального метода можно контролировать с помощью метода статистического моделирования. На данной задаче при сравнимых погрешностях время счета спектрального метода существенно больше (почти в три раза), чем у метода статистического моделирования.

Рассмотрим еще два примера. Получить точное решение задачи анализа в рассматриваемых ниже модельных примерах затруднительно. Однако для вероятностей $P^{(l)}(t)$, а в линейном случае и для момен-

тов вектора состояния, можно найти аналитическое выражение. Поэтому, как и в предыдущем случае, рассмотренные ниже примеры будут просчитаны построенным статистическим алгоритмом и спектральным методом, а сравнение методов будет проводиться по точности оценки точных вероятностных характеристик.

Будем использовать два критерия для сравнения аналитического решения $\mu_T(t)$ и соответствующего приближенного решения $\mu_n(t)$:

$$J_1(\mu) = \max_{t_0 \leq t \leq T} |\mu_T(t) - \mu_n(t)| \quad \text{и} \quad J_2(\mu) = \left\{ \int_{t_0}^T |\mu_T(t) - \mu_n(t)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где в качестве функции $\mu(t)$ могут выступать вероятности $P^{(l)}(t)$ или моментные характеристики координат вектора состояния (заметим, что для метода статистического моделирования функция $\mu_n(t)$ определена только в узлах сетки).

Наряду с оценкой точности нахождения вероятностных характеристик будем приводить время, затрачиваемое на решение задачи (для расчетов использовался ПК с процессором Intel Celeron 2 ГГц и 256 МБ оперативной памяти).

Пример 1. Задача анализа релейной следящей системы управления [109], описываемой уравнением

$$dy(t) = -k \operatorname{sign} y(t) dt + dw(t), \quad y(0) = y_0,$$

где $t \in [0, 2]$; $y(t)$ характеризует точность системы; y_0 – случайная величина, имеющая гауссовское распределение с параметрами $m_0 = 0.5$ и $D_0 = 0.5$; $w(t)$ – одномерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от y_0 ($n = m = 1$).

Система может работать в двух режимах: при $k = 1$ имеем нормальный режим, при $k = -1$ – срыв слежения. В начальный момент времени система находится в режиме срыва слежения. Процесс перехода в нормальный режим работы и в режим срыва слежения определяется интенсивностями $\nu_{21}(t, y) = 0.6 \exp(-2t)$ и $\nu_{12}(t, y) = 1 - \exp(-t)$ соответственно. Следовательно, рассматриваемая система относится к классу систем с распределенными переходами, при этом

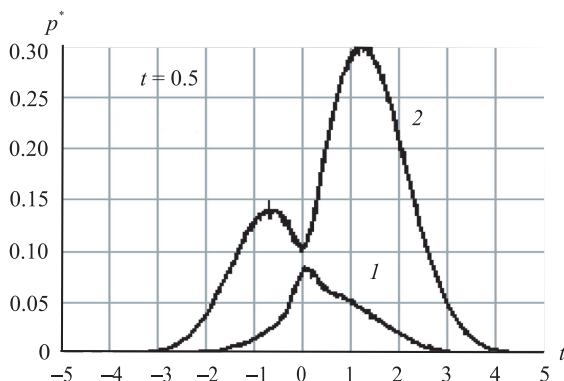


Рис. 4.27. Сечения ненормированных плотностей распределения $p^{*(1)}(t, y)$ и $p^{*(2)}(t, y)$ в момент времени $t = 0.5$ (для первой структуры – 1, для второй структуры – 2)

$$dy(t) = (2l - 3) \operatorname{sign} y(t) dt + dw(t), \quad y(0) = y_0,$$

где $l = 1$ и $l = 2$ соответствуют режимам нормального функционирования и срыва слежения, т. е. $s(t)$ является дискретным марковским процессом с двумя состояниями ($S = 2$), а ненормированные плотности распределения начального состояния y_0 имеют вид

$$p_0^{*(1)}(y) = 0, \quad p_0^{*(2)}(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-(y - 0.5)^2).$$

Требуется найти вероятности $P^{(l)}(t)$ работы системы в режимах нормального функционирования и срыва слежения, ненормированные плотности распределения $p^{*(l)}(t, y)$, а также математическое ожидание $m(t)$ и дисперсию $D(t)$ состояния системы; $l = 1, 2$.

Результат расчетов представлен на рис. 4.27–4.29 (тонкой линией показаны характеристики, полученные методом статистического моделирования, а толстой – спектральным методом).

При решении задачи методом статистического моделирования использовался метод Эйлера–Маруямы с шагом $h = 0.01$; число моделируемых траекторий $N = 10^6$; для построения гистограммы область

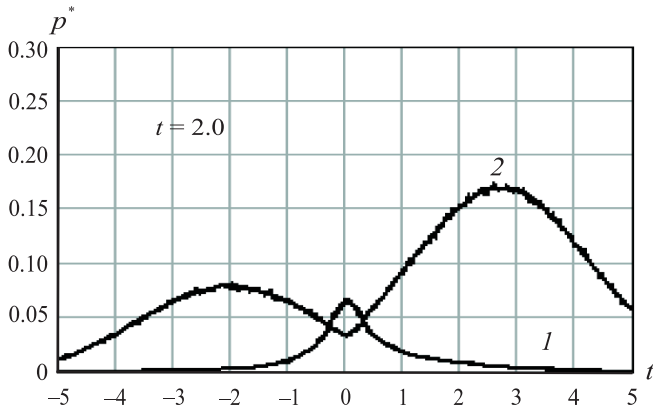


Рис. 4.28. Сечения ненормированных плотностей распределения $p^{*(1)}(t, y)$ и $p^{*(2)}(t, y)$ в момент времени $t = 2$ (для первой структуры – 1, для второй структуры – 2)

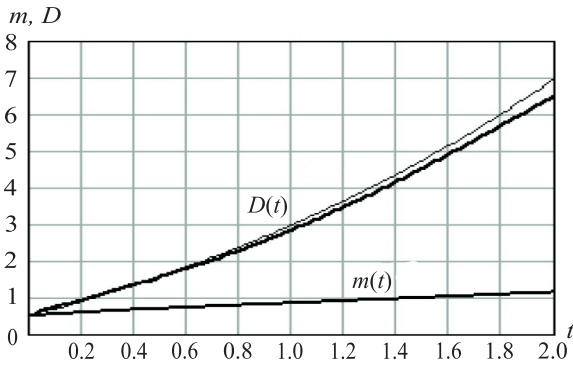


Рис. 4.29. Математическое ожидание $m(t)$ и дисперсия $D(t)$ состояния системы

изменения вектора состояния $[-5, 5]$ равномерно разбивалась на 100 частей. Для получения искоемых характеристик спектральным методом в качестве базисной системы $\{q_{i_0}(t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ выбраны полиномы Лежандра (порядок усечения $L_0 = 16$), а в качестве базисной системы $\{\chi_{i_1 \dots i_n}(\mathbf{y})\}_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$ — функции Эрмита с параметрами $m = 0$ и $D = 1/3$ [212] (порядок усечения $L_1 = 32$).

Погрешности вычисления вероятностей $P^{(1)}(t)$, $P^{(2)}(t)$ приведены в табл. 4.36 и 4.37 (через дробь даны значения для критериев J_1 и J_2 соответственно, $t_{\text{сч}}$ — время счета). Погрешности спектрального метода при других базисных системах приведены в табл. 4.38.

Пример 2. Упрощенная математическая модель стабилизации малого искусственного спутника, находящегося под действием гравитационного и управляющего моментов имеет вид [126, 366]

$$dy_1(t) = y_2(t)dt, \quad dy_2(t) = (-y_1(t) + u(t))dt + \sigma dw(t), \quad (4.21)$$

$$y_1(0) = y_{10}, \quad y_2(0) = y_{20}.$$

В модели (4.21) переменная $y_1(t)$ — угол отклонения оси спутника по отношению к радиус-вектору центра масс, $y_2(t)$ — угловая скорость вращения спутника вокруг центра масс; $t \in [0, 1]$; y_{10} и y_{20} являются независимыми случайными величинами, имеющими гауссовское распределение с параметрами $m_{10} = -0.3$, $D_{10} = 1$ и $m_{20} = 0.1$, $D_{20} = 1$ соответственно ($n = 2$, $m = 1$, $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), y_2(t)]^T$). В начале параграфа эта задача была рассмотрена при $\sigma = 0$. Сейчас мы рассмотрим ее при наличии случайных возмущений $\sigma = 0.1$.

Управляющее воздействие $u(t)$ задается соотношением (4.20) и в среднем обеспечивает стабилизацию спутника в момент времени $t = 1$, т. е. математические ожидания величин $y_1(1)$ и $y_2(1)$ равны нулю.

Рассмотрим ситуацию, когда в случайный момент времени возможен отказ управляющего устройства (срыв стабилизации) с последующим восстановлением режима нормального функционирования. Интенсивности отказа и восстановления задаются функциями $\nu_{12}(t, y_1, y_2) = 0.2$

Таблица 4.36. Погрешность метода статистического моделирования при различном объеме выборки

N	$J(P^{(1)})$	$J(P^{(2)})$	$t_{сч}$
10^4	0.010058/0.008888	0.010058/0.008888	1''
10^5	0.001200/0.000790	0.001200/0.000790	12''
10^6	0.000637/0.000607	0.000637/0.000607	2' 15''

Таблица 4.37. Погрешность спектрального метода при различных усечениях спектральных характеристик $(\{q_{i_0}(t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ – полиномы Лежандра, $\{\chi_{i_1 \dots i_n}(\mathbf{y})\}_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$ – функции Эрмита с параметрами $m = 0$ и $D = 1/3$)

(L_0, L_1)	$J(P^{(1)})$	$J(P^{(2)})$	$t_{сч}$
(16, 16)	0.012645/0.012749	0.109495/0.054063	4''
(16, 32)	0.006164/0.006450	0.008055/0.003501	1' 56''
(16, 48)	0.004141/0.004352	0.001620/0.001226	6' 10''

Таблица 4.38. Погрешность спектрального метода при различных усечениях спектральных характеристик $(\{q_{i_0}(t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ – косинусоиды, $\{\chi_{i_1 \dots i_n}(\mathbf{y})\}_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$ – функции Эрмита с параметрами $m = 0$ и $D = 1$)

(L_0, L_1)	$J(P^{(1)})$	$J(P^{(2)})$	$t_{сч}$
(16, 16)	0.026826/0.019491	0.021677/0.007139	4''
(16, 32)	0.026843/0.012002	0.024573/0.004660	1' 57''
(16, 48)	0.026866/0.008908	0.025313/0.004156	6' 20''

и $\nu_{21}(t, y_1, y_2) = 0.1$ соответственно. В начальный момент времени система функционирует нормально. Таким образом, данную систему управления можно рассматривать как систему со случайной структурой, описываемую уравнениями

$$dy_1(t) = y_2(t)dt, \quad dy_2(t) = (-y_1(t) + (2 - l)u(t))dt + 0.1dw(t),$$

$$y_1(0) = y_{10}, \quad y_2(0) = y_{20},$$

где $l = 1$ соответствует режиму нормального функционирования, а $l = 2$ – режиму срыва стабилизации, т. е. $s(t)$ представляет собой дискретный однородный марковский процесс с двумя состояниями ($S = 2$), а начальное состояние $\mathbf{y}_0 = [y_{10}, y_{20}]^T$ характеризуется ненормированными плотностями распределения

$$p_0^{*(1)}(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{(y_1 + 0.3)^2 + (y_2 - 0.1)^2}{2}\right), \quad p_0^{*(2)}(y_1, y_2) = 0.$$

Требуется найти вероятности $P^{(l)}(t)$ работы системы в режимах нормального функционирования и срыва стабилизации, маргинальные плотности вероятности $p_i(t, y_i)$ и математические ожидания $m_i(t)$ координат вектора состояния; $l = 1, 2$; $i = 1, 2$.

При решении задачи методом статистического моделирования использовались алгоритм 1а (см. параграф 3.3) и обобщенный метод типа Розенброка (1.61) с шагом $h = 0.001$; $N = 10^6$; для построения гистограммы область изменения координат вектора состояния $[-4, 4]$ равномерно разбивалась на 100 частей. Для получения искомым характеристик спектральным методом в качестве базисной системы $\{q_{i_0}(t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ выбраны полиномы Лежандра (порядок усечения $L_0 = 8$), а в качестве базисных систем $\{\chi_{i_1 \dots i_n}(\mathbf{y})\}_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty} X1$, $\{\chi_{i_1 \dots i_n}(\mathbf{y})\}_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty} X2$ – функции Эрмита с параметрами $m = 0$ и $D = 1$ (порядки усечения $L_1 = L_2 = 12$), т. е. $\chi_{i_1 i_2}(\mathbf{y}) = \chi_{i_1}^1(y_1) \chi_{i_2}^2(y_2)$; $i_1, i_2 = 0, 1, 2, \dots$

Метод двухмоментной параметрической аппроксимации [145] позволяет для данной задачи найти аналитическое решение для вероятностей $P^{(l)}(t)$ и моментов $m_i(t)$. Погрешность метода статистического моделирования приведена в табл. 4.39, 4.40, а спектрального метода – в табл. 4.41, 4.42. Обозначения такие же, как и в табл. 4.36–4.38.

При решении методом статистического моделирования оценки функционалов от решения и гистограммы вычислялись одновременно. Оптимальными параметрами для получения наилучшей оценки гистограммы при объеме выборки $N = 10^6$ являются $h = 10^{-2}$, $n_g = 10^2$. Дальнейшее уменьшение шага гистограммы или шага численного метода точность вычисления гистограммы не увеличивает. Дополнительные рас-

Таблица 4.39. Погрешность вычисления вероятностей состояния методом статистического моделирования при различных шаге и объеме выборки

h	N	$J(P^{(1)})$	$J(P^{(2)})$
0.01	10^4	0.007388/0.005135	0.007388/0.005135
0.01	10^6	0.001017/0.000547	0.001017/0.000547
0.001	10^4	0.003829/0.002083	0.003829/0.002083
0.001	10^6	0.000562/0.000332	0.000562/0.000332

Таблица 4.40. Погрешность вычисления математического ожидания методом статистического моделирования при различных шаге и объеме выборки

h	N	$J(m_1)$	$J(m_2)$	$t_{сч}$
0.01	10^4	0.021895/0.018748	0.022492/0.013881	1.5''
0.01	10^6	0.005661/0.002681	0.009814/0.006131	2' 37''
0.001	10^4	0.003802/0.002134	0.007895/0.007253	15''
0.001	10^6	0.000320/0.000236	0.001072/0.000601	25' 12''

Таблица 4.41. Погрешность вычисления вероятностей состояния спектральным методом при различных усечениях спектральных характеристик

(L_0, L_1, L_2)	$J(P^{(1)})$	$J(P^{(2)})$
(8, 8, 8)	0.012117/0.007337	0.002185/0.001039
(8, 12, 12)	0.001093/0.000584	0.000178/0.000080
(8, 16, 16)	0.000095/0.000046	0.000014/0.000006

Таблица 4.42. Погрешность вычисления математического ожидания спектральным методом при различных усечениях спектральных характеристик

(L_0, L_1, L_2)	$J(m_1)$	$J(m_2)$	$t_{сч}$
(8, 8, 8)	0.008719/0.005693	0.011070/0.008628	50''
(8, 12, 12)	0.001078/0.000728	0.001398/0.001076	8' 36''
(8, 16, 16)	0.000129/0.000086	0.000158/0.000121	59' 02''

четы проводились при $h = 10^{-2}$ и $n_g = 500$, а также при $h = 10^{-3}$ и $n_g = 500$. Погрешность гистограммы не уменьшается, хотя время вычислений увеличилось (при $h = 10^{-3}$ в 10 раз), что подтверждает полученные результаты.

При $h = 10^{-3}$ для вычисления функционалов от решения условно оптимальным является $N = 10^6$. Погрешности вычисления математических ожиданий функционалов от решения, согласно формуле (4.34), равны $\gamma = O(h)$. Приводимые в таблицах результаты численных экспериментов подтверждают полученные результаты и даже демонстрируют более высокую точность вычисления известных вероятностных характеристик решения тестовых примеров.

Алгоритмы нахождения вероятностей $P^{(l)}(t)$, маргинальных плотностей вероятности и моментных характеристик вектора состояния спектральным методом, а также алгоритмы вычисления спектральных характеристик операторов дифференцирования и умножения относительно различных базисных систем приведены в [202].

В основе спектрального метода лежит представление плотностей вероятности в виде обобщенных рядов Фурье, поэтому погрешность J_2 , как правило, существенно меньше погрешности J_1 , так как решение ищется в классе функций из $L_2([t_0, T] \times R^n)$ и, вообще говоря, не предполагает дальнейшего поточечного сравнения. Для метода статистического моделирования погрешности J_1 и J_2 почти не различаются.

Решение задачи анализа, полученное спектральным методом, представляет собой функции непрерывных аргументов t и y , но при этом такое решение может не удовлетворять условию нормировки (4.5) в отличие от решения, полученного методом статистического моделирования. Это в первую очередь отражается на точности вычисления моментов вектора состояния (особенно моментов высокого порядка) при небольших порядках усечения спектральных характеристик. Поэтому так же, как в примере 1, оценки математического ожидания $m(t)$, полученные обоими методами, полностью совпали, но оценка дисперсии $D(t)$, полученная спектральным методом, несколько отличается от оценки, полу-

ченной методом статистического моделирования (которая фактически совпадает с точной).

При сравнимых погрешностях время счета спектрального метода существенно больше, чем у метода статистического моделирования.

Значение результатов состоит в том, что оценки метода статистического моделирования являются асимптотически (по $h \rightarrow 0$) несмещенными, этим самым и обеспечивая контроль спектрального метода.

4.4.3. Сравнение с методом гауссовой аппроксимации

С помощью спектрального метода не удастся просчитать системы с сосредоточенными переходами ввиду наличия поглощения, зависящего от вектора состояния. В параграфе 3.5, были рассмотрены алгоритмы решения систем со случайной структурой с сосредоточенными переходами. Рассмотрим несколько примеров и результаты их численного решения с помощью предложенного статистического алгоритма моделирования систем с сосредоточенными переходами. Во всех примерах структуры заданы линейными СДУ с аддитивным шумом. Поэтому для численного решения систем СДУ в смысле Стратоновича использован метод (1.61) из семейства численных методов, рассмотренного в первой главе, так как в случае линейных систем СДУ с аддитивным шумом этот метод является асимптотически несмещенным и имеет второй порядок среднеквадратической сходимости.

Как и во всех предыдущих расчетах, при численной реализации метода (1.61) нормально распределенная случайная величина ζ с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией вычислялась по формуле

$$\zeta = \sqrt{-2 \ln \alpha_1} \cos 2\pi \alpha_2,$$

где α_1 и α_2 – независимые равномерно распределенные случайные величины на интервале $(0, 1)$ [135]; для моделирования равномерно распределенных случайных величин использовался датчик псевдослучайных чисел RAND [135].

Сравнение построенного алгоритма статистического моделирования систем со случайной структурой с сосредоточенными переходами с методом гауссовой аппроксимации проведем на примерах систем со случайной структурой, рассмотренных в [143].

Задача 1. *Процесс захвата с полным поглощением на границе.* Рассмотрим систему первого порядка, заданную уравнением

$$dY(t) = bYdt + \sigma dw(t), Y(0) = y_0, \quad (4.22)$$

где b, σ – заданные константы. В начальный момент времени система имеет детерминированную координату y_0 . При достижении координатой Y границы α происходят поглощение реализаций и переход системы в режим слежения. Требуется оценить вероятность захвата, плотность вероятности распределения времени захвата, нормированный поток поглощения и вероятностные моменты решения.

При отсутствии поглощения решением (4.22) будет гауссовский процесс с математическим ожиданием и дисперсией:

$$\begin{aligned} m(t) &= m(0)e^{bt}, \\ D(t) &= D(0)e^{2bt} + \frac{\sigma^2}{2b}(e^{2bt} - 1). \end{aligned} \quad (4.23)$$

При наличии поглощения для задачи (4.22) имеем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для моментов и вероятности состояния [143]:

$$\begin{aligned} \dot{m}(t) &= b \cdot m(t) - [\alpha - m(t)]F(t), \\ \dot{D}(t) &= 2b \cdot D(t) - [[\alpha - m(t)]^2 - D(t)]F(t) + \sigma^2(t), \\ \dot{P}^{(1)}(t) &= -P^{(1)}(t)F(t), \quad m(0) = y_0, \quad D(0) = 0, \quad P^{(1)}(0) = 1. \end{aligned} \quad (4.24)$$

В случае поглощения при $Y = \alpha$ нормированная функция потока поглощения $F(t)$ равна

$$F(t) = -\frac{\sigma^2}{2} \left[\frac{\partial p_1(Y, t)}{\partial Y} \right]_{Y=\alpha}, \quad (4.25)$$

так как

$$v(Y, t) = \delta(Y - \alpha) \left(b \cdot p_1(Y, t) - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial p_1(Y, t)}{\partial Y} \right), \quad u(Y, t) = 0. \quad (4.26)$$

В методе гауссовой аппроксимации плотность $p_1(Y, t)$ полагается усеченной гауссовой. При численных расчетах системы ОДУ (4.24) методом Рунге–Кутты четвертого порядка с шагом $h = 0.01$ производная функции $p_1(Y, t)$ в (4.25) заменялась конечной разностью. Вероятность захвата вычислялась по формуле

$$P(t) = 1 - P^{(1)}(t). \quad (4.27)$$

При численном решении задавались

$$b = 1, \quad \sigma = 1, \quad y_0 = 1, \quad \alpha = 2. \quad (4.28)$$

Задача (4.22), (4.28) была просчитана статистическим алгоритмом с шагом $h = 0.01$. Для оценки функционалов от решения моделировалось $N = 10^5$ траекторий. Траектория обрывалась при выходе численного решения на границу $\alpha = 2$.

На рис. 4.30–4.34 приводятся оценки вероятностных характеристик решения, вычисленные обоими методами. Оценки, полученные статистическим методом, изображены тонкими линиями, а оценки, полученные методом гауссовой аппроксимации, – жирными.

На рис. 4.35 приведены гистограмма нормированной функции плотности вероятности непоглощенных реализаций, полученная статистическим алгоритмом, и усеченная плотность вероятности нормального распределения, используемая в методе гауссовой аппроксимации (в момент $t = 1$ – тонкие линии, а в момент $t = 3$ – жирные). Из графиков видно, что плотность вероятности решения в случае задачи поглощения не является гауссовой и ее приближение усеченной гауссовой плотностью достаточно грубо.

Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод, что при вычислении интегральных характеристик решения оба метода дают хорошие оценки. Для вычисления плотности вероятности фазовых координат, а также вероятностных моментов – лучше использовать численные методы решения СДУ.

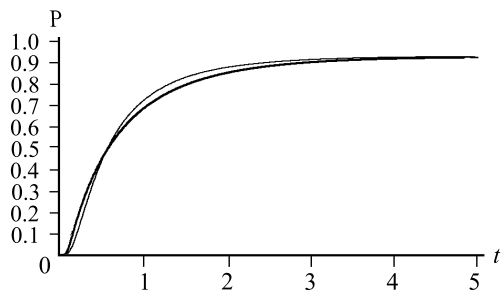


Рис. 4.30. Оценки вероятности захвата (задача 1)

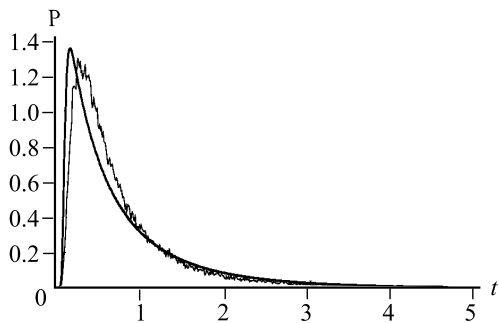


Рис. 4.31. Оценки плотности вероятности времени захвата (задача 1)

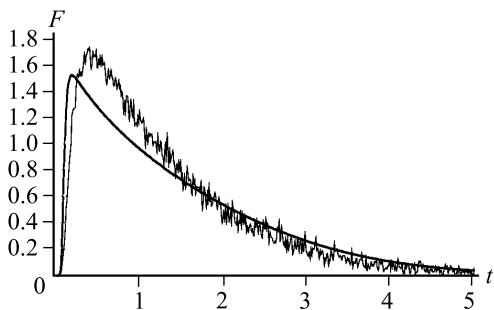


Рис. 4.32. Оценки нормированного потока поглощения (задача 1)

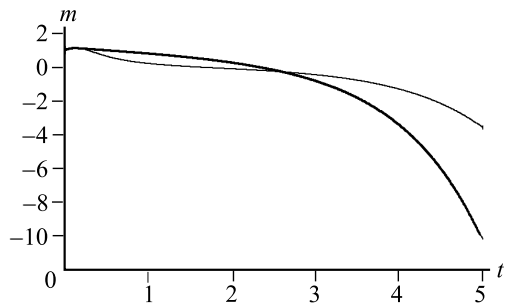


Рис. 4.33. Оценки математического ожидания решения (задача 1)

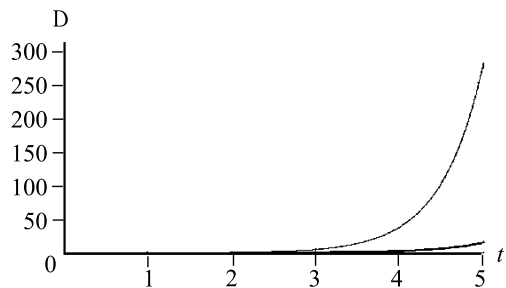


Рис. 4.34. Оценки дисперсии решения (задача 1)

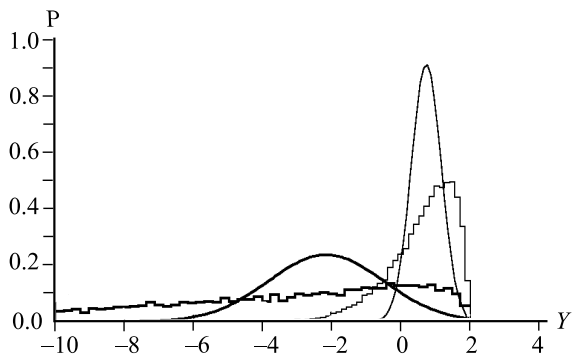


Рис. 4.35. Оценки плотности вероятности решения (задача 1)

Задача 2. *Процесс захвата с полным поглощением на границе (двумерный случай).* Рассмотрим систему СДУ второго порядка, описываемую уравнениями

$$\begin{aligned} dY_1(t) &= Y_2(t)dt, \\ dY_2(t) &= (-a^2Y_1 - 2baY_2)dt + \sigma dw(t), \\ Y_1(0) &= y_{10}, \quad Y_2(0) = 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Начальное состояние системы детерминировано. При достижении координатой Y_1 границы α происходит захват, т. е. поглощение реализаций. Требуется определить вероятность захвата $P(t)$, плотность распределения времени захвата, вероятностные моменты координаты Y_1 .

