

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи



Амбос Андрей Юрьевич

**Разработка вычислительных моделей мозаичных  
случайных сред с приложением в теории переноса  
излучения**

Специальность 01.01.07 —  
«Вычислительная математика»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
чл. корр. РАН  
Г.А. Михайлов

Новосибирск — 2016

## Оглавление

	Стр.
<b>Введение.</b> . . . . .	4
<b>Глава 1. Мозаичные случайные поля</b> . . . . .	16
1.1 Построение и исследование базового случайного поля гиперплоскостей . . . . .	16
1.2 Исследование потока пересечений заданной прямой с базовыми гиперплоскостями . . . . .	20
1.3 Построение кусочно-постоянной случайной функции с экспоненциальной корреляцией . . . . .	25
1.4 Мозаичное поле Вороного . . . . .	26
1.5 Построение реалистических моделей неотрицательных разорванных случайных полей . . . . .	28
<b>Глава 2. Перенос излучения в стохастической среде</b> . . . . .	38
2.1 Моделирование траекторий квантов . . . . .	38
2.2 Специальные геометрические алгоритмы. . . . .	42
2.3 Эффективное осреднение радиационной модели относительно величины $P_t$ . . . . .	47
2.4 Асимптотические оценки случайного поля проходящей радиации	53
2.5 Некоторые предельные соотношения, связанные с уменьшением корреляционного радиуса . . . . .	60
<b>Глава 3. Вычислительные эксперименты</b> . . . . .	65
3.1 Среднее значение и дисперсия случайной вероятности прохождения . . . . .	67
3.2 Параметры осреднённых моделей и соответствующие вероятности прохождения. . . . .	69
3.3 Дисперсия показания нормированного детектора и корреляционная функция поля проходящей радиации . . . . .	71
3.4 Коэффициенты экспоненциальной асимптотической формулы для средней вероятности прохождения . . . . .	72

3.5	Сравнительные численно-статистические исследования для мозаичных полей Вороного и Пуассона . . . . .	73
3.6	Погрешность “перевыбора” в алгоритме двойной рандомизации .	76
<b>Заключение . . . . .</b>		<b>78</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>		<b>80</b>

## Введение

### **Актуальность темы исследования.**

Существует довольно широкий круг задач естествознания и техники, в основе математических моделей которых лежат случайные процессы. Разработка методов численного статистического моделирования для решения таких задач весьма актуальна, так как соответствующие алгоритмы допускают эффективное распределение вычислений на многопроцессорных ЭВМ.

Сравнительная эффективность таких алгоритмов возрастает, если параметры задачи являются случайными полями, то есть фактически рассматриваются задачи с многомасштабной стохастичностью, причём требуется оценить полные средние значения некоторых функционалов.

Логически наиболее простым подходом для оценки изучаемых функционалов при этом является решение серии задач для выбранных реализаций случайного поля параметров с последующим осреднением полученных значений. Однако такой способ оценки для реальных моделей является слишком трудоёмким. Традиционные подходы, связанные с замыканием цепочки вероятностных моментов и теорией малых возмущений, дают для таких моделей оценки с плохо контролируемой погрешностью.

В то же время с помощью статистического моделирования можно строить несмещённые оценки  $n$  вероятностных моментов решения, используя “метод двойной рандомизации”, в котором для каждой реализации параметрического поля реализуется лишь ограниченное число  $n$  траекторий базового случайного процесса.

В рамках такого метода необходимо использовать малотрудоёмкие “реалистические” вычислительные модели случайных полей. В связи с этим в диссертации разработаны многомерные модели экспоненциально коррелированных “разорванных” неотрицательных случайных полей, которые эффективны для решения стохастических задач теории переноса излучения.

Известно, что, как показывают и результаты настоящей работы, стохастическая неоднородность среды существенно усиливает прохождение излучения. Поскольку метод Монте-Карло сравнительно трудоёмок, то для массовых радиационных исследований целесообразно эффективно осреднять радиационную

модель, то есть переходить к детерминированным параметрам модели с приближённым сохранением изучаемых осреднённых функционалов.

В работе построены выражения указанных детерминированных параметров для случая модельных пуассоновских сред. На основе численного моделирования переноса излучения эти выражения переносятся на реалистические модели сред, что актуально для их практического применения.

### **Теоретическая и практическая значимость работы, степень разработанности темы исследования.**

Для решения стохастических задач из различных областей науки строятся вычислительные математические модели случайных сред. Особую роль играют кусочно-постоянные модели, основанные на случайном разбиении пространства с независимым выбором значений характеристик среды в каждой подобласти соответственно заданному распределению (см., например, [35], [14], [22], [27]); эти модели естественно называть мозаичными ([10], [35]). Одномерное распределение таких модельных случайных полей может быть произвольным, а корреляционная функция определяется в некотором классе положительно определенных функций.

Естественными для исследования проблем, связанных с каким-либо хаосом, представляются мозаичные модели, в некотором смысле основанные на пуассоновских случайных точечных полях (пуассоновских точечных потоках). Многомерная модель такого типа, по аналогии с “сеточными пальмовскими” моделями из [15], разработана в [17]. В ней разбиение пространства определяется координатными плоскостями, проходящими через точки пуассоновского поля. Однако, эта модель не изотропна и ее корреляционная функция не является экспоненциальной.

В работе [35] была построена мозаичная модель двумерного случайного поля с экспоненциальной корреляционной функцией на основе пуассоновского точечного поля во вспомогательном параметрическом пространстве с полярными координатами. Конструкцию этой модели формально нетрудно распространить на трехмерный и даже  $k$ -мерный варианты фазового пространства, однако исследование модельного поля при этом радикально усложняется.

Диссертация содержит разработанное в [27] с использованием результатов монографии [34] обобщение модели случайного поля из [35]. Случайное “мозаичное” разбиение пространства при этом реализуется базовым пуассоновским

ансамблем гиперплоскостей, который определяется пуассоновским точечным полем во вспомогательном параметрическом пространстве. Точка этого пространства объединяет направление нормали к гиперплоскости и её расстояние до начала координат. Как и в [35], случайные значения поля в элементах разбиения выбираются независимо, соответственно заданному одномерному распределению. Такую модель поля далее будем называть пуассоновской (или базовым мозаичным полем Пуассона). В [27] показано (см. также далее пункт 1.1), что построенное таким образом  $k$ -мерное случайное поле является однородным и изотропным, то есть (стохастически) инвариантным относительно сдвигов, поворотов и отражений. На этой основе вычисляется параметр соответствующей экспоненциальной корреляционной функции. Этот параметр пропорционален объему единичного шара, размерность которого на единицу меньше размерности случайного поля.

Практически наиболее важной является трехмерная модель рассматриваемого типа. Можно полагать, что это наиболее естественная модель плотности  $\sigma = \sigma(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ , хаотической среды с заданным произвольным одномерным распределением и экспоненциальной корреляционной функцией, единственный параметр которой оценивается на основе минимальной статистической информации.

Логически наиболее простым подходом для оценки таких функционалов, как осреднённая вероятность  $P_t = P_t(\sigma)$  прохождения частиц (квантов излучения) через стохастическую среду, является решение серии задач переноса излучения для выбранных реализаций случайной среды с последующим осреднением полученных значений вероятности прохождения. Однако такой способ оценки для реальных радиационных моделей является слишком трудоёмким. Традиционные подходы, связанные с замыканием цепочки вероятностных моментов и теорией малых возмущений, дают для таких моделей оценки с плохо контролируемой погрешностью. Для оценки вероятностных моментов случайной вероятности прохождения  $P_t(\sigma)$  в работе использован так называемый “метод двойной рандомизации” [13], в котором для каждой реализации среды статистически моделируются одна или несколько (соответственно порядку момента) траекторий частиц (см. далее п. 2.1). Такой подход можно распространить на решение других задач математической физики, в основе которых лежат случайные процессы. К таким задачам можно отнести некоторые проблемы

критичности физических процессов с размножением частиц, радиационно-кондуктивного теплопереноса, разреженной газодинамики и диффузии примесей с коагуляцией в стохастических полях скоростей (см., например, [5], [18], [23]).

В диссертации разработаны специальные геометрические алгоритмы моделирования переноса излучения через стохастические среды, моделируемые базовыми полями Пуассона и Вороного, на основе “метода максимального сечения” с использованием специально распределённого датчика псевдослучайных чисел для эффективного коррелирования оценок в различных вариантах расчёта. Численно определена “погрешность перевыбора” (см. пункт 3.6).

Практически важно то, что осреднённая вероятность  $P_t$  прохождения частиц через стохастическую среду может существенно превышать соответствующую вероятность для детерминированной среды с осреднённой плотностью (см., например, [10], [14], [24]). Поскольку метод Монте-Карло сравнительно трудоёмок, то отображение этого факта в массовых численных радиационных исследованиях целесообразно осуществлять, используя эффективное осреднение уравнения переноса, то есть создание детерминированной радиационной модели, для которой вероятность прохождения приближённо равна  $P_t$  (см., например, [16], [18]).

Для пуассоновской модели поля последовательность пересечений заданного луча с базовыми плоскостями является пуассоновским точечным потоком [34]. В связи с тем, что поток столкновений частицы также является пуассоновским, это существенно упрощает решение практически важной задачи эффективного осреднения радиационной модели (см. пункт 2.3). Разработанное в диссертации для пуассоновской модели поля решение такой задачи на основе эвристических соображений (путём замены среднего расстояния между пересечениями на обратную корреляционную длину) приближённо переносится на произвольные поля с той же корреляционной функцией, первыми двумя моментами одномерного распределения и “степенью заполненности” (см. пункт 1.5). Для тестирования такого приближения используются разработанные в [29] “реалистические” модели “разорванных” неотрицательных случайных полей  $\sigma^{(n)}(\mathbf{r})$ , которые получаются путём суммирования независимых реализаций базового специально сконструированного ограниченного мозаичного пуассоновского поля. Доказано, что эти поля асимптотически, по числу слагаемых, слабо сходятся к случайным полям с одномерными распределениями, которые, как показали

расчёты, близки к гамма-распределениям, и, соответственно, к гауссовским распределениям.

Отметим, что при суммировании базовых полей со стандартными безгранично делимыми одномерными распределениями невозможно воспроизвести заданное значение степени разорванности и случайная величина  $\sigma^{(n)}(\mathbf{r})$  не ограничена. Это, в частности, существенно затрудняет моделирование случайных траекторий квантов излучения в среде с коэффициентом ослабления  $\sigma^{(n)}(\mathbf{r})$ . Численные эксперименты с гамма-распределённой величиной  $\sigma^{(n)}(\mathbf{r})$  показали также некоторую нереалистичность соответствующих изображений, в которых сохраняются отдельные большие значения  $\sigma^{(n)}(\mathbf{r})$  при  $n \rightarrow \infty$  [20].

В работе также рассматривается известное (см., например, [32], [34]) базовое мозаичное поле Вороного (диаграмма Вороного), которое строится на основе пуассоновского точечного потока, определяющего разбиение пространства на ячейки, каждая из которых является множеством точек, наиболее близких к одной из точек потока. В пункте 3.5 показано, что поле Пуассона существенно более эффективно для решения стохастических задач теории переноса излучения, чем поле Вороного. Кроме того корреляционная функция поля Вороного не является экспоненциальной.

На основе численного исследования показаний протяжённого нормированного детектора частиц показано, что для изучаемых моделей случайных полей выполняется соответствующая эргодическая гипотеза [6], то есть показание детектора асимптотически, по площади детектора, совпадает с осреднённой вероятностью прохождения. В связи с этим проведено исследование поля проходящей радиации: построена оценка параметра экспоненциальной, асимптотической (по площади протяжённого нормированного детектора) формулы для соответствующей корреляционной функции; построены статистические оценки коэффициентов экспоненциальной (асимптотической по толщине слоя) формулы для осреднённой вероятности прохождения частицы.

В работе получен ряд тестовых сравнительных статистических оценок. Такие оценки целесообразно специально коррелировать, проводя зависимые статистические испытания. С этой целью был реализован “распределительный способ” использования псевдослучайных чисел, в котором некоторые подпоследовательности априори связываются с отдельными испытаниями, то есть траекториями соответствующих номеров [12].



Дополнительно доказана теорема о предельных значениях функционалов от потока частиц для мозаичных случайных сред, которая, в частности, устанавливает тот практически важный факт, что для среды с малой корреляционной длиной вероятность прохождения близка к соответствующему значению для детерминированного слоя с осреднённой плотностью.

Таким образом, задачи, рассматриваемые в данной диссертационной работе, являются актуальными и имеют научную и практическую значимость.

### **Цель исследования.**

Построение пуассоновской модели многомерного однородного изотропного мозаичного случайного поля с экспоненциальной корреляционной функцией; сравнение с однородным изотропным мозаичным случайным полем Вороного. Построение на основе мозаичного поля Пуассона реалистической модели разорванного неотрицательного случайного поля с приближённо гауссовским одномерным распределением.

Детальное изучение вероятности прохождения частицы через рассмотренные стохастические среды на основе численного статистического моделирования процесса переноса частиц. Изучение оценки показаний протяжённого нормированного детектора, оценка соответствующего среднего значения и дисперсии, проверка соответствующей эргодической гипотезы. Оценка корреляционной функции поля проходящей радиации. Построение асимптотической, относительно толщины слоя, экспоненциальной оценки осреднённой вероятности прохождения  $P_t$ . Исследование влияния корреляционной длины на величину  $P_t$  и трудоёмкости моделирования для базовых моделей случайной среды. Дополнительное изучение осреднённой вероятности отражения (альбедо).

Оценка “погрешности перевыбора” в методе двойной рандомизации, которая возникает, если значение  $\sigma$  заново выбирается при повторном попадании траектории кванта в элемент разбиения пространства.

Изучение возможности эффективного (относительно величины  $P_t$ ) осреднения стохастической радиационной модели с использованием “пуассоновости” потока столкновений частицы. Распространение этих результатов на случай реалистических “разорванных” сред с приближённо гауссовским одномерным распределением, реализации которых (относительно влияния на перенос излучения) близки к непрерывным.

### **Научная новизна.**

Доказана однородность и изотропность мозаичного поля Пуассона. Построен новый рекуррентный алгоритм моделирования  $k$ -мерного единичного изотропного вектора. Построены новые реалистические вычислительные модели разорванных неотрицательных случайных полей с приближённо гауссовскими одномерными распределениями путём суммирования независимых реализаций базовых специально сконструированных ограниченных мозаичных пуассоновских полей.

Доказана теорема о предельных значениях функционалов от решения интегрального уравнения переноса при уменьшении корреляционной длины до нулевого значения (см. пункт 2.5). Отметим, что аналогичная задача решалась ранее для уравнения диффузии (см., например, [26]).

Для моделирования траекторий частиц в “мозаичных средах” разработаны специальные алгоритмы “метода максимального сечения”, основанного на геометрическом “выравнивании” коэффициента ослабления среды путём дополнения её искусственным “дельта-рассеивателем” (см. пункт 2.1).

Построены приближённые выражения параметров эффективно осреднённой (относительно величины  $P_t$ ) радиационной модели для пуассоновской модели среды с учётом пуассоновости потока пересечений базовых плоскостей заданным лучом. Эти результаты существенно уточняют и обобщают результаты, полученные ранее без достаточного обоснования для частного случая мозаичного поля Пуассона в [16]. На основе эвристических соображений и тестовых расчётов эти выражения распространены на случай произвольной стохастической модели с теми же вероятностными первым и вторым моментами и степенью заполненности пространства. Практическая удовлетворительность такого приближения была проверена тестовыми расчётами для построенных в работе реалистических моделей.

В работе впервые достаточно точно оценены дисперсии флуктуаций вероятности прохождения, связанных с реализациями среды. Показано, что, как и следовало ожидать, такие дисперсии существенно различны для случаев локализованного и распределённого источников.

### **Методология и методы исследования.**

В диссертационной работе для решения поставленных задач использовались:

- аппарат теории методов Монте-Карло, математического анализа, теории вероятностей
- алгоритм моделирования пуассоновского точечного поля
- алгоритм “двойной рандомизации”, “метод максимального сечения”, “метод минимального пробега” для численного моделирования траекторий квантов в случайной среде
- метод зависимых испытаний на основе распределительного способа использования псевдослучайных чисел
- язык программирования C++ для написания вычислительных программ
- известный “прыгающий” мультипликативный датчик псевдослучайных чисел с модулем  $2^{40}$  и множителем  $5^{17}$  в численных экспериментах

### **Положения, выносимые на защиту.**

Построение многомерного мозаичного поля Пуассона, доказательство его однородности и изотропности. Сравнительное исследование свойств базовых мозаичных полей Пуассона и Вороного для различных значений корреляционной длины. Построение реалистических моделей разорванных неотрицательных случайных полей путём суммирования независимых реализаций базовых специально сконструированных ограниченных мозаичных пуассоновских полей.

Специальные геометрические алгоритмы “метода максимального сечения” для моделирования переноса излучения через мозаичные случайные среды.

Построение формул для параметров радиационной модели, эффективно осреднённой относительно вероятности прохождения частицы через стохастический слой вещества.

Построение экспоненциальной асимптотической (по площади протяжённого нормированного детектора) формулы для корреляционной функции поля проходящей радиации, а также экспоненциальной (асимптотической по толщине слоя) формулы для осреднённой вероятности прохождения частицы.

Сравнительные численные оценки средних значений и дисперсий вероятности прохождения частицы через мозаичные и реалистические случайные среды.

Вычисление значений параметров эффективно осреднённых радиационных моделей для различных вариантов мозаичного поля Пуассона и соответствующих значений осреднённой вероятности прохождения, а также их срав-

нение с “точными” значениями. Распространение, с использованием численных оценок, этих результатов на реалистические модели случайных сред.

Результаты исследования дисперсии показания протяжённого нормированного детектора и оценка параметра экспоненциальной формулы для корреляционной функции поля проходящей радиации; проверка на этой основе соответствующей эргодической гипотезы.

Вычисление значений коэффициентов экспоненциальной (асимптотической по толщине слоя) формулы для осреднённой вероятности прохождения частицы. Численное исследование зависимости осреднённой вероятности прохождения  $P_t$  от корреляционной длины  $\rho$  и трудоёмкости моделирования для базовых мозаичных случайных сред.

Оценка погрешности “перевыбора  $\sigma$ ” в методе двойной рандомизации, которая возникает, если значение  $\sigma$  заново выбирается при повторном попадании траектории кванта в элемент разбиения пространства.

### **Личный вклад.**

Автор диссертации принимал активное участие в работах, отражённых во всех совместных публикациях на равноправной основе, в анализе и оформлении результатов в виде публикаций и научных докладов, разработал описанные в работе новые алгоритмы, написал соответствующие вычислительные программы и провёл численные эксперименты.

**Структура и объём работы.** Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и списка использованной литературы. Объём диссертационной работы – 83 страницы, в том числе 7 рисунков и 14 таблиц. В списке литературы содержится 35 наименований на русском и английском языках.

### **Краткое содержание работы.**

Первая глава диссертации посвящена исследованию однородных изотропных мозаичных случайных полей различных типов.

В пункте 1.1 построен и исследован ансамбль базовых гиперплоскостей, на основе которого строится мозаичное поле Пуассона  $\sigma(\mathbf{r}; \mathcal{P})$ , и обоснованы его однородность и изотропность.

В пункте 1.2 определена мера в параметрическом пространстве множества гиперплоскостей, пересекающих заданный отрезок и на этой основе построен новый рекуррентный алгоритм моделирования  $k$ -мерного единичного изотропного вектора.

В пункте 1.3 построено мозаичное поле Пуассона и показано, что его корреляционная функция экспоненциальна.

В пункте 1.4 рассмотрено мозаичное поле Вороного и указаны некоторые его фактически известные свойства.

В пункте 1.5 построены реалистические модели разорванных неотрицательных случайных полей с приближённо гауссовскими одномерными распределениями и заданной степенью заполненности пространства путём суммирования независимых реализаций базовых специально сконструированных ограниченных мозаичных пуассоновских полей и изучены некоторые их свойства.

Вторая глава диссертации посвящена вопросам, связанными с переносом излучения через стохастическую среду.

В пункте 2.1 указаны способы моделирования траекторий в случайной среде и нахождения оценок соответствующих функционалов

В пункте 2.2 разработаны новые геометрические алгоритмы “метода максимального сечения” для моделирования траекторий в мозаичных случайных средах.

В пункте 2.3 построены формулы для коэффициентов рассеяния и поглощения эффективно осреднённых радиационных моделей.

В пункте 2.4 проведено исследование поля проходящей радиации: построена оценка параметра экспоненциальной асимптотической (по площади протяжённого нормированного детектора) формулы для соответствующей корреляционной функции; построены статистические оценки коэффициентов экспоненциальной (асимптотической по толщине слоя) формулы для осреднённой вероятности прохождения частицы.

В пункте 2.5 найдены некоторые предельные соотношения для мозаичных случайных полей при уменьшении параметра корреляционной длины до нуля и доказана теорема о предельных значениях функционалов от потока частиц для мозаичных случайных сред.

Третья глава диссертации посвящена вычислительным экспериментам.

В пункте 3.1 оценена вероятность прохождения, осреднённая по поверхности источника, и её дисперсия.

В пункте 3.2 вычислены параметры осреднённых радиационных моделей для различных вариантов мозаичного поля Пуассона и соответствующие значения осреднённой вероятности прохождения; проведено их сравнение с “точ-

ными” значениями. Показано, что полученные результаты с помощью дополнительных расчётов можно распространить на реалистические модели случайных сред.

В пункте 3.3 оценена дисперсия показания протяжённого нормированного детектора и вычислен параметр экспоненциальной оценки корреляционной функции поля проходящей радиации; на этой основе проверена соответствующая эргодическая гипотеза.

В пункте 3.4 вычислены коэффициенты экспоненциальной (асимптотической по толщине слоя) формулы для осреднённой вероятности прохождения и их дисперсии.

В пункте 3.5 для полей Вороного и Пуассона проведено численное сравнение корреляционных функций, изучена зависимость осреднённой вероятности прохождения  $P_t$  и трудоёмкости моделирования от корреляционной длины  $\rho$ .

В пункте 3.6 оценена погрешность “перевыбора  $\sigma$ ” в методе двойной рандомизации, которая возникает, если значение  $\sigma$  заново выбирается при повторном попадании траектории кванта в элемент разбиения пространства.

Заключение содержит перечень основных результатов диссертационной работы.

### **Достоверность полученных результатов.**

В диссертационной работе использованы научные методы обоснования полученных результатов и выводов. Проведены теоретические исследования и соответствующие численные эксперименты. Полученные алгоритмы протестированы сравнительными расчётами и специальными способами тестирования вычислительных программ. Проведена верификация построенных моделей.

### **Апробация результатов.**

Результаты данной работы были апробированы на семинаре “Методы Монте-Карло в вычислительной математике и математической физике” ИВ-МиМГ СО РАН и на конференциях:

- XLIX международная научная студенческая конференция «Студент и научно-технический прогресс» (Россия, Новосибирск, 16–20 апреля, 2011 г.),
- международная конференция “Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики 2014” (Россия, Новосибирск, 9–11 июня, 2014 г.),

- международная молодежная школа и конференция по вычислительно-информационным технологиям для наук об окружающей среде “СITES-2015” (Россия, Томск, 20-30 июня 2015 г.),
- международная конференция “Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики 2015” (Россия, Новосибирск, 19-23 октября 2015 г.).

