

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ S -ГИПЕРСЕТЕЙ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ СЕТЕВОЙ СТРУКТУРЫ

В. К. Попков

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
630090, Новосибирск, Россия

УДК 519.173

Рассматриваются основные понятия теории S -гиперсетей. Показано, что на языке этой теории можно описать различные системы сетевой структуры с точностью до адекватного решения поставленной задачи. Аналитическая постановка задачи анализа и синтеза структур указанных систем может служить имитационной моделью, применимой для решения поставленных задач.

Ключевые слова: граф, гиперсеть, S -гиперсеть, структурный анализ, синтез, математическое и имитационное моделирование.

Basic concepts of the theory of S -hypernetworks are considered. It is shown that the concepts of this theory can be used to describe many network structure systems with an accuracy of an adequate solution to the formulated problem. In fact, analytical formulation of problems of analysis and synthesis of network structure systems is a nearly imitation model, which can be used to solve formulated problems.

Key words: graph, hypernetwork, S -hypernetwork, structure analysis, synthesis, mathematical and imitation modeling.

Введение. В настоящей работе рассмотрены основные определения теории S -гиперсетей, приведена классификация математических моделей структур в рамках данной теории, а также классификации симбиотических отношений между системами сетевой структуры. Изобразительные возможности языка теории S -гиперсетей позволяют легко формулировать разнообразные задачи, связанные со структурами исследуемых сложных систем. Также рассмотрены задачи оптимизации некоторых систем сетевой структуры и их формальные постановки (например, транспортные сети, сети связи, инженерные сети и др.).

1. Основные определения. Приведем определение простой гиперсети, в которой элементы типа узла однотипны, а линейные элементы (ветви, ребра) имеют различную природу [1].

Шестерка, состоящая из трех множеств и трех отображений $S = (X, V, R; P, F, W)$, называется гиперсетью, если $\forall v \in V |P(v)| = 2, \forall r \in R |W(r)| = 2, \forall r \in R$ множество $F(r) \subseteq V$ составляет маршрут в графе $PS = (X, V)$.

Таким образом, первичная PS и вторичная WS сети гиперсети S являются графами, а F отображает ребра $WS = (X, R)$ в маршруты графа $PS = (X, V)$.

Так как множество $F(r)$ является маршрутом, то отображение F единственным образом определяет отображение W . Действительно, концевые вершины маршрута $F(r)$ одновременно являются концами ребра r , т. е. гиперсеть S можно задать пятеркой $(X, V, R; P, F)$.

В гиперсети вида $S = (Y, V, R)$ узел $y \subset Y$ заменяется на граф вида $y = \{x_j^i, E_j\}$ — граф узла y структурированной гиперсети, где x_j^i — j -я вершина вторичной сети WS_i , отображенная в узел y структурированной гиперсети $SA = (Y, V, G(X_i, R_i))$. Таким образом, в отличие от гиперсетей вершины вторичных сетей помещаются в узлы первичной сети независимо друг от друга, без ограничения на характер отображения, т. е. возможны варианты отображения нескольких вершин одной вторичной сети в один узел первичной сети.

Приведем формальное определение S -гиперсети. Пусть задано множество графов (гиперграфов) $G_0 = (X^0, V)$, $G_1 = (X^1, U^1), \dots, G_k = (X^k, U^k)$ и корневое дерево $T_0 = (Z, R)$, где $Z = z_0, z_1, \dots, z_k$, $R = r_1, \dots, r_k$ — определяющее вложение графов G_j в G_i ($i < j$) аналогично вложениям, определяемым в гиперсетях, за исключением того, что вершины x_k^i и x_l^j графов G_i и G_j не тождественны, а инцидентны. Очевидно, что одной и той же вершине x_k^i могут быть инцидентны несколько вершин $X_k^j = \{x_{k_1}^{j_1}, x_{k_2}^{j_2}, \dots, x_{k_l}^{j_l}\}$ из l графов $\{G_{j_s}\}$, $s = 1, \dots, l$. На множестве вершин X_k^j определяется $L^j = (X_k^j, E)$. Вершины $x_{k_j}^{j_i}$ и $x_{k_s}^{j_s}$ смежны в L^j , если соответствующие графы G_{j_i} и G_{j_s} в вершине x_k^i имеют некоторую системообразующую связь $l(x^{j_i}, x^{j_s})$. В противном случае эти вершины не связаны. Так же как и в гиперсетях, ребру $u_l^j \in G_j$ в графе G_i сопоставляется цепь или некоторая связная часть между соответствующими вершинами из G_i . На рис. 1 приведен пример такой гиперсети. Следует отметить, что

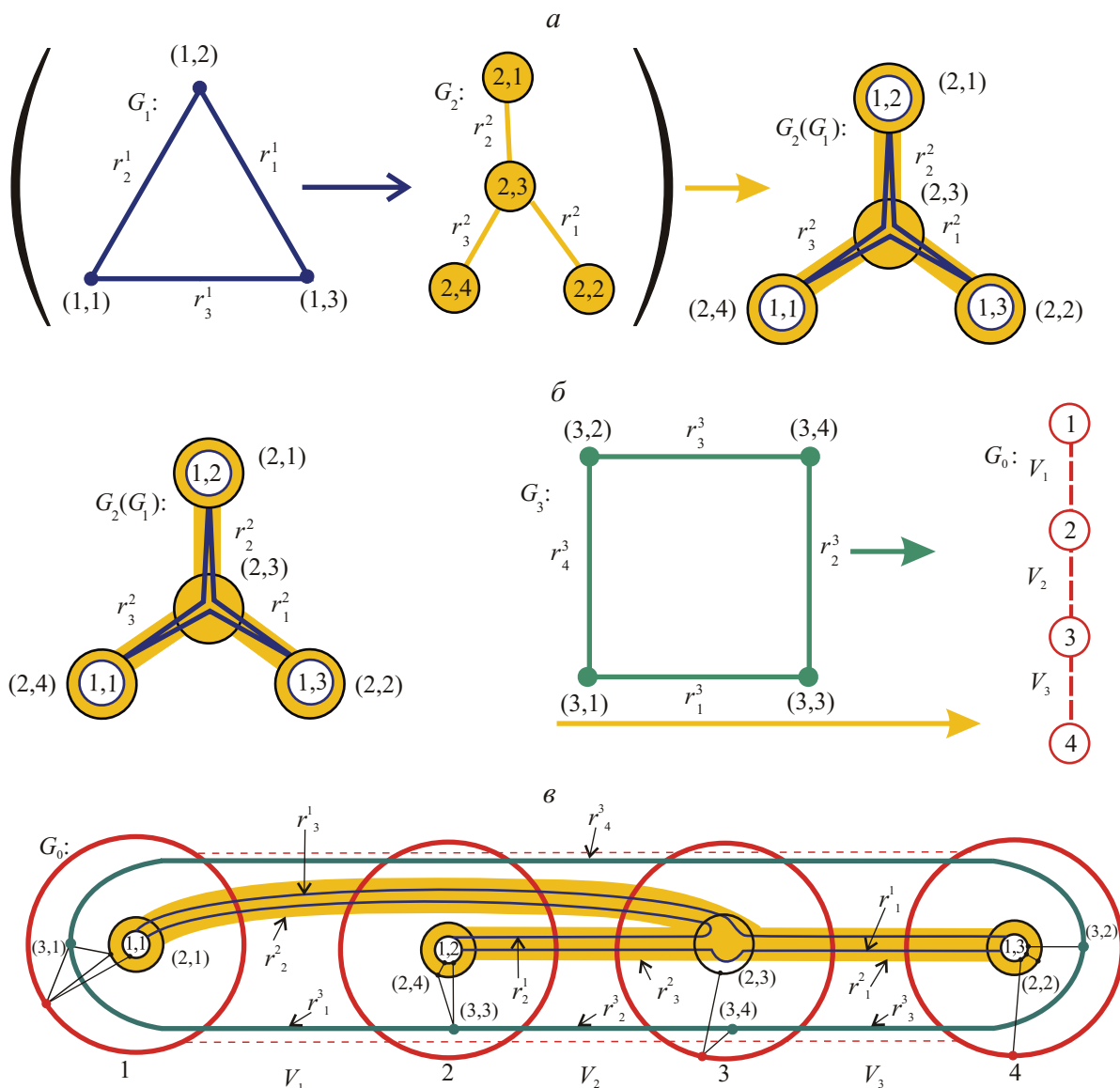


Рис. 1. S -гиперсеть и ее составляющие:

a — отображение графа вторичной сети G_1 в граф первичной сети G_2 с образованием гиперсети $G_2(G_1)$;

b — отображение гиперсети $G_2(G_1)$ и графа G_3 в граф G_0 с образованием S -гиперсети

$H = (G_0(G_3, G_2(G_1)))$; \bar{v} — гиперсеть $H = (G_0(G_3, G_2(G_1)))$, в которой

определены внутриузловые связи (графы L_i)

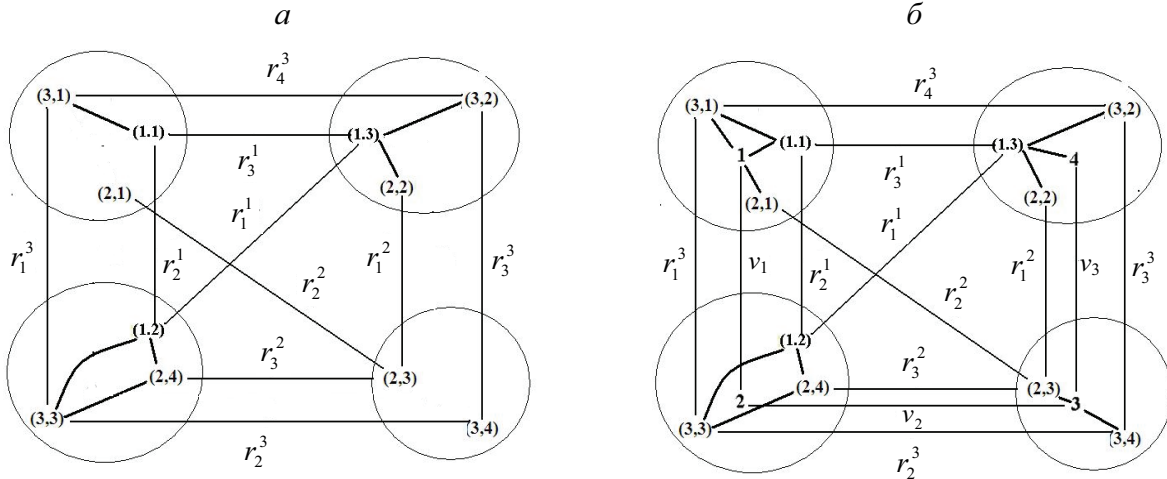


Рис. 2. Сумма графов сетей S -гиперсети H :

a — объединение всех графов вторичных сетей S -гиперсети H ; b — сумма графов всех сетей S -гиперсети H

системообразующие связи типа $\{l(x, y)\}$ могут иметь различную природу и, как правило, существенно зависят от времени. В некоторых случаях, например в системе транспортных сетей различного типа (метро, автобус, трамвай), такими связями в транспортных мультиузлах являются тротуарные линии (пешеходные переходы). В этом случае имеет смысл рассматривать объединение всех вторичных сетей (рис. 2, a). Однако для некоторых задач целесообразно рассматривать сумму всех графов гиперсети H включая первичную сеть PS , т. е. $G = G_0 + G_1 + \dots + G_n + \{L^j\}$. На рис. 2, b приведен пример объединения всех графов, входящих в S -гиперсеть H . При этом структура вложений имеет вид, представленный на рис. 3.

