

В.В. Аксёнов

**НЕСИЛОВЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ
ПОЛЯ В ЭКСПЕРИМЕНТАХ**

ISBN (Print): 978-5-6042310-0-5

ISBN (Online): 978-5-6042310-1-2

DOI: 10.18411/978-5-6042310-0-5

Екатеринбург- 2019

Содержание

	Стр.
Введение	4
§1. О пределах применимости уравнений Максвелла.....	5
§2. Определение тороидальных и полоидальных электромагнитных полей.....	7
§3. Несиловые и силовые свойства тороидальных и полоидальных электромагнитных полей.....	13
§4. Об источниках несиловых электромагнитных полей на Земле и в космосе.....	14
§5. Граничные условия для тороидальных несиловых и полоидальных силовых электромагнитных полей.....	18
§6. Обобщённые уравнения электродинамики для тороидальных и полоидальных электромагнитных полей.....	19
§7. Физическое моделирование тороидальных и полоидальных электромагнитных полей.....	20
§8. Обобщение фундаментальной теоремы единственности разложения векторного поля Гельмгольца на тороидальные и полоидальные электромагнитные поля.....	24
§9. Калибровочные условия Кулона и Лоренца для векторного потенциала, представленного скалярной функцией.....	29
§10. Обобщение теорем К.Ф. Гаусса и А. Шмидта на тороидальные и полоидальные магнитные поля.....	30
Эксперименты	
§11. Природные источники несилового магнитного и электрического поля на Земле.....	53
§12. Проявление несилового электрического поля в краткосрочных предвестниках землетрясений.....	61
§13. Несиловое магнитное поле в эксперименте Ааронова-Бома.....	79
§14. О взаимной генерации несиловых и силовых магнитных полей в	

токамаках и её подавлении.....	81
§15. Несиловые переменные электромагнитные поля токов смещения в конденсаторах.....	84
§16. Несиловые переменные магнитные поля и скин-эффект.....	87
§17. Сверхглубинное зондирование Земли несиловым магнитным полем.....	91
§18. Алгоритм выделения переменных несиловых электромагнитных полей из наблюдаемых данных на шаре.....	94
§19. Алгоритм восстановления переменных тороидальных электрических токов на сфере, возбуждающих несиловые электромаг- нитные поля.....	112
§20. Алгоритм расчёта электродинамических параметров источника несилового магнитного поля в ядре Земли.....	120
Заключение.....	130
Литература.....	131

Введение

Несилловые «non-force» магнитные поля были впервые предсказаны Чандрасекаром в 1956 г. в его известной работе [1]. С тех пор появилось большое количество теоретических работ [5, 6, 15, 17], в которых исследовались различные аспекты физических проявлений несилловых магнитных полей. Однако экспериментального подтверждения их существования в технической физике и в лабораторном эксперименте не произошло до сих пор [30]. Хотя их неявное проявление на Земле по существу было обнаружено в естественном электромагнитном поле значительно раньше работ Чандрасекара.

На конгрессе физиков в 1902 г. профессором физики Голландского университета Van Vleuten был сделан доклад, в котором она доложила о непотенциальных магнитных полях спокойных солнечно-суточных вариаций земного магнетизма в атмосфере Земли, где практически нет электрического тока. Этот результат явно противоречил первому уравнению Максвелла ($\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}$, $\mathbf{j} = 0$, $\nabla \times \mathbf{H} = 0$. \mathbf{H} – потенциально). Поэтому Van Vleuten назвала это магнитное поле беспотенциальным. Свой результат она опубликовала через пятнадцать лет в сборнике трудов физического факультета Амстердамского университета [2].

Явное подтверждение результата Van Vleuten по магнитному беспотенциальному полю в атмосфере Земли в спокойных солнечно-суточных вариациях земного магнетизма содержится в монографии Н.П. Беньковой [3], написанной по результатам обработки и интерпретации спокойных солнечно-суточных вариаций, наблюденных в первый международный геофизический год (1933 г.).

Этот же результат о беспотенциальных магнитных полях можно прочесть в монографии В.В. Аксёнова [4], названных им тороидальные магнитные поля, полученных после обработки и интерпретации данных второго международного геофизического года (1957/58 гг.).

Некоторые различия в терминах найденных магнитных полей выше названных авторов естественно нуждаются в точном определении. А также в выяснении их физической природы. Обоснования их места в физике и известных достаточно давно уравнениях Максвелла. Уравнения Максвелла считаются абсолютно верными не только на Земле, но и в космической электродинамике. Хотя в монографии Ю. Паркера [5] указывается на недоказанность применения уравнений Максвелла к космическим магнитным полям.

Несилловые магнитные поля не обладают силой Лоренца в источниках. Формально это обстоятельство можно выразить следующим образом $F_L = [j \times B] = 0$, где F_L – сила Лоренца, j – плотность тока, B – магнитная индукция. Известно, что в технической физике, в любых экспериментах на Земле с магнитным полем сила Лоренца в его источниках всегда больше нуля $F_L = [j \times B] > 0$.

Важнейшим свойством несилового магнитного поля, согласно [1, 5-7] является его непотенциальность всюду. Следуя этому свойству беспотенциальные магнитные поля и тороидальные магнитные поля, названные выше, должны быть отнесены к несилковым магнитным полям. Чтобы в этом убедиться необходимо дать точные определения силовым и несилковым электромагнитным полям, найти их место в уравнениях Максвелла, предварительно определиться с пределами применимости уравнений Максвелла, помня об оговорке Ю. Паркера, упомянутой выше.

§1. О пределах применимости уравнений Максвелла

Вопрос о пределах применимости уравнений Максвелла в земной электродинамике практически не ставился. Хотя такой вопрос назрел достаточно давно со времён вышедшей в 1919 г. работы Дж. Лармора [8]. В этой работе было обращено внимание на то, что движение заряженной жидкости со скоростью V в магнитном поле порождает дополнительное электрическое поле по формуле:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]. \quad (1)$$

Подставив (1) во второе уравнение Максвелла $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times (\mathbf{E} + [\mathbf{V} \times \mathbf{B}])$ и преобразовав первое уравнение Максвелла умножением справа и слева на магнитную проницаемость μ , например $\nabla \times \mathbf{B} = \mu \sigma \mathbf{E}$, можно получить новое уравнение объединением первого и второго уравнения Максвелла путём исключения электрического поля:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu \sigma} \Delta \mathbf{B} - \nabla \times [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]. \quad (2)$$

Здесь σ – удельная проводимость. Уравнение (2) обычно называют уравнением индукции с динамо слагаемым. Это уравнение позволяет определиться с пределами применимости уравнений Максвелла, опираясь на критерий подобия – магнитное число Рейнольдса $Re_m = L \mu \sigma |\mathbf{V}|$. Здесь L – характерный размер, указывающий место границы между ламинарностью и турбулентностью в магнитном поле.

В земных условиях критерий подобия $Re_m \leq 1$ близок к единице из-за малости характерных размеров технических устройств и лабораторных экспериментов. Это даёт возможность отбросить второе слагаемое в (2) и получить уравнение индукции:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu \sigma} \Delta \mathbf{B}. \quad (3)$$

Уравнение (3) абсолютно верное и отражающее электродинамику на Земле, полностью подчиняющуюся уравнениям Максвелла. Отсюда родился миф о всеобъемлющем охвате электродинамикой Максвелла любых электромагнитных явлений. В технической электродинамике на Земле это верно.

В космической электродинамике критерий подобия фиксируется на уровне $Re_m \approx 10^{17}$ единиц [5], поэтому уравнение (2) можно переписать так:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]. \quad (4)$$

Уравнение (4) и критерий подобия Re_m для космоса предполагает наличие турбулентности в магнитном поле. Это позволило Ю. Паркеру утверждать, что магнитное поле в космосе создаётся за счёт турбулентности и конвекции при неравномерном вращении космических объектов и поддерживается путем взаимной генерации тороидальных и полоидальных магнитных полей [5].

Естественные электромагнитные поля на Земле: Главное геомагнитное поле (ГМП) и его различные вариации (переменная часть, например S_q -вариации) описываются критерием подобия на уровне $Re_m \approx 10^3 \div 10^5$ единиц [5, 7], поэтому в уравнении (2) нельзя отбрасывать слагаемые в правой части. Это выводит естественные электромагнитные поля (кроме магниторазведки) за пределы стандартных уравнений Максвелла, так как кроме диффузии и индукции в этих полях могут проявлять себя гидромагнитные эффекты, вызываемые возможной тороидальной частью электромагнитных полей. Как будет показано ниже, это наблюдается в Главном геомагнитном поле и его вариациях.

§2. Определение тороидальных и полоидальных электромагнитных полей

Определение тороидальных и полоидальных электромагнитных полей восходит к нулевой дивергенции магнитного поля $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$) верной всюду в связи с отсутствием магнитных зарядов. Следуя работе [9], первым шагом к определению названных полей является введение векторного \mathbf{A} и скалярного Q потенциалов вне источника с помощью цепочки равенств:

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = (Q\mathbf{r}) + \nabla \times (Q\mathbf{r}). \quad (5)$$

Здесь $\mathbf{A}, Q \in C^\infty$.

Тороидальное ортогональное разложение вектора \mathbf{A} позволяет затем однозначно ввести тороидальное магнитное поле \mathbf{H}_T с помощью простого соотношения [9]:

$$\mathbf{H}_T = \nabla \times (Q\mathbf{r}), \quad (6)$$

а полоидальное магнитное поле \mathbf{H}_p двойным ротором:

$$\mathbf{H}_p = \nabla \times \nabla \times (Q\mathbf{r}). \quad (7)$$

Эти определения позволяют вне источника в не штрихованных координатах (штрихованные координаты принадлежат источнику) получить основное соотношение между названными полями:

$$\nabla \times \mathbf{H}_T = \mathbf{H}_p. \quad (8)$$

Кажущееся несовпадение размерности в (8) объясняется тем, что магнитные поля \mathbf{H}_T и \mathbf{H}_p также, как и скалярная функция Q , определены вне источника. Поэтому имеют размерные константы, характеризующие источники, входящие в \mathbf{H}_T , \mathbf{H}_p и функцию Q и вычисленные в штрихованных координатах.

Дифференциальные операторы в (5–8) не изменяют размерность этих констант, так как заданы в не штрихованных координатах.

С другой стороны, если вычислить ротор от уравнения (7), то можно получить второе соотношение, симметричное (8). Действительно:

$$\nabla \times \mathbf{H}_p = \nabla \times \nabla \times \nabla \times (Q\mathbf{r}) = -\nabla \times (\Delta Q\mathbf{r}) = \chi \mathbf{H}_T,$$

$$\text{где: } \Delta Q = -\chi Q = \begin{cases} -\frac{\gamma}{\eta} Q & \text{при } t=0 \\ -(i\omega\mu\sigma)^{1/2} Q & \text{при } t>0 \end{cases} \quad (9)$$

Здесь γ – скорость диффузии магнитного поля, η – магнитная вязкость, $(i\omega\mu\sigma)^{1/2}$ – волновой параметр среды, в которой распространяется магнитное поле, σ – удельная проводимость, μ – магнитная проницаемость, ω – круговая частота. Принимая во внимание формулы (8) и (9), пара взаимно генерирующих магнитных полей (переменных и постоянных) будет иметь вид:

$$\nabla \times \mathbf{H}_T = \mathbf{H}_p, \quad \nabla \times \mathbf{H}_p = \chi \mathbf{H}_T, \quad (10)$$

при условии, что взаимная генерация возможна только в проводящей среде, когда параметр $\chi \neq 0$ и названные поля достигают нужных для этого

напряженностей. Соотношения (10) фундаментальны, так как имеют целый ряд фундаментальных приложений, о которых будет упомянуто ниже.

Связь H_T и H_P со скалярным потенциалом Q и компонентами векторного потенциала A в сферических координатах задается формулами [10]:

$$H_{P\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} (Qr) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r A_\varphi, \quad H_{P\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (Qr) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r A_\theta$$

$$H_{Pr} = -\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial (Qr)}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial (Qr)}{\partial \varphi} \right) =$$

$$-\frac{1}{r \sin \theta} \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin \theta} A_\varphi + \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \quad (11)$$

$$H_{T\theta} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (Qr) = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} A_r, \quad H_{T\varphi} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (Qr) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} A_r,$$

Формулы (11) доказывают возможность описания тороидальных и полоидальных магнитных полей как с помощью одной скалярной функции Q , так и трех компонент векторного потенциала A . Эта возможность будет использована при объяснении экспериментов с несиловыми электромагнитными полями.

