

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

*Труды второй международной молодежной школы-конференции
“Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач”
Часть I, стр. С.263–С.292 (2011)*

УДК 519.6, 519.711.3
MSC 13A99ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ
ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОАКУСТИКИ

С.И. КАБАНИХИН, М.А. ШИШЛЕНИН, О.И. КРИВОРОТЬКО

ABSTRACT. In this article we consider the inverse problem of determining the initial conditions of the initial boundary-value problem for the wave equation with additional information about the solution of the direct initial boundary-value problem which is measured at the boundary of the domain. The main goal of our work is to apply the optimization methods (method of simple iteration (MSI) and the conjugate gradient method (CGM)), to make a comparative analysis of methods and to study the resolution of the inverse problem and its dependence on the number and location of measurement points. We consider three two-dimensional inverse problems. In the first of which (inverse problem 1) the additional information is measured on one side $x = 0$ of the square $(0, L) \times (-L, L)$, in the second - on the both sides $x = 0$ and $x = L$, and in the third - on the three sides $x = 0$, $x = L$ and $y = L$. In the first case, the inverse problem is equivalent to the problem of restoring the function by its spherical means. This problem is classically ill-posed. To regularize the problem we reduce inverse problems to a finite system of one-dimensional inverse problems. This gives an explicit form of the gradient J' of the functional

$$J(Q) = \langle AQ - F, AQ - F \rangle = \|AQ - F\|^2$$

and allows to estimate the rate of convergence.

KABANIKHIN S.I., SHISHLENIN M.A., KRIVOROTKO O.I., OPTIMIZATION METHOD FOR SOLVING INVERSE THERMOACUSTIC PROBLEM.

© 2011 КАБАНИХИН С.И., ШИШЛЕНИН М.А., КРИВОРОТЬКО О.И.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 09-01-00746, грант 11-01-00105 и при финансовой поддержке ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 гг. (гос. контракт № 14.740.11.0350).

Поступила 28 декабря 2011 г., опубликована 30 декабря 2011 г.

The solution of two-dimensional inverse problem is obtained by applying the methods of MSI and CGM. The results of numerical calculations are presented and discussed. We show that the MSI for each iteration step reduces the value of the objective functional. However, due to the ill-posedness of inverse problem the difference between the exact and the approximate solutions of the inverse problem decreases up to some fixed number k_{min} and then increases monotonically. This reflects the regularizing properties of the MSI, in which the iteration number is the regularization parameter. It is shown that CGM has a similar property, but CGM achieves to the exact solution much faster (about 10 - 100 times). CGM is much more sensitive.

Keywords: thermoacoustic problem, inverse and ill-posed problems, wave equation, method of simple iteration, conjugate gradient method.

ВВЕДЕНИЕ

Методы томографического исследования структуры неоднородных объектов, благодаря успехам как фундаментальной и вычислительной математики, так и современному аппаратному оснащению, произвели революцию в биологических и медицинских исследованиях. Нескольким ученым, применявшим в своих исследованиях методы томографии, были присуждены Нобелевские премии по медицине (в 1979 году G.N. Hounsfield и A. Mc. Cormack получили Нобелевскую премию "за разработку компьютерной томографии"; в 2003 году R.C. Lauterbur и S.P. Mansfield получили Нобелевскую премию "за изобретение метода магнитно-резонансной томографии"), биологии и химии. Прогресс медицинской томографии сопровождался зарождением и развитием многих других приложений этого универсального и информативного метода. Будучи эффективным средством решения обратных задач, направленных на реконструкцию внутренней структуры сложных объектов, методы вычислительной томографии стали применяться в оптике и физическом эксперименте, геофизике, дефектоскопии промышленных изделий и других областях науки и промышленности. Развитие математических методов и систем сбора информации привели к новым математическим моделям томографии, таким как диффузионная томография, термотомография, томография векторных и тензорных полей. Разнообразие математических постановок связано с потребностью реконструкции характеристик сред различной сложности. Задача термоакустики имеет важное значение в онкологии, поскольку при исследовании пораженных тканей обнаружено, что массовая доля воды в них существенно больше, чем в здоровых тканях [1]. Если в здоровых тканях содержание воды составляет около 65%, то в пораженных оно достигает 80%. Столь существенное отличие массовой доли воды в пораженных и здоровых клетках дает основание предполагать, что коэффициенты поглощения энергии электромагнитного излучения пораженных и здоровых клеток также существенно отличаются. Это предположение подтверждается результатами экспериментальных работ [1], в которых показано, что коэффициент поглощения электромагнитной энергии пораженных раком жировых тканей груди в 1,8 раз больше, чем у здоровых. Грудь облучалась лазером с рабочей частотой 434 МГц. Волны акустического давления фиксировались пьезодатчиками, размещенными на поверхности исследуемой области, имеющей форму полусферы радиуса 15 см. Пространство между грудью и датчиками заполнялось жидкостью, плотность и скорость звука которой близка к

плотности и скорости звука груди. В данной работе рассматриваются оптимизационные методы решения обратной задачи термоакустики.

1. ФИЗИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваем область $\Omega \subset R^3$ упругой среды. Предположим, что начиная с момента времени $t = 0$, область Ω подвергается электромагнитному излучению интенсивностью $I(t)$, которое частично поглощается средой. Поглощенная энергия переходит в тепло, что приводит к увеличению температуры среды, к ее расширению и, в итоге, к появлению волн акустического давления. Распространяясь по среде, волны акустического давления достигают границы Γ области, на части которой Γ_1 они могут быть измерены. Требуется определить коэффициент поглощения электромагнитного излучения в Ω по измерениям акустического давления на части границы Γ_1 .

Используя модель невязкой жидкости, и пренебрегая диффузионными потоками тепла, процесс распространения волн акустического давления u в среде можно описать следующим уравнением [2]:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_{x,y} u = \alpha(x, y_1, y_2) \frac{\beta}{c_p} \frac{\partial I}{\partial t}, \quad (x, y_1, y_2) \in \Omega, t \in R$$

Здесь c – скорость распространения акустических волн, α — коэффициент поглощения энергии электромагнитного излучения, β – коэффициент термического расширения, c_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении. В качестве начального условия берется условие отсутствия волн акустического давления до начала облучения:

$$u|_{t=0} = 0.$$

Как правило, в задачах термоакустики длительность электромагнитного излучения очень мала, что позволяет задать (приближенно) $I(t)$ в виде дельта-функции Дирака:

$$I(t) = I_0 \delta(t).$$

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем рассматривать прямую и обратную задачи в n -мерном пространстве. В силу того, что $I(t) = I_0 \delta(t)$, можно записать задачу Коши [3] (гл.3, §13):

$$(2.1) \quad \begin{cases} u_{tt} = \Delta_{x,y} u, & t > 0, x \in R, y = (y_1, \dots, y_n) \in R^n; \\ u|_{t=0} = q(x, y), & u_t|_{t=0} = 0; \end{cases}$$

$$\text{Здесь } q(x, y) = \frac{\alpha(x, y) \beta I_0}{c_p}.$$

Прямая задача (2.1) заключается в нахождении $u(x, y, t)$ по известной функции $q(x, y)$. Известно, что при условии $q \in H^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(R^{n+1})$ существует единственное классическое решение $u \in C^2(R^{n+1} \cup \{t > 0\}) \cap C^1(R^{n+1} \cup \{t > 0\})$ задачи (2.1).

Мы будем рассматривать три постановки обратной задачи, которые отличаются одна от другой количеством дополнительной информации о решении прямой задачи (2.1).

Обратная задача 1: Пусть о решении $u(x, y, t)$ задачи Коши (2.1) известна дополнительная информация на гиперплоскости $x = 0$:

$$\begin{aligned} u(0, y, t) &= f_1(y, t), \\ u_x|_{x=0} &= g(y, t). \end{aligned}$$

Требуется определить функцию $q(x, y)$ по известным функциям $f_1(y, t)$ и $g(y, t)$.

Предположим, что неоднородность содержится в ограниченном объеме Ω , т.е. $\text{supp}\{q\} \in \Omega$, где $\Omega = \{(x, y) \in R^{n+1} \mid 0 < x < l, -l < y_i < l, i = 1, \dots, n\}$.

Поскольку скорость распространения возмущений равна единице, мы можем выбрать $L > l$ таким, что возмущения, порожденные данными $q(x, y)$ не успевают за время T достичь границы $x = L, y_i = -L, y_i = L, i = 1, \dots, n$. Таким образом, можно сформулировать прямую начально-краевую задачу:

$$(2.2) \quad \begin{cases} u_{tt} = \Delta_{x,y} u, & (x, y) \in \Omega, t \in (0, T); \\ u|_{t=0} = q(x, y), \quad u_t|_{t=0} = 0, & y = (y_1, \dots, y_n) \in R^n; \\ u_x|_{x=0} = g(y, t), \quad u_x|_{x=L} = 0; \\ u_{y_i}|_{y_i=-L} = u_{y_i}|_{y_i=L} = 0, & i = 1, \dots, n \end{cases}$$

Отметим, что задача Коши с данными на времениподобной поверхности $x = 0$:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \Delta_{x,y} u, \quad x > 0, \\ u(0, y, t) &= f_1(y, t), \\ u_x(0, y, t) &= g(y, t) \end{aligned}$$

рассматривалась в книге [4]. Более подробно мы рассмотрим эту задачу в разделе 2.1.2.