С использованием приведенных ниже матриц определенную таким образом S -гиперсеть можно задать с точностью до изоморфизма и даже с точностью до нумерации вершин и ребер.

Графы $G_i, i = 1, \dots, k$ задаются матрицами инциденций $\{M^i = c_n^k\}$. Вложения графов определяются системой матриц инциденций $\{M_j^i(a_t^l), N_j^i(b_p^d)\}$, таких что $a_t^l = 1$, если вершина $x_l \in G^i$ инцидентна вершине $x_t \in G^j$ ($i < j$), и $a_t^l = 0$ в противном случае. Для матрицы инциденций ребра $N_j^i(b_p^d)$ имеем $b_p^d = 1$, если ребро $u_p \in G^j$ вторичной сети инцидентно ветви $u_d \in G^i$ первичной сети, и $b_p^d = 0$ в противном случае. Представление S -гиперсети заканчивается множеством матриц смежности $\tilde{M}_z^i = (s_f^r)$.

Пусть вершине $x_z^i \in G^i$ инцидентны вершины $\{X_l^{jp} \in G^{jp}\}$. Тогда матрицы смежности $\tilde{M}_z^i(s_f^r)$ определяют смежность этих вершин в $x_{z_i}^i$. Таким образом, S -гиперсеть $H = (G_0, G_1, \dots, G_k)$ однозначно задается следующей системой матриц:

- 1) $M^i(c_{p^i}^{l^i})$ — матрица инциденций графов G^i ($i = 0, \dots, k; l^i = 1, \dots, n^i; p^i = 1, \dots, m^i$, где $k + 1$ — число графов в SHN ; n^i — число вершин в графе G^i ; m^i — число ребер в графе G^i);
- 2) $\{M_j^i(a_{t_j}^{l_i}), N_j^i(b_{p_j}^{d_i})\}$ — матрицы инциденций, определяющие вложение графов G_j в граф G_i ($i, j = 0, \dots, k$ ($i < j$); $l_i = 1, \dots, n_i; t_j = 1, \dots, n_j; d_i = 1, \dots, m_i; p_j = 1, \dots, m_j$);
- 3) $\tilde{M}_{z_i}^i(s_{f_d}^{r_i})$ — матрицы смежностей вершин графов вторичных сетей в первичной сети ($i = 0, \dots, k; z_i = 1, \dots, n_i, f, d = 1, \dots, n$, т. е. $s_{f_d}^{r_i} = 1$, если вершины f и d графов $\{G_j\}$ инцидентны вершине z_i и смежны в этой вершине, иначе $s_{f_d}^{r_i} = 0$).

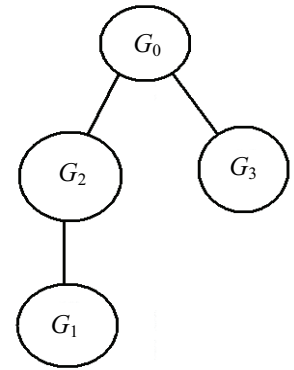


Рис. 3. Структура вложений графов

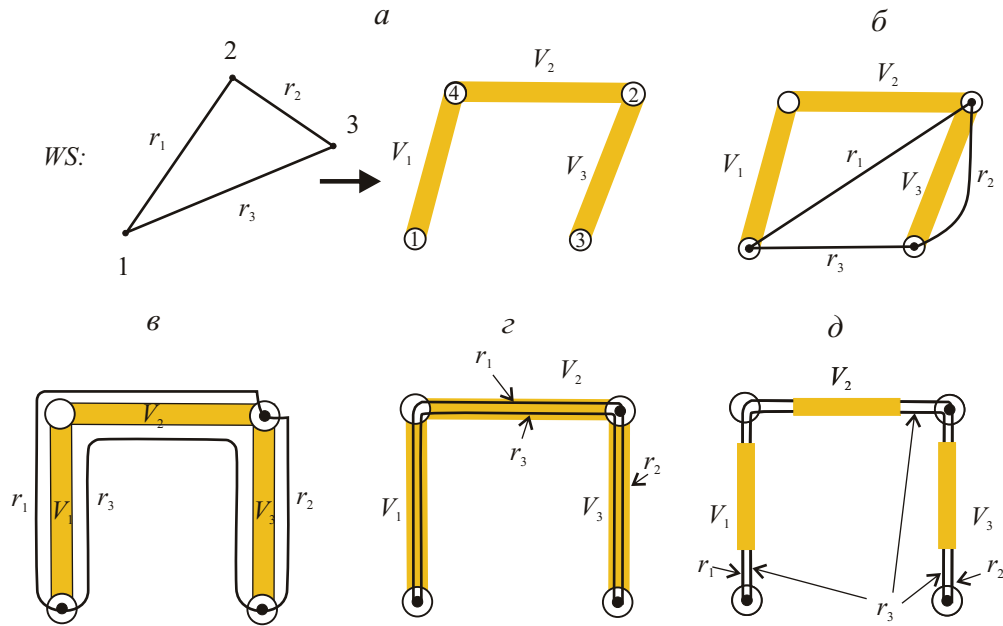


Рис. 4. Примеры топологических взаимосвязей ребер и вершин различных сетей S -гиперсети $H = (WS, PS)$

Вероятно, наибольшее число приложений теории гиперсетей и S -гиперсетей приходится на электросвязь и транспорт, поэтому бóльшая часть задач, рассматриваемых в данной работе, связана с этими направлениями [1–4]. Тем не менее теория S -гиперсетей применима для анализа и синтеза других систем сетевой структуры. Особый интерес вызывают задачи анализа межсетевых структурных взаимодействий сложных систем различной природы.

2. Отображения. В данной работе подробно рассмотрены топологические свойства S -гиперсетей, имеющие практическое значение для синтеза и анализа транспортной системы города. Для понимания топологических задач необходимо рассмотреть различные типы вложений вторичных сетей в первичные.

Приведем примеры отображений графов вторичных сетей в первичную сеть, имея в виду практическое использование теории при описании и анализе реальных систем сетевой структуры.

При отображении графа вторичной сети WS в первичную сеть PS возникают четыре класса вложений ребер WS в ветви PS (рис. 4,а).

Для гиперсети $H = (PS, WS)$:

1. Ребра вторичной сети WS не отображаются в ребра первичной сети, имеет место только отображение вершин WS в вершины PS . Таким образом, матрицы $N_j^i(b_p^d)$ в представлении гиперсети отсутствуют (рис. 4,б). В этом случае имеет место экс-отображение $WS \xrightarrow{\text{экс}} PS$ и соответственно экс-гиперсеть.

2. Если ребра вторичной сети $WS = (X^1, R)$ параллельны ветвям первичной сети $PS = (X^0, V)$, то имеет место параотображение $WS \xrightarrow{p} PS$ (рис. 4,в), которое порождает парагиперсеть $H = (WS, PS)$.

3. Если ребра вторичной сети WS располагаются на “плоских” ветвях первичной сети PS , то имеет место эктоотображение $WS \xrightarrow{\text{эк}} PS$ (рис. 4,г) и соответственно эктогиперсеть.

4. В последнем случае ребра вторичных сетей располагаются внутри ветвей первичной сети. На рис. 4,д приведен пример эндоотображения $WS \xrightarrow{\text{эн}} PS$, которое порождает эндогиперсеть.

Вершины могут отображаться друг в друга одним из четырех способов:

1. Вершина вторичной сети x абстрактно отображается в вершину y первичной сети, если их взаимное расположение безразлично, т. е. имеет место экс-отображение.
2. Если вершина x отображается рядом с узлом y , то имеет место параотображение (вершины 2.1 и 3.1 на рис. 1).
3. При эктоотображении вершин одна из них располагается на другой (на рис. 1 вершины 2.1 и 3.1 располагаются на узле 1).
4. При отображении одной вершины внутрь другой имеет место эндоотображение вершин (на рис. 1 вершина 1.2 располагается внутри вершины 2.1).

S -гиперсети можно называть в соответствии со способом отображения элементов. Очевидно, что в одной и той же S -гиперсети различные элементы могут отображаться в другие одновременно различными способами.

Таким образом, словарь теории S -гиперсетей увеличился за счет особенности отображения элементов гиперсети на поверхности и различных взаимосвязей между инцидентными ветвями ребер вторичных сетей. Предложенная классификация отображений позволяет ставить задачи, связанные с описанием, анализом и синтезом сетей различного назначения.

3. Плоские S -гиперсети. С практической точки зрения большое значение имеет исследование топологических свойств эктогиперсетей, в частности их плоская реализация. Задачи, которые при этом возникают, тесно связаны с задачами укладки графов на ориентированные поверхности. Однако специфика гиперсетей, в частности S -гиперсетей, позволяет формулировать новые топологические задачи в теории S -гиперсетей.

Пусть задана гиперсеть $H = (PS, WS)$, которую будем называть PS -планарной, если граф PS первичной сети планарен, WS -планарной, если граф WS -планарен.

Данные характеристики хорошо изучены в теории графов. Более интересна следующая характеристика. Гиперсеть H называется псевдопланарной, если граф WS может быть размещен в PS без пересечения ребер. Гиперсеть H квазипланарна, если граф WS может быть реализован в PS без пересечения ребер, а PS может быть реализован на плоскости без пересечения ветвей. Если такие реализации возможны, то гиперсеть H планарная; если данные реализации выполнены, то гиперсеть H плоская. На рис. 5 видно, что квазипланарная гиперсеть может быть неплоской.

Утверждение. Если гиперсеть $H = (PS, WS)$ WS -планарна, то она планарна.

Доказательство. Если граф PS первичной сети не планарен, то его можно сделать планарным путем удаления некоторых ветвей. В оставшейся части PS' можно выполнить плоскую реализацию WS . Для доказательства достаточно показать, что первичная плоская сеть PS гомеоморфна плоскому кругу с отверстиями.