Найдем решение задачи (4.29) статистическим алгоритмом и методом гауссовой аппроксимации и сравним полученные оценки.

В работе [143] с помощью метода гауссовой аппроксимации получена система обыкновенных дифференциальных уравнений для первых двух моментов, для вероятности состояния и выражение для нормированного потока поглощения. Эта система ОДУ была просчитана методом Рунге – Кутты четвертого порядка с шагом $h = 0.01$. Результаты численных расчетов жирными линиями приведены на рис. 4.36–4.38.

При численном решении задавались

$$a = 6, \quad b = 0.8, \quad \sigma = 1, \quad y_{10} = 2, \quad \alpha = 1. \quad (4.30)$$

В случае отсутствия поглощения решением (4.29) будет гауссов процесс $Y(t)$, математическое ожидание и ковариационная матрица которого удовлетворяют системе ОДУ [238]

$$\begin{aligned} \dot{m}(t) &= Am(t), \quad m(0) = m_0, \\ \dot{D}(t) &= AD(t) + D(t)A^\top + GG^\top, D(0) = D_0, \end{aligned} \quad (4.31)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & -2ba \end{pmatrix}, \quad G = (0, \sigma)^\top.$$

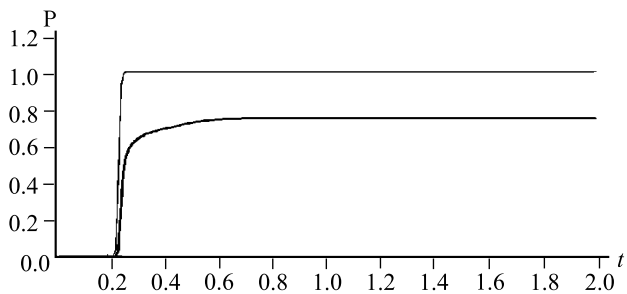


Рис. 4.36. Оценки вероятности захвата (задача 2)

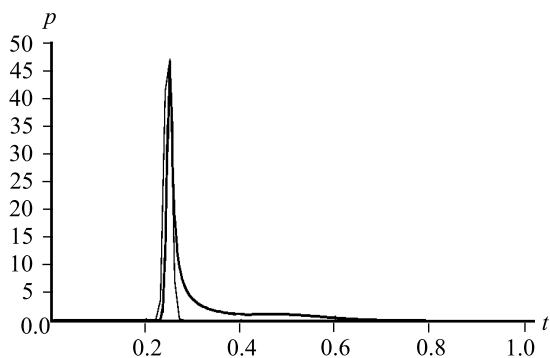


Рис. 4.37. Оценки плотности распределения времени захвата (задача 2)

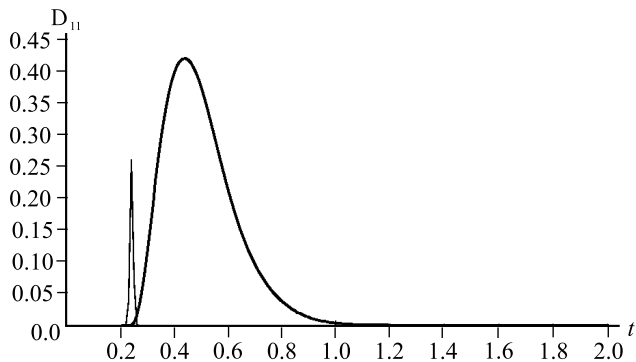


Рис. 4.38. Оценка дисперсии первой компоненты решения (задача 2)

При численном решении методом (1.61) сначала задача (4.29) решалась при отсутствии поглощения с шагом $h = 0.01$, моделировалось 10^5 траекторий. Полученные оценки маргинальных плотностей в произвольный момент времени, математического ожидания и дисперсии численного решения сильно совпали с точными решениями (4.31). Затем задача была просчитана методом (1.61) при наличии поглощения с шагом $h = 0.01$. Для оценки функционалов моделировалось также 10^5 траекторий. После введения поглощения математическое ожидание резко ушло на нуль, а у дисперсии появился всплеск, похожий на δ -функцию. При $t > 0.28$ математическое ожидание и дисперсия занулились.

Для задачи поглощения полученные оценки вероятностных характеристик решения (вероятности захвата, плотности распределения времени захвата, дисперсии первой компоненты решения) методом (1.61) приведены на рис. 4.36–4.38 тонкими линиями. Здесь также приведены оценки, полученные методом гауссовой аппроксимации (жирными линиями).

Из графиков видно их сильное различие. Так, полученная статистическим алгоритмом оценка вероятности захвата (см. рис. 4.36) при $t > 0.28$ становится равной единице. А вероятность захвата, полученная методом гауссовой аппроксимации, устанавливается на значении $P = 0.747$.

Анализируя результаты расчетов, можно сделать вывод, что для двумерной задачи полного поглощения метод гауссовой аппроксимации так же, как и для одномерной задачи, плохо оценивает вероятностные моменты решения. Интегральные характеристики решения метод гауссовой аппроксимации вычислил тоже с большой погрешностью.

Проведенные тестовые расчеты показали, что даже немодифицированный статистический алгоритм позволяет с высокой точностью вычислять вероятностные характеристики решения динамических систем со случайной структурой с сосредоточенными переходами.

Из численного сравнения построенного алгоритма с методом гауссовой аппроксимации можно сделать следующие выводы:

- 1) статистический алгоритм отличается простотой и универсальностью по отношению к изменениям исходной модели в отличие от метода гауссовой аппроксимации;
- 2) при вычислении интегральных характеристик решения оба метода дают близкие по точности оценки;
- 3) для вычисления плотности вероятности фазовых координат и вероятностных моментов рекомендуется использовать алгоритм статистического моделирования;
- 4) для улучшения точности метода двухпараметрической аппроксимации желательно сделать предварительные расчеты методом статистического моделирования с целью определения вида плотности вероятности фазовых координат.

4.5. Задача о влиянии степени приоритета на качество управления

Рассмотрим случай линейного управления с функцией поглощения (3.12) динамической системой с разделением времени

$$d\mathbf{y}(t) = (\mathbf{A}^{(l)}(t)\mathbf{y} + \mathbf{C}^{(l)}(t)\mathbf{u}(t))dt + \sigma^{(l)}(t)dw(t), \quad (4.32)$$

где вектор управления $\mathbf{u}(t)$ – n_u -мерный вектор регулярных функций; $\mathbf{A}^{(l)}(t)$, $\mathbf{C}^{(l)}(t)$ – матричные функции размера $n_y \cdot n_y$, $n_y \cdot n_u$.

В этом случае плотность распределения времени перехода является экспоненциальной (3.36).

В рассматриваемом случае вектор коэффициентов сноса, матрица коэффициентов диффузии и вектор потока вероятности определяются как

$$\begin{aligned} \alpha^{(l)}(t, \mathbf{y}) &= \mathbf{A}^{(l)}(t)\mathbf{y} + \mathbf{C}^{(l)}(t)\mathbf{u}, \quad \mathbf{B}^{(l)}(t) = \sigma^{(l)}(t)\sigma^{(l)\top}(t), \\ \pi^{*(l)}(t, \mathbf{y}) &= \left[\mathbf{A}^{(l)}(t)\mathbf{y} + \mathbf{C}^{(l)}(t)\mathbf{u} \right] p^{*(l)}(t, \mathbf{y}) - \frac{1}{2} \mathbf{B}^{(l)}(t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} p^{*(l)}(t, \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (4.33)$$

В работе [145] получены следующие дифференциальные уравнения на безусловные и взвешенные начальные моменты порядка k :

$$\dot{\omega}_k(t) = \dot{E}\left(\prod_{s=1}^{n_y} y_s^{k_s}\right)(t) = \sum_{l=1}^S \dot{\omega}_k(t)^{* (l)},$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_k(t)^{* (l)} = & \sum_{i,j=1}^{n_y} k_i a_{ij}^{(l)} E(y_j y_i^{k_i-1} \prod_{s=1, s \neq i}^{n_y} y_s^{k_s})^* (l) + \\ & + \sum_{i=1}^{n_y} \sum_{j=1}^{n_u} k_i c_{ij}^{(l)} u_j E(y_i^{k_i-1} \prod_{s=1, s \neq i}^{n_y} y_s^{k_s})^* (l) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_y} \left[k_i (k_i - 1) b_{ii}^{(l)} E(y_i^{k_i-2} \prod_{s=1, s \neq i}^{n_y} y_s^{k_s})^* (l) + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1, j \neq i}^{n_y} k_i k_j b_{ij}^{(l)} E(y_i^{k_i-1} y_j^{k_j-1} \prod_{s \neq i, s \neq j}^{n_y} y_s^{k_s})^* (l) \right] - \\ & - \sum_{r=1 \neq l}^S \lambda_{lr} E(y_1^{k_1} \dots y_n^{k_n})^* (l) + \sum_{r=1 \neq l}^S \lambda_{rl} E(y_1^{k_1} \dots y_n^{k_n})^* (r). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Откуда получаем дифференциальное уравнение для безусловного математического ожидания

$$\dot{\mathbf{m}}(t) = \sum_{l=1}^S \dot{\mathbf{m}}^* (l) = \sum_{l=1}^S \left[\mathbf{A}^{(l)} \mathbf{m}^* (l) + \mathbf{C}^{(l)} \mathbf{u} P^{(l)} - \sum_{r=1 \neq l}^S \lambda_{lr} \mathbf{m}^* (l) + \sum_{r=1 \neq l}^S \lambda_{rl} \mathbf{m}^* (r) \right] \quad (4.35)$$

и дифференциальное уравнение для безусловного начального момента второго порядка

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) = & \sum_{l=1}^S \dot{\Phi}^* (l)(t) = \sum_{l=1}^S \left[\mathbf{A}^{(l)} \Phi^* (l) + \Phi^* (l) \mathbf{A}^{(l)\top} + \mathbf{C}^{(l)} \mathbf{u} \mathbf{m}^* (l)^T + \right. \\ & \left. + \mathbf{m}^* (l) (\mathbf{C}^{(l)} \mathbf{u})^\top + \mathbf{B}^{(l)} P^{(l)} - \sum_{r=1 \neq l}^S \lambda_{lr} \Phi^* (l) + \sum_{r=1 \neq l}^S \lambda_{rl} \Phi^* (r) \right]. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Матрица безусловных центральных вторых моментов $\Theta(t)$ равна

$$\Theta(t) = \Phi(t) - \mathbf{m}(t) \mathbf{m}^\top(t). \quad (4.37)$$

Рассматриваемый пример был использован в работах [7, 8] в качестве тестового для проверки алгоритма. В рамках этого примера можно опи-

сать представляющую практический интерес задачу о влиянии степени приоритета на качество управления [145].

Если обозначим $T_{\text{ср}}^{(i)}$ как среднее время обслуживания i -й структуры, то степень приоритета оценивается отношением $q = \frac{T_{\text{ср}}^{(i)}}{T_{\text{ср}}^{(j)}}$. Если $q = 1$, то структуры по времени обслуживания равноценны. Если $q > 1$, то структура i обладает приоритетом по сравнению со структурой j [145].

Рассмотрим два одинаковых объекта. Изучим влияние приоритета на точность управления первым объектом [6–8].

Пусть во время управления объект описывается линейным СДУ вида формул (4.32).

Из табл. 4.43 видно, что с ростом приоритета первого объекта математическое ожидание и дисперсия ошибки первого объекта уменьшаются, а второго – увеличиваются. Скорость изменения моментов зависит от значений интенсивностей и параметров модели (a, k) .

Тогда в первой структуре, когда управление идет первым объектом, уравнение системы относительно ошибки управления e имеет вид [145]:

$$de_1^{(1)}(t) = (-ke_1^{(1)} + a) dt - kdw(t), \quad de_2^{(1)}(t) = adt, \quad (4.38)$$

а во второй структуре –

$$de_1^{(2)}(t) = adt, \quad de_2^{(2)}(t) = (-ke_2^{(2)} + a) dt - kdw(t), \quad (4.39)$$

где a, k – постоянные параметры модели.

Тест 1. Сравним качество управления объектом *при наличии приоритета и экспоненциальных законах распределения интервалов обслуживания*:

$$p_{12}(\tau) = \nu_1 \exp(-\nu_1 \tau), \quad p_{21}(\tau) = \nu_2 \exp(-\nu_2 \tau), \quad \tau \geq 0.$$

Тогда $T_{\text{ср}}^{(1)} = 1/\nu_1$, $T_{\text{ср}}^{(2)} = 1/\nu_2$.

Уравнения на взвешенные начальные первые и вторые моменты $\mathbf{m}^{*(1)}(t)$, $\Phi^{*(1)}(t)$, на безусловные моменты $\mathbf{m}(t)$, $\Phi(t)$ и на вероятности состояния $P^{(l)}(t)$ в данном случае, согласно формулам (4.30), (4.31) и (4.25), имеют вид

Таблица 4.43. Численные результаты, полученные алгоритмом 1 с использованием обобщенного метода типа Розенброка (Тест 1)

ν_1	ν_2	q	m_1	m_2	$\frac{m_1}{m_2}$	Θ_{11}	Θ_{22}	$\frac{\Theta_{11}}{\Theta_{22}}$
0.1	0.1	1	6.96	6.86	1.01	84.1	81.35	1.03
			exact	7	7	1	85.5	85.5
0.1	0.3	3	2.185	11.35	0.196	6.434	120.6	0.0533
			exact	2.166	11.5	0.188	6.472	123.6
0.1	0.5	5	1.523	14.08	0.108	2.068	142.54	0.0145
			exact	1.533	14.31	0.107	2.122	145
0.1	5	50	1.024	47.86	0.021	0.531	262.5	0.002
			exact	1.024	49	0.021	0.505	261
1	1	1	2.508	2.482	1.01	2.285	2.323	0.98
			exact	2.5	2.5	1	2.25	2.25
1	3	3	1.405	4.668	0.3	0.674	4.095	0.136
			exact	1.417	4.748	0.298	0.66	4.44
1	5	5	1.232	6.45	0.19	0.553	5.235	0.105
			exact	1.233	6.833	0.18	0.55	6.47
10	10	1	2.043	2.038	1.00	0.62	0.607	1.02
			exact	2.05	2.05	1	0.6075	0.6075
10	30	3	1.335	4.058	0.329	0.516	0.838	0.615
			exact	1.342	4.075	0.329	0.512	0.809
10	50	5	1.199	6.046	0.1983	0.509	1.01	0.502
			exact	1.203	6.083	0.198	0.504	1.01

$$\begin{aligned}
 \dot{m}_1^{*(1)}(t) &= -km_1^{*(1)} + aP^{(1)} - \nu_1 m_1^{*(1)} + \nu_2 m_1^{*(2)}, \\
 \dot{m}_2^{*(1)}(t) &= aP^{(1)} - \nu_1 m_2^{*(1)} + \nu_2 m_2^{*(2)}, \\
 \dot{m}_1^{*(2)}(t) &= aP^{(2)} - \nu_2 m_1^{*(2)} + \nu_1 m_1^{*(1)}, \\
 \dot{m}_2^{*(2)}(t) &= -km_2^{*(2)} + aP^{(2)} - \nu_2 m_2^{*(2)} + \nu_1 m_2^{*(1)}, \\
 \dot{m}_1(t) &= -km_1^{*(1)} + a, \quad \dot{m}_2(t) = -km_2^{*(2)} + a, \\
 \dot{P}^{(1)}(t) &= -\nu_1 P^{(1)} + \nu_2 P^{(2)}, \quad P^{(2)}(t) = -\nu_2 P^{(2)} + \nu_1 P^{(1)}, \\
 \dot{\Phi}_{11}^{*(1)}(t) &= -2k\Phi_{11}^{*(1)} + 2am_1^{*(1)} - \nu_1 \Phi_{11}^{*(1)} + \nu_2 \Phi_{11}^{*(2)} + k^2 P^{(1)},
 \end{aligned}
 \tag{4.40}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\Phi}_{22}^{*(1)}(t) &= 2am_2^{*(1)} - \nu_1\Phi_{22}^{*(1)} + \nu_2\Phi_{22}^{*(2)}, \\
\dot{\Phi}_{11}^{*(2)}(t) &= 2am_1^{*(2)} - \nu_2\Phi_{11}^{*(2)} + \nu_1\Phi_{11}^{*(1)}, \\
\dot{\Phi}_{22}^{*(2)}(t) &= -2k\Phi_{22}^{*(2)} + 2am_2^{*(2)} - \nu_2\Phi_{22}^{*(2)} + \nu_1\Phi_{22}^{*(1)} + k^2P^{(2)}, \\
\dot{\Phi}_{11}^{*(1)}(t) &= -2k\Phi_{11}^{*(1)} + 2a(m_1^{*(1)} + m_1^{*(2)}) + k^2P^{(1)}, \\
\dot{\Phi}_{22}^{*(2)}(t) &= -2k\Phi_{22}^{*(2)} + 2a(m_2^{*(1)} + m_2^{*(2)}) + k^2P^{(2)}.
\end{aligned}$$

Точные значения для стационарных моментов и вероятностей состояний ошибки управления имеют вид

$$\begin{aligned}
m_1^{*(1)} &= \frac{a}{k}, \quad m_1^{*(2)} = \frac{a}{kq} + \frac{a}{(1+q)\nu_2}; \\
m_2^{*(1)} &= \frac{aq}{k} + \frac{aq}{(1+q)\nu_1}, \quad m_2^{*(2)} = \frac{a}{k}; \\
m_1 &= \frac{a(1+q)}{kq} \left[1 + \frac{k}{\nu_1(1+q)^2} \right], \quad m_2 = \frac{a(1+q)}{k} \left[1 + \frac{kq}{\nu_1(1+q)^2} \right]; \\
P^{(1)} &= \frac{\nu_2}{(\nu_1 + \nu_2)} = \frac{q}{1+q}, \quad P^{(2)} = \frac{\nu_1}{(\nu_1 + \nu_2)} = \frac{1}{1+q}; \\
\Phi_{11}^{*(1)} &= \frac{am_1}{k} + \frac{kP^{(1)}}{2}, \quad \Phi_{11}^{*(2)} = \frac{2am_1^{*(2)} + \nu_1\Phi_{11}^{*(1)}}{\nu_2}; \\
\Phi_{22}^{*(1)} &= \frac{2am_2^{*(1)} + \nu_2\Phi_{22}^{*(2)}}{\nu_1}; \quad \Phi_{22}^{*(2)} = \frac{am_2}{k} + \frac{kP^{(2)}}{2}, \\
\Phi_{11} &= \frac{2am_1^{*(2)}}{\nu_2} + \Phi_{11}^{*(1)} \frac{(1+q)}{q}, \quad \Theta_{11} = \frac{k}{2} + \frac{a^2}{k\nu_2q} \left[1 + \frac{k}{\nu_1(1+q)} \left(2 - \frac{1}{1+q} \right) \right]; \\
\Phi_{22} &= \frac{2am_2^{*(1)}}{\nu_1} + \Phi_{22}^{*(2)}(1+q); \quad \Theta_{22} = \frac{k}{2} + \frac{a^2q}{k\nu_1} \left[1 + \frac{kq}{\nu_2(1+q)} \left(2 - \frac{q}{1+q} \right) \right].
\end{aligned}$$

Влияние приоритета q будет оцениваться отношениями $\frac{m_1}{m_2}$ и $\frac{\Theta_{11}}{\Theta_{22}}$. Для стационарных значений получаем следующие асимптотические оценки:

$$\frac{m_1}{m_2} \simeq \frac{1}{q^2}, \quad \frac{\Theta_{11}}{\Theta_{22}} \simeq \frac{1}{q^3} \quad \text{if } \frac{k}{\nu_1} \gg 1, \quad \frac{k}{\nu_1} \gg q.$$

Таким образом, с ростом приоритета q ошибки в первой системе резко уменьшаются.

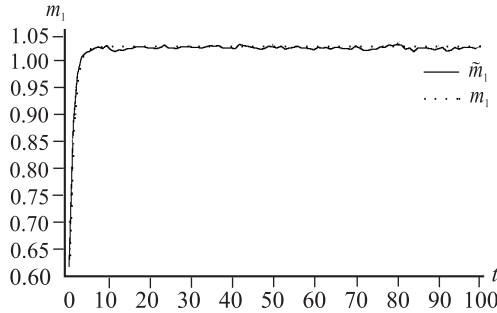


Рис. 4.39. Безусловные математические ожидания первой компоненты решения (тест 1)

Для численного решения систем СДУ в смысле Стратоновича использован обобщенный метод типа Розенброка (1.61). В случае линейных систем СДУ с аддитивным шумом метод является *асимптотически несмещенным с любым шагом h* .

Были проведены численные расчеты алгоритмом Ia из параграфа 3.4 при следующих параметрах: $k = 1$, $a = 1$. Моделировалось $N = 10^6$ траекторий обобщенным методом типа Розенброка с шагом $h = 0.01$ на интервале $[0, 100]$. Интенсивность ν_1 полагалась постоянной, интенсивность ν_2 постепенно уменьшалась. В табл. 4.43 приведены результаты численных экспериментов. В качестве точных приводятся значения, полученные при решении ОДУ на моменты (4.40) классическим численным методом Рунге–Кутты 4-го порядка. Все моменты были вычислены при $t = 100$. Для интенсивностей перехода $\nu_1 \geq 1$ к этому моменту времени был достигнут стационар. Для $\nu_1 = 0.1$ стационар для второго объекта еще не наступил (это можно видеть из приводимых ниже рисунков).

Для моделирования равномерно распределенных случайных величин на интервале $(0, 1)$ использовался датчик псевдослучайных чисел RAND [136].

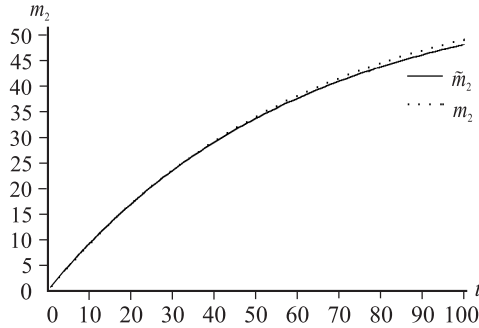


Рис. 4.40. Безусловные математические ожидания второй компоненты решения (тест 1)

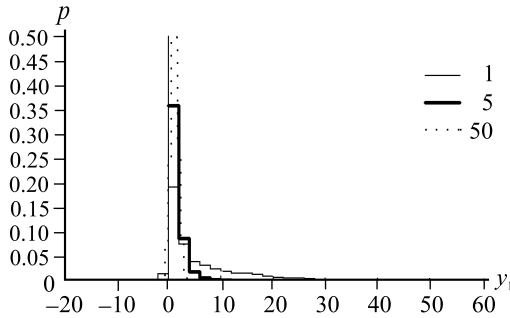


Рис. 4.41. Гистограммы маргинальной плотности вероятности ошибки управления первым объектом для разных интенсивностей

На рис. 4.39, 4.40 приведены точные значения безусловных математических ожиданий (точки) и их численные оценки (сплошная линия) при $\nu_1 = 0.1$ и $\nu_2 = 5$. Графики демонстрируют высокую точность оценки функционалов от решения.

Гистограммы маргинальной плотности вероятности ошибки управления первым объектом, полученные при численном решении модели для интенсивности $\nu_1 = 0.1$, приведены на рис. 4.41 (тонкая линия для $q = 1$, жирная – $q = 5$, точки – $q = 50$). На рис. 4.42 приведены анало-

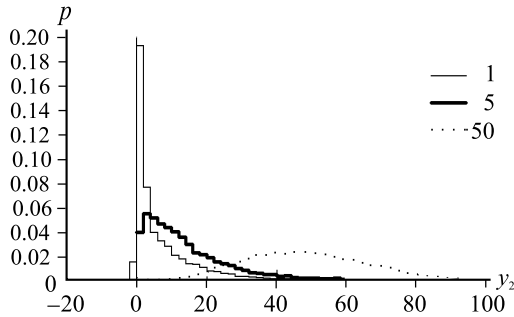


Рис. 4.42. Гистограммы маргинальной плотности вероятности ошибки управления вторым объектом для разных интенсивностей

гичные графики для второго объекта, приоритет которого падает. Из графиков видно, что плотность ошибки управления первым объектом стягивается в точку, в то время как у второго – размазывается по всей положительной оси.

Отметим достоинство нашего метода: возможность оценки плотности распределения. Аналитическое выражение для плотности распределения невозможно получить даже в таком простом случае.

Тест 2. Сравним качество управления объектом *при наличии приоритета* и *эрланговском* законе распределения интервалов обслуживания s -го порядка ($s = 2, 3$):

$$p_{12}(\tau) = \frac{\nu_1 \exp(-\nu_1 \tau) (\nu_1 \tau)^{s-1}}{(s-1)!}, \quad p_{21}(\tau) = \frac{\nu_2 \exp(-\nu_2 \tau) (\nu_2 \tau)^{s-1}}{(s-1)!}, \quad \tau \geq 0.$$

Тогда $T_{\text{ср}}^{(1)} = s/\nu_1$, $T_{\text{ср}}^{(2)} = s/\nu_2$.

Систему ОДУ на точные вероятностные моменты можно получить из уравнений (4.29)–(4.31), если предварительно, используя метод *псевдосостояний* [97], перейти к экспоненциальным законам распределения. В этом случае при $s = 2$ вводятся два дополнительных состояния, а при $s = 3$ – четыре. Система уравнений на моменты (4.40) увеличится в два (при $s = 2$) и в четыре раза (при $s = 3$) соответственно.

Известно [225], что плотность распределения времени появления s -й точки в точечном процессе Пуассона с интенсивностью ν_{lr} имеет эрланговский закон распределения s -го порядка с параметром ν_{lr} . Поэтому при проведении численных расчетов моделирование времени перехода из l -й структуры в r -ю проводилось по формуле

$$\tau_{lr} = -\frac{(\ln \alpha_1 + \ln \alpha_2 + \dots + \ln \alpha_s)}{\nu_{lr}} = -\frac{\ln(\prod_{i=1}^s \alpha_i)}{\nu_{lr}},$$

где α_i – независимые случайные величины, равномерно распределенные на $(0, 1)$ [136].

