МИНИМАЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ И ДРУГИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ГИПЕРСЕТЯМИ

В. К. Попков, А. С. Гаврилов

Институт вычислительной математики и математической геофизики,
630090, Новосибирск, Россия

УДК 519.173

Рассматривается ряд операций над гиперсетями с целью создания квазиалгоритмического языка программирования алгоритмов для решения различных задач в теории гиперсетей.

Ключевые слова: граф, гиперсеть, операции над графами и гиперсетями, математическое и имитационное моделирование.

Basic manipulations on hypernetworks for soft-wiring quasialgorithmic language creation to solve various problems in hypernetworks theory are considered.

Key words: graph, hypernetwork, graph and hypernetwork operation, mathematical and imitation simulation.

Введение. В работе [1] рассмотрены различные операции над гиперсетями, в [2] описано множество операций над графами. Там же показано, что многие алгоритмы решения задач на графах и сетях могут быть представлены в виде суперпозиции различных операций. Следовательно, в данном случае можно существенно автоматизировать программирование, добившись более эффективного решения за счет тщательной проработки модулей, соответствующих различным операциям. Аналогичные результаты можно получить для гиперсетей. Кроме того, реализация операций над гиперсетями позволит создать эффективную систему управления базами данных на основе применения иерархических гиперсетей. Одной из наиболее важных операций является операция превращения псевдогиперсети в гиперсеть путем вложения вторичной сети в первичную, при этом множество вершин в первичной и вторичной сетях остается неизменным.

1. Минимальные реализации. Пусть задано множество графов $G_0, G_1, ..., G_k$ и дерево вида $T_0 = \{G_0(G_1(G_2, G_3), G_4(G_5), ...)\}$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & G_2 \arrow[dl] \\
 & G_1 \arrow[dl] & \\
T_0 : G_0 & & G_3 \arrow[ul] \\
 & G_4 \arrow[ul] & G_5..., \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

определяющее вложение графов G_i друг в друга и тем самым определяющее иерархическую гиперсеть $H(G_0(G_1(G_2, G_3), G_4(G_5), ...))$ (скобочная запись гиперсети). Если известна нумерация графов G_i и вершины этих графов принадлежат множеству $X \subset G_0(X, V)$, то для однозначного определения гиперсети потребуется задать отображения ребер G_i в ребра G_j согласно плану, задающему дерево T_i $(i < j)$. Пусть каждой ветви $v_i \in V \subset G_0(X, V)$ сопоставлен вес $S(v_i)$ (длина, стоимость и т. д.). Тогда возможны два способа минимальной реализации вложений T_0 в иерархическую гиперсеть H.

Первый способ (А-реализация) заключается в реализации каждого ребра u_l^i в графе G_j по кратчайшему пути (путь с минимальным весом). При таком подходе важен порядок вложения, поскольку вес вкладываемого ребра полностью определяется весами ребер графа, в который вкладывается исходный граф.

Таким образом, при первом способе минимизируется суммарный вес ребер всех реализованных графов $\{G_i\}, i = 1, \ldots, k$:

$$\Psi(H^*) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{l}^{m_i} l(u_l^i) \to \min. \tag{1}$$

Здесь H^* — гиперсеть при минимальной реализации ребер из графа G_i согласно вложениям, определенным деревом T_0; $l(u_l^i)$ — длина реализованного в графе G_i $(j > i)$ ребра u_l^i, равная соответствующей ребру u_l^i сумме длин ребер, входящих в цепь.

Нетрудно показать, что минимум (1) достигается при последовательной минимальной реализации графов $\{G_i\}$ друг в друге согласно схеме T_0.

Второй способ (минимальная В-реализация) имеет экспоненциальную сложность, эта задача, по крайней мере, NP-полная [3]. Основная особенность состоит в том, что при В-реализации учитываются не только длины ребер вторичных сетей, но и веса ветвей первичной сети, которые учитываются только один раз и только в том случае, если по данным ветвям проходят (инциденты) ребра вторичных сетей. Очевидно, что на минимальную В-реализацию влияют не только вложения вторичных сетей первого уровня, но и дальнейшие вложения, реализованные на ребрах графов, уже уложенных в первичную сеть. Как и в первом способе, учитываются веса очередных вторичных сетей и часть весов ребер, участвующих во вложении.

Пусть каждому ребру u_l^i графа G_i сопоставлен удельный вес ребра — число $c(u_l^i)$, а $l_l^i(u_l^i)$ — длина ребра графа G_i, уложенного в графе G_l. Тогда вес ребра в графе G_i равен

$$s_l^i(u_j^i) = C(u_j^i)\, l_l^i(u_j^i).$$

Общий вес укладки G_i в G_l равен

$$S_l^i(G_i, G_l) = \sum_{j \in J_{G_i}} S_l^i(u_j^i) + \sum_{j \in J^*} S_k^l(u_j^l)$$

(J^* — множество индексов ребер графа G_i, в которые укладывались ребра из графа G_i).

Следовательно, вес всей реализации T_0 равен

$$S(T_0) = \sum_{i,l \in J_{T_0}} S(G_i, G_l), \tag{2}$$

где $i<l$ и любая пара i, l значится в T_0.

Несложно показать, что минимальная В-реализация зависит от укладки графов одновременно на всех уровнях. При этом укладка на нижних уровнях влияет на укладки на верхних уровнях, обратное неверно.

Для получения приближенного решения можно использовать градиентный метод, корректируя решение, найденное для задачи, сформулированной в описании первого метода.

2. Исследование некоторых операций над гиперсетями. Сначала рассмотрим более простые операции, аналогичные операциям над графами, а затем перейдем к операциям с гиперсетями.

2.1. *Теоретико-множественные операции.* Ниже рассмотрены операции, относящиеся к классу теоретико-множественных операций, которые, несмотря на их простоту, целесообразно использовать при исследовании агрегированных систем сетевой структуры.