Уменьшим физический размер граней плоской первичной сети до точки (дырки). Тогда очевидно, что WS реализуем на поверхности, образованной первичной сетью, так как является WS -планарным.

Поверхность рода 1 допускает плоскую реализацию как минимум полного пятивершинного графа WS , который, как известно, не является планарным (рис. 5,а). Вообще говоря, на неплоской первичной сети можно расположить без пересечения ребер полный семивершинный граф вторичной сети.

На рис. 5,а видно, что PS не плоский, а планарный, WS — плоский в PS , т. е. внутри (на поверхности ветви) ребра не пересекаются. В то же время на рис. 5,б первичная сеть плоская, а вторичная — нет, и даже не планарная. Следовательно, из псевдопланарности гиперсети не следует планарность WS .

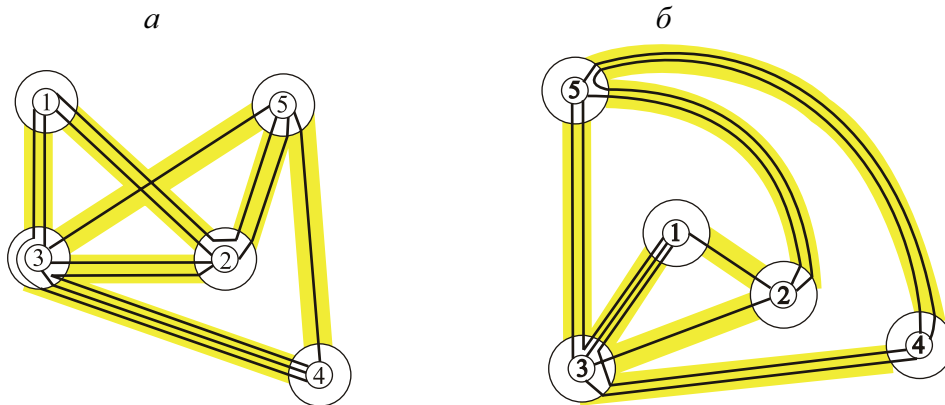


Рис. 5. Псевдопланарная гиперсеть:

a — пятивершинная плоская реализация графа WS ; b — неплоская реализация WS в плоском графе PS

Применение понятия “планарный” к гиперсетям не всегда корректно. Действительно, PS допускает изменение геометрии рисунка, т. е. из планарного можно сделать плоский граф PS , при этом H и H' остаются изоморфными.

Следует отметить, что преобразование конфигурации PS с целью сделать ее плоской приводит к изменению пространственной конфигурации WS , т. е. граф вторичной сети не может иметь двухклеточное вложение в плоскую реализацию первичной сети. Это видно на рис. 5, a : если перенести вершину X_5 (см. рис. 5, b), то граф PS станет плоским, при этом граф WS будет иметь пересекающиеся ребра. Не существует перетрассировки ребер, позволяющей сделать его плоским, так как род графа WS равен 1.

Изменяя трассировки ребер WS в PS , получаем другую гиперсеть H' , эквивалентную H [2]. Таким образом, изменяя трассировку ребер WS на ветвях PS , получаем неизоморфное преобразование.

С практической точки зрения вместо эктогиперсети целесообразно рассмотреть эндогиперсеть. В этом случае представляет интерес пересечение ребер не внутри ветвей, а только на узлах первичной сети.

Эндогиперсеть $SH = (PS, WS)$ будем называть WS -квазиплоской, если в каждом узле $PS = (X, V)$ существует плоская реализация фрагментов вторичных гиперсетей $\{WS^i\}$ S -гиперсети, такая что $SH = (PS, WS_1, \dots, WS_k)$. Гиперсеть SH называется квазиплоской, если WS является квазиплоской в плоской сети PS .

В эндогиперсети модель узла Y первичной сети представляет собой окружность $O(Y)$, разделенную на $S(Y)$ дуг ($S(Y)$ — степень узла Y). На каждой дуге выделяются вершины-полюсы, являющиеся окончаниями ребер, входящих в этот узел. Внутри узла-диска располагаются вершины вторичных сетей, связанные с соответствующими полюсами внутриузловыми ребрами. Некоторые полюсы связаны непосредственно, так как принадлежат транзитным ребрам сетей WS_i . Через один (пару) полюс может проходить несколько ребер вторичных сетей.

Нестационарная S -гиперсеть называется квазипланарной, если она является квазипланарной в любой стационарный промежуток времени.

При исследовании проблем анализа и синтеза сетевой структуры возникают постановки следующих задач.

1. Пусть заданы граф первичной сети PS , семейство графов вторичных сетей $\{WS_i\}$ и отображения $X^i \rightarrow X^0$. Необходимо провести трассировку ребер в графе PS , так чтобы S -гиперсеть стала квазиплоской.

2. Найти критерий квазиплоскости S -гиперсети $H = (PS, WS_1, \dots, WS_k)$.

Таблица 1

Классификация симбиотических связей

Вторичная сеть S -гиперсети $WS = (X, R)$	Первичная сеть S -гиперсети $PS=(Y, V)$		
	Полезная (П)	Нейтральная (Н)	Вредная (В)
П	Мутуализм (mutualism)	Комменсализм (commensalism)	Паразитизм (parasitism)
Н	Комменсализм (commensalism)	Нейтрализм (neutralism)	Аменсализм (amensalism)
В	Паразитизм (parasitism)	Аменсализм (amensalism)	Конкуренция (competition)

3. Пусть задана S -гиперсеть H . Требуется составить расписание работы внутризональных ребер, так чтобы нестационарная S -гиперсеть стала квазипланарной.

4. Решается предыдущая задача, но среднее число циклов в H должно быть минимально возможным.

5. Добавить в H минимальное число ветвей, так чтобы S -гиперсеть стала квазипланарной с учетом перетрассировки ребер вторичных сетей WS_i .

Очевидно, что понятие планарности в S -гиперсетях порождает большое количество комбинаторных задач.

4. Классификация симбиотических связей в теории S -гиперсетей. Для многих приложений теории S -гиперсетей отношения между вторичной и первичной сетями, а также между вторичными сетями имеют характер симбиотических связей. Иными словами, они могут быть полезными, нейтральными или вредными. Исследование таких взаимоотношений позволяет анализировать устойчивость, развитие и другие характеристики систем различных взаимосвязанных сетей. В табл. 1 приведена классификация симбиотических связей.

Рассмотрим табл. 2–5, в которых приведены примеры различных симбиотических связей, с учетом следующих отображений ребер в ветви первичной сети (примеры таких отображений представлены на рис. 4):

– ребра вторичной сети WS не отображаются в ребра первичной сети (экс-отображение $WS \xrightarrow{\text{экс}} PS$);

Таблица 2

Примеры экс-симбиоза WS и PS в S -гиперсети $H = (WS, PS)$ для различных CCC

Вторичная сеть S -гиперсети $WS = (X, R)$	Первичная сеть S -гиперсети $PS=(Y, V)$		
	Полезная (П)	Нейтральная (Н)	Вредная (В)
П	Команды одного клуба (мутуализм – эс/пп)	Элита и общество (комменсализм – эс/пн)	Финансовая пирамида (паразитизм – эс/пв)
Н	Социальное обслуживание (комменсализм – эс/нп)	Независимые клубы по интересам (нейтрализм – эс/нн)	Инфекционные больные и общество (аменсализм – эс/нв)
В	Система жертва – хищник (паразитизм – эс/вп)	Существа в агрессивной среде (аменсализм – эс/вн)	Соперники (конкуренция – эс/вв)

Таблица 3

Примеры парасимбиоза WS и PS в S -гиперсети $H = (WS, PS)$ для различных ССС

Вторичная сеть S -гиперсети $WS = (X, R)$	Первичная сеть S -гиперсети $PS=(Y, V)$		
	Полезная (П)	Нейтральная (Н)	Вредная (В)
П	Композиционные материалы (пс/пш)	Линии электропередач (ЛЭП) и шоссе (пс/пн)	Занятие телефонных пар в кабеле для передачи данных (пс/пв)
Н	Система освещения дороги и шоссе (пс/пш)	Кабельные линии и инженерные сети в одном коллекторе (пс/пн)	ЛЭП и низкочастотные каналы в кабеле тональной частоты (пс/пв)
В	Зимнее горячее и холодное водоснабжение в одном коллекторе (пс/пш)	Тротуары и проезжая часть (пс/пн)	Трамвайные пути и дорога с проезжей частью (пс/пв)

— ребра вторичной сети $WS = (X^1, R)$ параллельны ветвям первичной сети (параотображение $WS \xrightarrow{p} PS$);

— ребра WS располагаются на “плоских” ветвях первичной сети (эктоотображение $WS \xrightarrow{эк} PS$);

— ребра вторичных сетей располагаются внутри ветвей первичной сети (эндоотображение $WS \xrightarrow{эн} PS$).

Приведенные примеры в некотором роде искусственны, но они демонстрируют важность данных связей для исследования различных значимых характеристик комплексов, состоящих из разнотипных систем сетевой структуры (ССС).

Из табл. 2 следует, что в приведенных системах сетевой структуры межсетевые связи не являются физическими объектами, поэтому связи не отображаются друг в друга. Взаимосвязаны только узловые объекты.

Таблица 4

Примеры эктосимбиоза WS и PS в S -гиперсетях $H = (WS, PS)$ для различных ССС

Вторичная сеть S -гиперсети $WS = (X, R)$	Первичная сеть S -гиперсети $PS=(Y, V)$		
	Полезная (П)	Нейтральная (Н)	Вредная (В)
П	Асфальтовое покрытие бетонных дорог (эк.с/пш)	Маршруты общественного транспорта на дорогах (эк.с/пн)	Потоки грузового транспорта на дорогах (эк.с/пв)
Н	Спецтранспорт при ремонте дорог (эк.с/пш)	Полосы движения на проезжей части (эк.с/пн)	Гололедица на дорогах (эк.с/пв)
В	Защитные покрытия дорог, труб и т. д. (эк.с/пш)	Потоки транспорта на разбитых дорогах (эк.с/пн)	Рельсовый транспорт на автодорогах (эк.с/пв)

Таблица 5

Примеры эндосимбиоза WS и PS в S -гиперсетях $H = (WS, PS)$ для различных ССС

Вторичная сеть S -гиперсети $WS = (X, R)$	Первичная сеть S -гиперсети $PS=(Y, V)$		
	Полезная (П)	Нейтральная (Н)	Вредная (В)
П	Сети электросвязи города (эн. с/шп)	Поток пассажиров в метро (эн. с/пн)	Потоки минеральной воды в стальных трубах (эн. с/пв)
Н	Поток агрессивной жидкости в трубах (эн. с/нп)	Кабели связи в туннелях метро (эн. с/нн)	Ливневый поток в кабельной канализации (эн. с/нв)
В	Система питания в автотранспорте (эн. с/вп)	Обледенение ЛЭП (эн. с/вн)	Виртуальный компьютер (ПК в ПК) (эн. с/вв)

При парасимбиозе линейные элементы сетей существуют параллельно, их взаимодействие, как правило, является опосредованным. В данном случае деление сетей на первичные и вторичные условно.

