МИКРОСКОПИЧЕСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ
Аналитический обзор

П. С. Кравченко, Г. А. Омарова

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
630090, Новосибирск, Россия

УДК 519.179.2+512.23

Проведен анализ микроскопических моделей транспортных потоков. Рассмотрены модели следования за лидером, оптимальной скорости, разумного водителя (модель Трайбера) и клеточные автоматы.

Ключевые слова: модель, клеточный автомат, расстояние, скорость, ускорение, регулярная решетка.

This paper analyse microscopic traffic flow models. Following models are considered: car-following model, optimal velocity model, intelligent driver model and cellular automata model.

Key words: Model, cellular automata, distance, speed, acceleration, regular grid.

Введение. Существует ряд проектов, направленных не только на моделирование транспортных потоков, но и на предсказание возможных ситуаций на дороге и минимизацию нагрузок на транспортную сеть. Так, например, в исследовательском проекте для Департамента транспорта Техаса ставилась задача предсказания возникновения пробок и условий, которые могут поспособствовать ДТП [1]. Подход, использованный для данного исследовательского проекта, заключался в комбинации моделирования транспортных потоков, использования статистических методов и архивных и текущих данных о транспортных потоках. Другой пример подобной системы для предсказания пробок с рассылкой информации на мобильные телефоны, выполненной для города Лагос в Нигерии, описан в работе [2]. Схожие проекты по предсказанию ситуации на дороге рассматриваются в Канаде, Финляндии и других странах [3, 4], существуют также коммерческие пакеты для подобного рода предсказаний, например IBM Intelligent Transportation.

Процесс моделирования транспортных потоков позволяет получить информацию, которая помогает принимать решения о дальнейшем развитии и управлении транспортной системой. В частности, моделирование позволяет определить потребности в постройке новых или расширении старых дорог, транспортных систем и терминалов, размещении новых светофоров и дорожных знаков или изменении расположения уже имеющихся. Грамотное планирование развития дорожной сети на основе полученных данных позволяет снизить нагрузку на транспортную сеть, избежать пробок и уменьшить среднее время в пути для водителей.

Несмотря на то, что первые фундаментальные работы по математической теории управления транспортными потоками были выпущены десятилетия назад, по мнению ряда известных специалистов, проблема образования предзаторных и заторных ситуаций еще до конца не изучена. Данная область сейчас активно развивается, и появляется множество новых работ. В качестве примеров академических журналов, посвященных динамике автомобильного транспортного движения, можно привести издания “Transportation Research” и “Operation Research”.

Исследование и моделирование транспортных потоков с помощью микро- и макромоделей позволяет определить объем загрузки и интенсивность потоков. Современные тенденции в этой области направлены на создание специализированных информационных систем, управляющих конкретными городскими регионами и учитывающие их специфику. В мировой практике для решения подобных проблем применяются методы математического моделирования различной сложности и создаются компьютерные стенды, демонстрирующие полученные решения на макетах реальных дорог и перекрестков. Специализированные информационные системы современных городских мегаполисов способны, например, решать такие задачи: оценивать интенсивность потоков транспорта на магистралях и управлять скоростью движения с учетом времени суток, погодных условий и времен года; оценивать экологическую обстановку в районе управления и давать рекомендации по ее улучшению.

В предложенной работе рассматриваются наиболее распространенные микроскопические математические модели транспортных потоков и приводится их сравнительный анализ. В начале рассматриваются однорядные микроскопические модели, такие как модель оптимальной скорости, модель следования за лидером, модель “разумного водителя” и модель клеточных автоматов. В основе всех этих моделей лежит концепция сохранения при движении безопасной дистанции до лидера. Для приведенных моделей выполняется сравнение их достоинств и недостатков. В конце рассматривается переход к многорядной модели для клеточных автоматов.

Микроскопические модели. Микроскопическими называются модели, в которых явно моделируется движение каждого автомобиля [5]. Такой подход позволяет теоретически достичь более точного описания движения автомобилей по сравнению с усредненным макроописанием, однако этот подход требует больших вычислительных ресурсов при практических применениях.

Первые микроскопические модели появились в 1950-х годах [5]. Для описания микромоделей нам потребуется ввести некоторые понятия и некоторую нумерацию автомобилей.

