На правах рукописи

ВЕРЕМЧУК Наталья Сергеевна

МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ РАЗМЕЩЕНИЯ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ ОБЪЕКТОВ НА ПЛОСКОСТИ С ЗАПРЕЩЕННЫМИ ЗОНАМИ

05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Омск — 2018

Работа выполнена в Омском филиале Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук

Научный руководитель:
доктор физико–математических наук, профессор
Забудский Геннадий Григорьевич

Официальные оппоненты:
Быкова Валентина Владимировна,
доктор физико–математических наук, доцент, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования Сибирский федеральный университет (ФГАОУ ВО СФУ), г. Красноярск, профессор кафедры высшей и прикладной математики
Забиняко Герард Идельфонович,
кандидат технических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук (ИВМиМГ СО РАН), г. Новосибирск, ведущий научный сотрудник лаборатории вычислительной физики

Ведущая организация:
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук (ИММ УрО РАН), г. Екатеринбург

Защита состоится 10 апреля 2018 года в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 003.061.02 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: 630090, г. Новосибирск, проспект Академика Лаврентьева, 6, тел. +7(383)330-71-59.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИВМиМГ СО РАН, http://icmmg.nsc.ru/.

Автореферат разослан 7 февраля 2018 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 003.061.02
на базе ИВМиМГ СО РАН, д.ф.–м.н.
Сорокин
Сергей Борисович

Общая характеристика работы

Актуальность темы обусловлена необходимостью совершенствования методов решения задач оптимального размещения взаимосвязанных объектов. Для адекватного описания области, в которой производится размещение, следует более полно учитывать ограничения и правила, возникающие в практических задачах, например, наличие запрещенных зон, регулярность размещения, зонирование территории и т.д. Это требует модификации известных и построения новых моделей оптимального размещения объектов и, соответственно, разработки новых подходов к решению задач.

Актуальным в настоящее время является решение задач оптимального размещения объектов с учетом запрещенных зон и барьеров. Это участки, в которых нельзя размещать объекты по каким–либо причинам. При проектировании генеральных планов предприятий — это могут быть элементы географического ландшафта, при реконструкции предприятий — технологическое оборудование, которое не заменяется при модернизации. Для учета таких участков можно применять аппарат целочисленного и линейного программирования, позволяющий моделировать требования на взаимное расположение объектов.

Данное исследование мотивировано слабой изученностью задач оптимального размещения взаимосвязанных объектов с учетом запрещенных зон и их актуальностью в области оптимизации, а также в различных сферах практической деятельности. Недостаточно изучены задачи регулярного размещения габаритных объектов на параллельных линиях с запрещенными зонами. Поскольку в общей постановке такие задачи являются NP–трудными, то представляются перспективными их исследования в следующих направлениях: построение новых моделей, сужение области допустимых решений при поиске оптимума, применение декомпозиционного подхода, в котором решение исходной задачи разбивается на ряд задач меньшей размерности, разработка алгоритмов точного и приближенного решений.

Цель работы: построение моделей и разработка алгоритмов решения задач размещения взаимосвязанных объектов на плоскости с запрещенными зонами.

С учетом поставленной цели решались следующие задачи:

1. построить математические модели целочисленного программирования и исследовать свойства задачи размещения взаимосвязанных прямоугольных объектов с критерием минимума суммарной стоимости связей на параллельных линиях с запрещенными зонами;

2. разработать алгоритмы точного и приближенного решения указанной

задачи с использованием найденных свойств;

3. исследовать свойства и разработать алгоритмы решения задачи размещения взаимосвязанных точечных объектов с минимаксным критерием на плоскости с запрещенными зонами;

4. создать программное обеспечение и провести экспериментальное исследование разработанных алгоритмов, в том числе, с применением известных программных продуктов.

Основные результаты

1. Для задачи размещения взаимосвязанных прямоугольных объектов на параллельных линиях с запрещенными зонами и критерием минимума суммарной стоимости связей:

   (а) построены новые математические модели целочисленного линейного программирования;

   (б) предложен декомпозиционный подход с помощью сведения решения исходной непрерывной задачи к решению серии дискретных задач одинаковой структуры меньшей размерности;

   (в) разработаны комбинаторные алгоритмы поиска приближенного решения, локального и глобального оптимумов.