Были проведены численные расчеты алгоритмом 1 из параграфа 3.4 при следующих параметрах: $k = 1$, $a = 1$. Моделировалось $N = 10^6$ траекторий обобщенным методом типа Розенброка с шагом $h = 0.01$ на интервале $[0, 100]$. Интенсивность ν_1 полагалась постоянной, интенсивность ν_2 постепенно уменьшалась. В табл. 4.44 приведены результаты численных экспериментов. В качестве точных приводятся значения, полученные при решении ОДУ на моменты (см. уравнения (4.29)) классическим численным методом Рунге–Кутты 4-го порядка. Все моменты были вычислены при $t = 100$.

Из табл. 4.44 видно, что при изменении закона распределения времени обслуживания выросли значения моментов для небольших значений q . При $q = 50$ значения практически не изменились. Хотя в таблице приведены значения только для математических ожиданий ошибки управления, аналогично ведут себя и остальные моменты. Маргинальные плотности ведут себя аналогично экспоненциальному распределению.

Таким образом, при экспоненциальном и эрланговском законе управления ошибки незначительно отличаются друг от друга. А рассмотренный алгоритм одинаково хорошо считает, требуя незначительных изменений при моделировании времени обслуживания.

Таблица 4.44. Численные результаты, полученные алгоритмом 1а с использованием обобщенного метода типа Розенброка (тест 2)

λ_m	ν_1	ν_2	q	m_1 ($s = 2$)	m_2 ($s = 2$)	$\frac{m_1}{m_2}$ ($s = 2$)	m_1 ($s = 3$)	m_2 ($s = 3$)	$\frac{m_1}{m_2}$ ($s = 3$)
0.1	0.1	1		9.0354	9.1219	0.9763	11.412	11.641	0.9803
	exact			9.081	9.083	1	11.407	11.61	0.9825
0.1	0.3	3		2.49	13.857	0.1798	2.916	16.96	0.1719
	exact			2.514	13.844	0.182	2.918	17.022	0.1714
0.1	0.5	5		1.678	16.323	0.103	1.82	19.49	0.0933
	exact			1.672	16.417	0.1019	1.834	19.462	0.0946
0.1	5	50		1.024	49.058	0.021	1.025	49.608	0.0206
	exact			1.026	49.501	0.0208	1.0275	50.24	0.0205

4.6. Статистический анализ систем со случайным периодом квантования сигналов во времени

Системы со случайным периодом квантования сигналов во времени относятся к системам со случайной структурой [98, 145]. Радиоизотопные измерительные системы являются примером системы со случайной структурой с распределенными переходами.

Системы со случайным периодом квантования можно описать стохастическими дифференциальными уравнениями с пуассоновской составляющей [98, 145]. Системы со случайным квантованием *с амплитудной модуляцией* описываются СДУ с пуассоновской мерой, не зависящей от вектора состояния. Системы со случайным квантованием *с частотной модуляцией* могут быть описаны только СДУ с пуассоновской мерой, зависящей от вектора состояния. Причем очень часто эта зависимость не может быть перенесена в коэффициенты. Алгоритм решения таких СДУ описан в параграфе 1.3.

В параграфе 3.3 построен алгоритм статистического моделирования динамических систем со случайной структурой при распределенных пе-

реходах, использующий менее трудоемкий, модифицированный метод максимального сечения из параграфа 2.3. В данном разделе мы сравним метод максимального сечения и его модификацию [9].

Испытание построенных алгоритмов проведем на примерах из [98], для которых удалось записать аналитические формулы для математического ожидания решения. В работе [98] в качестве примеров систем со случайным периодом квантования приведены скачкообразные СДУ с пуассоновской случайной мерой, зависящей от вектора состояния.

Чтобы продемонстрировать влияние пуассоновской составляющей на поведение решения СДУ, рассмотрим простейшее уравнение первого порядка

$$dy(t) = \int_{\Gamma} \theta \nu(d\theta \times d\tau). \quad (4.41)$$

Характеристическая мера Π , задающая пуассоновскую случайную меру ν , определяется через функцию π следующим образом: $\Pi(B, t, \mathbf{y}(t^-)) = \int_B \pi(\theta, t | \mathbf{y}(t^-)) d\theta$, $B \in \Gamma$. Обозначим функции

$$\mu(t) = \int_{\Gamma} \pi(\theta, t) d\theta, \quad h(\theta, t) = \frac{\pi(\theta, t)}{\mu(t)}, \quad (4.42)$$

характеризующие пуассоновскую случайную меру ν .

Пусть функции, характеризующие пуассоновскую меру ν , не зависят от y . Задавая по-разному функцию $h(\theta)$, можно получить скачкообразные процессы с разными размерами скачков. Так, если

$$h(\theta) = \delta(\theta - \lambda),$$

то все скачки одинаковы. При $\lambda > 0$ процесс $y(t)$ возрастающий, а при $\lambda < 0$ – убывающий. При

$$h(\theta) = \sum_{i=1}^N p_i \delta(\theta - \lambda_i), \quad \sum_{i=1}^N p_i = 1,$$

где λ_i – некоторые числа, можно получить модель случайного процесса с дискретным числом состояний, но более сложной структуры.

Рассмотрим СДУ (4.41), когда функции, характеризующие пуассоновскую меру ν , зависят от y .

Задача 1. Рассмотрим СДУ (4.41) при

$$h(\theta, y) = \begin{cases} \delta(\theta - \lambda) & \text{при } y < 0 \\ \delta(\theta + \lambda) & \text{при } y > 0, \quad \lambda > 0. \end{cases}$$

Получаем процесс с двумя возможными состояниями: y_0 и $y_1 = y_0 + \lambda$, если $-\lambda < y_0 < 0$; y_0 и $y_1 = y_0 - \lambda$, если $\lambda > y_0 > 0$.

Задача 2. Рассмотрим СДУ (4.41), когда $h(\theta, y)$ задана, как в задаче 1, но функция μ также зависит от y :

$$\mu(y) = \begin{cases} \alpha & \text{при } y < 0 \\ \beta & \text{при } y > 0, \end{cases} \quad \gamma = \alpha + \beta;$$

$\lambda > 0$, $\alpha, \beta > 0$. В этом случае, если $-\lambda < y_0 < 0$, получаем процесс $y(t)$ с двумя возможными состояниями: y_0 и $y_1 = y_0 + \lambda$. При $\alpha < \beta$ в среднем процесс $y(t)$ будет чаще принимать значение y_0 , а при $\alpha > \beta$ — значение y_1 . При $\beta = 0$ процесс $y(t)$, приняв значение y_1 , далее не меняется. Точные значения первого $m(t)$ и второго $d(t)$ моментов имеют вид

$$m(t) = y_0 p_1(t) + y_1 p_2(t), \quad d(t) = y_0^2 p_1(t) + y_1^2 p_2(t),$$

где

$$p_1(t) = \frac{\alpha}{\gamma} + (p_1(0) - \frac{\alpha}{\gamma})e^{-\gamma t}, \quad p_2(t) = \frac{\beta}{\gamma} - (p_1(0) - \frac{\alpha}{\gamma})e^{-\gamma t}.$$

Рассмотренные задачи являются примерами систем с двумя структурами со случайным периодом квантования с интенсивностями переходов, зависящими от вектора состояния системы. В уравнении (4.41) отсутствуют коэффициенты сноса и диффузии. Поэтому при численной реализации построенного алгоритма не требуется использовать численный метод решения СДУ с винеровской компонентой, и погрешность численного решения состоит только из статистической составляющей.

Для моделирования процесса смены структуры применялись алгоритм 1b (использование метода «максимального сечения») и модифицированный алгоритм 1b (использование модифицированного метода «максимального сечения») из параграфа 3.3.1.

Таблица 4.45. Результаты численных расчетов задач из параграфа 4.6

Алгоритм	Параметры	m	\tilde{m}	d	\tilde{d}	t, c
1b	$\lambda = 2, y_0 = 1,$ $\mu = 10$	0	0.0012	1	1	80
1b	$\lambda = 4, y_0 = 3,$ $\mu = 10$	1	1.0023	5	5.005	81
1b	$\lambda = 2, y_0 = 1,$ $\alpha = 5, \beta = 10$	$-\frac{1}{3}$	-0.3343	1	1	100
МА	$\lambda = 2, y_0 = 1,$ $\alpha = 5, \beta = 10$	$-\frac{1}{3}$	-0.3324	1	1	91 < на 9%
1b	$\lambda = 4, y_0 = 3,$ $\alpha = 5, \beta = 10$	$\frac{1}{3}$	0.3314	$\frac{11}{3}$	3.663	98
МА	$\lambda = 4, y_0 = 3,$ $\alpha = 5, \beta = 10$	$\frac{1}{3}$	0.3351	$\frac{11}{3}$	3.670	91 < на 6%
1b	$\lambda = 4, y_0 = 3,$ $\alpha = 1, \beta = 10$	-0.(63)	-0.6366	1.(72)	1.723	102
МА	$\lambda = 4, y_0 = 3,$ $\alpha = 1, \beta = 10$	-0.(63)	-0.6360	1.(72)	1.723	83 < на 19%

Примеры были просчитаны при следующих значениях параметров:
задача 1:

- a) $\lambda = 2, y_0 = 1, \mu = 10;$
- b) $\lambda = 4, y_0 = 3, \mu = 10;$

задача 2:

- a) $\lambda = 2, y_0 = 1, \alpha = 5, \beta = 10;$
- b) $\lambda = 4, y_0 = 3, \alpha = 5, \beta = 10;$
- c) $\lambda = 4, y_0 = 3, \alpha = 1, \beta = 10.$

Результаты, полученные модифицированным алгоритмом, приводятся в строках, обозначенных «МА», в табл. 4.45.

Оценивалось математическое ожидание решения в узлах временной сетки с шагом $h = 0.1$ на интервале $[0, T]$. Моделировалось $N = 10^6$ траекторий и полагалось $p_1(0) = 1$. При численных расчетах использовался

«генератор» псевдослучайных чисел RAND [136] с модулем 2^{40} и множителем 5^{17} . Длина периода данного датчика составляет 2^{38} . Данный датчик рекомендуется для численных расчетов, в которых требуется последовательность псевдослучайных чисел не длиннее, чем 2^{37} . Расчеты проводились на PC Intel Celeron, 2.00 ГГц, 768 МБ.

Приводятся точные стационарные значения оцениваемого функционала в момент времени $T = 20$. В табл. 4.45 с результатами численных экспериментов указаны полученные абсолютные погрешности δ оценки математического ожидания в последней точке и приведены доверительные интервалы для оценки математического ожидания при $\gamma(\epsilon) = 1$. Из таблицы видно, что полученные оценки попадают в доверительные интервалы. На данной задаче проведено апробирование алгоритма решения СДУ с пуассоновской составляющей, когда пуассоновская мера зависит от фазовых координат.

Временные графики $n(t)$, $\bar{m}(t)$ не приводятся ввиду их сильного совпадения. Численные расчеты демонстрируют:

- 1) использование модифицированного метода максимального сечения позволило уменьшить вычислительное время за счет уменьшения числа обращений к «генератору» псевдослучайных чисел;
- 2) кроме уменьшения трудоемкости вычислений, уменьшение количества используемых значений псевдослучайных чисел снизило конструктивную размерность алгоритма, связанную с многомерной равномерностью используемых псевдослучайных чисел [220];
- 3) статистическое соответствие оценок, полученных обоими методами, является дополнительным критерием удовлетворительности используемого «генератора» псевдослучайных чисел.

4.7. Использование метода «максимального сечения» в задаче фильтрации диффузионно-скачкообразных процессов

Методы и вычислительные алгоритмы оптимального оценивания состояний динамических систем (фильтрации, сглаживания и прогнозирования) применяются в различных прикладных задачах [260, 348].

Задача фильтрации для систем диффузионно-скачкообразного типа рассматривалась в работах многих авторов. В частности в [216, 272, 273, 350, 351, 368] получены уравнения нелинейной фильтрации (уравнения типа Закаи), исследованы вопросы существования и единственности их решений.

В книге [257] для решения задачи нелинейной фильтрации строится и обосновывается метод частиц, получивший название фильтра частиц в теории фильтрации случайных процессов. Современные методы оценивания случайных процессов, относящиеся к фильтрам частиц, включают в себя как моделирование весовых коэффициентов, так и обрывы и ветвления [257, 271].

Рассмотрим три статистических алгоритма решения задачи нелинейной фильтрации для систем диффузионно-скачкообразного типа методом частиц, которые различаются способом моделирования пуассоновской составляющей, входящей в уравнение объекта наблюдения.

Фильтрация случайных процессов в стохастических системах диффузионно-скачкообразного типа.

Будем рассматривать модель стохастической системы наблюдения с непрерывным временем, которая включает уравнение модели объекта наблюдения и уравнение измерительной системы [353]:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t) + \int_{\Gamma} v(t, X(t^-), \theta)\nu(dt \times d\theta), \quad X(0) = X_0, \quad (4.43)$$

$$dY(t) = c(t, X(t))dt + \zeta(t)dV(t), \quad Y(0) = Y_0 = 0. \quad (4.44)$$

Уравнение (4.43) является СДУ в смысле Ито с пуассоновской составляющей. В нем используются следующие обозначения: $X \in \mathbb{R}^{n_x}$ — n_x -мерный вектор состояния, $t \in T = [0, T]$, T — заданный отрезок времени функционирования системы; $f(t, x): T \times \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$, $\sigma(t, x): T \times \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x \times n_w}$, $v(t, x, \theta): T \times \mathbb{R}^{n_x} \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$, $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n_\Gamma} \setminus \{0\}$; $W(t)$ — n_w -мерный стандартный винеровский случайный процесс, ν — пуассоновская случайная мера на $\mathbb{R}_+ \times \Gamma$ с характеристической мерой Π , заданной функцией $\pi(t, \theta): T \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R}_+$. Закон распределения начального вектора состояния X_0 задан. Начальный вектор состояния X_0 , винеровский процесс $W(t)$ и пуассоновская мера ν независимы. В частном случае X_0 — детерминированный n_x -мерный вектор.

В СДУ (4.44) используются следующие обозначения: $Y \in \mathbb{R}^{n_y}$ — n_y -мерный вектор измерений; $c(t, x): T \times \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$, $\zeta(t): T \rightarrow \mathbb{R}^{n_y \times n_v}$; $V(t)$ — n_v -мерный стандартный винеровский случайный процесс, не зависящий от винеровского процесса $W(t)$ и меры ν . При этом предполагается, что матрица $\eta(t) = \zeta(t)\zeta^T(t)$ невырождена, т.е. $\det \eta(t) \neq 0$ и существует обратная матрица $\eta^{-1}(t)$ при любом $t \in T$.

В наиболее общем случае для математической модели объекта наблюдения и измерительной системы процессы $X(t)$ и $Y(t)$ входят в правые части уравнений (4.43), (4.44), а также (4.44) является СДУ в смысле Ито с пуассоновской составляющей [272, 273].

Задача оптимальной фильтрации для стохастической системы наблюдения (4.43), (4.44) заключается в нахождении оценки $\hat{X}(t)$ вектора состояния по доступным к текущему моменту времени t измерениям

$$Y_0^t = \{Y(\tau), \tau \in [0, t]\}$$

в виде

$$\hat{X}(t) = \Phi(t, Y_0^t),$$

т.е. требуется определить функцию $\Phi(t, \cdot)$, преобразующую измерения Y_0^t в оценку вектора состояния объекта наблюдения.

Функцию $\Phi(t, \cdot)$ можно найти из условия оптимальности оценки, т.е. исходя из заданного критерия качества [260, 353].

Наиболее часто используется квадратичная функция потерь

$$\Pi(\varepsilon) = \varepsilon^T \varepsilon,$$

где

$$\varepsilon(t) = X(t) - \hat{X}(t)$$

— вектор ошибки оценивания. В этом случае решение задачи минимизации

$$\text{ЕП}(\varepsilon(t)) \rightarrow \min, \quad (4.45)$$

где минимум берется по всем допустимым функциям $\Phi(t, \cdot)$, записывается в форме

$$\hat{X}(t) = \Phi(t, Y_0^t) = \mathbb{E}[X(t)|Y_0^t] = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} xp(t, x|Y_0^t)dx,$$

где $p(t, x|Y_0^t)$ — апостериорная плотность вероятности вектора состояния X . Оптимальная оценка представляет собой условное математическое ожидание вектора состояния. Она обеспечивает минимум среднеквадратического отклонения оценки.

Если задать простую функцию потерь

$$\Pi(\varepsilon) = 1 - \delta(\varepsilon),$$

где $\delta(\varepsilon)$ — дельта-функция, то решение задачи минимизации (4.45) определяется следующим образом:

$$\hat{X}(t) = \Phi(t, Y_0^t) = \arg \max_{x \in \mathbb{R}^{n_x}} p(t, x|Y_0^t),$$

т.е. оптимальная оценка представляет собой моду условного распределения вектора состояния (maximum a posteriori estimate), которое задается апостериорной плотностью вероятности $p(t, x|Y_0^t)$.

Уравнения для апостериорной плотности вероятности

В этом и последующих разделах для упрощения соотношений будем полагать, что $n_x = n_\theta$ и $v(t, x, \theta) = \theta$. Тогда ненормированная апостериорная плотность вероятности $\varphi(t, x|Y_0^t)$ удовлетворяет уравнению Закаи [273]:

$$\begin{aligned}
d\varphi(t, x|Y_0^t) = & \left[\mathcal{A}\varphi(t, x|Y_0^t) \right. \\
& - \lambda(t, x)\varphi(t, x|Y_0^t) + \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \lambda(t, \theta)\psi(t, x - \theta)\varphi(t, \theta|Y_0^t)d\theta \left. \right] dt \\
& + c^T(t, X(t))\eta^{-1}(t)\varphi(t, x|Y_0^t)dY(t) \\
& - \frac{1}{2}c^T(t, X(t))\eta^{-1}(t)c(t, X(t))\varphi(t, x|Y_0^t)dt, \quad \varphi(t_0, x) = \varphi_0(x), \quad (4.46)
\end{aligned}$$

в котором

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}\varphi(t, x|Y_0^t) = & -\nabla^T(f(t, x)\varphi(t, x|Y_0^t)) + \frac{1}{2}\text{tr}[\nabla\nabla^T(g(t, x)\varphi(t, x|Y_0^t))], \\
g(t, x) = & \sigma(t, x)\sigma^T(t, x).
\end{aligned}$$

Оператор \mathcal{A} называется прямым производящим оператором случайного процесса $X(t)$. Уравнение Закаи [203, 216] является стохастическим дифференциальным уравнением с частными производными, поэтому оно может быть записано как в форме Ито, так и в форме Стратоновича. В данном случае уравнение (4.46) записано в форме Стратоновича.

Результатом нормировки решения $\varphi(t, x|Y_0^t)$ является апостериорная плотность вероятности $p(t, x|Y_0^t)$ вектора состояния X :

$$p(t, x|Y_0^t) = \frac{\varphi(t, x|Y_0^t)}{\int_{\mathbb{R}^{n_x}} \varphi(t, x|Y_0^t)dx}.$$

При фиксированных измерениях Y_0^t СДУ в частных производных (4.46) можно рассматривать как детерминированное, аналогичное обобщенному уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова [83]. В этом случае решение сопряженного уравнения Закаи задается с помощью вероятностного представления (формула Фейнмана–Каца [257]), а оптимальная оценка по критерию минимума среднеквадратического отклонения оценки выражается следующим образом [257]:

$$\hat{X}(t) = \frac{\mathbb{E}[\omega(t)X(t)]}{\mathbb{E}\omega(t)}, \quad (4.47)$$

где $X(t)$ — решение уравнения (4.43), а весовая функция $\omega(t)$ задается формулой

$$\omega(t) = \exp \left\{ \int_0^t c^T(\tau, X(\tau)) \eta^{-1}(\tau) dY(\tau) - \frac{1}{2} \int_0^t c^T(\tau, X(\tau)) \eta^{-1}(\tau) c(\tau, X(\tau)) d\tau \right\} \quad (4.48)$$

при условии, что измерительная система описывается уравнением (4.44).

Представление оптимальной оценки с помощью формул (4.47), (4.48) лежит в основе фильтра частиц.

Статистические алгоритмы фильтрации случайных процессов

В фильтре частиц предлагается наряду с траекториями $X(t)$ объекта наблюдения (4.43) моделировать траектории $\omega(t)$ весовой функции (4.48).

1. Введем сетку $\{t_k\}$ с переменным шагом $h_k > 0$, определяющую разбиение отрезка времени T :

$$t_{k+1} = t_k + h_k, \quad k = 0, 1, \dots, N; \quad t_0 = 0, \quad t_N = T.$$

2. Выберем число M моделируемых траекторий пары $(X(t), \omega(t))$ и обозначим через (X_k^i, ω_k^i) дискретную аппроксимацию выборочной траектории $(X(t), \omega(t))$ с номером $i = 1, 2, \dots, M$.

3. Для нахождения реализаций (X_k^i, ω_k^i) используем соотношения

$$X_{k+1} = F(t_k, X_k, h_k), \quad (4.49)$$

$$\omega_{k+1} = G(t_k, X_k, \Delta Y_k, \omega_k, h_k), \quad (4.50)$$

где функция $F(t, X, h)$ определяется конкретным численным методом, используемым для решения уравнения (4.43), а функция $G(t, X, \Delta Y, \omega, h)$ определяется правой частью (4.48) и зависит от приращения измерений $Y(t)$, т.е. $\Delta Y_k = Y(t_{k+1}) - Y(t_k)$.

Тогда приближенное решение задачи оптимальной фильтрации согласно формуле (4.47) имеет вид нормированного взвешенного среднего при выборе квадратичной функции потерь:

$$\hat{X}_k = \left(\sum_{i=1}^M \omega_k^i \right)^{-1} \sum_{i=1}^M \omega_k^i X_k^i, \quad (4.51)$$

где индекс k соответствует текущему моменту времени $t = t_k$.

Точность оценки и трудоемкость метода зависит от используемых численных схем в рекуррентных формулах (4.49), (4.50).

Для приближенного вычисления весов будем использовать формулу прямоугольников:

$$\omega_{k+1} = \omega_k \exp \left\{ c^T(t_k, X_k) \eta^{-1}(t_k) \Delta Y_k - \frac{1}{2} c^T(t_k, X_k) \eta^{-1}(t_k) c(t_k, X_k) h_k \right\}, \quad \omega_0 = 1. \quad (4.52)$$

Это рекуррентное соотношение для веса в общем случае имеет первый порядок среднеквадратической сходимости.

При численных расчетах в алгоритме фильтрации используются три метода моделирования пуассоновского точечного потока для получения приближенной оптимальной оценки вектора состояния объекта наблюдения по критерию минимума среднеквадратического отклонения оценки.

В алгоритме 1 используется приближенный алгоритм 1 из параграфа 2.3, использующий свойство ординарности пуассоновского процесса.

В алгоритме 2 используется метод максимального сечения.

В алгоритме 3 используется экономичная модификация метода максимального сечения.

В качестве примера рассмотрим задачу фильтрации процесса Орнштейна-Уленбека со скачками $X(t)$ [331]:

$$dX(t) = \mu X(t) dt + \sigma dW(t) + \int_{\Xi} \theta \nu(dt \times d\theta), \quad X(0) = X_0 = 1,$$

по результатам измерений $Y(t)$:

$$dY(t) = X^3(t) dt + \zeta dV(t), \quad Y(0) = Y_0 = 0,$$

где $X, Y \in \mathbb{R}$, $t \in T = [0, 1]$, $W(t)$ и $V(t)$ — одномерные независимые стандартные винеровские процессы. Интенсивность общего пуассонов-

ского процесса $\lambda(t, x) = \varrho t(1 + \sin x)$ зависит как от времени, так и от состояния объекта наблюдения. Величина скачка имеет стандартное нормальное распределение; μ , σ , ϱ и ζ — числовые параметры.

Отметим, что в более простом случае при наличии только винеровской составляющей и при $\mu = 0$ в работе [299] была доказана невозможность построения для такой системы наблюдения конечномерного фильтра, т.е. решение уравнения Закаи нельзя свести к нахождению конечного числа моментных характеристик как, например, в случае фильтров Калмана–Бьюси (Kalman–Bucy filter) или Бенеша (Beneš filter) [257].

При численных расчетах задавались следующие параметры модели:

$$\mu = 0.5, \quad \sigma = 0.2, \quad \zeta = 0.1,$$

$$\lambda^* = \max_{(t,x) \in T \times R} \lambda(t, x) = \max_{(t,x) \in T \times R} (\varrho t(1 + \sin x)) = 2\varrho.$$

В таблице 4.46 для каждого алгоритма и каждого значения $\varrho = 0.1; 0.5; 1; 5$ приведено число обращений к датчику случайных чисел для моделирования пуассоновского точечного потока (обращения к датчику случайных чисел для моделирования приращений винеровского случайного процесса и скачков не учитывались). Время оценивания для одной наблюдаемой траектории приведено в таблице 4.47.

Так как рассматриваются СДУ с аддитивным шумом (т.е. СДУ Ито совпадают с СДУ Стратоновича), то для численного решения использовался обобщенный метод типа Розенброка (1.61). Этот асимптотически несмещенный метод на рассматриваемой задаче имеет первый порядок сильной сходимости. Шаг численного интегрирования $h = 0.01$, число частиц $M = 10^4$.

Моделирование пар независимых случайных величин ζ_1 , ζ_2 , имеющих стандартное нормальное распределение, осуществлялось по формулам $\zeta_1 = \sqrt{-2 \ln \alpha_1} \cos 2\pi\alpha_2$, $\zeta_2 = \sqrt{-2 \ln \alpha_1} \sin 2\pi\alpha_2$. Моделирование случайной величины ς , имеющей показательное распределение с параметром λ^* , осуществлялось по формуле $\varsigma = -(\ln \alpha)/\lambda^*$. Для моделирования независимых равномерно распределенных на интервале $(0, 1)$ слу-

Таблица 4.46. Число обращений к датчику случайных чисел

ϱ	Алгоритм 1	Алгоритм 2	Алгоритм 3
0.1	1000000	14192	13864
0.5	1000000	30184	27600
1.0	1000000	49996	43053
5.0	1000000	210148	157766

Таблица 4.47. Среднее время оценивания одной наблюдаемой траектории, с

ϱ	Алгоритм 1	Алгоритм 2	Алгоритм 3
0.1	0.235	0.185	0.183
0.5	0.292	0.243	0.241
1.0	0.292	0.247	0.246
5.0	0.507	0.476	0.470

чайных величин α , α_1 , $\alpha_2 \dots$ применялся «генератор» псевдослучайных чисел RND128 (с модулем 2^{128} и множителем 5^{100109}) [340].