Под *плотностью потока* ρ будем понимать количество автомобилей на единицу длины в фиксированный момент времени в окрестности заданной точки трассы. Также будем называть *фундаментальной диаграммой* функциональную зависимость между величиной потока автомобилей и плотностью.

Пусть автомобили имеют нумерацию, соответствующую порядку их следования. В микромоделях предполагается, что ускорение n-го автомобиля определяется состоянием соседних автомобилей. При этом основное влияние оказывает впереди идущий автомобиль. Этот автомобиль часто называют лидирующим, а весь класс микромоделей — моделями “следования за лидером”.

Модель следования за лидером. В первых вариантах модели следования за лидером предполагалось, что каждый водитель изменяет свою скорость в соответствии с изменением скорости впереди идущего автомобиля. Простейшим вариантом предложенной модели является следующая модель:

$$\ddot{x}_{i+1}(t) = \frac{1}{\tau}\left(\dot{x}_i(t) - \dot{x}_{i+1}(t)\right), \tag{1}$$

где τ — время согласования скоростей двух соседних автомобилей, $\dot{x}_n(t)$ и $\ddot{x}_n(t)$ — скорость и ускорение n-го автомобиля соответственно.

К недостаткам данной модели можно отнести то, что она не описывает свойств неустойчивости, процессов возникновения ударных волн и заторов. Был предложен ряд ее модификаций. Например, в [6] предлагается ввести задержку аргумента $t_d \approx 1,3$ с, характеризующую время реакции водителя на изменение скорости лидирующего автомобиля. Множитель $1/\tau$ можно интерпретировать как коэффициент чувствительности α, характеризующий скорость реакции водителя к изменению скорости лидера. Таким образом, нашу модель можно переформулировать в виде следующего дифференциального уравнения:

$$\ddot{x}_{i+1}(t+t_d) = \alpha \left(\dot{x}_i(t) - \dot{x}_{i+1}(t)\right). \tag{2}$$

При $\alpha = const$ условие неустойчивости для приведенной модели имеет вид $t_d/\tau > 1/2$. Неустойчивость позволяет моделировать волны и заторы, но предположение о неизменности чувствительности не позволяет воспроизвести фундаментальную диаграмму. Более адекватная модель может быть получена, если учесть, что при уменьшении дистанции до лидирующего автомобиля чувствительность возрастает. В 1959 г. Д. Газис, Р. Хермн, Р. Потс предложили микромодель [7], учитывающую приведенные выше соображения:

$$\ddot{x}_{i+1}(t+t_d) = \alpha \frac{\dot{x}_i(t) - \dot{x}_{i+1}}{x_i(t) - x_{i+1}(t)}, \alpha > 0. \tag{3}$$

После интегрирования получившегося уравнения, получаем

$$\ddot{x}_{i+1}(t+t_d) = \ln\left(\rho_{max}\left(\dot{x}_i(t) - \dot{x}_{i+1}(t)\right)\right), \tag{4}$$

где ρ_{max} — константа, описывающая движение автомобилей в плотном потоке на очень близком расстоянии “бампер-к-бамперу”.

Когда транспортный поток является стационарным, плотность ρ выражается формулой $\rho = 1/\left(x_i(t) - x_{i+1}(t)\right)$, а так как скорость в стационарном режиме постоянна, то

$$v = \alpha \ln \frac{\rho_{max}}{\rho}, \rho > \frac{1}{L}, \tag{5}$$

где L — средняя длина автомобиля. Эта зависимость была экспериментально обнаружена Х. Гринбергом в 1959 г. по данным для туннеля Линкольна в Нью-Йорке [7].

