

УДК 519.6., 519.711.3

О численном решении обратной задачи термоакустики*

С.И. Кабанихин^{1,2}, О.И. Криворотко², М.А. Шишленин³

¹Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

²Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова 2, Новосибирск, 630090

³Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Коптюга 4, 630090, Новосибирск

E-mails: kabanikhin@sscc.nsc.ru (Кабанихин С.И.), krivorotko.olya@mail.ru (Криворотко О.И.), mshishlenin@ngs.ru (Шишленин М.А.)

Кабанихин С.И., Криворотко О.И., Шишленин М.А. О численном решении обратной задачи термоакустики // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2013. — Т. 16, № 1. — С. 39–44.

Рассмотрена обратная задача определения начального условия в начально-краевой задаче для волнового уравнения по дополнительной информации о решении прямой начально-краевой задачи, измеренной на границе исследуемой области. Основная цель работы — построение численного алгоритма решения обратной задачи на основе метода простой итерации (МПИ) и исследование разрешающей способности обратной задачи в зависимости от количества и местоположения точек измерения дополнительной информации. Рассмотрены три двумерных постановки. Приведены результаты численных расчетов. Показано, что МПИ на каждом шаге итерации уменьшает значение целевого функционала, однако в силу некорректности обратной задачи разность между точным и приближенным решением обратной задачи сначала убывает, а затем начинает монотонно возрастать. Это обстоятельство отражает регуляризующие свойства МПИ, в котором роль параметра регуляризации играет номер итерации.

Ключевые слова: задача термоакустики, обратные и некорректные задачи, волновое уравнение, метод простой итерации.

Kabanikhin S.I., Krivorotko O.I., and Shishlenin M.A. A numerical method for solving inverse thermoacoustic problem // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2013. — Vol. 16, № 1. — P. 39–44.

In this paper, we consider the inverse problem of determining the initial condition of the initial boundary value problem for the wave equation with additional information about solving the direct initial boundary value problem that is measured at the boundary of the domain. The main objective of our research is to construct a numerical algorithm for solving the inverse problem based on the method of simple iteration (MSI) and to study the resolution of the inverse problem and its dependence on the number and location of measurement points. We consider three two-dimensional inverse problems. The results of numerical calculations are presented. We show that the MSI for each iteration step reduces the value of the object functional. However, due to the ill-posedness of an inverse problem the difference between the exact and the approximate solutions of the inverse problem decreases up to some fixed number k_{min} and then monotonically increases. This reflects the regularizing properties of the MSI, in which the iteration number is a regularization parameter.

Key words: thermoacoustic problem, inverse and ill-posed problems, wave equation, method of simple iteration.

*Работа поддержана ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (гос. контракт № 14.740.11.0350), РФФИ (проект № 09-01-00746).

1. Физическая постановка задачи

Рассмотрим область $\Omega \subset R^3$ упругой среды. Предположим, что, начиная с момента времени $t = 0$, область Ω подвергается электромагнитному излучению интенсивностью $I(t)$, которое частично поглощается средой. Поглощенная энергия переходит в тепло, что приводит к увеличению температуры среды, к ее расширению и, в итоге, к появлению волн акустического давления. Распространяясь по среде, волны акустического давления достигают границы Γ области, на части Γ_1 которой они могут быть измерены. Требуется определить коэффициент поглощения электромагнитного излучения в Ω по измерениям акустического давления на части границы Γ_1 .

Используя модель невязкой жидкости и пренебрегая диффузионными потоками тепла, процесс распространения волн акустического давления u в среде можно описать следующим уравнением [1, 2]:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_{x,y} u = \alpha(x, y_1, y_2) \frac{\beta}{c_p} \frac{\partial I}{\partial t}, \quad (x, y_1, y_2) \in \Omega, \quad t \in R.$$

Здесь c — скорость распространения акустических волн, α — коэффициент поглощения энергии электромагнитного излучения, β — коэффициент термического расширения, c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении. В качестве начального условия берется условие отсутствия волн акустического давления до начала облучения

$$u|_{t < 0} = 0.$$

Как правило, в задачах термоакустики длительность электромагнитного излучения очень мала, что позволяет задать (приближенно) $I(t)$ в виде дельта-функции Дирака:

$$I(t) = I_0 \delta(t).$$

Приведенная модель используется при диагностике онкологических заболеваний [1], при этом функция $\alpha(x, y_1, y_2)$ описывает распределение опухоли в мягких тканях.

2. Математическая постановка задачи

Будем рассматривать прямую и обратную задачи в n -мерном пространстве. В силу того, что $I(t) = I_0 \delta(t)$, можно записать задачу Коши [4]:

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta_{x,y} u, & t > 0, \quad x \in R, \quad y = (y_1, \dots, y_n) \in R^n; \\ u|_{t=0} = q(x, y), \quad u_t|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь $q(x, y) = \frac{\alpha(x, y) \beta I_0}{c_p}$.

