S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Труды второй международной молодежной школы-конференции
"Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач"
Часть I, стр. C.254–C.262 (2011)

УДК 512.5
MSC 13A99

МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ В ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

С. И. КАБАНИХИН, М. А. БЕКТЕМЕСОВ, Д. Б. НУРСЕИТОВ,
О. И. КРИВОРОТЬКО, А. Н. АЛИМОВА

Abstract. Dirichlet problem for 2D wave equation is considered. We investigate the N approximation of inverse problem and consider 1D finite system Dirichlet problems for 1D wave equation $Aq = f$. We apply Landweber iteration for numerical solution of optimization problem $J(q) = \langle Aq - f, Aq - f\rangle$. Numerical results are given.

Keywords: Dirichlet problem, wave equation, Landweber iteration.

Введение

В последнее время большое внимание уделяется исследованию некорректных задач, в том числе некорректных граничных задач для дифференциальных уравнений с частными производными. Это вызвано как запросами практики, так и чисто теоретическим интересом исследователей (см., например, работы [1, 2, 3, 4, 5]).

Корректность граничных задач для некоторых общих дифференциальных и дифференциально-операторных уравнений изучалась в работах А.А. Дезина, В.К. Романко, Н.И. Юрчука, В.М. Борок и других авторов. Много работ посвящено также изучению неклассических граничных задач для отдельных дифференциальных операторов с частными производными. В большинстве из этих работ выделяются случаи корректно поставленных задач. Однако граничные задачи с данными на всей границе области (как и ряд других задач)

Работа поддержана РФФИ (грант 11-01-00105), ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 гг. (ГК № 14.740.11.0350).

Поступила 28 декабря 2011 г., опубликована 30 декабря 2011 г.

для общих дифференциальных операторов с частными производными являются, вообще говоря, некорректными, а вопрос об их разрешимости во многих случаях связан с так называемой проблемой малых знаменателей. Наглядным примером сказанного является задача Дирихле для уравнения колебания струны, исследованию которой посвящено много работ как отечественных, так и зарубежных авторов.

Д. Боржин рассматривал [6] задачу Дирихле в прямоугольнике для уравнения затухающих колебаний струны, в которой хорошо прослеживается связь с теорией диофантовых приближений. Н.Н. Вахания распространил [7] результаты С.Л. Соболева на прямоугольники с рациональными значениями ρ, где ρ — это отношение сторон прямоугольника рассматриваемой области, а для произвольного иррационального ρ свел рассматриваемую задачу к задаче Дирихле для уравнения колебания струны.

К исследованию краевых задач для гиперболических уравнений привело изучение нестационарных задач для линейных систем дифференциальных уравнений, не разрешимых относительно старших производных по времени, начало теории которых было заложено в работах С.Л. Соболева [8, 9], выполненных в 1945 г. С основными результатами по теории задачи Дирихле для волнового уравнения можно ознакомиться в работах Р.А. Александряна [10], С.Г. Овсепяна [11, 12], Т.И. Зеленяка [13], М.В. Фокина [14, 15] и других авторов.

Отметим что задачи Дирихле для волнового уравнения возникает при изучении цунами. В это случае данными при $t = 0$ и при $t = T$ являются функции отклонения уровня воды от среднего значения.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу Дирихле для волнового уравнения в двумерном пространстве, которая заключается в определении волнового поля на поверхности водоема в случае, когда в определенный момент времени $t = 0$ на дне водоема произошло смещение почвы, описываемое финитной функцией $g(x, y) = u(x, y, 0)$. Предполагается, что через определенный промежуток времени $t = T$ измерена высота поднятия волны $f(x, y) = u(x, y, T)$. Предполагаем также, что за время T волна не успела дойти до берегов водоема, и, следовательно, на границе водоема можно поставить однородные граничные условия. Таким образом, приходим к следующей задаче Дирихле для волнового уравнения:

$$\begin{cases} c^{-2}(x)u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, \quad (x, y) \in \Omega,\, t \in (0, T); \\ u\,|_{t=0} = g(x, y), \quad u\,|_{t=T} = f(x, y); \\ u\,|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

где $\Omega = \{(x, y) \in R^2 \mid 0 < x < L_1, 0 < y < L_2\}$.