Основным объектом наших исследований будет обратная задача

$$(2.3) \quad \begin{cases} u_{tt} = \Delta_{x,y} u, & x \in (0, L), y_i \in (-L, L), t \in (0, T); \\ u|_{t=0} = q(x, y), \quad u_t|_{t=0} = 0, & y = (y_1, \dots, y_n) \in R^n; \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ на } \partial\Omega. \end{cases}$$

$$(2.4) \quad u(0, y, t) = f_1(y, t)$$

где n – внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Отметим, что обратная задача (2.2), (2.4) может быть сведена к решению двух обратных задач вида (2.3) – (2.4) следующим образом.

Пусть пара функций $\{u_1, q_1\}$ является решением задачи

$$\begin{cases} u_{1tt} = \Delta_{x,y} u_1, \\ u_1|_{t=0} = q_1(x, y), \quad u_{1t}|_{t=0} = 0, \\ u_{1x}|_{x=0} = u_{1x}|_{x=L} = 0, \\ u_{1y_i}|_{y_i=-L} = u_{1y_i}|_{y_i=L} = 0 \end{cases}$$

$$u_1|_{x=0} = f_1(y, t)$$

а пара $\{u_2, q_2\}$ – решением задачи

$$(2.5) \quad \begin{cases} u_{2tt} = \Delta_{x,y} u_2, \\ u_2|_{t=0} = q_2(x, y), \quad u_{2t}|_{t=0} = 0, \\ u_{2x}|_{x=0} = u_{2x}|_{x=L} = 0, \\ u_{2y_i}|_{y_i=-L} = u_{2y_i}|_{y_i=L} = 0 \end{cases}$$

$$(2.6) \quad u_{2x}|_{x=0} = g(y, t)$$

Ясно, что $q(x, y) = q_1(x, y) + q_2(x, y)$, $u(x, y, t) = u_1(x, y, t) + u_2(x, y, t)$ являются решением обратной задачи (2.2), (2.4). Но задача (2.5) - (2.6) может быть сведена к обратной задаче вида (2.3) - (2.4). С этой целью обозначим $u_{2x} = w$. Тогда получим обратную задачу, аналогичную обратной задаче (2.3) - (2.4):

$$\begin{cases} w_{tt} = \Delta_{x,y} w, \\ w|_{t=0} = q_{2x}(x, y), \quad w_t|_{t=0} = 0, \\ w_x|_{x=0} = 0, w_{y_i}|_{y_i=-L} = w_{y_i}|_{y_i=L} = 0 \\ w|_{x=0} = g(y, t) \end{cases}$$

Предполагая, что $q \in H^s(\Omega)$, заключаем, что $u \in H^s(\Omega \cup \{0 < t < T\})$ и $u(x, y, t)$ имеет след $u(0, y, t) = f_1(y, t) \in L_2(\{(y, t) | y_i \in (-L, L), t \in (0, T)\}), i = \overline{1, n}$.

2.1. Постановка трех обратных задач. Рассмотрим три постановки обратных задач к задаче (2.3) (см. Рис. (2.1)):

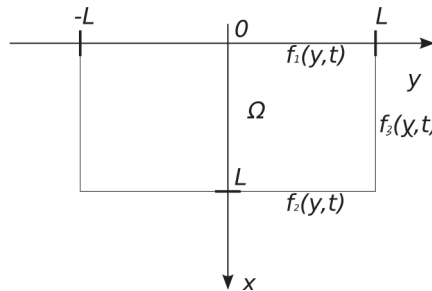


Рис. 2.1

Обратная задача 1: измерения проведены на границе $x = 0$:

$$u(0, y, t) = f_1(y, t)$$

Требуется определить функцию $q(x, y)$ по известной функции $f_1(y, t)$.

Обратная задача 2: к измерениям (2.4) добавляются измерения на границе $x = L$:

$$(2.7) \quad u(L, y, t) = f_2(y, t)$$

Требуется определить функцию $q(x, y)$ по известным функциям $f_1(y, t)$, $f_2(y, t)$.

Обратная задача 3: к измерениям (2.4) и (2.7) добавляются измерения на границе $y = L$:

$$(2.8) \quad u(x, L, y_2, \dots, y_n, t) = f_3(x, y_2, \dots, y_n, t)$$

Требуется определить функцию $q(x, y)$ по известным функциям $f_1(y, t)$, $f_2(y, t)$, $f_3(x, y_2, \dots, y_n, t)$.

Заметим, что в случае $T = L_1 > L$ решение обратной задачи $q(x, y)$ восстанавливается не полностью или с большой погрешностью, поскольку не вся информация об искомом решении $q(x, y)$ обратной задачи дойдет до границы. Поэтому всюду далее будем считать, что $T \geq L$. Особенно важной для приложений и сложной для теоретического исследования является обратная задача 1. Эта задача является некорректной по Адамару, поскольку пример

$$u_n(x, y, t) = \frac{1}{n} \cos(\sqrt{2}ny) \cos(nt) (e^{nx} + e^{-nx})$$

показывает, что при $n \rightarrow \infty$ и $x \in (0, \varepsilon)$, где ε - сколь угодно малое число, решение стремится к бесконечности $u_n \rightarrow \infty$. С другой стороны, данные задачи стремятся к нулю

$$f_{1n}(y, t) = u_n(0, y, t) = \frac{2}{n} \cos(\sqrt{2}ny) \cos(nt) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty$$

то есть, нарушается третье условие корректности задачи, а именно, непрерывная зависимость решения от начальных данных.

2.1.1. *Интегральные представления решения прямых задач для $n = 1, 2, 3$.* В одномерном случае уравнение в задаче (2.3) - уравнение колебаний струны. Решение задачи (2.3) представляется формулой Даламбера:

$$u(x, t) = \frac{q(x+t) + q(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

где $f(x, t)$ - правая часть в уравнении (2.3).

Для случая $y = y_1$ имеет место формула Пуассона представления решения задачи (2.3):

$$u(x, y_1, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_{r < t-\tau} \frac{f(\xi, \eta, t) d\xi d\eta d\tau}{\sqrt{t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y_1)^2}} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2\pi} \iint_{r < t} \frac{q(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y_1)^2}}.$$

Уравнение (2.3) называется уравнением малых поперечных колебаний мембраны с начальными данными (функция $f(x, y_1, t)$ соответствует вынуждающей внешней силе).

В случае $y = (y_1, y_2)$ решение задачи (2.3) представляется формулой Кирхгофа:

$$(2.9) \quad u(x, y, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi t} \iint_{|x-\zeta|=t} q(\alpha, \beta, \gamma) d\alpha d\beta d\gamma \right),$$

где $x = (x, y_1, y_2)$, $\zeta = (\alpha, \beta, \gamma)$. Формула Кирхгофа (2.9) показывает, что решение прямой задачи в точке (x, y_1, y_2, t) зависит от значений функции $q(\alpha, \beta, \gamma)$

на сфере $|x - \zeta| = t$. Если теперь положить в (2.9) $x = 0$, то получим интегральное уравнение первого рода относительно функции $q(x, y_1, y_2)$:

$$(2.10) \quad f_1(y_1, y_2, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi t} \iint_{\sqrt{\alpha^2 + (y_1 - \beta)^2 + (y_2 - \gamma)^2} = t} q(\alpha, \beta, \gamma) d\alpha d\beta d\gamma \right)$$

Однако, численная реализация метода нахождения $q(x, y_1, y_2)$ из уравнения (2.10) является сложной задачей.

Интегрируя уравнение (2.10) по t и умножая его на $4\pi t$, получим задачу восстановления функции $q(x, y_1, y_2)$ по ее сферическим средним.

2.1.2. *Восстановление функции по сферическим средним.* Известно [4] (пример Р. Куранта), что если для решения гиперболического уравнения (2.3) данные Коши заданы при $x = 0$

$$(2.11) \quad u(0, y_1, y_2, t) = f_1(y_1, y_2, t), \quad u_x|_{x=0} = 0$$

в области (y_1, y_2, t) , для которой переменные y_1, y_2 заполняют сколь угодно малый шар

$$(y_1 - y_{10})^2 + (y_2 - y_{20})^2 \leq \varepsilon^2,$$

то этим самым начальными значения (2.11) определяются однозначно во всем шаре

$$(y_1 - y_{10})^2 + (y_2 - y_{20})^2 \leq T^2.$$

В нашем случае, $y_{10} = 0, y_{20} = 0$.

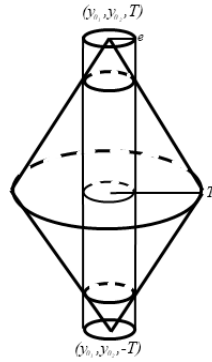


Рис. 2.2

Предположим теперь, что нам известны средние значения функции q

$$h(y_1, y_2, t) = \iiint_{S_t} q(x, y_1 + \xi_1, y_2 + \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 dx = Q[q].$$

Здесь $S_t : \xi_1^2 + \xi_2^2 + x^2 = t^2$ — сфера радиуса t с центром в точке $(y_{10}, y_{20}, 0)$ (см. Рис. (2.2)). Тогда мы можем однозначно определить значение функции q

на сфере S_t . Отсюда следует невозможность произвольного задания начальных значений $u(0, y_1, y_2, t)$ (некорректность задачи (2.3) - (2.4)).