Для определения тороидальных и полоидальных электрических полей при $t > 0$, здесь t – время, необходимо воспользоваться стандартными уравнениями Максвелла с поправкой Дж. Лармора:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E}' + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{E}' = -\mu \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot (\mathbf{H}, \mathbf{E}') = 0. \quad (12)$$

Здесь σ, μ, ε – константы, \mathbf{E}' – из (1), $\sigma' = \sigma + i\omega\varepsilon$. Кроме того, необходимо воспользоваться разложением векторного потенциала из (5):

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E}' = -i\omega\mu\mathbf{A} + \nabla\varphi. \quad (13)$$

В формуле (13) необходимо воспользоваться ещё и калибровкой Лоренца для векторного потенциала:

$$\varphi = \frac{1}{\sigma'} \nabla \cdot \mathbf{A}. \quad (14)$$

В этом случае для электрического поля можно получить общую формулу:

$$\mathbf{E}' = -i\omega\mu(\mathbf{Qr}) + i\omega\mu\nabla \times (\mathbf{Qr}) + \frac{1}{\sigma'} \nabla \nabla \cdot (\mathbf{Qr}) + \frac{1}{\sigma'} \nabla \nabla \cdot \nabla \times (\mathbf{Qr}). \quad (15)$$

В (15) последнее слагаемое тождественно равно нулю. В остальных можно ввести тороидальные и полоидальные электрические поля следующим образом [10]:

$$\mathbf{E}'_T = -i\omega\mu\nabla \times (\mathbf{Qr}), \quad \mathbf{E}'_P = -i\omega\mu(\mathbf{Qr}) + \frac{1}{\sigma'} \nabla \nabla \cdot (\mathbf{Qr}). \quad (16)$$

Во второй формуле (16) индукционное слагаемое $-i\omega\mu(\mathbf{Qr})$ не характерное для полоидального потенциального поля \mathbf{E}'_P компенсируется согласно следующей теореме.

Теорема 1.

Индукционное слагаемое $-i\omega\mu(\mathbf{Qr})$ компенсируется потенциальным слагаемым $\frac{1}{\sigma'} \nabla \nabla \cdot (\mathbf{Qr})$, если $(\mathbf{Qr}) \neq 0$.

Доказательство.

Для доказательства разобьём пространство на две части относительно регулярной границы S . Внутреннюю часть представим функцией $Q^i(r, \theta, \varphi, t)$ и её разложением:

$$Q^i(r, \theta, \varphi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} K_{n+1/2}(\varkappa \frac{r}{R}) S_n(\theta, \varphi). \quad (17)$$

Здесь $K_{n+1/2}(\varkappa \frac{r}{R})$ – присоединённая функция Бесселя полуцелого индекса

$\varkappa = i\omega\mu\sigma R^2 - \varepsilon\omega^2\mu R^2$, $S_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^n A_n^m P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi}$, $S_n(\theta, \varphi) \in C^\infty$, R – радиус

области, отделенной регулярной границей S , r – текущий радиус.

Внешнюю часть представим функцией $Q^e(r, \theta, \varphi, t)$:

$$Q^e(r, \theta, \varphi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_{n+1/2}(\varkappa \frac{r}{R}) S_n(\theta, \varphi). \quad (18)$$

Здесь и в (17) A_n^m – комплексные постоянные, $P_n^m(\cos\theta)$ – сферические функции. Множитель $e^{i\omega t}$ в правой и левой частях формул (17) и (18) опущен. Аргументы Бесселевых функций отделены от нуля и бесконечности.

Для доказательства потребуются первые и вторые производные Бесселевых функций, входящих в (17) и (18). Чтобы не загромождать текст выкладками, проведем доказательство только для функции $Q^i(r, \theta, \varphi, t)$. Для функции $Q^e(r, \theta, \varphi, t)$ доказательство проводится аналогично. Сложением результатов для внутренней функции и внешней можно легко получить окончательный результат. Итак, производные функции $Q^i(r, \theta, \varphi, t)$ по координате r есть:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q^i}{\partial r} &= \sum_{n=1}^{\infty} S_n(\theta, \varphi) K'_{n+1/2}\left(\frac{\alpha r}{R}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(\theta, \varphi) \left[-\frac{\alpha}{R} K_{n-1/2}\left(\frac{\alpha r}{R}\right) - \frac{n+1/2}{r} K_{n+1/2}\left(\frac{\alpha r}{R}\right) \right], \\ \frac{\partial^2 Q^i}{\partial r^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} S_n(\theta, \varphi) K''_{n+1/2}\left(\frac{\alpha r}{R}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(\theta, \varphi) \left[\left(\frac{(n+1/2)(n+3/2)}{r^2} + \frac{\alpha^2}{R^2} \right) K_{n+1/2}\left(\frac{\alpha r}{R}\right) + \frac{\alpha}{rR} K_{n-1/2}\left(\frac{\alpha r}{R}\right) \right].\end{aligned}\quad (19)$$

Преобразуем радиальную компоненту из (16), опустив верхний штрих:

$$E_{Pr}^i = -i\omega\mu Q^i r + \frac{1}{\sigma'} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 Q^i r = \frac{1}{\sigma'} \left[-\bar{\alpha}^2 Q r + r \frac{\partial^2 Q^i}{\partial r^2} + 4 \frac{\partial Q^i}{\partial r} \right]. \quad (20)$$

В (19) и (20) аргументы у функции $Q^i(r, \theta, \varphi, t)$ опущены из-за экономии места.

Теперь вычислим радиальную компоненту E_{Pr}^i :

$$\begin{aligned}E_{Pr}^i &= \frac{1}{\sigma'} \sum_{n=1}^{\infty} S_n(\theta, \varphi) \left[-\bar{\alpha}^2 r K_{n+1/2}\left(\frac{\alpha r}{R}\right) + r \left(\frac{(n+1/2)(n+3/2)}{r^2} + \frac{\alpha^2}{R^2} \right) K_{n+1/2}\left(\frac{\alpha r}{R}\right) + \frac{\alpha}{R} K_{n-1/2}\left(\frac{\alpha r}{R}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{4\alpha}{R} K_{n-1/2}\left(\frac{\alpha r}{R}\right) - \frac{4(n+1/2)}{r} K_{n+1/2}\left(\frac{\alpha r}{R}\right) \right].\end{aligned}\quad (21)$$

В (21) необходимо привести подобные члены с учётом того, что $\alpha^2 = \bar{\alpha}^2 R^2$. В результате получим:

$$\begin{aligned}E_{Pr}^i &= \frac{1}{\sigma'} \sum_{n=1}^{\infty} S_n(\theta, \varphi) \left[-\bar{\alpha}^2 r K_{n+1/2}\left(\frac{\alpha r}{R}\right) + \bar{\alpha}^2 r K_{n+1/2}\left(\frac{\alpha r}{R}\right) + \frac{n(n-2)-5/4}{r} K_{n+1/2}\left(\frac{\alpha r}{R}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3\alpha}{R} K_{n-1/2}\left(\frac{\alpha r}{R}\right) \right].\end{aligned}\quad (22)$$

Нетрудно заметить, что в (22) индукционное слагаемое исчезает. Остаётся только потенциальная часть. Аналогичный результат достигается и для E_{Pr}^e . Теорема доказана.

Поэтому тороидальные и полоидальные электрические поля для $t > 0$ можно определить следующим образом [10]:

$$\mathbf{E}'_T = -i\omega\mu\nabla \times (Q\mathbf{r}), \quad \mathbf{E}'_p = \frac{1}{\sigma'} \nabla \nabla \cdot (Q\mathbf{r}). \quad (23)$$

Связь сферических компонент этих полей с соответствующими компонентами векторного потенциала в сферических координатах будет иметь вид [10]:

$$\begin{aligned} E_{T\theta} &= -i\omega\mu \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (Qr) = -i\omega\mu A_\theta, \\ E_{T\varphi} &= -i\omega\mu \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (Qr) \right) = -i\omega\mu A_\varphi, \\ E_{p\theta} &= \frac{1}{\sigma'} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 (Qr) = \frac{1}{\sigma'} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 A_r, \\ E_{p\varphi} &= \frac{1}{\sigma'} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 (Qr) = \frac{1}{\sigma'} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 A_r, \\ E_{pr} &= \frac{1}{\sigma'} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 (Qr) = \frac{1}{\sigma'} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 A_r. \end{aligned} \quad (24)$$

Согласно формулам (24), тороидальные и полоидальные электрические поля вне источника также можно определить с помощью одного скалярного потенциала Q или трёх компонент векторного потенциала \mathbf{A} в соответствующих производных.

§3. Несиловые и силовые свойства тороидальных и полоидальных электромагнитных полей

Выяснение главных свойств тороидальных и полоидальных электромагнитных полей проведём, опираясь на авторские разработки [9, 12, 13]. Для этого необходимо вычислить силу Лоренца следующих пар электромагнитного поля $\mathbf{H}_p, \mathbf{E}_T$, а также $\mathbf{H}_T, \mathbf{E}_p$.

$$\mathbf{F}_L = [\mathbf{j}_T \times \mathbf{B}_p] = [\sigma \mathbf{E}_T \times \mu \mathbf{H}_p] \neq 0, \text{ э.д.с.} = \oint_L (\mathbf{E}_T \cdot d\mathbf{l}) = \int_W (\nabla \times \mathbf{E}_T \cdot d\mathbf{s}) = -\mu \int_W \left(\frac{\partial \mathbf{H}_p}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \right) \neq 0. \quad (25)$$

В формулах (25) отражена ненулевая сила Лоренца для первой пары силовых электромагнитных полей $\mathbf{H}_p, \mathbf{E}_T$. Сила Лоренца для второй пары записывается аналогично:

$$\bar{\mathbf{F}}_L = [\chi \mathbf{H}_T \times \mu \mathbf{H}_T] \equiv 0, \text{ э.д.с.} = \oint_L (\mathbf{E}_p \cdot d\mathbf{l}) = \int_W (\nabla \times \mathbf{E}_p \cdot d\mathbf{s}) \equiv 0. \quad (26)$$

В формулах (26) сила Лоренца $\bar{\mathbf{F}}_L$ тождественно равна нулю из-за того, что векторное произведение тороидального магнитного поля с самим собой равно нулю в связи с совпадающим направлением. Константы χ и μ направление не изменяют, э.д.с. индукции также тождественно равна нулю из-за равенства нулю ротора полоидального электрического поля потому, что полоидальное электрическое поле является градиентом некоторого скаляра, заданного дивергенцией вектора $(Q\mathbf{r})$. Более того, определение несиловых и силовых модификаций совпадает по физическому смыслу с определением модификаций магнитного и электрического типов из [14].

$$\mathbf{H}_p^{MT} = \nabla \times \nabla \times (Q\mathbf{r}), \quad \mathbf{E}_T^{MT} = -i\omega\mu\nabla \times (Q\mathbf{r}), \quad \mathbf{H}_T^{ET} = \nabla \times (Q\mathbf{r}), \quad \mathbf{E}_p^{ET} = \frac{1}{\sigma} \nabla \nabla \cdot (Q\mathbf{r}). \quad (27)$$

Как можно убедиться в (27) появление несиловых полей в физике не является экстраординарным. Однако необходимо выяснить, что за источники у этих полей как на Земле, так и в космосе.

§4. Об источниках несиловых электромагнитных полей на Земле и в космосе

Несиловые электромагнитные поля на Земле из-за критерия подобия Рейнольдса $Re_m \leq 1$ и уравнения (3) в эксперименте явно не проявляли себя, хотя их теоретическому изучению в научной литературе посвящено довольно много публикаций (см. списки литературы [6, 15]). Среди всех публикаций особняком выглядит работа Т. Каулинга [16]. В ней доказан важный с практической точки зрения результат, сводящийся, в наших терминах, к одному: планальная и цилиндрическая симметрии источников электромагнитного поля на Земле не приводит к генерации несиловых электромагнитных полей. Результат Т. Каулинга может быть усилен двумя следующими теоремами.

Теорема 2.

Безвихревое векторное поле $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ с условием $\nabla \cdot \mathbf{H} = \rho$ при $\rho = const$ не допускает генерации векторного поля $\mathbf{H}_T = \nabla \times (Q\mathbf{r})$, если $\mathbf{H} \neq 0$, $\mathbf{H}_T, \mathbf{H}_P \neq 0$.

Действительно. Спиральность $\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{H}$ в безвихревом векторном поле равна нулю из-за $\nabla \times \mathbf{H} = 0$, тогда как спиральность векторного поля \mathbf{H}_T нулю не равна по определению $\mathbf{H}_T \cdot \nabla \times \mathbf{H}_T = \mathbf{H}_T \cdot \mathbf{H}_P \neq 0$. Отсутствие совпадения спиральностей вследствие влияния возвратной симметрии [16] исключает взаимную генерацию векторных полей \mathbf{H}_T и \mathbf{H}_P [6, 16].

Теорема 3.

В соленоидальном векторном поле $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$, $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{P}$ (\mathbf{P} – векторное поле) векторное поле $\mathbf{H}_T = \nabla \times (Q\mathbf{r})$ может быть сгенерировано, если $\mathbf{H} \neq 0$, $\mathbf{H}_T, \mathbf{H}_P \neq 0$, $\mathbf{P} \neq 0$.

Действительно. Спиральности векторных полей $\mathbf{H}_T, \mathbf{H}_P$ не равны нулю

Спиральность соленоидального поля \mathbf{H} не равна нулю $\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{H} \neq 0$, вследствие $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{P}$. Спиральность векторного поля \mathbf{H}_T также не равна нулю

$\mathbf{H}_T \cdot \nabla \times \mathbf{H}_T \neq 0$ из-за $\nabla \times \mathbf{H}_T = \mathbf{H}_p$. Наличие спиральностей в обеих векторных полях способствует их взаимной генерации за счёт соотношений:

$$\nabla \times \mathbf{H}_T = \mathbf{H}_p, \quad \nabla \times \mathbf{H}_p = \nabla \times \nabla \times \nabla \times (Q\mathbf{r}) = -\nabla \times (\Delta Q\mathbf{r}) = \chi \nabla \times (Q\mathbf{r}) = \chi \mathbf{H}_T. \quad (28)$$

Здесь $\Delta Q = -\chi Q$, $\chi = \text{const}$ (9).