Примеры отношений, приведенные в табл. 4, 5, показывают типичность экто- и эндосимбиозов для инженерных сетей.

Из приведенных примеров систем сетевой структуры следует, что их взаимодействие может также описываться симбиотическими связями. Например, комменсализм является преимущественным отношением между сетями различных уровней гиперсети, соответствующей сети связи, обладающей высокой живучестью. Гиперсети с такими отношениями, как правило, находятся в устойчивом равновесии, а отношение аменсализма обуславливает неустойчивое равновесие. Понятно, что отношение паразитизма делает гиперсеть неустойчивой. Особый интерес представляют гиперсети, в которых отношения между сетями различного уровня являются “мутуализмом” или “конкуренцией”. В первом случае имеет место взаимная польза и, следовательно, высокая устойчивость, во втором — жесткая конкуренция на грани развала. Ниже показано, что устойчивость гиперсетей связана также со структурными характеристиками, которые оказывают влияние на их связность и потоки.

Оценка симбиотических отношений является нетривиальной задачей, их качественная и численная меры определяются как наличием или отсутствием взаимоотношений между первичными PS и вторичными WS сетями, так и их конкретным отображением $F(i) : WS \rightarrow PS$. При $i=0$ отображение отсутствует. По аналогии с целеустремленными системами [5] в рассматриваемом случае отношения симбиоза можно доопределить такими понятиями, как сотрудничество, конфликт и независимость.

Обозначим через $\varphi(PS)/WS(F(i))$ ожидаемую оценку эффективности PS , если WS реализовано в PS с помощью отображения $F(i)$; соответствующие величины для WS обозначим $\varphi(WS)/PS(F^{-1}(i))$. Будем считать, что φ принимает значения от 0 до 1. Как отмечено выше, при $i = 0$ отображение отсутствует.

Введем понятия сотрудничества, конфликта и независимости между сетями S -гиперсети:

- если $\varphi(PS)/WS(F(i)) > \varphi(PS)/WS(F(0))$, то WS сотрудничает с PS ;
- если $\varphi(PS)/WS(F(i)) < \varphi(PS)/WS(F(0))$, то WS конфликтует с PS ;
- если $\varphi(PS)/WS(F(i)) = \varphi(PS)/WS(F(0))$, то WS не зависит от PS .

Аналогичное неравенство можно построить для обратного отображения $F^{-1} : PS \rightarrow WS$.

Очевидно, что оценки $\varphi(PS)/WS(F(i))$ можно упорядочить таким образом, чтобы для $i, i + 1$ выполнялось неравенство $\varphi(PS)/WS(F(i)) \leq \varphi(PS)/WS(F(i + 1))$. При этом $\{F(i)\} = \Omega$, т. е. множество отображений $F(i)$ задает пространство Ω , которое определяет все многообразие гиперсетей с заданными сетями PS и WS .

Теперь можно определить степень сотрудничества в зависимости от $F(i)$. Степень сотрудничества PS с WS при заданном $F(i)$ определяется формулой $\Delta C(PS, WS) = \varphi(PS)/WS(F(j)) - \varphi(PS)/WS(F(0))$, а степень конфликта PS с WS — выражением $\Delta K(PS, WS) = -\Delta C(PS, WS)$.

Степень сотрудничества или конфликта сети PS с сетью WS , вообще говоря, не равна степени сотрудничества или конфликта сети WS с сетью PS . Обозначим через $\delta(PS, WS)$ степень эксплуатации сети PS сетью WS , т. е. $\delta(PS, WS) = \Delta C(PS, WS) - \Delta C(WS, PS)$. Очевидно, что $\delta(WS, PS) = \Delta C(WS, PS) - \Delta C(PS, WS)$. В зависимости от значений $\delta(PS, WS)$ и $\delta(WS, PS)$ можно определить различные типы эксплуатации.

Введенные выше понятия и параметры позволяют получить количественные характеристики S -гиперсетей при моделировании реальных систем сетевой структуры.

5. Классификация S -гиперсетей. Область применимости математической теории определяется не только свойствами математического объекта, но и его пластичностью. В частности, подробная классификация S -гиперсетей позволяет адекватно описать различные системы для структурного анализа и оптимизации.

В табл. 6–13 приведена базовая классификация S -гиперсетей, ориентированная на моделирование сложных систем сетевой структуры.

Таблица 6

Системная типология гиперсетей	
Классификационные признаки	Характеристики S -гиперсетей
Типы вложений	Экс-гиперсеть, парагиперсеть, эктогиперсеть, эндогиперсеть
Размерность	Конечная, бесконечная
Потоковая функция	Дискретная, непрерывная
Атрибуты	Детерминированная, случайная
Стабильность	Стационарная, нестационарная
Структура гиперсети	Каскадная, смешанная, параллельная
Разнообразие вторичных сетей	Однотипная, k -типная

Таблица 7

Системная типология первичных и вторичных сетей	
Классификационные признаки	Характеристики первичной и вторичных сетей
Тип математического объекта	Граф, гиперграф, гиперсеть
Ориентация	Ориентированная, смешанная, неориентированная
Сложность	Тривиальная, пустая, дерево, планарная, полная, произвольная
Однородность	Однородная, неоднородная
Весовые характеристики	Взвешенная, невзвешенная
Атрибуты	Детерминированная, случайная
Стабильность	Стационарная, нестационарная

Таблица 8

Системная типология элементов

Классификационные признаки	Характеристики элементов
Типы элементов	Узлы (вершины), ветви (ребра), полюсы (полусвязь)
Весовые характеристики	Взвешенный(ая,ое), невзвешенный(ая,ое)
Ориентация	Ориентированный, неориентированный
Время существования	Постоянно, по расписанию, случайное
Представление	Абстрактное, геометрическое
Число полюсов	Все полюсы, свободные полюсы

Таблица 9

Системная типология связей

Классификационные признаки	Характеристики связей
Способ соединения	Слияние, инцидентность, слабая инцидентность, смежность
Ориентация	Ориентированная, неориентированная
Время существования связи	Постоянно, по расписанию, случайное
Надежность соединения	С резервированием, без резервирования
Связь точечных элементов	Абстрактная (функциональная), физическая (геометрическая)
Связь элементов	Экс-вложение, паравложение, эктовложение, эндовложение

Топологическая типология

Таблица 10

Топологическая типология S -гиперсетей

Классификационные признаки	Топологические характеристики S -гиперсетей
Размерность пространства	Одномерное, двумерное, трехмерное
Род поверхности первичной сети	Плоская, k -го рода
Число уровней в иерархии	Обычная гиперсеть (два слоя), k уровней (слоев)
Число сетей на k -м уровне	Уровень 0 — первичная сеть, $N(k)$ — число сетей на уровне k
Размерность	Конечная, бесконечная
Тип укладки элементов вторичных сетей в первичной	Не укладываются, укладываются рядом с другими, укладываются на элементе, укладываются внутри элемента

Таблица 11

Топологическая типология вторичных сетей

Классификационные признаки	Топологические характеристики вторичных сетей
Тип математического объекта	Граф, гиперграф, ультраграф, гиперсеть
Наличие циклов	Циклическая, ациклическая
Ориентация	Ориентированная, неориентированная
Род графа	Плоский, k -го рода
Связанность графов вторичных сетей	Связанная (связана с другими вторичными сетями), свободная (связана только с первичной сетью)

Таблица 12

Топологическая типология элементов

Классификационные признаки	Топологические характеристики элементов
Типы элементов	Узел (вершина), ветвь (ребро), полюс (полусвязь)
Размерность	Без размера, линейный, плоский, объемный
Число полюсов	Без полюсов, k -полюсный
Представление	Абстрактное, геометрическое

Таблица 13

Топологическая типология связей

Классификационные признаки	Топологические характеристики связей
Ориентация полюсов	Неориентированные, ориентированные
Типы полюсов в элементах	Неоднородные, однородные
Разнообразие типов полюсов	Однотипные, разнотипные
Занятость полюсов	Занятые, свободные
Тип связи полюсов	Слияние, инцидентность, полуинцидентность

Приведенная выше классификация S -гиперсетей позволяет с большой точностью описать структуры реальных сложных систем при решении различных связанных с ними задач структурного анализа и оптимального синтеза. Следует отметить, что в основе данной классификации лежит классификация транспортных систем, предназначенных для передачи или перевозки информации, энергии или вещества (продукта) [2].

6. Маршруты и метрика в S -гиперсетях. Дана взвешенная гиперсеть $AS = (X, V, R)$; $X = (x_1, \dots, x_n)$ — вершины, $V(x_i)$ — вес вершины x_i ; $V = (v_1, \dots, v_m)$ — ветви; $l(v_j)$ — вес ветви v_j ; $R = (r_1, \dots, r_g)$ — ребра гиперсети; $AP = (X, V)$ — взвешенный граф первичной сети; $AW = (X, R)$ — вторичная сеть; $AF = (V, R)$ — гиперграф, определяющий структуру вложения AW в AP таким образом, что каждому ребру $r = (x, s) \in R$ будет сопоставлена (x, s) -цепь в первичной сети, следовательно, вес ребра $r = (x, s) \in R$ будет равен суммарному весу (x, s) -цепи в $AP = (X, V)$.

Приведем определения маршрутов, кратчайших маршрутов, кратчайших квазимаршрутов и слабых кратчайших маршрутов применительно к рассматриваемой задаче.

Маршрутом в гиперсети $S = (X, V, R)$ называется конечная последовательность $\mu = (x_1, r_1, x_2, \dots, x_{r-1}, r_{k-1}, x_k)$, составленная из элементов X, R таким образом, что вершины и ребра чередуются, а два любых соседних элемента инцидентны.

Квазимаршрутом в гиперсети $S = (X, V, R)$ называется конечная последовательность μ , в которой пара соседних элементов (x_i, r_i) инцидентны, а (r_i, x_{i+1}) слабоинцидентны.

Если в определении маршрута заменить “инцидентность” на “слабую инцидентность”, то получим определение слабого маршрута. Ориентированные маршруты определяются аналогично с учетом ориентации ребер (для сетей симплексной связи).

Длиной ребра (или его части) называется число ветвей, инцидентных этому ребру (части ребра). Длина $\rho\mu$ маршрута μ (квазимаршрута, слабого маршрута) равна суммарной длине ребер (частей ребер), входящих в маршрут μ .

Из определения маршрута в гиперсети $S = (X, V, R)$ непосредственно следует, что каждому маршруту μ в S между вершинами x и y соответствует маршрут μ в графе $WS = (X, R)$.