В 1961 г. Д. Газис, Р. Херман и Р. Розэри предложили следующую модель (которая является обобщением предыдущей):

$$\ddot{x}_{i+1}(t+t_d) = \alpha \frac{\left(\dot{x}_{i+1}(t+t_d)\right)^{m_1}}{\left(x_i(t) - x_{i+1}(t)\right)^{m_2}} \left(\dot{x}_i(t) - \dot{x}_{i+1}(t)\right), \alpha > 0, \tag{6}$$

где $m_1(< 1), m_2(> 1)$ — эмпирически подбираемые константы ($m_1 \approx 0,8, m_2 \approx 2,8$). На основе этой микроскопической модели путем интегрирования можно получить уравнение состояния транспортного потока:

$$V(\rho) = V^0 \left(1 - \left(\frac{\rho}{\rho_{max}}\right)^{m_2 - 1}\right)^{\frac{1}{1-m_1}}, \tag{7}$$

где V^0 — скорость свободного движения (желаемая скорость, максимально возможная скорость), а $V(\rho)$ — скорость движения в потоке с плотностью ρ.

Рассмотренная простейшая модель не описывает возникновение заторов, ударных волн и свойств неустойчивости. Помимо этого, динамика одиночного автомобиля также является некорректной. Однако для исправления приведенных недостатков был предложен ряд модификаций, таких как введение задержки, отражающей время реакции водителей на изменение скорости.

Модель оптимальной скорости. Одной из первых моделей оптимальной скорости была модель Ньюэлла (1961 г.) [8]. В этой и других микроскопических моделях, принадлежащих рассматриваемому классу, предполагается, что для каждого водителя существует "безопасная" скорость движения, зависящая от дистанции до лидера. Модель Ньюэлла можно сформулировать следующим образом:

$$v_{i+1}(t+\tau) = V\left(\frac{1}{x_i(t) - x_{i+1}(t)}\right),$$

где τ — время, характеризующее реакцию водителей, $V'(\rho) < 0$.

Зависимость интенсивности потока от плотности ρ в окрестности ρ_{max} можно записать следующим образом: $Q(\rho) = \rho V(\rho)$. Поведение потока вблизи точки $\rho_{max} \sim 1/L$ можно описать следующим образом:

$$V(\rho) = \frac{1/\rho - L}{\tau}.$$

Отсюда для левой окрестности точки ρ_{max} можно получить следующее выражение:

$$Q(\rho) = -\frac{L}{\tau}(\rho - \rho_{max}).$$

Малое возмущение в модели оптимальной скорости приводит к развитию затора, если выполнено условие неустойчивости

$$2\rho^2 |V'(\rho)|\tau < 1.$$

К недостаткам модели следования за лидером можно отнести то, что она некорректно описывает динамику одиночного автомобиля. В модели следования за лидером в случае отсутствия лидера ускорение равно нулю, в то время как разумным является предположение о стремлении водителя приблизить свою скорость к некоторой желаемой скорости v_n^0. Влияние лидера косвено выражено через зависимость оптимальной скорости от дистанции. Модель оптимальной скорости очень чувствительна к конкретному выбору функциональной зависимости оптимальной скорости от дистанции. При больших значениях τ в модели начинают происходить столкновения автомобилей, в то время как при слишком малых значениях возникают нереалистично большие ускорения.

Модель разумного водителя (модель Трайбера). Как было показано в предыдущих пунктах, модели оптимальной скорости и следования за лидером имеют как ряд достоинств, так и ряд недостатков. В связи с этим можно рассмотреть еще один класс микроскопических моделей, объединяющий лучшие черты исходных моделей. Такие модели называются моделями разумного водителя (Intelligent Driver Model (IDM)):

$$\ddot{x}_{i+1}(t) = F\left(x_i(t) - x_{i+1}(t), \dot{x}_i(t) - \dot{x}_{i+1}(t), \dot{x}_{i+1}(t)\right).$$

Как показали калибровка и ряд численных экспериментов, наиболее адекватной моделью данного класса, устойчивой к вариации параметров, является модель М. Трайбера (1999 г.) [9]:

$$\ddot{x}_{i+1}(t) = a_{i+1}\left[1 - \left(\frac{\dot{x}_{i+1}(t)}{V_{i+1}^0}\right)^\delta - \left(\frac{d_{i+1}^*(\dot{x}_{i+1}(t), \dot{x}_i(t) - \dot{x}_{i+1}(t))}{x_i(t) - x_{i+1}(t)}\right)^2\right].$$