Объединение и пересечение. При решении прикладных задач нередко возникает необходимость рассматривать объединение систем с целью их совместного исследования. Пересечение также является важным объектом структурного анализа систем.

Определение 1. Пусть $G = (X, F)$ и $H{=}(Y,E)$ — произвольные подграфы некоторого полного графа. Граф $L{=}(Z,U)$ называется объединением графов G и H $(L = G \cup H)$, если $Z = X \cup Y,\ U = F \cup E$.

Пусть даны две простые неориентированные гиперсети $S_1 = (X, V, R)$ и $S_2 = (Y, U, E)$, причем PS_1 и PS_2 — подграфы некоторого полного графа. Определим операцию объединения гиперсетей.

Определение 2. Гиперсеть $S{=}(Z,W,L)$ называется объединением гиперсетей S_1 и S_2 $(L = G \cup H)$, если $Z = X \cup Y,\ W = V \cup U$, $L = R \cup E$.

Каждому ребру из L должен соответствовать маршрут, соответствовавший ему в одной из первичных сетей S_1 или S_2 (либо в обеих, если он совпадал).

Рассмотрим операцию пересечения.

Определение 3. Граф $L = (Z, U)$ называется пересечением графов G и H $(L = G \cup H)$, если $Z = X \cap Y$, $U = F \cap E$.

Определение 4. Гиперсеть $S = (Z, W, L)$ называется пересечением гиперсетей S_1 и S_2 $(L = G \cap H)$, если $Z = X \cap Y$, $W = V \cap U$, $L = R \cap E$.

Возможно следующее требование исключения “опустевших” ветвей: если для некоторой ветви в S_1 или S_2 (либо в обеих этих сетях) существовало хотя бы одно инцидентное ребро, но после выполнения операции пересечения за счет сокращения ребер оно исчезло, то эту ветвь можно исключить из множества W результирующей гиперсети. Аналогично исключим ветви, совпадающие в обеих гиперсетях и первоначально не имеющие инцидентных ребер.

Определение 5. Гиперсеть $S = (Z, W, L, P, F)$ называется исключающим пересечением гиперсетей S_1 и S_2 $(L = G \cap H)$, если $Z = X \cap Y$, $W = (V \cap U)/W^0$, $L = R \cap E$, где $W^0 = \{v \in (V \cap U)|\ \forall r \in L,\ v \notin F[r]\}$.

Дополнение и разность. Данная операция представляет интерес в том случае, когда в качестве первичной сети требуется использовать некоторое метрическое пространство.

Определение 6. Дополнением суграфа $L = (Z, U)$ до полного графа $Q = (P{,}S)$ называется граф $\bar{L} = (P, M)$, в котором $P = Z$, $M = S/U$, т. е. две вершины в $\bar{L}$ смежны тогда и только тогда, когда они несмежны в L.

Данную операцию целесообразно применять лишь для первичной сети, так как для реберной связности нужно добавить очень большое количество ребер, причем неясно, каким образом нужно трассировать их по ветвям. Следовательно, применительно к данной операции можно говорить только о v-дополнении гиперсети, которое является графом. Так как разность графов G и L может быть представлена в виде $R = G/L = G \cap \bar{L}$, то подобные утверждения применимы и к операции взятия разности.

2.2. *Алгебраические операции.* Рассмотрим более сложный тип операций, когда множество вершин определяется не как сумма, а как произведение аргументов. Пусть заданы конечные неориентированные графы $G = (V, E)$ и $H = (Y, F)$. Для алгебраических операций множе-

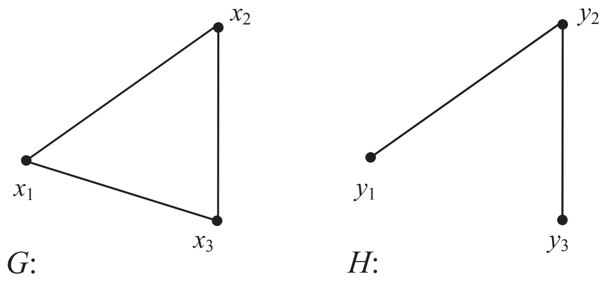

Рис. 1. Простые графы

ство вершин результирующего графа $L = (X, U)$ определяется декартовым произведением $X = V \times Y$.

Параллельное произведение. Рассмотрим операцию параллельного произведения.

Определение 7. Граф L называется произведением графов G и H $(L = G \times H)$, если $L[(v, y)] = G[v] \times H[y]$, где $v \in V$; $y \in Y$; $(v, y) \in X$; запись $G[v]$ обозначает окрестность вершины в соответствующем графе.

Далее рассматриваются только графы, для которых любая пара вершин либо несмежна, либо инцидентна единственному ребру. Алгоритм представления матрицы смежности результирующего графа L через матрицы смежности его множителей вполне очевиден. Для удобства будем считать диагональные элементы нулевыми.

Пусть $A_G = \{a_{i,j}\}$ и $B_H = \{b_{k,l}\}$ — матрицы смежности графов-множителей размерности m и n соответственно. Следовательно, размерность результирующей матрицы $C_L = \{c_{(i,k)(j,l)}\}$ равна $h = m \times n$. Тогда $c_{(i,k)(j,l)} = a_{i,j} \times b_{k,l}$.

На рис. 1 приведены примеры несложных графов.

Составим матрицы смежности:

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда матрица графа-произведения имеет следующий вид:

$$C_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Полученный граф представлен на рис. 2.

Перенося данную операцию на гиперсети, можно заметить, что приведенные выше рассуждения применимы к первичной и вторичной сетям по отдельности. Такой подход лишен смысла, поскольку гиперсеть — более сложный объект, чем совокупность двух графов. Необходимо ввести дополнительные составляющие данной операции.