2. Для задачи размещения взаимосвязанных точечных объектов на плоскости с запрещенными зонами и минимаксным критерием разработан алгоритм ветвей и границ, в котором сокращен перебор вариантов решений на основе доказанного свойства о сужении области допустимых решений при поиске оптимума.

3. Создан программный комплекс, в котором реализованы предложенные алгоритмы. Проведено экспериментальное исследование эффективности решения задач для прямоугольных и точечных объектов с помощью указанных алгоритмов и применения построенных моделей целочисленного линейного программирования и пакета IBM ILOG CPLEX.

Научная новизна. Все результаты диссертации снабжены строгими математическими формулировками и доказательствами, корректным использованием методов математического моделирования, дискретной оптимизации, целочисленного программирования, подтверждением теоретических результатов численными экспериментами, а их новизну раскрывают следующие аргументы (по каждому основному результату).

1. Для задачи размещения взаимосвязанных прямоугольных объектов на параллельных линиях с запрещенными зонами и критерием минимума суммарной стоимости связей построены математические модели целочисленного линейного программирования из п. 1 (а), позволяющие использовать для решения пакеты прикладных программ. Применение подхода из п. 1 (б) дает возможность декомпозировать исходную задачу на задачи меньшей размерности, для решения которых можно применять один и тот же алгоритм. Алгоритмы решения задачи из п. 1 (в) разработаны впервые.

2. Алгоритм размещения взаимосвязанных точечных объектов на плоскости с запрещенными зонами и минимаксным критерием из п. 2 с использованием свойства сужения области допустимых решений построен впервые и позволяет сократить время поиска оптимального решения.

3. Создан программный комплекс из п. 3 с реализацией предложенных алгоритмов, эффективность которых подтверждена численными экспериментами с применением построенных моделей целочисленного линейного программирования и пакета IBM ILOG CPLEX.

Методы исследований. В работе используются методы математического моделирования, дискретной оптимизации, целочисленного программирования, теория вычислительной сложности, методология экспериментальных исследований с применением вычислительной техники и пакетов прикладных программ.

Теоретическая значимость и практическая ценность. Теоретическая значимость работы заключается в следующем. Предложенные математические модели развивают теоретические аспекты моделирования оптимального размещения взаимосвязанных объектов с использованием дискретной оптимизации и целочисленного программирования. Разработанные алгоритмы способствуют развитию численных методов решения указанного класса задач на основе использования декомпозиционного подхода.

Практическая ценность работы состоит в том, что построенные модели, разработанные алгоритмы и созданный программный комплекс могут применяться для решения прикладных задач в области автоматизированного проектирования генеральных планов предприятий, размещения оборудования в цехах, расположения пунктов обслуживания и т.д. Кроме того, результаты исследования могут быть применены при написании методических пособий по проектированию схем размещения зданий, сооружений и технологического оборудования.

На защиту выносится совокупность результатов по построению моделей и решению задач размещения взаимосвязанных прямоугольных объектов с критерием минимума суммарной стоимости связей на параллельных линиях и точечных объектов с минимаксным критерием на плоскости с запрещенными зонами, включая: 1) математические модели целочисленного линейного программирования размещения прямоугольных объектов на параллельных линиях с запрещенными зонами; 2) свойства задач, позволяющие использовать декомпозиционный подход, уменьшить область допустимых решений; 3) алгоритмы поиска приближенного решения и нахождения локального и глобального оптимумов; 4) комплекс программ с реализацией указанных алгоритмов.