По теме диссертации опубликовано 5 статей [27], [28], [2], [3], [29], они опубликованы в журналах, включенных в перечень ВАК РФ.

Диссертационная работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований Президиума РАН I.33, РФФИ (проекты 15-01-00894, 16-01-0530), гранта НШ-5111.2014.1.

Пользуясь случаем, автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю чл.-корр. РАН Геннадию Алексеевичу Михайлову за постоянное внимание и руководство работой, а также Сергею Михайловичу Пригарину за ценные замечания.

## Глава 1. Мозаичные случайные поля

Далее будут рассмотрены две вычислительные “мозаичные” модели однородных изотропных случайных полей  $\sigma(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^k$ . Они строятся на основе некоторого разбиения пространства на ячейки со случайным выбором в каждой ячейке постоянного в ячейке значения поля, согласно некоторому распределению (независимо от остальных ячеек) со средним значением  $E\sigma$  и дисперсией  $D\sigma$ . Первая (основная) рассматриваемая модель - мозаичное поле Пуассона  $\sigma(\mathbf{r}; \mathcal{P})$ , основанная на пуассоновском ансамбле гиперплоскостей, вторая (вспомогательная) модель - мозаичное поле Вороного  $\sigma(\mathbf{r}; \mathcal{V})$ , основанная на пуассоновском точечном потоке в  $\mathbb{R}^k$ .

### 1.1 Построение и исследование базового случайного поля гиперплоскостей

Перейдём к построению и исследованию ансамбля базовых гиперплоскостей  $\Gamma$ , на основе которого будет построено мозаичное поле Пуассона  $\sigma(\mathbf{r}; \mathcal{P})$ .

Каждая гиперплоскость полностью определяется единичным вектором “внешней”, то есть направленной от начала координат  $O$ , нормали

$$\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_k)$$

и расстоянием  $h$  до  $O$ , то есть точкой  $(h, \mathbf{n})$  параметрического пространства

$$T = \mathbb{R}^+ \times S^{(k)},$$

где  $S^{(k)}$  - единичная сфера в  $\mathbb{R}^k$  с центром в начале координат. отождествим точки  $(h, \mathbf{n}) \in T$  с “опорными” (для гиперплоскостей) точками  $h\mathbf{n} \in \mathbb{R}^k$ . Введем также меру  $\tau$  в параметрическом пространстве  $T$ . Определим её как произведение меры Лебега в  $\mathbb{R}$  и меры Хаусдорфа  $\mathcal{H}^{k-1}$  на  $S^{(k)}$  (“площадь” на сфере), то есть

$$d\tau = dh d\mathcal{H}^{(k-1)} = dh ds.$$



Рассмотрим пуассоновское точечное поле в пространстве  $T$  с параметром (интенсивностью)  $\lambda_p$ . Отождествив каждую точку этого поля с гиперплоскостью, как указано выше, получаем требуемое поле  $\Gamma$  случайных гиперплоскостей.

**Лемма 1.** [27] *Построенное случайное поле гиперплоскостей  $\Gamma$  однородно и изотропно, то есть инвариантно относительно сдвигов, поворотов и отражений.*

**Доказательство.** Каждая гиперплоскость в пространстве  $T$ , связанным с  $O$ , является также и гиперплоскостью в параметрическом пространстве  $T'$ , связанным с любым другим началом координат  $O'$ .

Обозначим через  $B$  замкнутый шар с центром  $\frac{O+O'}{2}$  и радиусом  $\frac{|O-O'|}{2}$ . Гиперплоскость  $h\mathbf{n}$  относительно  $O$  при сдвиге системы координат будет определяться уже точкой  $h'\mathbf{n}'$ , где  $h'$  — некоторое другое расстояние от  $O'$ , а  $\mathbf{n}'$  совпадает с  $\mathbf{n}$  или с  $-\mathbf{n}$ . Если  $h\mathbf{n}$  лежит во внутренней части шара  $B$ , то точки  $O$  и  $O'$  окажутся по разные стороны от гиперплоскости и нормаль  $\mathbf{n}'$  поменяет знак, то есть  $\mathbf{n}' = -\mathbf{n}$ . Если же  $h\mathbf{n}$  лежит вне шара  $B$ , то  $\mathbf{n}' = \mathbf{n}$ . Действительно, через три точки  $O, O', h\mathbf{n}$  можно провести плоскость, пересечение которой с шаром образует окружность с теми же центром и радиусом. Если  $h\mathbf{n}$  лежит на окружности, то, как известно из элементарной геометрии, векторы  $(O, h\mathbf{n}), (O', h\mathbf{n})$  ортогональны. Это означает, что вектор  $(O', h\mathbf{n})$  лежит в гиперплоскости, определяемой точкой  $h\mathbf{n}$ , то есть эта плоскость проходит через  $O'$ . Рассмотрим точку  $\tilde{h}\mathbf{n}$ , лежащую на луче  $O + \tilde{h}\mathbf{n}, \tilde{h} > 0$ . Если  $\tilde{h} > h$ , то расстояние от гиперплоскости до  $O$  увеличится, и точки  $O, O'$  не окажутся от неё по разные стороны, а при  $0 < \tilde{h} < h$  — окажутся.

Теперь убедимся, что поле гиперплоскостей  $\Gamma$  в параметрическом пространстве  $T$  является также и пуассоновским полем в пространстве  $T'$  с тем же параметром. Для этого покажем, что мера любого борелевского множества в пространстве  $T$  остается неизменной при переходе в пространство  $T'$ .

Рассмотрим точки  $(h_x, \mathbf{n}), (h_y, \mathbf{n}) \in T$ , лежащие на одном и том же луче, исходящем из  $O$ . Это параллельные гиперплоскости, следовательно, при замене координат имеем  $|h_x - h_y| = |h'_x - h'_y|$ .

Достаточно рассмотреть цилиндрические множества следующего вида:  $A = [h_1, h_2] \times v$ , где  $h_1, h_2 \geq 0, v$  — борелевское подмножество точек сферы  $S^{(k)}$ , причем  $A$  либо полностью лежит в шаре  $B$ , либо лежит вне его (по-

сколькx граница шара имеет нулевую меру). Эти множества измеримы, причем  $\tau(A) = \int_A dh ds$ . Обозначим через  $A'$  образ множества  $A$ , то есть

$$A' = \{(h', \mathbf{n}') : \mathbf{n}' \in v', h'_1(\mathbf{n}') < h' < h'_2(\mathbf{n}')\}.$$

При этом, как указано выше, либо  $v' = v$ , либо  $v' = -v$ .  
Справедливо равенство

$$\int_A dh ds = \int_{A'} dh' ds',$$

то есть мера любого рассматриваемого цилиндрического множества сохраняется. Следовательно, пуассоновский поток гиперплоскостей относительно одного начала координат является также пуассоновским потоком гиперплоскостей относительно другого начала координат с тем же параметром  $\mu$ , то есть поле  $\Gamma$  однородно.

Очевидно, что  $\Gamma$  инвариантно относительно поворотов и отражений в начале координат  $O$ ; с учетом однородности оно инвариантно относительно поворотов и отражений в любой другой точке, то есть изотропно.

Лемма 1 доказана. □

**Следствие.** *Распределение пересечений отрезка длины  $L$  с гиперплоскостями поля  $\Gamma$  не зависит от дислокации отрезка.*

Следует отметить, что это утверждение известно и приведено в [34]. Однако оно не достаточно для установления свойств однородности и изотропности мозаичного поля Пуассона; эти свойства обеспечиваются доказанной здесь леммой 1.

**Утверждение.** [27] *Для двумерного и трехмерного случаев лемму 1 можно также доказать, вычислив якобиан описанного выше отображения  $\Phi : T \rightarrow T'$ .*

**Доказательство.** Рассмотрим  $\Phi$ , как композицию трех отображений  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3^{-1}$ , где

$$\Phi_1 : T \rightarrow \mathbb{R}^k \text{ по правилу } (h, \mathbf{n}) \mapsto h\mathbf{n};$$

$$\Phi_2 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k \text{ по правилу } h\mathbf{n} \mapsto h'\mathbf{n}';$$

$$\Phi_3 : T' \rightarrow \mathbb{R}^k \text{ по правилу } (h', \mathbf{n}') \mapsto h'\mathbf{n}'.$$

Отображение  $\Phi_1$  действует по формулам:

$$x = r \sin \psi_1 \sin \psi_2, \quad y = r \sin \psi_1 \cos \psi_2, \quad z = r \cos \psi_1.$$

Его якобиан имеет вид  $\mathcal{J}_1 = r^2 \sin(\psi_1)$ . Аналогично для  $\Phi_3$  :  $\mathcal{J}_3 = (r')^2 \sin(\psi'_1)$ . Заметим, что  $\sin(\psi_1) = \sin(\psi'_1)$ .

Выпишем формулу перехода от  $h\mathbf{n} = (x, y, z)$  к  $h'\mathbf{n}' = (x', y', z')$ . Пусть  $O = (0, 0, 0)$ ,  $O' = (a, b, c)$ .

Тогда

$$\begin{aligned} (x', y', z') &= \Phi(x, y, z) = (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)) = \\ &= \frac{[(x - a, y - b, z - c)(x, y, z)](x, y, z)}{x^2 + y^2 + z^2} + (a, b, c). \end{aligned}$$

На поверхности шара  $B$  отображение  $\Phi_2$  вырождается, но это множество имеет нулевую меру Лебега.

Якобиан этого отображения найден с помощью программы Mathcad 13:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2 &= \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial x} & \frac{\partial f_x}{\partial y} & \frac{\partial f_x}{\partial z} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} & \frac{\partial f_y}{\partial y} & \frac{\partial f_y}{\partial z} \\ \frac{\partial f_z}{\partial x} & \frac{\partial f_z}{\partial y} & \frac{\partial f_z}{\partial z} \end{pmatrix} \right| = (z^4 - 2z^3c - 2xaz^2 + 2y^2z^2 + z^2c^2 + 2x^2z^2 - \\ &- 2ybz^2 - 2zcy^2 + 2zcsa + 2zybc - 2zcx^2 + y^2b^2 - 2x^3a - 2y^3b + 2x^2y^2 + \\ &+ 2xaub + y^4 + x^4 - 2xay^2 - 2ybx^2 + x^2a^2)/(x^2 + y^2 + z^2)^2. \end{aligned}$$

Подстановка найденных выражений дает:  $\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2\mathcal{J}_3^{-1} = 1$ .

Заметим, что в двумерном случае:

$$\begin{aligned} (x', y') &= (f_x(x, y), f_y(x, y)) = \frac{[(x - a, y - b)(x, y)](x, y)}{x^2 + y^2} + (a, b) \\ \mathcal{J}_1\mathcal{J}_2\mathcal{J}_3^{-1} &= (x^2 + y^2)^{1/2} \left( \frac{x^2 - xa + y^2 - yb}{x^2 + y^2} \right) (f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y))^{-1/2} = 1. \end{aligned}$$

Равенство якобианов единице подтверждает лемму 1 для  $k = 2, 3$ .  $\square$

## 1.2 Исследование потока пересечений заданной прямой с базовыми гиперплоскостями

Следующее утверждение фактически также приведено в [34]. Однако здесь приводится его другое обоснование, которое позволило также далее сформулировать новый алгоритм моделирования  $k$ -мерного единичного изотропного вектора.

**Лемма 2.** [27] *Множество гиперплоскостей, пересекающих произвольный отрезок длины  $L$ , имеет в параметрическом пространстве меру  $V_{k-1}(1)L$ , где  $V_{k-1}(1)$  - объем  $(k-1)$ -мерного единичного шара.*

**Доказательство.** Согласно следствию из леммы 1 достаточно определить меру  $mesM_L$  множества  $M_L$  гиперплоскостей, которые пересекают отрезок длины  $L$  с координатами  $(0, \dots, 0)$ ,  $(0, \dots, 0, L)$ .

Гиперплоскость пересекает отрезок, если выполняются следующие условия:

- 1)  $n_k \geq 0$ ,
- 2) расстояние  $h$  от начала координат до плоскости достаточно мало.

Найдем верхнюю границу указанного расстояния. Гиперплоскость можно задавать уравнением :

$$F(\mathbf{r}) = (\mathbf{n}, \mathbf{r} - h\mathbf{n}) = \sum_{i=1}^k n_i(r_i - hn_i) = 0,$$

где  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_k)$  - произвольная точка из  $\mathbb{R}^k$ .

Заметим, что  $F(\mathbf{0}) < 0$ , при  $h > 0$ . Следовательно, пересечение с отрезком будет иметь место, если  $F(0, \dots, L) \geq 0$ , т.е. при  $0 \leq h \leq n_k L$ .

Ясно, что

$$mesM_L = \int_{M_L} dh ds = \int_{S^{(k)}} ds \int_{\mathbb{R}} \chi_{M_L} dh = \int_{S_+^{(k)}} n_k L ds,$$

где  $S_+^{(k)} = S^{(k)} \cap \{n_k \geq 0\}$  - "верхняя" полусфера.

Для вычисления последнего поверхностного интеграла, воспользуемся так называемой формулой коплощади на многообразиях [25]:

$$\int_{S_+^{(k)}} n_k \mathbf{d}\mathbf{s} = \int_{\mathbb{R}} ds \int_{\varphi^{-1}(s)} n_k(\mathcal{J}_1(\mathbf{n}, \varphi))^{-1} d\mathcal{H}^{(k-2)}. \quad (1.1)$$

Здесь

$$\varphi(\mathbf{n}) = n_k, \quad \mathcal{J}_1(\mathbf{n}, \varphi) = \sqrt{\det \widetilde{\mathcal{D}}\varphi(\mathbf{n}) \widetilde{\mathcal{D}}\varphi(\mathbf{n})^*},$$

где

$$\widetilde{\mathcal{D}}\varphi : T_{\mathbf{n}}S_+^{(k)} \rightarrow \mathbb{R}$$

является сужением линейного отображения  $\mathcal{D}\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  (определяющего дифференциал  $d\varphi$ ) на  $T_{\mathbf{n}}S_+^{(k)}$  - касательное пространство к полусфере в точке  $\mathbf{n}$  (или “1-форма” на полусфере). Отображение  $\widetilde{\mathcal{D}}\varphi$  определяется  $(k-1)$ -мерным вектором, следовательно  $\widetilde{\mathcal{D}}\varphi(\mathbf{n}) \widetilde{\mathcal{D}}\varphi(\mathbf{n})^*$  - это обычное скалярное произведение векторов, то есть здесь

$$\mathcal{J}_1(\mathbf{n}, \varphi) = \sqrt{\widetilde{\mathcal{D}}\varphi(\mathbf{n}) \widetilde{\mathcal{D}}\varphi(\mathbf{n})^*}.$$

Введем систему координат на сфере  $S^{(k)}$ :

$$n_1 = \sin \psi_1 \sin \psi_2 \dots \sin \psi_{k-2} \sin \psi_{k-1},$$

$$n_2 = \sin \psi_1 \sin \psi_2 \dots \sin \psi_{k-2} \cos \psi_{k-1},$$

...

$$n_{k-i+1} = \sin \psi_1 \sin \psi_2 \dots \sin \psi_{i-1} \cos \psi_i$$

...

$$n_{k-1} = \sin \psi_1 \cos \psi_2,$$

$$n_k = \cos \psi_1,$$

где  $\psi_1, \dots, \psi_{k-2}$  принимают значения из  $[0, \pi]$ , а  $\psi_{k-1}$  из  $[0, 2\pi]$ .

Отображение  $\widetilde{\mathcal{D}}\varphi$  в касательном пространстве определяется своим действием на базис этого пространства. Покажем, что набор векторов  $\left\{ \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \psi_k} \right\}$  является базисом, для этого покажем его ортогональность, т.е.  $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \psi_i} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \psi_j} = 0$  при  $i \neq j$ . Докажем это для  $1 < i, j < k-1$  (для остальных случаев аналогично).

Определим  $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \psi_i}$ :

$$\frac{\partial n_1}{\partial \psi_i} = \sin \psi_1 \dots \sin \psi_{i-1} \cos \psi_i \sin \psi_{i+1} \dots \sin \psi_{k-2} \sin \psi_{k-1},$$

$$\frac{\partial n_2}{\partial \psi_i} = \sin \psi_1 \dots \sin \psi_{i-1} \cos \psi_i \sin \psi_{i+1} \dots \sin \psi_{k-2} \cos \psi_{k-1},$$

...

$$\frac{\partial n_{k-i}}{\partial \psi_i} = \sin \psi_1 \dots \sin \psi_{i-1} \cos \psi_i \cos \psi_{i+1},$$

$$\frac{\partial n_{k-i+1}}{\partial \psi_i} = \sin \psi_1 \dots \sin \psi_{i-1} (-\sin \psi_i),$$

$$\frac{\partial n_{k-i+2}}{\partial \psi_i} = 0,$$

...

$$\frac{\partial n_k}{\partial \psi_i} = 0,$$

Пусть  $i < j$ , тогда:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \psi_i} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \psi_j} &= \sin^2 \psi_1 \dots \sin^2 \psi_{i-1} \sin \psi_i \cos \psi_i \sin^2 \psi_{i+1} \dots \sin^2 \psi_{j-1} \sin \psi_j \cos \psi_j \cdot \\ &\cdot \sin^2 \psi_{j+1} \dots \sin^2 \psi_k + \sin^2 \psi_1 \dots \sin^2 \psi_{i-1} \sin \psi_i \cos \psi_i \sin^2 \psi_{i+1} \dots \sin^2 \psi_{j-1} \sin \psi_j \cdot \\ &\cdot \cos \psi_j \sin^2 \psi_{j+1} \dots \sin^2 \psi_{k-1} \cos^2 \psi_k + \dots + \sin^2 \psi_1 \dots \sin^2 \psi_{i-1} \sin \psi_i \cos \psi_i \cdot \\ &\cdot \sin^2 \psi_{i+1} \dots \sin^2 \psi_{j-1} \sin \psi_j \cos \psi_j \cos^2 \psi_{j+1} + \sin^2 \psi_1 \dots \sin^2 \psi_{i-1} \cdot \\ &\cdot \sin \psi_i \cos \psi_i \sin^2 \psi_{i+1} \dots \sin^2 \psi_{j-1} \cos \psi_j (-\sin \psi_j) = \\ &= \sin^2 \psi_1 \dots \sin^2 \psi_{i-1} \sin \psi_i \cos \psi_i \sin^2 \psi_{i+1} \dots \sin^2 \psi_{j-1} \sin \psi_j \cos \psi_j + \\ &+ \sin^2 \psi_1 \dots \sin^2 \psi_{i-1} \sin \psi_i \cos \psi_i \sin^2 \psi_{i+1} \dots \sin^2 \psi_{j-1} \cos \psi_j (-\sin \psi_j) = 0 \end{aligned}$$

Таким образом

$$(\widetilde{\mathcal{D}\varphi})_k = \mathcal{D}\varphi \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \psi_k} = (0, 0, \dots, 1) \left( \frac{\partial n_1}{\partial \psi_k}, \dots, \frac{\partial n_k}{\partial \psi_k} \right)^T = \frac{\partial n_k}{\partial \psi_k},$$

$$\frac{\partial n_k}{\partial \psi_1} = -\sin \psi_1, \quad \frac{\partial n_k}{\partial \psi_k} = 0, \quad \text{при } k = 2, \dots, k-1.$$

Следовательно  $\widetilde{\mathcal{D}}\varphi$  определяется вектором  $(-\sin \psi_1, 0, \dots, 0)$ . Отсюда получаем

$$\mathcal{J}_1(\mathbf{n}, n_k) = \sin \psi_1 = \sqrt{1 - n_k^2}.$$

Обозначим через  $S_{k-1}$  площадь поверхности единичной сферы в  $\mathbb{R}^{k-1}$ , то есть

$$S_{k-1} = \int_{S^{(k-1)}} d\mathcal{H}^{k-1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{S^{(k)}, n_k \geq 0} n_k \mathbf{d}\mathbf{s} &= \int_0^1 s ds \int_{\varphi^{-1}(s)} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} d\mathcal{H}^{(k-2)} = S_{k-1} \int_0^1 \frac{s}{(1-s^2)^{1/2}} (1-s^2)^{\frac{k-2}{2}} ds = \\ &= -S_{k-1} \frac{(1-s^2)^{\frac{k-1}{2}}}{k-1} \Big|_0^1 = \frac{S_{k-1}}{k-1} = V_{k-1}(1). \end{aligned}$$

В результате получаем:  $mes M_L = LV_{n-1}(1)$ .

Лемма 2 доказана.  $\square$

Отметим, что в трехмерном случае выражение (1.1) представляет собой стандартный поверхностный интеграл, который элементарно приводится к виду:

$$2\pi \int_0^1 r dr = \pi = V_2(1).$$

Способ доказательства леммы 2 позволяет также построить рекуррентный алгоритм моделирования  $k$ -мерного единичного изотропного вектора

$$\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_k), \quad \sum_1^k n_i^2 = 1.$$

Для построения реализации вектора  $\mathbf{n}$  достаточно реализовать координату  $n_k$ , а остальные затем реализовывать как равномерно распределенную точку на сфере размерности  $k-1$  радиуса  $\sqrt{1-n_k^2}$ .

Используя формулу коплощади найдем функцию распределения  $n_k$  :

$$\begin{aligned} F_k(t) = P(n_k < t) &= \int_{S^{(k)}, -1 \leq n_k \leq t} \frac{1}{S_k} \mathbf{d}\mathbf{s} = \frac{S_{k-1}}{S_k} \int_{-1}^t (1 - s^2)^{\frac{k-3}{2}} ds = \\ &= \frac{S_{k-1}}{S_k} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arcsin(t)} \cos^{k-2}(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Случайное значение  $n_k$  реализуется по формуле

$$n_k = F_k^{-1}(\alpha),$$

где  $\alpha$  — стандартное случайное число, равномерно распределенное в  $(0,1)$  (см, например [18]); следовательно требуется достаточно точное табулирование функции  $F_k^{-1}(y)$ ,  $0 < y < 1$ . Соответствующий рекуррентный алгоритм может быть целесообразным, если необходимы не все компоненты изотропного вектора, а только некоторые, например,  $k$ -я. В этих случаях данный алгоритм, по-видимому, существенно эффективнее стандартного алгоритма, вытекающего из того известного факта, что вектор из независимых гауссовских  $N(0,1)$  величин изотропен. Для простоты сравнения алгоритмов рассмотрим вариант  $k = 2m$ . Стандартный алгоритм определяется формулами:

$$n_{2k-1} = \sqrt{-\ln \alpha'_k} \cos(2\pi \alpha''_k), n_{2k} = \sqrt{-\ln \alpha'_k} \sin(2\pi \alpha''_k), k = 1, \dots, m.$$

Трудоемкость стандартного алгоритма в основном определяется реализацией:  $k$  раз значения  $\alpha$ ;  $k$  раз вычисления значения функций  $\cos$  или  $\sin$ ;  $\frac{k}{2}$  раз вычисления значения функции  $\sqrt{-\ln}$ ;  $k$  раз деления (для нормировки). Сформулированный рекуррентный алгоритм определяется реализацией:  $k$  раз значения  $\alpha$ ;  $k - 2$  раза табличной функции  $\mathcal{F}_i^{-1}$ ;  $k - 1$  раз вычисления корня; один раз вычисления значения функции  $\sin$  и  $\cos$ .