Прямая задача (2.1) заключается в нахождении $u(x, y, t)$ по известной функции $q(x, y)$. Известно, что при условии $q \in H^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 3}(R^{n+1})$ существует единственное классическое решение $u \in C^2(R^{n+1} \cup \{t > 0\}) \cap C^1(R^{n+1} \cup \{t > 0\})$ задачи (2.1).

Мы будем рассматривать три постановки обратной задачи, которые отличаются одна от другой количеством дополнительной информации о решении прямой задачи (2.1).

Обратная задача 1. Пусть о решении $u(x, y, t)$ задачи Коши (2.1) известна дополнительная информация на гиперплоскости $x = 0$:

$$u(0, y, t) = f_1(y, t), \quad u_x|_{x=0} = g(y, t).$$

Требуется определить функцию $q(x, y)$ по известным функциям $f_1(y, t)$ и $g(y, t)$.

Предположим, что неоднородность содержится в ограниченном объеме Ω , т.е. $\text{supp}\{q\} \in \Omega$, где $\Omega = \{(x, y) \in R^{n+1} \mid 0 < x < l, -l < y_i < l, i = 1, \dots, n\}$.

Поскольку скорость распространения возмущений равна единице, мы можем выбрать $L > l$ таким, что возмущения, порожденные данными $q(x, y)$, не успевают за время T достичь границы $x = L, y_i = -L, y_i = L, i = 1, \dots, n$. Таким образом, можно сформулировать прямую начально-краевую задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta_{x,y} u, & (x, y) \in \Omega, \quad t \in (0, T); \\ u|_{t=0} = q(x, y), & u_t|_{t=0} = 0, \quad y = (y_1, \dots, y_n) \in R^n; \\ u_x|_{x=0} = g(y, t), & u_x|_{x=L} = 0; \\ u_{y_i}|_{y_i=-L} = u_{y_i}|_{y_i=L} = 0, & i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (2.2)$$

Основным объектом наших исследований будет обратная задача:

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta_{x,y} u, & x \in (0, L), \quad y_i \in (-L, L), \quad t \in (0, T); \\ u|_{t=0} = q(x, y), & u_t|_{t=0} = 0, \quad y = (y_1, \dots, y_n) \in R^n; \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{на } \partial\Omega; \end{cases} \quad (2.3)$$

$$u(0, y, t) = f_1(y, t), \quad (2.4)$$

где n — внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Обратная задача (2.2), (2.4) может быть сведена к решению двух обратных задач вида (2.3), (2.4) (см. [3]), поэтому мы рассматриваем только обратную задачу (2.3), (2.4).

В данной работе мы исследуем разрешающую способность задачи определения $q(x, y)$ в зависимости от количества и месторасположения источников дополнительной информации. С этой целью мы рассмотрим последовательно три обратные задачи, постепенно увеличивая количество дополнительной информации.

Отметим, что разрешимость обратной задачи можно доказать лишь в случае аналитичности функций по переменной y_i [5].

2.1. Постановка трех обратных задач (ОЗ)

Рассмотрим три постановки обратных задач к задаче (2.3):

ОЗ 1: измерения проведены на границе $x = 0$: $u(0, y, t) = f_1(y, t)$.

ОЗ 2: к измерениям (2.4) добавляются измерения на границе $x = L$:

$$u(L, y, t) = f_2(y, t). \quad (2.5)$$

ОЗ 3: добавим к (2.4) и (2.5) еще одно измерение

$$u(x, L, y_2, \dots, y_n, t) = f_3(x, y_2, \dots, y_n, t). \quad (2.6)$$

В обратных задачах **1**, **2** и **3** требуется определить функцию $q(x, y)$ по известным функциям $f_i, i = 1, 2, 3$.

Заметим, что в случае $T = L_1 > L$ решение обратной задачи $q(x, y)$ восстанавливается не полностью или с большой погрешностью, поскольку не вся информация об искомом решении $q(x, y)$ обратной задачи дойдет до границы. Поэтому всюду далее будем считать, что $T \geq L$.