2.1.3. *Метод Фурье.* В силу естественных рассуждений всюду далее будем рассматривать область

$$\Omega = \{(x, y_1, y_2) | x \in (0, L), y_1 \in (-L, L), y_2 \in (-L, L)\} \in \mathbb{R}^3.$$

Будем искать решение прямой задачи (2.3) в следующем виде:

$$(2.12) \quad u(x, y_1, y_2, t) = \sum_{m,n=0}^{\infty} u_{(k)}(x, t) \cos \frac{m\pi}{L} y_1 \cos \frac{n\pi}{L} y_2$$

Пусть

$$q(x, y_1, y_2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} q_{(k)}(x) \cos \frac{m\pi}{L} y_1 \cos \frac{n\pi}{L} y_2,$$

$$f_1(y_1, y_2, t) = \sum_{m,n=0}^{\infty} f_{(k)}^i(t) \cos \frac{m\pi}{L} y_1 \cos \frac{n\pi}{L} y_2,$$

тогда коэффициенты Фурье $u_{(k)}(x, t)$ в разложении (2.12) удовлетворяют следующим условиям ($m, n = 0, 1, \dots$):

$$(2.13) \quad \begin{cases} u_{(k)tt} = u_{(k)xx} - \frac{\pi^2}{L^2} |k|^2 u_{(k)}, & x \in (0, L), t \in (0, T) \\ u_{(k)}(x, 0) = q_{(k)}(x), & u_{(k)t}(x, 0) = 0 \end{cases}$$

$$(2.14) \quad u_{(k)x}(0, t) = u_{(k)x}(L, t) = 0.$$

Здесь $k = (m, n)$ - мультииндекс. Отметим, что для классического решения прямой задачи (2.3) необходимо соблюдение условий согласования:

$$q_x(0, y_1, y_2) = q_x(L, y_1, y_2) = 0, \quad q_{y_1}(x, -L, y_2) = q_{y_1}(x, L, y_2) = 0,$$

$$q_{y_2}(x, y_1, -L) = q_{y_2}(x, y_1, L) = 0.$$

Обратные задачи 1, 2 и 3 на коэффициенты Фурье функций принимают вид:

$$(2.15) \quad u_{(k)}(0, t) = f_{(k)}^1(t)$$

$$(2.16) \quad u_{(k)}(L, t) = f_{(k)}^2(t)$$

$$(2.17) \quad u_{(k)}(L, t) = f_{(k)}^3(t)$$

Замечание. Для обратной задачи 3 разложение (2.12) видоизменится после замены x на y_1 .

Решение задачи (2.13) при $t \in (0, T)$ принимает вид [5]:

$$(2.18) \quad u_{(k)}(x, t) = \frac{q_{(k)}(x-t) + q_{(k)}(x+t)}{2} - \frac{kt}{2} \int_{x-t}^{x+t} \frac{J_0'(-k\sqrt{t^2 - (\alpha-x)^2})}{\sqrt{t^2 - (\alpha-x)^2}} q_{(k)}(\alpha) d\alpha,$$

$$\text{где } J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

Здесь $J_0(x)$ - функция Бесселя первого рода.

Для функции Бесселя известны асимптотические формулы:

$$J_0(x) \rightarrow 1, \quad \text{при } 0 < x \ll 1;$$

$$J_0(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \quad \text{при } x \gg \frac{1}{4}.$$

На Рис. (2.3) приведены графики функции Бесселя $J_\alpha(x)$, $\alpha = 0, 1, 2$.

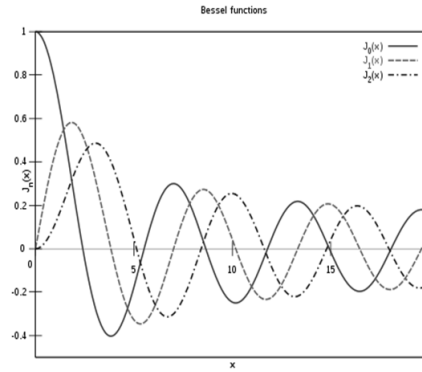


Рис. 2.3. Функции Бесселя.

Аналогичными рассуждениями получим решение обратной задачи (2.13)-(2.15):

$$u_{(k)}(x, t) = \frac{f_{(k)}(t-x) + f_{(k)}(t+x)}{2} + \frac{kt}{2} \int_{t-x}^{t+x} \frac{i J_0' \left(ik \sqrt{x^2 - (\alpha - t)^2} \right)}{\sqrt{x^2 - (\alpha - t)^2}} q_{(k)}(\alpha) d\alpha,$$

где $J_0(ix)$ – функция Бесселя первого рода чисто мнимого аргумента.

В (2.19) под интегралом стоит функция Бесселя чисто мнимого аргумента, что подтверждает неустойчивость обратной задачи 1 (пример Адамара).

На Рис. (2.4) приведен график функции $J_0(ix)$.

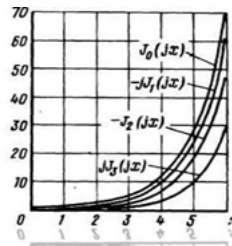


Рис. 2.4. Функции Бесселя мнимого аргумента.

Пользуясь четностью по x найдем решение (2.13)-(2.14) методом Фурье.

$$u_{(k)}(x, t) = \sum_j u_{kj}(t) \cos \frac{2j\pi}{L} x, \quad q_{(k)}(x) = \sum_j q_{kj} \cos \frac{2j\pi}{L} x$$

Тогда решение прямой задачи (2.13)-(2.14) имеет вид:

$$(2.20) \quad u_{(k)}(x, t) = \sum_j q_{kj} \cos \frac{2j\pi}{L} x \cos pt$$

Здесь $p = \frac{\pi}{L} \sqrt{4j^2 + |k|^2}$.

Итак, при любых $m, n = 0, 1, 2, \dots$, мы определили операторы:

$$(2.21) \quad A_{(k)}^1 : \quad \left(A_{(k)}^1 q_{(k)} \right) (t) = u_{(k)}(0, t) = \sum_j q_{kj} \cos pt = f_{(k)}^1(t)$$

$$(2.22) \quad A_{(k)}^2 : \quad \left(A_{(k)}^2 q_{(k)} \right) (t) = u_{(k)}(L, t) = \sum_j q_{kj} \cos pt = f_{(k)}^2(t)$$

$$(2.23) \quad A_{(k)}^3 : \quad \left(A_{(k)}^3 q_{(k)} \right) (t) = u_{(k)}(L, t) = \sum_j (-1)^j \tilde{q}_{kj} \cos p_1 t = f_{(k)}^3(t),$$

где $p_1 = \frac{\pi}{L} \sqrt{4m^2 + n^2 + j^2}$, $\tilde{q}_{kj} = \int_{-L}^L q_{(k)}(y_1) \cos \frac{j\pi}{L} y_1 dy_1$.

Решение обратной задачи для ограниченного числа коэффициентов Фурье уже в некотором смысле является регуляризацией обратных задач 1, 2 и 3. При фиксированном k решение задачи (2.13) "хорошее" (т.е. задача (2.13) корректна по Адамару), однако при увеличении k степень корректности уменьшается.

2.2. Оценка условной устойчивости.

Лемма 1. *Справедлива оценка условной устойчивости для обратных задач 1, 2 и 3*

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \|f_i - f_\delta\| < \delta \implies \|q_i - q_\delta\| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, 3$$

Доказательство. Покажем условную устойчивость решения $q_{(k)}$ обратной задачи (2.13)-(2.15) относительно малой вариации данных $f_{(k)}^1$ (случай измерения на одной границе области).

Для обратной задачи (2.13)-(2.15) справедлива формула Даламбера (см. п. 2.1.1):

$$(2.24) \quad u_{(k)}(x, t) = \frac{f_{(k)}^1(t-x) + f_{(k)}^1(t+x)}{2} + \frac{|k|^2}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} u_{(k)}(\xi, \tau) d\tau d\xi,$$

($x, t \in \Delta(T, L)$)

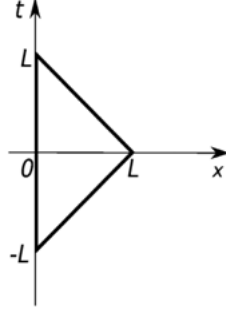
где $\Delta(T, L) = \{(x, t) | x \in (0, L), t \in \left(\frac{T}{L}x - T, -\frac{T}{L}x + T\right)\}$.

Замечание. Из (2.24) вытекает единственность решения $u_{(k)}(x, t)$ задачи (2.13)-(2.15).

В области $\Delta(T, L)$ (см. Рис. (2.5)) введем следующие обозначения:

$$U^{(k)}(x) = \max_{t \in (\frac{T}{L}x - T, -\frac{T}{L}x + T)} |u_{(k)}(x, t)|,$$

$$F^{(k)} = \max_{t \in (-T, T)} |f_{(k)}^1(t)| = \|f_{(k)}^1\|_{C[-T, T]}.$$

Рис. 2.5. Область $\Delta(T, L)$.