Расстояние $\rho(x_i, x_j)$ между парой вершин x_i и x_j в гиперсети S находится по взвешенному графу $WS^* = (X, R)$. Каждому ребру r_k графа WS^* ставится в соответствие длина, равная $|\{v_i\}|$, где $\{v_i\} = F(r_k)$. Таким образом, кратчайшие маршруты в гиперсетях могут быть найдены с помощью известных алгоритмов по графу WS^* . Для ориентированной гиперсети граф WS^* ориентируется.

Отношения квазиотдаленности и квазирасстояния несимметричны не только для ориентированных гиперсетей, но и для неориентированных гиперсетей.

Квазирасстояние $\rho(x_i, x_j)$ между парой вершин x_i и x_j гиперсети S можно найти по взвешенному орграфу $BS^* = (S, U)$, в котором длина дуги u_z равна числу ветвей в части ребра r_k , входящего в квазимаршрут, соединяющий вершины x_i и x_j гиперсети S .

Отношения слабой отдаленности и слабого расстояния играют большую роль при решении прикладных задач на гиперсетях.

В гиперсетях (ориентированных гиперсетях) слабое расстояние $\bar{\rho}(x_i, x_j)$ между вершинами x_i и x_j вычисляется с помощью взвешенного графа $DS^* = (X, U)$ ($\vec{DS}^* = (X, \vec{U})$), в котором ребру (дуге) u_z ставится в соответствие длина, равная сумме весов ветвей в цепи, соединяющей вершины x_i и x_j в гиперсети S .

Таким образом, отдаленность и расстояние для гиперсетей и оргиперсетей и для разных определений маршрутов можно вычислять с помощью известных методов на специально построенных графах, орграфах, гиперграфах и ультраграфах.

Маршрут μ называется простой цепью, если каждая вершина встречается в μ не более одного раза.

Для S -гиперсетей число определений увеличивается в несколько раз в зависимости от числа различных вторичных сетей, вложенных как в первичную сеть, так и друг в друга. Действительно, определение маршрутов зависит от выбора вторичной сети. Однако следует упомянуть о маршруте, который строится на объединении всех вторичных сетей. В качестве концевых вершин рассматриваются две вершины x и y первичной сети, к которым стянуты отображенные в них вершины вторичных сетей.

7. Метрика S -гиперсети. В данном пункте приведен ряд метрик, определяющих расстояние между вершинами и ребрами гиперсети, а также между вторичными сетями в S -гиперсети.

7.1. *Расстояние в гиперсетях.* Расстоянием (квазирасстоянием, слабым расстоянием) $\rho_{HS}(x, y)$ между вершинами x и y гиперсети $HS = (PS, WS)$ называется длина кратчайшего маршрута (квазимаршрута, слабого маршрута) между соответствующими вершинами

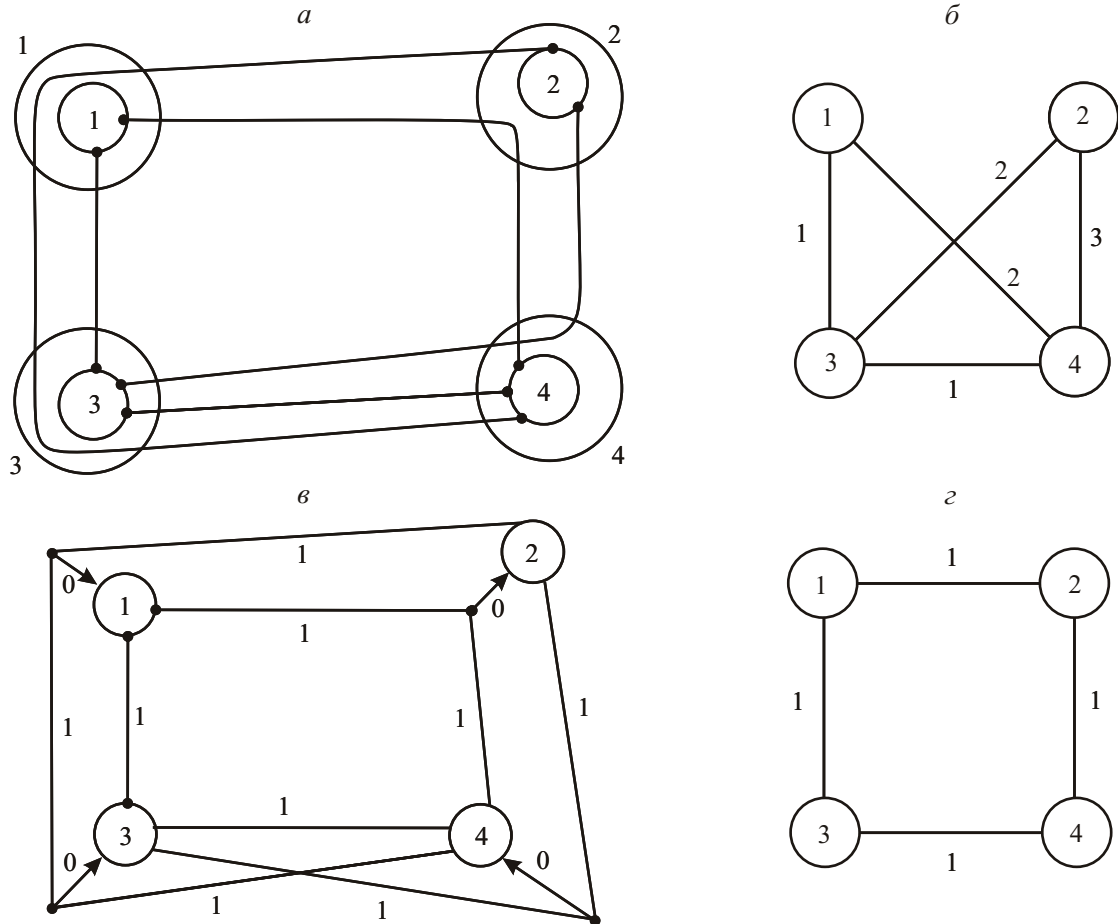


Рис. 6. Примеры сводимости гиперсети к соответствующим графам:
 а — гиперсеть; б — граф для вычисления кратчайших маршрутов; в — граф для вычисления кратчайших квазимаршрутов; z — граф для вычисления слабых маршрутов

$x, y \in X$. Очевидно, что $\rho_{HS}(x, y)$ определена на множестве всех пар гиперсети HS и удовлетворяет аксиомам Фреше:

- 1) рефлексивность $\rho_{HS}(x, y) = 0$, если $x = y$;
- 2) симметричность $\rho_{HS}(x, y) = \rho_{HS}(y, x)$;
- 3) транзитивность $\rho_{HS}(x, y) \leq \rho_{HS}(x, z) + \rho_{HS}(z, y)$.

Выполнение первой аксиомы очевидно.

Вторая аксиома неверна для квазимаршрутов, так как $\mu(x, y) \neq \mu(y, x)$, т. е. (x, y) -квазимаршруты противоположной направленности часто не совпадают.

Третья аксиома справедлива, поскольку для вычисления кратчайших маршрутов (квазимаршрутов, слабых маршрутов) нетрудно построить эквивалентные графы, в которых вычисляются кратчайшие (x, y) -маршруты в HS -гиперсети. Так как третья аксиома справедлива для графов и орграфов, то из сказанного выше следует справедливость аксиом Фреше для HS -гиперсети. Очевидно, что для квазирасстояния, как и для расстояния в орграфе, аксиома симметричности не выполняется. На рис. 6 приведены примеры сводимости гиперсети (рис. 6, а) к графам (рис. 6, б-з) для решения соответствующих задач поиска кратчайших маршрутов.

По аналогии с теорией графов можно ввести понятие эксцентриситета вершины $x \in X$. Основное отличие заключается в существовании трех видов эксцентриситета вследствие существования трех видов минимальных (x, y) -маршрутов:

- 1) $\varepsilon_\mu(x) = \max_{y \in X} \rho_\mu(x, y)$ соответствует кратчайшему (x, y) -маршруту;
- 2) $\varepsilon_{k\mu}(x) = \max_{y \in X} \rho_{k\mu}(x, y)$ соответствует кратчайшему (x, y) -квазимаршруту;
- 3) $\varepsilon_{PS}(x) = \max_{y \in X} \rho_{PS}(x, y)$ соответствует кратчайшему слабому маршруту в HS или маршруту в PS .

Тогда $R(HS) = \min_{x \in X} \varepsilon(x)$ — радиус (квазирadius, слабый радиус), а $D(HS) = \max_{x \in X} \varepsilon(x)$ — диаметр (квазидиаметр, слабый диаметр).

Если отображение WS в PS не задано, то имеет место следующая задача: для заданных PS и WS найти такое отображение WS в PS , чтобы $R(HS) \rightarrow \min / \max$ и $D(HS) \rightarrow \min / \max$.

В гиперсетях можно также находить расстояние между ребрами, переходя к более сложной метрике, чем та, которая обычно используется на графах. Ребро вторичной сети может быть реализовано по различным маршрутам, следовательно, взаимосвязь между ребрами зависит как от структуры графа WS вторичной сети, так и от трассы этого ребра в структуре первичной сети PS .

При решении ряда задач необходимо вычислять расстояние между ребрами вторичной сети в некоторой гиперсети $HS = (PS; WS) = (X, V, R; P, W, F)$. Пусть заданы два ребра r_i и $r_j \in R$. Расстояние между вершинами $x \in W(r_i)$ и $y \in W(r_j)$ обозначим $\rho_{r_i, r_j}(x, y)$ ($W(r_i)$ и $W(r_j)$ — множества вершин, по которым проходят ребра r_i и r_j соответственно). Вершину $y \in W(r_j)$, ближайшую к вершине $x \in W(r_i)$ в графе PS , обозначим $L_{r_j}(y) = \min_{x \in W(r_i)} \rho(x, y)$.

Пусть $L(r_i, r_j) = \max_{y \in W(r_j)} \min_{x \in W(r_i)} \rho(x, y)$. Ясно, что введенная таким образом величина $L(r_i, r_j)$ не является расстоянием, так как не удовлетворяет аксиоме симметрии.

Аналогично определим $L(r_j, r_i) = \max_{x \in W(r_i)} \min_{y \in W(r_j)} \rho(y, x)$. Следующее выражение определяет расстояние $\rho_{PS}(r_i, r_j)$ и является метрикой Хаусдорфа на гиперсети PS : $\rho_{PS}(r_i, r_j) = \max(L(r_i, r_j), L(r_j, r_i))$, иначе $\rho_{PS}(r_i, r_j) = \max\left\{ \max_{y \in W(r_j)} \min_{x \in W(r_i)} \rho(x, y), \max_{x \in W(r_i)} \min_{y \in W(r_j)} \rho(y, x) \right\}$, где $\rho(x, y)$ — расстояние между вершинами x и y в первичной сети PS .