Физическая трактовка теорем 2 и 3 состоит в следующем. При наличии в качестве источников магнитного поля магнитных масс тороидальное магнитное поле возникнуть не может (теорема 2). Если присутствуют одновременно и тороидальное, и полоидальное магнитные поля, то при определённых условиях в напряженности $\mathbf{H}_T, \mathbf{H}_p$, а также при неравенстве нулю константы $\chi \neq 0$, взаимная генерация названных полей возможна. Теорема 3 подтверждает результат Ю. Паркера [5] по космическим магнитным полям, в которых взаимная генерация $\mathbf{H}_T, \mathbf{H}_p$ занимает ведущее место наряду с турбулентностью, конвекцией и неравномерном вращении космических объектов.

В земных условиях в технической физике из-за малых характерных размеров L на Земле $\text{Re}_m \leq 1$ условия генерации \mathbf{H}_T по Ю. Паркеру явно невыполнимы. Поэтому возникает вопрос об источниках тороидального несилового магнитного поля \mathbf{H}_T в естественном электромагнитном поле на Земле. Помня запретную теорему Т. Каулинга [16], следует обратиться к сферическим электрическим токам, полная плотность которых в сферических слоях или на сферических поверхностях своими тороидальными компонентами может сгенерировать \mathbf{H}_T . Это предположение закрепляется следующей теоремой.

Теорема 4.

Источником тороидального несилового магнитного поля \mathbf{H}_T и силового

\mathbf{H}_p являются тороидальные компоненты полного электрического тока $\mathbf{j} \neq 0$.

Действительно.

Оператор полного электрического тока, как известно, имеет вид:

$$\mathbf{j} = (\nabla \nabla \cdot - \nabla \times \nabla \times) \mathbf{A}. \quad (29)$$

Спроектируем этот оператор на оси сферической системы координат, зафиксировав только тороидальные компоненты тока:

$$\begin{aligned} -j_{\theta}^{\Pi} &= \frac{\partial^2 A_{\theta}}{\partial r^2} + \frac{2\partial A_{\theta}}{r\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 A_{\theta}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_{\theta}}{\partial \theta^2} - \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_{\theta}}{\partial \theta} - \frac{A_{\theta}}{r^2 \sin^2 \theta} - \\ & 2 \frac{\cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2\partial A_r}{r^2 \partial \theta}, \\ -j_{\varphi}^{\Pi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 A_{\varphi}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r A_{\varphi}}{\partial r^2} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_{\theta}}{\partial \varphi} - \\ & - \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta A_{\varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_{\varphi}}{\partial \theta \partial \varphi} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (30)$$

Если обратиться к разложению (5), то можно выразить сферические компоненты векторного потенциала через скалярную функцию Q следующим образом:

$$A_{\theta} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Q}{\partial \varphi}; \quad A_{\varphi} = -\frac{\partial Q}{\partial \theta}; \quad A_r = rQ. \quad (31)$$

Компоненты тороидального магнитного поля по определению (6) имеют вид:

$$H_{r\theta} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Q}{\partial \varphi}; \quad H_{r\varphi} = -\frac{\partial Q}{\partial \theta}; \quad H_{r\tau} \equiv 0. \quad (32)$$

Анализ формулы (30) показывает, что проекции уравнения для полного тока на оси сферической системы координат имеют среди слагаемых следующие выражения:

$$\frac{2\partial A_r}{r^2 \sin \theta \partial \varphi} = \frac{2}{r \sin \theta} \frac{\partial Q}{\partial \varphi} = \frac{2}{r} H_{r\theta}; \quad \frac{2\partial A_r}{r^2 \partial \theta} = \frac{2}{r} \frac{\partial Q}{\partial \theta} = -\frac{2}{r} H_{r\varphi}. \quad (33)$$

С учётом формул (32) правые части выражений (33) как раз и есть удвоенные компоненты тороидального магнитного поля, отнесённые к текущему радиусу, что даёт им размерность плотности тока.

Таким образом, тороидальные компоненты сферической плотности тока всегда порождают тороидальные несиловые компоненты тороидального магнитного поля. Этот факт из теоремы 4 имеет принципиальный характер для областей с малыми значениями критерия подобия, так как для возникновения

несилового тороидального магнитного поля в них не нужна турбулентность в магнитном поле, конвекция вещества и неравномерное вращение космических объектов, как у Ю. Паркера [5]. Достаточно сферического электрического тока, так как по теореме 4 такой ток одновременно генерирует как полоидальное силовое, так и тороидальное несилосое магнитные поля. Попытки воспроизвести несилосое магнитное поле в лабораторном эксперименте, описанном в [17], не привели к успеху. Необходимо было не воспроизводить турбулентность в магнитном поле, а переориентировать эксперимент на создание тороидального сферического тока. Любые попытки сложным образом «закрутить» силовые линии магнитного поля возможны только на бумаге [15], но вряд ли воспроизводимы в эксперименте из-за малых значений характерного размера L в земных условиях, согласно критерию подобия $Re_m = L\mu\sigma|V| \leq 1$.

Принципиальные разногласия между Ю. Паркером и Н. Альвеном [5, 18] относительно первоисточника магнитных полей в космосе можно сгладить с помощью теоремы 4, которая утверждает, что тороидальное несилосое магнитное поле может создаваться сферическими токами и в отсутствие турбулентности в магнитных полях. Сильные тороидальные токи наверняка присутствуют на поверхности звёзд, также, как и на поверхности Солнца. Поэтому первоначальное возникновение несилового магнитного поля, по-видимому, обязано всё-таки электрическим токам. Затем из-за индукционного разгона токов и поля возникают те самые эффекты, о которых пишет Ю. Паркер и многие другие исследователи до него и после.

Не менее сложная ситуация имеет место в электрическом поле. Согласно определениям (24) тороидальное силовое электрическое поле возбуждается тороидальными электрическими токами, согласно формулам:

$$\nabla \times \mathbf{H}_p = \chi \mathbf{H}_T = \sigma(\gamma \mu \mathbf{H}_T) = \sigma \mathbf{E}_T = \mathbf{j}_T,$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_p = \chi \mathbf{H}_T = (i\omega\mu\sigma)^{1/2} \mathbf{H}_T = \sigma \left(\left(\frac{\omega\mu}{\sigma} \right)^{1/2} \mathbf{H}_T \sqrt{i} \right) = \sigma \mathbf{E}_T + \mathbf{j}_T^{CT} = \mathbf{j}_T.$$

$$\text{Где } (\gamma\mu H_T) = E_T \text{ в В/м, } \left(\left(\frac{\omega\mu}{\sigma} \right)^{1/2} H_T \sqrt{i} \right) = \frac{(i+1)}{\sqrt{2}} \left(\frac{\omega\mu}{\sigma} \right)^{1/2} \cdot H_T = E_T \text{ в В/м.}$$

(34)

В переменном поле E_T есть комплексная величина. Электрическое поле возникает также вследствие эффекта Дж. Лармора [8] придвижении заряженной жидкости в магнитном поле. Нормальная к регулярной границе компонента электрического поля $E_n - i\omega\mu Qr = -i\omega\mu A$, компенсируется потенциальным полем зарядов, возникающих на регулярных границах, согласно теореме 1.

Потенциальная полоидальная часть электрического поля E'_p из (24) полностью обязана электрическим зарядам, возникающих на границах проводников с электрическим током или зарядом, возникающим по другим причинам.

§5. Граничные условия для тороидальных несиловых и полоидальных силовых электромагнитных полей

Граничные условия на регулярных границах для магнитных и электрических полей названных выше типов практически ничем особенным не отличаются от стандартных граничных условий для магнитного и электрического полей, установленных ранее и обоснованных в [14]. На регулярных границах поведение магнитных и электрических полей удовлетворяет следующим соотношениям:

$$(\mathbf{H}_p^1 - \mathbf{H}_p^2)|_\Gamma = 0, \quad (\mathbf{H}_T^1 - \mathbf{H}_T^2)|_\Gamma = 0, \quad \mathbf{E}_T^1 - \mathbf{E}_T^2|_\Gamma = 0, \quad E_{Tn}|_\Gamma = 0, \quad \mathbf{E}_{pn}^1 = \frac{\sigma_E}{\sigma'} \mathbf{E}_{pn}^2. \quad (35)$$

Здесь: 1– верхняя часть регулярной границы, 2– нижняя часть регулярной границы, σ' – удельная проводимость верхней части пространства над границей, σ_E – удельная проводимость пространства ниже регулярной границы.

Поведение тороидальных несилловых и полоидальных силловых полей на регулярной границе имеет прямой выход на приложения этих полей к конкретным задачам, возникающим на Земле, таким как наличие или отсутствие тороидальных несилловых магнитных и полоидальных электрических полей естественного происхождения в атмосфере Земли, внутри Земли, в космосе [5, 6, 10].

§6. Обобщённые уравнения электродинамики для тороидальных и полоидальных электромагнитных полей

Электродинамика названных полей несколько отличается от стандартной электродинамики Максвелла. Здесь представлены уравнения, исходя из следующих работ автора [4, 7, 9, 11, 12]:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H}_p &= \mathbf{j}_T + \mathbf{j}_T^{CT}, & \nabla \times \mathbf{H}_T &= \mathbf{H}_p, \\ \nabla \times \mathbf{E}'_T &= -\frac{\partial \mathbf{B}_p}{\partial t}, & \nabla \times \mathbf{E}'_p &= 0, \\ \nabla \cdot (\mathbf{H}_p, \mathbf{H}_T) &= 0, & \nabla \cdot (\mathbf{E}'_T, \mathbf{E}'_p) &= 0, \\ \mathbf{D}_{p,T} &= \varepsilon \mathbf{E}_{p,T}, & \mathbf{B}_{p,T} &= \mu \mathbf{H}_{p,T}\end{aligned}\tag{36}$$

Уравнения (36) по форме близки стандартным уравнениям Максвелла, хотя имеют в своём составе эффекты, никак не следующие из стандартных уравнений. Например, электрическое поле в своём составе содержит эффект Дж. Лармора, так как $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]$. Магнитные поля $\mathbf{H}_T, \mathbf{H}_p$ возбуждаются тороидальными токами, согласно теореме 4. Тороидальные магнитные поля в бестоковой области непотенциальны из-за $\nabla \times \mathbf{H}_T = \mathbf{H}_p$ в любой среде, на них не действует скин-эффект по той же причине. Полоидальное электрическое поле потенциально $\nabla \times \mathbf{E}'_p = 0$. Вихри тороидального несиллового магнитного поля порождают не электрический ток, а силовое магнитное поле из-за $\nabla \times \mathbf{H}_T = \mathbf{H}_p$. Индукция полоидального магнитного поля $\frac{\partial \mathbf{B}_p}{\partial t}$ содержит в себе гидромагнитные эффекты из-за эффекта Дж. Лармора, формула (2). Вихри

полоидального магнитного поля из-за $\nabla \times \mathbf{H}_p = \chi \mathbf{H}_T = \mathbf{j}_T$ могут создавать кроме индукции и диффузии, тороидальные магнитные поля в проводящих средах при определенных условиях. Уравнения (36) содержат в себе возможность взаимной генерации магнитных полей за счёт (10). В описании экспериментов будут продемонстрированы и другие свойства тороидальных и полоидальных электромагнитных полей.

§7. Физическое моделирование тороидальных и полоидальных электромагнитных полей

Проблема математического описания тороидальных несиловых и полоидальных силовых решена выше путём тороидального разложения векторного потенциала, формула (5). Что касается физического моделирования, то оно предложено в [6] путём введения двух скалярных потенциалов и использование каждого из них отдельно для тороидального магнитного поля (источник функция T) и полоидального (функция P). Такой путь на первый взгляд оправдан, но вызывает математические трудности при доказательстве взаимной генерации тороидальным магнитным полем полоидального и наоборот.

Что представляют собой тороидальные магнитные поля, как физические объекты? Следует напомнить, что тороидальные электромагнитные поля — это двухкомпонентные объекты следующего вида:

$$\mathbf{H}_T = (H_{T1}; H_{T2}; 0), \quad \mathbf{E}_T = (E_{T1}; E_{T2}; 0). \quad (37)$$

Тороидальные электрические токи также двухкомпонентные. Их плотность тока:

$$\mathbf{J}_T = (J_{T1}; J_{T2}; 0), \quad (38)$$

может располагаться на двумерных поверхностях или однородных по проводимости слоях: плоских, цилиндрических, сферических и др.

С тем, чтобы физически достоверно ввести в теорию электромагнитного поля тороидальные магнитные поля, необходимо воспользоваться

эмпирическими определениями этих полей из монографии [6]. Чтобы снять подозрения в несовпадении размерности магнитных полей при их определении из [6, формула 2.37] в виде:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_T + \mathbf{H}_P = \nabla \times (\mathbf{T} \cdot \mathbf{r}) + \nabla \times \nabla \times (\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}), \quad (39)$$

Поясним, что имел в виду автор в [6], когда определял эти поля.