Следовательно, если реализация  $\mathcal{F}_i^{-1}$  имеет такую же сложность как  $\sin$ , то рекуррентный алгоритм несколько экономичнее стандартного.



### 1.3 Построение кусочно-постоянной случайной функции с экспоненциальной корреляцией

Особую роль в прикладных исследованиях играет величина

$$\rho = \int_0^{\infty} K(r) dr,$$

где  $K(r)$  - нормированная корреляционная функция, определяемая по формуле

$$K(r) = \frac{1}{D\sigma} (E[\sigma(\mathbf{r})\sigma(\mathbf{r}')] - (E\sigma)^2), \quad r = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|.$$

Величину  $\rho$  иногда называют “корреляционной длиной” в связи с тем, что для простейшей “ступенчатой” аппроксимации  $K(r) \approx K_h(r) = \chi(0, h)$  выполняется равенство  $\rho = h$ ; здесь  $\chi(a, b)$  - индикатор интервала  $(a, b)$ .

В случае изотропного поля величину  $\rho$  называют также радиусом корреляции. Для неизотропного однородного поля  $\rho$  зависит от направления вектора  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ . Соответствующее осреднение даёт возможность приближённого распространения результатов настоящей работы на слабо неизотропные поля.

Для мозаичных случайных полей с независимыми значениями поля в ячейках, если через  $A_r$  обозначить событие, состоящее в том, что точки  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  находятся в одной ячейке, где  $r$  - расстояние между точками, то

$$\begin{aligned} E[\sigma(\mathbf{r})\sigma(\mathbf{r}')] &= E[\sigma(\mathbf{r})\sigma(\mathbf{r}')|A_r]P(A_r) + E[\sigma(\mathbf{r})\sigma(\mathbf{r}')|\bar{A}_r]P(\bar{A}_r) = \\ &= E\sigma^2P(A_r) + (E\sigma)^2(1 - P(A_r)) = D\sigma P(A_r) + (E\sigma)^2 \end{aligned}$$

и, следовательно,  $K(r) = P(A_r)$ .

Теперь определим мозаичное поле Пуассона  $\sigma(\mathbf{r}; \mathcal{P})$ ,  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^k$ , следующим образом: в каждой из подобластей, образованными пересечениями гиперплоскостей, поле имеет случайное значение с некоторым заданным распределением, независимо для каждой подобласти. Ясно, что каждая подобласть будет полностью определяться набором

$$(\gamma_1, \dots, \gamma_n, \dots), \quad \gamma_n = \text{sign}(F_n(\mathbf{r})), \quad (1.2)$$

где  $F_n$ —уравнение соответствующей гиперплоскости, а  $\mathbf{r}$ —произвольная точка подобласти.

Как уже было показано, мера множества гиперплоскостей  $M$ , пересекающих заданный отрезок  $\mathbf{L}$  длины  $L$ , равна  $\mu L$ , где  $\mu = V_{k-1}(1)$ . Следовательно, случайное число этих пересечений имеет пуассоновское распределение с параметром  $\lambda_p \mu L$ ; в частности вероятность того, что ни одна гиперплоскость не пересечет  $\mathbf{L}$  равна  $e^{-\lambda_p \mu L}$ . Кроме того, если  $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$  - два непересекающихся сегмента одной прямой, то соответствующие множества гиперплоскостей  $M_1$  и  $M_2$  также не пересекаются в параметрическом пространстве  $T$ , так как прямая и гиперплоскость могут пересечься лишь в одной точке. Следовательно, число гиперплоскостей пересекающих  $\mathbf{L}_1$ , не зависит от числа гиперплоскостей пересекающих  $\mathbf{L}_2$ . Таким образом, пересечения заданной прямой с полем гиперплоскостей образуют пуассоновский поток на прямой с параметром  $\lambda_p \mu$ . Отсюда

$$P(A_r) = K(r) = e^{-\lambda_p \mu r},$$

то есть корреляционная функция является экспоненциальной и  $\rho_p = 1/(\lambda_p \mu)$ .

Следовательно, с учетом лемм 1,2 справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1.** [27] *Построенное поле  $\sigma(\mathbf{r}; \mathcal{P})$ ,  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^k$ , является однородным и изотропным с экспоненциальной корреляционной функцией  $K(r) = e^{-\lambda_p \mu r}$ .*

## 1.4 Мозаичное поле Вороного

В качестве альтернативы полю Пуассона рассмотрим мозаичное поле Вороного  $\sigma(\mathbf{r}; \mathcal{V})$ . Оно строится на основе пуассоновского точечного потока интенсивности  $\lambda_v$ , который определяет разбиение пространства на ячейки, каждая из которых является множеством точек наиболее близких к одной из точек потока (диаграмма Вороного). Реализации мозаичных полей Вороного и Пуассона в трёхмерном пространстве приведены на рис. 1.1.

Геометрические свойства таких разбиений для обеих моделей детально изучены в [34], [35], [32]. Отметим, что для обеих моделей ячейки (элементы разбиения) являются выпуклыми многогранниками.

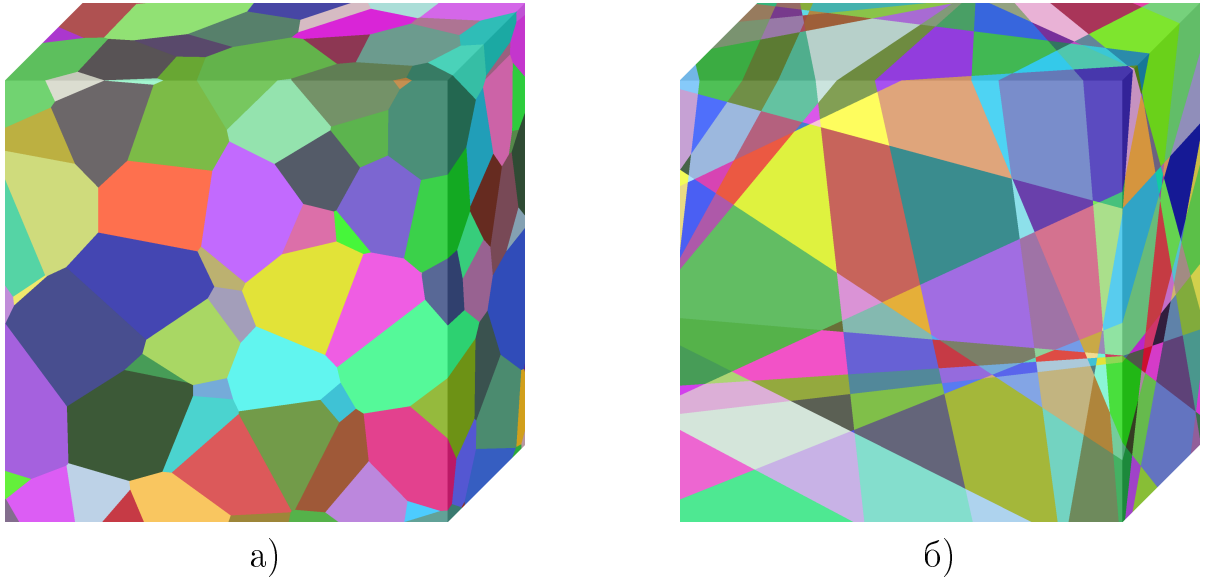


Рисунок 1.1 — Реализации мозаичного поля Вороного (а) и мозаичного поля Пуассона (б) в трёхмерном пространстве. Размер  $20 \times 40 \times 40$ ,  $\rho = 3.6$ .

В работе [32] для мозаичного поля Вороного аналитически найдена вероятность:

$$P(A_r) = \lambda \int_0^\pi \int_0^\infty e^{-\lambda V(R,u)r^3} 6\pi \sin(u) R^2 dR du,$$

где  $V(R,u)$  - объём объединения двух шаров с центрами на расстоянии 1 с радиусами  $R$  и  $\sqrt{R^2 + 1 - 2R \cos(u)}$ . С помощью этой формулы в [32] фактически получено соотношение

$$\int_0^\infty P(A_r) dr = \lambda_v^{-1/3} 4\pi \Gamma(4/3) \int_0^\pi \int_0^\infty V(R,u)^{-4/3} \sin(u) R^2 dR du = 0.459 \lambda_v^{-1/3}.$$

Таким образом для этого поля

$$\rho_v \approx 0.459 \lambda_v^{-1/3}.$$

Хотя корреляционная функция  $K(r) = P(A_r)$  для мозаичного поля Вороного не является экспоненциальной функцией [32], однако расчёты показали, что она близка к ней (см. далее пункт 3.5).

## 1.5 Построение реалистических моделей неотрицательных разорванных случайных полей

В качестве базового далее рассматривается мозаичное случайное поле Пуассона  $\sigma(\mathbf{r}; \mathcal{P})$ ,  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^k$ ,

Настоящая работа ориентирована в основном на моделирование плотности случайных сред, поэтому предполагается, что  $\sigma(\mathbf{r}) \geq 0$ . Если  $P(\sigma = 0) = p_0 > 0$ , то средний относительный объём “пустой” части пространства (степень “разорванности”) для поля  $\sigma(\mathbf{r})$  равен  $p_0$ . Однако использование поля  $\sigma(\mathbf{r})$  для решения практических задач затруднено тем, что его реализации постоянны в элементах разбиения пространства, средний диаметр  $D(\sigma)$  которых близок к корреляционной длине  $\rho$  [34], [27].

Для преодоления этого недостатка в [27], по аналогии с [15], было предложено для случая безгранично делимого распределения  $\sigma$  использовать следующую модификацию поля:

$$\sigma_n(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^{(n)}(\mathbf{r}),$$

причём пуассоновские поля  $\{\sigma_i^{(n)}(\mathbf{r})\}$  независимы и случайная величина  $\sigma_n$  распределена так же, как  $\sigma$ . В частности,

$$E\sigma^{(n)}(\mathbf{r}) = \frac{E\sigma}{n}, \quad D\sigma^{(n)}(\mathbf{r}) = \frac{D\sigma}{n}.$$

Для соответствующих характеристических функций выполняется соотношение

$$\phi_n(u) = \phi_n^n(u),$$

а для корреляционных функций - соотношение

$$K(r; \sigma_n) = K(r; \sigma) = e^{-\pi\lambda r},$$

так как

$$\begin{aligned}
K(r; \sigma_n) &= \frac{1}{D\sigma_n} (\mathbb{E}\sigma_n(\mathbf{r})\sigma_n(\mathbf{r}') - (\mathbb{E}\sigma_n)^2) = \\
&= \frac{1}{\sum_{i=1}^n D\sigma_i^{(n)}} \left( \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\sigma_i^{(n)}(\mathbf{r})\sigma_i^{(n)}(\mathbf{r}') + \sum_{i,j=1; i \neq j}^n \mathbb{E}\sigma_i^{(n)}(\mathbf{r})\sigma_j^{(n)}(\mathbf{r}') - \left( \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\sigma_i^{(n)} \right)^2 \right) = \\
&= \frac{1}{\sum_{i=1}^n n^{-1} D\sigma} \cdot \left( \sum_{i=1}^n (D\sigma_i^{(n)} P(A) + (\mathbb{E}\sigma_i^{(n)})^2) + (n^2 - n)n^{-1} (\mathbb{E}\sigma)^2 - \left( \sum_{i=1}^n n^{-1} \mathbb{E}\sigma \right)^2 \right) = \\
&= \frac{1}{D\sigma} (D\sigma P(A) + (\mathbb{E}\sigma)^2 - (\mathbb{E}\sigma)^2) = \frac{1}{D\sigma} (\mathbb{E}\sigma(\mathbf{r})\sigma(\mathbf{r}') - (\mathbb{E}\sigma)^2) = K(r; \sigma).
\end{aligned}$$

Естественной моделью для одномерного распределения  $\sigma(\mathbf{r})$  является безгранично делимое гамма-распределение с плотностью

$$Cu^{\nu-1} \exp(-\lambda u), u > 0,$$

которое при достаточно большом значении параметра  $\nu$  близко к нормальному.

Реализации функции  $\sigma_n(\mathbf{r})$  являются более реалистическими по сравнению с  $\sigma(\mathbf{r})$ , так как  $\sigma_n(\mathbf{r})$  принимает постоянные значения в меньших областях и эти значения зависимы.

Заметим, что при использовании моделей случайных сред типа  $\sigma_n(\mathbf{r})$  в теории переноса излучения, с целью получения результатов, практически соответствующих  $n = \infty$ , достаточно выбирать такое значение  $n$ , для которого средний диаметр  $D(\sigma)$  элемента разбиения пространства объединённым ансамблем плоскостей существенно меньше средней длины свободного пробега.

Однако здесь при использовании стандартных безгранично делимых распределений невозможно воспроизвести заданное значение степени разорванности и случайная величина  $\sigma^{(n)}(\mathbf{r})$  не ограничена. Это, в частности, существенно затрудняет моделирование случайных траекторий квантов излучения в среде с “коэффициентом ослабления”  $\sigma^{(n)}(\mathbf{r})$  [2]. Численные эксперименты с гамма-распределённой величиной  $\sigma^{(n)}(\mathbf{r})$  показали также некоторую нереалистичность соответствующих изображений, в которых сохраняются отдельные большие значения  $\sigma^{(n)}(\mathbf{r})$  при  $n \rightarrow \infty$  [20].

В связи с вышесказанным в работе [29] разработано представление вида  $\sigma_n$  со следующими свойствами

$$\mathbb{E}\sigma^{(n)}(\mathbf{r}) = \frac{m}{n}, \quad \mathbb{D}\sigma^{(n)}(\mathbf{r}) = \frac{d}{n}, \quad 0 < \sigma^{(n)}(\mathbf{r}) \leq a^{(n)} < +\infty. \quad (1.3)$$

При этом

$$\mathbb{E}\sigma_n(\mathbf{r}) = m = \mathbb{E}\sigma, \quad \mathbb{D}\sigma_n(\mathbf{r}) = d = \mathbb{D}\sigma$$

и, вследствие суммирования в (1.3), можно надеяться на реалистичность условного одномерного распределения  $\sigma_n(\mathbf{r})$  при условии  $\sigma_n(\mathbf{r}) > 0$ , т.е. в заполненной части пространства. Свойства (1.3), в частности, позволяют применить алгоритм моделирования случайного пробега кванта, состоящий в том, что пробег моделируется независимо для каждого из слагаемых  $\sigma_i^{(n)}(\mathbf{r})$  “методом максимального сечения” [18] (см. далее в 2.1) и затем выбирается пробег минимальной длины.

Ясно, что свойства (1.3) требуют сосредоточения распределения  $\sigma^{(n)}$  в малой окрестности нуля. Поэтому здесь целесообразно рассмотреть распределения с “атомом” в нуле, т.е.

$$\mathbb{P}(\sigma^{(n)} = 0) = p_0^{(n)} > 0,$$

и некоторой плотностью

$$f^{(n)}(u) \equiv f^{(n)}(u|\sigma > 0)$$

условного распределения  $\sigma^{(n)}$  в заполненной части пространства. Поэтому целесообразно использовать плотность

$$f_{\beta}^{(n)}(u) = C_{\nu} u^{\nu-1} (a_{\beta}^{(n)} - u)^{\nu-1}$$

симметричного “бета”-распределения и, в качестве альтернативы, степенную плотность

$$f_p^{(n)}(u) = C_{\nu} u^{\nu-1}, \quad 0 < u < a_p^{(n)}.$$

Нетрудно объединить эти варианты  $f^{(n)}$  в рамках общей “бета”-плотности, однако это несколько затрудняет формулировку получаемых далее результатов.

Из формул (1.3) и соотношения

$$p_0 = P(\sigma_\infty = 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (p_0^{(n)})^n$$

получаем следующие выражения для первого и второго вариантов плотности  $f^{(n)}(u)$  соответственно:

$$\begin{aligned} 1 - p_{0,\beta}^{(n)} &= \frac{2(\nu+1)}{(2\nu+1)(1+\frac{dn}{m^2})}, & a_\beta^{(n)} &= \frac{2\nu+1}{\nu+1} \left( \frac{m}{n} + \frac{d}{m} \right), \\ p_{0,\beta} &= \exp \left( -\frac{2m^2(\nu+1)}{d(2\nu+1)} \right), & \frac{m^2}{d} < |\ln(p_{0,\beta})| < 2\frac{m^2}{d}, \\ 1 - p_{0,p}^{(n)} &= \frac{(\nu+1)^2}{\nu(\nu+2)(1+\frac{dn}{m^2})}, & a_p^{(n)} &= \frac{\nu+2}{\nu+1} \left( \frac{m}{n} + \frac{d}{m} \right), \\ p_{0,p} &= \exp \left( -\frac{m^2(\nu+1)^2}{d\nu(\nu+2)} \right), & \frac{m^2}{d} < |\ln(p_{0,p})|. \end{aligned} \quad (1.4)$$

По аналогии с [15] можно также определить предельные конечномерные распределения поля  $\sigma_n(\mathbf{r})$  через пределы соответствующих характеристических функций. Справедливо выражение:

$$\phi_n(r; u) = Ee^{i\sigma_n r} = p_0^{(n)} + (1 - p_0^{(n)})\phi^{(n)}(u) = 1 - (1 - p_0^{(n)})(1 - \phi^{(n)}(u)), \quad (1.5)$$

где  $\phi^{(n)}(u)$  - характеристическая функция, соответствующая плотности  $f^{(n)}(u)$ . Характеристическая функция  $\Theta(\mathbf{r}; u)$  предельного одномерного распределения определяется соотношением

$$\Theta(\mathbf{r}; u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n^n(\mathbf{r}; u).$$

Отсюда, используя формулы (1.4), (1.5), получаем для вариантов с  $f_\beta^{(n)}(u)$  и  $f_p^{(n)}(u)$  соответственно:

$$\begin{aligned} \Theta_\beta(u) &= \exp \left\{ \left( -\frac{2(\nu+1)}{2\nu+1} \right) \frac{m^2}{d} (1 - \phi_\beta(u)) \right\}, \\ \Theta_p(u) &= \exp \left\{ \left( -\frac{(\nu+1)^2}{\nu+2} \right) \frac{m^2}{d} (1 - \phi_p(u)) \right\}, \end{aligned}$$

где  $\Theta_\beta(u)$ ,  $\Theta_p(u)$  - характеристические функции для плотностей  $f_\beta(u)$ ,  $f_p(u)$  в предельных интервалах  $(0, a)$  с границами

$$a_\beta = \frac{d}{m} \frac{2\nu + 1}{\nu + 1}, \quad a_p = \frac{d}{m} \frac{\nu + 2}{\nu + 1}.$$

Можно показать, что такое предельное распределение безгранично делимо, однако соответствующая случайная величина  $\sigma^{(n)}$  не ограничена и её моделирование весьма затруднительно.

Предельные характеристические функции для многоточечных распределений можно получить, пользуясь свойствами пуассоновского поля  $\sigma^{(n)}(\mathbf{r})$  по аналогии с [15]. В частности, характеристическая функция для предельного двухточечного распределения выражается формулой

$$\Theta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; u_1, u_2) = [\Theta(\mathbf{r}; u_1 + u_2)]^{P(A_r)} [\Theta(\mathbf{r}; u_1) + \Theta(\mathbf{r}; u_2)]^{1-P(A_r)}, \quad r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$$

причём здесь

$$P(A_r) = e^{-\pi\lambda r}.$$

Согласованность получаемых таким образом распределений имеет место [15].

Рассматривая поле  $\sigma_n(\mathbf{r})$  в ограниченной области  $G \subset \mathbb{R}^3$ , имеем:

$$\sigma_n \in L^p(G), \quad E\sigma_n^2 = d^2 + m^2.$$

Соответственно сказанному выше частные распределения поля  $\sigma_n(\mathbf{r})$  слабо сходятся к частным распределениям некоторого поля  $\sigma(\mathbf{r})$ . Таким образом выполнены условия теоремы из [7] о слабой сходимости случайных полей в метрике  $L^p(G)$  и тем самым справедливо следующее утверждение

**Теорема 2.** [7] *Случайные поля*

$$\sigma_n(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^{(n)}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in G \subset \mathbb{R}^3,$$

*слабо сходятся в метрике  $L^p(G)$  к полю  $\sigma(\mathbf{r})$ , согласованные конечномерные распределения которого определяются свойствами пуассоновского поля  $\sigma^{(n)}(\mathbf{r})$ .*



Введём обозначения:

$$m_c = E(\sigma | \sigma > 0), \quad d_c = D(\sigma | \sigma > 0).$$

Проведя ряд выкладок на основе соотношений

$$m = (1 - p_0)m_c, \quad d = p_0(1 - p_0)m_c^2 + (1 - p_0)d_c$$

и (1.4), для “бета”-распределения величины  $\sigma^{(n)}$  получаем

$$\nu = \frac{1}{2} \frac{2\frac{m^2}{d} - |\ln(p_0)|}{|\ln(p_0)| - \frac{m^2}{d}} > 0.$$

Аналогичным образом для степенного распределения  $\sigma^{(n)}$  получается соотношение

$$\nu = -1 + \sqrt{\frac{d|\ln(p_0)|}{d|\ln(p_0)| - m^2}} > 0.$$

Рассмотрим теперь вопрос об определении плотности  $f(x)$  предельного одномерного условного распределения  $\sigma$  в заполненной части пространства, т.е.

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(u | \sigma_n > 0).$$

Справедливо представление:

$$f_n(u) = f_n(u | \sigma_n > 0) = \sum_{i=1}^n p_{0,i}^{(n)} (f^{(n)})^{*i}(u), \quad (1.6)$$

где

$$p_{0,i}^{(n)} = (p^{(n)})^{n-i} (1 - p^{(n)})^i C_n^i, \quad \sum_{i=1}^n p_{0,i}^{(n)} = 1, \quad (f^{(n)})^{*i} = (f^{(n)})^{*(i-1)} * f^{(n)},$$

символ “\*” обозначает операцию свёртки. Перейдя в (1.6) к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получаем равенство:

$$f(u) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{0,i} (f^{(\infty)})^{*i}(u), \quad (1.7)$$

причём

$$p_{0,i} = \frac{L^i}{i!} e^{-L},$$

где

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - p^{(n)}) = -\ln(p_0),$$

а  $(f^{(\infty)})^{*i}(u)$  строится так же, как  $(f^{(n)})^{*i}(u)$  с заменой  $a_n$  на  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Нетрудно видеть, что

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_{0,i} = 1, \text{ то есть } \int_0^{\infty} f(u) du = 1.$$

Расчёты были проведены для следующих двух вариантов параметров

$$V_1 : m = 1, d = 0.16, p_0 = 0.00055; \quad V_2 : m = 1, d = 1, p_0 = 0.301,$$

причём для каждого из вариантов были использованы обе из рассмотренных выше элементарных плотностей:  $f_{\beta}^{(n)}(u)$  и  $f_p^{(n)}(u)$ . Соответствующие варианты расчёта обозначим через

$$\Sigma_1 = (V_1, \beta), \quad (V_1, p), \quad \Sigma_2 = (V_2, \beta), \quad (V_2, p).$$

Формулы (1.4) дают:

$$\nu(V_1, \beta) = \nu(V_2, \beta) = 2, \quad \nu(V_1, p) = \nu(V_2, p) = 1.449.$$

Нетрудно показать, что для этих вариантов выполняется неравенство

$$(f^{(n)})^{*i} < C < \infty,$$

то есть использованный предельный переход в (1.6) допустим.