На множестве ребер можно ввести так называемую равномерную метрику $\tilde{\rho}_{PS}(r_i, r_j) = \max_{x \in W(r_i)} \min_{y \in W(r_j)} \rho(x, y)$. Данная метрика удовлетворяет трем аксиомам Фреше.

Назовем величину $\varepsilon(r_i) = \max_{r_j \in R} \rho_{PS}(r_i, r_j)$ эксцентриситетом ребра $r_i \in R$. Ребро $r^* \in R$ будем называть серединным, если $\varepsilon(r^*) = \min_{r_i \in R} \varepsilon(r_i)$, и r^{**} -периферийным, если $\varepsilon(r^{**}) = \max_{r_i \in R} \varepsilon(r_i)$.

Величину $\varepsilon(r^{**}) = \Pi(HS)$ будем называть шириной гиперсети HS , а $\varepsilon(r^*) = O(HS)$ — отклонением гиперсети HS . Сложность задачи вычисления введенных характеристик является полиномиальной.

При решении ряда практических задач необходимо найти трассировки ребер WS в PS , так чтобы $\Pi(HS)$ и $O(HS)$ принимали экстремальные значения.

Представляет интерес задача проверки выполнения равенств реализаций WS в PS .

7.2. Расстояние в S -гиперсетях. В отличие от гиперсетей каждая вторичная сеть из $\{WS_i\}$ имеет собственный набор вершин $\{X^i\}$, такой что $|X^i| \leq |X^0| \forall i, j = 1, n$.

В отличие от гиперсетей расстояние в S -гиперсети $SH = (PS, \{WS_i\})$ определяется не только для вершин и ребер, но и для вторичных сетей WS . Вершины вторичных сетей в общем случае являются независимыми элементами и могут быть несвязанными. В данном случае эти сети могут быть несвязанными и в евклидовом пространстве. Поэтому

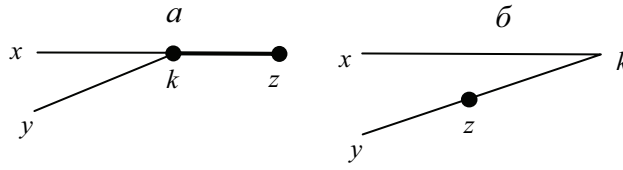


Рис. 7. Иллюстрация к аксиоме транзитивности для расстояний между сетями:

$$a - \rho(x, z) + \rho(z, y) > \rho(x, y); \quad б - \rho(x, z) + \rho(z, y) = \rho(x, y)$$

необходимы другие метрики, которые позволили бы оценить метрическую зависимость этих сетей.

Рассмотрим несколько метрик, связанных с разнообразием как элементов, так и способов построения функции расстояния. Для вершин $\bigcup_{i=0}^n X_i = X$ обычная метрика вычисляется по объединенному графу вторичных сетей (см. рис. 2,а) с рассчитанными весами ребер. Аналогично можно построить графы для вычисления квазирасстояний и слабых расстояний.

7.3. *Расстояние между сетями.* В зависимости от задач на S -гиперсети SH можно рассмотреть метрики, более адекватные поставленным задачам. В данном пункте не рассматриваются конкретные задачи, основное внимание уделено различным сетевым метрикам.

Рассмотрим метрику вложений. Пусть две сети W_i и W_j лежат на слоях $x_i, y_j \in R$ соответственно. Пусть у этих сетей имеется общий предок W_z , лежащий на слое Z_K . Тогда $\rho_V(W_i, W_j) = (i - k) + (j - k)$. Определенное таким образом расстояние является метрикой.

Действительно, при $i = j$ $\rho_V(W_i, W_j) < 0$. Верна также аксиома симметрии. Покажем, что выполнено условие транзитивности. В силу того что между любой парой вершин x, y в дереве вложений существует один путь, возможны два случая: 1) $\rho(x, z) + \rho(z, y) > \rho(x, y)$ (рис. 7,а); 2) $\rho(x, z) + \rho(z, y) = \rho(x, y)$ (рис. 7,б). Таким образом, на S -гиперсети задается метрическое пространство вложений (отображений).

Представляет интерес еще одна метрика. Для сетей W_i и W_j , применяя операции исключения промежуточных сетей, получим отображение W_i и W_j на первичную сеть PS . Тогда множествам ребер W_i и W_j будут соответствовать множества ветвей в PS , $N(W_i)$ и $N(W_j)$ соответственно.

Определим между сетями W_i и W_j расстояние $\rho_P(W_i, W_j) = \|N(W_i) \cup N(W_j) \setminus N(W_i) \cap N(W_j)\|$. Покажем, что введенное таким образом расстояние индуцирует псевдометрику $MP\{SH = (PS, W_i, W_j)\}$: из определения и из равенства $\rho_P(W_i, W_j) = 0$ не следует, что $W_i = W_j$.

Аксиома симметричности выполняется вследствие коммутативности операций \cap и \cup .

Покажем, что выполняется условие транзитивности. Так как на множества $N(W_i)$ и $N(W_j)$ не накладываются ограничения, то для произвольных подмножеств $Z, X, Y \in N$ справедливо неравенство $|(X \cup Y) \setminus (X \cap Y)| < |(X \cup Z) \setminus (Z \cap X) \cup ((Z \cup Y) \setminus (Z \cap Y))|$. Равенство имеет место, если $Z \subset X \cup Y$.

Очевидно, что в данной метрике максимальное расстояние между W_i и W_j равно $\rho(W_i, W_j) = |N(W_i) \cup N(W_j)|$, т. е. не зависит от их расположения в PS , если эти сети не пересекаются.

Для $S\tilde{H} = (PS, W_i, \dots, W_n)$ можно предложить метрику Громова — Хаусдорфа. Пусть $b = \rho(W_l, W_k) = \min_{\forall j} \max_{\forall i} \rho_H(r_i^k, r_j^l)$, где $\rho(r_i^k, r_j^l)$ — метрика на пространстве всех ребер по

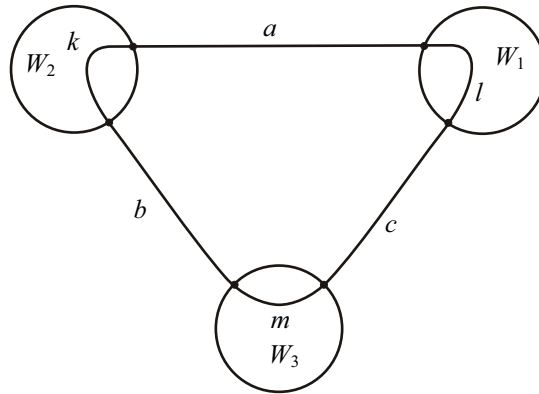


Рис. 8. Пример для доказательства справедливости метрического пространства

Хаусдорфу; $r_i^k \in W_i$; $r_j^l \in W_j$. Как и для предыдущих метрик, выполнены требования рефлексивности и симметричности.

Покажем, что для введенного расстояния выполнено условие транзитивности. Так как метрика Громова — Хаусдорфа справедлива на любых метрических пространствах, в которые отображены графы $\{W_i\}$, условие транзитивности выполняется, вследствие того что граф первичной сети PS является метрическим пространством.

Рассмотренные выше метрики не являются исчерпывающими для вторичных сетей S -гиперсети SH . Например, расстояние между графами вторичных сетей можно измерить следующим образом. Пусть задан граф объединенных вторичных сетей $\tilde{W} = \{\bigcup_{i=1}^k W_i \bigcup_{l=1}^n G_l\}$ (графы $\{G_l\}$ соединяют полюсы в каждом узле Y_l (см. рис. 2,а)). Для определения расстояния между графами W_i и W_j достаточно в графе \tilde{W} вершины W_i и W_j склеить в x_{W_i} и y_{W_j} . Тогда $\rho_{PS}(W_i, W_j) = \rho_{\tilde{W}}(x_{W_i}, y_{W_j})$.

Выполнение условий рефлексивности и симметричности следует из способа построения графа \tilde{W} .

Рассмотрим ситуацию, приведенную на рис. 8. Здесь $\rho(W_1, W_2) = a$, $\rho(W_1, W_3) = b$, $\rho(W_2, W_3) = c$. Покажем, что $b + m + c \geq a$.

Очевидно, что $b + c \geq a$, так как $k = 0$ и $l = 0$. Справедливость неравенства следует из того, что W_k и W_l отображены в точки, а $\rho_{\tilde{W}}(W_k, W_l) = a$ — длина кратчайшего маршрута. Таким образом, введенное выше расстояние является метрикой на метрическом пространстве $HS = (PS, W_i, \dots, W_n)$.

8. Устойчивость. S -гиперсеть называется устойчивой, если при заданном воздействии на ее структурные элементы численные характеристики сети остаются в определенных интервалах.

8.1. *Операции над элементами сети или всей сетью.* В данном пункте рассматриваются некоторые операции над элементами S -гиперсети, которые приводят к ее изменению.

1. Удаление элементов (рис. 9):

- узлов (общее удаление, внутреннее, внешнее);
- вершин с инцидентными ребрами, т. е. вершин в графе вторичной сети;
- ветвей с инцидентными ребрами;
- ребер в графе вторичной сети;
- полюсов;
- связей между сетями.

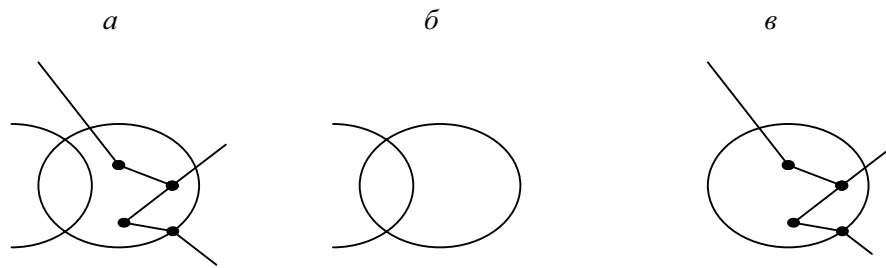


Рис. 9. Удаление элементов:

a — элементы не удалены, *б* — внутреннее удаление, *в* — внешнее удаление

2. Изменение весовых характеристик элементов сетей:

- узла (с соответствующими весом, стоимостью, пропускной способностью);
- ветви (с соответствующими длиной, стоимостью, пропускной способностью);
- вершины (с соответствующими весом, стоимостью, пропускной способностью);
- ребра (с соответствующими длиной, стоимостью, пропускной способностью);
- связей (с соответствующими длиной, стоимостью, пропускной способностью).