Рассмотрим несложные гиперсети, представленные на рис. 3. На рис. 3 показано отношение инциденции. Множеством вершин гиперсети-произведения S можно считать декартово произведение $X \times Y$. Структуру первичной сети в целом будем рассматривать как произведение первичных сетей гиперсетей-сомножителей, выполненное по правилу перемножения графов. Данная структура идентична графу, показанному на рис. 2. Таким образом, получено соответствие множества вершин гиперсети S паре множеств вершин S_1 и S_2.

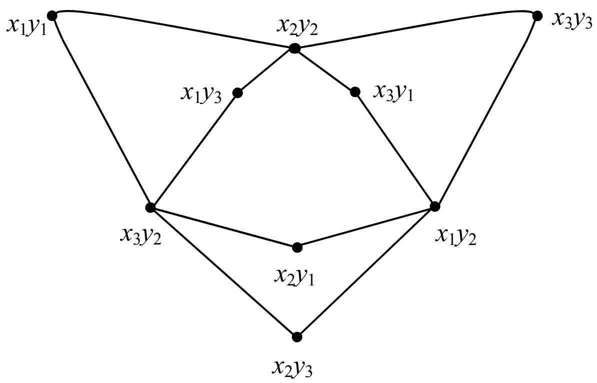

Рис. 2. Произведение графов

Рассмотрим соответствие ветвей. Сопоставление ветви некоторой смежной пары (x_iy_k, x_jy_l) двум ветвям $v_{ij} = (x_i,\, x_j)$, $u_{kl} = (y_k,\, y_l)$ проводится аналогично, полученную ветвь обозначим парой $(v_{ij},\, u_{kl})$. Однако, если аналогично сопоставить ветвь с парой вершин для другой ветви $(x_iy_l,\, x_jy_k)$, то, учитывая неориентированность рассматриваемых гиперсетей, получим одинаковые обозначения разных ветвей. Этого можно избежать, введя временно ориентацию исходных гиперсетей. При этом неважно, каким образом это будет сделано, главное — фиксировать это изначально, а в дальнейшем учитывать, что ориентация ребер должна совпадать с ветвями. Тогда для пар (x_iy_k, x_jy_l) имеем ветвь (v_{ij}, u_{kl}), для пар (x_iy_l, x_jy_k) — ветвь $(v_{ij}, \tilde{u}_{kl})$.

Заметим, что $(\bar{v}_{ij}, u_{kl})$ и $(v_{ij}, \tilde{u}_{kl})$ — одна ветвь результирующей гиперсети. Например, если ветвь между вершинами x_1y_1 и x_2y_2 обозначить $(v_1,\, u_1)$, то для вершин x_2y_1 и x_1y_2 инцидентной им ветвью будет $(v_1, \tilde{u}_1)$ (см. рис. 2).

Осталось определить реберную связанность. Если оперировать с реберной окрестностью вершин так же, как с ветвями, возникает неопределенность укладки ребер в ветви. Чтобы избежать этого, определим понятие $(k-r)$-окрестности.

Определение 8. Вершины x_i и x_j $(k-r)$-смежны, если и только если существует ребро длиной k, инцидентное им обеим.

Таким образом, все ребра разделены в зависимости от длины. Для каждого k определим окрестности вершин искомой гиперсети по правилу перемножения графов. Допустим, существуют две $(k-r)$-смежные вершины x_0y_0, x_ky_k и инцидентное им ребро (r, e) длиной k. Таким образом, если вершины x_0 и x_k связывал маршрут $F_1[r] = \{x_0, v_1, x_1, v_2, \ldots, v_k, x_k\}$, а y_0 и y_k — маршрут $F_2[e] = \{y_0, u_1, y_1, u_2, \ldots, u_k, y_k\}$, то $F[(r, e)] = \{(x_0y_0), (v_1u_1), \ldots, (v_ku_k), (x_ky_k)\}$. При этом, как и в случае с ветвями, может возникнуть ситуация, когда разным ребрам

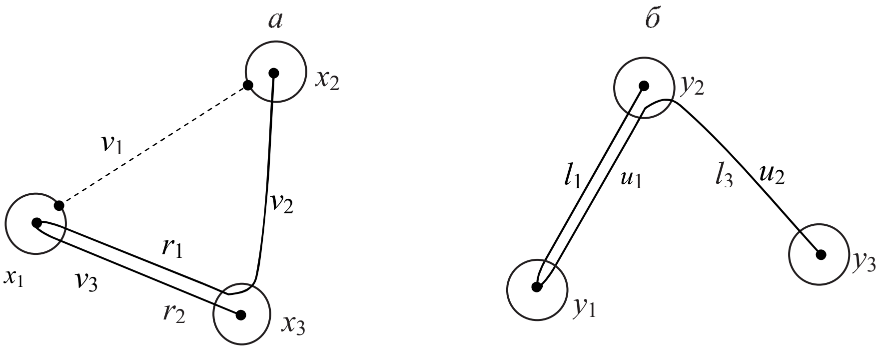

Рис. 3. Гиперсети $S_1 = (X, V, R)$ (*а*) и $S_2 = (Y, U, E)$ (*б*)

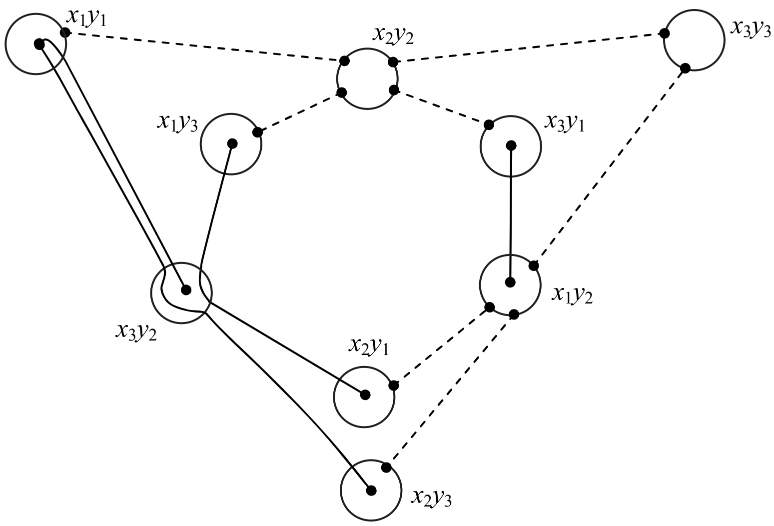

Рис. 4. Параллельное произведение гиперсетей

приписываются одинаковые обозначения. Исключить ее можно тем же способом. Перемножив по указанному правилу S_1 и S_2, получим гиперсеть, показанную на рис. 4.