Тогда из (2.24) получаем неравенство:

$$(2.25) \quad U^{(k)}(x) \leq F^{(k)} + \frac{|k|^2}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} U^{(k)}(\xi) d\tau d\xi \leq F^{(k)} + |k|^2 \int_0^x \int_0^\tau U^{(k)}(\xi) d\xi d\tau$$

Введем следующую норму:

$$\|U^{(k)}\|_{k,m} = \sup_{x \in (0,L)} \{U^{(k)}(x)e^{-mkx}\}, \quad m, k > 0$$

Тогда двойной интеграл в неравенстве (2.25) при переходе к введенной норме оценивается следующим образом:

$$\int_0^x \int_0^\tau U^{(k)}(\xi) d\xi d\tau = \int_0^x \int_0^\tau \|U^{(k)}\|_{k,m} e^{m|k|\xi} d\xi d\tau \leq \|U^{(k)}\|_{k,m} \frac{1}{m^2|k|^2} e^{m|k|L}.$$

Умножим выражение (2.25) на $e^{-m|k|x}$ и перейдем во всех величинах к норме $\|\cdot\|_{k,m}$:

$$\|U^{(k)}\|_{k,m} \leq \|F^{(k)}\|_{k,m} + \frac{1}{m^2} \|U^{(k)}\|_{k,m}, \quad \|U^{(k)}\|_{k,m} \leq \frac{m^2}{m^2 - 1} \|F^{(k)}\|_{k,m},$$

$$m \notin [-1, 1].$$

Учитывая начальное условие в задаче (2.13) получим следующую условную оценку:

$$(2.26) \quad \|Q^{(k)}\|_{k,m} \leq \frac{m^2}{m^2 - 1} \|F^{(k)}\|_{k,m}, \quad m \notin [-1, 1]$$

Ясно, что $\|Q^{(k)}\|_{k,m} \geq \|q_{(k)}\| e^{-m|k|L}$, где $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{C[0,L]}$. Тогда (2.26) переписывается:

$$(2.27) \quad \|q_{(k)}\| \leq \frac{m^2}{m^2 - 1} e^{m|k|L} \|f_{(k)}^1\|$$

Справедливо [6] (критерий аналитичности), что если $f(y) = \sum_k f_k e^{ik\rho y}$, $y = y_1 + iy_2$, тогда $f(y)$ аналитична в полосе $|y_2| < \rho \iff |f_k| < ce^{-|k|\rho}$, $c > 0$.

Таким образом, при условии аналитичности по y функции $f_1(y, t)$ в заданной области имеет место оценка (2.27).

Пусть теперь $f_1 - f_2 = \tilde{f}$ и коэффициенты Фурье функции $\tilde{f}$ удовлетворяют $\|\tilde{f}_{(k)}^1\| < \delta e^{-m|k|(L+\gamma)}$, $\gamma > 0$. Пусть $\tilde{q} = q_1 - q_2$, где $Aq_1 = f_1$, $Aq_2 = f_2$. Тогда из оценки (2.27) получаем оценку условной устойчивости:

$$\|\tilde{q}\|_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|\tilde{q}_{(k)}\|^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^4}{(m^2 - 1)^2} e^{2m|k|L} \|\tilde{f}_{(k)}^1\|^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^4}{(m^2 - 1)^2} e^{2m|k|L}.$$

$$\cdot \delta^2 e^{-2m|k|(L+\gamma)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^4}{(m^2 - 1)^2} \delta^2 e^{-2mk\gamma} = \frac{\delta^2 m^4}{(m^2 - 1)^2} \frac{1}{1 - e^{-2mk\gamma}} = c\delta^2,$$

$$c = \frac{m^4}{(m^2 - 1)^2} \frac{1}{1 - e^{-2mk\gamma}}.$$

Таким образом, $\|q\|_1 \leq \varepsilon$, $\varepsilon = c\delta^2$, что и требовалось доказать.

3. МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ

3.1. Сведение к задаче минимизации функционала $J(q)$.

3.1.1. *Проекционный метод.* Разделим ряд Фурье функции $g(x, y, t)$ на две части:

$$g(x, y, t) = \sum_{|k| \leq N} g_{(k)}(x, t) e^{iky} + \sum_{|k| > N} g_{(k)}(x, t) e^{iky}.$$

Если предположить, что $g \in C^2$, то остаток ряда Фурье (второе слагаемое в правой части) можно оценить [13]:

$$\sum_{|k| > N} |g_{(k)}(x, t)| \leq \frac{C}{k}.$$

Действительно, пусть $a(y) = \sum_k a_k e^{iky}$. Тогда если $a \in C^\alpha$, то $|a_k| \leq \frac{c}{k^\alpha}$, c - некоторая постоянная [13]. Нетрудно видеть, что

$$\sum_{k=m}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=m}^{\infty} \frac{c}{k^\alpha} \leq \int_m^{\infty} \frac{c}{x^\alpha} dx = -\frac{c}{(\alpha - 1)m^{\alpha-1}}.$$

Поэтому в обратной задаче 1 можно ограничиться рассмотрением конечных рядов Фурье:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{|k| \leq N} u_{(k)}(x, t) e^{iky}, \quad q(x, y) = \sum_{|k| \leq N} q_{(k)}(x) e^{iky}, \\ f_1(y, t) &= \sum_{|k| \leq N} f_{(k)}^1(t) e^{iky} \end{aligned}$$

3.1.2. *Исследование обратной задачи для $q_{(k)}$ в $L_2(0, L)$.* Используя разложения (3.1), сведем обратную задачу 1 к задачам на коэффициенты Фурье ($|k| \leq \mathbb{N}$):

$$(3.2) \quad \begin{cases} u_{(k)tt} = u_{(k)xx} - k^2 u_{(k)}, & (x, t) \in \Delta(T, L) \\ u_{(k)}(x, 0) = q_{(k)}(x), & u_{(k)t}(x, 0) = 0 \\ u_{(k)x}(0, t) = u_{(k)x}(L, t) = 0 \end{cases}$$

$$(3.3) \quad u_{(k)}(0, t) = f_{(k)}^1(t)$$

Решение обратной задачи (3.2)-(3.3) представляется формулой Даламбера (см. п.2.1.1):

$$(3.4) \quad u_{(k)}(x, t) = \frac{f_{(k)}^1(t-x) + f_{(k)}^1(t+x)}{2} + \frac{k^2}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} u_{(k)}(\xi, \tau) d\tau d\xi, \\ (x, t) \in \Delta(T, L)$$

Полагая в (3.4) $t = 0$ и предполагая четность функции $f_{(k)}^1$, получим:

$$(3.5) \quad q_{(k)}(x) = f_{(k)}^1(x) + \frac{k^2}{2} \int_0^x \int_{-x+\xi}^{x-\xi} u_{(k)}(\xi, \tau) d\tau d\xi$$

Введем следующие обозначения:

$$Q(x, t) = \begin{pmatrix} q_{(k)}(x) \\ u_{(k)}(x, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1(x) \\ Q_2(x, t) \end{pmatrix}, \\ F(x, t) = \begin{pmatrix} f_{(k)}^1(x) \\ \frac{f_{(k)}^1(t-x) + f_{(k)}^1(t+x)}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x, t) \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{L}(\Delta(T, L)) = L_2(0, L) \times L_2(\Delta(T, L)).$$

Запишем систему интегральных уравнений (3.4)-(3.5) в операторном виде:

$$(3.6) \quad AQ := Q - BQ = F,$$

где $A : \mathfrak{L}(\Delta(T, L)) \rightarrow \mathfrak{L}(\Delta(T, L))$, $BQ = (B_1Q, B_2Q)^T$, причем

$$B_1 : \mathfrak{L}(\Delta(T, L)) \rightarrow l_2(0, L), \quad B_1Q = \frac{k^2}{2} \int_0^x \int_{-x+\xi}^{x-\xi} Q_2(\xi, \tau) d\tau d\xi, \\ B_2 : \mathfrak{L}(\Delta(T, L)) \rightarrow \mathfrak{L}(\Delta(T, L)), \quad B_2Q = \frac{k^2}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} Q_2(\xi, \tau) d\tau d\xi.$$

Решение уравнения (3.6) будем искать, минимизируя целевой функционал $J : \mathfrak{L}(\Delta(T, L)) \rightarrow \mathbb{R}$

$$J(Q) = \langle AQ - F, AQ - F \rangle = \|AQ - F\|^2.$$

В силу линейности оператора A задачи (3.6) можем записать градиент функционала $J(Q)$:

$$(3.7) \quad J' : \mathfrak{L}(\Delta(T, L)) \rightarrow \mathfrak{L}(\Delta(T, L)), \quad J'Q = 2A^*(AQ - F)$$

Здесь $A^* : \mathfrak{L}^*(\Delta(T, L)) \rightarrow \mathfrak{L}(\Delta(T, L))$. Заметим, что функционал $J(Q)$ не может иметь более одной стационарной точки [2].

Пусть $\phi(x, t) = (\phi_1(x), \phi_2(x, t))^T, \phi \in \mathfrak{L}^*(\Delta(T, L))$. Тогда из (3.6) получим выражение для $A^* : A^*\phi = \phi - B^*\phi$, где $\langle BQ, \phi \rangle_{\mathfrak{L}^*} = \langle Q, B^*\phi \rangle_{\mathfrak{L}(\Delta(T, L))}, \|BQ\|_{\mathfrak{L}^*}^2 = \|B_1Q\|_{L_2(0, L)}^2 + \|BQ\|_{\mathfrak{L}(\Delta(T, L))}^2$.

Всюду далее будем полагать $T = L$.