На рис. 4.43 показана выборочная траектория случайного процесса $X(t)$ и ее оценка $\hat{X}(t)$, полученная для $\varrho = 5$ с помощью модифицированного метода максимального сечения. Дисперсия оценки показана на рис. 4.44, она соответствует траектории $X(t)$ и оценке $\hat{X}(t)$, которые изображены на рис. 4.43. Соответствующие измерения приведены на рис. 4.45.

Далее на рис. 4.46 приведены характеристики точности трех алгоритмов фильтра частиц, а именно среднеквадратическое отклонение оценки в узлах равномерной сетки при $\varrho = 5$:

$$\sigma_\varepsilon(t_k) = \sqrt{\frac{1}{L-1} \sum_{i=1}^L |X^i(t_k) - \hat{X}^i(t_k)|^2},$$

где i — номер оцениваемой траектории случайного процесса $X(t)$ и ее оценки $\hat{X}(t)$, $L = 10^4$ — общее число оцениваемых траекторий.

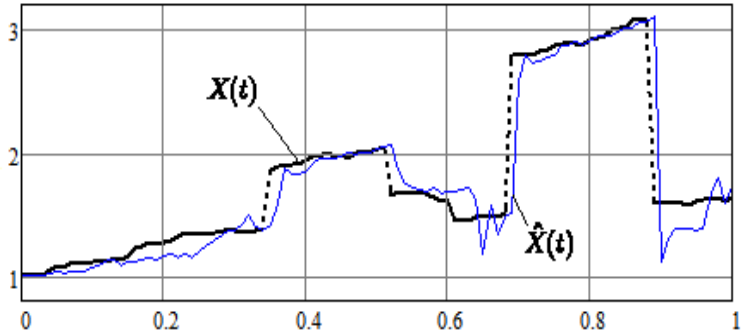


Рис. 4.43. Выборочная траектория случайного процесса $X(t)$ и ее оценка $\hat{X}(t)$ модифицированным методом максимального сечения.

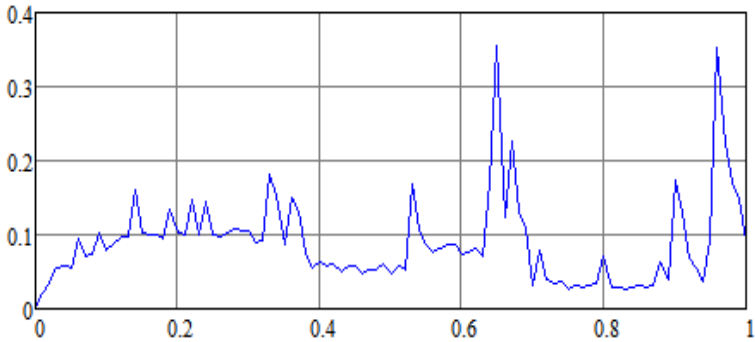


Рис. 4.44. Среднеквадратическое отклонение оценки $\hat{X}(t)$ траектории $X(t)$ (из рис. 4.43).

На примере оценивания траекторий процесса Орнштейна–Уленбека со скачками показано, что применение модификации метода максимального сечения позволяет сократить число обращений к датчику псевдослучайных чисел при моделировании пуассоновского точечного потока и тем самым уменьшить время счета. А приближенный алгоритм 1 моделирования пуассоновского точечного потока построенный на основе свойства ординарности считает дольше всех. В параграфе 4.3 построена

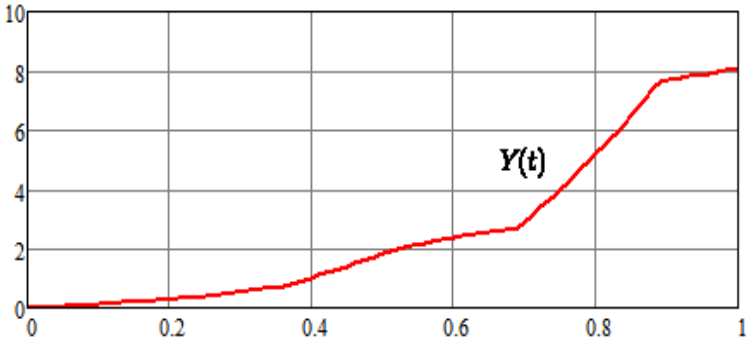


Рис. 4.45. Траектория измерений $Y(t)$ для оцениваемой траектории $X(t)$.

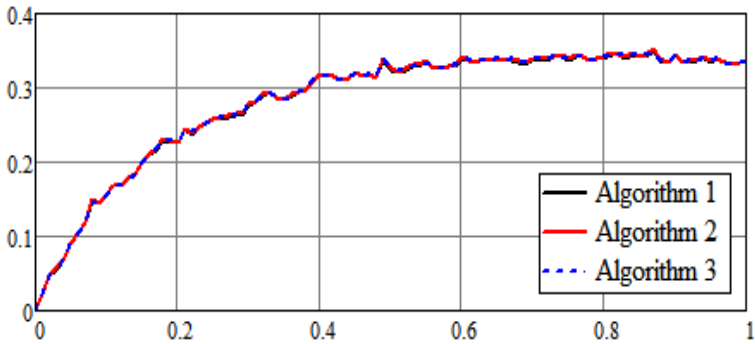


Рис. 4.46. Сравнение точности алгоритмов.

его модификация, использующая экономичный способ моделирования случайных величин.

В рассматриваемом примере интенсивность пуассоновской меры зависела как от времени так и от самого вектора состояния процесса. Также статистическое соответствие оценок, полученных алгоритмами может служить дополнительным критерием удовлетворительности используемого датчика случайных чисел.

4.8. Метод максимального сечения в задаче фильтрации для непрерывных систем с переключениями

В параграфе 4.7 были рассмотрены статистические алгоритмы оценивания траекторий динамических систем диффузионно-скачкообразного типа, когда модель системы описывается стохастическими дифференциальными уравнениями (СДУ) с винеровской и пуассоновской составляющими.

В этом параграфе рассмотрим аналогичный подход к оцениванию траекторий стохастических динамических систем с переключением режимов функционирования [144]). Модель таких систем описывается СДУ, правая часть которых зависит от марковского или условно-марковского случайного процесса с конечным множеством состояний. В новых алгоритмах фильтрации метод максимального сечения и его модификация применяются для моделировании процесса смены структуры.

Возможные приложения разработанных алгоритмов фильтрации для систем со случайной структурой — задачи слежения за движущимися объектами [144, 328] и обработка навигационной информации [371, 372, 381].

Решение задачи фильтрации для систем со случайной структурой в самом общем случае сводится к системе СДУ с частными производными, а именно к системе обобщенных уравнений Стратоновича для условно-апостериорных плотностей [144] (аналог уравнения Стратоновича-Кушнера для систем диффузионного типа). Даже для систем диффузионного типа нахождение апостериорной плотности составляет трудную задачу, которая упрощается в линейном случае и некоторых нелинейных случаях, допускающих построение так называемых конечномерных фильтров [257].

В публикациях описано применение фильтров частиц для систем со случайной структурой, однако для упрощенных математических моде-

лей. Например, для динамических систем, изменение режима функционирования которых происходит без учета информации о непрерывной части вектора состояния, либо при рассмотрении стационарных распределений. Ниже будет рассмотрен общий случай.

Задача оптимальной фильтрации для систем со случайной структурой

В задаче фильтрации предполагается, что известна математическая модель динамической системы, состояние которой измеряется. В этой работе будем полагать, что математическая модель задается векторным СДУ Ито

$$dX(t) = f^{(l)}(t, X(t))dt + \sigma^{(l)}(t, X(t))dW(t), \quad X(0) = X_0, \quad (4.53)$$

где $X \in \mathbb{R}^n$ — n -мерный вектор, $t \in \mathbb{T} = [0, T]$; $f^{(l)}(t, x): \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\sigma^{(l)}(t, x): \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times s}$ — заданные функции для всех $l \in \mathbb{L} = \{1, 2, \dots, L_{\max}\}$, l — номер структуры (номер режима функционирования); $W(t)$ — s -мерный стандартный винеровский случайный процесс. Закон распределения начального вектора состояния X_0 задан.

В каждый момент времени $l = L(t)$, где $L(t)$ — это случайный процесс смены структуры $L(t)$. Он задается с помощью функций $\lambda_{lr}(t, x): \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, определяющих интенсивности смены структуры; $l, r = 1, 2, \dots, L_{\max}$; $l \neq r$. Тогда при малых Δt

$$P(L(t + \Delta t) = r \mid L(t) = l, X(t) = x) = \lambda_{lr}(t, x)\Delta t + o(\Delta t),$$

$$P(L(t + \Delta t) = l \mid L(t) = l, X(t) = x) = 1 - \sum_{r=1, r \neq l}^{L_{\max}} \lambda_{lr}(t, x)\Delta t + o(\Delta t),$$

где P обозначает вероятность. Т.е. рассматривается ССС с распределенными переходами.

Начальное условие для процесса смены структуры $L(t)$ задается в виде $L(0) = L_0 \in \mathbb{L}$. Траектории $L(t)$ — это кусочно-постоянные функции со значениями из множества \mathbb{L} ; X_0 , L_0 и $W(t)$ независимы.

Вектор состояния \bar{X} системы со случайной структурой состоит из двух компонент: X — непрерывная и L — дискретная, т.е. информация о текущем состоянии задается в виде $\bar{X} = [X^T, L]^T$.

Измерения заданы векторным СДУ

$$dY(t) = c^{(l)}(t, X(t))dt + \zeta^{(l)}(t)dV(t), \quad Y(0) = Y_0 = 0, \quad (4.54)$$

в котором $Y \in \mathbb{R}^m$ — m -мерный вектор; $c^{(l)}(t, x): \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\zeta^{(l)}(t): \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times d}$ — заданные функции для всех $l \in \mathbb{L}$; $V(t)$ — d -мерный стандартный винеровский случайный процесс, не зависящий от винеровского процесса $W(t)$. При этом предполагается, что матрица $\eta^{(l)}(t) = \zeta^{(l)}(t)[\zeta^{(l)}(t)]^T$ невырождена для всех $l \in \mathbb{L}$ и $t \in \mathbb{T}$.

Будем предполагать, что решение СДУ (4.53), (4.54) существует и единственно. Достаточные условия, которым удовлетворяют функции $f^{(l)}(t, x)$, $\sigma^{(l)}(t, x)$, $c^{(l)}(t, x)$, $\zeta^{(l)}(t)$ и $\lambda_{lr}(t, x)$, перечислены в [290]. Кроме того, $E|X_0|^2 < \infty$, где E обозначает математическое ожидание. Также предполагается, что интенсивности $\lambda_{lr}(t, x)$ ограничены на $\mathbb{T} \times \mathbb{R}^n$ и существует плотность для вектора $X = X(t)$ в каждый момент времени $t \in \mathbb{T}$.

Задача оптимальной фильтрации для системы со случайной структурой (4.53), (4.54) заключается в нахождении оценки $\hat{\bar{X}}$ вектора состояния \bar{X} по доступным к текущему моменту времени t измерениям $Y_0^t = \{Y(\tau), \tau \in [0, t]\}$ в виде $\hat{\bar{X}} = \Phi(t, Y_0^t)$, т.е. требуется определить функцию $\Phi(t, \cdot)$, преобразующую измерения Y_0^t в оценку вектора состояния в текущий момент времени $t \in \mathbb{T}$.

Функцию $\Phi(t, \cdot)$ можно найти из условия оптимальности оценки (синтезировать оптимальный фильтр), т.е. исходя из заданного критерия качества, обеспечивающего минимум среднего риска [364]:

$$E\Pi(\bar{X}, \hat{\bar{X}}) \rightarrow \min,$$

где минимум берется по всем допустимым функциям $\Phi(t, \cdot)$, $\Pi(\bar{x}, \hat{\bar{x}})$ — функция потерь, $\bar{x} = [x^T, l]^T$.

Для систем со случайной структурой используют следующие функции потерь $\Pi(\bar{x}, \hat{\bar{x}})$:

- 1) аддитивную квадратично-простую функцию потерь:

$$\Pi(\bar{x}, \hat{x}) = (x - \hat{x})^T C (x - \hat{x}) + (1 - \delta_{l, \hat{l}}),$$

где C — симметричная положительно определенная матрица $n \times n$, $\delta_{l, \hat{l}}$ — символ Кронекера;

2) мультипликативную простую функцию потерь:

$$\Pi(\bar{x}, \hat{x}) = 1 - \delta_{l, \hat{l}} \delta(x - \hat{x}),$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция.

Функции потерь часто рассматривают как функции ошибки оценивания [144], т.е. разности $\varepsilon = \bar{x} - \hat{x}$. В этом случае они будут выражаться через $\delta_{0, l - \hat{l}} = \delta_{l, \hat{l}}$.

Для того чтобы записать решение задачи оптимальной фильтрации, требуется ввести обозначения для апостериорной плотности вектора X и вероятностей, задающих распределение номера структуры L . Обозначим через $\varphi(t, x, l | Y_0^t)$ функцию, которая описывает апостериорное распределение вектора состояния \bar{X} :

$$\sum_{l=1}^{L_{\max}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t, x, l | Y_0^t) dx = 1.$$

При фиксированном $l \in \mathbb{L}$ — это ненормированная условно-апостериорная плотность $\varphi^{(l)}(t, x | Y_0^t)$ вектора X , а функция

$$P^{(l)}(t | Y_0^t) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^{(l)}(t, x | Y_0^t) dx \quad (4.55)$$

определяет апостериорную вероятность события $L(t) = l$ (вероятности $P^{(l)}(0) = P_0^{(l)}$, $l = 1, 2, \dots, L_{\max}$, характеризуют распределение начального состояния L_0). Далее, функция

$$\tilde{\varphi}^{(l)}(t, x | Y_0^t) = \frac{\varphi^{(l)}(t, x | Y_0^t)}{P^{(l)}(t | Y_0^t)} \quad (4.56)$$

задает условно-апостериорную плотность вектора X при $L(t) = l$, а функция

$$\tilde{\varphi}(t, x | Y_0^t) = \sum_{l=1}^{L_{\max}} \varphi^{(l)}(t, x | Y_0^t) \quad (4.57)$$

является нормированной апостериорной плотностью вектора X .

Согласно [364] оптимальная оценка $\hat{X}(t) = [\hat{X}^T(t), \hat{L}(t)]^T$ для аддитивной квадратично-простой функции потерь определяется соотношениями

$$\hat{X}(t) = \sum_{l=1}^{L_{\max}} P^{(l)}(t | Y_0^t) \hat{X}^{(l)}(t), \quad \hat{L}(t) = \arg \max_{l \in \mathbb{L}} P^{(l)}(t | Y_0^t),$$

где

$$\hat{X}^{(l)}(t) = E[X(t) | L(t) = l, Y_0^t] = \int_{\mathbb{R}^n} x \tilde{\varphi}^{(l)}(t, x | Y_0^t) dx, \quad l = 1, 2, \dots, L_{\max},$$

а для мультипликативной простой функции потерь —

$$\hat{X}(t) = \hat{X}^{(\hat{L}(t))}(t), \quad \hat{L}(t) = \arg \max_{l \in \mathbb{L}} \varphi^{(l)}(t, \hat{X}^{(l)}(t) | Y_0^t),$$

где

$$\hat{X}^{(l)}(t) = \arg \max_{x \in \mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}^{(l)}(t, x | Y_0^t), \quad l = 1, 2, \dots, L_{\max}.$$

Статистические алгоритмы фильтрации

Для приближенного решения задачи оптимальной фильтрации применен метод статистического моделирования. Для учета имеющихся измерений Y_0^t применяется метод частиц, в котором наряду с траекториями динамической системы (4.53) и процессом смены структуры требуется моделирование траекторий весовой функции по определенному правилу. Тогда вклад каждой траектории системы со случайной структурой в искомую оценку вектора состояния зависит от соответствующей траектории весовой функции, которая формируется на основе модели измерений (4.54) (вес уменьшается, если траектория далека от оптимальной оценки; вес растет, если траектория близка к оптимальной оценке). Для стохастических динамических систем с непрерывным и дискретным временем определения соответствующих весовых функций отличаются [257]. Однако применение численных методов решения СДУ означает фактический переход от непрерывного времени к дискретному,

что позволяет использовать более простое определение весовой функции и не приводить уравнения для ненормированных и нормированных условно-апостериорных плотностей вектора X [144].

Для краткости воспользуемся методом Эйлера–Маруямы, чтобы построить дискретную аппроксимацию решения СДУ (4.53), (4.54) при фиксированном $l \in \mathbb{L}$:

$$X_{k+1} = X_k + hf^{(l)}(t_k, X_k) + \sqrt{h}\sigma^{(l)}(t_k, X_k)\Delta W_k, \quad (4.58)$$

$$Y_{k+1} = Y_k + hc^{(l)}(t_k, X_k) + \sqrt{h}\zeta^{(l)}(t_k)\Delta V_k, \quad (4.59)$$

где ΔW_k и ΔV_k — s -мерный и d -мерный случайные векторы, координаты которых независимы в совокупности и имеют стандартное нормальное распределение для всех k , $h > 0$ — шаг численного интегрирования, т.е.

$$t_{k+1} = t_k + h, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad t_0 = 0, \quad t_N = T.$$

Случайный вектор $(Y_{k+1} - Y_k)/h - c^{(l)}(t_k, X_k)$ имеет гауссовское распределение с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $\eta^{(l)}(t_k)/h$, т.е. с плотностью

$$p_k^{(l)}(x, h) = \frac{h^{d/2}}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{\det \eta^{(l)}(t_k)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}x^T[\eta^{(l)}(t_k)]^{-1}xh\right\}.$$

Эта плотность выполняет роль функции правдоподобия [257] и позволяет записать правило обновления весовых коэффициентов

$$\omega_{k+1} = \omega_k p_k^{(l)}\left(\frac{Y_{k+1} - Y_k}{h} - c^{(l)}(t_k, X_k), h\right). \quad (4.60)$$

Начальное условие для весового коэффициента должно быть положительным, его конкретная величина не имеет принципиального значения, например $\omega_0 = 1$. Эти весовые коэффициенты позволяют найти апостериорные моменты вектора X . В частности, апостериорное математическое ожидание вектора X при $t = t_k$ оценивается следующим образом (оно дает приближенное решение задачи оптимальной фильтрации при выборе аддитивной квадратично-простой функции потерь):

$$\hat{X}_k = \frac{1}{\Omega_k} \sum_{i=1}^M \omega_k^i X_k^i, \quad \Omega_k = \sum_{i=1}^M \omega_k^i,$$

где i — номер моделируемой траектории случайного процесса $X(t)$, M — число траекторий.

Аналогичным образом можно оценить апостериорные начальные и центральные моменты. Например, для моментов второго порядка имеем

$$\hat{\Psi}_k = \frac{1}{\Omega_k} \sum_{i=1}^M \omega_k^i X_k^i (X_k^i)^T, \quad \hat{R}_k = \frac{1}{\Omega_k} \sum_{i=1}^M \omega_k^i (X_k^i - \hat{X}_k)(X_k^i - \hat{X}_k)^T,$$

и оценка \hat{R}_k ковариационной матрицы вектора X при $t = t_k$ может использоваться как характеристика точности фильтрации по отношению к непрерывной части вектора состояния \bar{X} .

В качестве численного метода решения СДУ (4.53) будет использован обобщенный метод типа Розенброка, предназначенный для решения СДУ Стратоновича (1.61), который обеспечивает более высокую точность по сравнению с методом Эйлера–Маруямы.

Численное решение уравнения (4.54) требуется только для моделирования работы фильтра. В реальной задаче фильтрации моделирование случайного процесса $Y(t)$ не проводится.

Для систем со случайной структурой наряду с моделированием траекторий случайного процесса $X(t)$ требуется моделирование траекторий случайного процесса смены структуры $L(t)$. При этом все приведенные выше соотношения остаются справедливыми с условием $l = L_k = L(t_k)$, узлы разбиения отрезка \mathbb{T} должны включать моменты смены структуры.

Рассмотрим приближенное решение задачи оптимальной фильтрации, на основе алгоритмов моделирования траекторий систем со случайной структурой и методов моделирования пуассоновских точечных потоков, выбирая аддитивную квадратично-простую функцию потерь.

Для моделирования процесса смены структуры, как и в параграфе 4.7 будут использоваться метод максимального сечения и его модификация.

Интенсивность композиции пуассоновских точечных потоков смены структуры для текущего номера l задается выражением

$$\lambda_l(t, x) = \sum_{r=1, r \neq l}^{L_{\max}} \lambda_{lr}(t, x).$$

Пусть также числа λ_{lr}^* ($l, r = 1, 2, \dots, L_{\max}; l \neq r$) удовлетворяют условиям:

$$\lambda_{lr}(t, x) \leq \lambda_{lr}^*, \quad l, r = 1, 2, \dots, L_{\max}, \quad l \neq r.$$

Обозначим

$$\lambda_l^* = \sum_{r=1, r \neq l}^{L_{\max}} \lambda_{lr}^*.$$

В качестве примера рассмотрим задачу фильтрации процесса Орнштейна–Уленбека $X(t)$ со случайным изменением коэффициента сноса:

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma dW(t) \quad (\text{первая структура}),$$

$$dX(t) = -\mu X(t)dt + \sigma dW(t) \quad (\text{вторая структура}),$$

$$X(0) = X_0 = 1, \quad L(0) = L_0 = 1,$$

по результатам измерений $Y(t)$:

$$dY(t) = (aX^3(t) + bL^3(t))dt + \zeta dV(t), \quad Y(0) = Y_0 = 0,$$

где $X, Y \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{T} = [0, 1]$, $W(t)$ и $V(t)$ — одномерные независимые стандартные винеровские процессы. Интенсивности смены структур $\lambda_{12}(t, x) = \lambda_{21}(t, x) = \varrho t(1 + \sin x)$ зависят как от времени, так и от состояния объекта наблюдения; μ, σ, a, b, ζ и ϱ — числовые параметры.

При численных расчетах задавались следующие параметры модели:

$$\mu = 1, \quad \sigma = 0.2, \quad \zeta = 0.1, \quad \varrho = 1.$$

Рассмотрены три варианта задания параметров a и b :

1) $a = 1, b = 0$: измерения не зависят от $L(t)$ явно, а зависят от $X(t)$;

2) $a = 0, b = 1$: измерения не зависят от $X(t)$ явно, а зависят от $L(t)$;

3) $a = 1, b = 1$: измерения зависят от $X(t)$ и $L(t)$.

Для численного решения СДУ использовался обобщенный метод типа Розенброка (1.61). Шаг численного интегрирования $h = 0.01$, число частиц $M = 10^4$.

На рисунках 4.47–4.49 показаны выборочные траектории случайных процессов $X(t), L(t)$ (полужирные линии), их оценки $\hat{X}(t), \hat{L}(t)$ (тонкие линии), дисперсия $D(t)$ оценки $X(t)$, измерения $Y(t)$. Рисунки соответствуют перечисленным выше трем вариантам задания параметров a и b . Использовался алгоритм 2.

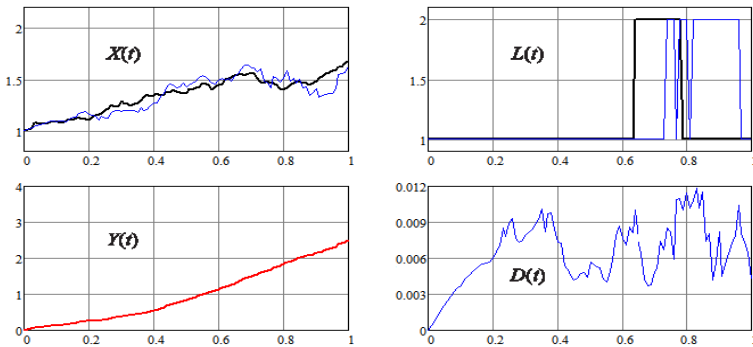


Рис. 4.47. Выборочные траектории случайных процессов $X(t), L(t)$, их оценки, дисперсия оценки $X(t)$ и измерения $Y(t)$ ($a = 1, b = 0$).

Расчеты проводились на РС с процессором Intel Core i7 4930K, 3.9 ГГц. Для моделирования независимых равномерных случайных величин применялся датчик псевдослучайных чисел RND128 (с модулем 2^{128} и множителем 5^{100109}) [340].

В таблице 4.48 для каждого алгоритма и каждого значения $\rho = 0.1; 0.5; 1.0; 5.0; 10.0$ приведено число обращений к датчику случайных чисел для моделирования процесса смены структуры (обращения к датчику для моделирования приращений винеровского случайного процесса не учитывались). Среднее время оценивания одной пары траекторий $X(t)$ и $L(t)$ по выборке объема 10^3 приведено в таблице 4.49, данные соответствуют первому варианту задания параметров a и b .

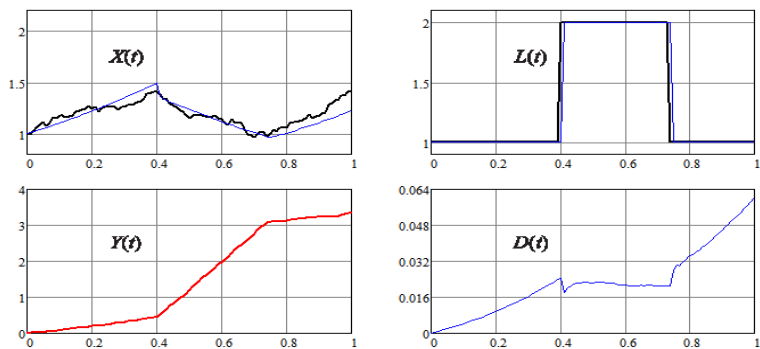


Рис. 4.48. Выборочные траектории случайных процессов $X(t)$, $L(t)$, их оценки, дисперсия оценки $X(t)$ и измерения $Y(t)$ ($a = 0$, $b = 1$).

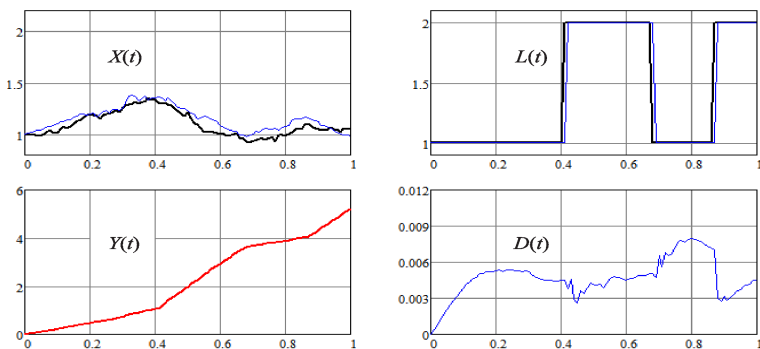


Рис. 4.49. Выборочные траектории случайных процессов $X(t)$, $L(t)$, их оценки, дисперсия оценки $X(t)$ и измерения $Y(t)$ ($a = 1$, $b = 1$).