Такой выбор параметров связан с тем, что в [28] представлены результаты тестовых расчётов переноса излучения для пуассоновского поля  $\sigma(\mathbf{r})$  с  $\rho = 3.6$  и бернуллиевским одномерным распределением:

$$P(\sigma = 0.6) = P(\sigma = 1.4) = 0.5,$$

для которого  $m = 1$  и  $d = 0.16$ . Сравнение результатов этих расчётов с результатами для поля  $\Sigma_1$ , приведёнными далее, позволяет проверить гипотезу

об определяющем влиянии значения параметров  $\rho, m, d, p_0$  на перенос излучения. Дополнительные вычисления с  $n = 1000$  показали, что характеристики полей  $\Sigma_1, \Sigma_2$  и соответствующие значения вероятности  $P_t$  практически близки к предельным.

На рис. 1.2 представлены гистограммы  $\tilde{f}_\sigma$  условных плотностей  $f_\sigma(u|\sigma > 0)$  для полей  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ , а также графики соответствующих условных гауссовских плотностей  $f_g$  и гамма-плотностей  $f_\gamma$  с теми же значениями первого и второго моментов  $\hat{m}, \hat{d}$ . Параметры гамма-плотности

$$f_\gamma(x) = cx^{\nu-1}e^{-\lambda x}$$

определяются формулами

$$\nu = \hat{m}^2/\hat{d}, \quad \lambda = \hat{m}/\hat{d}.$$

Из рис. 1.2 видно, что плотности являются вполне реалистическими. На рис. 1.3 даны плоские сечения реализаций полей  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ , которые существенно различаются, т.к. вероятность  $p_0$  для  $\Sigma_1$  равна 0.00055, а для  $\Sigma_2$  - 0.301. Дополнительные расчёты показали, что представленные на рис. 1.2 графики при переходе от  $n = 50$  к  $n = 1000$  практически не изменяются.

Таким образом, поле  $\Sigma$  при некоторых значениях параметров может быть подходящей для решения задач теории переноса излучения моделью разорванной облачности, дополняя таким образом серию моделей из [10]. Наряду с реалистичностью для задач переноса излучения поле  $\Sigma$  характерно тем, что позволяет точно фиксировать значение корреляционной длины  $\rho$ , а также “степень заполненности” пространства (балл облачности), которая совпадает с  $p_0$ .

Для полученной оценки плотности  $f$  вычислялось её “информационное расхождение” [33]:

$$I_\gamma = - \int_0^\infty f_\gamma(u) \ln(f(u)/f_\gamma(u)) du$$

по отношению к плотности

$$f_\gamma(u) = C_\gamma u^{\alpha-1} e^{-qu}$$

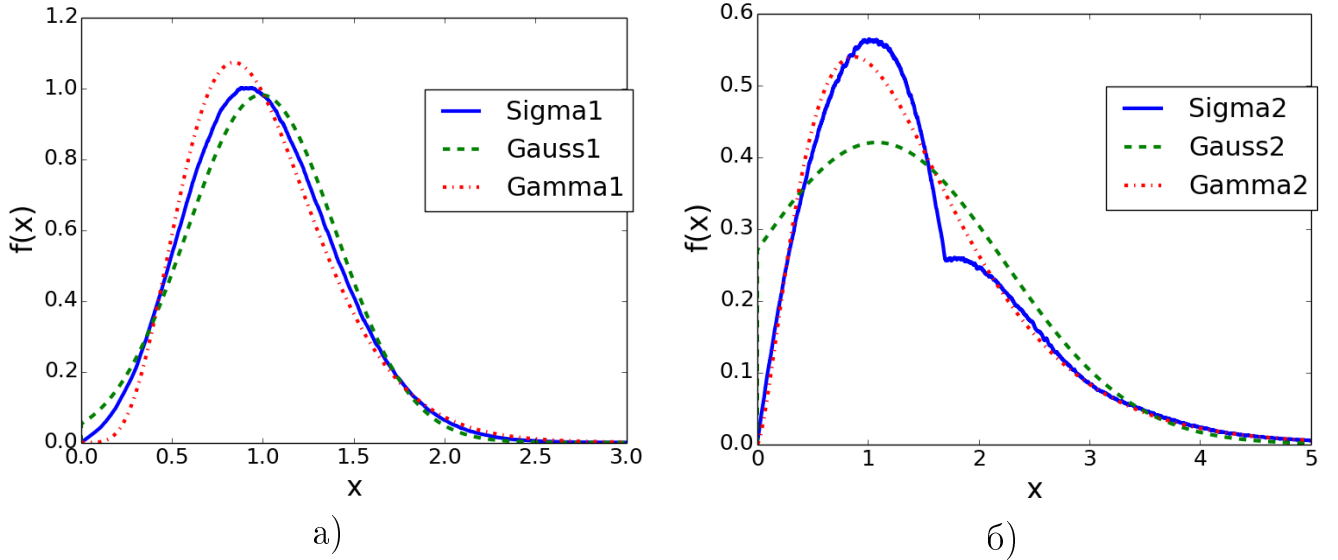


Рисунок 1.2 — Гистограммы  $\tilde{f}_\sigma$  и графики  $f_g, f_\gamma$  для а)  $d = 0.16$ , б)  $d = 1.0$ .

гамма распределения со средним  $m_c$  и дисперсией  $d_c$ ; при этом параметры определяются формулами:

$$\alpha = \frac{m^2}{d}, \quad q = \frac{m}{d}.$$

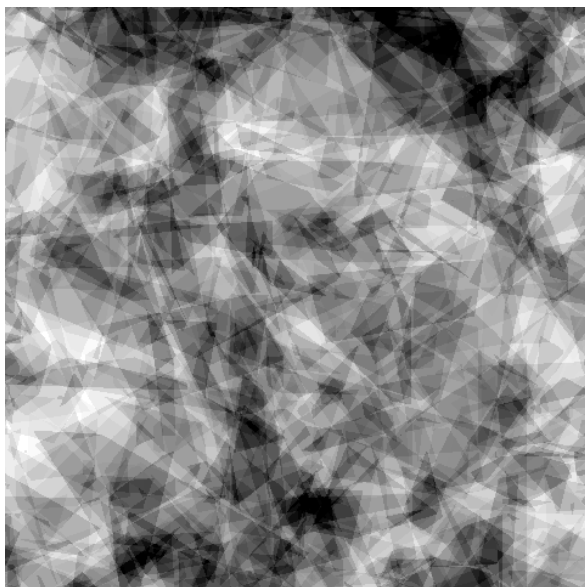
Формула (1.7) с числом слагаемых 20 дала оценки:

$$I_\gamma(V_1, \beta) = 0.014, \quad I_\gamma(V_1, p) = 0.014, \quad I_\gamma(V_2, \beta) = 0.004, \quad I_\gamma(V_2, p) = 0.03,$$

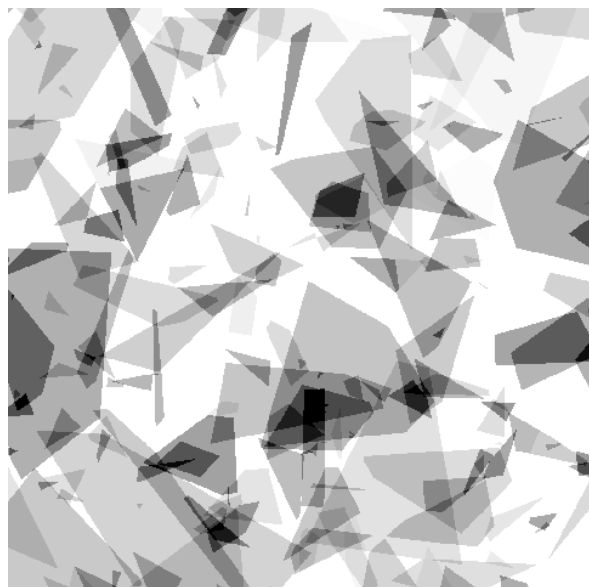
которые были подтверждены при численном статистическом моделировании соответствующих полей  $\sigma^{(n)}$  для  $n = 1000$ . Отметим, что оценки весовых  $L^1$ -норм  $\int_0^\infty f_\gamma(u) |f_\gamma(u) - f(u)| du$  здесь находятся в том же соотношении.

Эти оценки, как и сравнение соответствующих графиков, показывает, что использование плотности  $f_\beta$  сравнительно с  $f_p$  даёт несколько более реалистические распределения  $\sigma$  в заполненной части пространства для  $p_0 \gg 0$ . Дополнительные расчёты показали, что это соотношение сохраняется и при замене  $f_p$  на плотность  $C_\nu(a_n - u)^{\nu-1}$  “правостороннего” степенного распределения, для которого здесь  $\nu = 0.5$ . С другой стороны, визуализация сечений полей  $\sigma_n(V_2, \beta)$  и  $\sigma_n(V_2, p)$  не дала существенных различий.

Отметим также, что при малых значениях  $p_0$  построенные поля  $\sigma^{(n)}$  с ограниченными слагаемыми существенно более реалистичны, сравнительно с неограниченными гамма-распределёнными  $\sigma^{(n)}$ , визуализация которых представлена в [20].



а)



б)

Рисунок 1.3 — Сечения полей  $\Sigma_1$  (а) и  $\Sigma_2$  (б),  $n = 50$ , размер  $50 \times 50$ .

## Глава 2. Перенос излучения в стохастической среде

### 2.1 Моделирование траекторий квантов

Построенные в главе 1 случайные поля можно использовать для решения задач радиационного баланса в стохастических средах с полным коэффициентом ослабления излучения  $\sigma(\mathbf{r})$  методом Монте-Карло [11].

При этом траектории квантов необходимо строить в геометрически сложных реализациях среды. С этой целью в работе использован так называемый “метод максимального сечения”, требующий здесь идентификации элемента разбиения (ячейки), в котором происходит столкновение частицы, для определения значения случайной плотности среды. В связи с этим были разработаны специальные алгоритмы моделирования рассмотренных выше мозаичных случайных полей и соответствующие алгоритмы идентификации [2].

Длина  $\chi$  свободного пробега кванта из точки  $\mathbf{r}'$  в направлении  $\omega$  распределена “неравномерно экспоненциально” с плотностью

$$f_{\chi}(t; \mathbf{r}', \omega) = \sigma(\mathbf{r}' + t\omega) \exp(-\tau(t; \mathbf{r}', \omega)), \quad (2.1)$$

где

$$\tau(t; \mathbf{r}', \omega) = \int_0^t \sigma(\mathbf{r}' + t'\omega) dt'.$$

Здесь  $\sigma(\mathbf{r})$  - случайное поле коэффициента ослабления. Соответствующая плотности (2.1) функция распределения определяется выражением:

$$F_{\chi}(t; \mathbf{r}', \omega) = 1 - e^{-\tau(t; \mathbf{r}', \omega)}.$$

Предполагается, что

$$\tau(+\infty; \mathbf{r}', \omega) = +\infty;$$

для этого среда искусственно дополняется до  $\mathbb{R}^3$  абсолютным поглотителем. Стандартная моделирующая формула

$$l = F_\chi^{-1}(\alpha),$$

сводящаяся к решению уравнения

$$\tau(l; \mathbf{r}', \omega) = -\ln \alpha,$$

для мозаичных полей  $\sigma(\mathbf{r}; \mathcal{V})$  и  $\sigma(\mathbf{r}; \mathcal{P})$  затруднена тем, что требует вычисления и анализа расстояний от  $\mathbf{r}'$  в направлении  $\omega$  до плоскостей, разделяющих ячейки. Однако достаточно эффективным может оказаться “метод максимального сечения” [30], который реализуется в предположении  $\sigma(\mathbf{r}) \leq \sigma_m$  на основе искусственной модификации среды путём дополнения её “ $\delta$ -рассеивателем” с сечением  $\sigma_m - \sigma(\mathbf{r})$  [11], [14].

После такого преобразования радиационной модели интегро-дифференциальное уравнение переноса приобретает вид:

$$\begin{aligned} \omega \nabla \Phi(\mathbf{r}, \omega) + \sigma_m \Phi(\mathbf{r}, \omega) = \\ = \int_{\Omega} [\sigma_s(\mathbf{r}) w(\omega, \omega') + (\sigma_m - \sigma_s(\mathbf{r})) \delta(\omega - \omega')] \Phi(\mathbf{r}, \omega') d\omega'. \end{aligned}$$

Для модифицированной среды длина пробега моделируется по формуле

$$l = -\ln \alpha / \sigma_m.$$

В полученной таким образом точке “столкновения” с вероятностью  $\sigma(\mathbf{r})/\sigma_m$  моделируется “физическое” столкновение, а с вероятностью  $1 - \sigma(\mathbf{r})/\sigma_m$  фиксируется “дельта-рассеяние”, то есть далее строится новый пробег в том же направлении. Заметим, что метод максимального сечения непосредственно вытекает из того известного факта, что “прореживание” с вероятностью  $1 - \sigma(\mathbf{r})/\sigma_m$  пуассоновского точечного потока с параметром  $\sigma_m$  даёт пуассоновский поток интенсивности  $\sigma(\mathbf{r})$ , “время ожидания” для которого распределено с плотностью (2.1); никакого дополнительного обоснования здесь не требуется.

Среднее число фиктивных столкновений на траектории ограничено, например, если  $\sigma(\mathbf{r})/\sigma_m \geq \varepsilon > 0$  и вероятность “выживания” кванта (в точке фи-

зического столкновения)  $q(\mathbf{r}) \leq q_0 < 1$ . При таком моделировании траекторий значение  $\sigma(\mathbf{r})$  достаточно выбирать лишь для тех подобластей, в которых реализуются столкновения. Ясно, что для мозаичных полей это может радикально сократить трудоемкость моделирования, сравнительно с полным построением реализации  $\sigma(\mathbf{r})$ .

Используемые авторами алгоритмы идентификации точки для мозаичных полей требуют  $O(N)$  операций, где  $N$  - число точек в параметрическом пространстве. Если среда заключена в куб с ребром длины  $H$ , то величина  $N_v$  имеет распределение Пуассона с параметром  $\Lambda_v = H^3\lambda_v$ , а  $N_p$  в алгоритме из [27] имеет распределение Пуассона с параметром

$$\Lambda_p = 4\pi\lambda_p d_p, \quad \text{где } d_p = \sqrt{3}H/2.$$

Следовательно, при  $\rho \rightarrow 0$  трудоёмкость алгоритма для мозаичного поля Вороного возрастает быстрее, чем для поля Пуассона, так как

$$\lambda_v \approx (0.459/\rho)^3,$$

а

$$\lambda_p = 1/(\pi\rho) \quad \text{и} \quad \mathbb{E}N_v/\mathbb{E}N_p = \Lambda_v/\Lambda_p \approx 0.0279H^2\rho^{-2}.$$

В то же время соответствующие оценки величины  $P_t$  для больших  $H$  практически совпадают, т.е. пуассоновское поле в расчётах предпочтительнее.

Рассмотрим теперь алгоритмы статистического моделирования переноса частиц, в которых поглощение учитывается весовым множителем (см. например, [14]). Предполагается, что  $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma_s(\mathbf{r}) + \sigma_c(\mathbf{r})$ , где  $\sigma_s(\mathbf{r})$  - коэффициент рассеяния, а  $\sigma_c(\mathbf{r})$  - коэффициент поглощения. Вместо моделирования поглощения можно домножать вспомогательный вес [11] на  $q(\mathbf{r}) = \sigma_s(\mathbf{r})/\sigma(\mathbf{r})$ . Поглощение можно также учитывать экспоненциальным весовым множителем. В соответствующем алгоритме траектория  $\mathbf{L} : \mathbf{r} = \mathbf{r}_{\mathbf{L}}(t), t > 0$ , строится для  $\sigma_c \equiv 0$  (то есть при  $\sigma \equiv \sigma_s$ ) и вычисляется вспомогательный вес

$$J(t; \mathbf{L}) = e^{-\tau_c(t; \mathbf{L})}, \quad \tau_c(t; \mathbf{L}) = \int_0^t \sigma_c(\mathbf{r}_{\mathbf{L}}(s)) ds. \quad (2.2)$$



Учитывая вклад траектории с весом (2.2), получаем несмещённые оценки изучаемых функционалов [14]. Такие оценки могут быть сравнительно эффективными. Это видно из того, что в случае “дельта рассеяния” при мононаправленном точечном источнике соответствующая оценка вероятности прохождения имеет нулевую дисперсию. Экспоненциальный учёт поглощения особенно полезен для оценки влияния малого изменения толщины слоя среды на вероятность прохождения.

Для среды с кусочно-постоянным коэффициентом  $\sigma_c(\mathbf{r})$  справедливо равенство  $\tau_c(t; \mathbf{L}) = \sum_i \sigma_{c,i} l_i$ , где  $l_i$  - длина участка траектории в подобласти с коэффициентом  $\sigma_{c,i}$ . Таким образом, возникает задача вычисления длин  $\{l_i\}$  при использовании “метода максимального сечения”, для решения которой был разработан специальный геометрический алгоритм.

Для оценки вероятностных моментов серии функционалов  $\{I_k(\sigma)\}$  от интенсивности излучения в стохастической среде можно использовать “метод двойной рандомизации” [14], который определяется соотношениями:

$$EI_k(\sigma) = E_\sigma E_{\mathbf{L}} \xi_k(\mathbf{L}, \sigma) = E_{(\mathbf{L}, \sigma)} \xi_k(\mathbf{L}, \sigma),$$

$$E[I_i(\sigma)I_j(\sigma)] = E_{(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \sigma)} [\xi_i(\mathbf{L}_1, \sigma) \xi_j(\mathbf{L}_2, \sigma)].$$

Здесь  $\mathbf{L}$  - случайная траектория кванта, моделируемая для предварительно построенной реализации поля  $\sigma$ , а  $(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2)$  - пара таких условно-независимых траекторий. Таким образом, для построения несмещённых оценок рассматриваемых вероятностных моментов достаточно для каждой реализации  $\sigma$  моделировать лишь пару условно-независимых траекторий  $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$ . Для уменьшения относительной трудоёмкости расчётов здесь можно моделировать две условно-независимые серии траекторий  $\{\mathbf{L}_1^{(n)}\}$  и  $\{\mathbf{L}_2^{(n)}\}$ ,  $n = 1, \dots, N_\sigma$ , причём произведение  $\xi_i(\mathbf{L}_1, \sigma) \xi_j(\mathbf{L}_2, \sigma)$  заменяется на

$$\left[ \sum_{n=1}^{N_\sigma} \xi_i(\mathbf{L}_1^{(n)}, \sigma) \sum_{n=1}^{N_\sigma} \xi_j(\mathbf{L}_2^{(n)}, \sigma) \right] N_\sigma^{-2}.$$

Следует отметить, что при возвращении траектории в ранее пройденную ячейку мозаичного поля следует использовать уже реализованное значение  $\sigma$ ,

что усложняет алгоритм. Если же  $\sigma$  при этом выбирается заново, то возникает “погрешность перевыбора”, которая растёт при ослаблении анизотропии.

## 2.2 Специальные геометрические алгоритмы.

Рассмотрим теперь геометрические алгоритмы моделирования траектории частицы в слое вещества

$$0 \leq x \leq H_2, \quad -H_1 \leq y, z \leq H_1$$

для мозаичных полей Вороного и Пуассона.

Построить реализацию мозаичного поля Вороного можно достаточно легко следующим алгоритмом:

(1) моделируется пуассоновское число  $k$  точек случайного пуассоновского потока  $\{\mathbf{r}^{(i)}\}$  согласно параметру  $\lambda_v H_1^2 H_2$ ,

(2) моделируется  $k$  векторов вида  $(x, y, z, \sigma)$  по формулам:

$$\begin{aligned} x &:= rand \cdot H_2, \\ y &:= (1 - 2 \cdot rand)H_1, \\ z &:= (1 - 2 \cdot rand)H_1, \\ \sigma &:= F_\sigma^{-1}(rand), \end{aligned}$$

где  $F_\sigma^{-1}$  - обратная функция для функции распределения  $F_\sigma$  значений поля в ячейках.

Значение поля  $\sigma$  в точке  $\mathbf{r}$  определяется номером ячейки  $\arg \min_{i=1 \dots k} \|\mathbf{r}^{(i)} - \mathbf{r}\|$ .

Такой алгоритм может быть достаточно трудоёмким, поэтому значения  $\sigma$  целесообразно моделировать по мере необходимости. Поскольку при моделировании пуассоновского потока точек в ограниченной области мозаичное поле Вороного не является однородным и изотропным, то пуассоновский поток точек следует моделировать в области большего размера, чтобы мозаичное поле в рассматриваемом слое было близко к однородному и изотропному.

Построить реализацию мозаичного поля Пуассона несколько сложнее. Базовые плоскости поля, то есть точки  $\{h_i \mathbf{n}_i\}$  моделируются следующим алгоритмом:

(1) моделируется пуассоновское число  $k$  базовых плоскостей согласно параметру  $\Lambda(\Omega) = 4\pi d$ , где  $\Omega$  - достаточно большой шар радиуса  $d$ , содержащий искомую область, а  $\Lambda$  его мера в параметрическом пространстве  $\mathbb{R}^+ \times S^{(3)}$  (см. [27]),

(2) моделируется  $k$  векторов вида  $(h, n_1, n_2, n_3)$  по формулам:

$$\begin{aligned} h &:= d \cdot \text{rand}, \\ n_1 &:= 1 - 2 \cdot \text{rand}, \\ \alpha &:= \text{rand}, \\ n_2 &:= \sqrt{1 - n_1^2} \cos(2\pi\alpha), \\ n_3 &:= \sqrt{1 - n_1^2} \sin(2\pi\alpha). \end{aligned}$$

Отметим, что такой алгоритм реализации  $\mathbf{n}$  является частным случаем указанного выше (см. пункт 1.2) рекуррентного алгоритма моделирования многомерного изотропного вектора.

Значение поля  $\sigma$  в точке  $\mathbf{r}$  определяется последовательностью  $(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$  из 1.2. Хранить значения поля для всех  $2^k$  вариантов последовательностей практически неэффективно, поэтому их можно хранить в виде “дерева” - связного ациклического графа, где ветвления строятся и выбираются в зависимости от знаков  $\{\gamma_i\}$ .

Соответствующий алгоритм можно реализовать следующим образом (описание алгоритма даётся частично в терминах C++). Граф строится из объектов “Node” с параметрами: “Node.Sigma” - значение поля  $\sigma$ , и “Node.NextNode1”, “Node.NextNode2” - указатели на следующие узлы. При создании нового такого объекта полагается: Node.NextNode1 := NULL, Node.NextNode2 := NULL, где NULL - это нулевой указатель.

Параметр “Sigma” не задаётся при создании нового объекта, так как он имеет смысл только для узлов-“листьев”, то есть только для небольшой части всех узлов.