Возможны другие варианты перемножения гиперсетей без распараллеливания ребра по длине. Обобщив приведенные выше рассуждения, введем операцию параллельного произведения гиперсетей.

Определение 9. Параллельным произведением $S = S_1 \times_p S_2$ гиперсетей $S_1 = (X, V, R, P_1, F_1)$ и $S_2 = (Y, U, E, P_2, F_2)$ называется гиперсеть $S = (Z, W, L, P, F)$, такая что:

1) $Z = X \times Y, \quad W = (V \times U) \cup (V \times \tilde{U})$;

2) $x \in P_1[v]$ и $y \in P_2[u] \Leftrightarrow (x, y) \in P[(v, u)] \quad (x \in X, \quad y \in Y, \quad v \in V, \quad u \in U)$;

3) если $r \in R, e \in E$, то для каждой пары $(r, e) \in L$ выполнены условия

$$F\left[(r,e)\right] = \begin{cases} F_1[r]F_2[e], & |r| = |e|\,, \\ \emptyset, & |r| \neq |e|\,. \end{cases}$$

Корректность операции очевидна из построения. Действительно, размерность множества вершин равна произведению размерностей, размерность множества ветвей равна удвоенному произведению. Существует соответствие между каждым ребром и маршрутом. Зная вид S и одного из множителей, невозможно точно определить второй множитель. Например, если в S имеются ребра, длины которых составляют набор I, и подобный набор длин ребер гиперсети S_1 совпадает с I, то существует полный произвол для ребер гиперсети S_2, длины которых не входят в набор.

Дополняющее произведение. Рассмотрим вариант, когда требуется учесть данное несоответствие, т. е. перемножаются ребра разной длины. Проблема состоит в том, что в гиперсети-произведении существуют вершины, v-несмежные независимо от множеств ветвей "гиперсетей-сомножителей". Например, вершина x_1y_i в любом случае для любых i, j несмежна с вершиной x_1y_j. Сформулируем это утверждение.

Утверждение 1. *Пусть даны полные графы $G(X, V)$ и $H(Y, U)$, $|X| = n$, $|Y| = m$, $L = X \times Y$. Тогда для графа-дополнения $\bar{L} = (Z, W)$ выполнено соотношение*

$$|W| = \frac{mn(m+n-2)}{2}.$$

Доказательство. Так как вершина несмежна сама с собой, то в графе-произведении вершины типа $x_k y_i$ и $x_k y_j$ (или $x_i y_k$ и $x_j y_k$) несмежны. Для каждого целого $k \in [1, n]$ фиксируем x_k, тогда множество $\{x_k y_i\}_{i=1,\dots,m}$ — множество попарно несмежных вершин. Чтобы соединить все эти вершины между собой, необходимо $m(m-1)/2$ ребер. Следовательно, для всех $k = 1, \dots, n$ необходимо $nm(m-1)/2$ ребер. Далее для целого $t \in [1, m]$ фиксируем y_t и аналогично получаем еще $mn(n-1)/2$ необходимых ребер. Так как графы G и H полные, то все остальные вершины, очевидно, смежны. Следовательно,

$$|W| = \frac{nm(m-1)}{2} + \frac{mn(n-1)}{2} = \frac{mn(m+n-2)}{2}.$$

Утверждение доказано.

Подобное множество для гиперсети назовем множеством нуль-ветвей и обозначим β^0. Рассмотрим по одному ребру из каждой гиперсети-множителя r и e, таких что $|r| = p, |e| = q$ и $p - q = h > 0$. Пусть $F_1[r] = \{x_0, v_1, x_1, v_2, \dots, v_p, x_p\}$ и $F_2[e] = \{y_0, u_1, y_1, u_2, \dots, u_q, y_q\}$. Введем следующий способ перемножения неравных ребер:

$$F[(r,e)] = \{(x_0 y_0), (v_1 u_1), (x_1 y_1), (v_2 u_2), \dots, (v_q u_q), (x_q y_q), (v_{q+1} u_q^0), (x_{q+1} y_q), \dots$$
$$\dots, (v_p u_q^0), (x_p y_q)\}.$$

Здесь $(v_{q+1} u_q^0), \dots, (v_p u_q^0) \in \beta^0$.

Таким образом, после достижения q-й вершины “перемещение” по Y прекращается, вместо этого имеют место “прыжки” по нуль-ветвям из одной изначально v-несмежной вершины в другую.

Допустим, что все ребра новой гиперсети уложены в такие маршруты, для чего потребовалось подмножество β^0 — множество нуль-ветвей W^0. Обозначим первые $2k+1$ элементов маршрута $F[r]$ через $f^k[r]$, $\varphi[r]$ — последняя ветвь маршрута $F[r]$, $\psi[r]$ — последняя вершина маршрута $F[r]$. Введем понятие дополняющего произведения гиперсетей.