Личный вклад автора. Постановки задач предложены научным руководителем. Построение математических моделей и разработка алгоритмов решения задач осуществлены совместно. Создание программного комплекса и проведение вычислительных экспериментов получены соискателем лично. Конфликт интересов с соавторами отсутствует.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на XII, XVI Всероссийских конференциях "Математическое программирование и приложения" (г. Екатеринбург, 2003, 2015), VIII, IX Международных конференциях "Дискретная оптимизация и исследование операций" (г. Новосибирск, 2013, г. Владивосток, 2016), XVI, XVII Байкальских Международных школах–семинарах "Методы оптимизации и их приложения" (г. Иркутск, 2014, с. Максимиха, Бурятия, 2017), V International Conference on Optimization Methods and Applications "Optimization and Applications" (Petrovac, Montenegro, 2014), XV Международной научно–инновационной конференции аспирантов, студентов и молодых ученых с элементами научной школы "Теоретические знания — в практические дела" (г. Омск, 2014), VI Международной конференции "Проблемы оптимизации и экономические приложения" (г. Омск, 2015), III Региональной конференции магистрантов, аспирантов и молодых ученых по физике и математике "ФМ ОмГУ 2015" (г. Омск, 2015), Международной научно–практической конференции "Архитектура, строительство, транспорт" (г. Омск, 2015), IV Региональной конференции магистрантов, аспирантов и молодых ученых по физике, математике и химии "ФМХ ОмГУ 2016" (г. Омск, 2016), X Международной IEEE научно–технической юбилейной конференции "Динамика систем, механизмов и машин" (г. Омск, 2016), а также на научных семинарах "Математическое моделирование и дискретная оптимизация" в Омском филиале Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (г. Омск, 2015–2017), "Математические модели принятия решений" в Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН (г. Новосибирск, 2017), семинаре отдела математического программирования в Институте математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН (г. Екатеринбург, 2017).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 5 статьях [1–5] в журналах, входящих в перечень ВАК, в 11 тезисах и статьях [6–16] в журналах, сборниках и материалах конференций. Зарегистрирована программа для ЭВМ [17]. Общее число публикаций — 17.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы (135 наименований) и двух приложений. Объем диссертации — 119 страниц.

Краткое содержание работы

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, описываются цели и задачи исследования, кратко излагается содержание работы, приводятся основные результаты диссертации и информация об их аппробации.

В первой главе приводятся постановки задач размещения взаимосвязанных объектов, области применения, краткий обзор методов решения.

В п. 1.1 описывается процесс построения моделей при решении прикладных задач. Приводятся примеры размещения оборудования нефтехимического и швейного предприятий. Швейное оборудование, например, обычно группируется в специализированные модули с учетом зон обслуживания и рабочих мест. Модули аппроксимируются прямоугольниками и размещаются на плане производственного участка или цеха. Размещение осуществляется вдоль линий для создания прямых проездов, удобства обслуживания оборудования. Связью между модулями может быть, например, количество изделий в час, передаваемых между станками. При модернизации производства часть оборудования остается на месте, и его можно рассматривать в качестве запрещенных зон. Задача размещения формулируется следующим образом: необходимо расположить новое оборудование (модули) среди имеющегося на линиях так, чтобы суммарные затраты на передачу изделий между единицами оборудования были минимальными.

В п. 1.2. описывается классификация задач оптимального размещения объектов по различным признакам.

Постановки и краткий обзор результатов исследований задач размещения взаимосвязанных точечных объектов приведен в п. 1.3. Далее, чтобы не повторять сочетание *задачи размещения взаимосвязанных объектов*, будем говорить о задачах Вебера. Сформулируем классические постановки на плоскости.

На плоскости среди m фиксированных объектов $P_1, \ldots, P_m$ размещаются n объектов $X_1, \ldots, X_n$. Обозначим: $J = \{1, \ldots, m\}$ — множество номеров фиксированных объектов с координатами (p_{1j}, p_{2j}), $j \in J$; $I = \{1, \ldots, n\}$ —

множество номеров размещаемых объектов с координатами (x_i, y_i), $i \in I$; $d(X_i, P_j)$ и $d(X_i, X_k)$ — расстояния между X_i, P_j и X_i, X_k соответственно, $j \in J$, $i, k \in I$, $i < k$; $w_{ij} \geq 0$ и $u_{ik} \geq 0$ — удельные стоимости связи между X_i, P_j и X_i, X_k, $j \in J$, $i, k \in I$, $i < k$. Необходимо разместить объекты $X_1, \ldots, X_n$ на плоскости среди фиксированных $P_1, \ldots, P_m$ так, чтобы суммарная (минисуммная задача) или максимальная (минимаксная задача) стоимость связи между всеми объектами была минимальной. Математические модели минисуммной и минимаксной задач имеют вид:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} w_{ij} d(X_i, P_j) + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=i+1}^{n} u_{ik} d(X_i, X_k) \to \min,$$

$$\max\{\max_{i\in I, j\in J}\{w_{ij} d(X_i, P_j)\}; \max_{i,k\in I, i<k}\{u_{ik} d(X_i, X_k)\}\} \to \min.$$

Приводится краткий обзор результатов исследований и направлений практического использования указанных задач с различной метрикой. Для случая прямоугольной метрики сформулированные задачи полиномиально разрешимы. Это частные случаи задачи линейного программирования.