В начале программы создаётся корневой узел “StartNode” и указатель на текущий узел “CurrentNode”. Тогда алгоритм, который выдаёт значение  $\sigma$  в точке  $\mathbf{r}$  будет выглядеть так:

- (1) Найти набор  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$  - соответствующий точке  $\mathbf{r}$ .
- (2) CurrentNode := \*StartNode, где “\*StartNode” - указатель на объект “StartNode”.
- (3) Для  $i$  от 1 до  $k$  делать
  - (3.1) Если  $\gamma_i < 0$ , то
    - (3.1.1) Если CurrentNode.NextNode1 = NULL, то
      - (3.1.1.1) создать новый узел NewNode.
      - (3.1.1.2) Если  $i = k$ , то NewNode.Sigma :=  $F_\sigma^{-1}(rand)$ ,
      - (3.1.1.3) CurrentNode.NextNode1 := \*NewNode.
    - (3.1.2) CurrentNode := CurrentNode.NextNode1.
  - (3.2) Иначе
    - (3.2.1) Если CurrentNode.NextNode2 = NULL, то
      - (3.2.1.1) создать новый узел NewNode.
      - (3.2.1.2) Если  $i = k$ , то NewNode.Sigma :=  $F_\sigma^{-1}(rand)$ ,
      - (3.2.1.3) CurrentNode.NextNode2 := \*NewNode.
    - (3.2.2) CurrentNode := CurrentNode.NextNode2.

Когда алгоритм закончит работу значение параметра “CurrentNode.Sigma” и будет искомым.

Заметим, что узлы, соответствующие заданной последовательности  $(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ , строятся не более одного раза и потому значение “Node.Sigma” соответствующего узла-листа вычисляется только один раз для каждой реализации поля (нет перевыбора).

Корректность этого алгоритма была верифицирована расчётами для небольшого слоя с использованием более простого алгоритма, в котором создавался массив размером  $2^k$  для хранения значений поля.

После каждого моделирования свободного пробега из точки  $\mathbf{x}$  в точку  $\mathbf{y}$  используются следующие рекуррентные алгоритмы  $F_\tau(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  вычисления соответствующего вклада  $\tau_c^+$  в

$$\tau_c(t; \mathbf{L}) = \int_0^t \sigma_c(\mathbf{r}_L(s)) ds.$$

Для мозаичного поля Вороного:

(1) Найти номера ячеек содержащих  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  и соответствующие точки пуассоновского потока  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ , определяющие эти ячейки

(2.1) Если  $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ , то  $\tau_c^+ := \tau_c^+ + \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|\sigma(\mathbf{x})$ .

(2.2) Иначе

(2.2.1) Найти точку пересечения плоскости разделяющей ячейки соответствующие  $X$  и  $Y$  и отрезка  $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$  по формуле

$$\mathbf{z} := \mathbf{x} + \frac{0.5(\mathbf{Y} - \mathbf{X})(\mathbf{X} + \mathbf{Y} - 2\mathbf{x})}{(\mathbf{y} - \mathbf{x})(\mathbf{Y} - \mathbf{X})}(\mathbf{y} - \mathbf{x}).$$

(2.2.2.1) Если  $\mathbf{z}$  принадлежит ячейке соответствующей  $\mathbf{X}$  или  $\mathbf{Y}$ , то

$$\tau_c^+ := \tau_c^+ + \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|\sigma(\mathbf{x}) + \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|\sigma(\mathbf{y}).$$

(2.2.2.2) Иначе запустить  $F_\tau^{(v)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}), F_\tau^{(v)}(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ .

Для мозаичного поля Пуассона:

(1) Найти число  $n$  базовых плоскостей разделяющих  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  (плоскость  $\Gamma_i$  разделяет эти точки, если значение  $\gamma_i$  для них разное),

(2.1) Если  $n = 0$ , то  $\tau_c^+ := \tau_c^+ + \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|\sigma(\mathbf{x})$ .

(2.2) Если  $n = 1$ , то вычислить точку пересечения  $z$  отрезка и плоскости по формуле

$$z := \mathbf{x} + (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \frac{p + \mathbf{n}\mathbf{x}}{\mathbf{n}(\mathbf{y} - \mathbf{x})}$$

и сделать

$$\tau_c^+ := \tau_c^+ + \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|\sigma(\mathbf{x}) + \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|\sigma(\mathbf{y}).$$

(2.3) Если  $n \geq 2$ , то запустить  $F_\tau^{(p)}(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{2}), F_\tau^{(p)}(\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{2}, \mathbf{y})$ .

Метод максимального сечения обычно реализуется следующим образом:

(1)  $t := 0, \alpha := rand$ .

(2) Пока

$$\alpha \geq \frac{\sigma(\mathbf{r}(t))}{\sigma_m} \tag{2.3}$$

делать

$$t := t - \frac{\ln(rand)}{\sigma_m}, \quad \alpha := rand.$$

(3)  $\mathbf{r}(t) := \mathbf{r}' + \mathbf{u}t$ .

Здесь *rand* - процедура, которая при обращении к ней вычисляет новое псевдослучайное число  $\alpha$ . Как указано в [1], количество используемых значений  $\alpha$  здесь можно сократить, используя тот факт, что случайное число циклов (2.3) имеет неоднородное геометрическое распределение с вероятностью  $p_t$ , которая после перехода  $t' \mapsto t$  рекуррентно перевычисляются по формуле

$$p_t := p_{t'} \frac{\sigma(\mathbf{r}(t))}{\sigma(\mathbf{r}(t'))} \left(1 - \frac{\sigma(\mathbf{r}(t'))}{\sigma_m}\right),$$

причём начальное значение вероятности равно  $\sigma(\mathbf{r}(t))/\sigma_m$ . Соответствующее распределение можно моделировать стандартным методом, который реализуется здесь алгоритмом [1]:

$$(1) \quad t := 0, \quad \alpha := rand, \quad p := 1 - \frac{\sigma(\mathbf{r}(t))}{\sigma_m}.$$

(2) Пока

$$\alpha \leq p \tag{2.4}$$

делать

$$t := t - \frac{\ln(rand)}{\sigma_m}, \quad p := p \left(1 - \frac{\sigma(\mathbf{r}(t))}{\sigma_m}\right).$$

$$(3) \quad \mathbf{r}(t) := \mathbf{r}' + \mathbf{u}t.$$

Такой алгоритм расширяет возможности коррелирования оценок для различных вариантов задачи (см. [28]).

Сформулируем теперь распределительный способ моделирования базовых случайных чисел, который позволяет коррелировать оценки с целью их параметрического анализа. В расчётах использовался мультипликативный датчик псевдослучайных чисел с параметрами  $40, 5^{17}$  и с периодом  $2^{38}$  [18].

Пять отдельных последовательности одинаковой длины были использованы соответственно для моделирования: “пуассоновских плоскостей” для случайного разбиения области; значений поля  $\sigma$  в элементах разбиения; величин  $\{-\ln(rand)/\sigma_m\}$  в алгоритме “максимального сечения”; направлений пробегов; значения  $\alpha$  в (2.4).

Для каждого статистического испытания, то есть для реализации траектории (или пары траекторий) строится новая реализация поля и в каждой из четырёх последовательностей используется подпоследовательность значений, начало которой отстоит на 1000 значений от начала предыдущей подпоследова-

тельности. Практически это гарантирует независимость последовательных статистических испытаний и коррелирует оценки для различных вариантов расчёта.

### 2.3 Эффективное осреднение радиационной модели относительно величины $P_t$

Здесь рассматривается односкоростной процесс переноса частиц (см., например, [11]) через плоский слой вещества  $0 < x < H$  с коэффициентом ослабления  $\sigma(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , причём  $\sigma(\mathbf{r})$  - однородное изотропное случайное поле. Выполняется равенство  $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma_s(\mathbf{r}) + \sigma_c(\mathbf{r})$ , где  $\sigma_c(\mathbf{r})$  - коэффициент поглощения, а  $\sigma_s(\mathbf{r})$  - коэффициент рассеяния с заданной индикатрисой рассеяния  $g(\mu)$  [11], причём  $\sigma_s(\mathbf{r})/\sigma(\mathbf{r}) \equiv q < 1$ . Предполагается, что средний косинус рассеяния

$$\mu_0 = \int_0^1 \mu g(\mu) d\mu$$

близок к единице, то есть рассеяние анизотропно.

В качестве тестовой рассмотрена задача с параметрами  $\mu_0 = 0.9$  и  $q = 0.9$ , которые соответствуют переносу видимого солнечного излучения через облачную атмосферу [8]. Рассеяние определяется стандартной индикатрисой Хенни-Гринштейна с параметром  $\mu_0$ :

$$g(\mu) = \frac{1}{2} \frac{1 - \mu_0^2}{(1 + \mu_0^2 - 2\mu_0\mu)^{3/2}}.$$

В качестве основного функционала рассматривается вероятность  $P(\sigma)$  прохождения частицы через слой; требуется оценить среднюю (по распределению  $\sigma$ ) вероятность

$$P_t = EP(\sigma).$$

Осреднённая вероятность прохождения  $P_t$  прохождения через указанный слой реализуется, если нормированный “на один квант” источник сосредоточен на границе слоя  $x = 0$  и направлен по оси  $x$ , то есть распределён с плотностью

$f_1(y, z)\delta(\omega - (1, 0, 0))$ , причём

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y, z) dy dz = 1.$$

Вследствие “горизонтальной” однородности стохастической среды для вычисления  $P_t$  можно использовать

$$f_1(y, z) = \delta(y)\delta(z).$$

Полагая, что поле  $\sigma$  является мозаичным с заданным одномерным распределением, перейдём далее к оценке коэффициентов рассеяния  $\tilde{\sigma}_s$  и поглощения  $\tilde{\sigma}_c$  в требуемой детерминированной радиационной модели, для которой вероятность прохождения равна  $P_t$ .

Прежде всего заметим, что в рассматриваемых условиях непосредственное осреднение  $\sigma_s(\mathbf{r})$ , то есть замена  $\sigma_s(\mathbf{r})$  на величину

$$\bar{\sigma}_s(\mathbf{r}) = p\sigma_1^{(s)} + (1 - p)\sigma_2^{(s)},$$

может несущественно повлиять на величину  $P_t$  лишь в случае существенно анизотропного рассеяния. В связи с этим рассмотрим полуэвристический метод осреднения случайного коэффициента рассеяния, который, как показали тестовые расчёты (см. далее пункт 3.2), может быть более эффективным, чем использование  $\bar{\sigma}_s$ .

Вначале рассмотрим простейший вариант распределения  $\sigma$ :

$$P(\sigma = 0) = p_0, \quad P(\sigma = \sigma_s) = 1 - p_0,$$

причём  $1/\sigma_s < \bar{l}$ , где  $\bar{l}$  - среднее расстояние между последовательными пересечениями границ ячеек пробегом частицы. Величина  $1/\sigma_s$  равна среднему значению свободного “пробега рассеяния” (то есть расстояния между последовательными рассеяниями) в “непустой” ячейке при  $\bar{l} = +\infty$ ; в случае  $\bar{l} < +\infty$  это соотношение будем использовать приближённо для построения требуемой оценки  $\tilde{\sigma}_s$ . Используя это приближение на основе повторного осреднения по ансамблю остатков свободных пробегов после их пересечений с границами ячеек получаем следующее приближённое выражение полного среднего “пробега



рассеяния”:

$$\tilde{\sigma}_s^{-1} \approx (1 - p_0)\sigma_s^{-1} + p_0(\bar{l} + \tilde{\sigma}_s^{-1}),$$

то есть

$$\tilde{\sigma}_s \approx \frac{1 - p_0}{(1 - p_0)\sigma_s^{-1} + p_0\bar{l}}, \quad (2.5)$$

при  $\sigma_s^{-1} < \bar{l}$ , то есть при  $\sigma_s > \bar{l}^{-1}$ . Такое осреднение целесообразно, так как указанные остатки распределены с плотностью (2.1) вследствие пуассоновости потока столкновений. Его практическая удовлетворительность была подтверждена тестовыми расчётами (см. пункт 3.2)).

Как было указано выше (см. пункт 1.3), для мозаичного поля Пуассона

$$\bar{l} = 1/(\pi\lambda_p) = \rho.$$

Приближение  $\bar{l} = \rho$  в (2.5) можно использовать для поля Вороного, а также для произвольного изотропного поля  $\sigma$  на основе его кусочно-постоянной аппроксимации. Заметим, что если  $\sigma_s^{-1} > \bar{l}$ , то целесообразно полагать

$$\tilde{\sigma}_s = \bar{\sigma}_s = (1 - p_0)\sigma_s.$$

Далее, если в непустой ячейке имеет место нормированное распределение

$$F(dx), \quad \sigma_s^{(1)} \leq x \leq \sigma_s^{(2)},$$

значения  $\sigma$  при  $\sigma_s^{(1)} > \bar{l}^{-1}$ , то по аналогии с (2.5) получаем

$$\tilde{\sigma}_s = \frac{1 - p_0}{(1 - p_0) \int_{\sigma_s^{(1)}}^{\sigma_s^{(2)}} \frac{F(dx)}{x} + p_0\bar{l}}. \quad (2.6)$$

Если же

$$1/\sigma_s^{(1)} > \bar{l}, \quad \text{а} \quad 1/\sigma_s^{(2)} < \bar{l},$$

то целесообразно использовать формулу

$$\tilde{\sigma}_s = \frac{1 - p'_0}{(1 - p'_0) \int_{\bar{l}^{-1}}^{\sigma_s^{(2)}} \frac{F_1(dx)}{x} + p'_0\bar{l}},$$

где

$$p'_0 = p_0 + (1 - p_0) \int_{\sigma_s^{(1)}}^{\bar{l}^{-1}} F(dx) = P(\sigma_s < \bar{l}^{-1}),$$

а мера  $F_1$  получается нормированием меры  $F$  на интервале  $(\bar{l}^{-1}, \sigma_s^{(2)})$ .

Если  $p_0 = 0$  и мера  $F(dx)$  такова, что

$$P(\sigma_s = \sigma_s^{(1)}) = p, \quad P(\sigma_s = \sigma_s^{(2)}) = 1 - p$$

при  $\sigma_s^{(1)}, \sigma_s^{(2)} < \bar{l}^{-1}$ , то формула (2.6) приобретает вид

$$\tilde{\sigma}_s = \frac{1}{p/\sigma_s^{(1)} + (1 - p)/\sigma_s^{(2)}}. \quad (2.7)$$

Именно такая формула без достаточных объяснений была использована в [16].

Дополнительно заметим, что, как указано в [16], при малом относительном различии величин  $\sigma_1^{(s)}$  и  $\sigma_2^{(s)}$  может быть эффективным осреднение  $\sigma_s(\mathbf{r})$  по формуле

$$\tilde{\sigma}'_s = \frac{1}{p \frac{1}{\sigma_1^{(s)}} + (1 - p) \frac{1}{\sigma_2^{(s)}}}.$$

В случае непрерывного распределения  $\sigma_s(\mathbf{r})$  это выражение заменяется на  $(\int f_{\sigma_s}(u)u^{-1}du)^{-1}$ .

Рассмотрим теперь вопрос об осреднении коэффициента поглощения, т.е. об оценке величины  $\sigma_c \equiv \tilde{\sigma}_c$ , которая совместно с  $\tilde{\sigma}_s$  воспроизводит достаточно точное значение  $P_t$  асимптотически, при толщине слоя среды  $H \rightarrow \infty$ .

Согласно сказанному в пункте 2.1 в случае детерминированной, т.е. эффективно осреднённой рассеивательной модели, для осреднённой вероятности пропускания выполняется соотношение:

$$P_t = \int E_{\sigma} e^{-\tau_c(\mathbf{L})} P_s(d\mathbf{L}),$$

где  $P_s(d\mathbf{L})$  - соответствующее рассеивательной модели распределение траекторий, а

$$\tau_c(\mathbf{L}) = \tau_c(+\infty, \mathbf{L})$$

это полная длина поглощения прошедшей траектории  $\mathbf{L}$ . Для рассмотренных выше моделей поля  $\sigma(\mathbf{r})$  имеем

$$E_{\sigma} e^{-\tau_c(\mathbf{L})} = E_{\sigma} \exp\left(-\sum_i \sigma_{(i)}^{(c)} l_i\right),$$

где  $\{l_i\}$  - длины пробега на  $\mathbf{L}$  в подобластях базового мозаичного разбиения пространства,  $\{\sigma_{(i)}^{(c)}\}$  - соответствующие случайные значения  $\sigma_c$ . Вследствие условной независимости этих значений имеем:

$$E_{\sigma} e^{-\tau_c(\mathbf{L})} = \prod_i E \exp(-\sigma_{(i)}^{(c)} l_i). \quad (2.8)$$

В случае “непроходящей траектории” полагаем

$$E_{\sigma} e^{-\tau_c(\mathbf{L})} = 0.$$

Отметим, что вследствие хорошо известной формулы “дисперсия равна дисперсии условного математического ожидания плюс условная дисперсия” использование (2.8) может существенно улучшать статистические оценки.

В [16] для мозаичного поля Пуассона  $\sigma$  была построена аналитическая оценка величины  $\tilde{\sigma}_c$  в предположении, что реализуется “ $\delta$  - рассеяние”, которое не меняет направление пробега кванта. В этом предположении, согласно сказанному в пункте 2.1, последовательность  $\{t_i\}$  расстояний от начала траектории до пересечений с границами случайного пуассоновского разбиения является пуассоновским точечным потоком с интенсивностью  $\bar{l} = \pi\lambda$ . Представление

$$EJ(t; \mathbf{L}) = EE(J(t; \mathbf{L})|t_1)$$

даёт для этой функции интегральное уравнение [16] типа “уравнения восстановления”, для которого известно [31] асимптотическое (при  $H \rightarrow +\infty$ ) решение:

$$EJ(t; \mathbf{L}) \asymp B e^{-\alpha t},$$

где

$$B = (\bar{l}^2 E[\bar{l} - \alpha + \sigma_c(\mathbf{r}(t_1))]^{-2})^{-1} < 1, \quad (2.9)$$

а значение  $\alpha = \tilde{\sigma}_c$  определяется уравнением

$$F(\alpha) = E[\bar{l} - \alpha + \sigma_c(\mathbf{r}(t_1))]^{-1} = \bar{l}^{-1}. \quad (2.10)$$

Решение этого уравнения существует и единственно в интервале  $(0, \alpha_1)$ , где

$$\alpha_1 = \bar{l} + \min \sigma_c(\mathbf{r}),$$

вследствие того, что  $F(0) \leq \bar{l}^{-1}$ , а  $F(\alpha_1) = +\infty$ .

Отметим, что в (2.10) осреднение осуществляется соответственно одномерному распределению  $\sigma(\mathbf{r})$ , которое может быть и не “бернуллиевским” (см. рис. 1.3).

Для непуассоновского поля  $\sigma(\mathbf{r})$  и реального рассеяния, величину  $\bar{l}$  в (2.10), как и далее при оценке величины  $\tilde{\sigma}_s$ , можно в первом приближении заменить на корреляционную длину  $\rho$ .

Расчёты показали, что, как и можно было ожидать, оценка  $\tilde{\sigma}_c$  из уравнения (2.10) для пуассоновского поля с умножением оценки  $P_t$  на  $B$  несколько более эффективна, чем универсальная оценка  $E\sigma_c - \rho D\sigma_c$ , полученная в [16] на основе центральной предельной теоремы для случайного процесса  $\tau_c(t; \mathbf{L})$  при дополнительном условии  $2\rho D\sigma_c - E\sigma_c < 0$ . Для непуассоновского поля  $\sigma(\mathbf{r})$  величину  $\bar{l}^{-1}$  в (2.10), как и при оценке величины  $\tilde{\sigma}_s$ , можно в первом приближении заменить на корреляционную длину  $\rho$ , что, однако, может существенно ухудшить оценку  $\tilde{\sigma}_c$ . Использование уравнения (2.10) затруднено также необходимостью предварительного определения одномерного распределения случайного поля  $\sigma(\mathbf{r})$ . Поэтому целесообразно распространить полученную в [16] универсальную оценку и на случай, когда  $2\rho D\sigma_c - E\sigma_c > 0$ .

В [16] получено выражение

$$EJ(t; \mathbf{L}) \asymp \exp\left\{-tE\sigma_c\left(1 - \frac{\rho D\sigma_c}{E\sigma_c}\right)\right\} * \int_A^\infty f(u) du, \quad t \rightarrow \infty,$$

где  $f(u)$  - плотность стандартного нормального распределения,

$$A = \frac{2\rho D\sigma_c - E\sigma_c}{\sqrt{2\rho D\sigma_c}} \sqrt{t} = C_A \sqrt{t}.$$

Отсюда в случае  $2\rho D\sigma_c - E\sigma_c < 0$  и получается оценка

$$\tilde{\sigma}_c \approx E\sigma_c - \rho D\sigma_c.$$

Если же  $2\rho D\sigma_c - E\sigma_c > 0$ , то требуемую оценку можно получить на основе асимптотического выражения

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp^{-\frac{t^2}{2}} dt \asymp \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Полагая  $x = A$ , после простого преобразования получаем

$$EJ(t; \mathbf{L}) \asymp \frac{1}{\sqrt{2\pi t C_A}} \exp\left\{-\frac{(E\sigma_c)^2}{4\rho D\sigma_c} t\right\},$$

то есть можно положить

$$\tilde{\sigma}_c \approx \frac{(E\sigma_c)^2}{4\rho D\sigma_c},$$

домножая оценку  $P_t$  на  $(\sqrt{2\pi} \tilde{L} C_A)^{-1}$ , где  $\tilde{L}$  - эффективно осреднённая длина прошедшей траектории. Подходящей здесь может оказаться оценка вида:

$$\tilde{L} \approx -\ln P(\bar{\sigma}_s, \bar{\sigma}_c) / \bar{\sigma}_c.$$

Ясно, что реальное анизотропное рассеяние несколько увеличивает эффективное значение  $\rho$  для данной траектории  $\mathbf{L}$  и следовательно уменьшает полученную оценку  $\tilde{\sigma}_c$ .

Отметим, что в случае неизотропного поля  $\sigma(\mathbf{r})$ , как показывают, в частности, тестовые расчёты из [16], здесь в качестве  $\rho$  можно рассматривать среднее по направлениям вектора  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  значение корреляционной длины.

## 2.4 Асимптотические оценки случайного поля проходящей радиации

Как указано во введении, вероятность прохождения кванта от достаточно протяжённого пограничного нормированного источника для рассматриваемых

моделей стохастических сред близка к  $P_t$  практически для всех реализаций среды; это подтверждается результатами численного статистического моделирования, проведённого автором ( см. табл 1 ). В настоящем пункте решается более реальная задача оценки показания достаточно протяжённого “нормированного” детектора частиц на верхней границе слоя в случае мононаправленного источника, распределённого равномерно на нижней границе (“один квант с единицы площади”). Из нижеследующего видно, что при выполнении определённых свойств эргодичности такое показание, как функция случайного поля  $\sigma$ , близко к  $P_t$  с дисперсией, убывающей при увеличении площади детектора соответственно убыванию корреляционной функции поля интенсивности проходящей радиации. Таким образом возникает задача оценки этой корреляционной функции.