Лемма 2. *Используя вышеуказанные обозначения, справедливы представления:*

$$\begin{aligned} (B_1^*\phi)(\xi, \tau) &= \frac{k^2}{2} \int_{\tau+\xi}^L \phi_1(x) dx, \quad (\xi, \tau) \in \Delta(T, L), \\ (B_2^*\phi)(\xi, \tau) &= k^2 \int_{\tau+\xi}^L \int_0^{\tau+x-\xi} \phi_2(x, t) dt dx + k^2 \int_{-\frac{1}{2}\tau+\frac{1}{2}(L+\xi)}^L \int_{\tau-x+\xi}^{L-x} \phi_2(x, t) dt dx + \\ &+ k^2 \theta \left(\frac{1}{3}(L-\xi) - \tau \right) \int_{\xi}^{-\frac{1}{2}\tau+\frac{1}{2}(L+\xi)} \int_{\tau-x+\xi}^{\tau+x-\xi} \phi_2(x, t) dt dx, \quad (\xi, \tau) \in \Delta(T, L). \end{aligned}$$

Доказательство см. Приложение 1. Нетрудно видеть, что операторы B_1 и B_2 , а также B_1^* и B_2^* ограничены. Также отметим, что прямая задача (3.2) корректна и имеет место оценка:

$$\|u_{(k)}\|_{L_2} \leq c \|q_{(k)}\|_{L_2} \text{ где } c = c_1 e^{\frac{k^2 M}{2}}, M > 0.$$

В самом деле, применим формулу Даламбера для представления решения прямой задачи (3.2):

$$\begin{aligned} u_{(k)}(x, t) &= \frac{q_{(k)}(x+t) + q_{(k)}(x-t)}{2} - \frac{k^2}{2} \int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} u_{(k)}(\xi, \tau) d\xi d\tau. \\ |u_{(k)}(x, t)| &\leq |q_{(k)}(x)| + \frac{k^2}{2} \int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} |u_{(k)}(\xi, \tau)| d\xi d\tau. \end{aligned}$$

Применяя лемму Гронуолла-Беллмана, получим требуемую оценку.

3.2. Сходимость метода простой итерации (МПИ) по функционалу.

Метод простой итерации заключается в отыскании приближенного решения уравнения (3.6) следующим способом:

$$q_{n+1} = q_n - \alpha J' q_n, \quad \alpha \in \left(0, \frac{1}{\|A\|^2} \right).$$

Сформулируем теорему о скорости сходимости метода простой итерации по функционалу.

Теорема 1. [2] Пусть Q и F – гильбертовы пространства, A – линейный ограниченный оператор. Предположим, что для некоторого $f_1 \in F$ существует точное решение q_T уравнения (3.6). Тогда при любом q_0 и

$\alpha \in \left(0, \frac{1}{\|A\|^2}\right)$ последовательность $\{q_n\}$, определяемая равенствами $q_{n+1} = q_n - \alpha J'q_n$, сходится по функционалу и верна оценка

$$(3.8) \quad J(q_n) \leq \frac{\|q_0 - q_T\|^2}{4n\alpha(1 - \alpha\|A\|^2)}.$$

3.3. Метод сопряженных градиентов (МСГ). В методе сопряженных градиентов сначала задается q_0 и вычисляется $p_0 = J'q_0$. Затем предполагается, что q_n и p_n уже вычислены. На шаге $n+1$ сначала вычисляется вспомогательная функция

$$p_n = J'q_n + \frac{\|J'q_n\|^2}{\|J'q_{n-1}\|^2} p_{n-1},$$

далее - параметр спуска

$$\alpha_n = \frac{\langle J'q_n, p_n \rangle}{\|Ap_n\|^2},$$

а затем - приближенное решение

$$q_{n+1} = q_n - \alpha_n p_n.$$

3.4. Выражение для градиента функционала $J'(q)$, используемого для численных расчетов. Для изложения алгоритмов МПИ и МСГ удобнее вернуться к дифференциальной постановке обратной задачи:

$$(3.9) \quad \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, & (x, y) \in \Omega, t \in (0, T), \\ u|_{t=0} = q(x, y), & u_t|_{t=0} = 0, \\ u_x|_{x=0} = u_x|_{x=L} = 0, \\ u_y|_{y=0} = u_y|_{y=L} = 0. \end{cases}$$

$$(3.10) \quad u|_{x=0} = f_1(y, t)$$

Определим целевой функционал $J_1(q)$

$$(3.11) \quad J_1(q) = \int_0^T \int_0^L (u(0, y, t) - f_1(y, t))^2 dy dt$$

и получим выражение для градиента функционала $J'_1(q)$

$$\delta J_1 = J_1(q + \delta q) - J_1(q) = \langle J'_1 q, \delta q \rangle + o(\|\delta q\|)$$

Известно, что задача по нахождению условного экстремума $J_1(q)$ эквивалентна задаче на нахождение экстремума функции Лагранжа. Запишем функцию Лагранжа:

$$L(q) = J_1(q) + \int_0^T \int_0^L \int_0^L (u_{tt} - u_{xx} - u_{yy}) \Psi_1(x, y, t) dx dy dt,$$

где $\Psi_1(x, y, t)$ - множитель Лагранжа.

Поставим сопряженную задачу к задаче (3.9):

$$(3.12) \quad \begin{cases} \Psi_{1_{tt}} = \Psi_{1_{xx}} + \Psi_{1_{yy}}, & (x, y) \in \Omega, t \in (0, T), \\ \Psi_1|_{t=T} = 0, \quad \Psi_{1_t}|_{t=T} = 0, \\ \Psi_{1_x}|_{x=0} = 2(u(0, y, t) - f_1(y, t)), \quad \Psi_{1_x}|_{x=L} = 0, \\ \Psi_{1_y}|_{y=0} = \Psi_{1_y}|_{y=L} = 0. \end{cases}$$

Тогда учитывая (3.12) приращение функционала $\delta J_1(q)$ переписывается следующим образом

$$\begin{aligned} \delta J_1(q) &= \int_0^T \int_0^L \Psi_{1_x}(0, y, t) \delta u(0, y, t) dy dt = - \int_0^T \int_0^L \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} (\Psi_{1_x} \delta u) dx dy dt = \\ &= - \int_0^T \int_0^L \int_0^L (\Psi_{1_{xx}} \delta u + \Psi_{1_x} \delta u_x) dx dy dt. \end{aligned}$$

Распишем второй интеграл, применяя формулу интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L \int_0^L (\Psi_{1_x} \delta u_x) dx dy dt &= \int_0^T \int_0^L \left(\Psi_1 \delta u_x \Big|_0^L - \int_0^L \Psi_1 \delta u_{xx} dx \right) dy dt = \\ &= - \int_0^T \int_0^L \int_0^L \Psi_1 \delta u_{xx} dx dy dt. \end{aligned}$$

После несложных преобразований получим:

$$\delta J_1(q) = \int_0^L \int_0^L \delta q \Psi_{1_t}|_{t=0} dx dy + o(\|\delta q\|).$$

Доказательство см. в Приложении 2.

Тогда выражение для градиента функционала имеет следующий вид:

$$(3.13) \quad J'_1(q) = \Psi_{1_t}|_{t=0}.$$

Аналогичным образом получаем выражение для градиента функционала в случае обратных задач 2 и 3, т.е.

$$(3.14) \quad u|_{x=L} = f_2(y, t)$$

$$(3.15) \quad u|_{y=L} = f_3(x, t)$$

Тогда для обратной задачи 2 градиент функционала имеет вид

$$(3.16) \quad J'_2(q) = \Psi_{1_t}|_{t=0} - \Psi_{2_t}|_{t=0},$$

где Ψ_2 – решение следующей сопряженной задачи к задаче (3.9)-(3.10), (3.14):

$$\begin{cases} \Psi_{2_{tt}} = \Psi_{2_{xx}} + \Psi_{2_{yy}}, & (x, y) \in \Omega, t \in (0, T), \\ \Psi_2|_{t=T} = 0, \quad \Psi_{2_t}|_{t=T} = 0, \\ \Psi_{2_x}|_{x=0} = 0, \quad \Psi_{2_x}|_{x=L} = 2(u(L, y, t) - f_2(y, t)), \\ \Psi_{2_y}|_{y=0} = \Psi_{2_y}|_{y=L} = 0. \end{cases}$$

А для обратной задачи 3 градиент функционала принимает следующий вид:

$$(3.17) \quad J'_3(q) = \Psi_{1_t}|_{t=0} - \Psi_{2_t}|_{t=0} - \Psi_{3_t}|_{t=0},$$

где Ψ_3 – решение сопряженной задачи к задаче (3.9)-(3.10), (3.14)-(3.15):

$$\begin{cases} \Psi_{3_{tt}} = \Psi_{3_{xx}} + \Psi_{3_{yy}}, & (x, y) \in \Omega, t \in (0, T), \\ \Psi_3|_{t=T} = 0, \quad \Psi_{3_t}|_{t=T} = 0, \\ \Psi_{3_x}|_{x=0} = \Psi_{3_x}|_{x=L} = 0, \\ \Psi_{3_y}|_{y=0} = 0, \quad \Psi_{3_y}|_{y=L} = 2(u(x, L, t) - f_3(x, t)). \end{cases}$$

4. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Численные расчеты были проведены для случая двух пространственных переменных. В качестве пробного решения были рассмотрены две функции:

$$(4.1) \quad q_{T_1}(x, y) = 0.1 + \begin{cases} \frac{\cos 8y + 1}{4} \frac{\cos 8x + 1}{8}, & x, y \in \left(\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right) \times \left(\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right), \\ \frac{\cos 8y + 1}{4} \frac{\cos 8x + 1}{4}, & x, y \in \left(\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right) \times \left(\frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right), \\ \frac{\cos 8y + 1}{4} \frac{\cos 8x + 1}{8}, & x, y \in \left(\frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right) \times \left(\frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right) \end{cases}$$

$$(4.2) \quad q_{T_2}(x, y) = 0.1 + \frac{\cos 8y + 1}{4} \frac{\cos 8x + 1}{8},$$

$$x, y \in \left(\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right) \times \left(\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right)$$

На Рис. (4.1) приведены графики функций $q_{T_i}(x, y)$, $i = 1, 2$.