Отметим, что если применить статистический алгоритм фильтрации, построенный на основе условия ординарности, т.е. изменять структуру системы при выполнении условия

$$\alpha_k \leq \lambda_l(t_k, X_k)h, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N-1} \sim \mathcal{R}(0, 1)$ — независимые случайные величины, $l = L_k$, то число обращений к датчику случайных чисел равно NM . Здесь число N определяет узлы разбиения отрезка \mathbb{T} : $N + 1$ узел с постоянным

Таблица 4.48. Число обращений к датчику случайных чисел

ρ	Алгоритм 1	Алгоритм 2
0.1	13976	13878
0.5	30120	27869
1.0	50250	42573
5.0	209988	157452
10.0	409450	297914

Таблица 4.49. Среднее время оценивания одной наблюдаемой траектории (датчик RND128), с

ρ	Алгоритм 1	Алгоритм 2
0.1	0.600	0.595
0.5	0.612	0.613
1.0	0.627	0.624
5.0	0.728	0.707
10.0	0.859	0.823

шагом h . В этом примере $N = 10^2$, поэтому число обращений к датчику будет равно 10^6 , что значительно больше величин из табл. 4.48.

В данном параграфе рассмотрены алгоритмы решения задачи оптимальной фильтрации для систем со случайной структурой с непрерывным временем. В настоящее время с использованием оптимизирующих компиляторов, которые позволяют наиболее эффективно задействовать вычислительные ресурсы процессоров, можно реализовать подобные алгоритмы для сложных динамических систем, обеспечивая при этом решение задачи оптимальной фильтрации в реальном времени. При необходимости реализации более быстрых и не требующих обработки большого объема данных алгоритмов субоптимальной фильтрации алгоритмы, построенные на основе метода статистического моделирования, могут применяться для сравнения.

4.9. Апробация асимптотически несмещенного метода на тестовых задачах, связанных с вопросами фазовых переходов

Численные исследования фазовых переходов как процессов ассоциации частиц в кластеры связаны со многими приложениями: образование аэрозолей в атмосфере (газопылевых межпланетных облаков, кометных хвостов и др.), конденсация в высокоскоростных потоках газов, истекающих из сопла, полимеризация и кристаллизация, осаждение паров металлов и др. Кинетическая теория [175] и развитие численных методов [31, 193] позволили в течение последних лет решать задачи образования зародышей конденсации островов напыления [141], образования пористости для твердофазной эпитаксии [142] и др., расширившие рассмотрение кластеризации [119]. В работах [141, 265, 401] изучается флуктуационная неустойчивость фазовых переходов на начальной стадии процесса образования зародышей [142].

Ассоциацию частиц в кластеры иначе называют нуклеацией. При гомогенной нуклеации зародыши новой фазы образуются из молекул основного конденсирующегося компонента, в случае гетерогенной конденсации образование кластеров происходит на посторонних ядрах. В теории конденсации уделяется большое внимание флуктуационной природе процесса образования ядер конденсации первой стадии нуклеации [175].

Процесс нуклеации с точки зрения неравновесной кинетики можно рассматривать как непрерывный процесс формирования кластеров путем присоединения одной частицы газа к кластеру либо «испарения» аналогичной частицы с его поверхности ($\Delta g = \pm 1$). Эти процессы приводят к процессу диффузии в пространстве размеров $\{G\}$ кластеров с коэффициентом диффузии, зависящим от температуры и давления пара (газа).

Согласно свойствам диффузионных марковских процессов, кинетическая модель флуктуационной стадии конденсации (первая ста-

дия нуклеации) заменяется системой стохастических дифференциальных уравнений. Рассмотрена модельная задача для изобарически-изотермической нуклеации в парах воды, иллюстрирующая стадию диффузионного расплывания начального распределения кластеров, например, одного размера, вводимых в пары при заданных температуре и давлении пара [64].

Моделирование случайного процесса диффузии в фазовом пространстве размеров кластеров (предложенного Зельдовичем) с использованием стохастических моделей [137] и численных методов [49] позволяет достаточно подробно исследовать не только эволюцию среднего размера кластеров и дисперсию, но и функцию распределения кластеров по размерам в заданных неизменных условиях за счет их флуктуаций, развивающихся в среде вследствие столкновений в течение времени порядка 10–100 мс.

Теоретические флуктуационные модели кинетики фазовых переходов первого рода рассматривались в работе [175] и др. В них содержится предположение о процессе формирования кластеров (агрегаций молекул, образующихся при объемной конденсации или на поверхности твердого тела) как о последовательных реакциях

$$\begin{cases} a_1 + a_1 \leftrightarrow a_2, \\ \dots, \\ a_{n-1} + a_1 \leftrightarrow a_n, \end{cases}$$

приводящих к диффузии в пространстве размеров кластеров.

Диссертация [174] посвящена разработке и применению метода стохастического аналога в задачах неравновесной кинетики и геофизических приложениях. В работе [137] была рассмотрена численная модель начальной флуктуационной неравновесной стадии конденсации, в предположении кластеризации зародышей как диффузии в фазовом пространстве размеров кластеров.

Представление о стадии зародышеобразования как о случайном марковском процессе позволяет сформулировать задачу в виде уравне-

ния Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК) для плотности вероятности распределения кластеров по размерам $f(g, t)$ [137, 401]:

$$\frac{\partial f(g, t)}{\partial t} = \frac{\partial \left[D(g, t) \frac{\partial f(g, t)}{\partial g} \right]}{\partial g} + \frac{1}{kT} \frac{\partial \left[D(g, t) f(g, t) \frac{\partial \Delta \Phi(g, t)}{\partial g} \right]}{\partial g}, \quad (4.61)$$

с начальным условием

$$f(g, 0) = f_0(g), \quad \frac{\partial f(g, t)}{\partial t} \Big|_{g=2} = 0, \quad f(g, t) \Big|_{g < 2} = 0.$$

Здесь g – число несжимаемых объемов, занимаемых атомами в кластере, $D = D_0 g^{2/3}$ – коэффициент диффузии; $\Delta \Phi(g, t)$ – свободная энергия формирования кластеров зародышей (или свободная энергия Гиббса).

Величина $f(g, t)dg$ определяет число кластеров в интервале размеров $[g, g + \Delta g]$ (в единице объема среды). Область изменения переменных:

$$g \in G = [2, g_{\max}], \quad t \in [0, \infty).$$

Функция $f(g, t)$ нормирована так, чтобы в единице объема находился хотя бы один кластер, состоящий не менее, чем из двух частиц. Макроскопические характеристики газопаровой смеси (такие как число кластеров в единице объема и др.) могут быть вычислены с учетом функции $f(g, t)$. Число кластеров равно

$$N_L(t) = \int_G f(g, t) dg,$$

а водность (параметр порядка фазового перехода)

$$q_L(t) = \frac{4\pi}{3} \int_G g^3 f(g, t) dg.$$

Для изобарически-изотермической модели нуклеации Фольмера–Зельдовича коэффициент диффузии в пространстве размеров и уравнение (4.61) выведены в предположении, что существует равновесие между молекулами пара и кластером размера g .

Классическая модель нуклеации предполагает сферическую форму кластера, представление пара идеальным газом, использование в расчетах для кластера малого размера константы межфазного взаимодействия, измеренной для бесконечной поверхности, а также то, что свойства макроскопической термодинамики перенесены на микроскопический уровень.

Полная свободная энергия Гиббса $\Delta\Phi$ учитывает энергию газовой фазы Φ_G , жидкой фазы Φ_L и энергию межфазного взаимодействия Φ_S (с учетом поправки на сферическую форму зародыша). Характерным параметром модели является критический радиус кластера или соответствующее ему число частиц, т. е. величина, определяемая из условия экстремума $\Delta\Phi$ (классическая теория конденсации опирается на это условие). В работах [137, 401] показано численно, что для зародышеобразования важны модель $\Delta\Phi(g)$ и область неустойчивости кластеризации зародышей вблизи экстремума.

Уравнению ФПК (4.61) для модели кластеризации зародышей в форме жидких капель в единице объема пара соответствует стохастическое дифференциальное уравнение в смысле Ито:

$$dg(t) = -\frac{1}{kT} \frac{\partial \Delta\Phi(g, t)}{\partial g} D(g, t) dt + \sqrt{2D(g, t)} dw(t), \quad (4.62)$$

или эквивалентное (4.62) СДУ в смысле Стратоновича [137]:

$$dg(t) = -\left(\frac{1}{kT} \frac{\partial \Delta\Phi(g, t)}{\partial g} D(g, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial D(g, t)}{\partial g} \right) dt + \sqrt{2D(g, t)} \circ dw(t), \quad (4.63)$$

где

$$t_0 \leq t \leq T_k, \quad g(t_0) = g_0; \quad \forall t \quad t \in [t_0, T_k] \quad g(t) \in G.$$

Коэффициент диффузии $D(g, t)$ зависит от температуры T и давления газа p_v . Но вследствие быстротечности рассматриваемых процессов температура и давление в данной работе полагаются постоянными. Как функция от g коэффициент диффузии имеет вид

$$D = D_0 g^{2/3}, \quad (4.64)$$

где $D_0 = D_0(p_v, T, m_g, m_l)$, m_g , m_l – массы молекул пара и жидкости соответственно

Используя химические потенциалы жидкости и пара, а также условие равновесия между жидкостью и паром, в пренебрежении скачком давления на границе жидкость – пар, получено выражение для энергии Гиббса в виде функции [119]

$$\Delta\Phi = -ag + bg^{2/3}, \quad (4.65)$$

где a , b не зависят от g и допускают дальнейшее развитие предложенной стохастической модели флуктуационной неустойчивой стадии нуклеации.

С учетом вида коэффициентов (4.64)–(4.65), уравнения (4.62), (4.63) принимают, соответственно, вид

$$dg(t) = H(g)dt + \sigma(g)dw(t), \quad (4.66)$$

и

$$dg(t) = F(g)dt + \sigma(g) \circ dw(t), \quad (4.67)$$

где

$$\sigma(g) = \sqrt{2D(g)}, \quad F(g) = H(g) - \frac{D_0}{3}g^{-1/3}, \quad H = -\frac{D_0}{kT} \left(-ag^{2/3} + \frac{2}{3}bg^{1/3} \right).$$

Проведем численное исследование построенной стохастической модели флуктуационной стадии конденсации. Исследуем особенности изменения направления процесса кластеризации в зависимости от начальных значений. Моделирование проведено с помощью численных методов решения СДУ, рассмотренных в первой главе и работах [31, 238]. Для численного решения СДУ в смысле Стратоновича (4.67) использовался асимптотически несмещенный обобщенный метод типа Розенброка (1.61):

$$g_{k+1} = g_k + \frac{h(F(g_k) + F(g_{k+1}^p))}{2(1 - hF'(g_k)/2)} + \frac{\sqrt{h}}{2}(\sigma(g_k) + \sigma(g_{k+1}^p))\zeta_k, \quad (4.68)$$

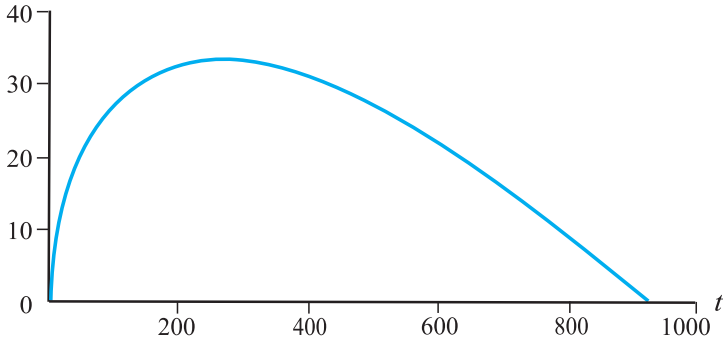


Рис. 4.50. Энергия $\Delta\Phi$ образования кластеров в парах воды с параметрами (4.69)

$$g_{k+1}^p = g_k + \sqrt{h}\sigma(g_k)\zeta_k,$$

где ζ_k – независимые между собой нормальные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

В качестве примера рассмотрим начальную стадию конденсации паров воды при $T = 350$ К, заданную СДУ (4.66) или (4.67). При численном решении задавались следующие параметры модели:

$$a = 0.24318, \quad b = 2.36613, \quad b_0 = \frac{1}{3}b, \quad D_0 = 0.25, \quad kT = 1. \quad (4.69)$$

На рис. 4.50 приведен вид функции $\Delta\Phi$ – свободной энергии Гиббса для этих параметров. Область неустойчивости образования кластеров находится около точки перегиба g^* . Из вида функции $\Delta\Phi$ следует, что $g^* = 274$.

Была исследована зависимость характера флуктуационного зародышеобразования от задания начальных условий относительно критической области значений.

В численных экспериментах на временном интервале $[0, 10]$ моделировалось $N = 2 \cdot 10^5$ траекторий с шагом $h = 0.01$. Оценивались математическое ожидание и дисперсия для трех начальных значений g_0 . Были выявлены следующие закономерности:

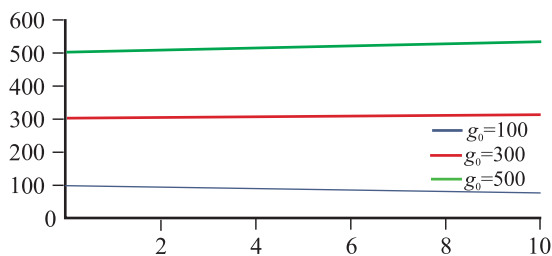


Рис. 4.51. Математическое ожидание, характеризующее среднее число молекул в кластере (для трех начальных значений размера g_0) в зависимости от времени

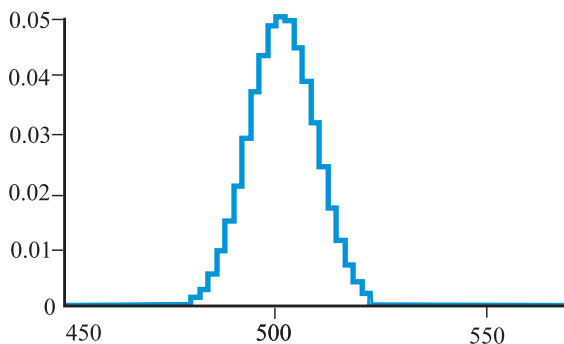


Рис. 4.52. Гистограмма плотности вероятности распределения размера кластера в момент времени $t = 2$ при $g_0 = 500$

1) для начального значения $g_0 = 100$, которое меньше критического значения, преобладают процессы испарения молекул и кластер уменьшается;

2) при попадании начальных значений в «критическую» область значений свободной энергии ($g_0 = 300$) возможен как рост, так и убывание;

3) для начального значения $g_0 = 500$ преобладает рост кластера.

На рис. 4.51–4.55 приводятся численные результаты, полученные методом (4.68). Также оценивалось распределение кластеров по размерам.

Для начального значения $g_0 = 500$ на рис. 4.52 приведено распределение кластера по размерам в момент времени $t = 2$, на рис. 4.53 – в последний момент времени $t = 10$, а рис. 4.54 показывает эволюцию распределения кластеров по размерам. Эти рисунки демонстрируют преобладание роста кластера.

На рис. 4.55 изображена эволюция размера кластера при случайных равномерно распределенных начальных значениях, $g_0 \in [250, 350]$.

Эти результаты хорошо согласуются с теоретическими и численными результатами, полученными в работе [137], и демонстрируют изменение направления процесса кластеризации в зависимости от начальных значений.

Численное исследование модели с учетом заряда капель

Дополнительным фактором неравновесности процесса конденсации является неустойчивость крупных капель, которая связана либо с тем, что пар движется с некоторой скоростью, либо – что капли конденсата попадают в условия, когда появляется заряд на поверхности капли.

Если учитывать заряд капли, который согласно критерию Релея приводит к возникновению явления неустойчивости и к развалу капли, то в уравнении Колмогорова–Феллера (типа Фоккера - Планка) для плотности распределения зародышей по размерам содержатся дополнительные операторы источника (S) и стока частиц (Q), что приводит к наличию пуассоновской компоненты в СДУ (4.63):

$$dg(t) = -\left(\frac{1}{kT} \frac{\partial \Delta \Phi(g, t)}{\partial g} D(g, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial D(g, t)}{\partial g}\right) dt + \sqrt{2D(g, t)} \circ dw(t) + \int_{\Gamma} z(t^-, g(t^-), \theta) \nu(d\theta \times dt), \quad t \in [0, T], \quad (4.70)$$

где ν – пуассоновская мера на $[0, T_{finish}] \times \Gamma$ с характеристической мерой Π , заданная неотрицательной функцией $\pi(\theta)$.

Рассмотрим процесс кластеризации при $T = 350K$, $p_\nu = 0.5$ МПа, $S = 2, 0$ с коэффициентом диффузии и энергией Гиббса вида

$$D = D_0 g^{2/3}, \quad \Delta \Phi = -ag + bg^{2/3}(1 - (1/3)g^{-1/3}) + cg^{-1/3}.$$

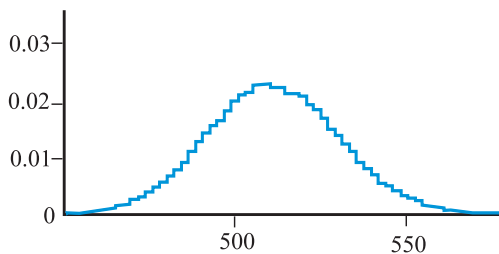


Рис. 4.53. Гистограмма плотности вероятности распределения размера кластера в последний момент времени $T = 10$ при $g_0 = 500$

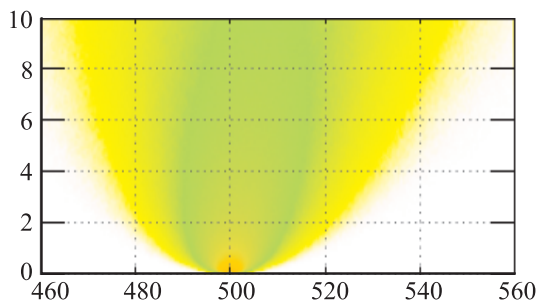


Рис. 4.54. Эволюция плотности при $g_0 = 500$

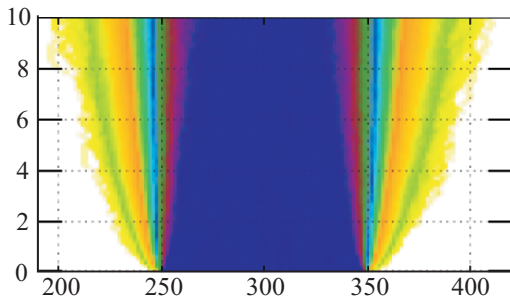


Рис. 4.55. Эволюция плотности для равномерно распределенных начальных данных $g_0 \in [250, 350]$

Свободная энергии Гиббса без учета заряда (т.е. при $c = 0$) рассмотрена выше. Введение дополнительного слагаемого (при $c \neq 0$) позволяет учитывать заряд капель.

Рассматривались следующие безразмерные параметры модели:

$$a = 0.24318, \quad b = 2.36613, \quad c = 25, \quad D_0 = 0.25, \quad z_0 = 0.5, \quad z = -z_0\theta g. \quad (4.71)$$

Критическое значение g_{krit} находится из условия $\frac{\partial \Phi}{\partial g} = 0$. Вид функции Гиббса – энергии образования кластеров для заряженной капли – представлен на рис. 4.56. Из сравнения графиков видно, что учет заряда капель привел к появлению ямы для малых размеров кластера.

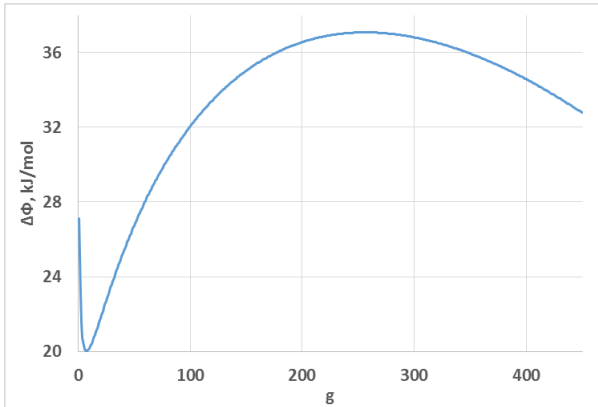


Рис. 4.56. Свободная энергия Гиббса формирующихся зародышей с учетом заряда

Согласно критерию Релея для заряженной капли радиуса r_d с постоянным зарядом Z условие неустойчивости в безразмерной форме имеет вид:

$$W = \frac{Z^2}{16\pi\sigma r_d^3} \geq 1.$$

При достаточно больших размерах капля будет дробиться и при достижении определенного радиуса либо разорвется на две сравнимых по размеру и по величине заряда частицы, либо сбросит избыточный заряд

путем эмиссии высокодисперсных сильно заряженных мелких дочерних капель, что и используется для получения дисперсных порошков малых размеров. Характер дробления зависит от ее свойств – вязкости и электропроводности.

Дополнительное слагаемое в модельном СДУ позволяет учесть распад заряженной капли. При выполнении условия неустойчивости Релея происходит распад капли и дополнительные безразмерные параметры модели, задающие пуассоновскую меру, равны

$$\Gamma = (0, 1), \quad \pi(\theta) = 0.1, \quad \Pi(\Gamma) = \int_{\Gamma} \pi(\theta) d\theta = 0.1.$$

Исследовалась флуктуационная стадия фазового перехода процесса конденсации пара с учетом релейской неустойчивости. Для численного моделирования применялся описанный в параграфе 1.3 алгоритм моделирования СДУ с пуассоновской составляющей, использующий метод (4.68). Моделировалось 10^8 траекторий с шагом $h = 0.05$ на интервале $[0, 30]$. Отметим, что характерное время образования кластеров – 10^{-6} - 10^{-3} сек, а шаг по времени $h = 0.01$ является величиной порядка 10^{-9} .

Сравнительные рисунки эволюции кинетической функции распределения кластеров зародышей жидкости без учета и с учетом распада приведены на рис. 4.57 - 4.60. Начальный размер кластера задавался больше критического размера $g_0 = 400$, $g_{max} = 420$, $g_{crit} = 274$. Так как начальное значение было неслучайным, одинаковым для всех моделируемых траекторий, то кинетическая функция распределения кластеров зародышей в начальный момент является дельта-функцией.

На рис. 4.57 приведена эволюция плотности распределения кластеров по размерам без учета распада капель. На рис. 4.58 приведена эволюция плотности распределения кластеров, характеризующихся неравновесным распределением по размерам, вклад в формирование которого вносит распад капель, размер которых неустойчив согласно капиллярной неустойчивости Релея. Гистограммы плотности распределения кластеров по размерам в разные моменты времени приведены на рис. 4.59 - 4.60. Гистограммы, соответствующие рис. 4.57, приведены на

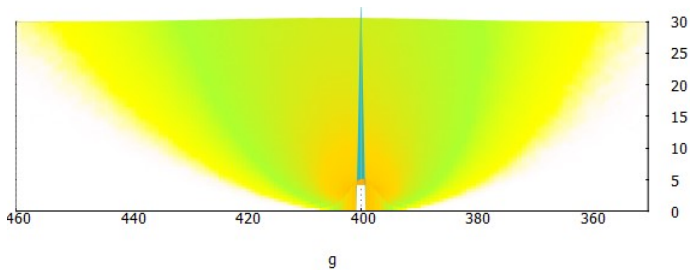


Рис. 4.57. Эволюция распределения кластеров зародышей по размерам ($z = 0$)

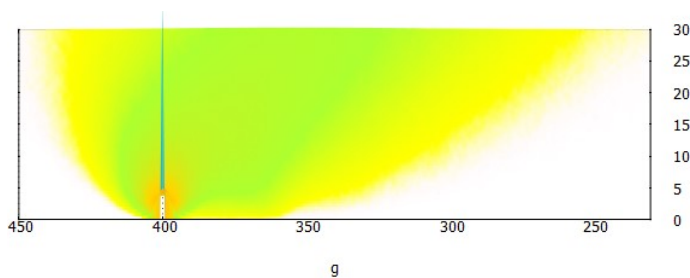


Рис. 4.58. Эволюция распределения кластеров зародышей по размерам с учетом распада ($z = \theta/2$, $\pi = 0.1$)

рис. 4.59, а соответствующие рис. 4.58 – на рис. 4.60. Графики демонстрируют, что учет релеевской неустойчивости привел к бимодальному распределению капель конденсата по размерам, что важно знать при зарядовом диспергировании в процессе получения порошков.

Проведенные расчеты показывают, что разработанные асимптотически несмещенные методы позволяют численно исследовать начальную стадию фазового перехода, и могут быть востребованы для моделирования многих технологических процессов диспергирования материала.