Обозначим через  $I(\mathbf{r}) = I(y, z)$  полное среднее число частиц в точке  $\mathbf{r} = (H, y, z) \in \{x = H\}$  (поле проходящей радиации). Значение  $I(\mathbf{r}_0)$  определяется значениями однородного поля  $\sigma$  в цилиндрической окрестности

$$\sqrt{(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < r_{cyl}, \quad 0 < x < H$$

точки  $\mathbf{r}_0$ , то есть чем больше  $r_{cyl}$ , тем меньше вклад от источников расположенных вне цилиндра. Поскольку мозаичные поля Вороного  $\sigma_v$  и Пуассона  $\sigma_p$  основаны на пуассоновских точечных потоках, то эмпирически понятно, что для этих полей зависимость значений  $\sigma(\mathbf{r}), \sigma(\mathbf{r}')$  уменьшается при  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow \infty$  и

$$EI(\mathbf{r}_0)I(\mathbf{r}'_0) \rightarrow (EI)^2 \quad \text{при } |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'_0| \rightarrow \infty.$$

Следовательно, нормированная корреляционная функция поля проходящей радиации  $K_I(r) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ .

Пусть показание детектора определяется величиной

$$I_T = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T I(y, z) dy dz.$$

Отметим, что для “горизонтально” однородных источника и стохастической среды имеем  $EI_T = P_t$ .

По аналогии с [6], где рассмотрен одномерный вариант задачи, для двумерной области  $0 \leq y, z \leq T, z = H$ , используя замену:

$$t = y - y', \quad t' = y + y', \quad s = z - z', \quad s' = z + z'$$

получаем:

$$\begin{aligned} DI_T &= D \left( \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T I(y, z) dy dz \right) = \\ &= \frac{1}{T^4} \int_0^T \int_0^T \int_0^T \int_0^T (EI(y, z)I(y', z') - EI(y, z)EI(y', z')) dy dz dy' dz' = \\ &= \frac{1}{T^4} \int_0^T \int_0^T \int_0^T \int_0^T K_I(y - y', z - z') DI dy dz dy' dz' = \\ &= \frac{1}{T^4} \int_{-T}^T \int_{-T}^T (T - |t|)(T - |s|) K_I(t, s) DI dt ds \underset{T \rightarrow \infty}{\asymp} \\ &\underset{T \rightarrow \infty}{\asymp} T^{-2} DI \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_I(t, s) dt ds = 2\pi T^{-2} DI \int_0^{\infty} r K_I(r) dr. \end{aligned}$$

то есть

$$DI_T \underset{T \rightarrow \infty}{\asymp} 2\pi T^{-2} DI \int_0^{\infty} r K_I(r) dr. \quad (2.11)$$

Для  $K_I(r) = e^{-\lambda r}$  отсюда

$$DI_T \underset{T \rightarrow \infty}{\asymp} 2\pi T^{-2} \lambda^{-2} DI. \quad (2.12)$$

Заметим, что оценка величины  $DI_T$  даёт возможность получить из (2.12) оценку  $\tilde{\lambda}$  значения  $\lambda$ .

С целью оценки рассмотренного выше осреднённого показания детектора

$$EI_T = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T EI(y, z) dy dz$$

и, главное, соответствующей дисперсии на основе “двойной рандомизации” был использован “метод сопряжённых блужданий” [11], [14] для оценки величины  $I(y, z)$  при фиксированном  $\sigma$ . Этот метод формулируется на основе “теоремы оптической взаимности”, то есть двойственного представления линейного функционала:

$$I_p = (\Phi, p) = (\Phi^*, \Phi_0),$$

где  $\Phi \equiv \Phi(\mathbf{r}; \omega)$  - плотность потока частиц (интенсивность излучения),  $\Phi^*$  - решение сопряжённого уравнения переноса со свободным элементом  $p \in L_\infty$ ,  $\Phi_0$  - плотность распределения источника частиц. Преобразование сопряжённого уравнения к виду прямого (см. [11], [14]) показывает, что для оценки величины  $I_p$  можно моделировать процесс переноса из источника с плотностью  $p(\mathbf{r}, -\omega)$  и вычислять “показание приёмника” с весовой функцией  $\Phi_0(\mathbf{r}, -\omega)$ .

В рассматриваемой задаче  $I(y, z)$  - это среднее число частиц, вылетающих (при фиксированном  $\sigma$ ) в точке  $(H, y, z)$ , то есть

$$I(y, z) = \int_{\Omega^+} \Phi(H, y, z; \omega) \omega_x d\omega = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \Phi(H, y, z; \varphi, \mu) \mu d\varphi d\mu, \quad (2.13)$$

где  $\mu = \omega_x$ , а  $\varphi$  - “азимутальный” угол в сферической системе координат с центром  $(H, y, z)$  и осью  $Ox$ .

Плотность распределения источника здесь - это плотность распределения начально рассеянных частиц (см. (2.1)):

$$\Phi_0(\mathbf{r}, -\omega) = \sigma_s(\mathbf{r}) e^{-\tau(x; (0, y, z), \omega_0)} \frac{1}{2\pi} g((\omega_0, -\omega)), \quad 0 \leq x < H,$$

где  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , а  $\omega_0 = (1, 0, 0)$ . При этом к оценке следует добавить начальный вклад  $\exp(-\tau(H; (0, y, z), \omega_0))$ . В моделируемой “сопряжённой” траектории начальные координаты определяются по формулам:

$$\mathbf{r}_0 = (H, y, z), \quad \omega = (\mu, \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi, \sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi)$$

причём  $\mu$  распределено по закону Ламберта с плотностью вероятностей  $f_\mu(x) = 2x$ ,  $0 < x < 1$ , то есть  $\mu = \sqrt{\alpha}$ , где  $\alpha$  равномерно распределено в  $(0, 1)$ . Соответственно (2.13) следует вводить вспомогательный начальный “вес частицы” (см., например, [11], [14])  $Q_0 = \pi$ .

Таким образом, вклад траектории в оценку определяется суммой вкладов вида:

$$h(\mathbf{r}, \omega) = \pi \Phi_0(\mathbf{r}, -\omega) / \sigma(\mathbf{r})$$

для каждого столкновения [11] и начального вклада.

Если поглощение учитывается экспоненциальным множителем (см. пункт 2.1), то  $h(\mathbf{r}, \omega)$  домножается на  $\sigma(\mathbf{r}) / \sigma_s(\mathbf{r})$ . Осреднённое показание детектора



$EI_T$  оценивается с помощью дополнительной рандомизации по площади детектора, а величина  $DI_T$  - методом “двойной рандомизации” с использованием двух условно-независимых серий траекторий с  $N_\sigma = 100$  (см. пункт 2.1).

На рис. 2.1 показаны поля проходящей радиации  $I(y, z; \sigma)$  для сред  $\sigma = \Sigma_1, \Sigma_2$  (см. пункт 1.5) для толщин  $H = 5, 10$ . Изображения были вычислены “методом сопряжённых блужданий”, путём моделирования по 1000 траекторий из каждой точки с использованием коррелированных псевдослучайных чисел.

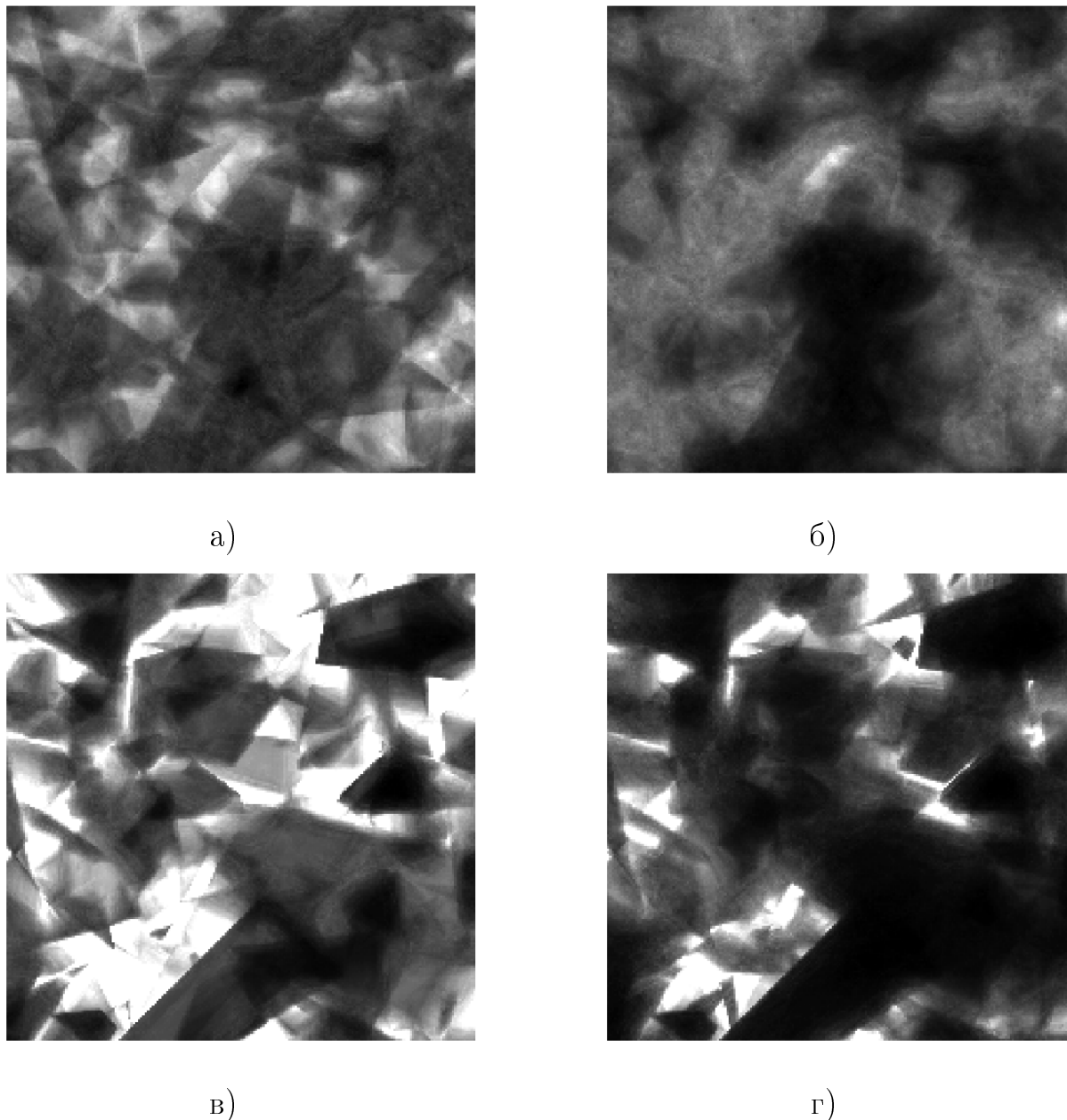


Рисунок 2.1 — Поля проходящей радиации через среды: а)  $\Sigma_1$  ( $d = 0.16$ ,  $p_0 = 0.00055$ ), толщина  $H = 5$ ; б)  $\Sigma_1$ ,  $H = 10$ ; в)  $\Sigma_2$  ( $d = 1.0$ ,  $p_0 = 0.301$ ),  $H = 5$ ; г)  $\Sigma_2$ ,  $H = 10$ . Размер поля  $50 \times 50$ ,  $\rho = 3.6$ .

Отметим, что если при прямом моделировании каждой точке мононаправленного источника  $(0, y, z)$  сопоставлять соответствующее значение  $P_t(\sigma)$ , то тоже получится двумерное случайное поле (см. рис. 2.2). Назовём его  $I^*(\sigma)$ .

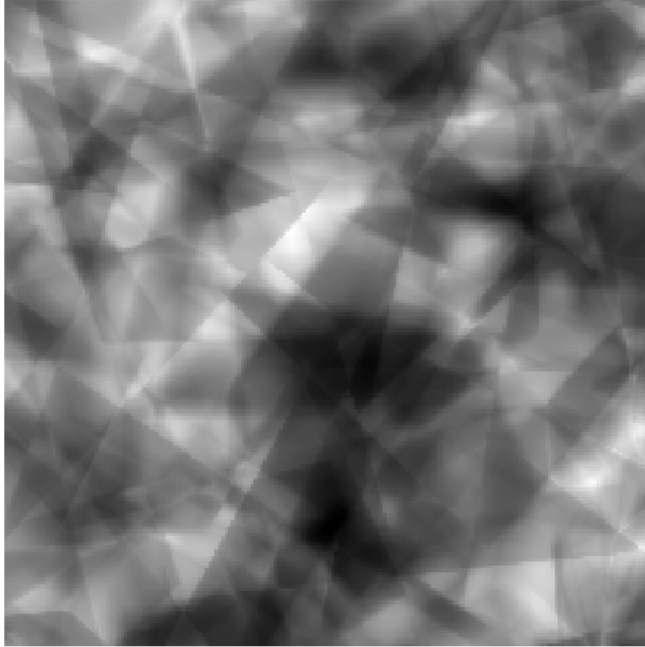


Рисунок 2.2 — Поле  $I^*$  для среды  $\Sigma_1$ ,  $H = 5$ ,  $50 \times 50$ ,  $\rho = 3.6$ .

У этих полей имеется двойственность по математическим ожиданиям, то есть  $EI = EI^*$ , но вообще говоря они различны. Например для среды  $\Sigma_1$  ( $n = 10$ ) значения их вторых моментов не совпадают для толщины  $H = 1$ :

$$EI \approx EI^* \approx 0.878, \quad EI^2 \approx 0.773 \neq E(I^*)^2 \approx 0.766;$$

и для толщины  $H = 20$ :

$$EI \approx EI^* \approx 0.0335, \quad EI^2 \approx 0.00163 \neq E(I^*)^2 \approx 0.00148.$$

По аналогии с детерминированным вариантом задачи можно предположить, что выполняется асимптотическое соотношение

$$P_t = P_t(H) \asymp Ce^{-\beta H}, \quad H \rightarrow \infty.$$

Построив оценки  $\tilde{P}_t(H)$  и  $\tilde{P}_t(H + \Delta H)$  на одном ансамбле траекторий частиц, можно оценить параметры  $C, \beta$ :

$$\beta \approx \tilde{\beta} = (\Delta H)^{-1} \ln(\tilde{P}_t(H)/\tilde{P}_t(H + \Delta H)), \quad C \approx \tilde{C} = \tilde{P}_t e^{\tilde{\beta} H}. \quad (2.14)$$

Дисперсии  $D\tilde{C}, D\tilde{\beta}$  можно оценить, повторив  $M$  раз выборку ансамбля. Если прямое осреднение  $M$  полученных оценок близко к оценке по объединённому ансамблю, то естественно предполагать, что дисперсия такой, наиболее точной, оценки в  $M$  раз меньше элементарной. В какой-то степени проверить это предположение можно, оценив величину  $D\tilde{\beta}$  на основе соотношения:  $P_t(H + \Delta H)/P_t(H) \approx e^{-\beta \Delta H} \approx 1 - \beta \Delta H$ , то есть используя формулу:

$$\tilde{\beta} \approx \frac{1}{\Delta H} \frac{\tilde{P}_t(H) - \tilde{P}_t(H + \Delta H)}{\tilde{P}_t(H)}. \quad (2.15)$$

Учитывая положительную корреляцию числителя и знаменателя в 2.15, естественно предположить, что

$$D\tilde{\beta} \leq \frac{1}{(\Delta H)^2} \frac{D[\tilde{P}_t(H) - \tilde{P}_t(H + \Delta H)]}{\tilde{P}_t^2(H)}. \quad (2.16)$$

Величина  $D[\tilde{P}_t(H) - \tilde{P}_t(H + \Delta H)]$  эффективно оценивается и может быть достаточно малой, если оценки  $\tilde{P}_t(H)$  и  $\tilde{P}_t(H + \Delta H)$  вычисляются на одном ансамбле траекторий.

В качестве альтернативной можно рассмотреть оценку величин  $C, \beta$ , путём вычисления соответствующих значений для детерминированной модели с параметрами  $\tilde{\sigma}_c, \tilde{\sigma}_s$  (см. пункт 3.4).

## 2.5 Некоторые предельные соотношения, связанные с уменьшением корреляционного радиуса

Поскольку рассматриваемые мозаичные поля являются однородными и изотропными, то для одномерного интеграла

$$\tau(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \int_0^l \sigma(\mathbf{r}_{\mathbf{L}}(t)) dt$$

по произвольному отрезку  $\mathbf{L} = [\mathbf{r}', \mathbf{r}]$  длины  $l$ :  $\mathbf{r}_{\mathbf{L}}(t)$ ,  $t \in [0, l]$ , выполняется оценка (см., например, [6], формула (18.3.1))

$$D\tau(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \leq 2l\rho D\sigma.$$

Следовательно

$$D\tau(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0$$

и

$$l.i.m. \tau(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = lE\sigma, \quad (2.17)$$

где *l.i.m.* - обозначает сходимость в среднеквадратичном.

Поскольку параметр  $\lambda$  для мозаичных полей Вороного и Пуассона является по сути параметром масштаба (см., например, [34]), то при  $\rho \rightarrow 0$  диаметры ячеек по вероятности стремятся к нулю. Следовательно, если зафиксировать точку  $\mathbf{r}$  и число  $\delta > 0$ , то для диаметра  $d_{\mathbf{r}}$  ячейки, содержащей  $\mathbf{r}$ , выполняется соотношение

$$P(d_{\mathbf{r}} > \delta) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0. \quad (2.18)$$

Как и в пункте 2.3 рассмотрим задачу переноса излучения через плоский ограниченный слой  $G$  толщины  $H$  с коэффициентом ослабления  $\sigma(\mathbf{r})$ . Пусть  $f(\mathbf{x})$  - нормированная (возможно обобщённая) плотность источника столкновений в  $X = G \times S^{(3)}$ , то есть  $f \in N(X)$ , где  $N(X)$  - пространство обобщённых плотностей мер ограниченной вариации. Пусть, кроме того, рассматривается функционал  $I_{\sigma} = (\varphi_{\sigma}, h_{\sigma})$ , где  $\varphi_{\sigma}$  - решение интегрального уравнения переноса

для плотности столкновений частиц

$$\varphi_\sigma = K_\sigma \varphi_\sigma + f$$

с ядром

$$k_\sigma(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{r}) \exp(-\tau(\mathbf{r}', \mathbf{r})) q \frac{g((\mathbf{u}', \mathbf{u}))}{2\pi} \delta(\mathbf{u}' - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}) |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-2},$$

причём  $\|K_\sigma\| \leq q$ , где  $q \equiv \frac{\sigma_s(\mathbf{r})}{\sigma(\mathbf{r})}$  - вероятность выживания частицы после столкновения,  $h_\sigma \in C(X)$ , то есть  $h_\sigma$  непрерывная на  $X$  функция. Тогда для мозаичных случайных полей  $\sigma(\mathbf{r})$  с указанными выше свойствами можно сформулировать теорему.

**Теорема 3.** [2] Пусть  $\sigma(\mathbf{r})$  - однородное изотропное мозаичное случайное поле со свойствами (2.17), (2.18) и  $0 \leq \sigma(\mathbf{r}) \leq \sigma_{max} < \infty$ ,  $E\sigma = a$ . Пусть, кроме того, для почти всех  $\mathbf{x}$  имеет место сходимость по вероятности

$$h_\sigma(\mathbf{x}) \xrightarrow[\rho \rightarrow 0]{P} h_{\sigma^{(d)}}(\mathbf{x}),$$

тогда

$$l.i.m. I_\sigma = I_{\sigma^{(d)}},$$

где  $\sigma^{(d)}(\mathbf{r})$  - детерминированное поле  $\sigma^{(d)}(\mathbf{r}) \equiv a$ .

**Доказательство:** Поскольку решение  $\varphi_\sigma$  представимо в виде ряда Неймана  $\varphi_\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} K_\sigma^n f$ , то  $I_\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} (K_\sigma^n f, h_\sigma)$  и последний ряд мажорируется рядом  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n \|h_\sigma\|_{C(X)}$ . Следовательно достаточно доказать сходимость в среднеквадратичном для одного слагаемого суммы.

Рассмотрим соотношение

$$\begin{aligned}
D(K_\sigma^n f, h_\sigma) &= E(K_\sigma^n f, h_\sigma)^2 - (E(K_\sigma^n f, h_\sigma))^2 = \\
&= \int_{X^n} \int_{X^n} \left( E \left[ f(\mathbf{x}_0) h_\sigma(\mathbf{x}_n) \prod_{k=0}^{n-1} k_\sigma(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}) f(\mathbf{x}'_0) h_\sigma(\mathbf{x}'_n) \prod_{k=0}^{n-1} k_\sigma(\mathbf{x}'_k, \mathbf{x}'_{k+1}) \right] - \right. \\
&\quad \left. - E \left[ f(\mathbf{x}_0) h_\sigma(\mathbf{x}_n) \prod_{k=0}^{n-1} k_\sigma(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}) \right] E \left[ f(\mathbf{x}'_0) h_\sigma(\mathbf{x}'_n) \prod_{k=0}^{n-1} k_\sigma(\mathbf{x}'_k, \mathbf{x}'_{k+1}) \right] \right) \\
&\quad d\mathbf{x}_0 \dots d\mathbf{x}_n d\mathbf{x}'_0 \dots d\mathbf{x}'_n. \quad (2.19)
\end{aligned}$$

Для фиксированных наборов  $(\mathbf{x}_0 \dots \mathbf{x}_n)$  и  $(\mathbf{x}'_0 \dots \mathbf{x}'_n)$  зависящая от случайного поля  $\sigma(\mathbf{r})$  часть подынтегрального выражения определяется значениями  $\sigma$  в точках ломаных  $L$  и  $L'$  с вершинами  $\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{r}_n$  и  $\mathbf{r}'_0, \dots, \mathbf{r}'_n$  соответственно. Следовательно, достаточно рассмотреть следующее выражение:

$$\begin{aligned}
&E \left[ h_\sigma(\mathbf{x}_n) h_\sigma(\mathbf{x}'_n) e^{-\tau(L)} e^{-\tau(L')} \prod_{k=1}^n \sigma(\mathbf{r}_k) \sigma(\mathbf{r}'_k) \right] - \\
&\quad - E \left[ h_\sigma(\mathbf{x}_n) e^{-\tau(L)} \prod_{k=1}^n \sigma(\mathbf{r}_k) \right] E \left[ h_\sigma(\mathbf{x}'_n) e^{-\tau(L')} \prod_{k=1}^n \sigma(\mathbf{r}'_k) \right], \quad (2.20)
\end{aligned}$$

где  $\tau(L) = \int_0^{|L|} \sigma(\mathbf{r}_L(t)) dt$ , а  $|L|$  - длина ломаной  $L$ .

Рассмотрим отдельно выражение

$$h_\sigma(\mathbf{x}_n) e^{-\tau(L)} \prod_{k=1}^n \sigma(\mathbf{r}_k).$$

Обозначим через

$$d_{min} = \min_{0 \leq i < j \leq n} dist(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$$

минимум расстояний между парами вершин ломаной  $L$ . Если через  $A_\sigma$  обозначить событие, состоящее в том, что в каждой ячейке находится не более одной точки  $\mathbf{r}_k, k = 0, \dots, n$ , то

$$P(A_\sigma) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 1,$$

так как по условию для мозаичного случайного поля  $\sigma$  выполняется свойство (2.18) и

$$P(\bar{A}_\sigma) \leq \sum_{k=0}^n P(d_{\mathbf{r}_k} > \frac{d_{min}}{2}) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0.$$

Следовательно,

$$E\left[\prod_{k=1}^n \sigma(\mathbf{r}_k)\right] = P(A_\sigma) \prod_{k=1}^n E[\sigma(\mathbf{r}_k)|A_\sigma] + P(\bar{A}_\sigma) E\left[\prod_{k=1}^n \sigma(\mathbf{r}_k)|\bar{A}_\sigma\right] \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} a^n, \quad (2.21)$$

так как  $\sigma$  ограничено.