Задача (1.1), как известно, является некорректной [1].

Сформулируем некорректную задачу (1.1) как обратную по отношению к некоторой прямой (корректной) начально-краевой задаче для волнового уравнения

$$\begin{cases} c^{-2}(x)u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, \quad (x, y) \in \Omega,\, t \in (0, T); \\ u\,|_{t=0} = g(x, y), \quad u_t\,|_{t=T} = q(x, y); \\ u\,|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

где по заданной функции $q(x, y)$ надо определить функцию $u(x, y, t)$.

Пусть теперь $q(x,y)$ неизвестно. Предположим, что относительно решения прямой задачи (1.2) известна дополнительная информация:

$$u(x,y,T) = f(x,y). \tag{1.3}$$

Обратная задача заключается в определении функции $q(x,y)$ из соотношений (1.2) - (1.3) по заданным функциям $f(x,y)$, $g(x,y)$ и $c(x)$. В данной работе мы численно решим обратную задачу (1.2) - (1.3) методом итерации Ландвебера и приведем результаты численных расчетов.

2. Метод итерации Ландвебера

После разложения в ряд Фурье функций $u(x,y,t)$, $f(x,y)$, $g(x,y)$ и $q(x,y)$ по гармоникам $\sin\frac{2\pi k}{L_2}y$, обратная задача (1.2) - (1.3) сводится к последовательности одномерных обратных задач [16]:

$$\begin{cases} c^{-2}(x)u_{k\,tt} = u_{k\,xx} - \dfrac{4\pi^2}{L_2^2}k^2 u_k, & x\in(0,L_1), t\in(0,T) \\ u_k(x,0) = g_k(x), & u_{k\,t}(x,0) = q_k(x) \end{cases} \tag{2.1}$$

$$u_k(0,t) = u_k(L_1,t) = 0. \tag{2.2}$$

$$u_k(x,T) = f_k(x) \tag{2.3}$$

Здесь $k = 0,1,2,\ldots$.

Заметим, что если все рассматриваемые функции дважды дифференцируемы по y, то мы можем ограничиться рассмотрением конечного набора задач (2.1) - (2.3), учитывая известную для класса функций $\phi\in C^2$

$$\phi(y) = \sum_{n=0}^{\infty}\phi_n e^{iny}$$

оценку остатка ряда Фурье

$$\sum_{n=N}^{\infty}|\phi_n| \le \sum_{n=N}^{\infty}\frac{c}{n^2} \le \int\limits_N^{\infty}\frac{c}{x^2}\,dx = -\frac{c}{N}.$$

Определим отношение: $Aq_k = f_k$. На практике одним из наиболее распространенных методов регуляризации задач вида $Aq = f$ (где A может быть как компактным оператором, так и матрицей A_{mn}) являются градиентные методы минимизации функционала $J(q) = \langle Aq - f, Aq - f\rangle$. Рассмотрим один из таких методов - метод итерации Ландвебера решения уравнения $Aq_k = f_k$, который заключается в отыскании приближенного решения уравнения $Aq_k = f_k$ следующим способом:

$$q_{k_{n+1}} = q_{k_n} - \alpha J' q_{k_n}, \quad \alpha\in\left(0, \frac{1}{\|A\|^2}\right).$$

Определим целевой функционал $J(q_k)$

$$J(q_k) = \int\limits_0^{L_1}\left(u_k(x,T) - f_k(x)\right)^2 dx \tag{2.4}$$

и получим выражение для градиента функционала $J'(q_k)$, используемого в численных расчетах

$$\delta J(q_k) = J(q_k + \delta q_k) - J(q_k) \approx \langle J' q_k, \delta q_k \rangle$$

Таким образом, приращение функционала $\delta J(q_k)$ переписывается:

$$\delta J(q_k) = \int\limits_0^{L_1} (u_k(x,T) + \delta u_k(x,T) - f_k(x))^2\, dx - \int\limits_0^{L_1} (u_k(x,T) - f_k(x))^2\, dx =$$

$$= \int\limits_0^{L_1} 2(u_k(x,T) - f_k(x))\delta u_k(x,T)\, dx + \int\limits_0^{L_1} (\delta u_k(x,T))^2\, dx.$$