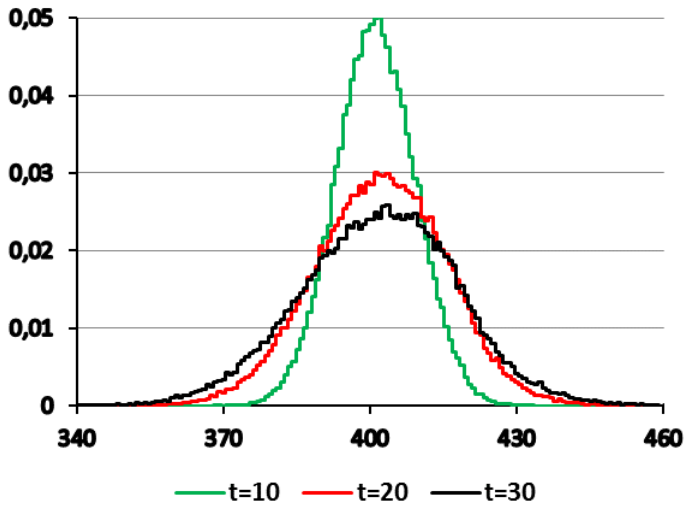


Рис. 4.59. Гистограммы распределения кластеров по размерам (без учета распада) для трех моментов времени

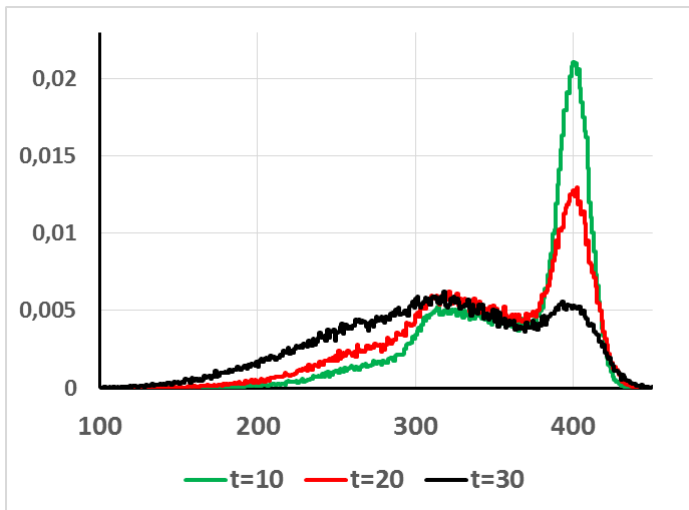


Рис. 4.60. Гистограммы распределения кластеров по размерам (с учетом распада)

Заключение

В диссертации рассмотрены вопросы построения и использования численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений в смысле Стратоновича и систем со случайной структурой. Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. Построено семейство численных методов решения СДУ в смысле Стратоновича, исследованы их устойчивость (асимптотическая несмещенность), среднеквадратическая и слабая сходимости.
2. Построены модифицированные алгоритмы решения СДУ, сохраняющие первый интеграл. Предложенная методика обеспечивает принадлежность моделируемых траекторий решения СДУ заданному гладкому многообразию.
3. Построены эффективные алгоритмы моделирования пуассоновских точечных ансамблей со сложной интенсивностью на основе экономичных методов моделирования распределений.
4. Построен алгоритм приближенного «цифрового» моделирования неоднородных пуассоновских точечных ансамблей и доказана соответствующая слабая сходимость.
5. Построены экономичные алгоритмы моделирования пуассоновских точечных потоков.
6. Построены эффективные алгоритмы моделирования систем со случайной структурой с распределенными, зависимыми от фазовых координат, переходами на основе модифицированного метода максимального сечения. Доказана соответствующая теорема сходимости.
7. Построены и теоретически обоснованы эффективные методы, использующие разработанные алгоритмы моделирования пуассоновских ансамблей, для численного решения СДУ с пуассоновской составляющей в случае, когда пуассоновская мера зависит от времени и от фазовых координат.

8. Разработанные алгоритмы и их обоснование продемонстрированы на примере решения тестовых и ряда модельных задач, имеющих прикладное значение. Решены задачи фильтрации диффузионно-скачкообразных процессов и непрерывных систем с марковскими переключениями, а также задачи, связанные с вопросами фазовых переходов.

В качестве перспективы дальнейшей разработки темы предполагается применение построенных устойчивых алгоритмов статистического моделирования СДУ и систем со случайной структурой с распределенными зависимыми переходами для решения математических моделей в различных областях науки. Разработанные устойчивые (асимптотически несмещенные) численные методы решения СДУ могут быть использованы для решения достаточно широкого класса научных задач, связанных в том числе с исследованием фазовых переходов как процессов ассоциации частиц в кластеры.

Построенные экономичные статистические алгоритмы моделирования систем со случайной структурой с распределенными переходами могут быть использованы для решения задач в экономике, на производстве, в биологии и медицине, где появилось много моделей, заданных такими системами. Важным приложением разработанных алгоритмов является их использование в задачах оптимальной фильтрации для систем со случайной структурой с непрерывным временем. В настоящее время с использованием оптимизирующих компиляторов, которые позволяют наиболее эффективно задействовать вычислительные ресурсы процессоров, можно реализовать построенные алгоритмы для сложных динамических систем, обеспечивая при этом решение задачи оптимальной фильтрации в реальном времени. При необходимости реализации более быстрых и не требующих обработки большого объема данных алгоритмов субоптимальной фильтрации алгоритмы, построенные на основе метода статистического моделирования, могут применяться для сравнения.

Список литературы

1. Аверина Т. А. Численное решение стохастических дифференциальных уравнений с пуассоновской составляющей // Теория и приложения статистического моделирования. Новосибирск, 1989. С. 81–89.
2. Аверина Т. А. Алгоритм переменного шага для решения стохастических дифференциальных уравнений // Труды VIII Всесоюзного совещания по методам Монте-Карло. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1991. С. 131–135.
3. Аверина Т. А. Статистический алгоритм моделирования динамических систем с переменной структурой // СибЖВМ. 2002. Т. 5, № 1. С. 1–10.
4. Аверина Т. А. Метод Монте-Карло для анализа динамики нелинейных систем со случайной структурой // Труды II межд. конф. SICPRO'03. М.: ИПУ, 2003. С. 2106–2121.
5. Аверина Т. А. Статистический анализ систем с переменной структурой управления // Труды III межд. конф. SICPRO'04. М.: ИПУ, 2004. С. 490–501.
6. Аверина Т. А. Алгоритм статистического моделирования динамических систем с разделением времени // Труды межд. конф. по вычисл. матем. МКВМ-2004. Новосибирск: ИВМиМГ (ВЦ) СО РАН. 2004. Ч. 1. С. 226–231.
7. Аверина Т. А. Статистическое моделирование динамических систем с разделением времени с автономным управлением // Вестник НГУ. Серия: матем., механика, информ. 2004. Т. 4, № 2. С. 3–23.
8. Аверина Т. А. Статистический анализ влияния степени приоритета на качество управления системами с разделением времени // Труды IV межд. конф. SICPRO'05. М.: ИПУ, 2005. С. 1814–1830.
9. Аверина Т. А. Статистический анализ систем управления со случайным периодом квантования // Труды V межд. конф. SICPRO'06. М.: ИПУ, 2006. С. 597–603.
10. Аверина Т. А. Моделирование систем со случайной структурой, заданных стохастическими дифференциальными уравнениями // Материалы межд. конф. «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения» (28 мая – 2 июня, 2007). Новосибирск: НГУ, 2007. С. 10–11.

11. Аверина Т. А. Статистическое моделирование стохастических мультиструктурных систем с распределенными переходами // Труды V Всероссийской конф. ММ-2008 (29–31 мая, 2008). Самара, 2008. С. 8–10.
12. Аверина Т. А. Численные методы для решения систем со случайной структурой // «XXXIII Дальневосточная математическая школа-семинар имени академика Е. В. Золотова». Тезисы докладов (29 августа–4 сентября, 2008). Владивосток, 2008. С. 50.
13. Аверина Т. А. Эффективные статистические методы моделирования неоднородных пуассоновских ансамблей // Материалы международной конференции «Вычислительная математика, дифференциальные уравнения, информационные технологии», (24–28 авг., 2009). Улан-Удэ: ВСГТУ, 2009. С. 13–19.
14. Аверина Т. А. Методы статистического моделирования неоднородного пуассоновского ансамбля // СибЖКВМ. 2009. Т. 12, № 4. С. 361–374. (Имеется перевод: Averina T. A. Statistical Simulation Methods for a Nonhomogeneous Poisson Ensemble. Numerical Analysis and Applications. 2009. V. 2, N 4. P. 289–301.)
15. Аверина Т. А. Модифицированные статистические методы моделирования неоднородных пуассоновских ансамблей // Международная конференция «Актуальные проблемы математики, информатики, механики и теории управления». Алматы, Казахстан, 19–20 ноября 2009. Алматы: Эверо, 2009. Ч. 1. С. 78–81.
16. Аверина Т. А. Новые алгоритмы статистического моделирования неоднородных пуассоновских ансамблей // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50, № 1. С. 16–23. (Имеется перевод: Averina T. A. New Algorithms for Statistical Modeling of Inhomogeneous Poisson Ensembles // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2010. Vol. 50, N 1. P. 12–18.)
17. Аверина Т. А. Статистическое моделирование пуассоновских ансамблей // Сб. Моделювання та інформаційні технології. Матеріали міжнародної наукової конференції «Simulation – 2010». Київ, України, 12–14 травня 2010 року. Киев: ИПРИ НАН Украины, 2010. С. 96–102.
18. Аверина Т. А. Модифицированный алгоритм статистического моделирования динамических систем с условной марковской структурой // Тру-

- ды VII Всероссийской конф. с международным участием ММ-2010 (3–6 июня, 2010). Самара, 2010. С. 10–12.
19. Аверина Т. А. Использование модифицированного метода максимального сечения для моделирования динамических систем с условной марковской структурой // «Информационные и вычислительные технологии и системы (ИКВТС-2010)». Материалы III Международной конференции (6–11 сентября, 2010). Улан-Удэ, 2010. Улан-Удэ: БГТУ, 2010. С. 3–5.
 20. Аверина Т. А. Численный анализ систем управления со случайной структурой при распределенных переходах // V Международный симпозиум «Обобщенные постановки и решения задач управления». 13–17 сентября 2010 г. Улан-Батор, Монголия, 2010. С. 6–9.
 21. Аверина Т. А. Метод Монте-Карло для анализа динамических систем случайной структуры // «Гражданская авиация на современном этапе развития науки, техники и общества». Сб. тезисов докладов Межд. научно-техн. конф., посвященной 40-летию образования МГТУ ГА (26 мая, 2011). М., 2011. С. 198.
 22. Аверина Т. А. Статистическое моделирование систем со случайным периодом квантования // Труды XXIV Межд. научной конф. «Мат. методы в технике и технологиях – ММТТ-24» (30.05 – 2.06.2011 г.). Киев: Б. и., 2011. С. 6–9.
 23. Аверина Т. А. Метод статистического моделирования для исследования систем управления со случайной структурой // «Мат. моделирование и выч.-информац. технологии в междисциплинарных научных исследованиях». Всерос. конф. Тезисы докладов (15–17 июня 2011). Иркутск, 2011. С. 3.
 24. Аверина Т. А. Применение численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений в задачах оптимизации нанесения тонких пленок карбида кремния // Тезисы Всес. конф. по выч. матке (29 июня – 1 июля 2011). Новосибирск. URL: www.sbras.ru/ws/list-doc.dhtml?ru+220.
 25. Аверина Т. А. Статистическое моделирование некоторых задач радиотехники // VI Межд. конф. по мат. моделированию. Тезисы докладов (3–8 июля 2011). Якутск, 2011. С. 108–109.

26. Аверина Т. А. Статистический анализ систем с переменной структурой управления // Научная конференция «Математика и математическое образование. Роль математики в инновационном развитии современного общества» (30 июня – 3 июля 2011 г.). Новосибирск, 2011. URL: conf.nsc.ru/mmo2011/ru/reportview/74156.
27. Аверина Т. А. Использование численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений в задачах оптимизации нанесения тонких пленок карбида кремния // Труды Межд. конф. «Кубатурные формулы, методы Монте-Карло и их приложения» (4–7 июля 2011). Красноярск, 2011. С. 10–13.
28. Аверина Т. А. Алгоритм статистического моделирования динамических систем с разделением времени // Труды Межд. конф. «Моделирование и оптимизация динамических систем и систем с распределенными параметрами» (15–17 сентября 2011). Самара: СГПУ, 2011. С. 10–12.
29. Аверина Т. А. Численный анализ систем управления динамическими объектами со случайными изменениями структуры // Вестник тамбовского унив. Сер.: Естеств. и технич. науки. 2011. Т. 16, вып. 4. С. 1023–1026.
30. Аверина Т. А. Моделирование экологической системы «Хищник – жертва» // Труды Межд. конф. «Современные проблемы математики, информатики и биоинформатики», посвященной 100-летию А. А. Ляпунова (11–14 октября 2011). Новосибирск, 2011. С. 10.
31. Аверина Т. А. Устойчивые численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений в смысле Стратоновича // Вестник БурГУ. Математика. Информатика. 2012. Выпуск 9. С. 91–95.
32. Аверина Т. А. Алгоритмы анализа систем управления ансамблем траекторий с учетом случайного изменения структуры и скачков // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 3 (20). С. 22–31.
33. Аверина Т. А. Модифицированный алгоритм статистического моделирования систем со случайной структурой с распределенными переходами // СибЖВМ. 2013. Т. 16, № 2. С. 97–105.
34. Аверина Т. А. Исследование влияния пуассоновских дельта-импульсов в задачах радиотехники // Вестник Тамбовского университета. 2013. Т. 18,

вып. 5. С. 2431–2433.

35. Аверина Т. А. Статистическое моделирование стохастических систем при импульсных воздействиях // Материалы XVIII Межд. конф. по вычисл. механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2013). Алушта, 2013. С. 29–31.
36. Аверина Т. А. Применение численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений для решения систем со случайной структурой // Материалы X Межд. Азиатской школы-семинара по проблемам оптимизации сложных систем (Кыргызстан, Бишкек, 25.07–05.08.2014 г.). С. 10–15.
37. Аверина Т. А. Построение алгоритмов статистического моделирования систем со случайной структурой. Новосибирск: Изд. НГУ, 2015.
38. Аверина Т. А. Верификация численных методов решения систем со случайной структурой. Новосибирск: Изд. НГУ, 2015.
39. Аверина Т. А. Алгоритм статистического моделирования процесса смены структуры при решении систем со случайной структурой с независимыми распределенными переходами // Труды X межд. конф. SICPRO'15. М.: ИПУ. 2015. С. 1298–1305.
40. Аверина Т. А. Построение и обоснование статистических алгоритмов моделирования решения систем со случайной структурой, заданной стохастическими дифференциальными уравнениями // Вестник Тамбовского унив. Серия: Естеств. и технич. науки. 2015. Т. 20, № 5. С. 986–991.
41. Аверина Т. А. Модифицированные статистические алгоритмы моделирования систем со случайной структурой с распределенными переходами // Труды межд. конф. «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики». Новосибирск, 2015. С. 18–24. URL: conf.nsc.ru/amca15/.
42. Аверина Т. А. Использование модификаций метода максимального сечения для моделирования систем со случайной структурой с распределенными переходами // СибЖВМ. 2016. Т. 19, № 3. С. 235–247. (Имеется перевод: Averina T. A. A randomized maximum cross-section method to simulate random structure systems with distributed transitions // Numerical Analysis and Applications. 2016. V. 9, N 3. P. 179–190).

43. Аверина Т. А. Численное исследование влияния пуассоновской составляющей на решение стохастического дифференциального уравнения // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем. Материалы XI Межд. научно-техн. конф. (АЧМ-2016). Пенза, 2016. С. 26–32.
44. Аверина Т. А. Аналитические и численные решения трех систем стохастических дифференциальных уравнений с инвариантами // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем // Материалы XII Международной научно-технической конференции. под ред. И. В. Бойкова. Пенза: Изд. ПГУ, 2017. С. 27–32.
45. Аверина Т.А. Статистическое моделирование решений стохастических дифференциальных уравнений и систем со случайной структурой. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2019.
46. Аверина Т.А. Об одном методе моделирования неоднородного пуассоновского точечного процесса // Сибирский журнал вычислительной математики. 2022. Т. 25. № 1. С. 1-15.
47. Аверина Т. А., Алифиренко А. А. Анализ устойчивости линейного осциллятора с мультипликативным шумом // СибЖВМ. 2007. Т. 10, № 2. С. 127–145.
48. Аверина Т. А., Артемьев С. С. Моделирование стационарных случайных процессов с заданным одномерным распределением и экспоненциальной корреляционной функцией / ВЦ СО АН СССР. Препринт № 495. Новосибирск. 1984. 24 с.
49. Аверина Т. А., Артемьев С. С. Новое семейство численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1986. Т. 288, № 4. С. 777–780. (Имеется перевод: Averina T. A., Artemiev S. S. A new family of Numerical Methods for solving Stochastic Differential Equations // Soviet Math. Dokl. 1986. Vol. 3, N 3. P. 736–738.)
50. Аверина Т. А., Артемьев С. С. Некоторые вопросы построения и использования численных методов для решения систем стохастических дифференциальных уравнений / ВЦ СО АН СССР. Препринт № 728. Новосибирск, 1987.
51. Аверина Т. А., Артемьев С. С. Численное моделирование в задачах анализа и синтеза стохастических систем управления / ВЦ СО РАН. Пре-

- принт № 915. Новосибирск, 1990.
52. Аверина Т. А., Артемьев С. С. Численное решение неустойчивых стохастических дифференциальных уравнений // Труды Межд. конф. по вычисл. матем. МКВМ-2004, Новосибирск: ИВМиМГ (ВЦ) СО РАН, 2004. Ч. 1. С. 232–237.
 53. Аверина Т. А., Артемьев С. С. Численное решение стохастических дифференциальных уравнений с растущей дисперсией // СибЖВМ. 2005. Т. 8. № 1. С. 1–10.
 54. Аверина Т. А., Артемьев С. С. Анализ точности методов Монте-Карло при решении краевых задач посредством вероятностного представления // СибЖВМ. 2008. Т. 11, № 3. С. 239–250. (Имеется перевод: Averina T. A., Artemiev S. S. Analysis of accuracy of Monte Carlo methods for boundary (-value) problems using probabilistic representation // Numerical Analysis and Applications. 2008. V. 1, N 3. P. 197–206.)
 55. Аверина Т. А., Артемьев С. С., Бондарева А. Л., Змиевская Г. И. Использование численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений в моделировании неравновесных процессов // Труды межд. конф. "Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики". Новосибирск, 2015. С. 25–32. URL: conf.nsc.ru/amca15/.
 56. Аверина Т. А., Артемьев С. С., Смирнов Д. Д. Численный анализ стохастической модели продольного движения ракеты методом Монте-Карло на суперкомпьютере // Сиб. ж. индустр. матем. 2015. Т. 18, № 3 (63). С. 3–10.
 57. Аверина Т. А., Артемьев С. С., Шурц Х. Численный анализ стохастических автоколебательных систем / ВЦ СО РАН. Препринт № 1028. Новосибирск, 1994.
 58. Аверина Т. А., Бондарева А. Л., Змиевская Г. И. Решение стохастических дифференциальных уравнений Ито–Стратоновича в модели аморфизации покрытия // Сб. трудов межд. конф. «Разностные схемы и их приложения». М.: ИПМ РАН, 2013. С. 68–69. URL: www.kiam.ru/ryabenkii2013/cgi-bin/publist.pl
 59. Аверина Т. А., Бондарева А. Л., Змиевская Г. И. Численное решение модели формирования аморфных и кристаллических наноструктур при ионной имплантации // Сеточные методы для краевых задач и приложе-

- ния. Материалы Десятой межд. конф. Казань: Казанский университет, 2014. С. 36–41.
60. Аверина Т. А., Дмитриев Н. В. Исследование влияния стратификации на диффузию примеси в турбулентном слое водоема // Сибирский физико-технический журнал. 1993. Вып. 3. С. 79–84.
61. Аверина Т.А., Дмитриев Н.В., Сабельфельд К.К. Моделирование примеси в приповерхностном турбулентном слое водоема // ВЦ СО РАН. Препринт N 965, Новосибирск, 1992. 14с.
62. Аверина Т. А., Змиевская Г. И. Флуктуационная неустойчивость фазового перехода. Алгоритмы решения квазилинейных стохастических дифференциальных уравнений и приложения // Тезисы докладов XXI всерос. конф. «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов для решения задач математической физики». Новороссийск, Абрау-Дюрсо. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2016. С. 60–61.
63. Аверина Т. А., Змиевская Г. И. Численные модели диспергирования расплава карбида кремния в плазме разряда // Тезисы докладов XLIV Межд. конф. по физике плазмы и УТС. 13–17.02.2017. URL: www.fpl.gpi.ru/Zvenigorod/XLIV/Autorlist.html, Звенигород.
64. Аверина Т. А., Змиевская Г. И. Неравновесная стадия фазового перехода первого рода: стохастические модели и алгоритмы решения / ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. Препринт № 115. М., 2017.
65. Аверина Т. А., Змиевская Г. И. Диспергирование кластеров расплава карбида кремния // Nonequilibrium processes. Vol. 1. Kinetics and plasma. Eds. S. M. Frolov and A. I. Lanshin. Moscow: TORUS, 2018. Vol. 1. P. 232–242. URL: www.nercap2018.ciam.ru/node/20?lang=eng.
66. Аверина Т. А., Карачанская Е. В., Рыбаков К. А. Моделирование траекторий стохастических динамических систем на заданном многообразии // Материалы XX Юбилейной Международной конференции. По выч. Механике и современным прикладным системам (ВМСППС2017). М.: МАИ, 2017. С. 28–31.
67. Аверина Т. А., Карачанская Е. В., Рыбаков К. А. Моделирование и анализ линейных инвариантных стохастических систем // Диф. ур. и проц. управления 2018. № 1. С. 54–76. URL: www.math.spbu.ru/diffjournal.

68. Аверина Т. А., Левыкин А. И. Численное решение задачи Коши для систем стохастических дифференциальных уравнений второго порядка / ВЦ СО РАН. Препринт № 1133. Новосибирск, 1998. 16 с.
69. Аверина Т. А., Михайлов Г. А. Алгоритмы точного и приближенного статистического моделирования пуассоновских ансамблей // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2010. Т. 50. № 6. С. 1005–1016. (Имеется перевод: Averina T. A., Mikhailov G. A. Algorithms for Exact and Approximate Statistical Simulation of Poisson Ensembles // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2010. Vol. 50, N 6. P. 951–962).
70. Аверина Т. А., Пригарин С. М. Вычисление стохастических интегралов по винеровскому процессу / ВЦ СО АН СССР. Препринт № 1048. Новосибирск, 1995. 15 с.
71. Аверина Т. А., Рыбаков К. А. Анализ системы стабилизации малого искусственного спутника с учетом отказа управляющего устройства // Теоретические вопросы вычислительной техники и программного обеспечения: Межвуз. сб. науч. тр. М.: МИРЭА, 2008. № 41. С. 98–103.
72. Аверина Т. А., Рыбаков К. А. Два метода анализа стохастических мультиструктурных систем с распределенными переходами // СибЖКВМ. 2008. Т. 11, № 1. С. 1–18. (Имеется перевод: Averina T. A., Rybakov K. A. Two methods for analysis of stochastic multistructural systems with distributed change of structure // Numerical Analysis and Applications. 2008. V. 1, N 1. P. 1–16).
73. Аверина Т. А., Рыбаков К. А. Анализ систем управления ансамблем траекторий с учетом случайного изменения структуры на примере системы стабилизации малого искусственного спутника // Труды МАИ, 2010. № 41.
74. Аверина Т. А., Рыбаков К. А. Методы и алгоритмы анализа систем управления ансамблем траекторий при импульсных воздействиях и случайном изменении структуры // Труды XI межд. конф. SICPRO'12. М.: ИПУ, 2012. С. 507–523.
75. Аверина Т. А., Рыбаков К. А. Новые методы анализа воздействия пуассоновских дельта-импульсов в задачах радиотехники // Журнал радиоэлектроники: электронный журнал, 2013. № 1. URL: jre.cplire.ru/jre/jan13/13/text.pdf.

76. Аверина Т. А., Рыбаков К. А. Два метода анализа стохастических систем с пуассоновской составляющей // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2013. № 3. URL: www.math.spbu.ru/diffjournal.
77. Аверина Т. А., Рыбаков К. А. Новые методы анализа воздействия эрланговских дельта-импульсов в задачах радиотехники // Журнал радиоэлектроники: электронный журнал, 2014. № 11. URL: jre.cplire.ru/jre/nov14/10/text.html.
78. Аверина Т. А., Рыбаков К. А. О прогнозировании состояний стохастических дифференциальных систем с пуассоновской составляющей // Труды XI Межд. Азиатской школы-семинара «Проблемы оптимизации сложных систем». Бишкек. Кыргызстан, 2015. С. 16–25.
79. Аверина Т. А., Рыбаков К. А. Практическая реализация алгоритма прогнозирования в стохастических системах с пуассоновской составляющей // Труды XII Межд. Азиатской школы-семинара "Проблемы оптимизации сложных систем". Новосибирск, 2016. С. 3–10.
80. Аверина Т. А., Рыбаков К. А. Практическая реализация алгоритма прогнозирования в стохастических системах с пуассоновской составляющей // Труды XII Международной Азиатской школы-семинара «Проблемы оптимизации сложных систем», Новосибирск, 12–17 декабря 2016 г. С. 3–10.
81. Аверина Т. А., Рыбаков К. А. О прогнозировании состояний для нелинейных стохастических систем со скачкообразной компонентой методом частиц // 15-я Международная конференция «Авиация и космонавтика». М.: МАИ, 2016. С. 569–571.
82. Аверина Т. А., Рыбаков К. А. Статистические алгоритмы прогнозирования для нелинейных стохастических систем с пуассоновской составляющей // Международная конференция по вычислительной и прикладной математике (ВПМ'17) в рамках «Марчуковских научных чтений», 25 июня – 14 июля 2017. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2017. С. 10–16.
83. Аверина Т. А., Рыбаков К. А. Приближенное решение задачи прогнозирования для стохастических систем диффузионно-скачкообразного типа // СибЖВМ 2017. Т. 20. № 1. С. 1–14. DOI: 10.15372/SJNM20170101. (Имеется перевод: Averina T. A., Rybakov K. A. Solving approximately

- a prediction problem for stochastic jump-diffusion systems // Numerical Analysis and Applications. 2017. V. 10, N 1. P. 1–10).
84. Аверина Т. А., Рыбаков К. А. Статистические алгоритмы прогнозирования для нелинейных стохастических систем диффузионно-скачкообразного типа // Диф. ур. и проц. управления. 2017. № 2. С. 130–152. URL: www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/rybakov6.pdf
 85. Аверина Т. А., Рыбаков К. А. Системы с переключениями режимов на многообразиях // Материалы XIV Межд. конф. «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого), Москва, 30 мая – 1 июня 2018 г. М.: ИПУ РАН, 2018. С. 4–7.
 86. Аверина Т.А., Рыбаков К.А. Численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений, сохраняющие первый интеграл // Труды Междунар. конф. «Вычислительная математика и математическая геофизика», посвященной 90-летию со дня рождения акад. А. С. Алексеева, Новосибирск, 8–12 окт. 2018 г. Новосибирск: ИВМиГ СО РАН, 2018. С. 10–16.
 87. Аверина Т. А., Рыбаков К. А. Моделирование мультиструктурных систем на многообразиях в задачах статистического анализа и фильтрации // Вестник Тамбовского унив. Серия: Естеств. и технич. науки. 2018. Т. 23, № 122. С. 145–153.
 88. Аверина Т.А., Рыбаков К.А. Модификация численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений с первым интегралом // Сиб.ЖВМ 2019. Т. 22. № 3. С. 243-259. DOI: 10.15372/SJNM20190301
 89. Аверина Т.А., Рыбаков К.А. Статистические алгоритмы фильтрации для систем со случайно изменяющейся структурой // Вестник российских Унив. Математика. Тамбов, т. 25, № 130, 2020, сс.109-122 DOI: 10.20310/2686-9667-2020-25-130-109-122
 90. Аверина Т. А., Смирнов Д. Д. Численный анализ распределения решения линейного осциллятора с мультипликативным шумом // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем. Сб. статей X Межд. научно-технич. конф. Пенза. Россия, 4–6 декабря 2015. Пенза: Изд. ПГУ, 2015. С. 46–51.
 91. Аверина Т. А., Шкурко И. О. Интегрированная Диалоговая Система «RapSoDiE» для численного решения дифференциальных уравнений //

- Труды ВЦ СО РАН «Методы Монте-Карло и их приложения». Новосибирск, 1995. С. 1–10.
92. Аверина Т. А., Якунин М. А. Оценки параметров модели ценового ряда в виде решения линейного СДУ с пуассоновской составляющей // СибЖВМ. 2009. Т. 12, № 2. С. 121–129. (Имеется перевод: Averina T. A., Yakunin M. A. Parameters Estimation for a Price Series Model by Solving a Linear SDE with a Poisson component // Numerical Analysis and Applications. 2009. V. 2, N 2. P. 99–105.)
 93. Аксенов Е. П., Чазов В. В. Модель движения ИСЗ. М.: Наука, 2007.
 94. Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
 95. Арсеньев А. А. О приближении решения уравнения Больцмана решениями стохастических дифференциальных уравнений Ито // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1987. Т. 27, № 3. С. 400–410.
 96. Артемьев В. М. Теория динамических систем со случайными изменениями структуры. Минск: Выш. школа, 1979.
 97. Артемьев В. М., Ганэ В. А., Степанов В. Л. Управление в системах с разделением времени. Минск: Выш. школа, 1982.
 98. Артемьев В. М., Ивановский А. В. Управление дискретными системами со случайным периодом квантования. М.: Энергоатомиздат, 1986.
 99. Артемьев С. С. Построение полуявных методов Рунге–Кутты // Докл. АН СССР. 1976. Т. 228, № 4. С. 776–778.
 100. Артемьев С. С. Сравнение некоторых методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений / ВЦ СО РАН. Препринт № 474. Новосибирск, 1984.
 101. Артемьев С. С. Алгоритм переменного шага для численного решения стохастических дифференциальных уравнений // Числ. методы механ. сплошн. среды. Новосибирск, 1985. Т. 16, № 3. С. 14–23.
 102. Артемьев С. С. Статистическое моделирование некоторых двумерных диффузионных процессов // Теория и приложения статистического моделирования. Новосибирск, 1988. С. 107–123.
 103. Артемьев С. С. Численное решение интегро-дифференциальных уравнений с помощью СДУ / ВЦ СО АН СССР. Препринт № 852. Новосибирск, 1989.