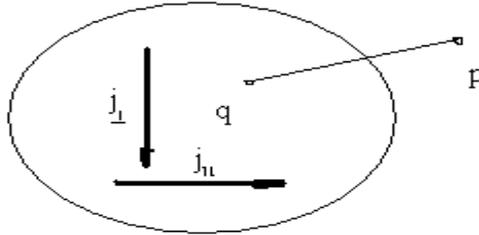


Рис.1. Расположение источников

На рис.1 изображены проекции компонент электрического тока на вертикальную и горизонтальную плоскости, находящиеся в пределах источника. Согласно рис.1, фактически тороидальное двухкомпонентное магнитное поле \mathbf{H}_T определяется в точке $p(r, \theta, \varphi)$ за пределами источника (вертикального тока J_{\perp}), где r, θ, φ – сферические координаты, следующим образом:

$$\mathbf{H}_T = \nabla_P \times (\mathbf{T} \cdot \mathbf{r}), \quad (40)$$

где $T(r, \theta, \varphi)$ – произвольная скалярная функция, среднее которой на поверхности S равно нулю $\langle T(r, \theta, \varphi) \rangle = 0$. Ее разложение по сферическим функциям имеет вид:

$$T(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \psi(r) A_n^m P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}. \quad (41)$$

Комплексные коэффициенты A_n^m имеют следующий физический смысл [10]:

$$A_n^m = \int_w \psi_n(r') J_{\perp}(q) P_n^m(\cos \theta') \cos m\varphi' dw', \quad (42)$$

где $J_{\perp}(q)$ – комплексная функция вертикальной плотности тока. Комплексность плотности тока обеспечивает комплексность постоянного коэффициента A_n^m ,

что необходимо для обеспечения полноты разложения (41). Слагаемое, содержащее $\sin m\varphi'$, не выписываем, в связи с экономией места. В формулах (40-42) имеют размерность только постоянные коэффициенты, так как в них входит плотность тока – физическая величина. Они определяются по магнитному полю, поэтому их размерность совпадает с размерностью магнитного поля из левой части формулы (40). Дифференцирование в (40) с помощью ротора берется по не штрихованным координатам точки $p(r, \theta, \varphi)$, поэтому не искажает размерность постоянных коэффициентов A_n^m .

Полоидальное магнитное поле вводится с помощью двойного ротора, так как оно трехкомпонентное (ток $J_{\parallel}(q)$ плоский), а дифференцирование происходит тоже по точкам $p(r, \theta, \varphi)$:

$$\mathbf{H}_p = \nabla_p \times \nabla_p \times (P \cdot \mathbf{r}). \quad (43)$$

Здесь:

$$P(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \psi_n(r') B_n^m P_n^m(\cos \theta') e^{im\varphi'}, \quad (44)$$

где $J_{\parallel}(q)$ – комплексный плоский ток, а

$$B_n^m = \int_w \psi_n(r') J_{\parallel}(q) P_n^m(\cos \theta') \cos m\varphi' dw'. \quad (45)$$

Слагаемое, содержащее $\sin m\varphi'$, не выписываем. Дифференцирование в двойном роторе в (43) также берется по точкам $p(r, \theta, \varphi)$ и не изменяет размерность констант B_n^m . Их размерность совпадает с размерностью \mathbf{H}_p , так как они определяются по этому полю. Двойное и тройное применение ротора к выражениям (40) или (41) не изменяют размерности источников, входящих в константы A_n^m и B_n^m , так как это применение производится по не штрихованным координатам.

Выявленный здесь физический смысл эмпирически введенных в [6] тороидальных и полоидальных магнитных полей в точках вне источника полностью подтверждает вывод автора [6] за тем лишь исключением, что выражение:

$$\nabla_p \times \mathbf{H}_T = \nabla_p \times \nabla_p \times (T \cdot \mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{H}}_p \quad (46)$$

порождает полоидальное поле, но от источника, входящего в функцию $T(r, \theta, \varphi)$, а не в функцию $P(r, \theta, \varphi)$. Однако источник функции $T(r, \theta, \varphi)$ – вертикальный ток рис. 1 возбуждает только двухкомпонентное тороидальное магнитное поле согласно (40). Это замечание требует определять тороидальное и полоидальное магнитные поля с помощью одной скалярной функции, содержащей в себе только **тороидальный** источник тока, согласно определению в (38).

Выше и в более ранних работах автор предложил воспользоваться ортогональным разложением векторного потенциала следующего вида:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{H}, \quad \mathbf{A} = (Q \cdot \mathbf{r}) + \nabla \times (Q \cdot \mathbf{r}), \quad (47)$$

которое характеризует только тороидальные токи.

Здесь: \mathbf{H} – магнитное поле, \mathbf{A} – векторный потенциал, Q – скалярная функция трех переменных. В этом случае тороидальное магнитное поле определяется так:

$$\mathbf{H}_T = \nabla \times (Q \cdot \mathbf{r}). \quad (48)$$

Полоидальное магнитное поле аналогичным способом:

$$\mathbf{H}_p = \nabla \times \nabla \times (Q \cdot \mathbf{r}). \quad (49)$$

И тогда основные соотношения для двумодального магнитного поля будут выглядеть следующим образом:

$$\nabla \times \mathbf{H}_T = \mathbf{H}_p, \quad \nabla \times \mathbf{H}_p = \nabla \times \nabla \times \nabla \times (Q \cdot \mathbf{r}) = -\nabla \times (\Delta Q \cdot \mathbf{r}) = \chi \mathbf{H}_T, \quad (50)$$

где:

$$\Delta Q = \chi Q = \begin{cases} -\frac{\gamma}{\eta} Q & t = 0, \\ -(i\omega\mu\sigma)^{1/2} & t > 0. \end{cases} \quad (51)$$

Здесь: γ – скорость диффузии поля, η – магнитная вязкость, $(i\omega\mu\sigma)^{1/2}$ – волновой параметр среды в которой распространяется переменное магнитное поле, σ –

удельная проводимость среды, μ – магнитная проницаемость среды, ω – круговая частота переменного поля.

Этот путь, как было показано выше, автоматически приводит к формуле для самогенерации тороидальных и полоидальных электромагнитных полей по (10).

§8. Обобщение фундаментальной теоремы единственности разложения векторного поля Гельмгольца на тороидальные и полоидальные электромагнитные поля

Обозначенное выше обобщение известной теоремы единственности Гельмгольца [19] на несиловые \mathbf{H}_T и силовые \mathbf{H}_P магнитные поля вызвано тем, что несиловые тороидальные магнитные поля на регулярной границе двухкомпонентные, формула (32). Самое главное они не имеют нормальной компоненты на регулярных границах, окружающих области с магнитным полем. Известная постановка проблемы Гельмгольцем изложена в [19] в такой форме «пусть V – конечная открытая область пространства, ограниченная регулярной поверхностью S , положительная нормаль которой однозначно определена в каждой точке поверхности». В этом случае справедливы следующие теоремы.

Теорема 5. (Теорема разложения).

Если дивергенция и ротор поля $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ определены в каждой точке $|\mathbf{r}|$ области V , то всюду в V функция $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ может быть представлена в виде суммы безвихревого поля $\mathbf{F}_1(\mathbf{r})$ и соленоидального поля $\mathbf{F}_2(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_2(\mathbf{r}),$$

где: $\nabla \times \mathbf{F}_1(\mathbf{r}) = 0, \nabla \cdot \mathbf{F}_2(\mathbf{r}) = 0$.

Теорема 6. (Теорема единственности).

Функция $F(r)$ определяется однозначно при дополнительном условии задания нормальной составляющей $F(r) \frac{ds}{|ds|}$ функции $F(r)$ в каждой точке поверхности S .

Эффективное отыскание функции $F(r)$ по этим данным сводится к решению дифференциальных уравнений с частными производными при некоторых краевых условиях.

В отличие от выше сформулированной постановки задачи в нашем случае интересна только соленоидальная часть магнитного поля, в касательных к поверхности S компонентах которого присутствует тороидальная часть. С другой стороны, будем считать область V шаром с регулярной границей, на которой существует внешняя непрерывная нормаль, заданная в каждой точке. В этом случае можно переформулировать теорему 6 под эту задачу, а доказательство этой новой теоремы искать, не прибегая к решению соответствующих дифференциальных уравнений и не выставляя для доказательства никаких новых краевых условий, кроме существования нормальной составляющей $H_{pN}(\mathbf{r})$ в каждой точке поверхности S . Доказательство этой теоремы впервые опубликовано в [24].

Теорема 7.

Соленоидальное векторное поле \mathbf{H} в сферической области V , (в шаре с поверхностью S и радиусом R), однозначно восстанавливается выражением:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_T + \mathbf{H}_p = \nabla \times (Q\mathbf{r}) + \nabla \times \nabla \times (Q\mathbf{r}), \quad (52)$$

если известна нормальная составляющая $H_N(\mathbf{r})$ на S , а функция $Q(r, \theta, \varphi) \in C^\infty$, среднее которой $\langle Q \rangle = 0$ на S , а также $\mathbf{H}, \mathbf{H}_T, \mathbf{H}_p \neq 0$ и $\nabla \times \mathbf{H}_T = \mathbf{H}_p$ всюду.

Здесь среднее: $\langle Q \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Q \sin \theta d\theta d\varphi = 0$.

Действительно. Если векторное поле \mathbf{H} отвечает (52), то, чтобы доказать единственность разложения (52), необходимо выразить функцию Q через исходную нормальную компоненту векторного поля \mathbf{H}_p или $\nabla \times \mathbf{H}_T$. Например,

$$\begin{aligned} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{H}_p) &= \mathbf{r} \cdot \nabla \times \nabla \times (Q\mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot \{ \nabla \nabla \cdot (Q\mathbf{r}) - \nabla^2(Q\mathbf{r}) \} = \mathbf{r} \cdot \{ \nabla [\mathbf{r} \cdot \nabla Q + 3Q] - 2\nabla Q - \mathbf{r} \nabla^2 Q \} = \\ &= -r^2 \nabla^2 Q + \mathbf{r} \cdot \nabla (\mathbf{r} \cdot \nabla Q) + \mathbf{r} \cdot \nabla Q = -r^2 \nabla^2 Q + \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial Q}{\partial r}) = -DQ, \end{aligned} \quad (53)$$

$$(\mathbf{r} \cdot \nabla \times \mathbf{H}_T) = \mathbf{r} \cdot \nabla \times \nabla \times (Q\mathbf{r}) = -DQ.$$

Здесь D – прямой оператор (оператор Бельтрами) определяется из (53), а именно:

$$D = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (54)$$

И является частью оператора Лапласа без радиальных производных. Из (53) следует, что

$$Q = -D^{-1}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{H}_p) = -D^{-1}(\mathbf{r} \cdot \nabla \times \mathbf{H}_T), \quad (55)$$

где D^{-1} – обратный оператор к оператору D , подлежащий определению. Принимая во внимание формулы (53), можно показать, что если в формуле для $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ использованы две произвольные скалярные функции вида $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (P\mathbf{r}) + \nabla \times (Q\mathbf{r})$, то из-за того, что векторное поле \mathbf{H}_T не содержит нормальной компоненты к поверхности шара S и не может быть однозначно определено, согласно выше приведенной теореме Гельмгольца, то необходимо воспользоваться условием теоремы 7 ($\nabla \times \mathbf{H}_T = \mathbf{H}_p$). Тогда прямые операторы $-DQ = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{H}_p)$ и $-DP = (\mathbf{r} \cdot \nabla \times \mathbf{H}_T)$ приведут к следующим совпадающим обратным $-D^{-1}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{H}_p)$ и $-D^{-1}(\mathbf{r} \cdot \nabla \times \mathbf{H}_T) = -D^{-1}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{H}_p)$. Это означает, что $P = Q$, и, что в выражении для $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ достаточно, не уменьшая общности, использовать одну произвольную скалярную функцию, в данном случае функцию Q .

Таким образом, чтобы найти Q , необходимо определить прямой D и обратный D^{-1} операторы. Обратный оператор D^{-1} определяется следующим

образом. Пусть $\psi(r, \theta, \varphi)$ и $f(r, \theta, \varphi)$ – произвольные скалярные функции, связанные соотношением:

$$D\psi(r, \theta, \varphi) = f(r, \theta, \varphi). \quad (56)$$

При этом функции $\psi(r, \theta, \varphi)$ и $f(r, \theta, \varphi) \in C^\infty$, среднее у которых на S равно нулю $\langle \psi \rangle = 0$, $\langle f \rangle = 0$. Обозначим на основании [19, стр. 675, п. (в)]:

$$S_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^n A_n^m P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (57)$$

где $P_n^m(\cos \theta)$ – сферические функции, A_n^m – комплексные постоянные $S_n^m(\theta, \varphi) \in C^\infty$. Далее представим вспомогательные функции ψ, f их стандартными разложениями по сферическим функциям [19]:

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(r) S_n(\theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \psi_n(r) A_n^m P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}; \quad f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(r) \bar{S}_n^m(\theta, \varphi). \quad (58)$$

Суммирование по n начинается с единицы, свободный член отсутствует в связи наложенным условием нулевых средних для функций ψ, f на сфере S . При этом функции $\psi_n(r)$ и $f_n(r)$ для $r \leq R$ пропорциональны r^n , а для $r \geq R$ соответственно $\frac{1}{r^{n+1}}$.