Определение 10. Дополняющим произведением $S = S_1 \times_a S_2$ гиперсетей $S_1 = (X, V, R, P_1, F_1)$ и $S_2 = (Y, U, E, P_2, F_2)$ называется гиперсеть $S = (Z, W \cup W^0, L, P, F)$, такая что:

1) $Z = X \times Y,\ W = (V \times U) \cup (V \times \bar{U})$;

2) $(x, y) \in P[(v, u)] \Leftrightarrow x \in P_1[v]$ и $y \in P_2[u]$ $\ (x \in X, y \in Y, v \in V, u \in U, (v, u) \in W)$;

3) если $r \in R, e \in E$, то для каждой пары $(r, e) \in L$ выполнены условия

$$F[(r,e)] = \begin{cases} F_1[r]F_2[e], \quad |r| = |e|, \\ f_1^k[r]F_2[e] \cup \{(F_1 - f_1^k)[r]\,\underbrace{\{u^0, \psi_2[r], u^0, \psi_2[r], \dots, u^0, \psi_2[r]\}}_{2h}\}, \\ |r| = q,\ |e| = k,\ q - k = h > 0, \\ F_1[r]f_2^q[e] \cup \underbrace{\{\{v^0, \psi_1[r], v^0, \psi_1[r], \dots, v^0, \psi_1[r]\}, \dots, (F_2 - f_2^q)[e]\}}_{2h}, \\ |r| = q, \quad |e| = k, \quad k - q = h > 0, \end{cases}$$

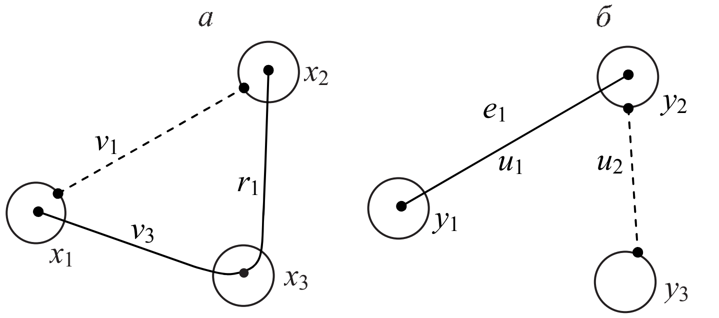

Рис. 5. Гиперсети S_1 (*а*) и S_2 (*б*) с удаленными ребрами

$w^0(r,l) = \{(v_i, u^0)\}_{i=(k+1),\ldots,q}$ при $|r| - |e| = q - k = h > 0$,
$w^0(l,r) = \{(v^0, u_i)\}_{i=(q+1),\ldots,k}$ при $|r| - |e| = q - k = -h < 0$;
4) $W^0 = \bigcup\limits_{r,l} w^0(r,l)$.

В качестве примера вновь рассмотрим гиперсети S_1 и S_2, убрав из них по одному ребру (рис. 5). Пусть в каждом сомножителе имеется по одному ребру различной длины: $|r_1| = 2$, $|e_1| = 1$. Для этого случая гиперсеть $S = S_1 \times_a S_2$ представлена на рис. 6.

Преимущество данного типа умножения — его однозначность. Недостаток заключается в необходимости добавления большого количества новых ветвей. Тем не менее видно, что эти добавления осуществляются по определенному правилу, поэтому подобные ветви могут рассматриваться отдельно от обычных.

На рис. 6 также видно, что существует еще один вариант размещения ребер. Например, зная, какие вершины должны быть r-смежны в S, можно двигаться сначала по правильному маршруту, до тех пор пока не закончится один из маршрутов-множителей, а затем можно искать кратчайший маршрут (либо маршрут заданной длины) от той вершины, на которой остановились, до конечной вершины. Однако неясно, всегда ли такой маршрут найдется и будет ли он единственно возможным. Эти проблемы могут привести к возникновению неопределенности и неоднозначности.

Сумма гиперсетей. Данная операция позволяет синтезировать сети большой размерности с заданными свойствами.

Определение 11. Пусть заданы конечные неориентированные графы $G = (V, E)$ и $H = (Y, F)$. Граф $L = (X, U)$ называется суммой графов G и H ($L = G + H$), если $L[(v, y)] =$