104. Артемьев С. С. Численные методы решения задачи Коши для систем обыкновенных и стохастических дифференциальных уравнений. Новосибирск: ВЦ СО РАН, 1993.
105. Артемьев С. С. Устойчивость численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений // Сиб. мат. журнал. 1994. Т. 35, № 6. С. 1210–1214.
106. Артемьев С. С. Численное решение обыкновенных и стохастических дифференциальных уравнений. Новосибирск: НГУ, 1995.
107. Артемьев С. С., Иванов А. А., Смирнов Д. Л. Новые частотные характеристики численного решения стохастических дифференциальных уравнений // СибЖВМ. 2015. Т. 18, № 1. С. 1–10.
108. Артемьев С. С., Якунин М. А., Михайличенко И. Г., Шкурко И. О. Диалоговая система «Динамика и Управление». Новосибирск: ВЦ СО РАН, 1994.
109. Астапов Ю. М., Медведев В. С. Статистическая теория систем автоматического регулирования и управления. М.: Наука, 1982. 304 с.
110. Аттала М. А. Об одном приближенном методе моделирования стохастических дифференциальных уравнений // Асимптотические задачи теории случайных процессов. Киев: Б. и., 1987. С. 15–22.
111. Беляев Ю. К. Пуассоновский точечный процесс. Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия. М.: Большая Рос. энциклопедия, 1999. С. 525–526.
112. Борисов А. В. Предварительный анализ распределения состояний специальных управляемых систем случайной структуры // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2005. № 1. С. 48–62.
113. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах твердотельной ориентации. Наука, 1973.
114. Бублик Я. С. Асимптотический анализ моделей страхования при дважды стохастических потоках страховых премий и выплат: Дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук. Томск, 2014.
115. Булинский А. В., Ширяев А. Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005.
116. Бухалев В. А. Оптимальное сглаживание в системах со случайной структурой. М.: Физматлит, 2013. 188 с.

117. Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986.
118. Вентцель А. Д. Курс теории случайных процессов. М.: МГУ, 1996.
119. Востриков А. А., Дубов Д. Ю. Реальные свойства кластеров и модель конденсации / Институт теплофизики СО АН СССР. Препринт № 112. Новосибирск, 1984.
120. Галкин В. А. Уравнение Смолуховского. М.: Физматлит, 2001. 336 с.
121. Ганэ В. А., Куклев Е. А., Степанов В. Л. Системы управления при скачкообразных воздействиях. Минск: Наука и техника, 1985.
122. Гардинер К. В. Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986.
123. Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наукова думка, 1968.
124. Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1982. 611 с.
125. Гольберг Г. А., Зац В. И., Немеровский М. С., Розман Л. Д. Процессы турбулентной диффузии в море // Проблемы химического загрязнения вод Мирового океана. Л.: Гидрометеоздат, 1986. Т. 2.
126. Гурман В. И. Вырожденные задачи оптимального управления. М.: Наука, 1977. 304 с.
127. Гуцин А. А. Пуассоновская мера // Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия. М.: Большая Рос. энциклопедия, 1999. С. 524.
128. Дмитриев Н. В. Математическое моделирование вертикального турбулентного обмена в верхнем слое океана. Новосибирск: ВЦ СО РАН, 1993.
129. Добрушин Р. Л. Пуассоновское случайное поле. Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия. М.: Большая Рос. энциклопедия, 1999. С. 526.
130. Дубко В.А. Интегральные инварианты для одного класса систем стохастических дифференциальных уравнений // Доклады АН УССР. Серия А, 1984. № 1. С. 18–21.
131. Дубко В. А. Проблема инвариантности и алгоритм построения множества автоморфных преобразований для заданной функции // "Відкриті еволюційні системи" міжнар. наук.-практ. конф. (II; 2003, Київ).

- Перша міжнародна науково-практична конференція "Відкриті еволюційні системи"(1–30 грудня 2003 р.). – Т. II, К., ВНЗ ВМУРoЛ, 2004.
132. Дынкин Е. Б. Марковские процессы. М.: Физматгиз, 1963.
 133. Елепов Б. С., Кронберг А. А., Михайлов Г. А., Сабельфельд К. К. Решение краевых задач методом Монте-Карло. Новосибирск, 1980.
 134. Ермаков С. М., Некруткин В. В., Сипин А. С. Случайные процессы для решения классических уравнений математической физики. М.: Наука, 1984.
 135. Ермаков С. М., Михайлов Г. А. Статистическое моделирование. М.: Наука, 1982.
 136. Ермаков С. М., Михайлов Г. А. Курс статистического моделирования. М.: Наука, 1976.
 137. Змиевская Г. И. Численные стохастические модели неравновесных процессов // Мат. моделирование. 1996. Т. 8, № 11. С. 3–40.
 138. Змиевская Г. И. Стохастические аналоги неравновесных столкновительных процессов // Физика плазмы. 1997. Т. 23, № 4. С. 368–382.
 139. Змиевская Г.И. Неравновесная кинетика начальной стадии фазового перехода// Физика Твёрдого Тела, 2020. Т. 62, №1, С. 40-45, DOI:10.21883/ФТТ.2020.730.58ks
 140. Змиевская Г. И., Бондарева А. Л. Островки тонкой пленки полупроводника и численный эксперимент // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2010. № 10. С. 50–58.
 141. Змиевская Г. И., Бондарева А. Л. Кристаллические островки тонких пленок полупроводника // Физика плазмы. 2011. Т. 37, № 1. С. 93–102.
 142. Змиевская Г. И., Бондарева А. Л. Кинетика возникновения пористости и изменение свойств материалов в численных моделях // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2016. № 8. С. 33–40.
 143. Казаков И. Е. Статистическая динамика систем с переменной структурой. М.: Наука, 1977.
 144. Казаков И. Е., Артемьев В. М. Оптимизация динамических систем случайной структуры. М.: Наука, 1980.
 145. Казаков И. Е., Артемьев В. М., Бухалев В. А. Анализ систем случайной структуры. М.: Физматлит, 1993.

146. Карачанская Е.В. Построение программных управлений с вероятностью 1 для динамической системы с пуассоновскими возмущениями // Вестник ТОГУ. 2011. Т. 21. № 2. С. 51 - 59.
147. Карачанская Е.В. Интегральные инварианты стохастических систем и программное управление с вероятностью 1. — Хабаровск: Изд-во Тихоокеанского гос. ун-та, 2015.
148. Карлин С. Основы теории случайных процессов. М.: Мир, 1971.
149. Керстан Й., Маттекс К., Мекке Й. Безгранично делимые точечные процессы. М. 1982.
150. Кожевников А. С., Рыбаков К. А. Анализ нелинейных стохастических систем управления с импульсными воздействиями, образующими эрланговские потоки событий // Научный вестник МГТУ ГА. 2012. № 184 (10). С. 37–45.
151. Кожевников А. С., Рыбаков К. А. Спектральный метод анализа стохастических систем с разрывами траекторий, характеризуемыми чередованием эрланговских распределений // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2013. № 4. С. 231–244.
152. Кожевников А. С., Рыбаков К. А. Спектральный метод анализа стохастических систем с разрывами траекторий, описываемыми случайной смесью эрланговских распределений // Управление большими системами. Вып. 45. М.: ИПУ РАН, 2013. С. 47–71.
153. Колмогоров А. Н. Об аналитических методах в теории вероятностей // УМН. 1938, вып. 5. С. 5–41.
154. Королук В. С., Портенко И. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985.
155. Косачев И. М. Математическая модель процесса самонаведения противорадиолокационной ракеты HARM на ЗРК, оснащенный средствами радиолокационной защиты типа «Дублер» // Вестник Военной академии Республики Беларусь. 2012. № 2. С. 17–29.
156. Косачев И. М., Бойцов О. Г., Меликаев В. В. Новые высокоэффективные методы наведения телеуправляемых ЗУР // Сб. докл. Междунар. воен.-науч. конф., Минск, 10–16 марта 2000 г. Минск, 2000. С. 176–191.

157. Косачев И. М., Ерошенко М. Г. Аналитическое моделирование стохастических систем. Минск: Навука і тэхніка, 1993.
158. Косачев И. М., Чугай К. Н. Имитационная математическая модель контура наведения зенитной телеуправляемой ракеты зенитного ракетного комплекса с комплексированной информационной системой // Вестник Военной академии Республики Беларусь. 2017. № 4 (57). С. 25–32.
159. Косачев И. М., Чугай К. Н. Аналитическая математическая модель контура наведения зенитной телеуправляемой ракеты зенитного ракетного комплекса с комплексированной информационной системой // Вестник Военной академии Республики Беларусь. 2018. № 1 (58). С. 23–34.
160. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1975.
161. Красовский Н. Н. Об оптимальном регулировании при случайных возмущениях // ПММ. 1960. Т. 24, вып. 1. С. 64–79.
162. Красовский Н. Н. О стабилизации неустойчивых движений дополнительными силами при неполной обратной связи // ПММ. 1963. № 27. Вып. 4. С. 641–663.
163. Красовский А. А. Фазовое пространство и статистическая теория динамических систем. М.: Наука, 1974.
164. Красовский А. А. Справочник по теории автоматического управления. М.: Наука, 1987.
165. Красовский Н. Н., Лидский Э. А. Аналитическое конструирование регуляторов в системах со случайными свойствами, I–III // Автоматика и телемеханика. 1961. Т. 22. С. 9–11.
166. Крылов Н. В. Управляемые процессы диффузионного типа. М.: Наука, 1977.
167. Кузнецов Д. Ф. Конечно-разностные аппроксимации разложений Тейлора – Ито и конечно-разностные методы численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений Ито. 1996. 24 с. Деп. в ВИНИТИ. 3509-В96.
168. Кузнецов Д.Ф. Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. СПб.: Изд-во Политехнического ун-та, 2009.

169. Кузнецов Д. Ф. Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений Ито. С программами в среде Matlab. Lambert Academic Publishing, Saarbrucken, 2012.
170. Кузнецов Д. Ф. Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. С программами в среде MATLAB, 6-е издание // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2018. № 4. URL: diffjournal.spbu.ru/pdf/kuznetsovd2018.pdf.
171. Кузнецов Д. Ф. Разработка и применение метода Фурье к численному интегрированию стохастических дифференциальных уравнений Ито // ЖВМиМФ. 2018. Т. 58, № 7. С. 109–1122.
172. Кузнецов Д. Ф. К численному моделированию многомерных динамических систем при случайных возмущениях с порядками сильной сходимости 1.5 и 2.0 // Автоматика и телемеханика. 2018. № 7. С. 80–98.
173. Лазарев Ю. Н. Управление траекториями аэрокосмических аппаратов. Самара: Самар. науч. центр РАН, 2007.
174. Левченко Т.В. Разработка и применение метода стохастического аналога в задачах неравновесной кинетики и геофизических приложениях. Диссертация кандидата физико-математических наук : 25.00.10.- Москва, 2001.- 94 с.: ил. РГБ ОД, 61 02-1/160-6
175. Леонтович М. А. Введение в термодинамику. Статистическая физика. М.: Наука, 1983.
176. Лукшин А. В., Смирнов С. Н. Численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений // Матем. моделирование. 1990. Т. 2. № 11. С. 108–121.
177. Лысенко Л. Н. Наведение и навигация баллистических ракет. М.: МГТУ, 2007.
178. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. М.: Сов. радио, 1978.
179. Марчук Г. И., Михайлов Г. А., Назаралиев М. А. и др. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике. Новосибирск: Наука, 1976.
180. Матросов В. М., Веретенников В. Г. О научно-образовательной программе разработки университетских пикоспутников Земли; о их стабилизации и устойчивости при возмущениях // Тез. докл. конф. «Авиация и космонавтика – 2004». М., 2004.

181. Мильштейн Г. Н. Приближенное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений // ТВП. 1974. Т. 19, вып. 3. С. 583–588.
182. Мильштейн Г. Н. Метод второго порядка точности интегрирования стохастических дифференциальных уравнений // ТВП. 1978. Т. 23, вып. 2. С. 414–419.
183. Мильштейн Г. Н. Слабая аппроксимация решений систем СДУ // ТВП. 1985. Т. 30, вып. 4. С. 706–721.
184. Мильштейн Г. Н. Теорема о порядке сходимости среднеквадратических аппроксимаций решений систем СДУ // ТВП. 1987. Т. 32, вып. 4. С. 809–811.
185. Мильштейн Г. Н. Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. Свердловск: УГУ, 1988.
186. Михайлов Г. А. К вопросу о построении экономичных алгоритмов моделирования случайных величин // ЖВМиМФ. 1966. Т. 6, №. 6. С. 1134–1136.
187. Михайлов Г. А. Метод моделирования длины свободного пробега частиц // Атомная энергия. 1970. Т. 28, № 2. С. 175.
188. Михайлов Г. А. Некоторые вопросы теории методов Монте-Карло. Новосибирск: Наука, 1974.
189. Михайлов Г. А. Приближенные модели случайных процессов и полей // ЖВМиМФ. 1983. Т. 23, № 3. С. 558–566.
190. Михайлов Г. А. Весовые методы Монте-Карло. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
191. Михайлов Г. А., Аверина Т. А. Алгоритм «максимального сечения» в методе Монте-Карло // Докл. РАН. 2009. Т. 428, № 2. С. 163–165. (Имеется перевод: Mikhailov G. A., Averina T. A. The maximal section algorithm in the Monte Carlo method // Doklady Mathematics, 2009. Vol. 80, N 2. P. 671–673.)
192. Михайлов Г. А., Аверина Т. А. Статистическое моделирование неоднородных случайных функций на основе пуассоновских точечных полей // Докл. РАН. 2010. Т. 434, № 1. С. 29–32. (Имеется перевод: Mikhailov G. A., Averina T. A. Statistical modeling of inhomogeneous random functions on the basis of Poisson point fields // Doklady Mathematics. 2010. Vol. 82, N 2. P. 701–704.)

193. Михайлов Г. А., Войтишек А. В. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. М.: Академия, 2006.
194. Михайлов Г. А., Рогазинский С. В. Модифицированный метод «мажорантной частоты» для численного моделирования обобщенного экспоненциального распределения // Докл. РАН. 2013. Т. 444, № 1. С. 28–30.
195. Насыров Ф. С. Локальные времена, симметричные интегралы и стохастический анализ. М.: Физматлит, 2011.
196. Неймарк Ю., Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
197. Никитин Н. Н., Разевиг В. Д. Методы цифрового моделирования стохастических дифференциальных уравнений и оценка их погрешностей // ЖВМиМФ. 1978. Т. 18, № 1. С. 106–117.
198. Озмидов Р. В. Диффузия примеси в океане. Л.: Гидрометеоиздат, 1986.
199. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М.: Мир, 2003.
200. Пакшин П. В. Устойчивость дискретных систем со случайной структурой при постоянно действующих возмущениях // Автоматика и телемеханика. 1983. № 6. С. 74–84.
201. Пакшин П. В. Дискретные системы со случайными параметрами и структурой. М.: Физматлит, 1994.
202. Пантелеев А. В., Рыбаков К. А., Сотскова И. Л. Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. М.: Вузовская книга, 2015.
203. Параев Ю. И. Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. М.: Сов. радио, 1976.
204. Платен Е. Метод аппроксимации для классов процессов Ито // Лит. мат. сб. 1981. Т. 21, №1. С. 121–133.
205. Пригарин С. М. Новые подходы к построению численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений / ВЦ СО РАН. Препринт № 1020. Новосибирск, 1994.
206. Пригарин С.М. Методы численного моделирования случайных процессов и полей. — Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2005.
207. Пугачев В. С., Синицин И. Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М.: Наука, 1987.

208. Пугачев В. С., Синицын И. Н. Теория стохастических систем. М.: Логос, 2000.
209. Рыбаков К. А. Оптимальное управление стохастическими системами со случайным периодом квантования // Труды МФТИ. 2015. Т. 7, № 1 (25). С. 145–165.
210. Рыбаков К. А. Статистические методы анализа и фильтрации в непрерывных стохастических системах. М.: МАИ, 2017.
211. Рыбаков К. А., Сотскова И. Л. Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем со случайными изменениями структуры // Изв. вузов. Приборостроение. 2006. Т. 49, № 3. С. 8–16.
212. Рыбаков К. А., Сотскова И. Л. Оптимальное управление нелинейными системами со случайной структурой при неполной информации о векторе состояния // Автоматика и телемеханика. 2006. № 7. С. 62–75.
213. Сабельфельд К. К. О приближенном вычислении винеровских континуальных интегралов методом Монте-Карло, Ж. Вычисл. Матем. и Матем. Физ., 1979. Т.19, № 1. С. 29–43.
214. Сальников А. Г. Параметрический анализ некоторых стохастических динамических систем с колебательным решением // Труды конф. молодых ученых ИВМиМГ (ВЦ) СО РАН. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2002. С. 138–144.
215. Семенов В. В., Пантелеев А. В., Руденко Е. А., Бортаковский А. С. Методы описания, анализа и синтеза нелинейных систем управления. М.: МАИ, 1993.
216. Синицын И. Н. Фильтры Калмана и Пугачева. М.: Логос, 2007.
217. Скороход А. В. Исследования по теории случайных процессов. Киев: КГУ, 1961.
218. Смолуховский М. К кинетической теории броуновского молекулярного движения и суспензий // Эйнштейн А., Смолуховский М. Броуновское движение. М.; Л.: ОНТИ, 1936. С. 133–165.
219. Смолуховский М. Три доклада о диффузии, броуновском молекулярном движении, о коагуляции коллоидных частиц. // Эйнштейн А., Смолуховский М. Броуновское движение. М.; Л.: ОНТИ, 1936. С. 332–416.
220. Соболев И. М. Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, 1973.

221. Солодовников В. В., Семенов В. В., Пешель М., Недо Д. Расчет систем управления на ЦВМ: спектральный и интерполяционный методы. М.: Машиностроение, 1979.
222. Стратонович Р. Л. Условные процессы Маркова // Теория вероятностей и ее применения. 1960. Т. 5, № 2. С. 172–195.
223. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуации в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961.
224. Стратонович Р. Л. Условные марковские процессы и их применение в теории оптимального управления. М.: МГУ, 1966.
225. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977.
226. Федосов Е. А., Инсаров В. В., Селивохин О. С. Системы управления конечным положением в условиях противодействия среды. М.: Наука, 1989.
227. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984. Т. 2.
228. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980.
229. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990.
230. Хапова Н. Математическое моделирование диффузионных процессов с марковскими переключениями. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико - математических наук. НГТУ. Нижний Новгород, 2015.
231. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969.
232. Чандрасекар С. Стохастические проблемы в физике и астрономии. М.: ИЛ, 1947.
233. Черных Н. В., Пакшин П. В. Алгоритмы численного решения стохастических дифференциальных систем с переключаемой диффузией // Управление большими системами. Сборник трудов. М: ИПУ РАН. 2012. Вып. 36. С. 106–143.

234. Черных Н. В. Моделирование решений СДУ с марковскими переключениями // Управление большими системами. Сборник трудов. М: ИПУ РАН, 2012. Вып. 40. С. 108–143.
235. Черных Н. В. Неявные сильные методы численного моделирования решений СДУ с марковскими переключениями // Управление большими системами. Сборник трудов. М: ИПУ РАН, 2014. Вып. 50. С. 58–83.
236. Adewumi D. O. The digital simulation of stochastic differensial equations driven by Wiener process via the Stratonovich integral // Adv. Modelland Simul. 1985. V. 2, N 3. P. 33–43.
237. Artemiev S. S., Averina T. A. Numerical solution of SDE // Soviet J. Numer. Anal. Math. Modelling. V. 3, N 4. 1988. P. 267–285.
238. Artemiev S. S., Averina T. A. Numerical Analysis Systems of Ordinary and Stochastic Differential Equations. Utrecht, The Netherlands: VSP, 1997.
239. Artemiev S. S., Shkurko I. O. Numerical Analysis of Dynamics of Oscillatory Stochastic Systems // Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1991. V. 6, N 4. P. 277–298.
240. Ashok K. Lunar, Rex E. Britter. A random walk model for dispersion in inhomogeneous turbulence in a convective boundary layer // Atmospheric Environment, 1989. V. 23, N 9. P. 1911–1924.
241. Averina T. A. Algorithm for statistical simulation of two types of random-structure systems // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2001. V. 16, N 6. P. 467–482.
242. Averina T. A. Algorithm of statistical simulation of dynamic systems with conditional Markovian change of structure // Proc. Intern. Conf. Comput. Math. Novosibirsk: ICM&MG Publisher, 2002. V. 1. P. 196–200.
243. Averina T. A. Algorithm of statistical simulation of dynamic systems with distributed change of structure // Monte Carlo Methods and Appl. 2004. V. 10, N 3–4. P. 221–226.
244. Averina T. A. Numerical solution to SDEs systems with a Poisson component // Proceedings of the 5th St. Petersburg Workshop on Simulations. St. Petersburg. NII Chemistry St. Petersburg University Publishers, 2005. P. 172–177.

245. Averina T. A. Statistical simulation methods for non-homogeneous Poisson ensembles // Proceedings of the 6th St. Petersburg Workshop on Simulation. St. Petersburg: VVM com. Ltd, 2009. V. 1. P. 133–136.
246. Averina T.A., Dmitriev N.V., Sabelfeld K.K. Simulation of the turbulent transport in the turbulent layer of the ocean // The Third Russian - Japan Joint Symposium on Computayonal Fluid Dynamics. August 25-30, 1992. Book of abstracts II. Vladivostok. Russia, 1992. P. 81-82 3c.
247. Averina T. A., Karachanskaya E. V., Rybakov K. A. Statistical modeling of random processes with invariants // Proceedings of the 2017 International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON). Novosibirsk Akademgorodok, Russia, September 18–22, 2017 // IEEE. 2017. P. 34–37.
248. Averina T. A., Karachanskaya E. V., Rybakov K. A. Statistical analysis of diffusion systems with invariants // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2018. Vol. 33, iss. 1. P. 1–13.
249. Averina T. A., Rybakov K. A. Comparison of a statistical simulation method and a spectral method for analysis of stochastic multistructure systems with distributed transitions // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2007. V. 22, N 5. P. 431–448.
250. Averina T. A., Rybakov K. A. Systems with regime switching on manifolds // Proceedings of the XIV International Conference "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems"(Pyatnitskiy's Conference) (STAB). Moscow, Russia, 30 May – 1 June, 2018 // IEEE, 2018. P. 1–3. DOI: 10.1109/STAB.2018.8408345.
251. Averina T. A., Rybakov K. A. A Modification of Numerical Methods for Stochastic Differential Equations with First Integrals // Numerical Analysis and Applications. 2019. V. 12 (3). P. 203–218.
252. Averina T., Rybakov K. Maximum Cross Section Method in Optimal Filtering of Jump-Diffusion Random Processes // Proc. 15th Int. Asian School-Seminar Optimization Problems of Complex Systems. 2019. Id 8880234, P. 8–11.
253. Averina T. A., Rybakov K. A. Using maximum cross section method for filtering jump-diffusion random processes // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2020. V. 35, N 2. P. 55–67.