Здесь $\delta u_k(x,t)$ есть решение следующей возмущенной задачи:

$$\begin{cases} c^{-2}(x)\delta u_{k_{tt}} = \delta u_{k_{xx}} - \left(\dfrac{2\pi k}{L_2}\right)^2 \delta u_k, & x \in (0, L_1),\ t \in (0,T); \\ \delta u_k \mid_{t=0} = 0, \quad \delta u_{k_t} \mid_{t=0} = \delta q_k(x), \\ \delta u_k \mid_{x=0} = \delta u_k \mid_{x=L_1} = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

Известно, что задача по нахождению условного экстремума $J(q_k)$ эквивалентна задаче на нахождение экстремума функции Лагранжа. Запишем функцию Лагранжа:

$$L(q_k) = J(q_k) + \int\limits_0^T \int\limits_0^{L_1} \left(c^{-2}(x) u_{k_{tt}} - \left(u_{k_{xx}} - \left(\frac{2\pi k}{L_2}\right)^2 u_k \right) \right) \Psi_k(x,t)\, dx\, dt,$$

где $\Psi_k(x,t)$ – множитель Лагранжа. Тогда приращение функции Лагранжа $\delta L(q_k)$:

$$\delta L(q_k) = \delta J(q_k) + \int\limits_0^T \int\limits_0^{L_1} \left(c^{-2}(x) \delta u_{k_{tt}} - \left(\delta u_{k_{xx}} - \left(\frac{2\pi k}{L_2}\right)^2 \delta u_k \right) \right) \Psi_k(x,t)\, dx\, dt,$$

Поставим сопряженную задачу к задаче (2.1) - (2.2):

$$\begin{cases} c^{-2}(x)\Psi_{k_{tt}} = \Psi_{k_{xx}} - \left(\frac{2\pi k}{L_2}\right)^2 \Psi_k, & t \in (0,T),\ x \in (0, L_1), \\ \Psi_k|_{t=T} = 0, \ \ \Psi_{k_t}|_{t=T} = 2c^2(x)(u_k(x,t) - f_k(x)), \\ \Psi_k|_{x=0} = \Psi_k|_{x=L_1} = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Тогда после некоторых преобразований приращение функционала $\delta J(q_k)$ имеет вид:

$$\delta J(q_k) = -\int\limits_0^{L_1} c^{-2}(x) \Psi_k(x,0) \delta q_k(x)\, dx$$

откуда градиент функционала $J'(q_k)$

$$J'(q_k) = -c^{-2}(x)\Psi_k(x,0). \tag{2.7}$$

3. Дискретизация обратной задачи

Пусть N_t - количество узлов равномерной сетки по переменной t на интервале $(0, T)$. Выберем количество узлов неравномерной сетки по переменной x из условия $h_x = h_t c(x)$. Шаг по времени $h_t = \frac{T}{N_t}$. Обозначим через $a_k = h_t \dfrac{2\pi}{L_2} k$.

Используя явную разностную схему второго порядка аппроксимации, получим дискретную задачу

$$\begin{cases} u_{k_i}^{j+1} = u_{k_{i+1}}^j + u_{k_{i-1}}^j - c_i^2 a_k^2 \left(u_{k_{i+1}}^j + u_{k_{i-1}}^j \right) - u_{k_i}^{j-1}, \\ u_{k_i}^0 = g_{k_i}, \quad u_{k_i}^1 = h_t q_{k_i} + \dfrac{u_{k_{i+1}}^0 + u_{k_{i-1}}^0}{2} - \dfrac{c_i^2 a_k^2}{2} \dfrac{u_{k_{i+1}}^0 + u_{k_{i-1}}^0}{2} \\ u_{k_0}^j = u_{k_{N_x}}^j = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

$$u_{k_i}^{N_t} = f_i \tag{3.2}$$

4. Численные эксперименты

Задача (1.2) была решена в приближении мелкой воды, т.е. $c(x) = \sqrt{gH(x)}$, где $g = 9,8$ - ускорение свободного падения, $H(x)$ - батиметрия рассматриваемой области. Пусть

$$c(x) = \frac{1}{\frac{9\beta}{10L_1^2}x^2 - \beta}, \quad \beta = 5.$$

Тогда для обратной задачи (1.2) - (1.3) в качестве начальных данных задается батиметрия дна $H(x)$:

$$H(x) = \frac{1}{g\left(\frac{9\beta}{10L_1^2}x^2 - \beta\right)^2}.$$

В качестве пробного решения была рассмотрена функция:

$$q_T(x, y) = \sum_{k=1}^{N} q_{T_k}(x) \sin \frac{2\pi k}{L_2} y, \quad x \in \left(\frac{19\pi}{20}, \frac{21\pi}{20} \right), \, y \in \left(\frac{3\pi}{10}, \frac{7\pi}{10} \right), \tag{4.1}$$

$$\text{где } q_{T_k} = \int_0^{L_2} \frac{\cos 20x + 1}{20} \frac{\sin 5y + 1}{5} \sin \frac{2\pi k}{L_2} y \, dy.$$

График пробного решения (4.1) изображен на рисунке 4.1.

В качестве известной функции $g(x, y)$ задачи (1.2) была рассмотрена функция:

$$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\cos 10x + 1}{20} \dfrac{\sin 5y + 1}{5}, & x, y \in \left(\dfrac{7\pi}{10}, \dfrac{9\pi}{10} \right) \times \left(\dfrac{7\pi}{10}, \dfrac{11\pi}{10} \right), \\ \dfrac{\cos 10x + 1}{30} \dfrac{\sin 5y + 1}{5}, & x, y \in \left(\dfrac{11\pi}{10}, \dfrac{13\pi}{10} \right) \times \left(\dfrac{7\pi}{10}, \dfrac{11\pi}{10} \right) \end{cases} \tag{4.2}$$

График функции $g(x, y)$ (4.2) изображен на рисунке 4.2.

В численных экспериментах были решены методом итерации Ланвебера $N = 80$ обратных задач (2.1) - (2.3) для каждого коэффициента Фурье, дискретизированные на адаптивную сетку (см. п. 3): $N_x = 750, N_y = 250, N_t = 300$, в области: $L_1 = L_2 = 2\pi, T = 10$. Параметр оптимизации выбирался $\alpha = 0,01$. Начальное приближение q_{k_0} полагалось равным нулю, $k = 1, \ldots, N$.

Количество итераций определялось условие минимальности нормы $\|q_T - q\|$.

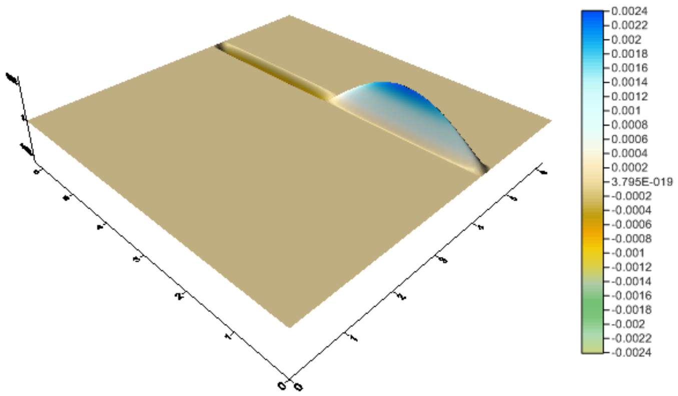

Рис. 4.1. Точное решение $q_T(x, y)$.

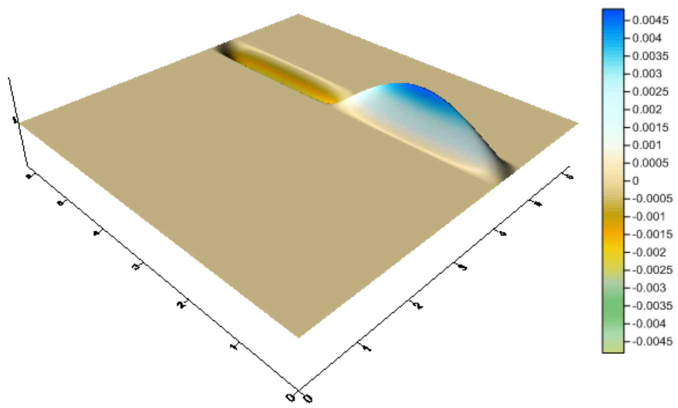

Рис. 4.2. Начальная функция $g(x, y)$.