Применим прямой оператор D к функции $S_n(\theta, \varphi)$, воспользовавшись результатом (53):

$$DS_n(\theta, \varphi) = -n(n+1)S_n(\theta, \varphi). \quad (59)$$

Действительно, с учетом (53) и условий на функции $\psi_n(r)$ и $f_n(r)$ (58), можно записать:

$$-r^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} r^n S_n(\theta, \varphi) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} r^n S_n(\theta, \varphi) \right) = Dr^n S_n(\theta, \varphi); \quad \text{отсюда } -n(n+1)S_n(\theta, \varphi) = DS_n(\theta, \varphi),$$

$$-r^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \frac{1}{r^{n+1}} S_n(\theta, \varphi) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^{n+1}} S_n(\theta, \varphi) \right) = D \frac{1}{r^{n+1}} S_n(\theta, \varphi); \quad -n(n+1)S_n(\theta, \varphi) = DS_n(\theta, \varphi),$$

Такая запись представляется наиболее удобной, так как в операторе D функции дифференцируются только по угловым координатам, согласно (53).

Теперь применим к (55) оператор D и с учетом ранее полученных разложений функций ψ и f получим:

$$D\psi = -\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(r) n(n+1) S_n(\theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(r) \bar{S}_n(\theta, \varphi). \quad (60)$$

Функции $S_n(\theta, \varphi)$ и $\bar{S}_n(\theta, \varphi)$ отличаются только комплексными коэффициентами. Приравняем общие члены в (60), помня об абсолютной и равномерной сходимости рядов разложений функций ψ, f по сферическим функциям [19,20]. Разделим правую и левую части на множитель $n(n+1)$. В результате получим:

$$\psi_n(r) S_n(\theta, \varphi) = -f_n(r) \frac{\bar{S}_n(\theta, \varphi)}{n(n+1)}. \quad (61)$$

Просуммировав все гармоники в (60), будем иметь:

$$\psi = -D^{-1} f = -\sum_{n=1}^{\infty} f_n(r) \frac{S_n(\theta, \varphi)}{n(n+1)}. \quad (62)$$

Формула (62) есть определение обратного оператора D^{-1} . Обратный оператор в (62), с нашей точки зрения, является более конструктивным для данной задачи, чем приведенный в [20] интегральный обратный оператор для оператора Бельтрами, содержащий функцию Грина. Применим его к формулам (55):

$$Q = -\sum_{n=1}^{\infty} r H_{Pn}(r) \frac{\tilde{S}_n(\theta, \varphi)}{n(n+1)} = -\sum_{n=1}^{\infty} r (\nabla \times H_T)_m(r) \frac{S'_n(\theta, \varphi)}{n(n+1)}. \quad (63)$$

Если учесть, что при $r = R$ имеем $H_{Pn}(R) = H_{Nn}(R)$,

$$H_N(r) = \sum_{n=1}^{\infty} H_{Nn}(R) S_n''(\theta, \varphi),$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_T = \nabla \times \nabla \times (\mathbf{Qr}) = \mathbf{H}_P,$$

(64)

то

$$Q = -\sum_{n=1}^{\infty} R H_{Nn}(R) \frac{\tilde{S}_n(\theta, \varphi)}{n(n+1)}, \quad (65)$$

где R – радиус шара.

Итак, формула (65) определяет функцию Q на поверхности шара. В любой его точке внутри и в любой точке вне шара функция Q зависит от координаты r известным способом. Теорема 7, таким образом, расширяет действие теоремы Гельмгольца, включая в однозначное определение на поверхности шара не только полоидальное магнитное поле, но и тороидальное магнитное поле, связанное с полоидальным соотношением, указанном в теореме 7. Теорема 7 для восстановления всего поля на поверхности S требует определить на этой поверхности одну скалярную функцию. Тороидальное магнитное поле не потенциально всюду, где оно наблюдается в силу определения (6). Тем не менее, теорема 7 позволяет восстановить также и тороидальное магнитное поле на поверхности шара. Это обстоятельство имеет важные последствия для интерпретации наблюдаемых на Земле естественных электромагнитных полей [10].

§9. Калибровочные условия Кулона и Лоренца для векторного потенциала, представленного скалярной функцией

Одной из важных проблем, возникающих в приложениях, является проблема выполнимости калибровок Кулона $\nabla \cdot A = 0$ или Лоренца $\nabla \cdot A = \sigma\varphi$ при представлении векторного потенциала тороидальным ортогональным разложением (5). Ортогональность разложения векторного потенциала из (5) очевидна. В сферических координатах проверка достаточно проста:

$$(0, 0, (Qr)) \cdot (\nabla_{\theta} \times (Qr), \nabla_{\varphi} \times (Qr), 0) \equiv 0. \quad (66)$$

Тем не менее остаётся необходимость проверки дивергенции вектора A при его представлении из (5). Ответ на этот вопрос даёт теорема 8, ранее доказанная в [24].

Теорема 8.

Калибровочные условия Кулона $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ или Лоренца $\nabla \cdot \mathbf{A} = \sigma\varphi$ для вспомогательного векторного поля \mathbf{A} однозначно выполняются, если $Q(r, \theta, \varphi) = Q(\theta, \varphi) / r^3$. (67)

Действительно. Из формулы (52) следует, что

$$\mathbf{A} = (Q\mathbf{r}) + \nabla \times (Q\mathbf{r}) + \nabla\varphi. \quad (68)$$

Вычислим дивергенцию от векторного поля (68):

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot (Q\mathbf{r}) + \nabla \cdot \nabla \times (Q\mathbf{r}) + \nabla \cdot \nabla\varphi. \quad (69)$$

В равенстве (69) второе слагаемое равно нулю по определению для дивергенции ротора. Первое слагаемое также равно нулю из-за условия (67):

$$\nabla \cdot (Q\mathbf{r}) = Q\nabla \cdot \mathbf{r} + r\nabla Q = \frac{3}{r^3} Q(\theta, \varphi) - \frac{3}{r^3} Q(\theta, \varphi) \equiv 0. \quad (70)$$

В третьем слагаемом рассматриваются два варианта:

$$\Delta\varphi = \begin{cases} 0 \\ \sigma\varphi \end{cases}. \quad (71)$$

Где: $\sigma = const$.

Из формул (68-71) следуют два указанных варианта калибровок вспомогательного векторного поля \mathbf{A} : калибровка Кулона $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ или калибровка Лоренца $\nabla \cdot \mathbf{A} = \sigma\varphi$. Теорема доказана.

Условие (67) теоремы 8 имеет однозначный физический смысл, заключающийся в том, что магнитные поля независимо от их теоретического определения экспериментально убывают как $1/r^3$. Условие (67) обеспечивает убывание несилового магнитного поля \mathbf{H}_T также, как силового магнитного поля \mathbf{H}_p , согласно эксперименту.

§10. Обобщение теорем К.Ф. Гаусса и А. Шмидта на тороидальные и полоидальные магнитные поля

Электродинамика на Земле восходит к наблюдениям за магнитным полем еще пять веков назад в Китае, когда была изобретена по существу «магнитная стрелка», указывающая направление и сохраняющая это

направление под воздействием как раз магнитного поля, о существовании которого только догадывались. Значительно позже такое поведение «магнитной стрелки» стали использовать в мореплавании [26, 27].

Научные исследования главного геомагнитного поля (ГГП) начались в первой половине девятнадцатого века после прорывных работ К.Ф. Гаусса в 1839 – 1840 гг. [21, 22, 28]. Он предложил использовать для математического описания природного магнитного поля новый для того времени математический объект – магнитный потенциал и его разложение по сфере. Этими работами было положено начало методологии исследования главного магнитного поля, автоматически определившей принципы и способы исследований природного магнитного поля.

Позже автор отнёс эти работы к статической парадигме познания, выражающейся формулами:

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{H} = \nabla \varphi, \quad \Delta \varphi = 0. \quad (72)$$

В то время еще не было работ Максвелла по уравнениям электродинамики, появившихся в 1868 – 1869 гг. Поэтому и не возникал вопрос о природе наблюдаемого магнитного поля – его главного свойства потенциальности.

Однако в самом начале 20 в. (1902 г.) голландский физик Ван Влейтен [28] обратила внимание на то, что спокойные солнечно-суточные вариации земного магнетизма обладают значительной непотенциальной частью в атмосфере Земли. Это поставило под сомнение признанную методологию исследования главного геомагнитного поля (ГГП) как потенциального объекта в атмосфере Земли. Хотя из-за отсутствия электрического тока в практически непроводящей атмосфере Земли первое уравнение Максвелла ($\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}$) автоматически доказывало правоту потенциального подхода (при $\mathbf{j} = 0, \nabla \times \mathbf{H} = 0$). Выше названный методологический принцип (статическая парадигма) общепризнан и в настоящее время, несмотря на подтверждение Н.П. Беньковой существования беспотенциальной (непотенциальной) части

спокойных солнечно-суточных вариаций земного магнетизма, полученное по данным первого международного геофизического года (1933 г.) [3].

В самом начале 80 – х гг. 20 в. Д.Н. Четаевым были проведены эксперименты в атмосфере Земли с вертикальной компонентой электрического поля короткопериодических вариаций, которые обнаружили достаточно высокую напряженность этой компоненты в воздухе в 1970 г. [29], что также противоречило принципу потенциальности вариаций в воздухе.

Если попытаться теоретически обосновать вышеприведенные эффекты в атмосфере Земли, то это невозможно сделать в потенциальной парадигме, зафиксированной в уравнениях Максвелла. При $j = 0$, $\nabla \times \mathbf{H} = 0$, поэтому магнитное поле обязательно потенциально. Описанные выше эксперименты диктуют замену парадигмы, а вместе с ней методологию и методы исследования главного геомагнитного поля и его вариаций.

Истоки новой парадигмы – стационарной, использующей для описания формулы:

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \Delta \mathbf{A} = \mathbf{j}, \quad \text{для } t=0, \quad \Delta \mathbf{A} + \chi^2 \mathbf{A} = \mathbf{j}, \quad \text{для } t > 0, \quad (73)$$

можно обнаружить в космической электродинамике Х. Альвена, Ю. Паркера [5, 18] и других аналогичных работах.

Самым важным открытием является теоретическое доказательство возможности существования несилловых тороидальных магнитных полей, свойства которых, как указано выше, иные, чем зафиксированные в первом уравнении Максвелла. Замена потенциального свойства на более общее соленоидальное, восходящее к уравнению $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$, позволяет внедрить в природный геомагнетизм новую парадигму – стационарную для исследований и заменить бытовавшую до последнего времени методологию исследования ГПП на более общую. Обоснование новой парадигмы опирается на ряд авторских теорем, опубликованных в математической, физической и геофизической научной литературе [10, 12, 24, 31].

В основу нового подхода, как нам представляется, должно быть положено убеждение в том, что Земля является таким же космическим объектом, как и все окружающие её планеты и звёзды. Её магнитное поле по происхождению принципиально не должно резко отличаться от имеющих место способов генерации космических магнитных полей. Эта мысль многократно подчёркивается Ю. Паркером в [5]. Более того, принцип динамовозбуждения магнитного поля некоторыми авторами автоматически переносится в земные условия, хотя пока нет его экспериментального подтверждения в земных условиях [30].

В то время как эксперимент по существу на космическом объекте – Земле проведен трижды: два эксперимента во время международных геофизических годов 1933 и 1957 – 1958 гг. и третий во время всемирной магнитной съемки 1964 – 1965 гг.

Поэтому возникающая в связи с этим проблема *интерпретации* наблюдённых полей требует разработки максимально общей теории появления наблюдаемых на Земле электромагнитных полей с учетом космической природы Земли и тех эффектов, которые наблюдаются на поверхности Земли и описаны выше.

Для этого потребовалось создать новую электродинамику, которая бы восходила к уравнениям Максвелла и уравнениям космической электродинамики как минимум. Выше такая электродинамика создана (36).

Опираясь на выводы новой электродинамики требуется создать рабочую теорию для интерпретации данных, наблюдённых во время международных геофизических годов 1933 и 1957/58 и всемирной магнитной съёмки 1964/65 гг. с учётом возможного существования несилловых магнитных полей. При этом необходимо опереться на известный, хорошо обоснованный метод К.Ф. Гаусса–А. Шмидта [21-23], применённый ими для исследования естественных магнитных полей в статической постановке. В этом методе решены несколько проблем путём разложения магнитного потенциала по сфере и определения неизвестных постоянных в нем с использованием

экспериментальных данных. Совпадение с экспериментом решало сразу две задачи: существования решения и его единственность. Вопрос устойчивости решался с помощью метода наименьших квадратов, созданного К.Ф. Гауссом, для аппроксимации наблюдаемых данных. Поэтому этот метод целесообразно положить в основу интерпретации данных, содержащих несиловые электромагнитные поля. Этот метод, как упомянуто выше, решает проблему существования, единственности и устойчивости решения задачи воспроизведения электромагнитного поля на сфере по дискретным данным наблюдений. Кроме этого метод К.Ф. Гаусса–А. Шмидта позволяет решить весьма сложную задачу определения места нахождения источников воспроизведённого магнитного поля – источники внутри шара или вне его.

Поэтому моделирование магнитного поля источников, находящихся внутри шара или вне его необходимо начать с современного изложения теории К.Ф. Гаусса и А. Шмидта [10].