Слагаемое

$$a_{i+1}\left[1-\left(\frac{x_{i+1}(t)}{V^0_{i+1}}\right)^{\delta}\right]$$

описывает динамику ускорения автомобиля на дороге, а слагаемое

$$-a_{i+1}\left(\frac{d^*_{i+1}(\dot{x}_{i+1}(t),\dot{x}_i(t)-\dot{x}_{i+1}(t))}{x_i(t)-x_{i+1}(t)}\right)^2$$

описывает торможение, вызванное взаимодействием с лидирующим автомобилем. Калибровка параметра δ позволяет регулировать поведение автомобилей при разгоне (при $\delta = 1$ происходит экспоненциальный по времени разгон, в пределе при $\delta \to \infty$ происходит разгон с постоянным ускорением a_i вплоть до достижения желаемой скорости V^0_i). Тормозящий член определяется отношением желаемой дистанции d^*_i (безопасным расстоянием) к фактической дистанции $x_{i-1}(t) - x_i(t)$. Желаемая дистанция задается следующим соотношением:

$$d^*_i\left(\dot{x}_i(t),\dot{x}_{i-1}(t)-\dot{x}_i(t)\right) = d_i + T_i\dot{x}_i(t) - \frac{\dot{x}_i(t)\left(\dot{x}_{i-1}(t)-\dot{x}_i(t)\right)}{2\sqrt{a_ib_i}},$$

где d_i — расстояние между автомобилями; b_i — ускорение “комфортного” торможения ($a_i \sim b_i \sim 2\text{м}/\text{с}^2$); T_i — аналог времени реакции водителя.

Проанализируем формулу для безопасного расстояния. Величина $T_i\dot{x}_i(t)$ характеризует расстояние, которое проедет водитель за время, необходимое для того, чтобы среагировать на изменившуюся ситуацию на дороге. В случае, когда необходимо торможение ($\dot{x}_{i-1}(t) < \dot{x}_i(t)$), водитель успеет выровнять свою скорость со скоростью впереди идущего автомобиля (двигаясь с ускорением торможения b_i) до того, как он достигнет $i-1$ автомобиль, только если расстояние между этими автомобилями на момент начала реагирования i-го водителя было не менее

$$-\frac{\dot{x}_i(t)\left(\dot{x}_{i-1}(t)-\dot{x}_i(t)\right)}{2\sqrt{a_ib_i}}.$$

Аналогично можно рассмотреть ситуацию с ускорением.

В равновесном потоке одинаковых автомобилей, когда

$$\ddot{x}_i(t)\equiv 0, \dot{x}_{i-1}(t)-\dot{x}_i(t)\equiv 0, \dot{x}_i(t)\equiv V:$$
$$d(V) \stackrel{def}{=} x_{i-1}(t)-x_i(t) = d^*(V,0)\left[1-(V/V^0)^{\delta}\right]^{-1/2}.$$

Из этого соотношения, приняв $\rho(v) = 1/d(V)$, можно сначала построить уравнение состояния транспортного потока — зависимость $V(\rho)$, а потом фундаментальную диаграмму $Q(\rho)$. В пределе при $\delta \to \infty$ так построенная фундаментальная диаграмма будет стремиться к треугольной:

$$Q(\rho) = \min\left(\rho V^0, \frac{1-d\rho}{T}\right).$$

Эксперименты с использованием данной модели показали реалистичное поведение, воспроизведение основных наблюдаемых свойств транспортного потока и устойчивость свойств модели к вариациям параметров.

Клеточные автоматы. Клеточный автомат (Cellular Automata, CA) — дискретная модель, включающая регулярную решетку ячеек, каждая из которых может находиться в одном из конечного множества состояний в соответствии с набором правил, зависящих от состояний соседних ячеек. Правила применяются итеративно до тех пор, пока это необходимо.

Концепция клеточных автоматов была предложена Джоном фон Нейманом в начале 1950-х годов при разработке теории самовоспроизводящихся систем. Впервые идея применения клеточных автоматов для моделирования транспортных потоков была предложена в работе [11]. Однако активная разработка и исследования в данном направлении начались только после публикации К. Нагеля и М. Шрекенберга (Nagel — Schreckenberg) [12].