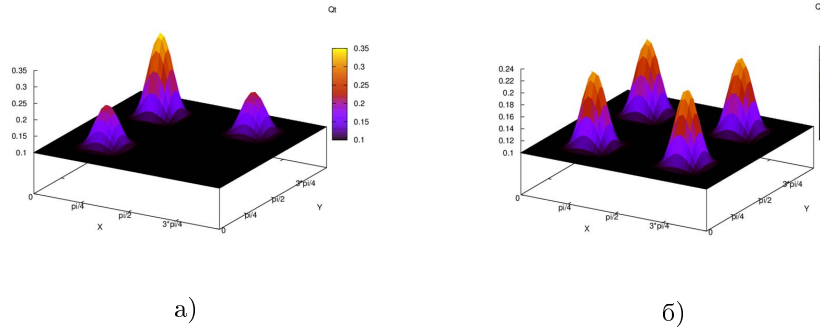


Рис. 4.1. Графики точных решений: а) $q_{T_1}(x, y)$, б) $q_{T_2}(x, y)$

В численных экспериментах сетка выбиралась с учетом условия Куранта устойчивости явной разностной схемы: $N_x = N_y = 50$, $N_t = 4800$, $L = T = \pi$. В случае метода простой итерации выбиралось $\alpha = 0,01$. Начальное приближение q_0 полагалось равным нулю.

Тест 1. Метод простой итерации (рис. (4.2) - (4.5)). Восстановление функции q_{T_1} , заданной формулой (4.1).

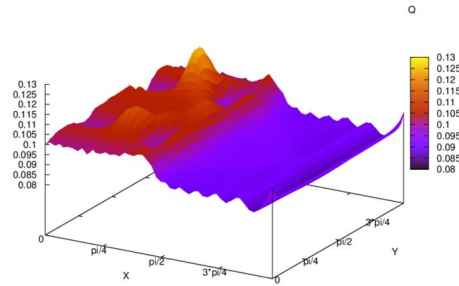


Рис. 4.2. График приближенного решения $q_k, k = 500$. Обратная задача 1: дополнительная информация задана на границе $x = 0$.

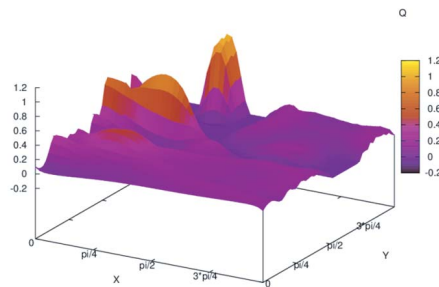


Рис. 4.3. График приближенного решения $q_k, k = 461$. Случай задания дополнительной информации на границе $y = L$.

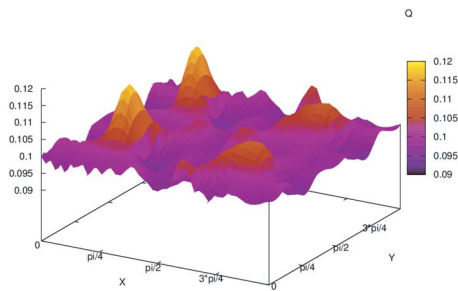


Рис. 4.4. График приближенного решения $q_k, k = 401$. Обратная задача 2: дополнительная информация задана на границах $x = 0$ и $x = L$.

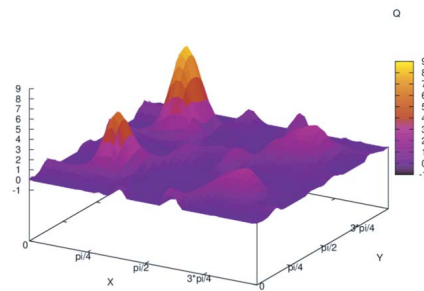


Рис. 4.5. График приближенного решения $q_k, k = 307$. Обратная задача 3: дополнительная информация задана на границах $x = 0, x = L$ и $y = L$.

При решении обратной задачи 1 восстанавливаются только те неоднородности, которые находятся близко к границе $x = 0$ (рис. (4.2)). Заметим, что данных измерения недостаточно для восстановления структуры решения (4.1). В случае измерения на границе $y = L$ также прослеживается частичное восстановление объектов, наиболее близких к границе, на которой производятся измерения (рис. (4.3)). Для обратной задачи 2 наблюдаются все три неоднородности (рис. (4.4)). В задаче 3 при добавлении к обратной задаче 2 еще одной дополнительной информации на границе $y = L$ размер неоднородностей восстанавливается лучше (рис. (4.5)).

Тест 2. Метод сопряженных градиентов (рис. (4.6) - (4.9)). Восстановление функции q_{T_1} , заданной формулой (4.1).

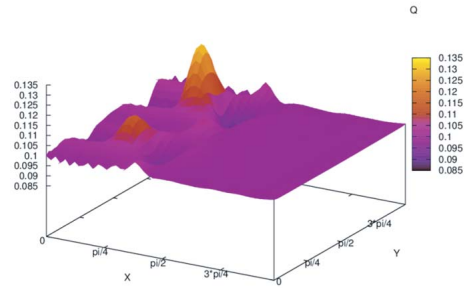


Рис. 4.6. График приближенного решения $q_k, k = 5$. Обратная задача 1: дополнительная информация задана на границе $x = 0$.

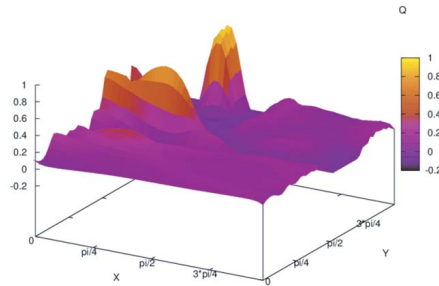


Рис. 4.7. График приближенного решения $q_k, k = 5$. Случай задания дополнительной информации на границе $y = L$.

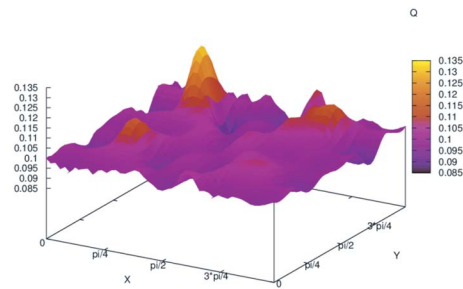


Рис. 4.8. График приближенного решения $q_k, k = 4$. Обратная задача 2: дополнительная информация задана на границах $x = 0$ и $x = L$.

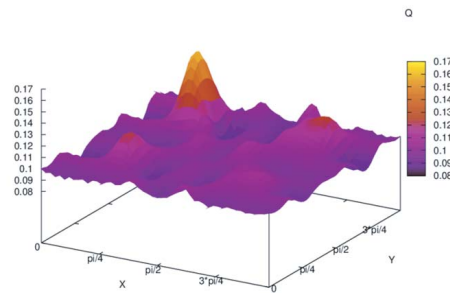


Рис. 4.9. График приближенного решения $q_k, k = 3$. Обратная задача 3: дополнительная информация задана на границах $x = 0, x = L$ и $y = L$.

При решении обратной задачи 1 восстанавливается только часть решения (4.1), лежащая близко к границе $x = 0$ (рис. (4.6)).

Отличие МСГ от МПИ заключается в количестве итераций (сравните рисунки (4.2) и (4.6)): если в МПИ восстановление решения с точностью $\|q_{T_1} - q_k\| \leq 0,47$ достигается за 500 итераций, то МСГ дает аналогичную точность всего лишь за 5 итераций (МСГ достигает цели в 100 раз быстрее). Аналогичный вывод можно сделать и для остальных тестов (рис. (4.7) - (4.9)).

Тест 3. Метод простой итерации (рис. (4.10) - (4.13)). Восстановление функции q_{T_2} , заданной формулой (4.2).

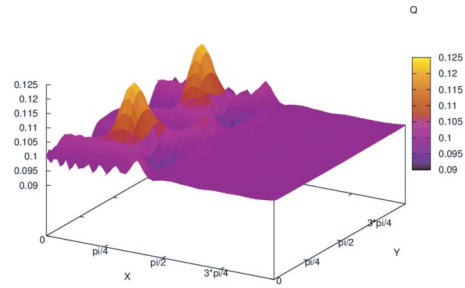


Рис. 4.10. График приближенного решения $q_k, k = 379$. Обратная задача 1: дополнительная информация задана на границе $x = 0$.

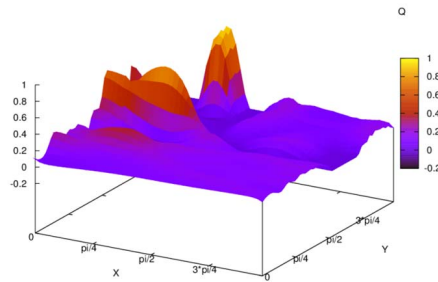


Рис. 4.11. График приближенного решения $q_k, k = 372$. Случай задания дополнительной информации на границе $y = L$.

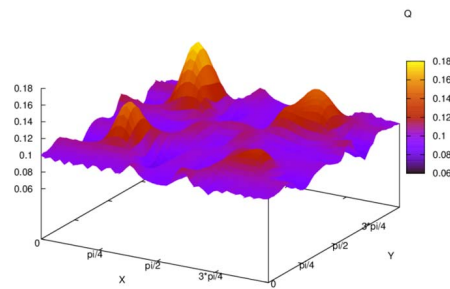


Рис. 4.12. График приближенного решения q_k , $k = 93$. Обратная задача 2: дополнительная информация задана на границах $x = 0$ и $x = L$.