Пусть в шаре W с границей S ($\bar{W} = W \cup S$) расположены магнитные массы с плотностью ρ_m . Тогда уравнения для *потенциального* магнитного поля \mathbf{H} , находящегося внутри шара, можно записать в следующем виде:

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = \rho_m. \quad (74)$$

Формулы (74) порождают следующую цепочку равенств:

$$\mathbf{H} = \nabla V, \quad \nabla \cdot \nabla V = \Delta V = \rho_m. \quad (75)$$

Здесь: V – скалярная функция класса C^∞ .

Решением уравнения Пуассона (75) в шаре будет интеграл:

$$V = \int_W \frac{\rho_m(p)}{r(p,q)} dw', \quad (76)$$

где p – точка внутри шара, q – точка вне шара.

Обратный радиус в (76) $1/r(p,q)$ можно представить гипергеометрическими рядами К.Ф. Гаусса [28] или с помощью сферических функций Лежандра [20], например,

$$1/r(p, q) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [\bar{c}_n^m \cos m\varphi \cos m\varphi' P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta') + \bar{c}_n^m \sin m\varphi \sin m\varphi' P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta')] \frac{r^m}{r^{n+1}} \quad r \leq R \quad (77)$$

где R – радиус шара, \bar{c}_n^m – число сочетаний из n по m , $p(r', \theta', \varphi'), q(r, \theta, \varphi)$ – координаты точек в сферической системе координат, закрепленной в центре шара, $P_n^m(\cos \theta)$ – присоединенные функции Лежандра.

Суммирование по n в (77) начинается с единицы в связи с предположением, о том, что среднее функции $V \in C^\infty$ по сфере \mathcal{S} равно нулю:

$$\langle V \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi V \sin \theta d\theta d\varphi = 0. \quad (78)$$

Подставив (77) в (76), получим:

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n [\cos m\varphi P_n^m(\cos \theta) \bar{c}_n^m \int_W \rho_m(p) r^m \cos m\varphi' P_n^m(\cos \theta') dw' + \sin m\varphi P_n^m(\cos \theta) \bar{c}_n^m \int_W \rho_m(p) r^m \sin m\varphi' P_n^m(\cos \theta') dw']. \quad (79)$$

Далее необходимо предположить, что плотность магнитных масс $\rho_m(r', \theta', \varphi')$, есть комплексная функция координат внутри шара, тогда интегралы в (79) можно обозначить комплексными постоянными A_n^m и B_n^m , что обеспечивает полноту разложения потенциала V по сферическим функциям:

$$A_n^m = \bar{c}_n^m \int_W \rho_m(p) r^m \cos m\varphi' P_n^m(\cos \theta') dw' \\ B_n^m = \bar{c}_n^m \int_W \rho_m(p) r^m \sin m\varphi' P_n^m(\cos \theta') dw'. \quad (80)$$

В этом случае разложение (79) примет вид:

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n (A_n^m \cos m\varphi + B_n^m \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta). \quad (81)$$

В (81) введем следующие обозначения:

$$A_n^m = R^{n+2} g_n^m, \quad B_n^m = R^{n+2} h_n^m. \quad (82)$$

С учетом (82) разложение (81) будет выглядеть следующим образом:

$$V = R \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m\varphi + h_n^m \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta). \quad (83)$$

На поверхности шара при $r = R$ потенциал в (83) приобретет вид:

$$V = R \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m\varphi + h_n^m \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta). \quad (84)$$

Компоненты магнитного поля, согласно (75), в локальной системе координат, закрепленной на сфере S (x – направление, противоположное направлению координаты θ , z – направление внутрь шара, y – совпадает с направлением координаты φ), можно вычислить с учетом (75) и (83):

$$\begin{aligned} H_x^i &= - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m\varphi + h_n^m \sin m\varphi) \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta}, \\ H_y^i &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (g_n^m \sin m\varphi - h_n^m \cos m\varphi) \frac{m P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta}, \\ H_z^i &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m\varphi + h_n^m \sin m\varphi) (n+1) P_n^m(\cos \theta). \end{aligned} \quad (85)$$

Формулы (84) по существу исчерпывают результат, полученный в теореме К.Ф. Гаусса [28] о разложении (восстановлении) магнитного потенциала по данным на сфере S . Дополняя результат К.Ф. Гаусса компонентами магнитного поля (85), можно восстановить (разложить) потенциальное магнитное поле на сфере S с помощью одной скалярной функции V .

Нетрудно заметить, что формулы (85) отвечают также и теореме единственности Г.Л. Гельмгольца [19]. Согласно (85), для восстановления всего магнитного поля достаточно иметь на поверхности S сплошные (или разреженные в приближенной теории) данные о вертикальной компоненте магнитного поля H_z^i . По этим данным можно восстановить коэффициенты g_n^m и h_n^m , и их будет достаточно для восстановления всех трех компонент магнитного поля из (85).

Значительно позже теорема К.Ф. Гаусса была дополнена А. Шмидтом [23] в предположении, что магнитные массы имеют место и вне шара. В этом

последнем случае необходимо разложить обратный радиус из (77) по следующим функциям:

$$1/r(p, q) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [\bar{c}_n^m \cos m\varphi \cos m\varphi' P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta') + \bar{c}_n^m \sin m\varphi \sin m\varphi' P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta')] \frac{r^n}{r^{m+1}} \quad r \geq R \quad (86)$$

Подставляя (86) в интеграл (76) и имея ввиду, что массы вне шара расположены в объеме \bar{W} с комплексной плотностью $\bar{\rho}_m(r, \theta, \varphi)$, получим:

$$\bar{V} = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sum_{m=0}^n [\cos m\varphi P_n^m(\cos \theta) \bar{c}_n^m \int_{\bar{W}} \frac{1}{r^{m+1}} \bar{\rho}_m(q) \cos m\varphi' P_n^m(\cos \theta') dw' + \sin m\varphi P_n^m(\cos \theta) \bar{c}_n^m \int_{\bar{W}} \frac{1}{r^{m+1}} \bar{\rho}_m(q) \sin m\varphi' P_n^m(\cos \theta') dw'] \quad (87)$$

В (87) введем обозначения:

$$C_n^m = \int_{\bar{W}} \frac{\bar{c}_n^m \bar{\rho}_m(q)}{r^{m+1}} \cos m\varphi' P_n^m(\cos \theta') d\bar{w}'$$

$$D_n^m = \int_{\bar{W}} \frac{\bar{c}_n^m \bar{\rho}_m(q)}{r^{m+1}} \sin m\varphi' P_n^m(\cos \theta') d\bar{w}' \quad (88)$$

И далее еще раз обозначая:

$$c_n^m = R^{(n-1)} C_n^m, \quad d_n^m = R^{(n-1)} D_n^m, \quad (89)$$

получим выражения для магнитного потенциала масс, расположенных за пределами шара W .

$$\bar{V} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{R^{n-1}} \sum_{m=0}^n (c_n^m \cos m\varphi + d_n^m \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta). \quad (90)$$

На поверхности шара при $r = R$ потенциал магнитных масс, расположенных вне шара, можно записать так:

$$\bar{V} = R \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (c_n^m \cos m\varphi + d_n^m \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta). \quad (91)$$

Компоненты магнитного поля в той же локальной системе координат x, y, z , будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}
H_x^e &= -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (c_n^m \cos m\varphi + d_n^m \sin m\varphi) \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta}, \\
H_y^e &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (c_n^m \sin m\varphi - d_n^m \cos m\varphi) \frac{mP_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta}, \\
H_z^e &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (c_n^m \cos m\varphi + d_n^m \sin m\varphi) nP_n^m(\cos \theta).
\end{aligned} \tag{92}$$

Складывая (85) и (92) в локальной системе координат и вводя следующие обозначения:

$$\begin{cases} g_n^m + c_n^m = a_n^m, \\ (n+1)g_n^m - nc_n^m = \bar{a}_n^m, \end{cases}
\begin{cases} h_n^m + d_n^m = b_n^m, \\ (n+1)h_n^m - nd_n^m = \bar{b}_n^m, \end{cases} \tag{93}$$

получим пары уравнений, определитель которых равен $-(2n+1)$, что гарантирует единственность разделения коэффициентов магнитных полей, на коэффициенты магнитных полей от внутренних (в шаре) и внешних (вне шара) магнитных масс.

Результирующие разложения суммарного магнитного поля на поверхности S шара W запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}
H_x &= -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (a_n^m \cos m\varphi + b_n^m \sin m\varphi) \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta}, \\
H_y &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (a_n^m \sin m\varphi - b_n^m \cos m\varphi) \frac{mP_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta}, \\
H_z &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (\bar{a}_n^m \cos m\varphi + \bar{b}_n^m \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta).
\end{aligned} \tag{94}$$

Формулы (94) полностью исчерпывают теорию К.Ф. Гаусса-А. Шмидта о разложении (восстановлении) магнитного поля от внутренних и внешних по отношению к поверхности S источников – магнитных масс [28, 33].

В (94) неизвестными являются комплексные коэффициенты $a_n^m, b_n^m, \bar{a}_n^m, \bar{b}_n^m$, которые можно отыскать по данным, имеющимся на поверхности S как в

отдельных точках (для приближенной теории), так и по всей сфере, например, в виде магнитных карт, имеющих у геомагнитологов.

Следует заметить также, что для полного разделения (восстановления) по формулам (93) и (94) магнитных полей на поля от внутренних в шаре W и внешних в области \bar{W} источников достаточно иметь данные о вертикальной H_z компоненте поля и одной из касательных компонент H_x или H_y на поверхности \mathcal{S} . Это доказывает следующую теорему.

Теорема 9.

Для интерполяции и полного разделения (восстановления) магнитных полей магнитных масс, находящихся в шаре W , от магнитных полей магнитных масс вне шара (в области \bar{W}), достаточно данных о двух компонентах магнитного поля: вертикальной и одной из касательных к поверхности \mathcal{S} . (аналог теорем К.Ф. Гаусса и А. Шмидта).

Формулами (94) завершается разработка первого формализма (статического), основанного на предположении о *потенциальности* постоянного магнитного поля всюду в связи с заложенным заранее предположением об источнике магнитного поля в виде магнитных масс.

Считается, что статическая парадигма в виде формул (92) и (94) применима в том случае, когда шар W и область \bar{W} разнесены и в них циркулируют постоянные бездивергентные электрические токи [27]. Для этого необходимо смоделировать замкнутые электрические токи в источниках магнитными листками, а измерения магнитных полей производить в бестоковой области между W и \bar{W} [27]. Такая ситуация как будто бы наблюдается в атмосфере Земли, когда изучается постоянное магнитное поле Земли и его длиннопериодные вариации, наблюдаемые в атмосфере на мировой сети станций или полученные в результате всемирной магнитной съемки 1964/65 годов.

Однако в этом последнем случае при применении разложений (94) были замечены их недостаточно точные интерполяционные свойства [27]. Как

выяснил автор в [10, 31, 32], это связано с проникновением в атмосферу Земли не потенциальных по определению тороидальных магнитных полей от сферических источников – бездивергентных электрических токов или токов, расположенных на сферических поверхностях, например, в ионосфере (источники длиннопериодных вариаций магнитного поля Земли).

При проникновении непотенциального магнитного поля в непроводящую атмосферу Земли теорема о разделении статических магнитных полей (теорема 9) К.Ф. Гаусса-А. Шмидта может быть переформулирована и доказана и в стационарном случае.

Теорема 9.1.

Проблема отделения полоидальных и тороидальных векторных полей источников, расположенных за пределами шара V от таких же полей, но от источников, расположенных внутри шара, разрешима единственным образом, если известны внешняя нормальная $H_N(r)$ компонента и одна из двух касательных $H_t(r)$ компонент суммарного векторного поля \mathbf{H} на поверхности S шара V .

Действительно.