В п. 1.4 приводится обзор по постановкам и методам решения задач размещения габаритных объектов.

Во второй главе исследуется минимаксная задача Вебера для точечных объектов на плоскости с запрещенными зонами.

В п. 2.1 описан краткий обзор исследований по задачам Вебера с запрещенными зонами и барьерами произвольной формы.

В п. 2.2 приведены постановка и свойства минимаксной задачи Вебера для точечных объектов на плоскости с прямоугольными запрещенными зонами и прямоугольной метрикой.

Задача формулируется следующим образом. На плоскости среди фиксированных объектов P_j, $j \in J$, размещаются объекты X_i, $i \in I$. Кроме того, заданы прямоугольные запрещенные зоны F_k со сторонами, параллельными осям координат, внутри которых не допускается размещение объектов, $F = \bigcup_{k=1}^{z} F_k$, $k \in Z = \{1, \ldots, z\}$. Необходимо разместить $X_1, \ldots, X_n$ на плоскости среди $P_1, \ldots, P_m$ вне запрещенных зон $F_1, \ldots, F_z$ так, чтобы максимальная стоимость связи между всеми объектами была минимальной. Математическая модель имеет вид:

$$\max\{\max_{i\in I, j\in J} w_{ij} d(X_i, P_j), \max_{i,k\in I, i<k} u_{ik} d(X_i, X_k)\} \to \min, \quad (1)$$

$$X_i \notin Int\ F,\ i \in I, \quad (2)$$

где $d(\cdot,\cdot)$ — прямоугольная метрика, $Int\ F$ — внутренность множества F.

Для поиска оптимального решения достаточно рассматривать выпуклую оболочку $\mathcal{F}$ прямоугольной формы со сторонами параллельными осям координат, содержащую фиксированные объекты и запрещенные зоны.

Пусть R подмножество из $\mathcal{F}$, в котором допускается размещение объектов, т.е. $R = \mathcal{F} \setminus Int\ F$. Область R невыпуклая и несвязная. Обозначим $X'_1, \ldots, X'_n$ оптимальные расположения размещаемых объектов только по отношению к фиксированным, и (x'_i, y'_i) — их координаты, $i \in I$. Пусть

$$A' = \min_{i \in I}\{x'_i\}, \quad B' = \max_{i \in I}\{x'_i\}, \quad C' = \min_{i \in I}\{y'_i\}, \quad D' = \max_{i \in I}\{y'_i\}.$$

Рассмотрим прямоугольную область $\mathcal{F}'$, заданную координатами левого нижнего и правого верхнего углов $[(A', C'); (B', D')]$ и через $\partial\mathcal{F}'$ обозначим ее границу. Доказано свойство, позволяющее уменьшить область поиска оптимального решения задачи (свойство сужения)

Теорема 2.1 Если $\partial\mathcal{F}' \subseteq R$, то в области $\mathcal{F}'$ существует оптимальное решение задачи (1)—(2).

Для учета условия (2) область R представлена в виде объединения прямоугольников R_k — разрешенных областей со сторонами параллельными осям координат, в которых допускается размещение, $k \in G = \{1, \ldots, g\}$.

Замечание 2.1 Если существует подмножество $G' \subseteq G$ таких, что $\mathcal{F}' \subseteq \bigcup_{k \in G'} R_k$, то задача (1)—(2) полиномиально разрешима.

В п. 2.3 описан *алгоритм ветвей и границ* для решения задачи. *Ветвление* осуществляется с помощью последовательного фиксирования объектов в заданном порядке в разрешенных областях.

Предложены варианты нахождения нижних оценок значения целевой функции с помощью линейного программирования, размещения одного объекта только по отношению к фиксированным и следующей процедуры. Пусть X_i зафиксирован в области R_k, G' — номера областей, в которых зафиксированы размещаемые объекты, $I(R_s)$ — множество размещаемых объектов в области $R_s, s \in G' \subseteq G$. Тогда *нижняя оценка* значения целевой функции (1) при размещении объекта X_i в области R_k вычисляется по формуле:

$$\max\{\max_{j \in J}(w_{ij} d(R_k, P_j)), \max_{s \in G'}(u_{it(s)} d(R_k, R_s))\},$$

где $u_{it(s)} = \max_{r \in I(R_s)} u_{ir}$, $s \in G'$.