Поскольку для мозаичного случайного поля выполняется свойство (2.17), то

$$l.i.m. \tau(L) = |L|a.$$

Следовательно

$$h_\sigma(\mathbf{x}_n) e^{-\tau(L)} \xrightarrow[\rho \rightarrow 0]{P} h_{\sigma^{(d)}}(\mathbf{x}_n) e^{-|L|a}. \quad (2.22)$$

Поскольку  $\sigma$  ограничено, то из (2.21) и (2.22) следует, что

$$E\left[h_\sigma(\mathbf{x}_n) e^{-\tau(L)} \prod_{k=1}^n \sigma(\mathbf{r}_k)\right] \xrightarrow[\rho \rightarrow 0]{} h_{\sigma^{(d)}}(\mathbf{x}_n) e^{-|L|a} a^n.$$

Это можно показать по аналогии с (2.21), рассматривая

$$A_{\sigma, \varepsilon} = \{|h_\sigma(\mathbf{x}_n) e^{-\tau(L)} - h_{\sigma^{(d)}}(\mathbf{x}_n) e^{-|L|a}| < \varepsilon\}.$$

Аналогично доказывается, что

$$E\left[h_\sigma(\mathbf{x}'_n) e^{-\tau(L')} \prod_{k=1}^n \sigma(\mathbf{r}'_k)\right] \xrightarrow[\rho \rightarrow 0]{} h_{\sigma^{(d)}}(\mathbf{x}'_n) e^{-|L'|a} a^n$$

и

$$E\left[h_\sigma(\mathbf{x}_n) h_\sigma(\mathbf{x}'_n) e^{-\tau(L)} e^{-\tau(L')} \prod_{k=1}^n \sigma(\mathbf{r}_k) \sigma(\mathbf{r}'_k)\right] \xrightarrow[\rho \rightarrow 0]{} h_{\sigma^{(d)}}(\mathbf{x}_n) h_{\sigma^{(d)}}(\mathbf{x}'_n) e^{-|L|a - |L'|a} a^{2n}.$$

Следовательно выражение (2.20) стремится к нулю при  $\rho \rightarrow 0$ . Таким образом мы получили для подынтегрального выражения в (2.19) сходимость к нулю почти всюду, а так как найдётся интегрируемая мажоранта, то, следовательно, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$D(K_\sigma^n f, h_\sigma) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0$$

и

$$l.i.m._{\rho \rightarrow 0} (K_\sigma^n f, h_\sigma) = (K_{\sigma^{(d)}}^n f, h_{\sigma^{(d)}}),$$

что и требовалось доказать. □

**Замечание.** Утверждение теоремы выполняется для таких основных функционалов, как вероятность прохождения  $P_t(\sigma)$ , вероятность альбеда и вероятность поглощения. Например, для  $P_t(\sigma)$  соответствующую функцию  $h_\sigma$  можно представить в виде

$$h_\sigma(\mathbf{x}) = \begin{cases} e^{-\int_0^{\theta(\mathbf{x})} \sigma(\mathbf{r}+t\mathbf{u})dt}, & u^z > 0, \\ 0, & u^z \leq 0, \end{cases}$$

где  $\theta(\mathbf{x}) = \frac{H-r^z}{u^z}$  - расстояние от  $\mathbf{r}$  до верхней границы слоя вещества в направлении  $\mathbf{u}$ . Хотя  $h_\sigma$  и является кусочно-непрерывной функцией, теорема для неё всё равно выполняется, если рассматривать обычные точечные или распределенные источники, так как непрерывность  $h_\sigma$  требуется, чтобы соответствующий функционал был определён для всех  $f \in N(X)$ .



### Глава 3. Вычислительные эксперименты

Были проведены следующие численно-статистически исследования.

1) Для плоско-параллельного слоя вещества,  $0 \leq x \leq 40$ , среды с мозаичным полем  $\sigma(\mathbf{r})$  коэффициента ослабления были численно-статистически оценены средние значения  $P_t = EP_t(\sigma)$  и дисперсии  $DP_t(\sigma)$  вероятности прохождения  $P_t(\sigma)$  для двух вариантов мозаичного поля Пуассона  $\sigma(\mathbf{r}; \mathcal{P})$  и двух вариантов источника частиц.

2) были вычислены параметры  $\tilde{\sigma}_s, \tilde{\sigma}_c$  осреднённых моделей и соответствующие значения величины  $P_t(\tilde{\sigma}_s, \tilde{\sigma}_c)$  с целью сравнения их с “точными” оценками.

3) были оценены дисперсии  $DI_T(\sigma)$  показания нормированного детектора для равномерно распределённого мононаправленного источника (см. пункт 2.4) в зависимости от площади детектора и коэффициент в экспоненциальной оценке корреляционной функции  $K_I(r)$ ;

4) были оценены коэффициенты  $C, \beta$  экспоненциальной асимптотической формулы для  $P_t(H)$  (см. пункт 2.4);

5) для полей Вороного и Пуассона были изучены их корреляционные функции, зависимость средней вероятности прохождения  $P_t$  от корреляционной длины  $\rho$  и время моделирования;

6) была оценена погрешность “перевыбора  $\sigma$ ” (см. пункт 2.1).

В расчётах были реализованы три модели бернуллиевого одномерного распределения  $\sigma$ :

$$\mathcal{F}_1 : \sigma_1 = 0.6, \quad \sigma_2 = 1.4, \quad P(\sigma = \sigma_1) = 0.5;$$

$$\mathcal{F}_2 : \sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 1.16, \quad p_0 = P(\sigma = \sigma_1) = 16/116 \approx 0.1379;$$

$$\mathcal{F}_3 : \sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 2.0, \quad p_0 = P(\sigma = \sigma_1) = 0.5.$$

Отметим, что  $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$  - простые модели “разорванной облачности” (см., например, [10]).

Для всех трёх вариантов модели  $\sigma_s = 0.9\sigma, \quad \sigma_c = 0.1\sigma, \quad E\sigma = 1.0$ . Но для  $\mathcal{F}_1$  и  $\mathcal{F}_2$  дисперсия  $E\sigma = 0.16$ , а для  $\mathcal{F}_3$ :  $E\sigma = 1.0$ .

Использовались два источника частиц:

$\mathcal{S}_1$  - мононаправленный источник локализованный в точке  $(0,0,0)$ ;

$\mathcal{S}_2$  - мононаправленный источник, равномерно распределённый на плоскости  $x = 0$ .

В расчётах использовались алгоритмы “двойной рандомизации” и “метода максимального сечения” (см. пункт 2.1). Далее через  $N$  обозначено число реализаций случайной пары: “среда-траектория”. Для всех далее приведённых статистических оценок среднеквадратическая погрешность вычисления (“одна сигма”) величин  $P_t$  имеет порядок последнего разряда. Для остальных оценок приведены 3 значащие цифры.

Предполагается, что  $\sigma_s(\mathbf{r}) = 0.9\sigma(\mathbf{r})$ ,  $\sigma_c(\mathbf{r}) = 0.1\sigma(\mathbf{r})$ , где  $\sigma_c$  - коэффициент поглощения, а  $\sigma_s$  - коэффициент рассеяния, то есть вероятность выживания частицы  $q$  равна 0.9. Для всех вариантов модели рассеяние моделировалось согласно индикатрисе Хеньи-Гринштейна с  $\mu_0 = 0.8, 0.9, 0.95$  (т.е. рассеяние существенно анизотропно), а длина корреляции равнялась  $\rho = 3.6$  (если не указано иначе), то есть интенсивность пуассоновского потока пересечений заданной прямой линии с границами элементов разбиения равна  $\bar{l} = \rho^{-1} \approx 0.278$ .

В связи с тем, что реализовать мозаичное поле в бесконечном “по горизонту” слое невозможно, процесс излучения моделировался в параллелепипеде:  $0 \leq x \leq H$ ;  $-100 \leq y, z \leq 100$ , где  $H$  - толщина слоя. Дополнительные расчёты показали, что возникающая при этом погрешность для искомых величин не является существенной.

При этом была использована оценка вида (2.2) (если не указано иначе), то есть траектория моделировалась для рассеивательной радиационной модели  $\sigma \equiv \sigma_s$ .

Для верификации используемых алгоритмов было проведено сравнение с результатами для слабо неизотропной “координатно-сеточной” модели из [19] (см. рис. 3.1). Для реализации этой модели на координатных осях строятся независимые пуассоновские точечные потоки с интенсивностью  $\lambda_c$ , а затем пространство разбивается на параллелепипеды плоскостями, проходящими через точки этих потоков и ортогональными к соответствующим осям. Параметр  $\lambda_c$  был таким, что соответствующие параметры пуассоновских точечных потоков по различным направлениям  $\omega$  вектора  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  в среднем по  $\omega$  совпадают с параметром  $\pi\lambda = 1/\rho$  для поля Пуассона.

В [19] так же, как и в данной диссертации, использовались модельная индикатриса Хеньи-Гринштейна с  $\mu_0 = 0.9$  и бернуллевское одномерное рас-

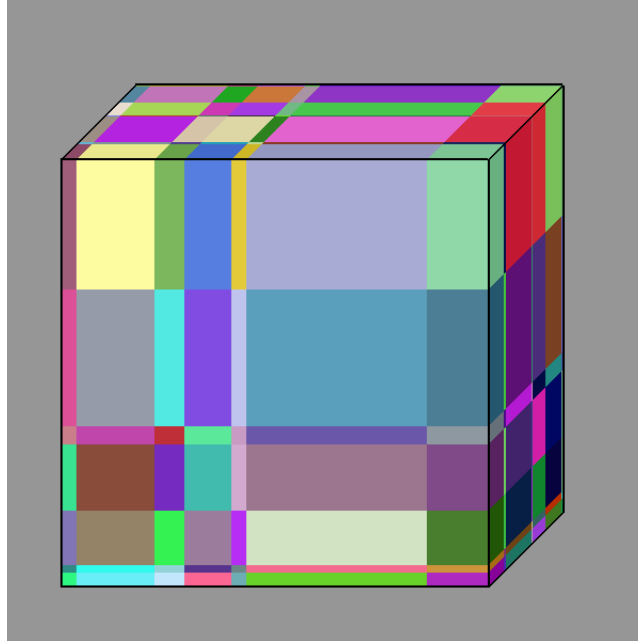


Рисунок 3.1 — “Координатно-сеточное” случайное поле. Размер  $20 \times 40 \times 40$ ,  
 $\lambda_c = 1/5.4$ .

пределение  $\mathcal{F}_1$ . Средняя вероятность прохождения частиц  $P_t$  для “координатно-сеточной” модели и слоя толщины  $H = 20$  равна 0.0344 и с точностью до 2% совпадает с соответствующей оценкой 0.0337 для мозаичного поля Пуассона. Это совпадение подтверждает возможность использования разработанной в диссертации методики для слабо анизотропных полей (см. последний абзац пункта 2.3).

Для верификации были также проведены расчёты, где в ячейках разбиения выбиралось неслучайное значение поля  $\sigma \equiv 1$ , то есть фактически рассматривался перенос излучения через детерминированную среду. Полученная оценка  $P_t = 0.0239$  также совпадает с аналогичной оценкой из [19]. Для случая  $\mu_0 = 1$ , то есть для рассеяния прямо вперёд, оценка  $P_t$  точно совпадает со значением  $e^{-\sigma_c H} = e^{-2}$ .

### 3.1 Среднее значение и дисперсия случайной вероятности прохождения

Основное прикладное значение имеет исследование показания нормированного протяжённого детектора, но в диссертации дополнительно изучается и

оценка вероятности прохождения осреднённой по поверхности нормированного протяжённого мононаправленного источника, которая также асимптотически (по площади источника) совпадает с  $P_t$ .

Далее численно-статистически оцениваются осреднённые вероятности прохождения  $P_t$  для двух вариантов мозаичного поля Пуассона  $\sigma(\mathbf{r}; \mathcal{P})$ :  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ ; и двух вариантов источника частиц:  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ .

Были также оценены значения дисперсий  $DP_t(\sigma)$ , которые определяют практически важные флуктуации величины  $P_t(\sigma)$ , соответствующие флуктуациям радиационной модели. Полученные результаты сведены в таблицу 1. Отметим, что оценка вероятности прохождения для детерминированной среды с параметрами

$$\sigma(\mathbf{r}) = p\sigma_1 + (1 - p)\sigma_2 = 1.0, \quad \sigma_s(\mathbf{r}) = 0.9, \quad \sigma_c(\mathbf{r}) = 0.1$$

равна  $0.000386 \pm 1.5 \cdot 10^{-6}$ .

Таблица 1 — Оценки  $EP_t(\sigma)$  и  $\sqrt{DP_t(\sigma)}$ ,  $N = 10^6$ .

	$EP(\sigma)$	$\sqrt{DP(\sigma)}$
$(\mathcal{S}_1, \mathcal{F}_1)$	0.000805	0.000631
$(\mathcal{S}_1, \mathcal{F}_2)$	0.00156	0.00869
$(\mathcal{S}_2, \mathcal{F}_1)$	0.000806	0.000191
$(\mathcal{S}_2, \mathcal{F}_2)$	0.00155	0.00087

Приведённые в таблице 1 оценки средних вероятностей показывают существенное (примерно в 2 и в 4 раза) усиление переноса излучения через рассматриваемую среду вследствие стохастичности. Оценки величины  $\sqrt{DP_t(\sigma)}$  подтверждают естественное предположение (эргодического типа) о том, что в случае бесконечно протяжённого по  $(y, z)$  слоя для распределённого на площади  $S$  источника с вероятностью 1 выполняется соотношение:  $\frac{P_t(\sigma)}{P_t} \rightarrow 1$  при  $S \rightarrow +\infty$ . Отметим, что величину  $P_t$  целесообразно оценивать для локализованного источника, так как при этом можно реализовывать пуассоновское поле для сравнительно неширокого по  $(y, z)$  слоя.

### 3.2 Параметры осреднённых моделей и соответствующие вероятности прохождения.

Далее вычисляются параметры  $\tilde{\sigma}_s$ ,  $\tilde{\sigma}_c$  осреднённых моделей и соответствующие значения величины  $P_t(\tilde{\sigma}_s, \tilde{\sigma}_c)$  с целью сравнения их с “точными” оценками.

В таблице 2 приведены параметры осреднённых радиационных моделей. Согласно сказанному выше (см. пункт 2.3) они определяются следующим образом. Для простейшей детерминированной модели:

$$\tilde{\sigma}_s = \bar{\sigma}_s = E\sigma_s, \quad \tilde{\sigma}_c = \bar{\sigma}_c = E\sigma_c, \quad B = 1.$$

Для эффективно осреднённых моделей:  $\Sigma$  (с базовым реалистическим  $\sigma(\mathbf{r})$ ) и  $\mathcal{F}$  (с базовым мозаичным полем и одномерным бернуллиевским распределением);  $\tilde{\sigma}_s$  определяется по формулам (2.5), (2.7). При этом были использованы три способа осреднения в (2.10) и (2.9):  $\Sigma$  - непосредственно по результатам моделирования,  $G$  - согласно условному приближённо гауссовскому распределению с выборочными параметрами,  $\Gamma$  - согласно гамма-распределению с выборочными параметрами.

Таблица 2 — Параметры эффективно осреднённых моделей.

	$\tilde{\sigma}_s$	$\tilde{\sigma}_c$	B
$\Sigma_1$	0.7327	0.0944	0.9805
$G_1$	0.7169	0.0942	0.9789
$\Gamma_1$	0.7553	0.0946	0.9822
$F_1$	0.756	0.0943	0.9804
$\Sigma_2$	0.3517	0.0729	0.9248
$G_2$	0.3253	0.0719	0.9215
$\Gamma_2$	0.3536	0.0730	0.9250
$F_3$	0.2406	0.0677	0.9057
$\bar{\sigma}$	0.9	0.1	1.0

Далее в таблице 3 приведены значения функционала  $P_t$  для полей  $\Sigma$  и  $\mathcal{F}$ : Реалистические  $\Sigma$ , Бернулли  $\mathcal{F}$ , а также соответствующие оценки  $P(\tilde{\sigma}_s, \tilde{\sigma}_c)$ : Осреднённые ( $\Sigma$ ), Осреднённые ( $G$ ), Осреднённые ( $\Gamma$ ), Осреднённые ( $\mathcal{F}$ ), Осреднённые ( $\bar{\sigma}$ ) для значений  $d = 0.16$  ( $\Sigma_1, G_1, \Gamma_1, F_1$ ),  $d = 1$  ( $\Sigma_2, G_2, \Gamma_2, F_3$ ) и  $\mu_0 = 0.8, 0.9$ .

Таблица 3 — Оценки  $P_t$  и соответствующие оценки  $P(\tilde{\sigma}_s, \tilde{\sigma}_c)$ ,  $N = 10^5$  для полей  $\Sigma$  и  $N = 10^6$  для остальных, толщина слоя  $H = 40$ .

$\mu_0$	0.8		0.9	
$d$	0.16	1.0	0.16	1.0
Реалистические $\Sigma$	$1.12 \cdot 10^{-4}$	$3.29 \cdot 10^{-3}$	$7.81 \cdot 10^{-4}$	$8.32 \cdot 10^{-3}$
Осреднённые ( $\Sigma$ )	$1.11 \cdot 10^{-4}$	$3.05 \cdot 10^{-3}$	$8.82 \cdot 10^{-4}$	$1.01 \cdot 10^{-2}$
Осреднённые ( $G$ )	$1.22 \cdot 10^{-4}$	$3.78 \cdot 10^{-3}$	$9.36 \cdot 10^{-4}$	$1.173 \cdot 10^{-2}$
Осреднённые ( $\Gamma$ )	$9.8 \cdot 10^{-5}$	$3.01 \cdot 10^{-3}$	$8.07 \cdot 10^{-4}$	$1.000 \cdot 10^{-2}$
Бернулли $\mathcal{F}$	$1.112 \cdot 10^{-4}$	$1.27 \cdot 10^{-2}$	$8.12 \cdot 10^{-4}$	$1.97 \cdot 10^{-2}$
Осреднённые ( $\mathcal{F}$ )	$9.95 \cdot 10^{-5}$	$8.21 \cdot 10^{-3}$	$8.17 \cdot 10^{-4}$	$2.222 \cdot 10^{-2}$
Осреднённые ( $\bar{\sigma}$ )	$3.54 \cdot 10^{-5}$		$3.86 \cdot 10^{-4}$	

Для выяснения влияния  $\mu_0$  и  $q$  на эффективность осреднения для поля  $S_1$  были проведены дополнительные суперкомпьютерные расчёты, см. таблицу 4.

Таблица 4 — Оценки  $P_t$  для поля  $\mathcal{F}_1$  ( $N = 10^7$ ) и соответствующие оценки  $P(\tilde{\sigma}_s, \tilde{\sigma}_c)$ ,  $P(\bar{\sigma})$  ( $N = 10^6$ ) для  $\mu_0 = 0.8, 0.9, 0.95$  и  $q = 0.8, 0.9, 0.95$ , толщина слоя  $H = 40$ .

$q$	$\mu_0$	$P_t$	$P(\tilde{\sigma}_s, \tilde{\sigma}_c)$	$P(\bar{\sigma})$
0.8	0.8	$2.4 \cdot 10^{-6}$	$1.56 \cdot 10^{-6}$	$3.31 \cdot 10^{-5}$
	0.9	$2.15 \cdot 10^{-5}$	$1.76 \cdot 10^{-5}$	$3.60 \cdot 10^{-4}$
	0.95	$9.28 \cdot 10^{-5}$	$8.68 \cdot 10^{-5}$	$1.768 \cdot 10^{-3}$
0.9	0.8	$1.112 \cdot 10^{-4}$	$1.01 \cdot 10^{-4}$	$3.48 \cdot 10^{-5}$
	0.9	$8.12 \cdot 10^{-4}$	$8.36 \cdot 10^{-4}$	$3.78 \cdot 10^{-4}$
	0.95	$3.184 \cdot 10^{-3}$	$3.39 \cdot 10^{-3}$	$1.858 \cdot 10^{-3}$
0.95	0.8	$1.533 \cdot 10^{-3}$	$1.71 \cdot 10^{-3}$	$3.53 \cdot 10^{-5}$
	0.9	$8.197 \cdot 10^{-3}$	$9.43 \cdot 10^{-3}$	$3.83 \cdot 10^{-4}$
	0.95	$2.645 \cdot 10^{-2}$	$2.997 \cdot 10^{-2}$	$1.885 \cdot 10^{-3}$

Сравнительный анализ приведённых численных результатов для рассматриваемых значений  $\mu_0$  и  $q$  показывает следующее. В случае “сплошной” стохастической среды, т.е. при  $p_0 \approx 0$ , величина  $P_t$  практически определяется значениями параметров  $m$ ,  $d$  и  $\rho$  с использованием нормального приближения  $f_g$  или гамма  $f_\gamma$ , причём

$$P_t \approx P(\tilde{\sigma}_s, \tilde{\sigma}_c). \quad (3.1)$$

В случае “разорванной” среды, т.е. при  $p_0 \gg 0$ , приближение (3.1) является практически удовлетворительным (в сравнении с разностью  $P_t - P(\bar{\sigma})$ ), если при вычислении значений  $\tilde{\sigma}_s, \tilde{\sigma}_c$  используется значение вероятности  $p_0$  и условного

гамма-распределения в “заполненной” части среды при

$$E\sigma = m_c, \quad D\sigma = d_c.$$

Следовательно, можно констатировать, что параметры  $p_0, m_c, d_c, \rho$  практически определяют поправку  $P_t - P(\bar{\sigma})$ .

Были также вычислены оценки средней вероятности альбедо  $P_a$  для вариантов мозаичных полей Пуассона  $F_1, F_2$ .

Таблица 5 — Оценки средней вероятности альбедо  $P_a$  с использованием осреднённых моделей и соответствующие “точные” значения,  $H = 40, N = 10^6$ .

	$P_a(\sigma(\cdot; \mathcal{V}))$	$P_a(\sigma(\cdot; \mathcal{P}))$	$P_a(\bar{\sigma}_s, \bar{\sigma}_c)$	$P_a(\tilde{\sigma}_s, \tilde{\sigma}_c)$
$F_1$	0.0670	0.0672	0.0684	0.0595
$F_2$	0.0657	0.0663	0.0684	0.0513

Следует отметить, что простое осреднение удовлетворительно воспроизводит вероятность отражения (альбедо).

### 3.3 Дисперсия показания нормированного детектора и корреляционная функция поля проходящей радиации

В таблице 6 даны оценки дисперсии  $DI_T$  показания детектора  $I_T$  с площадью  $T^2$  для мозаичного поля Пуассона  $\sigma(\mathbf{r}; P)$  с вариантом радиационной модели  $F_1$  для слоёв разной толщины  $H$ .

Таблица 6 — Оценки  $DI_T$  в зависимости от  $T$  и  $H$  и соответствующие оценки  $\tilde{\lambda}$ ,  $N = 10^6, N_\sigma = 100$ .