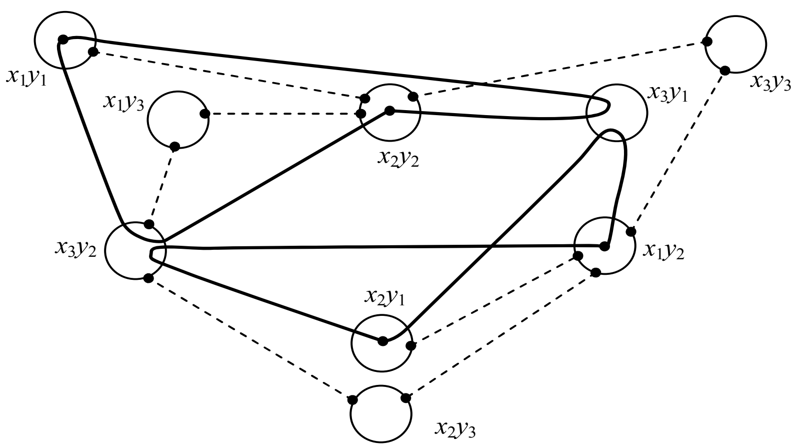

Рис. 6. Дополняющее произведение

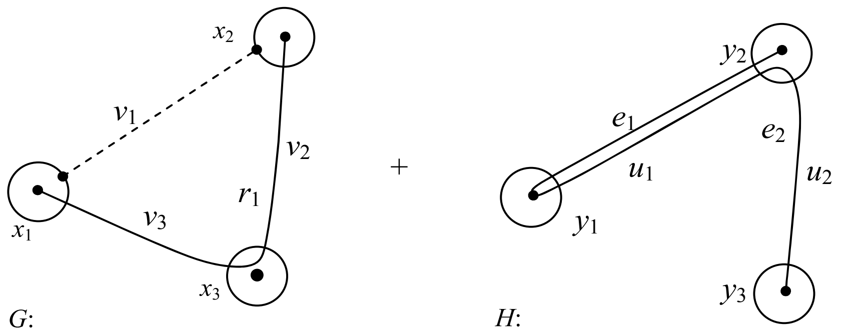

Рис. 7. Сложение гиперсетей

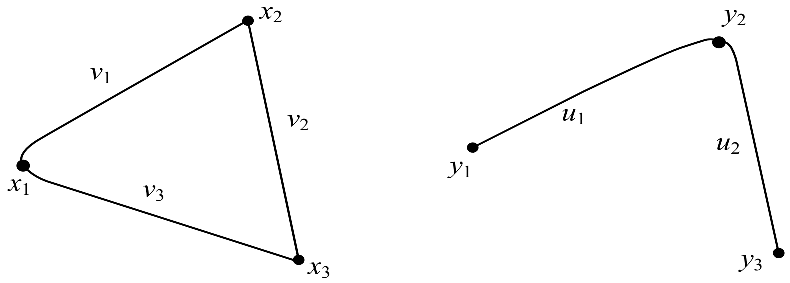

Рис. 8. Первичные сети

$(G[v] \times \{y\}) \cup (\{v\} \times H[y])$, где $v \in V$; $y \in Y$; $(v, y) \in X$; запись $G[v]$ обозначает окрестность вершины в соответствующем графе.

Если v- и r-окрестности рассматривать отдельно по правилу суммирования графов, то в отличие от произведения неоднозначности не возникает и каждому полученному ребру суммы можно сопоставить маршрут первичной сети гиперсети S.

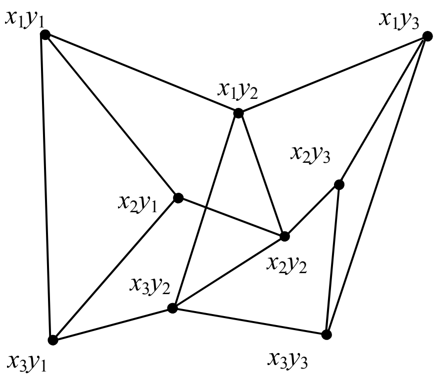

Рис. 9. Сумма графов

Рассмотрим пример сложения двух гиперсетей (рис. 7). Выделим отдельно первичные сети (рис. 8). Результат суммирования по правилу графов показан на рис. 9.

Если вершины x_iy_j, x_ky_p гиперсетей $S_1 = (X, V, R, P_1, F_1), S_2 = (Y, U, E, P_2, F_2)$ смежны, то либо $i = k$, либо $j = p$. Если для некоторого k вершины x_ky_i и x_ky_j оказались смежными, то инцидентную им ветвь обозначим через $u_{i-j,k}$, причем u_{ij} — ветвь, инцидентная вершинам y_i и y_j первичной сети S_2. Аналогично обозначим через $v_{ij,k}$ ветвь для смежных вершин x_iy_k и x_jy_k.

Составим r-окрестность вершин по правилу суммирования графов. Пусть вершины x_ky_i и x_ky_j оказались r-смежными, т. е. в первичной сети S_2 для некоторого ребра e_{ij} существовал маршрут $F[e_{ij}] = \{y_i, u_{i-p1}, y_{p1}, u_{p1-p2}, \ldots, u_{pl-j}, y_j\}$. Тогда в результирующей гиперсети ему будет соответствовать ребро $e_{ij,k}$ с маршрутом

$$F_2[e_{ij,k}] = \{x_ky_i, u_{i-p1,k}, x_ky_{p1}, u_{p1-p2,k}, x_ky_{p2}, \ldots, u_{pl-j,k}, x_ky_j\}.$$

В соответствии с определением 10 определены все составляющие гиперсети S, которую назовем суммой гиперсетей $S_1 + S_2$:

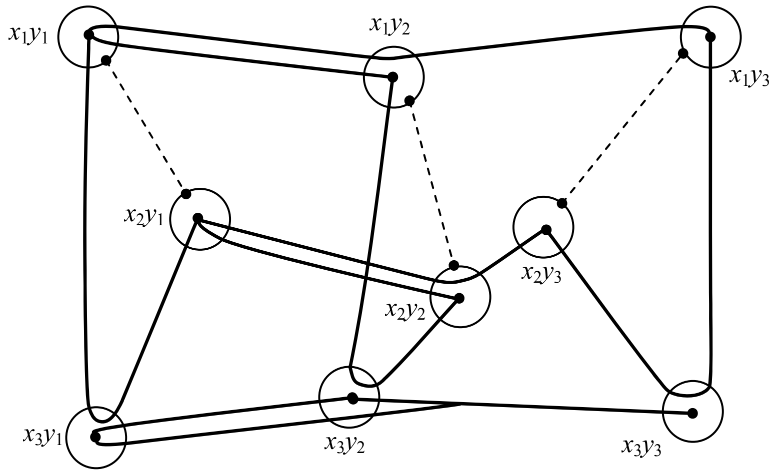

Рис. 10. Сумма гиперсетей

1) $Z = X \times Y$;
2) $S[(x, y)]_v = (S_1[x]_v \times \{y\})U(\{x\} \times S_2[y]_v)$;
3) $S[(x, y)]_r = (S_1[x]_r \times \{y\})U(\{x\} \times S_2[y]_r)$.

Здесь $S_1 = (X, V, R, P_1, F_1)$; $S_2 = (Y, U, E, P_2, F_2)$; $S = (Z, W, L, P, F)$. На рис. 10 показана гиперсеть-сумма для гиперсетей, приведенных на рис. 5.

3. Исследование операций. Предположим, что имеется набор графов $G_1, G_2, \ldots, G_n$, граф $G = \Psi(G_1, G_2, \ldots, G_n)$ — результат некоторой одноместной операции.