В п. 2.4 приведены результаты вычислительного эксперимента с использованием разработанного алгоритма ветвей и границ и решения задачи с применением модели целочисленного линейного программирования и пакета IBM ILOG CPLEX. Показано, что применение свойства сужения сокращает время решения задачи при использовании обоих указанных подходов.

Третья глава посвящена исследованию и решению NP–трудной минисуммной задачи Вебера для прямоугольных объектов на параллельных линиях с запрещенными зонами.

В п. 3.1 приведен обзор результатов исследований задач размещения прямоугольников и других геометрических фигур на плоскости.

В п. 3.2 приведена постановка и математическая модель задачи Вебера для прямоугольников на линии с запрещенными зонами. Размещение прямоугольников на линии сводится к размещению отрезков.

На отрезке длины LS с фиксированными объектами и запрещенными зонами (отрезками) размещаются объекты, центры которых связаны между собой, с фиксированными и с зонами. Необходимо расположить объекты вне зон так, чтобы они не пересекались между собой и с фиксированными, и суммарная стоимость связей объектов между собой и с зонами была минимальной.

Будем называть фиксированные объекты и запрещенные зоны — зонами, а размещаемые объекты — объектами. Далее множество номеров зон будем обозначать через J. Координаты центров и длины объекта X_i и зоны F_j обозначим как x_i, b_j и l_i, p_j, $i \in I$, $j \in J$ соответственно; $w_{ij} \geq 0$, $u_{ik} \geq 0$ — удельные стоимости связей между X_i и F_j, X_i и X_k, $i, k \in I$, $j \in J$, $i < k$. Необходимо разместить объекты $X_1, \ldots, X_n$ на отрезке вне зон $F_1, \ldots, F_m$ так, чтобы они не пересекались, и суммарная стоимость связей объектов между собой и с зонами была минимальной. Математическая модель имеет вид:

$$G(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} w_{ij}|x_i - b_j| + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik}|x_i - x_k| \to \min, \tag{3}$$

$$|x_i - b_j| \geq \frac{l_i + p_j}{2}, \quad i \in I, j \in J, \tag{4}$$

$$|x_i - x_k| \geq \frac{l_i + l_k}{2}, \quad i, k \in I, i < k, \tag{5}$$

$$\frac{l_i}{2} \leq x_i \leq LS - \frac{l_i}{2}, \quad i \in I. \tag{6}$$

Допустимая область B, $B = \bigcup_{k=\overline{1,r}} B_k$, несвязная и состоит из набора r непересекающихся отрезков (блоков) B_k с длинами L_k.

Для допустимого размещения будем называть *остатком* в блоке B_k отрезок между двумя соседними объектами без общей границы, либо между границей блока и соседним объектом. Пары элементов (объекты, зоны, остатки) будем называть *склеенными*, если они имеют общую границу.

Обозначим $J_L(B_k)$, $J_R(B_k)$ — множество зон левее, правее блока B_k, $I_L(A)$, $I_R(A)$ — множество объектов левее, правее блока (зоны) A. Для каждого объекта X_i в блоке B_k определим

$$Lw_i = \sum_{j \in J_L(B_k)} w_{ij} + \sum_{k \in I_L(B_k)} u_{ik}, \quad Rw_i = \sum_{j \in J_R(B_k)} w_{ij} + \sum_{k \in I_R(B_k)} u_{ik}.$$

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — некоторое допустимое решение задачи (3)–(6). Обозначим $I_k(x)$ — множество номеров объектов в B_k, $I = \bigcup_{k=\overline{1,r}} I_k(x)$, а через $H_k(x)$ — множество остатков в B_k для x. Пусть величина n_k — это мощность множества $I_k(x)$, тогда $|H_k(x)| \leq n_k + 1$. Отметим, что x можно представить в виде $x = (x^1, \ldots, x^r)$, где x^k — координаты центров объектов, расположенных в B_k с номерами из $I_k(x)$. Доказано

Утверждение 3.1 Для произвольного допустимого решения x задачи (3)–(6) можно построить другое допустимое решение x' такое, что $|H_k(x')| \leq 1$, $k = 1, \ldots, r$ и $G(x') \leq G(x)$.

Сформулированное утверждение позволяет свести решение исходной непрерывной задачи к решению дискретной.