Тогда восстановленная скорость распространения возмущения $q(x, y)$ имеет вид, показанный на рис. 4.5.

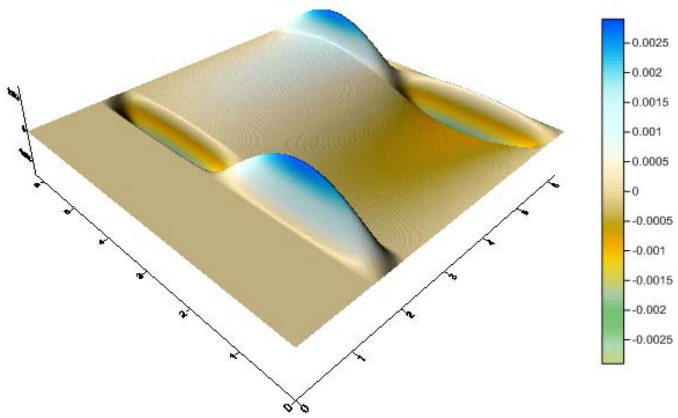

Рис. 4.3. Свободная поверхность $u(x,y,T) = f(x,y)$ при $T =$ 10 с ошибкой в измерениях 20%.

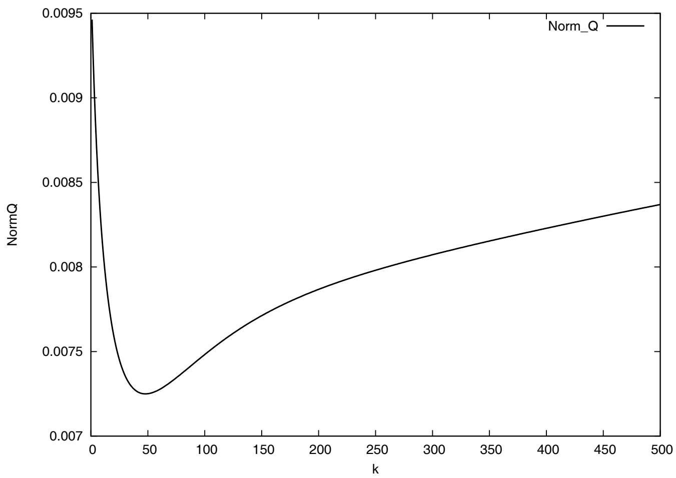

Рис. 4.4. Норма $\|q_T - q\|$, которая достигает минимума при $k = 50$.

Отметим, что при подходе к границе $x = 0$ амплитуда волны увеличивается, что поддается физическому объяснению ввиду задания батиметрии $H(x)$. Заметим также, что даже при зашумленных данных (ошибки достигали в правых частях до 50%) решение (4.1) восстанавливается с незначительной погрешностью $\|q_T - q\| \simeq 0,0072$, которая не влияет на характер решения.

Список литературы

[1] *С.И. Кабанихин, М.А. Бектемесов, А.Н. Алимова.* Итерационный метод решения задачи Дирихле для волнового уравнения. // Вестник КазНПУ, Серия "физико-математические науки", 2010, №1(29), С.121-125.

[2] *В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана.* Теория линейных некорректных задач и ее применения. // М: Наука, 1978. MR0511653

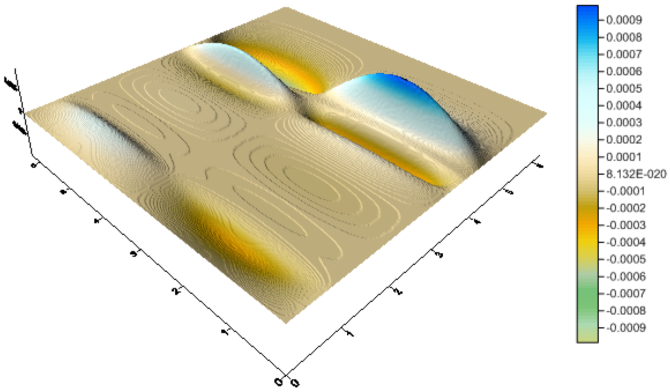

Рис. 4.5. Восстановленное решение $q(x, y)$ с ошибкой в измерениях 20%.