Пусть x_n и v_n — координата и скорость n-го автомобиля, $d_n = x_{n-1} - x_n$ — дистанция до лидирующего автомобиля. В CA-модели на каждом шаге $m \to m+1$ состояние всех автомобилей в системе обновляется в соответствии со следующими правилами:

1. *Ускорение.* Выражает стремление к увеличению скорости, но в то же время без превышения максимально допустимой скорости v_{max}:

$$v_n(m+1) = \min\left(v_n(m) + 1, v_{max}\right).$$

2. *Торможение.* Условие, позволяющее избежать столкновений с впереди идущим автомобилем:

$$v_n(m+1) = \min\left(v_n(m), x_n(m) - x_{n-1}(m) - d\right),$$

где d — расстояние между соседними автомобилями.

3. *Случайные возмущения.* Данное условие характеризует случайные различия в поведении водителей:

$$v_n(m+1) = \begin{cases} \max\left(v_n(m) - 1, 0\right), & p, \\ v_n(m), & 1-p. \end{cases}$$

4. *Движение.*

$$x_n(m+1) = x_n(m) + v_n(m).$$

Приведенный набор правил является минимальным набором, необходимым для воспроизведения базовых свойств транспортного потока. Численные эксперименты показывают, что поток является устойчивым при малых плотностях и теряет утсойчивость при высоких плотностях [5]. Также необходимо заметить, что поток остается устойчивым для всех значений плотности при $p = 0$ [12, 14]. Это обстоятельство можно рассматривать как теоретический недостаток клеточно-автоматных моделей по сравнению с рассмотренными ранее моделями, в которых флуктуации играют роль начального толчка, а дальнейшее развитие затора объясняется неустойчивостью равновесного решения. К несомненным достоинствам клеточных автоматов можно отнести сравнительную простоту моделирования транспортных потоков, что является немаловажным при переходе к многорядным моделям, так как такой переход значительно усложняет конструкцию модели. Что касается приведенных выше недостатков, то после [12, 14] был создан ряд моделей клеточных автоматов, которые исправляют этот и другие недостатки модели.

Многорядные микромодели. Многорядные микромодели позволяют получить более реалистичную картину при моделировании транспортных потоков. Правила, которые задают движение транспортных средств в многорядных микромоделях, могут быть условно разделены на следующие классы [13]:

1. “Правила движения вперед”, определяющие механизм ускорения и торможения автомобиля;

2. “Правила смены полос”, полагающиеся на два главных критерия:

— критерий необходимости: необходимо или нет сменить полосу, чтобы достичь своей максимальной желаемой скорости и сократить время в пути;

— критерий безопасности: возможность смены полосы, если доступно достаточно места на конечной полосе.

Расширение модели клеточных автоматов для двумерного случая. В данном разделе приводится обобщение однорядной модели клеточных автоматов на двумерный случай для возможности моделирования многополосного движения. В такой модели трасса представляет собой двумерную решетку, в которой количество ячеек в поперечном направлении соответствует числу полос трассы. В такой модели разрешены перестроения машин из полосы в полосу и обгоны. Процесс обновления состояний ячеек делится на два подшага:

1. Для каждой машины выясняются возможность и необходимость смены полосы. Производится смена полосы. Этот подшаг выполняется параллельно для всех машин.

2. Производится движение вперед по каждой полосе по правилам однополосного движения.

Смена полос должна происходить за один временной шаг. Если в одном направлении существуют больше двух полос, то может возникнуть конфликт, когда две машины с крайних полос желают сместиться в среднюю и занять одну и ту же ячейку. Такой конфликт легко преодолеть, если разрешить перестроение вправо только на четных шагах, а влево — только на нечетных.

Для смены полос существует несколько причин: на соседней полосе выше скорость движения либо меньше плотность, перестроение на соседнюю полосу необходимо для успешного достижения цели движения. С другой стороны, перед сменой машиной полосы необходимо проверить, выполнены ли условия безопасности. Пусть $gap(i)$ — расстояние до впереди идущего автомобиля на текущей полосе, $gap_o(i)$ — расстояние до впереди идущего автомобиля на рассматриваемой для перестроения полосе, $gap_b(i)$ — расстояние до позади идущего автомобиля на рассматриваемой для перестроения полосе. Тогда условия, определяющие смену полосы, выглядят следующим образом:

1) машина находится в зоне, где разрешена смена полосы;

2) ячейка $x_o(i)$, на которую перестраивается машина, свободна;

3) $gap(i) < v(i)$ и $gap_o(i) > gap(i)$ — смена полосы ведет к увеличению скорости;

4) $gap_b(i) \geq v_{max}$ и $gap_o(i) \geq v(i)$ — условия безопасности.