Обозначим LB_k, RB_k — координаты левой и правой границ блока B_k, которым соответствуют фиктивные объекты F_L и F_R. Тогда, при фиксированном разбиении объектов по блокам, целевую функцию $G(x)$ можно представить в виде

$$G(x) = \sum_{k=1}^{r} G_k(x^k) + \overline{C},$$

где

$$G_k(x^k) = \sum_{s \in I_k(x)} \sum_{t \in I_k(x), t > s} u_{st}|x_s - x_t| + \sum_{s \in I_k(x)} |x_s - LB_k| \Bigg(\sum_{j \in J_L(B_k)} w_{sj} +$$

$$+ \sum_{i \in I_L(B_k)} u_{si} \Bigg) + \sum_{t \in I_k(x)} |x_t - RB_k| \Bigg(\sum_{j \in J_R(B_k)} w_{tj} + \sum_{i \in I_R(B_k)} u_{ti} \Bigg),$$

$\overline{C}$ — некоторая константа.

Первая составляющая в $G_k(x^k)$ — это суммарная стоимость связей между объектами в блоке B_k, вторая — между объектами из B_k и F_L, третья — между объектами из B_k и F_R.

Допустимое решение x будем называть локальным минимумом задачи (3)–(6), если $G(x) \leq G(x')$ для любого $x'\ : I_k(x) = I_k(x')$, $k = 1, \ldots, r$.

Теорема 3.1 Для поиска локального минимума задачи (3)–(6) достаточно найти минимумы функций $G_k(x^k)$, $k = 1, \ldots, r$.

В п. 3.3 для решения (3)–(6) предлагаются алгоритмы поиска приближенного решения и ветвей и границ.

Итерация *алгоритма поиска приближенного решения* состоит из двух этапов. На первом этапе находится очередное допустимое разбиение объектов по блокам, на втором — объекты переставляются в блоках с целью минимизации суммарной стоимости связей. Предлагается два варианта алгоритма минимизации с учетом длин объектов (A2) и без учета (A3). Критерии остановки алгоритмов: время работы, число итераций, просмотр всех разбиений. Трудоемкость можно оценить как $O(r^n(mn^2+n^3))$. Доказано

Утверждение 3.2 Если $u_{st}=0,\ \forall s,t\in I_k(x), s<t, \forall k=1,\dots,r$ и фиксировано разбиение объектов, то локальный оптимум задачи (3)—(6) может быть найден с помощью алгоритма A2, применяемого в каждом блоке.

Поиск глобального оптимума задачи (3)—(6) состоит в поочередном выполнении двух этапов. На первом этапе находится очередное допустимое разбиение объектов, а на втором решается задача в каждом блоке *алгоритмом ветвей и границ*.

Опишем алгоритм ветвей и границ для произвольного блока B_k.

Ветвление. На первом уровне в дереве ветвления каждый из размещаемых объектов с номерами из $I_k(x)$ поочередно склеивается с левой границей блока B_k, на втором — каждый из неразмещенных объектов поочередно склеивается с правой границей блока, на последующих — неразмещенные объекты поочередно склеиваются с множеством склеенных между собой объектов, крайний левый из которых склеен с левой границей блока.

Нижние оценки. Обозначим через D — подмножество допустимых размещений в B_k, когда часть объектов размещена (частичное размещение); через $\xi(D)$ — нижнюю оценку функции $G_k(x^k)$ на подмножестве D. Тогда $\xi(D)$ может быть представлена в виде:

$$\xi(D)=\xi_1(D)+\xi_2(D)+\xi_3(D),$$

где $\xi_1(D)$ — суммарная стоимость связей размещенных в B_k объектов с F_L, F_R и между собой; $\xi_2(D)$, $\xi_3(D)$ — оценки суммарной стоимости связей еще неразмещенных в B_k объектов с размещенными в B_k и с F_L, F_R и неразмещенных объектов между собой соответственно.