Пусть на S известна, согласно формуле (65), суммарная скалярная функция $Q = Q^e + Q^i$, состоящая из внешней Q^e и внутренней Q^i частей. С учетом формул (58) и (65) можно записать на поверхности S :

$$Q^e + Q^i = - \sum_{n=1}^{\infty} R \frac{S_n(\theta, \varphi)}{n(n+1)} [A_n \frac{1}{R^{n+1}} + B_n R^n], \quad (94.1)$$

где A_n и B_n – комплексные постоянные, соответственно внешней A_n и внутренней B_n функции Q . Тороидальные и полоидальные компоненты магнитного поля на поверхности шара S вычисляются с использованием определений (6) и (7).

$$\mathbf{H}_T = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (Q^e + Q^i) \mathbf{e}_\theta - \frac{\partial}{\partial \theta} (Q^e + Q^i) \mathbf{e}_\varphi,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_p = & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial \theta} (Q^e + Q^i) e_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial \varphi} (Q^e + Q^i) e_\varphi - \\ & - \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (Q^e + Q^i) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (Q^e + Q^i) \right) e_r. \end{aligned} \quad (94.2)$$

Помня о зависимости функции Q от радиуса r для внешних и внутренних источников по (67) и опуская элементарные выкладки, запишем компоненты полоидального поля следующим образом:

$$\begin{aligned} H_{p\theta} &= -\frac{n}{r^{n+2}} \frac{\partial}{\partial \theta} Q^e + (n+1)r^{n-1} \frac{\partial}{\partial \theta} Q^i, \\ H_{p\varphi} &= -\frac{n}{r^{n+2}} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} Q^e + (n+1)r^{n-1} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} Q^i, \\ H_{pr} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\cos \theta \frac{\partial(Q^e + Q^i)}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial^2(Q^e + Q^i)}{\partial \theta^2} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2(Q^e + Q^i)}{\partial \varphi^2} \right] \end{aligned} \quad (94.3)$$

Учитывая формулы (94.2), (94.3 и (65) запишем касательные компоненты суммарного магнитного поля и его нормальную компоненту в следующем виде:

$$\begin{aligned} H_{i\theta} &= -\sum_{n=1}^{\infty} X_n(\theta, \varphi) \frac{1}{n(n+1)} \left[-A_n \frac{n}{R^{n+1}} + B_n (n+1) R^n \right], \\ H_{i\varphi} &= -\sum_{n=1}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi) \frac{1}{n(n+1)} \left[-A_n \frac{n}{R^{n+1}} + B_n (n+1) R^n \right], \\ H_N &= \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(\theta, \varphi) \frac{1}{n(n+1)} \left[A_n \frac{1}{R^{n+1}} + B_n R^n \right]. \end{aligned} \quad (94.4)$$

Здесь $X_n(\theta, \varphi), Y_n(\theta, \varphi), Z_n(\theta, \varphi) \in C^\infty$ – сложные угловые функции, производные от известной нам функции $S_n(\theta, \varphi)$. Формулы (94.4) указывают на то, что любая пара, составленная из одной касательной компоненты и нормальной, позволяет разделить коэффициенты внешних и внутренних относительно поверхности S векторных полей единственным образом, поскольку определитель разделяющих уравнений отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{R^{n+1}}, & R^n \\ -\frac{n}{R^{n+1}}, & (n+1)R^n \end{vmatrix} = \frac{(2n+1)}{R}. \quad (94.5)$$

Раздельное вычисление Q^e и Q^i позволяет восстановить на поверхности шара S полоидальное и тороидальное векторные поля как от источников, расположенных внутри шара, так и от внешних источников. Численная реализация алгоритма разделения с учетом тороидальных полей по данным о ГПП к эпохе 1965 г. представлена в монографии [10].

Утверждение теоремы 9, как оказалось, распространяется и на соленоидальные магнитные поля, содержащие в себе тороидальную и полоидальную части.

Рабочий алгоритм в основном для разреженных данных на сфере автор разработал, опираясь на стационарную парадигму и уравнения (36). В основу алгоритма положены следующие формулы.

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (95)$$

Здесь: \mathbf{j} – плотность бездивергентных электрических токов в шаре W или области \bar{W} .

В (95), как нетрудно видеть, магнитное поле в шаре W и вне его в области \bar{W} является не потенциальным, а вспомогательная функция – векторный потенциал вводится, исходя из свойства *соленоидальности* магнитного поля при помощи следующей цепочки равенств:

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{j}, \quad \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = \mathbf{j}, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad \Delta \mathbf{A} = -\mathbf{j}. \quad (96)$$

Решением последнего уравнения в (96) в шаре W является следующий интеграл:

$$\mathbf{A} = \int_W \frac{\mathbf{j}(p)}{r(p,q)} dw', \quad (97)$$

где $\mathbf{j}(p)$ – плотность тока в шаре W .

Дальнейшие действия с интегралом (97) аналогичны изложенным выше с некоторыми изменениями. Во-первых, следует учесть векторность плотности тока $\mathbf{j}(p)$ и его комплексную зависимость от координат точки p . Во-вторых, однозначно расписать векторный потенциал на компоненты, совпадающие с компонентами плотности тока $\mathbf{j}(p)$ в подынтегральной

функции можно только в прямоугольной системе координат, закрепленной в центре шара. Тогда:

$$A_x = \int_w \frac{j_x(p)}{r(p,q)} dw', \quad A_y = \int_w \frac{j_y(p)}{r(p,q)} dw', \quad A_z = \int_w \frac{j_z(p)}{r(p,q)} dw'.$$

(98)

Затем следует повернуть компоненты потенциала (98) до сферических компонент, чтобы воспользоваться разложением обратного радиуса в интегралах (98) по сферическим функциям, согласно (77) и (86):

$$A_\theta = A_x \cos \theta \cos \varphi + A_y \cos \theta \sin \varphi - A_z \sin \theta,$$

$$A_\varphi = -A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi, \quad (99)$$

$$A_z = A_x \sin \theta \cos \varphi + A_y \sin \theta \sin \varphi + A_z \cos \theta.$$

Подставляя в интегралы (98) разложения (77) и опуская промежуточные выкладки, аналогичные сделанным выше, запишем сферические компоненты векторного потенциала от источников с комплексной плотностью токов, находящихся внутри шара:

$$A_\theta^i = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [(\alpha_n^m \cos m\varphi + \rho_n^m \sin m\varphi) \cos \theta \cos \varphi + (\mu_n^m \cos m\varphi + \nu_n^m \sin m\varphi) \cos \theta \sin \varphi - (u_n^m \cos m\varphi + v_n^m \sin m\varphi) \sin \theta] \frac{R^{n+2}}{r^{n+1}} P_n^m(\cos \theta),$$

$$A_\varphi^i = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [-(\alpha_n^m \cos m\varphi + \rho_n^m \sin m\varphi) \sin \varphi + (\mu_n^m \cos m\varphi + \nu_n^m \sin m\varphi) \cos \varphi] \frac{R^{n+2}}{r^{n+1}} P_n^m(\cos \theta), \quad r \geq R$$

(100)

$$+ (\mu_n^m \cos m\varphi + \nu_n^m \sin m\varphi) \cos \varphi] \frac{R^{n+2}}{r^{n+1}} P_n^m(\cos \theta),$$

$$A_r^i = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [(\alpha_n^m \cos m\varphi + \rho_n^m \sin m\varphi) \sin \theta \cos \varphi + (\mu_n^m \cos m\varphi + \nu_n^m \sin m\varphi) \sin \theta \sin \varphi + (u_n^m \cos m\varphi + v_n^m \sin m\varphi) \cos \theta] \frac{R^{n+2}}{r^{n+1}} P_n^m(\cos \theta).$$

В формулах (100) коэффициенты разложений имеют следующий физический смысл. Во-первых, это интегралы от компонент плотности тока следующего вида:

$$\begin{aligned}
 a_n^m &= \frac{1}{R^{n+2}} \int_W r'^n j'_x(p) \cos m\varphi' P_n^m(\cos \theta') dw', \\
 \rho_n^m &= \frac{1}{R^{n+2}} \int_W r'^n j'_x(p) \sin m\varphi' P_n^m(\cos \theta') dw', \\
 \mu_n^m &= \frac{1}{R^{n+2}} \int_W r'^n j'_y(p) \cos m\varphi' P_n^m(\cos \theta') dw', \\
 \nu_n^m &= \frac{1}{R^{n+2}} \int_W r'^n j'_y(p) \sin m\varphi' P_n^m(\cos \theta') dw', \\
 u_n^m &= \frac{1}{R^{n+2}} \int_W r'^n j'_z(p) \cos m\varphi' P_n^m(\cos \theta') dw', \\
 v_n^m &= \frac{1}{R^{n+2}} \int_W r'^n j'_z(p) \sin m\varphi' P_n^m(\cos \theta') dw'.
 \end{aligned}
 \tag{101}$$

Во-вторых, известно, что выражение $r' \cos \theta'$ есть проекция радиуса вектора r' на ось z' , а выражение $r' \sin \varphi' \sin \theta'$ есть проекция на ось y' и т.д. В связи с этим постоянные комплексные коэффициенты в (101) могут быть в первом приближении записаны следующим образом, например,

$$a_1^0 = \frac{1}{R^3} \int_W z' j_x(p) dw' = \frac{M'_y}{R^3}, \quad \rho_1^1 = \frac{1}{R^3} \int_W y' j_x(p) dw' = -\frac{M'_z}{R^3} \text{ и т.д.} \tag{102}$$

Из (102) следует, что комплексные коэффициенты представляют собой проекции моментов различных порядков произвольной токовой системы на оси прямоугольной системы координат, причем компонента $j'_x(p)$ дает только проекции $M_{ny'}^m \in M_{nz'}^m$, компонента $j'_y(p)$ порождает только проекции $M_{nx'}^m \in M_{nz'}^m$ и т.д. Эти факты важны для решения проблем не только интерполяции разреженных данных на сфере S , но и для физических приложений [10, 31, 32].

Если источники магнитного поля расположены вне шара W , а именно в области \bar{W} , то компоненты векторного потенциала примут вид:

$$\begin{aligned}
A_{\theta}^e &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [(a_n^m \cos m\varphi + b_n^m \sin m\varphi) \cos \theta \cos \varphi + \\
&\quad (c_n^m \cos m\varphi + d_n^m \sin m\varphi) \cos \theta \sin \varphi - \\
&\quad (e_n^m \cos m\varphi + f_n^m \sin m\varphi) \sin \theta] \frac{r^n}{R^{n-1}} P_n^m(\cos \theta), \\
A_{\varphi}^e &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [-(a_n^m \cos m\varphi + b_n^m \sin m\varphi) \sin \varphi + \\
&\quad (c_n^m \cos m\varphi + d_n^m \sin m\varphi) \cos \varphi] \frac{r^n}{R^{n-1}} P_n^m(\cos \theta), \quad (103)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_r^e &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [(a_n^m \cos m\varphi + b_n^m \sin m\varphi) \sin \theta \cos \varphi + \\
&\quad (c_n^m \cos m\varphi + d_n^m \sin m\varphi) \sin \theta \sin \varphi + \\
&\quad (e_n^m \cos m\varphi + f_n^m \sin m\varphi) \cos \theta] \frac{r^n}{R^{n-1}} P_n^m(\cos \theta),
\end{aligned}$$

где h – расстояние между шаром W и областью \bar{W} .

Опуская промежуточные выкладки, аналогичные приведенным выше, представим разложения компонент суммарного магнитного поля произвольных бездивергентных токовых систем, расположенных в шаре W и области \bar{W} и отнесенные к поверхности шара \mathcal{S} . В локальной системе координат x, y, z , закрепленной на сфере \mathcal{S} , компоненты магнитного поля на сфере \mathcal{S} примут вид:

$$\begin{aligned}
H_x &= -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [-\bar{i}_n^m m \sin m\varphi \cos \varphi + \bar{j}_n^m m \cos m\varphi \cos \varphi \\
&\quad \bar{k}_n^m m \sin m\varphi \sin \varphi + \bar{l}_n^m m \cos m\varphi \sin \varphi] P_n^m(\cos \theta) - \\
&\quad (\bar{q}_n^m \sin m\varphi - \bar{p}_n^m \cos m\varphi) m \cos \theta P_n^m(\cos \theta) + \\
&\quad [-\tilde{i}_n^m \cos m\varphi \sin \varphi - \tilde{j}_n^m \sin m\varphi \sin \varphi + \tilde{k}_n^m \cos m\varphi \cos \varphi + \\
&\quad \tilde{l}_n^m \sin m\varphi \cos \varphi] P_n^m(\cos \theta),
\end{aligned}$$

$$H_y = -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [\bar{i}_n^m \cos m\varphi \cos \varphi + \bar{j}_n^m \sin m\varphi \cos \varphi + \quad (104)$$

$$\bar{k}_n^m \cos m\varphi \sin \varphi + \bar{l}_n^m \sin m\varphi \sin \varphi] \sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} +$$

$$(\bar{q}_n^m \cos m\varphi + \bar{p}_n^m \sin m\varphi) \cos \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} +$$

$$[\tilde{i}_n^m \cos m\varphi \cos \varphi + \tilde{j}_n^m \sin m\varphi \cos \varphi + \tilde{k}_n^m \cos m\varphi \sin \varphi +$$

$$\tilde{l}_n^m \sin m\varphi \sin \varphi] \cos \theta P_n^m(\cos \theta) +$$

$$(\tilde{q}_n^m \cos m\varphi + \tilde{p}_n^m \sin m\varphi) \sin \theta P_n^m(\cos \theta),$$

$$H_z = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \bar{i}_n^m \left(\cos m\varphi \sin \varphi \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} - m \sin m\varphi \cos \varphi \operatorname{ctg} \theta P_n^m(\cos \theta) \right) +$$

$$\bar{j}_n^m \left(\sin m\varphi \sin \varphi \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} + m \cos m\varphi \cos \varphi \operatorname{ctg} \theta P_n^m(\cos \theta) \right) -$$

$$\bar{k}_n^m \left(\cos m\varphi \cos \varphi \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} + m \sin m\varphi \sin \varphi \operatorname{ctg} \theta P_n^m(\cos \theta) \right) -$$

$$\bar{l}_n^m \left(\sin m\varphi \cos \varphi \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} - m \cos m\varphi \sin \varphi \operatorname{ctg} \theta P_n^m(\cos \theta) \right) +$$

$$\bar{q}_n^m m \sin m\varphi P_n^m(\cos \theta) - \bar{p}_n^m m \cos m\varphi P_n^m(\cos \theta).$$

Анализ формул (104) указывает на более сложный по отношению к (94) характер интерполяционных формул для разложения (восстановления) магнитных компонент на поверхности шара \mathcal{S} . Для нахождения всех комплексных коэффициентов, входящих в разложения (104), достаточно иметь данные на поверхности шара \mathcal{S} . Нетрудно заметить также, что в случае образования интерполяционных формул с помощью трех скалярных компонент векторного потенциала от произвольных электрических токов (исключая диполь), достаточно иметь данные только о локальной H_y – компоненте, в которую входит весь набор неизвестных комплексных постоянных. В этом смысле векторные источники, а именно бездивергентные электрические токи в шаре W и за его пределами в области \bar{W} , в своем суммарном магнитном поле требуют для полного разделения и

восстановления всего поля измерить одну горизонтальную компоненту H_y .