	$DI_0$	$DI_{70}$	$DI_{80}$	$\tilde{\lambda}_{70}$	$\tilde{\lambda}_{80}$
$H = 1$	0.00873	0.000167	0.000118	0.258	0.269
$H = 10$	0.00765	0.000250	0.000203	0.198	0.192
$H = 20$	0.000322	0.0000240	0.0000194	0.131	0.127

Величина  $DI_T$  оценивалась “методом сопряжённых блужданий” (см. пункт 2.4). В связи со сравнительно большой трудоёмкостью этого метода в данном случае, а также близостью величин  $P_t^{(v)}$  и  $P_t^{(p)}$ , значение  $DI_T$  оценивалось лишь для пуассоновского поля  $\sigma(\mathbf{r}; \mathcal{P})$ .

Для оценки величины  $DI_T$  был использован вариант “двойной рандомизации”, в котором для каждой реализации среды моделируются  $2N_\sigma$  условно независимых траекторий и осредняются произведения соответствующих случайных оценок (см. пункт 2.1); в данном случае полагали  $N_\sigma = 100$ .

Приведённые в таблице значения параметра  $\tilde{\lambda}$  экспоненциальной оценки корреляционной функции  $K_I(r)$  поля  $I(y, z)$  (см. пункт 2.4) получены из (2.12) по формуле

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_T = \sqrt{2\pi DI_0 / (T^2 DI_T)}.$$

Удовлетворительность указанной экспоненциальной оценки подтверждается близостью оценок  $\tilde{\lambda}_{70}$  и  $\tilde{\lambda}_{80}$ . Отметим, что отношения дисперсий для  $T = 80$  и  $T = 70$  практически равны  $(70/80)^2$ , что подтверждает справедливость формулы (2.11). Отметим также, что

$$\tilde{\lambda} \uparrow 1/\rho = 0.2(7) \quad \text{при} \quad H \rightarrow 0.$$

Это следует из того, что при  $H \rightarrow 0$  значение  $I(y, z)$  асимптотически определяется величиной

$$\exp(-\tau(H; (0, y, z), \omega_0)) \approx 1 - \tau(H; (0, y, z), \omega_0) \approx 1 - H\sigma(0, y, z),$$

то есть  $K_I(r) \rightarrow K_\sigma(r)$ . С увеличением толщины слоя корреляция между значениями поля  $I$  усиливается, по-видимому, в связи с тем, что траектории проходят через большее число общих ячеек.

### 3.4 Коэффициенты экспоненциальной асимптотической формулы для средней вероятности прохождения

В таблице 7 приведены оценки параметров  $C$  и  $\beta$  для поля Пуассона и моделей  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  бернуллиевского одномерного распределения  $\sigma$ . Оценки  $\tilde{C}, \tilde{\beta}$  получены по всем  $N = M \cdot N_M$  реализациям поля  $\sigma$ . Были вычислены также оценки соответствующих среднеквадратических погрешностей и оценка сверху  $\sqrt{D\tilde{\beta}/N}$ , полученная из (2.16).



Таблица 7 — Оценки величин  $C$ ,  $\beta$  и среднеквадратических погрешностей,  $H = 40$ ,  $\Delta H = 0.1$ ,  $M = 100$ ,  $N_M = 10^5$ ,  $N = 10^7$ .

	$\tilde{C}$	$\tilde{\beta}$	$\tilde{C}$	$\tilde{\beta}$	$\sqrt{D\tilde{C}/M}$	$\sqrt{D\tilde{\beta}/M}$	оц. св. $\sqrt{D\tilde{\beta}/N}$
$S_1$	1.52	0.188	1.48	0.188	0.0384	0.000627	0.000690
$S_2$	1.29	0.166	1.20	0.166	0.0552	0.000920	0.00103

Следует особо отметить, что приведённые в таблице 7 оценки среднеквадратических погрешностей показывают целесообразность оценки величины  $D\tilde{\beta}$  на основе формулы (2.16). Величины  $C$  и  $\beta$  были вычислены также для соответствующими осреднённых моделей. Они равны соответственно 1.50, 0.187 для  $\mathcal{F}_1$  и 1.47, 0.176 для  $\mathcal{F}_2$ , причём

$$P_t(\tilde{\sigma}_s, \tilde{\sigma}_c)/P_t(\bar{\sigma}_s, \bar{\sigma}_c) \approx 0.958e^{0.026H}.$$

### 3.5 Сравнительные численно-статистические исследования для мозаичных полей Вороного и Пуассона

В таблице 8 и на рис. 3.2 для различных значений  $r$  приведены оценки корреляционной функции  $K(r; \mathcal{V})$  мозаичного поля Вороного  $\sigma(\mathbf{r}; \mathcal{V})$  и точные значения  $K(r; \mathcal{P})$  для мозаичного поля Пуассона  $\sigma(\mathbf{r}; \mathcal{P})$ , вычисленные по формуле  $K(r; \mathcal{P}) = e^{-\pi\lambda_p r}$ .

Таблица 8 — Оценки  $K(r; \mathcal{V})$  и точные значения  $K(r; \mathcal{P})$ ,  $N = 10^6$ ,  $\rho = 3.6$ .

$r$	2	4	6	8	10
$K(r; \mathcal{V})$	0.6718	0.3955	0.1953	0.0748	0.0203
$K(r; \mathcal{P})$	0.5737	0.3291	0.1888	0.1083	0.0621

Параметры полей  $\lambda_v$  и  $\lambda_p$  были выбраны так, что для обоих полей корреляционная длина  $\rho = 3.6$ . Расчёты показывают, что корреляционные функции двух полей довольно близки.

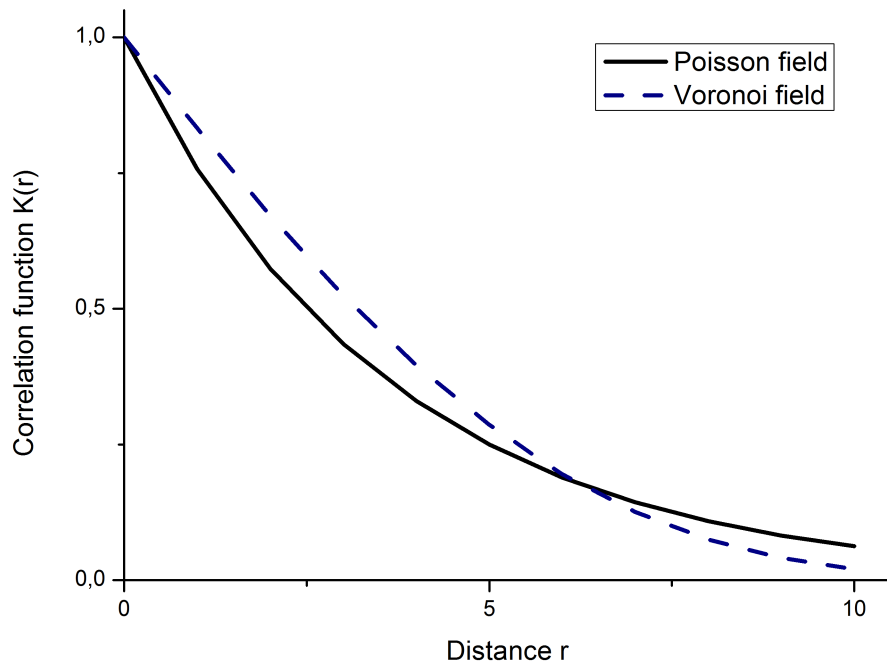


Рисунок 3.2 — Графики корреляционных функций  $K(r; \mathcal{V})$  и  $K(r; \mathcal{P})$ .

В таблице 9 приведены оценки средней вероятности прохождения  $P_t$  в зависимости от корреляционной длины  $\rho$  для мозаичных полей Вороного  $\sigma(\mathbf{r}; \mathcal{V})$  и Пуассона  $\sigma(\mathbf{r}; \mathcal{P})$  с одномерным распределением  $\mathcal{F}_2$ .

Таблица 9 — Зависимость средней вероятности прохождения  $P_t$  от  $\rho$ .

$\rho$	1/4	1	2	3.6	5
$P_t(\sigma(\cdot; \mathcal{V}))$	-	-	0.0317	0.0413	0.0514
$P_t(\sigma(\cdot; \mathcal{P}))$	0.025	0.027	0.0321	0.0424	0.0516
отн.разн.	-	-	-1.3%	-2.6%	-0.4%

Для оценок использовался стандартный алгоритм двойной рандомизации (см. пункт 2.1), причём для каждой реализации случайной среды моделировались две условно независимые траектории частицы, что позволяет оценивать  $EP_t(\sigma)$  и  $EP_t^2(\sigma)$ . Для  $\rho = 2, 3.6, 5$  расчёты были проведены для обоих типов полей с  $N = 10^6$ , а для  $\rho = 1/4, 1$  расчёты проводились только для мозаичного поля Пуассона с  $N = 10^4$ , так как моделирование переноса излучения для поля Вороного для малых  $\rho$  слишком трудоёмко (см. табл. 4).

Как показывают расчёты, разница между вероятностями  $P_t$  для двух моделей относительно невелика. Это подтверждает гипотезу о том, что для средних значений функционалов решения уравнения переноса излучения в мозаичном

случайном поле существенными являются значение параметра  $\rho$  и распределение значений поля в ячейках, а геометрия поля на траекторию частицы влияет мало. Это позволяет сделать вывод, что для изучения переноса частиц в однородном изотропном случайном поле целесообразно ограничиться мозаичным полем Пуассона, так как перенос излучения для него моделируется сравнительно быстро.

Расчёты из таблицы 9 также показывают, что для обоих полей при  $\rho \rightarrow 0$  вероятность  $P_t$  приближается к вероятности  $P_t^{(d)} \approx 0.0239$  прохождения для детерминированного слоя с

$$\sigma^{(d)}(\mathbf{r}) \equiv p\sigma_1 + (1 - p)\sigma_2 = 1.0,$$

что согласуется с утверждением доказанной в пункте 2.5 теоремы 3.

В таблице 10 приведено время в секундах необходимое для реализации  $10^4$  пар траекторий частиц для случайно выбранных реализаций среды в зависимости от корреляционной длины  $\rho$  для полей Вороного  $\sigma(\mathbf{r}; \mathcal{V})$  и Пуассона  $\sigma(\mathbf{r}; \mathcal{P})$ .

Таблица 10 — Зависимость времени моделирования в секундах  $t$  от  $\rho$ ,  $N = 10^4$ .

$\rho$	2	3.6	5
$t_v$	506.4	80.7	28.2
$t_p$	11.2	5.1	3.5

Как видно из таблицы, перенос излучения для мозаичного поля Пуассона моделируется существенно быстрее, чем для мозаичного поля Вороного, и при уменьшении  $\rho$  разница времени моделирования увеличивается. По всей видимости, это связано с тем, что число точек пуассоновского потока для мозаичного поля Вороного возрастает пропорционально

$$\lambda_v \approx \left(\frac{0.459}{\rho_v}\right)^3,$$

а для мозаичного поля Пуассона пропорционально

$$\lambda_p = \frac{1}{\pi\rho_p}.$$

### 3.6 Погрешность “перевыбора” в алгоритме двойной рандомизации

Была также оценена погрешность, связанная с перевыбором значений поля  $\sigma(\mathbf{r})$  в процессе моделирования траектории частицы (см. пункт 2.1). В таблицах 11, 12, 13 приведены оценки величин  $P_t$  и  $P_a$  для полей Вороного, Пуассона и двух моделей  $F_1, F_2$ . Рассматривается три типа моделирования: точное (без перевыбора), с перевыбором и экспоненциальным учётом поглощения, а также с перевыбором и учётом поглощения весом  $q(\mathbf{r})$ . В таблицах 11, 12, 13 толщина слоя  $H = 40$ .

Таблица 11 — Оценки  $P_t$  и  $P_a$ , без перевыбора,  $N = 10^6$ .

	$P_t(\sigma(\cdot; \mathcal{V}))$	$P_t(\sigma(\cdot; \mathcal{P}))$	$P_a(\sigma(\cdot; \mathcal{V}))$	$P_t(\sigma(\cdot; \mathcal{P}))$
$F_1$	0.000819	0.000811	0.0670	0.0672
$F_2$	0.00133	0.00156	0.0657	0.0663

Таблица 12 — Оценки  $P_t$  и  $P_a$ , перевыбор, экспоненциальный вес,  $N = 10^6$ .

	$P_t(\sigma(\cdot; \mathcal{V}))$	$P_t(\sigma(\cdot; \mathcal{P}))$	$P_a(\sigma(\cdot; \mathcal{V}))$	$P_t(\sigma(\cdot; \mathcal{P}))$
$F_1$	0.000642	0.000653	0.0648	0.0648
$F_2$	0.000637	0.000711	0.0608	0.0613

Таблица 13 — Оценки  $P_t$  и  $P_a$ , перевыбор, вес  $q(\mathbf{r})$ ,  $N = 10^6$ .

	$P_t(\sigma(\cdot; \mathcal{V}))$	$P_t(\sigma(\cdot; \mathcal{P}))$	$P_a(\sigma(\cdot; \mathcal{V}))$	$P_t(\sigma(\cdot; \mathcal{P}))$
$F_1$	0.000820	0.000798	0.0665	0.0668
$F_2$	0.000129	0.00152	0.0652	0.0657

Сравнительно большая погрешность вычислений с перевыбором для экспоненциального веса связана с тем, что в используемом алгоритме для каждого пробега сначала вычисляется длина пробега с проверкой фиктивности рассеяния, а затем вычисляется интеграл от  $\sigma$  по этому отрезку. Таким образом, если конец пробега и остальная часть пробега находятся в разных ячейках, то перевыбор происходит даже на этом одном пробеге.

Из таблиц 11, 12, 13 видно, что перевыбор  $\sigma$  уменьшает вероятность  $P_t$ . Это объясняется эффективным уменьшением “корреляционной длины” вдоль траектории, которое приближает соответствующую радиационную модель к детерминированной.

В таблице 14 отражены дополнительно проведённые расчёты для поля  $\sigma(\mathbf{r}; P)$  со значениями среднего косинуса угла рассеяния  $\mu_0 = 0.8$ .

Таблица 14 — Оценки  $P_t$  и  $P_a$  для  $\mu_0 = 0.8$ , без перевыбора,  $N = 10^6$ ,  $H = 40$ .

	без перевыбора		перевыбор, вес $q(\mathbf{r})$	
	$P_t^{(p)}$	$P_a^{(p)}$	$P_t^{(p)}$	$P_a^{(p)}$
$F_1$	0.000111	0.1331	0.000106	0.1324
$F_2$	0.000447	0.1312	0.000422	0.1292

Они, как и данные из таблиц 11, 13, показывают, что при слабом нарушении анизотропии, которое характерно для рассеяния оптического излучения в облаках ( $0.8 \leq \mu_0 \leq 0.9$ ), погрешностью перевыбора практически можно иногда пренебречь, что существенно упрощает алгоритм моделирования траектории кванта. С учётом результатов таблицы 12 это замечание следует отнести к алгоритму с мультипликативным весом  $q(\mathbf{r})$ .

## Заключение

В диссертации представлены следующие основные результаты.

1. Построен и исследован пуассоновский ансамбль базовых плоскостей; на этой основе построено мозаичное поле Пуассона  $\sigma(\mathbf{r}; P)$ , обоснованы его однородность и изотропность. Определена мера в параметрическом пространстве множества гиперплоскостей, пересекающих заданный отрезок; на этой основе показано, что корреляционная функция  $k$ -мерного мозаичного поля Пуассона экспоненциальна. Построены реалистические вычислительные модели разорванных неотрицательных случайных полей с приближённо гауссовскими одномерными распределениями и заданной степенью заполненности пространства путём суммирования независимых реализаций базовых специально сконструированных ограниченных мозаичных пуассоновских полей и изучены некоторые их свойства.
2. Разработаны новые геометрические алгоритмы для моделирования траекторий в мозаичных случайных средах. Получены формулы для коэффициентов рассеяния и поглощения эффективно осреднённых радиационных моделей. Проведено исследование поля проходящей радиации: построена оценка параметра экспоненциальной асимптотической (по площади протяжённого нормированного детектора) оценки соответствующей корреляционной функции; построены статистические оценки коэффициентов экспоненциальной (асимптотической по толщине слоя) формулы для осреднённой вероятности прохождения частицы. Найдены некоторые предельные соотношения для мозаичных случайных полей при уменьшении параметра корреляционной длины до нуля.
3. Изучена вероятность прохождения, осреднённая по поверхности нормированного источника, и её дисперсия. Вычислены параметры осреднённых радиационных моделей для различных вариантов мозаичного поля Пуассона и соответствующие значения средней вероятности прохождения; проведено их сравнение с “точными” значениями. Показано, что полученные результаты можно эффективно распространить на реалистические модели случайных сред. Изучена дисперсия показания

протяжённого нормированного детектора и вычислен параметр экспоненциальной оценки корреляционной функции поля проходящей радиации; на этой основе проверена соответствующая эргодическая гипотеза. Вычислены коэффициенты экспоненциальной (асимптотической по толщине слоя) формулы для средней вероятности прохождения и их дисперсии. Для полей Вороного и Пуассона проведено сравнение корреляционных функций, изучены зависимость средней вероятности прохождения  $P_t$  от корреляционной длины  $\rho$  и трудоёмкость моделирования. Оценена погрешность “перевыбора  $\sigma$ ” в методе двойной рандомизации, которая возникает, если значение  $\sigma$  заново выбирается при повторном попадании траектории кванта в элемент разбиения пространства.

## Список литературы

- [1] Аверина Т.А., Михайлов Г.А. Алгоритмы точного и приближенного статистического моделирования пуассоновских ансамблей // Ж. вычисл. матем. и матем. физ.-2010.-Т. 50, № 6.-С. 1005-1016
- [2] Амбос А.Ю. Вычислительные модели мозаичных однородных изотропных случайных полей и соответствующие задачи переноса излучения // Сиб. журн. вычисл. матем. -2016. -Т. 19, № 1.-С. 19-32
- [3] Амбос А.Ю., Михайлов Г.А. Эффективное осреднение стохастических радиационных моделей на основе статистического моделирования // Ж. вычисл. матем. и матем. физ.-2016.-Т. 56, № 5.-С. 896-908
- [4] Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. -М.: Атомиздат, 1960, 520 с.
- [5] Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. М.: Наука, 1982, 296 с.
- [6] Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965, 524 с.
- [7] Иванов А.В. О сходимости распределений функционалов от измеримых случайных полей // Укр. мат. журн. – 1980. – Т. 32, № 1. – С. 27–34.
- [8] Фейгельсон Е.М., Краснокутская Л.Д. Потоки солнечного излучения и облака. Ленинград: Гидрометеоиздат, 1978, 158 с.
- [9] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, Т. 2.- М.: Мир, 1967, 498 с.
- [10] Зуев В.Е., Титов Г.А. Оптика атмосферы и климат. Т.9. Томск: изд. Спектр ИОА СО РАН, 1996.
- [11] Марчук Г. И. Михайлов Г. А. Назаралиев М. А. и др. Методы Монте-Карло в атмосферной оптике. Под общей ред. Марчука Г. И. Новосибирск: Наука, 1976, [Engl.transl.: Springer-Verlag, 1992], 239 с.



- [12] Михайлов Г.А., Некоторые вопросы теории методов Монте-Карло. — Новосибирск: Наука, 1974
- [13] Михайлов Г.А. Эффективные алгоритмы метода Монте-Карло для вычисления корреляционных характеристик условных математических ожиданий. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 17, № 1, (1977), 246–249.
- [14] Михайлов Г.А., Оптимизация весовых методов Монте-карло. М.: Наука, 1987 [Engl.transl.: Springer-Verlag, 1980], 283 с.
- [15] Михайлов Г.А. Приближенные модели случайных процессов и полей // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1983. — Т. 23, № 3. — С. 558–566.
- [16] Михайлов Г.А. Асимптотические оценки средней вероятности прохождения излучения через экспоненциально коррелированную стохастическую среду // Известия РАН. Физика атмосферы и океана.-2012.-Т. 48, № 6.-С. 691–697
- [17] Михайлов Г.А., Аверина Т.А. Статистическое моделирование неоднородных случайных функций на основе пуассоновских точечных полей // Доклады РАН. - 2010. - Т.434, № 1. - С. 29-32
- [18] Михайлов Г.А., Войтишек А.В. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло: Учеб. пособие. М.: Изд. центр ”Академия”, 2006. — 367 с.
- [19] Михайлов Г.А., Середняков А.С. Численные и асимптотические оценки влияния размерности модели стохастической среды на оценки переноса излучения // Оптика атмосферы и океана. - 1997. - Т. 10, № 3. - С. 201-210.
- [20] Михайлов Г.А., Тройников В.С.// “Моделирование случайных полей при решении стохастических задач методом Монте-Карло (свойства реализации)” В сб.: Актуальные проблемы в вычислительной и прикладной математике. Новосибирск, Наука, 1983. — С. 122–127
- [21] Назаралиев М. А., Ухинов С. А. Расчет светимости аэрозольных образований сложной структуры // Статистическое моделирование в Математической физике. - Новосибирск: 1976. - С. 29-37.

- [22] Пригарин С.М. Методы численного моделирования случайных процессов и полей.- Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2005, 258 с.
- [23] Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. — М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1973 г. — 312 с.
- [24] Лагутин А.А., Учайкин В.В. Метод сопряжённых уравнений в теории переноса космических лучей высоких энергий – Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2013. – 293 с.
- [25] Федерер Г. Геометрическая теория меры М.: ”Наука”, 1987
- [26] Юринский В.В. Об усреднении недивергентных уравнений второго порядка со случайными коэффициентами // Сиб. матем. ж.,-1982,-Т. 23, № 2,-С. 176–188
- [27] Ambos A.Yu., Mikhailov G.A. Statistical modelling of the exponentially correlated multivariate random field // Rus. J. Num. Anal. Math. Model. - 2011. -Vol. 26, № 3. - P. 213–232
- [28] Ambos A.Yu., Mikhailov G.A. New algorithms of numerical-statistical modelling of radiative transfer through stochastic mediums and radiation models homogenization // Rus. J. Num. Anal. Math. Model. - 2014. -Vol. 29, № 6. - P. 331–339
- [29] Ambos A.Yu. , Mikhailov G.A. Solution of radiative transfer theory problems for ‘realistic’ models of random media using the Monte Carlo method // Rus. J. Num. Anal. Math. Model. - 2016. -Vol. 31, № 3. - P. 1–10
- [30] Coleman W.A. Mathematical Verification of a Certain Monte Carlo Sampling Technique and Applications of the Technique to Radiation Transport Problems //Nucl. Sci. and Engng. - 1968. - Vol. 32, № 1. - P. 76-81
- [31] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 2 (Wiley, 1966; Mir, Moscow, 1967)
- [32] Gilbert E.N. (1962). Random subdivisions of space into crystals. // Ann. Math. Statist. -1962. -№ 33 - P. 958-972

- [33] *Kullback S.* Information theory and statistics, New York, Wiley; London, Chapman and Hall, 1959, xii + 395 pp.
- [34] Serra J. *Image analysis and mathematical morphology*, Academic press inc., London, 1982, 610 c.
- [35] Switzer P. *A random set process in the plane with a Markovian property* // Ann. Math. Statist. - 1965. - vol 36. - P. 1859-1863