Для каждого G_i введем некоторый набор свойств (характеристик): $g_i^1, g_i^2, \ldots, g_i^k$. Под свойством необязательно понимается какой-либо числовой параметр, это может быть тип объекта, свойства его частей и т. д. Тогда имеет смысл рассмотреть случай

$$g^j = \psi(g_1^j, g_2^j, \ldots, g_n^j).$$

Иными словами, зависимость некоторой характеристики может основываться не только на характеристиках аргументов того же типа, но и на других характеристиках.

Применим подобный подход к гиперсетям. В качестве примера рассмотрим операцию суммирования, поскольку она достаточно показательна и имеет интересные свойства.

3.1. *Основные свойства суммы гиперсетей.* Сформулируем некоторые свойства суммы гиперсетей.

Утверждение 2. *Если* $S = S_1 + S_2$, *где* $S_1 = (X, V, R, P_1, F_1); S_2 = (Y, U, E, P_2, F_2)$; $S = (Z, W, L, P, F)$, *то:*

1) S — *связная (относительно связная, слабосвязная гиперсеть), следовательно,* S_1, S_2 *также связны (относительно связны, слабосвязны)*;

2) $|W| = |X| \times |U| + |Y| \times |V|$, $|L| = |X| \times |E| + |Y| \times |R|$;

3) $\delta(x_i y_j) = \delta(x_i) + \delta(y_j)$.

Доказательство. 1. Рассмотрим относительную связность, т. е. только первичные сети. Докажем, что из свойства несвязности хотя бы одного слагаемого следует несвязность суммы.

Пусть в S_1 имеется изолированная вершина x_i. Тогда из определения окрестности $S[(x, y)]_v = (S_1[x]_v \times \{y\})U(\{x\} \times S_2[y]_v)$ следует, что $(S_1[x]_v \times \{y\})$ — пустое множество, а $(\{x\} \times S_2[y]_v)$ — подграф суммы, с которым не связна ни одна из оставшихся вершин.

Данные рассуждения несложно обобщить на случаи, когда несвязная компонента состоит более чем из одной вершины. Действительно, добавляя каждый раз по одной вершине, можно увеличить размер компоненты. Исходя из определения окрестности для всех остальных компонент невозможно получить смежность с данной компонентой.

Из определения изолированных подграфов и их наличия в сумме следует, что все слагаемые не могут быть связными одновременно. Аналогично рассматриваются свойства квазисвязности и слабой связности.

2. Рассмотрим окрестность вершины $S[(x_i, y_j)]_v$. Обозначим через $|x_i, y_j|$ число ветвей в данной окрестности, аналогично — для слагаемых $|x_i|$ и $|y_j|$ из окрестности $S|x_i|$ и $S|y_j|$. Тогда $|x_i,y_j| = |x_i| + |y_j|$. Проводя суммирование по каждой координате:

$$\sum_{i=1}^{|X|} |x_i, y_j| = |X| \times |y_j| + 2|V|,$$

в результате получаем

$$\sum_{j=1}^{|Y|} \sum_{i=1}^{|X|} |x_i, y_j| = 2|X| \times |U| + 2|V| \times |Y|.$$

Таким образом, множество ветвей суммы сосчитано дважды, следовательно, $|W| = |X| \times |U| + |Y| \times |V|$. Аналогично получаем $|L| = |X| \times |E| + |Y| \times |R|$.

3. Равенство $\delta(x_i y_j) = \delta(x_i) + \delta(y_j)$, где δ — степень вершины, следует из определения окрестности, причем оно справедливо для любой смежности.

Утверждение доказано.

Утверждение 3. *Если S — гиперсеть, PS — первичная сеть (имеющая более четырех вершин), являющаяся либо циклом, либо полным графом, то для любых S_1-, S_2-гиперсетей справедливо соотношение $S \neq S_1 + S_2$.*

Доказательство. 1. Пусть PS — цикл с более чем четырьмя вершинами. Тогда, если существует гиперсеть $S = S_1 + S_2$, то S_1, S_2 должны быть связными. Согласно утверждению 2

$$|W| = |X| \times |U| + |Y| \times |V|, |Z| = |X| \times |Y|.$$

Если PS — цикл, то $|W| = |Z|$, т. е. $|X| \times |Y| = |X| \times |U| + |Y| \times |V|$,

$$1 = \frac{|U|}{|Y|} + \frac{|V|}{|X|}.$$

Так как для любого связного графа $|U| \geq |Y| - 1$, то

$$1 = \frac{|Y| - 1}{|Y|} + \frac{|X| - 1}{|X|}.$$

Равенство выполняется, только если $|X| = |Y| = 2$, но этот случай был исключен. Получаем противоречие.

2. Из определения суммы следует, что существуют несмежные вершины, поэтому PS не может быть полным графом. Очевидно, что данные рассуждения легко переносятся на вторичные сети.

Утверждение доказано.

Утверждение 4. *Если $S = S_1 + S_2$ и S_1, S_2 связны, то*

$$\omega_{S_1} + \omega_{S_2} \leq \omega_S, \quad \lambda_{S_1} + \lambda_{S_2} \leq \lambda_S, \quad \xi_{S_1} + \xi_{S_2} \leq \xi_S.$$

Первые два неравенства доказаны в работе [3] для графов. Аналогично можно обобщить их на гиперсети, тогда станет верным третье неравенство.

Во многих работах свойства операций показаны в виде неравенств. Для решения некоторых задач оптимизации и генерации структур имеет смысл получить свойства в виде равенств. Обобщив некоторые рассуждения и наблюдения, можно получить ряд утверждений.

Утверждение 5. *Если хотя бы одно из слагаемых S_i в качестве PS_i имеет цепь или полный граф, а первичная сеть второго связна, то для $S = S_1 + S_2$ справедливо равенство*

$$\lambda_{S_1} + \lambda_{S_2} = \lambda_S.$$

Аналогично для FS и $\xi_{S_1} + \xi_{S_2} = \xi_S$.