Пусть NF_l и NF_r — множества номеров объектов, склеенных между собой и с левой и правой границами блока B_k соответственно. Будем считать, что объекты имеют номера от 1 до s в NF_l и от $t+1$ до n_k в NF_r. Для каждого $i\in I_k(x)\backslash\{NF_l\bigcup NF_r\}$ определим суммарную стоимость связей с F_L, F_R и объектами, размещенными в B_k, следующим образом:

$$SL(i)=Lw_i+\sum_{k\in NF_l}u_{ik},\quad SR(i)=Rw_i+\sum_{k\in NF_r}u_{ik}.$$

Множество $I_k(x)\backslash\{NF_l\bigcup NF_r\}$ можно представить в виде объединения непересекающихся множеств $N_L \bigcup N_C \bigcup N_R$, где через N_L, N_C, N_R обозначены множества номеров объектов для которых $SL(i) > SR(i)$, $SL(i) = SR(i)$, $SL(i) < SR(i)$ соответственно. Объекты с номерами из N_L (N_R) упорядочиваются по невозрастанию отношений $(SL(i) - SR(i))/l_i$ ($(SR(i) - SL(i))/l_i$) и последовательно склеиваются в указанном порядке с самым левым (правым) размещенным объектом в B_k. Объекты с номерами из N_C размещаются между множествами объектов с номерами из N_L и N_R в произвольном порядке. Пусть $I_k(x) \backslash \{NF_l \bigcup NF_r\} = \{s+1, \ldots, t\}$, тогда определим Z следующим образом:

$$Z = \sum_{q=s+1}^{t} \Bigg(Lw_q \sum_{g=1}^{q-1} l_g + \sum_{i=1}^{s} u_{qi} \sum_{k=i+1}^{q-1} l_k +$$

$$+ Rw_q \sum_{h=q+1}^{n_k} l_h + \sum_{j=t+1}^{n_k} u_{qj} \sum_{v=q+1}^{j} l_v \Bigg).$$

Доказано

Утверждение 3.3 Для любого частичного размещения D справедливо неравенство $\xi_2(D) \geq Z$.

Проведены вычислительные эксперименты по сравнению эффективности разработанных алгоритмов и решения задачи с применением построенной модели целочисленного программирования и пакета IBM ILOG CPLEX 12.2. На основе экспериментов можно сделать вывод об эффективности применения разработанных алгоритмов.

В п. 3.4 приводится постановка и модель задачи на линиях, способы её сведения к задаче на линии. Построена модель целочисленного программирования для поиска локального оптимума. Проведен вычислительный эксперимент с использованием предложенной модели и пакета IBM ILOG CPLEX 12.2.

В заключении приведены основные результаты данной работы.

В приложении А приведен пример решения минимаксной задачи размещения с учетом свойства сужения.

В приложении В представлено свидетельство о регистрации программы для ЭВМ в Фонде алгоритмов и программ СО РАН, а также описание созданного программного комплекса, в котором реализованы предложенные алгоритмы. Хранение данных и результатов решений организовано в виде реляционной базы данных.

Публикации по теме диссертации

Публикации в изданиях, входящих в перечень ВАК

1. Веремчук Н.С. *Поиск локального минимума в задаче размещения прямоугольников на линиях* // Вестник СибАДИ. – Омск: ИПЦ ФГБОУ ВО «СибАДИ», 2017. –1(53). – С. 122–128.

2. Забудский Г. Г., Веремчук Н. С. *Алгоритм приближенного решения задачи Вебера на линии с запрещенными зонами* // Дискрет. анализ и исслед. операций – 2016. Т. 23 –№ 1. – С. 82–96. (*An Algorithm for Finding an Approximate Solution to the Weber Problem on a Line with Forbidden Gaps* // Journal of Applied and Industrial Mathematics – 2016. Vol. 10 –No. 1. – pp. 136–144. Pleiades Publishing, Ltd., 2016. Original Russian Text G.G. Zabudskii, N.S. Veremchuk, 2016, published in Diskretnyi Analiz i Issledovanie Operatsii, 2016, Vol. 23, No. 1, pp. 82–96. DOI: 10.1134/S1990478916010154)

3. Забудский Г.Г., Веремчук Н.С. *Решение задачи Вебера на плоскости с минимаксным критерием и запрещенными зонами* // Известия Иркутского государственного университета – Иркутск: Изд-во ИГУ, 2014. – Т. 9. – С. 10–25.