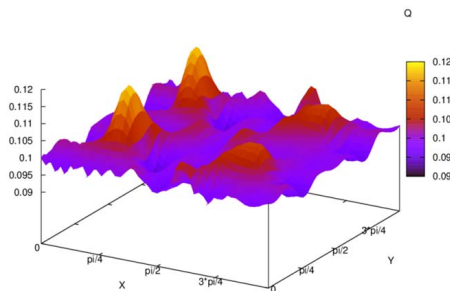


Рис. 4.13. График приближенного решения q_k , $k = 41$. Обратная задача 3: дополнительная информация задана на границах $x = 0$, $x = L$ и $y = L$.

Заметим, что как и в тесте 1 для обратной задачи 1 восстанавливаются только те неоднородности в области, которые находятся близко к соответствующим границам $x = 0$ (см. рис. (4.10)) и $y = L$ (см. рис. (4.11)). Для обратной задачи 2 наблюдаются все 4 неоднородности (см. рис. (4.12)). Однако ввиду недостатка дополнительной информации размер включений не соответствует действительности. При добавлении еще одного измерения на границе $y = L$ размер неоднородностей восстанавливается лучше (рис. (4.13)).

Тест 4. Метод сопряженных градиентов (рис. (4.14) - (4.17)). Восстановление функции q_{T_2} , заданной формулой (4.2).

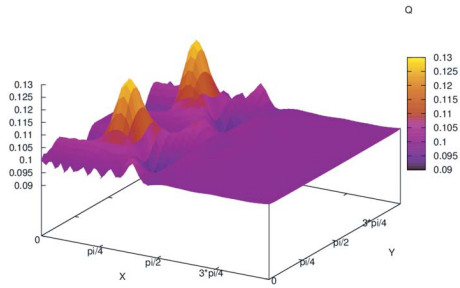


Рис. 4.14. График приближенного решения $q_k, k = 5$. Обратная задача 1: дополнительная информация задана на границе $x = 0$.

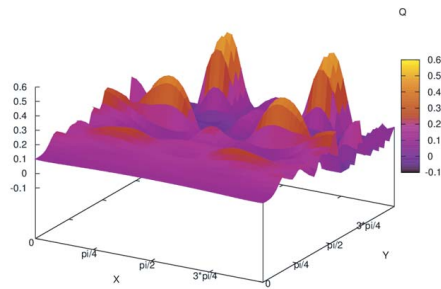


Рис. 4.15. График приближенного решения $q_k, k = 6$. Случай задания дополнительной информации на границе $y = L$.

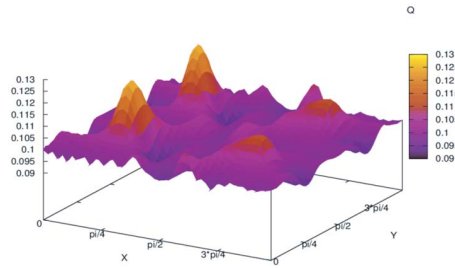


Рис. 4.16. График приближенного решения $q_k, k = 5$. Обратная задача 2: дополнительная информация задана на границах $x = 0$ и $x = L$.

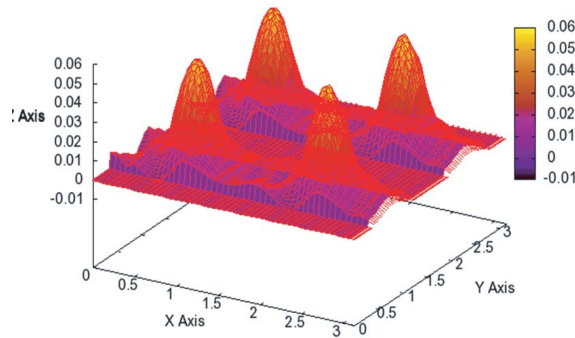


Рис. 4.17. График приближенного решения $q_k, k = 4$. Обратная задача 3: дополнительная информация задана на границах $x = 0, x = L$ и $y = L$.

При решении обратной задачи 1 восстанавливается только часть решения (4.2), лежащая близко к соответствующим границам $x = 0$ и $y = L$ (см. рис. (4.14) и (4.15)). В отличие от МПИ МСГ всего за 5 итерации достиг нужной точности ($\|q_{T_1} - q_k\| \leq 0,39$). Заметим также, что при решении обратной задачи 2 размер неоднородностей неточно восстановлен (наблюдаются также "шумы" в решении, рис. (4.16)). При добавлении измерения на границе $y = L$ (обратная задача 3) точность восстановленного решения наилучшая (рис. (4.17)).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена обратная задача определения начального условия начально-краевой задачи для волнового уравнения по дополнительной информации о решении прямой начально-краевой задачи, измеренной на границе исследуемой области. Основная цель работы – применение оптимизационных методов

(метода простой итерации (МПИ) и метода сопряженных градиентов (МСГ)), сравнительный анализ методов и исследование разрешающей способности обратной задачи в зависимости от количества и местоположения точек измерения дополнительной информации. Были рассмотрены три двумерных постановки (обратная задача 1,2 и 3). Для регуляризации задачи на первом этапе использовался проекционный метод, в соответствии с которым двумерная обратная задача сводилась к конечной системе одномерных обратных задач. Это позволило получить явный вид градиента J' целевого функционала и получить оценки скорости сходимости.

Решение двумерной обратной задачи получено на основе применения методов МПИ и МСГ. Приведены результаты численных расчетов. Показано, что МПИ на каждом шаге итерации уменьшает значение целевого функционала, однако, в силу некорректности обратной задачи разность между точным и приближенным решением обратной задачи сначала убывает, а затем начинает монотонно возрастать (см. рис. (5.2)). Это обстоятельство отражает регуляризующие свойства МПИ, в котором роль параметра регуляризации играет номер итерации k .

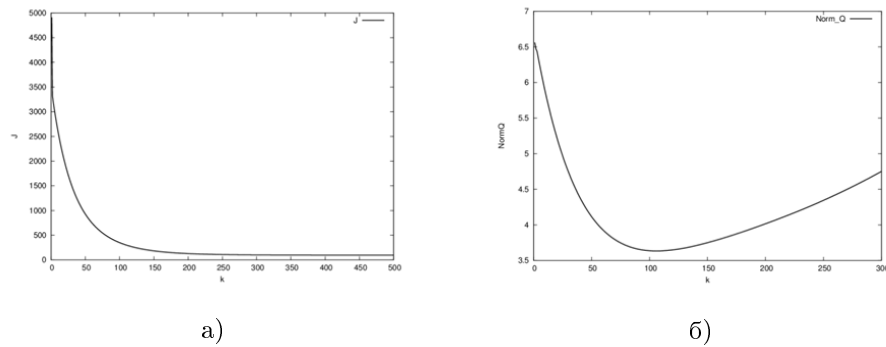


Рис. 5.1. МПИ: а) Функционал $J(q_k)$, б) $\|q_T - q_k\|$

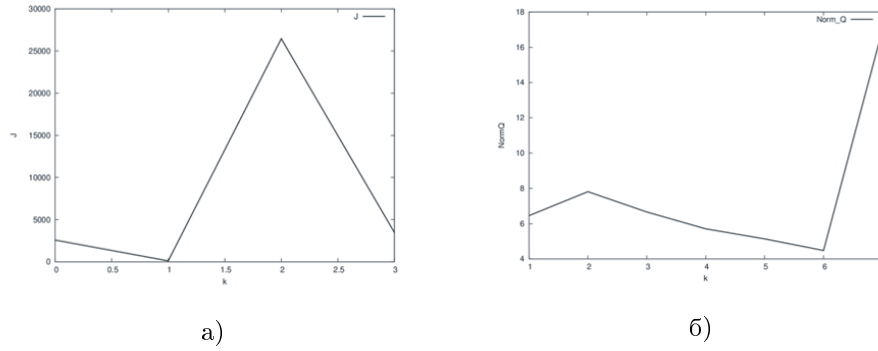
Показано, что МСГ обладает аналогичным свойством, но приближается к точному решению гораздо быстрее (в 10 - 100 раз). МСГ является намного более чувствительным, т.е. достигнув за небольшое количество шагов предельной точности, метод в дальнейшем может сравнительно быстро уклоняться от точного решения и приводить к росту целевого функционала.

Показано, что с увеличением количества дополнительной информации увеличивается разрешающая способность методов и появляется возможность различать такие неоднородности, которые являются невидимыми при уменьшении количества измеряемых функций.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1: ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ЦЕЛЕВОГО ФУНКЦИОНАЛА $J(q)$.

В п. 3.1.2 вводилось понятие оператора $A : \mathcal{L}(\Delta(T, L)) \rightarrow \mathcal{L}(\Delta(T, L))$, сопряженного оператора $A^* : \mathcal{L}^*(\Delta(T, L)) \rightarrow \mathcal{L}^*(\Delta(T, L))$, где $A^* : A^*\phi = \phi - B^*\phi$,

$$\langle BQ, \phi \rangle_{\mathcal{L}^*} = \langle Q, B^*\phi \rangle_{\mathcal{L}(\Delta(T, L))}, \|BQ\|_{\mathcal{L}^*}^2 = \|B_1Q\|_{L_2(0, L)}^2 + \|BQ\|_{\mathcal{L}(\Delta(T, L))}^2.$$

Рис. 5.2. МСГ: а) Функционал $J(q_k)$, б) $\|q_T - q_k\|$

Лемма 3. *Справедливы представления:*

$$(B_1^* \phi)(\xi, \tau) = \frac{k^2}{2} \int_{\tau+\xi}^L \phi_1(x) dx, \quad (\xi, \tau) \in \Delta(T, L),$$

$$(B_2^* \phi)(\xi, \tau) = k^2 \int_{\tau+\xi}^L \int_0^{\tau+x-\xi} \phi_2(x, t) dt dx + k^2 \int_{-\frac{1}{2}\tau + \frac{1}{2}(L+\xi)}^L \int_{\tau-x+\xi}^{L-x} \phi_2(x, t) dt dx +$$

$$+ k^2 \theta \left(\frac{1}{3}(L - \xi) - \tau \right) \int_{\xi}^{-\frac{1}{2}\tau + \frac{1}{2}(L+\xi)} \int_{\tau-x+\xi}^{\tau+x-\xi} \phi_2(x, t) dt dx, \quad (\xi, \tau) \in \Delta(T, L).$$

Доказательство.