3. Изменение структуры вложений (операций):

— малые изменения: перетрассировка ребра; перетрассировка k -ребер; смена отображений (вложений) двух вершин; циклическая перестановка вершин в узлы первичной сети; склеивание вершин;

— большие изменения: изменение структуры вложений вторичных сетей в первичную; перетрассировка всех ребер; переадресация всех вершин вторичной сети (т. е. новое отображение вторичной сети в первичную); исключение промежуточной вторичной сети $a \rightarrow b \rightarrow c \Rightarrow a \rightarrow c$.

4. Изменение способа укладки: случайная укладка (отображение); специальная укладка (по заданному сценарию); оптимальная укладка.

8.2. *Характеристики и атрибуты сети.* В данном пункте рассматриваются основные структурные и численные характеристики, используемые в постановках различных задач теории S -гиперсетей.

1. Структурные характеристики гиперсети:

1.1. Метрические (диаметр, радиус, матрица расстояний).

1.2. Потокосые (минимальный (s, t) -разрез, максимальный поток).

1.3. Связность (компактная связность, тотальная связность, K -связность, локальная (s, t) -связность (квазисвязность, слабая связность)).

1.4 Числа гиперсети (максимальная клика, минимальное покрытие, обхват, максимальная укладка и др.).

1.5. Свойства (гамильтонова, эйлерова, (k, d) -устойчивая, потокоустойчивая и др.)

2. Численные характеристики S -гиперсети.

2.1. Характеристики вершин:

- $\sigma^W(x)$ — степень x (число инцидентности) (число ребер в W , инцидентных вершине x);
- $\delta^W(x)$ — валентность (число полюсов).

2.2. Характеристики узлов:

- $S_V^H(y)$ — V -степень узла $y \in H$ (число ветвей);
- $S_r^H(y)$ — r -степень узла $y \in H$ (число ребер);
- $V^H(y)$ — валентность узла (число полюсов гиперсети H);

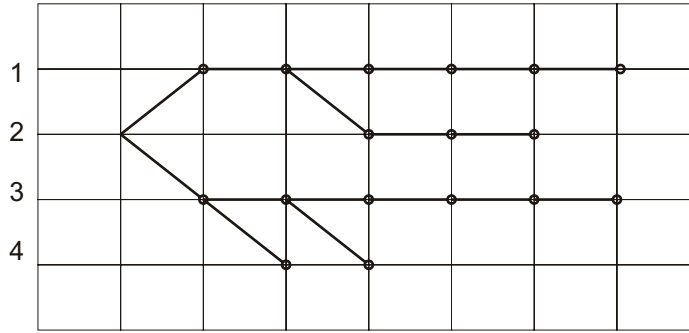


Рис. 10. Структура вложений графов городской транспортной системы

- $R^{W_i}(y)$ — ранг узла (число вершин (отображений), вложенных в $y \in W_i$);
- $R(y)$ — абсолютный ранг узла $y \in PS \subset H$ (число вершин всех сетей, отображенных в узел y).

2.3. Характеристики ребер:

- $S_X^W(r)$ — X -степень ребра $r \in W$ (число вершин, инцидентных ребру y);
- $S_V^W(r)$ — V -степень ребра $r \in W$ (число ветвей, инцидентных ребру $r \in W_i$).

2.4. Характеристики ветвей:

- $S_Z^H(v)$ — r -степень ветви $v \in H$ (число ребер, инцидентных v);
- $S_X^H(v)$ — x -степень ветви $v \in H$ (число вершин, инцидентных v).

2.5. Характеристики сетей и конфигурации:

- глубина $h(SH)$ (число ярусов);
- ширина $p(SH)$ (максимальное число сетей в ярусе);
- спектр $s(SH) = \{r(l) | l = 1, \dots, n\}$;
- число сетей;
- ранг слоя $r(l)$ — число сетей в l -м слое;
- $S(l)$ — степень слоя (число сетей в примыкающих слоях);
- $S(W_i)$ — степень сети (число сетей, непосредственно вложенных в сеть W_i);
- $\chi(W_i) = (n, m, g, l, W_i)$ — структурная характеристика сети W_i (n — число вершин; m — число ребер; g — число вложенных сетей; l — номер слоя; W_j — сеть подложки (первичная сеть для W_i)).

На рис. 10 показан пример сети, имеющей следующие характеристики: глубина $h(SH) = 7$, ширина $p(SH) = 4$, спектр $s(SH) = (1, 2, 3, 4, 3, 3, 2)$, число сетей $n(SH) = 18$; $r(l) = l$ при $l = 1 \div 4$.

9. Управляемость. Важным направлением в теории гиперсетей является исследование поведения структурных и других характеристик гиперсетей с учетом изменения отображений заданных вторичных сетей в первичную.

Частично упорядоченная последовательность $\eta = \{PS, WS_1, \dots, WS_k\}$ называется псевдогиперсетью, если не определены отображения $\psi(WS, PS)$, $\psi(WS_j, WS_i)$ ($j < i$) для всех соседних пар вторичных сетей из η .

Псевдогиперсеть $SH = (PS, WS, \psi(WS, PS))$ будем называть управляемой, если оператор $\psi(WS, PS)$ принимает значение из области Ω . Множество Ω задает множество эквивалентных гиперсетей $\Omega(SH) = \{SH = (PS, WS, \psi(WS, PS)) \in \Omega\}$.

Задача. Пусть заданы псевдогиперсеть $SH = (PS, WS) \in \Omega$ и некоторая структурная характеристика $\beta(SH)$ гиперсети $SH \in \Omega(SH)$. Требуется найти гиперсеть $SH^0 \in \Omega(SH)$, так чтобы значение $\beta(SH^0)$ было экстремальным или находилось в заданном интервале.

Так как $|\Omega| = O(n!m!)$, то в общем случае данная задача решается методом перебора.

В дальнейшем псевдогиперсеть SH будем называть управляемой гиперсетью и обозначать $SH^\Omega = (PS, WS, \psi(WS, PS) \in \Omega)$.

Псевдогиперсеть, в которой не отображены только ребра, называется слабоуправляемой; если не отображены еще и вершины, то псевдогиперсеть называется сильноуправляемой. Если $\psi(WS, PS)$ определено, то псевдогиперсеть не является управляемой. В том случае если в иерархической гиперсети $SH = (PS, WS_1, \dots, WS_k)$ все пары (WS_{i+1}, WS_i) управляемы, гиперсеть SH абсолютно управляема, а если не все, то относительно неуправляема.

Псевдогиперсеть $SH = (PS, WS)$ называется воспроизводимой (достижимой, доступной) относительно $\psi(WS, PS) \in \Omega$, если значение $\beta(SH)$ принадлежит заданному интервалу при некотором отображении $\psi(WS, PS)$.

10. Некоторые приложения теории S -гиперсетей. В ранее опубликованных работах автора большая часть приложений теории гиперсетей была связана с областью телекоммуникаций и связи [1]. В работе [2] рассмотрены некоторые задачи оптимизации транспортных сетей мегаполиса. Ниже рассматриваются некоторые структурные модели городских сетей связи, а также транспортной системы, в которых математическим объектом является S -гиперсеть.

10.1. *Структурные модели транспортных сетей мегаполиса.* Транспортная инфраструктура мегаполиса представляет собой сложную иерархическую нестационарную систему сетевой структуры. Проектирование (развитие) системы предполагает поэтапную модернизацию сети с учетом перспективы и наличия соответствующего финансирования. Вся транспортная инфраструктура является интегральной взаимосвязанной системой сетей различного вида, принадлежащих различным собственникам, которая предназначена для удовлетворения социальных, экологических, финансовых, коммунальных и других потребностей жителей города, связанных с качеством доставки.

По возможности математическая модель должна объединять все факторы, влияющие на облик и функционирование транспортной системы. Рассмотрим примеры взаимодействия различных городских пассажирских сетей. На рис. 11 представлена S -гиперсеть с тремя видами транспортных систем: метро, автобус, трамвай.

10.2. *Транспортные единицы (треды), элементы и узлы транспортной системы.* Здесь и далее в качестве транспортных единиц рассматриваются автомобильный и электрический транспорт, а также гужевые повозки и другие участники дорожного движения:

— автомобильный транспорт: маршрутный пассажирский; индивидуальный пассажирский; грузовой; служебный; скоростной (с сиреной и мигалкой); специальный;

— электрический транспорт: троллейбусы, трамваи, скоростные электрички, электропоезда, метро, фуникулер, скоростной трамвай;

— узловая основа транспортных сетей: транспортные узлы; перекрестки дорог; стоянки, остановки общественного транспорта и других участников движения; парковки и другие места долговременных стоянок тредов; конечные остановки транспорта, вокзалы, автостанции, порты и другие места загрузки и разгрузки транспортных единиц;

— средства управления движением: светофоры; информационные щиты и электронные табло; дорожные знаки и указатели; дорожная разметка; полосы разгона и торможения на перекрестке; посты ГИБДД; правила дорожного движения; индивидуальные информационные и навигационные системы.

10.3. *Уровни дорожно-транспортной сети.* Уровни дорожно-транспортной сети (ДТС) задают структуру S -гиперсети для формального описания.

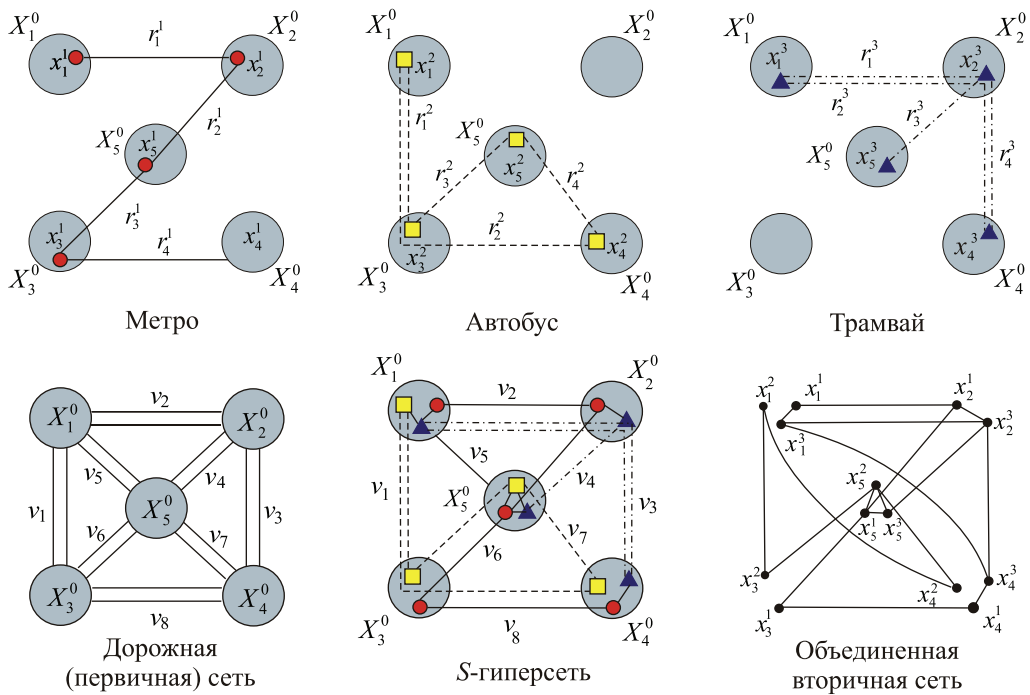


Рис. 11. Пример объединения (суммирования) всех вторичных сетей S -гиперсети $H = (G_0(G_1, G_2, G_3))$