3. Метод простой итерации (МПИ)

Обратные задачи **1**, **2** и **3** будем решать методом простой итерации, который заключается в отыскании приближенного решения уравнения $Aq = f$ следующим способом:

$$q_{n+1} = q_n - \alpha J' q_n, \quad \alpha \in \left(0, \frac{1}{\|A\|^2}\right).$$

Теорема 1 [2]. Пусть Q и F – гильбертовы пространства, A – линейный ограниченный оператор. Предположим, что для некоторого $f \in F$ существует точное решение q_T уравнения $Aq = f$. Тогда при любом q_0 и $\alpha \in \left(0, \frac{1}{\|A\|^2}\right)$ последовательность $\{q_n\}$, определяемая равенствами $q_{n+1} = q_n - \alpha J' q_n$, сходится по функционалу, и верна оценка

$$J(q_n) \leq \frac{\|q_0 - q_T\|^2}{4n\alpha(1 - \alpha\|A\|^2)}. \quad (3.1)$$

3.1. Выражение для градиента функционала $J'(q)$, используемого для численных расчетов

Для сокращения изложения рассмотрим двумерный случай:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, & (x, y) \in \Omega, \quad t \in (0, T), \\ u|_{t=0} = q(x, y), & u_t|_{t=0} = 0, \\ u_x|_{x=0} = u_x|_{x=L} = 0, \\ u_y|_{y=0} = u_y|_{y=L} = 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

$$u|_{x=0} = f_1(y, t). \quad (3.3)$$

Определим целевые функционалы $J_i(q)$, $i = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned} J_1(q) &= \int_0^T \int_0^L (u(0, y, t) - f_1(y, t))^2 dy dt, \\ J_2(q) &= J_1(q) + \int_0^T \int_0^L (u(L, y, t) - f_2(y, t))^2 dy dt, \\ J_3(q) &= J_1(q) + J_2(q) + \int_0^T \int_0^L (u(x, L, t) - f_3(x, t))^2 dx dt. \end{aligned}$$

Запишем сопряженную задачу:

$$\begin{cases} \Psi_{1tt} = \Psi_{1xx} + \Psi_{1yy}, & (x, y) \in \Omega, \quad t \in (0, T), \\ \Psi_1|_{t=T} = 0, & \Psi_{1t}|_{t=T} = 0, \\ \Psi_{1x}|_{x=0} = 2(u(0, y, t) - f_1(y, t)), & \Psi_{1x}|_{x=L} = 0, \\ \Psi_{1y}|_{y=0} = \Psi_{1y}|_{y=L} = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Тогда с учетом (3.4) приращение функционала $\delta J_1(q)$ записывается следующим образом [3]:

$$\delta J_1(q) \cong \int_0^L \int_0^L \delta q \Psi_{1t}|_{t=0} dx dy,$$

и выражение для градиента функционала имеет следующий вид:

$$J'_1(q) = \Psi_{1_t} |_{t=0}. \quad (3.5)$$

Аналогично получаем выражение для градиентов функционалов в случае обратных задач **2** и **3**:

$$J'_2(q) = \Psi_{1_t} |_{t=0} - \Psi_{2_t} |_{t=0}, \quad (3.6)$$

где Ψ_2 — решение следующей сопряженной задачи к задаче (3.2), (3.3) и (2.5):

$$\begin{cases} \Psi_{2_{tt}} = \Psi_{2_{xx}} + \Psi_{2_{yy}}, & (x, y) \in \Omega, \quad t \in (0, T), \\ \Psi_2 |_{t=T} = 0, & \Psi_{2_t} |_{t=T} = 0, \\ \Psi_{2_x} |_{x=0} = 0, & \Psi_{2_x} |_{x=L} = 2(u(L, y, t) - f_2(y, t)), \\ \Psi_{2_y} |_{y=0} = \Psi_{2_y} |_{y=L} = 0, \end{cases} \quad (3.7)$$

где Ψ_3 — решение сопряженной задачи к задаче (3.2), (3.3) и (2.5), (2.6):

$$\begin{cases} \Psi_{3_{tt}} = \Psi_{3_{xx}} + \Psi_{3_{yy}}, & (x, y) \in \Omega, \quad t \in (0, T), \\ \Psi_3 |_{t=T} = 0, & \Psi_{3_t} |_{t=T} = 0, \\ \Psi_{3_x} |_{x=0} = \Psi_{3_x} |_{x=L} = 0, \\ \Psi_{3_y} |_{y=0} = 0, & \Psi_{3_y} |_{y=L} = 2(u(x, L, t) - f_3(x, t)). \end{cases}$$

4. Численные эксперименты

В численных расчетах в качестве пробного решения обратной задачи была выбрана функция

$$q_T(x, y) = 0.1 + \begin{cases} \frac{\cos 8y + 1}{4} \frac{\cos 8x + 1}{8}, & x, y \in \left(\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right) \times \left(\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right), \\ \frac{\cos 8y + 1}{4} \frac{\cos 8x + 1}{4}, & x, y \in \left(\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right) \times \left(\frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right), \\ \frac{\cos 8y + 1}{4} \frac{\cos 8x + 1}{8}, & x, y \in \left(\frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right) \times \left(\frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right). \end{cases} \quad (4.1)$$

На рис. 1 приведен график функции $q_T(x, y)$. В численных экспериментах сетка выбиралась с учетом условия Куранта устойчивости явной разностной схемы: $N_x = N_y = 50$, $N_t = 4800$, $L = T = \pi$, $\alpha = 0.01$. Начальное приближение q_0 полагалось равным нулю.