Найдем выражение для $(B_1^* \phi)(\xi, \tau)$:

$$\begin{aligned} \frac{k^2}{2} \int_0^L \left(\int_0^x \int_{-x+\xi}^{x-\xi} Q_2(\xi, \tau) d\tau d\xi \right) \phi_1(x) dx &= k^2 \int_0^L \int_{\xi}^L \int_0^{x-\xi} Q_2(\xi, \tau) \phi_1(x) d\tau dx d\xi \\ &= k^2 \int_0^L \int_0^{L-\xi} Q_2(\xi, \tau) \left(\int_{\tau+\xi}^L \phi_1(x) dx \right) d\tau d\xi \\ &= \frac{k^2}{2} \int_0^L \int_{-L+\xi}^{L-\xi} Q_2(\xi, \tau) \left(\int_{\tau+\xi}^L \phi_1(x) dx \right) d\tau d\xi. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$(B_1^* \phi)(\xi, \tau) = \frac{k^2}{2} \int_{\tau+\xi}^L \phi_1(x) dx, \quad (\xi, \tau) \in \Delta(T, L).$$

Аналогично найдем выражение для $(B_2^* \phi)(\xi, \tau)$:

$$\begin{aligned}
 & \frac{k^2}{2} \int_0^L \int_{x-L}^{L-x} \left(\int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} Q_2(\xi, \tau) d\tau d\xi \right) \phi_2(x, t) dt dx = \\
 & = k^2 \int_0^L \int_0^x \int_0^{L-x} \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} Q_2(\xi, \tau) \phi_2(x, t) d\tau dt d\xi dx = \\
 & = k^2 \int_0^L \int_{\xi}^L \left[\int_{-x+\xi}^{x-\xi} Q_2(\xi, \tau) \left(\int_0^{\tau+x-\xi} \phi_2(x, t) dt \right) d\tau + \right. \\
 & \quad \left. + \int_{x-\xi}^{-2x+L+\xi} Q_2(\xi, \tau) \left(\int_{\tau-x+\xi}^{\tau+x-\xi} \phi_2(x, t) dt \right) d\tau \right] dx d\xi + \\
 & + k^2 \int_0^L \int_{\xi}^L \int_{-2x+L+\xi}^{L-\xi} Q_2(\xi, \tau) \left(\int_{\tau-x+\xi}^{L-x} \phi_2(x, t) dt \right) d\tau dx d\xi = \\
 & = 2k^2 \int_0^L \int_0^{L-\xi} Q_2(\xi, \tau) \left(\int_{\tau+\xi}^L \int_0^{\tau+x-\xi} \phi_2(x, t) dt dx \right) d\tau d\xi + \\
 & + 2k^2 \int_0^L \int_{\frac{1}{3}(L-\xi)}^{L-\xi} Q_2(\xi, \tau) \left(\int_{\xi}^{-\frac{1}{2}\tau+\frac{1}{2}(L+\xi)} \int_{\tau-x+\xi}^{\tau+x-\xi} \phi_2(x, t) dt dx \right) d\tau d\xi + \\
 & + 2k^2 \int_0^L \int_0^{L-\xi} Q_2(\xi, \tau) \left(\int_{-\frac{1}{2}\tau+\frac{1}{2}(L+\xi)}^L \int_{\tau-x+\xi}^{L-x} \phi_2(x, t) dt dx \right) d\tau d\xi.
 \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2: МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ.

Рассмотрим операторное уравнение

$$(5.1) \quad Aq = f$$

где $A: Q \rightarrow F$, Q, F - гильбертовы пространства. Будем искать решение уравнения (5.1) минимизируя функционал:

$$(5.2) \quad J(q) = \langle Aq - f, Aq - f \rangle = \|Aq - f\|^2$$

Теорема 2. [2] (гл. 2.6). Пусть $A: Q \rightarrow F$ - линейный непрерывный оператор, а решение уравнения (5.1) единственно. Тогда функционал $J(q)$ из (5.2) не может иметь более одной стационарной точки.

Пусть Ψ является классическим решением задачи (3.12).

Запишем выражение для приращения функции Лагранжа:

$$\delta L(q) = \delta J(q) + \int_0^T \int_0^L \int_0^L (\delta u_{tt} - \delta u_{xx} - \delta u_{yy}) \Psi(x, y, t) dx dy dt.$$

Для каждого слагаемого распишем интеграл, используя дважды формулу интегрирования по частям.

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L \int_0^L \delta u_{tt} \Psi(x, y, t) dx dy dt &= \int_0^L \int_0^L \left(\delta u_t \Psi|_0^T - \int_0^T \delta u_t \Psi_t dt \right) dx dy = \\ &= \int_0^L \int_0^L \left(\delta u_t|_{t=T} \Psi(x, y, T) - \delta u_t|_{t=0} \Psi(x, y, 0) - \delta u \Psi_t|_0^T + \int_0^T \delta u \Psi_{tt} dt \right) dx dy = \\ &= \int_0^L \int_0^L (\delta u_t|_{t=T} \Psi(x, y, T) - \delta u_t|_{t=0} \Psi(x, y, 0) + \\ &\quad + \delta u|_{t=0} \Psi_t|_{t=0} + \int_0^T \delta u \Psi_{tt} dt) dx dy. \\ \int_0^T \int_0^L \int_0^L \delta u_{xx} \Psi(x, y, t) dx dy dt &= \int_0^L \int_0^T \left(\delta u_x \Psi|_0^L - \int_0^L \delta u_x \Psi_x dx \right) dt dy = \\ &= \int_0^L \int_0^T \left(\delta u_x|_{x=L} \Psi(L, y, t) - \delta u_x|_{x=0} \Psi(0, y, t) - \delta u \Psi_x|_0^L + \int_0^L \delta u \Psi_{xx} dx \right) dt dy = \\ &= \int_0^L \int_0^T \left(\delta u|_{x=0} \Psi_x(0, y, t) - \delta u|_{x=L} \Psi_x(L, y, t) + \int_0^L \delta u \Psi_{xx} dx \right) dt dy. \\ \int_0^T \int_0^L \int_0^L \delta u_{yy} \Psi(x, y, t) dx dy dt &= \\ &= \int_0^L \int_0^T \left(\delta u|_{y=0} \Psi_y(x, 0, t) - \delta u|_{y=L} \Psi_y(x, L, t) + \int_0^L \delta u \Psi_{yy} dy \right) dt dx. \end{aligned}$$

В силу того, что Ψ удовлетворяет (3.12), получим

$$\delta J(q) = \int_0^T \int_0^L \Psi_x(0, y, t) \delta u(0, y, t) dy dt + \int_0^L \int_0^T [\delta u(0, y, t)]^2 dt dy.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R.A. Kruger, W.L. Kiser Jr., D.R. Reienecke, G.A. Kruger, *Application of thermoacoustic computed tomography to breast imaging*, Preprint, Indiana University Medical Center, 2001. <http://optosonic.com>.
- [2] С.И. Кабанихин, *Обратные и некорректные задачи*, Сибирское научное издательство, Новосибирск, 2008.
- [3] В.С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, издание 4, Наука, Москва, 1981. MR0653331
- [4] R.Courant, D.Hilbert, *Methods of mathematical physics: Volume II Partial Differential Equations*, A wiley-interscience publication, 1989. MR1013360
- [5] В.И.Смирнов, *Курс высшей математики*, т.2, Наука, Москва, 1974. MR0361650
- [6] А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов, *Теория функций комплексной переменной*, 6-е издание, ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2005.
- [7] И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, Москва, 1963.
- [8] С.К. Годунов, В.М. Гордиенко, *Сингулярные числа краевой задачи на полупрямой для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений*, Сибирский математический журнал, **4**, 1989. MR1017604
- [9] С.К. Годунов, *Лекции по современным аспектам линейной алгебры*, Научная книга, Новосибирск, 2002.
- [10] В.П. Михайлов, *Дифференциальные уравнения в частных производных*, Наука, Москва, 1976. MR0481380
- [11] В.Г. Романов, *О локальной разрешимости некоторых многомерных обратных задач для уравнений гиперболического типа*, Дифференциальные уравнения, **2**, Т. 25, С. 275-283, 1989. MR0994711
- [12] С.К. Годунов, А.Г. Антонов, О.П. Кирилук, В.И. Костин, *Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах*, Наука, Новосибирск, 1988. MR1215723
- [13] С.М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, Т.3, Наука, Москва, 1966.

ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГЕОФИЗИКИ СО РАН,
ул. ЛАВРЕНТЬЕВА 6,
630090, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ
E-mail address: kabanikhin@sscc.ru

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С.Л. СОБОЛЕВА СО РАН,
пр. КОПТЮГА 4,
630090, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ
E-mail address: mshishlenin@ngs.ru

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ,
ул. ПИРОГОВА 2,
630090, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ
E-mail address: krivorotko.olya@mail.ru