[3] *М.М Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский.* Некорректные задачи математической физики и анализа. // Новосибирск: Наука Сиб. отд-ние, 1980. MR0591674

[4] *А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин.* Методы решения некорректных задач. // Москва: Наука, 1974. MR0455366

[5] *L.E. Payne.* Improperly posed problem in pertial differential equations N 22.— // Philadelphia (Pa), Soc. Ind. and Appl. Math., № 22, 1975. — 76 p. MR0463736

[6] *D.G. Bourgin.* The Dirichlet problem for the damped wave equation. // Duke Math. J., 1940, N 7, p. 97—120.

[7] *Н.Н. Вахания.* Об одной краевой задаче с данными на всей границе для гиперболической системы, эквивалентной уравнению колебания струны. // Докл. АН СССР, 1957, 116, № 6, с. 906—909.

[8] *С.Л. Соболев.* Об одной новой задаче математической физики. // Изв. АН СССР. Сев. мат., 1954, 18, № 1, с. 3—50.

[9] *С.Л. Соболев.* О движении симметрического волчка с полостью, наполненной жидкостью. // Прикл. механика и техн. физика, 1960, № 3, с. 20—55.

[10] *Р.А. Александрян.* Исследование спектральных свойств операторов, порожденных системами дифференциальных уравнений типа С.Л. Соболева: Автореф.дис. ... д-ра физ.-мат. наук. // Москва, 1962. 15 стр.

[11] *С.Г. Овсепян.* Об эргодичности непрерывных автоморфизмов и о единственности решения задачи Дирихле для уравнения струны. // II Изв. АН АрмССР. Математика. 1967, 2, № 3, с. 195—209.

[12] *С.Г. Овсепян.* Построение порождающего множества и обобщенных собственных функций задачи Дирихле для уравнения колебания струны в классе измеримых функций. // II Изв. АН АрмССР. Математика. 1969, 4, № 3, с. 102—121.

[13] *Т.И. Зеленяк.* Избранные вопросы качественной теории уравнения с частными производными. // Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1970. 164 с.

[14] *Т.И. Зеленяк, М.В. Фокин.* О некоторых качественных свойствах решений уравнений С.Л. Соболева. // В кн.: Теория кубатурных формул и приложение функционального анализа к некоторым задачам математической физики. Новосибирск: Наука, 1973, с. 121—124.

[15] *М.В. Фокин.* О задаче Дирихле для уравнения колебания струны. // В кн.: Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск, 1981, с. 178—182.

[16] *С.И. Кабанихин, О.И. Криворотько.* Исследование обратной задачи термоакустики методом сингулярного разложения. // Сибирские электронные математические известия (принята в печать), 2011.

[17] *С.И. Кабанихин.* Обратные и некорректные задачи. // Сибирское научное издательство, Новосибирск, 2008.

[18] *В.С. Владимиров.* Уравнения математической физики. // Издание 4, Наука, Москва, 1981. MR0653331

[19] *С.К. Годунов, В.М. Гордиенко.* Сингулярные числа краевой задачи на полупрямой для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. // Сибирский математический журнал, **4**, 1989. MR1017604

[20] *С.К. Годунов, А.Г. Антонов, О.И. Кирилюк, В.И. Костин.* Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах. // Новосибирск: Наука, 1992. MR1215723

[21] *S.I. Kabanikhin, I.V. Marinin, O.I. Krivorotko, V. Komarov, A. Karas, D. Khidasheli.* New methods of earthquakes and tsunami sources determining, simulation, modeling and visualization. // World forum "Natural cataclysm and global problems of the modern civilization" GEOCATACLYSM-2011, Istanbul, September, 2011.

Кабанихин Сергей Игоревич
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
пр. Лаврентьева 6,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: kabanikhin@sscc.nsc.ru

Бектемесов Мактагали Абдимажитович
Казахский национальный педагогический университет им. Абая,
Алматы, Казахстан
E-mail address: maktagali@mail.ru

Нурсеитов Данияр Борисович, Алимова Анель Нурданбековна
Казахский национальный технический университет им. К.И. Сатпаева,
Алматы, Казахстан
E-mail address: ndb80@mail.ru, anic2002@mail.ru

Криворотько Ольга Игоревна
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: krivorotko.olya@mail.ru