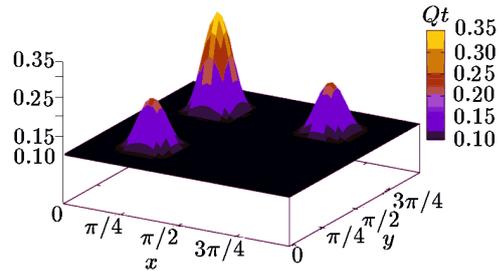


Рис. 1. График точного решения $q_{T_1}(x, y)$

Отметим, что при решении обратной задачи **1** восстанавливаются только те неоднородности, которые находятся близко к границе $x = 0$ (рис. 2а). Данных измерений недостаточно для восстановления структуры решения (4.1). В случае измерения на границе $y = L$ также прослеживается частичное восстановление объектов, наиболее близких к границе, на которой производятся измерения (рис. 2б). Для обратной задачи **2** наблюдаются все три неоднородности (рис. 2в). В задаче **3** при добавлении к обратной задаче **2** еще одной дополнительной информации на границе $y = L$ размер неоднородностей восстанавливается лучше (рис. 2г).

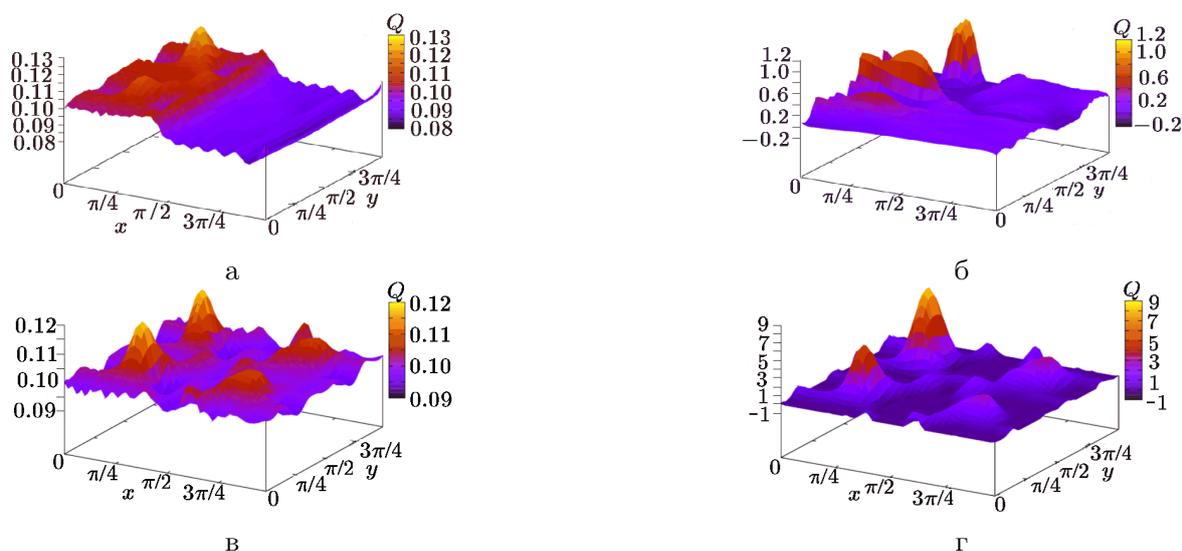


Рис. 2. Графики приближенного решения q_k : а) $k = 500$, обратная задача **1**; б) $k = 461$, случай задания дополнительной информации на границе $y = L$, в) $k = 401$, обратная задача **2**; г) $k = 307$, обратная задача **3**

5. Заключение

Таким образом, показано, что с увеличением количества дополнительной информации увеличивается разрешающая способность методов и появляется возможность различать такие неоднородности, которые являются невидимыми при уменьшении количества измеряемых функций.

Литература

1. Kruger R.A., Kiser Jr., Reienecke D.R., and Kruger G.A. Application of thermoacoustic computed tomography to breast imaging. — Indianapolis, 2001. — (Preprint / Indiana University Medical Center). — <http://optosonic.com>.
2. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. — Новосибирск: Сибирское научное изд-во, 2008.
3. Кабанихин С.И., Криворотько О.И., Шишленин М.А. Решение обратной задачи термоакустики оптимизационными методами // Сибирские электронные математические известия. — 2011. — (В печати.)
4. Владимиров В.С. Уравнения математической физики, издание 4. — М.: Наука, 1981.
5. Романов В.Г. О локальной разрешимости некоторых многомерных обратных задач для уравнений гиперболического типа // Дифф. уравнения. — 1989. — Т. 25, № 2. — С. 275–283.

Статья поступила в редакцию 6 октября 2011 г.