1. Основа ДТС: уличная сеть города, площади и перекрестки, туннели, внутридворовые проезды, стоянки и гаражи, различные препятствия и др.
2. Дороги и другие транспортные линейные сооружения: дорога включая поперечное сечение между внешними границами тротуаров; проезды, рельсы (трамвая, метро, электропоезда и др.), эстакады, мосты и другие инженерные сооружения, предназначенные для проезда транспорта.
3. Проезжая часть (границами проезжей части являются тротуары (обочины), газоны, отделяющие проезжую часть от тротуаров, или разделительная полоса).
4. Полоса движения — любая из продольных полос на проезжей части независимо от дорожной разметки, имеющая ширину, достаточную для движения в один ряд нерельсовых транспортных средств. Конечными узлами полос являются участки проезжих частей (аллели) между перекрестками, разветвлениями и другими узлами дорожной сети; рельсовые пути; полосы движения на дорогах; полосы движения с контактными проводами для троллейбусов; монорельсы.
5. Локусы — локальные участки сети на полосах движения, соответствующие местам, занимаемым транспортными единицами в течение определенного интервала времени.
6. Маршруты движения транспорта: утвержденные маршруты городского пассажирского транспорта; маршруты автотранспорта предприятий; маршруты индивидуальных и других транспортных единиц (тредов).
7. Графы аллелей — множество вершин, соответствующих пересечению стоп-линий с полосами движения на перекрестках, разветвлениях и в других узлах дорожной сети. Ребрам сопоставляются аллели — участки полос на проезжей части. Фактически этот граф описывает структуру движения транспорта, определяемую дорожной разметкой и специальными знаками. Таким образом, аллель является непрерывной полосой движения между узлами, остановка в которых необходима в силу правил дорожного движения.

8. Граф локусов — наибольший граф по количеству вершин и ребер среди вторичных сетей S -гиперсети транспортной системы города. Этот граф строится следующим образом. Аллели разбиваются на участки, в каждом из которых может находиться не более одного треда. В данном случае вершинами являются возможные остановки транспорта или границы между локусами. Две вершины считаются смежными, если тред может быть перемещен из одной вершины в другую за один такт процесса движения.

10.4. *Задачи анализа и оптимизации для транспортных систем мегаполиса.* В данном пункте приведены названия задач, которые рассматриваются и решаются учениками автора.

1. Моделирование транспортных потоков:

- математические модели потоков основных транспортных единиц внутри города;
- анализ транспортных потоков;
- распределение (проектирование) различных городских транспортных подсистем;
- классификация, моделирование и оптимизация транспортных развязок.

2. Модели передвижения пассажиров и товаров по городу:

- математические модели пассажиропотоков на городском транспорте;
- анализ и оптимизация маршрутов для пассажиров на городском и личном транспорте;
- математические модели грузопотоков и их оптимизация;
- организация транспортных потоков для обеспечения событийных переездов.

3. Управление транспортными системами:

- управление потоками транспортных средств путем расстановки разметок и развязок;
- управление потоками посредством светофоров и других сигнальных средств;
- оптимальное управление городскими транспортными системами и алгоритмы маршрутизации транспортных единиц;
- мониторинг движения транспорта и пешеходов.

4. Математические модели для задач оптимального размещения пунктов обслуживания транспортных средств и населения:

- бензозаправок и СТО;
- гаражей и других мест хранения транспортных единиц;
- остановок и временных стоянок транспортных единиц;
- мест обслуживания населения с использованием городского транспорта и др.

10.5. *Задача управления светофорами на перекрестках любой конфигурации.* Пусть задана S -гиперсетевая модель любого транзитного перекрестка, т. е. на окружности диска геометрической модели узла y_j располагаются полюсы, соответствующие входам на перекрестке. Пусть пара полюсов соединяется ребром $u_i^j = (x_k^j, x_l^j)$ и имеет место поток транспорта из полюса x_k^j в полюс x_l^j . В результате получаем граф $P_i = (X, U)$, соответствующий потокам транспорта через перекресток y_j . Вес $V(u_i^j)$ характеризует величину потока машин за определенный промежуток времени. Если S -гиперсеть нестационарная, то величина $V(u_i^j)$ зависит от времени t . Как правило, сутки можно разделить на несколько частей, в каждой из которых значение $V(u_i^j, t_i)$ изменяется незначительно. Для каждого выделенного промежутка Δt_i можно составить расписание работы светофоров.

Очевидно, что минимальное число тактов работы светофоров определяется необходимостью пропуска трафика по независимым путям проезда через перекресток. Длительность работы одного такта определяется величиной потока машин, для которых разрешен проезд за данный такт.

Сформулируем постановку задачи управления светофором. Множеству всех дуг $\{u_i^j\}$, $i = 1, \dots, n_j$ заданного перекрестка y_j сопоставим n_j — вершины некоторого графа

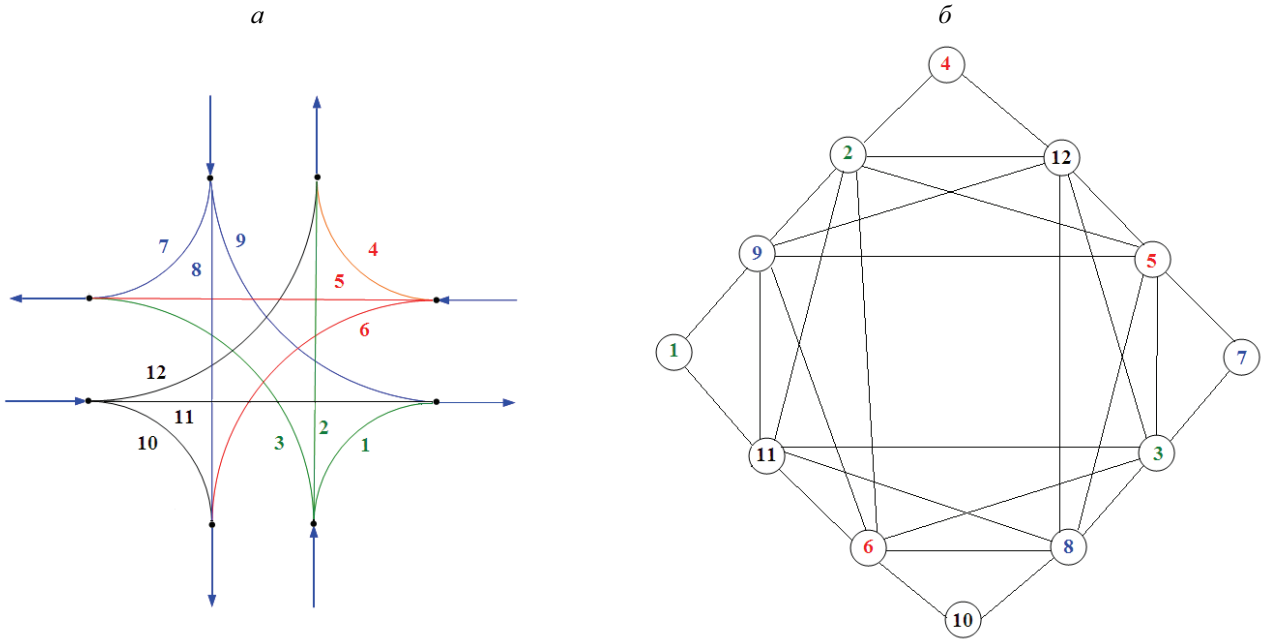


Рис. 12. Пример задачи управления перекрестками:
 а — модель перекрестка; б — граф зависимости потоков

$G = (U, R)$. Две вершины u_k^j и u_l^j смежны в G , если смежны соответствующие им дуги в орграфе $P_j = (X, U)$ перекрестка y_j .

Очевидно, что в графе P_j любому пустому подграфу P_i^k соответствует независимое множество потоков. В данном случае такое подмножество может быть максимальным. Семейство $\{P_i^k\}$ пустых подграфов, таких что $\bigcup_k P_i^k = P_i$, определяет расписание работы светофоров, если наряду с открытием полос для движения определена длительность работы каждого такта светофора.

Введем следующие обозначения: $\tilde{X}_i^j = (x_1^j, x_2^j, \dots, x_k^j)$ — подмножество вершин в X , таких что подграф $P^j = (\tilde{X}^j, U^j)$ является пустым, т. е. $u^j = 0$; $V(X_i^j)$ — вес вершины x_i^j ; $b_j = \max V(X_i^j)$. Тогда целевая функция задачи имеет вид $\Psi = \sum_{j=1}^z b_j \rightarrow \min$ при условии

$$\bigcup_{i,j} X_i^j = X.$$

Таким образом, семейство подграфов $P = \{P^j\}$ покрывает все вершины графа G и не содержит ни одного ребра из b , т. е. $P \cap G = X$. Очевидно, что некоторое расписание работы светофора получается из решения Ψ следующим образом. Для каждого подмножества независимых полос, соответствующих P^j , время работы на j -м такте определяется выражением

$$\Delta t^j = \frac{T}{\sum_j b^j} b_j,$$

где T — циклический период работы светофора.

На рис. 12 приведен пример узла гиперсети со всевозможными потоками между полюсами.

Заключение. В работе рассмотрены некоторые основные понятия и определения теории S -гиперсетей. Показано, что в рамках данной теории можно строить адекватные модели для решения различных задач для систем сетевой структуры.

Список литературы

1. Попков В. К. Математические модели живучести сетей связи. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1990. 233 с.
2. Попков В. К. Математические модели связности. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2006. 490 с.
3. Попков В. К. Методы оптимизации структур зонных сетей связи / В. К. Попков, С. Б. Кауль, М. И. Нечепуренко. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1983. 182 с.
4. Попков В. К. Математические модели и методы оптимизации городских транспортных систем // Материалы 2-й Всерос. конф. "Проблемы оптимизации и экономические приложения", Омск, 29 июня — 4 июля 2009 г. Омск: Б. и., 2009. С. 80–81.

*Попков Владимир Константинович — д-р физ.-мат. наук, проф.,
гл. науч. сотр. Института вычислительной математики
и математической геофизики; e-mail: popkov@sscc.ru*

Дата поступления — 2.09.2010