При выполнении всех этих условий машина совершает смену полосы с некоторой заданной вероятностью.

Заключение. В ходе работы проведено подробное исследование микроскопических математических моделей транспортных потоков, в которых рассматривается моделирование движения каждого автомобиля. Данный подход позволяет достичь точного описания движения автомобиля по сравнению с усредненным макроописанием. Рассмотрена модель следования за лидером как самая простая из представленных, но данная модель имеет ряд недостатков. Устранение недостатков приводит к рассмотрению модели оптимальной скорости и модели разумного водителя (модель Трайбера). Модели оптимальной скорости и следования за лидером также имеют как ряд достоинств, так и ряд недостатков. В связи с этим был рассмотрен еще один класс микроскопических моделей, объединяющий в себе лучшие черты исходных моделей. Наибольшее внимание авторы уделили клеточным автоматам, которые были представлены как дискретная модель, включающая регулярную решетку ячеек, каждая из которых может находиться в одном из конечного множества состояний в соответствии с набором правил, зависящих от состояний соседних ячеек, которые применяются итеративно до тех пор, пока это необходимо. Класс микромоделей, основанный на концепции клеточных автоматов, использует дискретное представление времени и пространства (дорога разбивается на клетки). Иногда принимается допущение, что в дорожной клетке может находиться не больше одного автомобиля. В результате получаются разностные аналоги уравнений для макроскопических моделей.

Список литературы

1. Balke K., et al. Dynamic traffic flow modeling for incident detection and short-term congestion prediction // Rep. 0-4946-1, 2005.
2. Ogunwolu L., et al. A neuro-fuzzy approach to vehicular traffic flow prediction for a metropolis in a developing country // J. Ind. Engineering Intern. 2011. P. 52–66.
3. Zhong M., et al. Genetically-Designed Time Delay Neural Networks for Multiple-interval Urban Freeway Traffic Flow Forecasting // Neural Inform. Proc. — Let. and Rev. 2006. V. 10, N 8–9. P. 201–209.
4. Innamaa S. Short-term prediction of traffic flow status for online driver information // [Electron. resource]. http://www.vtt.fi /publications/index.jsp 2009.
5. Швецов В. И. Математическое моделирование транспортных потоков // Автоматика и телемеханика. 2003, № 11. С. 3–46.
6. Chandler R. E., Herman R., Montroll E. W. Traffic dynamics: Studies in car following // Operations Res. 1958. V. 6. P. 165–184.
7. Гасников А. В. и др. Введение в математическое моделирование транспортных потоков. М.: МФТИ, 2010.
8. Newell G. F. Nonlinear effects in the dynamics of car — following // Oper. Res. 1961. V. 9. P. 209–229.
9. Treiber M., Helbing D. Explanation of observed features of self-organization in traffic flow // e-print arXiv:cond-mat/9901239, 1999.
10. Cellular Automaton статья в WolframMathWorld // [Electron. resource]. http://mathworld. wolfram.com/ CellularAutomaton.html.
11. Cremer M., Ludwig J. A fast simulation model for traffic flow on the basis of Boolean operations // Math. Comp Simul. 1986. V. 28. P. 297–303.
12. Nagel K., Schreckenberg M. A cellular automation model for freeway traffic // Phys. I France. 1992. V. 2. P. 2221–2229.
13. Klar A., Wegener R. A hierarchy of models for multilatne vehicular traffic. I. modeling, SIAM J. Appl. Math. 1999. V. 3. P. 983–1001.
14. Nagel K., Hermann H. J. Deterministic models for traffic jams // Phisica A. 1993. V. 199. P. 254–269.

Кравченко Павел Сергеевич — аспирант Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН;
Омарова Гульзира Алимовна — канд. физ.-мат. наук, науч. сотр. Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН;
e-mail: gulzira@rav.sscc.ru

Дата поступления — 20.11.2013