4. Zabudsky G., Veremchuk N. *About Local Optimum of the Weber Problem on Line with Forbidden Gaps* // Proc. DOOR 2016, Vladivostok, Russia, September 19–23, 2016. CEUR-WS. 2016. Vol. 1623. P. 115–124. CEUR-WS.org, online http://ceur-ws.or/Vol-1623/paperco17.pdf

5. Zabudsky G., Veremchuk N. *Weber problem for rectangles on lines with forbidden gaps* // IEEE Conference 2016 Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Omsk, 15-17 Nov. 2016). 2016. DOI: 10.1109/Dynamics.2016.7819109

Публикации в других изданиях

6. Веремчук Н.С. *Минимаксная задача Вебера на плоскости с запрещенными зонами* // XV Междунар. науч.–инновац. конф. аспирантов, студентов и молодых учёных с элементами научной школы “Теоретические знания — в практические дела”: Сборник матер. конф. – Омск, 2014. – С. 106–109.

7. Веремчук Н.С. *О приближенном решении задачи Вебера на параллельных линиях с запрещенными зонами* // Сборник статей IV Регион. конф. магистрантов, аспирантов и молодых учёных по физике, математике и химии “ФМХ ОмГУ 2016” (Омск, 31 мая — 5 июня 2016 г.). – Омск: Изд-во Ом. Гос. ун-та, 2016. – С. 7–10.

8. Веремчук Н.С. *Применение информационных технологий в оптимальном размещении объектов с запрещенными зонами* // [Электронный ресурс]: матер. Междунар. науч.–практич. конф. “Архитектура, строительство, транспорт” (к 85-летию ФГБОУ ВПО “СибАДИ”) (Омск, 2-3 декабря, 2015 г.). – Электрон. дан. – Омск: СибАДИ, 2015. – Режим доступа: http://bek.sibadi.org/fulltext/ESD75.pdf

9. Веремчук Н.С. *Экспериментальное исследование алгоритмов поиска приближенного решения одной задачи Вебера на линии* // Сборник статей III Регион. Конф. магистрантов, аспирантов и молодых учёных по физике и математике “ФМ ОмГУ 2015”. – Омск: Изд-во Ом. Гос. ун-та, 2015. – С. 14–16.

10. Забудский Г. Г., Веремчук Н. С. *Алгоритмы поиска приближенного решения задачи Вебера на линии с запрещенными зонами* // Информ. бюллетень Ассоциации математического программирования № 13. Науч. издание. XVI Всерос. конф. “Математическое программирование и приложения” (Екатеринбург, 2–6 марта, 2015) — Екатеринбург: ИММ Уро РАН, 2015. — С. 133.

11. Забудский Г.Г., Веремчук Н.С. *О минимаксной задаче Вебера на плоскости с запрещенными зонами* // Междунар. конф. “Дискретная оптимизация и исследование операций”: Матер. конф. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2013. – С. 123.

12. Забудский Г. Г., Веремчук Н. С. *Решение задачи Вебера на линии для прямоугольных объектов с запрещенными зонами* // “Проблемы оптимизации и экономические приложения”: матер. VI Междунар. конф. (Омск, 28 июня — 4 июля 2015 г.) – Омск: Изд-во Ом. гос. ун-та, 2015. – С. 109.

13. Забудский Г.Г., Веремчук Н.С. *Решение минимаксной задачи Вебера на плоскости с запрещенными зонами* // XVI Байкальская международная школа–семинар “Методы оптимизации и их приложения”: Тезисы докладов. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2014. – С. 54.

14. Забудский Г. Г., Котенева Н. С. *Алгоритмы решения минимаксной задачи Вебера на плоскости с запрещенными областями* // Информ. бюллетень Ассоциации математического программирования № 10. Науч. издание. XII Всерос. конф. “Математическое программирование и приложения”— Екатеринбург: ИММ Уро РАН, 2003. — С. 112.

15. Zabudsky G., Veremchuk N. *About minimax Weber problem in the plane with forbidden gaps* // Abstracts of the 5th International

conference “Optimization and Applications” (OPTIMA-2014, September 28 - October 4, 2014, Petrovac, Montenegro). М.: ВЦ РАН, 2014. С. 193.

16. Zabudsky G., Veremchuk N. *Weber Problem on Line with Forbidden Gaps* // Abstracts of the 17th Baikal international school–seminar “Methods of Optimization and Their Applications” (July 31- August 6, 2017, Maksimikha, Buryatia). Irkutsk: ESI SB RAS, 2017, p. 128.

Программа для ЭВМ

17. Веремчук Н. С. *Приближенное решение задачи размещения взаимосвязанных габаритных объектов на линии с запрещенными зонами* // Регистрационный номер в ФАП СО РАН: PR17002, дата регистрации: 16.05.2017 г.