254. Averina T., Rybakov K. Statistical filtering algorithms based on the maximum cross section method for stochastic systems with regime switching // *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. V. 1715, N 1. Id 012060.
255. Averina T. A., Rybakov K. A. Maximum cross section method in the filtering problem for continuous systems with Markovian switching // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*. 2021. V. 36, N 3. P. 127–137. DOI: <https://doi.org/10.1515/rnam-2021-0011>
256. Averina T. A., Zmievskaia G. I. Numerical modeling of the initial fluctuation condensation stage with charge drops // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* 2016. V. 158, N 1. DOI:10.1088/1757-899X/158/1/012010.
257. Bain A. and Crisan D. *Fundamentals of Stochastic Filtering*. Springer, 2009.
258. Baldi P. Exact asymptotics for the probability of exit from a domain and applications to simulation // *Ann. Prob.* 1995. V. 23, N 4. P. 1644–1670.
259. Bao J., Hou Z. An analytic approximation of solutions of stochastic differential delay equations with Markovian switching // *Mathematical and Computer Modelling*. 2009. V. 50. P. 1379–1384.
260. Bar-Shalom Y., Li X. R. and Kirubarajan T. *Estimation with Applications to Tracking and Navigation*. John Wiley & Sons, 2001.
261. Bashelie. Les probabilités a plusieurs variables // *Ann. de l'Ecole norm.* 1910. V. 27. P. 339.
262. Berne B. J., Pecora R. *Dynamic Light Scattering*. New York: Wiley, 1976.
263. Bernstein S. *Principles de la theorie des equations differentielles stochastiques* // *Труды физ.-мат. ин-та им. Стеклова*. 1934. Т. 5. С. 95–124.
264. Bernstein S. *Equations differentielles stochastiques* // *Actualites Sci. Indust.* 1938. V. 738. P. 5–31.
265. Bondareva A., Zmievskaia G., Levchenko T. Radiation damage thin coating of silicon carbide // *Journal of Physics: Conf. Series*. 2010. V. 510. DOI:10.1088/1742-6596/510/1/012010.
266. Borodin A. N., Salminen P. *Handbook of Brownian Motion. Facts and Formulae*. Basel; Boston; Berlin: Birkhauser Verlag, 1996.
267. Bruti-Liberati N., Platen E. Strong approximations of stochastic differential equations with jumps // *J. Comput. Appl. Math.* 2007. V. 205(2). P. 982–1001.

268. Bukhalev V. A. The analysis of the accuracy of dynamic systems changing their structure in the random time moment // *Problem of Control and Information Theory*. 1975. V. 4(3).
269. Burrage K., Burrage P. M. and Tian T. Numerical methods for strong solutions of stochastic differential equations: an overview // *Proc. R. Soc. Lond. A*. **460** (2004), No. 2041, 373–402.
270. Burrage K. and Tian T., Predictor-corrector methods of Runge–Kutta type for stochastic differential equations // *SIAM J. Numer. Anal.* **40** (2002), No. 4, 1516–1537.
271. Cappé O., Godsill S. J. and Moulines E. An overview of existing methods and recent advances in sequential Monte Carlo. // *Proc. IEEE* **95** (2007), No. 5, 899–924.
272. Ceci C. and Colaneri K. Nonlinear filtering for jump diffusion observations // *Adv. in Appl. Probab.* **44** (2012), No. 3, 678–701.
273. Ceci C. and Colaneri K. The Zakai equation of nonlinear filtering for jump-diffusion observations: existence and uniqueness // *Appl. Math. Optim.* **69** (2014), No. 1, 47–82.
274. Chalykh E. V. Constructing the set of program controls with probability 1 for one class of stochastic systems // *Autom. Remote Control* **70** (2009), No. 8, 1364–1375.
275. Chernykh N.V. Pacshin P.V. Numerical solution algorithms for stochastic differential systems with switching diffusion // *Automation and Remote Control*. 2013. V. 74. N. 12. P. 2037–2063.
276. Choi T. J. Stochastic modeling of advection-diffusion-reaction processes in biological systems // A dissertation submitted in partial satisfaction of the requirements for the degree Doctor of Philosophy in Engineering Sciences (Mechanical Engineering). University of California, San Diego. 2013.
277. Clark J. M. C. An efficient approximation for a of stochastic differential equations // *Adv. in Filtering and Optimal Stoc. Control, Lect. Notes in Control and Inf. Sci.* 1982. V. 42. P. 69–78.
278. Coleman W. A. Mathematical verification of a certain Monte Carlo sampling technique and applications of the techniques to radiation transport problems. // *J. Nucl. Sci. and Eng.* 1968. V. 32, N 1. P. 76–81.

279. Cont R., Tankov P. *Financial Modelling With Jump Processes*. Chapman & Hall/CRC, A CRC Press Company. Boca Paton, London, New York, Washington, D.C, 2004.
280. Convergence rate of numerical solutions to SFDEs with jumps / J. Bao, B. Bottcher, X. Mao, C. Yuan // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2011. V. 236. P. 119–131.
281. Dahlquist G. A special stability problem for linear multistep methods // *BIT*. 1963. V. 3. P. 27–43.
282. Dargatz C. A diffusion approximation for an Epidemic Model. Ludwig-Maximilian University Munich, 2007.
283. Einstein A. Ueber die von der molekularkinetischen Theorie der Waerme geforderte Bewegung von in ruhenden Fluessigkeiten suspendierten Teilchen // *Annalen der Physik*, 17 (1905) P. 549–560.
284. Ekert A., Hayden P., Inamori H. Basic concepts in quantum computation. 2000. URL: arXiv.org/abs/quant-ph/0011013.
285. Elliott R., Krishnamurthy V., Sass J. Moment based regression algorithms for drift and volatility estimation in continuous-time Markov switching models // *Econometrics Journal*. 2008. V. 11. P. 244–270.
286. Emelianova J., Pakshin P., Galkowski K., Rogers E. Stability of nonlinear discrete repetitive processes with markovian switching // *Systems & Control Letters*. 2015. V. 75. P. 108–116.
287. Fard F. A., Siu T. K. Pricing and managing risks of European-style options in a Markovian regime-switching binomial model // *Annals of Finance*. 2013. V. 9, N 3. P. 421–438.
288. Feng L., Shen Y., Li Z. Suppression of functional system with Markovian Switching // *Neural Information Processing Lecture Notes in Computer Science*. 2012. V. 7664. P. 460–466.
289. Fokker A. D. Die mittlere Energie rotierender elektrischer Dipole im Strahlungsfeld // *Annalen der Physik*. 1914. 348(5). P. 810–820.
290. Ghosh M., Arapostathis A. and Marcus S. Optimal control of switching diffusions with application to flexible manufacturing systems. // *SIAM J. Control Optim.* **31** (1993), No. 5, 1183–1204.

291. Ghosh M. K., Arapostathis A., Marcus S. I. Ergodic control of switching diffusions // *SIAM J. on control and Optimization*. 1997. V. 35, N 6. P. 1952–1988.
292. Ghosh M. K., Bagchi A. Modeling stochastic hybrid systems // *System Modelling and Optimization* (ed. J. Cagnol, J.-P. Zolesio). V. 166. Kluwer Academic Publishers, 2005. P. 271–280.
293. Gobet E. Weak approximation of killed diffusion using Euler schemes // *Stochastic Processes and their Applications*. 2000. V. 87. P. 167–197.
294. Goel N. S., Richier-Dyn N. *Stochastic Models in biology*. N. Y.: Academ Press, 1974.
295. Gragg W. B. Repeated extrapolation to the limit in the numerical solution of ordinary differential equations // *SIAM J. Numer. Anal.* 1965. V. 2. P. 384–403.
296. Hahn M., Sass J. Parameter Estimation in Continuous Time Markov Switching Models: A Semi-Continuous Markov Chain Monte Carlo Approach // *Bayesian Analysis*. 2009. V. 4, N 1. P. 63–84.
297. Hahn M., Fruhwirth-Schnatter S., Sass J. Markov Chain Monte Carlo Methods for Parameter Estimation in Multidimensional Continuous Time Markov Switching Models // *Journal of Financial Econometrics*. 2010. V. 8, N 1. P. 88–121.
298. Hanson F. B. *Applied Stochastic Processes and Control for Jump-Diffusions: Modeling, Analysis and Computation*. SIAM, 2007
299. Hazewinkel M. and Marcus S. I. // On Lie algebras and finite dimensional filtering. *Stochastics*, 1982. V. 7, N 1–2. P. 29–62.
300. He Q., Yin G. Moderate deviations for time-varying dynamic systems driven by nonhomogeneous Markov chains with two-time scales // *Stochastics*. 2014. V. 86. P. 527–550.
301. Helfand E. Numerical integration of stochastic differential equations // *Bell. Syst. Techn. J.* 1979. V. 58, N 10. P. 2289–2290.
302. Herrmann M , Schwarz S., Sturm A., Wardetzky M. Efficient Random Walks on Riemannian Manifolds // arXiv preprint arXiv:2202.00959, 2022
303. Ito Kiyosi and McKean Henry. *Diffusion Processes and Their Sample Paths*. Berlin: Springer Verlag. 1974.

304. Ito Kiyosi. Foundations of Stochastic Differential Equations in Infinite Dimensional Spaces. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics. 1984.
305. Jasso-Fuentes H., Yin G. Advanced criteria for controlled Markov-modulated diffusions in an Infinite Horizon: Overtaking, Bias, and Blackwell Optimality. Science Press, Beijing, China, 2013.
306. Jin Z., Yin G., Wu F. Optimal reinsurance strategies in regime-switching jump diffusion models: Stochastic differential game formulation and numerical methods // *Mathematics & Economics*. 2013. V. 53 (3). P. 733–746.
307. Kallenberg O. Random measures. New York; London: Academic Press; Berlin: Akademie-Verlag, 1986.
308. Kampen N. G. Stochastic Processes in Physics and Chemistry. Amsterdam; New York; North-Holland; Oxford, 1981.
309. Karachanskaya E. V. The generalized Ito–Venttsel’ formula in the case of a noncentered Poisson measure, a stochastic first integral, and a first integral, *Siberian Advances in Mathematics* **25** (2015), 191–205.
310. Khrustalev M. M., Rumyantsev D. S. Synthesis of optimal control strategy by damping a vibration of Earth flexible satellite with a gravity-gradient stabilization with information constraints // Report on 58-th International Astronautical Congress. Hyderabad, 2007.
311. Klauder P. E., Pearson R. A. The numerical solution of stochastic differential equations // *J. Austral. Math. Soc.* 1977. V. 20. Ser. B. P. 8–12.
312. Kloeden P. E., Platen E. The Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Berlin, Heidelberg, New-York: Springer, 1992.
313. Kloeden P. E. and Platen E. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer, 1995.
314. Kloeden P. E., Platen E., Schurz H. Numerical solution of SDE through computer experiments. Berlin; Heidelberg; New-York: Springer-Verlag, 1994.
315. Kontorovich V. Pontryagin equations for non-linear dynamic systems with random structure // *Nonlinear Analysis*. 2001. V. 47, N 3. P. 1501–1512.
316. Koutsoukos X., Riley D. Computational methods for reachability analysis of stochastic hybrid systems // *Hybrid Systems: Computation and Control Lecture Notes in Computer Science*. 2006. V. 3927. P. 377–391.

317. Kozhevnikov A.S., Rybakov K.A. Analysis of nonlinear stochastic systems with jumps generated by Erlang flow of events // *Open Journal of Applied Sciences*. 2013, V. 3. N 1. P. 1–7.
318. Krystul J., Blom H. Monte Carlo simulation of rare events in hybrid systems // *HYBRIDGE Project IST-2001-32460, Work Package WP8, Deliverable D8.3*, 2004.
319. Krystul J., Blom H. Sequential Monte Carlo simulation for the estimation of small reachability probabilities for stochastic hybrid systems // *2006 Second International Symposium on Communications, Control and Signal Processing*. 13–15 Mar 2006, Marrakech, Morocco.
320. Kubilius K., Platen E. Rate of weak convergence of the Euler approximation for diffusion processes with jumps // *Monte Carlo Methods Appl.* 2002. V. 8, N 1. P. 83–96.
321. Kuznetsov D.F. Mean-Square Approximation of Iterated Ito and Stratonovich Stochastic Integrals: Method of Generalized Multiple Fourier Series. Application to Numerical Integration of Ito SDEs and Semilinear SPDEs, *Differential Equations and Control Processes*, 2021, No. 4.
322. Kuznetsov D.F. Strong Approximation of Iterated Ito and Stratonovich Stochastic Integrals Based on Generalized Multiple Fourier Series. Application to Numerical Solution of Ito SDEs and Semilinear SPDEs. arXiv:2003.14184v25 [math.PR], 2022, 846 pp.
323. Langevin P. Sur la theorie du mouvement brownien // *C. R. Acad. Sci. (Paris)* 1908. V. 146. P. 30–533.
324. Legg B. J., Raupach V. R. Markov chain simulation of particle dispersion in inhomogeneous flows: The mean drift velocity induced by a gradient in Eulerian velocity variance // *Bound. Layer Meteor.* 1982. N 24.
325. Levskii M. V., Kinematically optimal spacecraft attitude control // *J. Comput. System Sci. Int.* **54** (2015), No. 1, 116–132.
326. Li D., Ma C. Attractor and stochastic boundedness for stochastic infinite delay neural networks with Markovian switching // *Neural Processing Letters*. 2014. V. 40, N 2. P. 127–144.
327. Li H., Xiao L., Ye J. Strong predictor-corrector Euler–Maruyama methods for stochastic differential equations with Markovian switching // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2013. V. 237, N 1. P. 5–17.

328. Li X. R. and Jilkov V. P. Survey of maneuvering target tracking. Part V: Multiple-model methods // *IEEE Trans. Aerospace Electronic Syst.* **41** (2005), No. 4, 1255–1321.
329. Liu R.H., Zhang Q., Yin G. Option pricing in a regime – switching model using the fast fourier transform // *Econometrics Journal.* 2008. V. 11. P. 244–270.
330. Ma Jingtang, Chen Yong. Convergence rates of the numerical methods for the delayed PDEs from option pricing under regime switching hard-to-borrow models // *International Journal of Computer Mathematics,* 10.1080/00207160.2019.1685663, (1-23), (2019).
331. Maller R. A., Müller G. and Szimayer A. Ornstein–Uhlenbeck processes and extensions. In T. Mikosch, J.-P. Kreiß, R. A. Davis, and T. G. Andersen (eds), *Handbook of Financial Time Series*, pp. 421–437, Springer, 2009.
332. Mao X. Stability of stochastic differential equations with Markovian switching // *Stoch. Proce. Appl.* 1999. V. 79. P. 45–67.
333. Mao X. *Stochastic Differential Equations and Applications.* 2nd edition. Oxford; Cambridge; Philadelphia; New York: Woodhead Publishing. 2008.
334. Mao X., Szpruch L. Strong convergence rates for backward Euler–Maruyama method for non-linear dissipative-type stochastic differential equations with super-linear diffusion coefficients // *Stochastics An International Journal of Probability and Stochastic Processes.* 2013. V. 85, N 1. P. 144–171.
335. Mao X., Yuan C. *Stochastic differential equations with Markovian switching.* London: Imperial College Press. 2006.
336. Mao X., Yuan C., Yin G. Numerical method for stationary distribution of stochastic differential equations with Markovian switching // *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 2005. V. 174. P. 1–27.
337. Mao X., Yuan C., Yin G. Approximations of Euler–Maruyama type for stochastic differential equations with Markovian switching, under non-Lipschitz conditions // *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 2007. V. 205. P. 936–948.
338. Maruyama G. Continuous Markov process and stochastic equations// *Rend. Circ. Math. Palermo.* 1955. Ser. 2, N 4. P. 48–90.
339. Melsa J., Dannenberg K. Stability analysis of randomly digital control systems // *Automatica.* London, 1975. V. 11 (1).

340. Mikhailov G. A., Marchenko M. A. Parallel realization of statistical simulation and random number generators. // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*. 2002. V. 17, N. 1. P. 113–124.
341. Milstein G. N. The solving of boundary value problems by numerical integration of stochastic equations // *Mathematic and Computes in Simulation*. 1995. V. 38. P. 77–85.
342. Milstein G. N., Tretyakov M. V. *Stochastic numerics for mathematical physics*. Berlin: Springer-Verlag, 2004.
343. Modeling the diving behavior of whales: a latent-variable approach with feedback and semi-markovian components / R. Langrock // *Journal of Agricultural, Biological, and Environmental Statistics*. 2014, V. 19, N 1. P. 82–100.
344. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. Analytical solution of the time-optimal slew problem of a spherically symmetric spacecraft in the class of conical motions, *J. Comput. System Sci. Int.* **53** (2014), No. 2, 159–171.
345. Norkin B. V. The method of successive approximations for calculating the probability of bankruptcy of a risk process in a Markovian environment // *Cybernetics and Systems Analysis*. 2004. V. 40 (6). P. 917–927.
346. Pardoux E., Talay D. Discretization and Simulation of stochastic Differential Equations // *Acta Appl. Math.* 1985. N 3. P. 23–47.
347. Plank M. Uber einen Satz der statistischen Dynamik and seine Erweiterung in der Quantentheorie // *Sitzungsber. der Preuss. Akad.* 1917. V. 24. P. 324–341.
348. Platen E., Bruti-Liberati N. *Numerical solution of stochastic differential equations with jumps in Finance*. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2010.
349. Platen E., Wagner W. On a Taylor formula for a class of Ito processes // *Prob. Math. Stat.* 1982. V. 3. P. 37–51.
350. Poklukar D. R. Nonlinear filtering for jump-diffusions // *J. Comput. Appl. Math.* **197** (2006), No. 2, 558–567.
351. Popa S. and Sritharan S. S. Nonlinear filtering of Itô–Lévy stochastic differential equations with continuous observations // *Communications on Stochastic Analysis* **3** (2009), No. 3, 313–330.

352. Preis T., Schneider J. J., Stanley H. E. Switching processes in financial markets // *Proceedings Of The National Academy Of Sciences (USA)*. 2011. V. 108 (19). P. 7674–7678.
353. Pugachev V. S., Sinityn I. N. *Stochastic Systems: Theory and Applications*. World Scientific, 2002.
354. Rahm L. A., Svensson U. Dispersion of marked fluid elements in a turbulent Ekman layer // *J. Phys. Oceanogr.* 1986. V. 16, N 12.
355. Rathinasamy A., Yin B. Strong solutions of a class of hybrid diffusion processes with state-dependent regime-switching // *Applied Numerical Mathematics*. 2013. V. 72. P. 72–90.
356. Rathinasamy A., Yin B., Yasodha B. Numerical analysis for stochastic age-dependent population equations with Poisson jump and phase semi-Markovian switching // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2011. V. 16. P. 350–362.
357. Rayleith, Lord // *Philos. Mag.* 1891. V. 32. P. 424.
358. Richardson L. F. The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems including differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam // *Phil. Trans., A*. V. 210. P. 307–357.
359. Riedler M. G. Almost sure convergence of numerical approximations for Piecewise Deterministic Markov Processes // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2013. V. 239. P. 50–71.
360. Riley D., Koutsoukos X. Simulation of stochastic hybrid system with switching and reflecting boundaries // *Journal: IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - TSMC*. 2008. V. 38 (2). P. 385–396.
361. Romberg W. Vereinfachte numerische Integration // *Nomke Vid. Selsk Forhdl*, 1955. V. 28. P. 30–36.
362. Ronghua L., Wan-kai P., Ping-kei L. Convergence of numerical solutions to stochastic age-structured population equations with diffusions and Markovian switching // *Applied Mathematics and Computation*. 2010. V. 216. P. 744–752.
363. Rosenbrok H. Some general implicit processes for the numerical solution of differential equations // *Comp. J.* 1963. V. 5, N 4. P. 329–330.

364. Rudenko E. A. Finite-dimensional recurrent algorithms for optimal nonlinear logical-dynamical filtering. // *J. Comput. Sys. Sc. Int.* 2016. V. 55, N 1. P. 36–58.
365. Rybakov K. A. Sufficient epsilon - optimality conditions for systems with random quantizations period // *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 255, No. 6, June, 2021
366. Rybakov K. A., Sotskova I. L. Spectral method for analysis of switching diffusions // *IEEE Transactions on Automatic Control.* 2007. V. 52, N 7. P. 1320–1325.
367. Sabelfeld K.K., Averina T.A. Monte Carlo Simulation of Particle's Dispersion in convective Boundary Layer of the Atmosphere // *Monte Carlo Methods and App.* 1996. V. 2, N 2. P. 159-168.
368. Situ R. *Theory of Stochastic Differential Equations with Jumps and Applications.* Springer, 2005.
369. Siu T. K., Lau J. W., Yang H. Pricing Participating Products under a Generalized Jump-Diffusion Model // *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis.* 2008. P. 1–30.
370. Song Q. S., Yin G., Zhang Z. Numerical solutions for stochastic differential games with regime switching // *IEEE Transactions on Automatic Control.* 2008. V. 53(2). P. 509–521.
371. Stepanov O. A. and Nosov A. S. A map-aided navigation algorithm without preprocessing of field measurements. // *Gyroscopy Navig.* **11** (2020), No. 2, 162–175.
372. Stepanov O. A., Vasiliev V. A., Toropov A. B., Loparev A. V., and Basin M. V. Efficiency analysis of a filtering algorithm for discrete-time linear stochastic systems with polynomial measurements. // *J. Franklin Inst.* **356** (2019), No. 10, 5573–5591.
373. Talay D. Resolution trajectorielle et analyse numerique des equations differentielles stochastiques // *Stochastics.* 1983. N 9. P. 275–306.
374. Talay D. Efficient numerical schemes for the approximation of functionals of the solution of a SDE and application // *Lecture Notes in Control and Information Sciences.* Berlin: Springer-Verlag. 1984. V. 61.

375. Talay D. Disd'une equation differentielle stochastet calcul approche d'de fonctionnelles de la solution // *Mathem. Modelling and Numer. Anal.* 1986. V. 20, N 1. P. 141–179.
376. Talay D. Second order discretization schemes of stochastic differential systems for the computation of invariant law // *INREIA Rapport de Recherche.* 1987. N 753.
377. Talay D., Tubaro L. Expansion of the global error for numerical schemes solving stochastic differential equations. Sophia: Sophia Antipolis, 1989. (INRIA Report; 1069).
378. Tennekes H., Lumley J. L. A First course in turbulence. N.Y.: MIT Press, 1972.
379. The jump behavior of foreign exchange market: Analysis of Thai Baht / J. R. Chang [et al.] // *Review of Pacific Basin Financial Markets and Policies.* 2007. V. 10, N 2. P. 265–288.
380. The SIS epidemic model with Markovian switching / A. Gray [et al.] // *J. Math. Anal. Appl.* 2012. V. 394(2). P. 496–516.
381. Tupysev V. A. and Litvinenko Yu. A., Application of polynomial-type filters to integrated navigation systems with modular architecture. In: *Proc. 26th Int. Conf. on Integrated Navigation Systems.* IEEE, 2019, pp. 1–4.
382. Wax N. Selected Papers on Noise and Stochastic Processes. Dover, New York, 1954.
383. Wilkie J. Numerical methods for stochastic differential equations // *Phys. Rev. E Stat. Nonlin. Soft Matter. Phys.* 2004. 70(1 Pt 2):017701 DOI: 10.1103/PhysRevE.70.017701
384. Wu F., Mao X. and Kloeden P. Almost sure exponential stability of the Euler-Maruyama approximations for stochastic functional differential equations // *Random Operator and Stochastic Equations.* 2011. V. 19(2). P. 105-216.
385. Wu F., Mao X. and Kloeden P. Discrete Razumikhin-type technique and stability of the Euler-Maruyama method to stochastic functional differential equations // *Discrete and Continuous Dynamical Systems.* 2013. V. 33(2). P. 885-903.
386. Xi F., Yin G. Asymptotic properties of a mean-field model with a continuous-state-dependent switching process // *Journal of Applied Probability.* 2009. V. 46. P. 221–243.

387. Xi F., Yin G. Asymptotic properties of nonlinear autoregressive Markov processes with state-dependent switching // *Journal of Multivariate Analysis*. 2010. V. 101. P. 1378–1389.
388. Xi F., Yin G. Jump-diffusions with state-dependent switching: Existence and uniqueness, Feller property, linearization, and exponential ergodicity // *Science China: Mathematics*. 2011. V. 54. P. 2651–2667.
389. Xing Y., Yang X. Equilibrium valuation of currency options under a jump-diffusion model with stochastic volatility // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. V. 280, 15 May 2015. P. 231–247.
390. Xu Yao, Chu Chenyin, Li Wenxue. Stabilisation of coupled delayed regime-switching diffusion with continuous-state-dependent switching via intermittent control // *IET Control Theory Appl.*, 2019, Vol. 13 Iss. 12, pp. 1823–1833
391. Yang Q., Mao X. Stochastic dynamical behavior of SIRS epidemic models with random perturbation // *Mathematical Biosciences and Engineering*. 2014. V. 11(4). P. 1003–1025.
392. Yang Z., Yin G., Li H. Stability of numerical methods for jump diffusions and Markovian switching jump diffusions // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2015. V. 275. P. 197–212.
393. Yin G., Krishnamurthy V. LMS Algorithms for Tracking Slow Markov Chains With Applications to Hidden Markov Estimation and Adaptive Multiuser Detection // *IEEE Transactions on Information Theory*. 2005. V. 51(7). P. 2475–2490.
394. Yin B., Ma Z. Convergence of the semi-implicit Euler method for neutral stochastic delay differential equations with phase semi-Markovian switching // *Applied Mathematical Modelling*. 2011. V. 35. P. 2094–2109.
395. Yin G., Mao X., Yuan C. Approximation methods for hybrid diffusion systems with state - dependent switching processes: numerical algorithms and existence and uniqueness of solutions // *Siam J. Math/ Anal/* 2010. V. 41. N 6. P. 2335–2352.
396. Yin G., Yuan Q., Wang L.Y. Asynchronous stochastic approximation algorithms for networked systems: Regime-switching topologies and multi-scale structure // *SIAM Journal: Multiscale Modeling and Simulation*. 2013. V. 11. P. 813–839.

397. Yin G., Zhang H. Q. Discrete-time Markov chains with two-time scales and a countable state space: Limits results and queuing applications // *Stochastics*. 2008. V. 80. P. 339–369.
398. Yin G., Zhu C. Properties of solutions of stochastic differential equations with continuous-state-dependent switching // *Journal of Differential Equations*. 2010. V. 249. P. 2409–2439.
399. Yin G. [et al.]. Approximation methods for hybrid diffusion systems with state-dependent switching processes: numerical algorithms and existence and uniqueness of solutions // *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. 2010. V. 41(6). P. 2335–2352.
400. Zhou Congjin, Wang Guojing, Guo Jie. Optimal refinancing strategy for mortgage rate with regime switching // *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 10.1002/asmb.2652, 38, 1, (133-150), (2021).
401. Zmievskaya G. I., Averina T. A., Bondareva A. L. Numerical solution of stochastic differential equations in the sense of Stratonovich in an amorphization crystal lattice model // *Applied Numerical Mathematics*. 2015. Vol. International Conference «Difference Schemes and Applications» in Honor of the 90-th Birthday of Professor V. S. Ryaben’kii. P. 15–29.
402. Zmievskaya G. I., Bondareva A. L., Levchenko V. D., Levchenko T. V. A kinetic stochastic model of blistering and nanofilm islands deposition: self-organization problem // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2007. V. 40. P. 4842–4849.