3.2. *Связность и маршруты суммы гиперсетей.* Приведенная ниже теорема позволяет указать связность суммы определенных гиперсетей и, наоборот, по виду некоторой гиперсети сделать выводы о том, является ли она суммой некоторых гиперсетей. Это очень актуальные вопросы, решение которых позволит представлять гиперсети в более компактном виде. Выше было показано, что число вершин суммы гиперсетей есть произведение числа вершин слагаемых.

Теорема 1. *Пусть $S = S_1 + S_2$, где $S_1 = (X, V, R)$; $S_2 = (Y, U, E)$; $S = (Z, W, L)$. Если PS_1, PS_2 — полные графы, а FS_1, FS_2 связны, то S — k-относительно связная гиперсеть с минимальным числом ветвей $|W| = |X| \times |Y| \times (|X| + |Y| - 2)/2$ и с реберной связностью* $2 \leq \xi_S$, где $k = (|X| - 1) + (|Y| - 1)$.

Доказательство. PS_1 и PS_2 — полные графы, следовательно, $\lambda_{S_1} = |X| - 1$, $\lambda_{S_2} = |Y| - 1$, тогда согласно утверждению 5 S есть k-относительно связная гиперсеть. Вычислим минимальное число ветвей

$$|W| = |X| \times |U| + |Y| \times |V|.$$

Нетрудно показать, что $|V| = |X| \times (|X| - 1)/2$. Тогда

$$|W| = \frac{|X| \times |Y| \times (|X| + |Y| - 2)}{2}.$$

В данном случае термин “минимальное число ветвей” означает, что при удалении любой ветви уменьшается показатель связности. Таким образом, необходимо показать, что число ветвей m k-относительно связной гиперсети с $|X| \times |Y|$ вершинами и минимальным числом ветвей совпадает с $|W|$. Очевидно, что $m = (n \times k)/2$, где n — число вершин. Тогда

$$m = \frac{n \times k}{2} = \frac{|X| \times |Y| \times (|X| - 1 + |Y| - 1)}{2} = |W|.$$

Если S_1 и S_2 связны, то согласно утверждению 4 $2 \leq \xi_S$. Теорема доказана.

Операция суммирования интересна тем, что первичные и вторичные сети преобразуются достаточно независимо. Таким образом, при построении гиперсети можно пошагово создавать ее структуры. К тому же эта операция сохраняет все виды связности, что позволяет создавать наиболее близкие к исходным требованиям гиперсети. Приведенная ниже теорема показывает, каким образом преобразуются маршруты (или ребра) при использовании этой операции.

Теорема 2. *Пусть $S = S_1 + S_2$. Тогда любой паре ребер r, e из S_1, S_2 в гиперсети S соответствует цикл длиной $\rho_\mu = 2(\rho_r + \rho_e)$.*

3.3. *Другие свойства и следствия.* Представляет интерес тот факт, что для операции суммирования существует нулевой элемент — тривиальный граф, который при сложении с любым графом не меняет его структуру (происходит только переименование вершин). В качестве единичного элемента можно выбрать K_2. Тогда, сложив K_2 с собой, получаем цикл с числом вершин $|Z| = 4$. При повторном добавлении к этому циклу K_2 получаем граф, который в геометрическом смысле представляет собой куб (вершины куба — вершины графа). Повторив операцию, получаем четырехмерный куб и т. д. В общем случае, если имеется некоторый граф G, то $H = G + K_2$ есть подобие призмы с основанием G. Таким образом, можно предположить, что определенное множество графов с операцией суммирования образует алгебраическую структуру подобно группам, кольцам или полям. Операцию суммирования можно рассматривать как автоморфизм пространства. Данный факт определяет большое количество исследовательских задач, решение которых способствует развитию теории графов и теории гиперсетей.

Заключение. В работе определены понятия операций над гиперсетями, преимущественно связанные с аналогичными операциями над графами. Перенести все возможные операции из теории графов в теорию гиперсетей — задача очень трудоемкая, причем наличие некоторого произвола при работе с вторичными сетями приводит к увеличению количества операций в несколько раз по сравнению с количеством операций с графами. Одним из приемлемых вариантов решения таких задач является разработка операций, необходимых в конкретной задаче на основе принципа, предложенного в данной работе. Таким образом, комплекс действий с гиперсетями будет пополняться по мере решения новых задач. Например, решение задачи синтеза гиперсети с заданными свойствами предполагает изучение уже имеющихся операций и подбор нужной; если таковая отсутствует, — попытку разработки новой с необходимыми свойствами, с использованием некоторой общей методики.

Свойства операций, представленных в работе, актуальны для решения практических задач. Уже на данном этапе можно предложить способы генерации гиперсети с некоторыми параметрами, сделать выводы о возможности представления сложной структуры через некоторую функцию более простых структур. Таким образом, например, можно уменьшить объем памяти, необходимой для хранения информации о достаточно большой гиперсети.

Сделаны предположения о возможности разработки аналога алгебраической структуры для графов и гиперсетей, что позволит рассматривать теорию с другой, достаточно конструктивной стороны.

Список литературы

1. Попков В. К. Применение теории S-гиперсетей для моделирования систем сетевой структуры // Пробл. информатики. 2010. № 4. С.17–40.

2. Нечепуренко М. И. Алгоритмы и программы решения задач на графах и сетях / М. И. Нечепуренко, В. К. Попков, С. М. Майнагашев и др. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1990.

3. Попков В. К. Математические модели связности. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2006. 490 с.

Попков Владимир Константинович — д-р физ.-мат. наук, проф., гл. науч. сотр. Института вычислительной математики и математической геофизики; e-mail: popkov@sscc.ru

Дата поступления — 30.09.11 г.