Разделяющие уравнения при этом имеют вид:

$$\begin{cases} a_n^m + a_n^m = \bar{i}_n^m, & \rho_n^m + b_n^m = \bar{j}_n^m, \\ (n+1)a_n^m - na_n^m = \tilde{i}_n^m; & (n+1)\rho_n^m - nb_n^m = \tilde{j}_n^m; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_n^m + c_n^m = \bar{k}_n^m, & v_n^m + d_n^m = \bar{l}_n^m, \\ (n+1)\mu_n^m - nc_n^m = \tilde{k}_n^m; & (n+1)v_n^m - nd_n^m = \tilde{l}_n^m; \end{cases} \quad (105)$$

$$\begin{cases} u_n^m + e_n^m = \bar{q}_n^m, & v_n^m + f_n^m = \bar{p}_n^m, \\ -(n+1)u_n^m + ne_n^m = \tilde{q}_n^m; & -(n+1)v_n^m + nf_n^m = \tilde{p}_n^m. \end{cases}$$

Определители в (105) равны $\pm(2n+1)$, что обеспечивает единственность отделения одних коэффициентов от других.

Теорем 10.

Для интерполяции и полного разделения (восстановления) магнитных полей произвольных бездивергентных электрических токов, находящихся в шаре, от магнитных полей бездивергентных электрических токов, находящихся в области вне шара, достаточно данных об одной касательной к поверхности шара компоненте магнитного поля H_y .

Таким образом, в суммарном магнитном поле решение проблемы разделения коэффициентов по (104) и (105) минимизирует до одной компоненты требование теорем К.Ф. Гаусса и А. Шмидта (теорема 9), в которых этих компонент должно быть две.

Численные свойства интерполяционных формул (104) неоднократно исследовались автором [10, 32] и показали существенные преимущества формул (104) по сравнению с (94) при интерполяции разреженных данных мировой сети магнитных обсерваторий на Земле и сплошных данных всемирной магнитной съемки [10].

Этими результатами исчерпывается второй формализм при разработке интерполяционных формул для разделения (восстановления) магнитных полей по данным, находящимся на поверхности шара \mathcal{S} .

Нетрудно заметить, что во втором формализме заранее не ставится вопрос о потенциальности магнитного поля в области между шаром W и областью \bar{W} . Алгоритм разработан, исходя из принципа *соленоидальности магнитного* поля с предварительным отсутствием сведений о конфигурации токов в занимаемых ими областях пространства. В разработанных алгоритмах явно присутствует только бездивергентность электрических токов. Поэтому во втором формализме, в силу его большей точности, удалось проверить косвенные указания из [2,3] на то, что при возбуждении магнитных полей бездивергентными тороидальными токами, находящимися в шаре W и области \bar{W} , могут возникнуть не потенциальные магнитные поля в области между W и \bar{W} . С точки зрения стандартных уравнений Максвелла, которые представлены здесь формулами (74) и (95), появление не потенциального поля в бестоковой области между W и \bar{W} невозможно. Действительно, по теореме Стокса:

$$\int_L (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}) = \int_{\bar{S}} (\nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}) = \int_{\bar{S}} j_n \cdot d\mathbf{s} \Big|_{j_n=0} = 0.$$

(106)

Тем не менее, проверка (106) с помощью магнитного поля, измеряемого в атмосфере Земли, дает результат, разительно отличающийся от (106). Почти половину магнитного поля спокойных солнечно-суточных вариаций составляет не потенциальное магнитное поле при практически отсутствующем электрическом токе через атмосферу [2,3,10].

Далее необходимо сформулировать третий формализм, разработанный для исследования задачи о магнитных полях от *бездивергентных тороидальных электрических токов в шаре W* и за его пределами в области \bar{W} . Для этого необходимо воспользоваться первой формулой из (96) и нестандартным ортогональным тороидальным разложением векторного потенциала \mathbf{A} , согласно (5):

$$\mathbf{A} = (Q \cdot \mathbf{r}) + \nabla \times (Q \cdot \mathbf{r}), \quad (107)$$

где Q – скалярная функция трех переменных (r, θ, φ) класса C^∞ , \mathbf{r} – радиус-вектор. Разложение (107) позволяет однозначно ввести тороидальное и

полоидальное магнитные поля от тороидальных электрических токов, упомянутые и исследованные в [6].

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_T &= \nabla \times (Qr), \quad \mathbf{H}_p = \nabla \times \nabla \times (Qr), \\ \nabla \times \mathbf{H}_T &= \nabla \times \nabla \times (Qr) = \mathbf{H}_p, \quad \nabla \times \mathbf{H}_p = \nabla \times \nabla \times \nabla \times (Qr) = \chi \mathbf{H}_T, \end{aligned} \quad (108)$$

где $\chi = \frac{\gamma}{\eta}$, γ – скорость диффузии магнитного поля, $\eta = \frac{1}{\sigma\mu}$ – магнитная вязкость, σ – удельная проводимость в шаре W или \bar{W} , μ – магнитная проницаемость в них. Формулы (96) и (107) позволяют выразить компоненты векторного потенциала с помощью одной скалярной функции в следующем виде:

$$A_\theta = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial Q}{\partial\varphi}, \quad A_\varphi = -\frac{\partial Q}{\partial\theta}, \quad A_r = rQ, \quad (109)$$

а магнитное поле полоидального и тороидального типа соответственно с помощью формул:

$$\begin{aligned} H_{p\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial\theta} (Qr) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} rA_\varphi, \\ H_{p\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi} (Qr) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} rA_\theta, \\ H_{pr} &= -\frac{1}{r^2 \sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial(Qr)}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial\varphi} \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial(Qr)}{\partial\varphi} \right) = \\ &= -\frac{1}{r \sin\theta} \left(-\frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta A_\varphi + \frac{\partial}{\partial\varphi} A_\theta \right), \\ H_{T\theta} &= \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi} (Qr) = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi} A_r, \\ H_{T\varphi} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} (Qr) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} A_r. \end{aligned} \quad (110)$$

Принимая во внимание формулы (110) можно записать на поверхности S выражения полоидального и тороидального магнитных полей от источников, расположенных внутри шара W :

$$\begin{aligned}
H_{P\theta}^i &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [-n\alpha_n^m \cos m\varphi \sin \varphi - n\rho_n^m \sin m\varphi \sin \varphi + \\
&\quad n\mu_n^m \cos m\varphi \cos \varphi + n\nu_n^m \sin m\varphi \cos \varphi] P_n^m(\cos \theta), \\
H_{P\varphi}^i &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [-n\alpha_n^m \cos m\varphi \cos \varphi \cos \theta - n\rho_n^m \sin m\varphi \cos \varphi \cos \theta - \\
&\quad n\mu_n^m \cos m\varphi \sin \varphi \cos \theta - n\nu_n^m \sin m\varphi \sin \varphi \cos \theta + \\
&\quad n u_n^m \cos m\varphi \sin \theta + n v_n^m \sin m\varphi \sin \theta] P_n^m(\cos \theta), \\
H_{Pr}^i &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \alpha_n^m \left(\cos m\varphi \sin \varphi \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} - m \sin m\varphi \cos \varphi \operatorname{ctg} \theta P_n^m(\cos \varphi) \right) + \\
&\quad \rho_n^m \left(\sin m\varphi \sin \varphi \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} + m \cos m\varphi \cos \varphi \operatorname{ctg} \theta P_n^m(\cos \theta) \right) - \\
&\quad \mu_n^m \left(\cos m\varphi \cos \varphi \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} + m \sin m\varphi \sin \varphi \operatorname{ctg} \theta P_n^m(\cos \theta) \right) - \\
&\quad \nu_n^m \left(\sin m\varphi \cos \varphi \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} - m \cos m\varphi \sin \varphi \operatorname{ctg} \theta P_n^m(\cos \theta) \right) + \\
&\quad (u_n^m \sin m\varphi - v_n^m \cos m\varphi) m P_n^m(\cos \theta). \\
H_{T\theta}^i &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [-\alpha_n^m (\cos m\varphi \sin m\varphi + m \sin m\varphi \cos \varphi) + \\
&\quad \rho_n^m (m \cos m\varphi \cos \varphi - \sin m\varphi \sin \varphi) + \\
&\quad \mu_n^m (\cos m\varphi \cos \varphi - m \sin m\varphi \sin \varphi) + \\
&\quad \nu_n^m (m \cos m\varphi \sin \varphi + \sin m\varphi \cos \varphi) + \\
&\quad (-u_n^m \sin m\varphi + v_n^m \cos m\varphi) m \operatorname{ctg} \theta] P_n^m(\cos \theta), \\
H_{T\varphi}^i &= -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\alpha_n^m \cos m\varphi \cos \varphi + \rho_n^m \sin m\varphi \cos \varphi \right) (\cos \theta P_n^m(\cos \theta) + \sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta}) + \\
&\quad (\mu_n^m \cos m\varphi \sin \varphi + \nu_n^m \sin m\varphi \sin \varphi) \left(\cos \theta P_n^m(\cos \theta) + \sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) + \\
&\quad (u_n^m \cos m\varphi + v_n^m \sin m\varphi) \left(\cos \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} - \sin \theta P_n^m(\cos \theta) \right).
\end{aligned} \tag{111}$$

Формулы (111) указывают на то, что для восстановления всего магнитного поля, включая его тороидальную часть от источников внутри шара, достаточно иметь данные только о вертикальной к поверхности \mathcal{S} компоненте полоидального поля $H_{Pr}^i = H_z$ (H_z в локальной системе координат). Это точно соответствует теоремам 5,7. Теорема 5 обобщает теорему Гельмгольца [19] об однозначном разложении (восстановлении) всего полоидального и тороидального магнитного поля по его нормальной компоненте на сфере \mathcal{S} .

Аналогичная ситуация возникает, когда необходимо получить разложения для полоидального и тороидального магнитного поля от внешних источников из области \bar{W} , но также на сферической поверхности \mathcal{S} . Опуская промежуточные выкладки, получим:

$$\begin{aligned}
H_{P\theta}^e &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [(n+1)a_n^m \cos m\varphi \sin \varphi + (n+1)b_n^m \sin m\varphi \sin \varphi - \\
&\quad (n+1)c_n^m \cos m\varphi \cos \varphi - (n+1)d_n^m \sin m\varphi \cos \varphi] P_n^m(\cos \theta), \\
H_{P\varphi}^e &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [(n+1)a_n^m \cos m\varphi \cos \varphi + (n+1)b_n^m \sin m\varphi \cos \varphi + \\
&\quad (n+1)c_n^m \cos m\varphi \sin \varphi + (n+1)d_n^m \sin m\varphi \sin \varphi) \cos \theta - \\
&\quad ((n+1)e_n^m \cos m\varphi + (n+1)f_n^m \sin m\varphi) \sin \theta] P_n^m(\cos \theta), \\
H_{Pr}^e &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n a_n^m \left(\cos m\varphi \sin \varphi \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} - m \sin m\varphi \cos \varphi \operatorname{ctg} \theta P_n^m(\cos \theta) \right) + \\
&\quad b_n^m \left(\sin m\varphi \sin \varphi \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} + m \cos m\varphi \cos \varphi \operatorname{ctg} \theta P_n^m(\cos \theta) \right) - \\
&\quad c_n^m \left(\cos m\varphi \cos \varphi \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} + m \sin m\varphi \sin \varphi \operatorname{ctg} \theta P_n^m(\cos \theta) \right) - \\
&\quad d_n^m \left(\sin m\varphi \cos \varphi \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} - m \cos m\varphi \sin \varphi \operatorname{ctg} \theta P_n^m(\cos \theta) \right) + \\
&\quad (e_n^m \sin m\varphi - f_n^m \cos m\varphi) m P_n^m(\cos \theta). \tag{112}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{T\theta}^e &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [-a_n^m (\cos m\varphi \sin \varphi + m \sin m\varphi \cos \varphi) + \\
& b_n^m (-\sin m\varphi \sin \varphi + m \cos m\varphi \cos \varphi) + \\
& c_n^m (\cos m\varphi \cos \varphi - m \sin m\varphi \sin \varphi) + d_n^m (\sin m\varphi \cos \varphi + m \cos m\varphi \sin \varphi) + \\
& (-e_n^m \sin m\varphi + f_n^m \cos m\varphi) m c t g \theta] P_n^m(\cos \theta), \\
H_{T\varphi}^e &= -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (a_n^m \cos m\varphi + b_n^m \sin m\varphi) \cos \varphi \left(\cos \theta P_n^m(\cos \theta) + \sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) + \\
& (c_n^m \cos m\varphi + d_n^m \sin m\varphi) \sin \varphi \left(\cos \theta P_n^m(\cos \theta) + \sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) + \\
& (e_n^m \cos m\varphi + f_n^m \sin m\varphi) \left(-\sin \theta P_n^m(\cos \theta) + \cos \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right).
\end{aligned}$$

Если просуммировать выражения (111) и (112) можно получить формулы (104) в том числе и в локальной системе координат x, y, z . Как выяснено выше формулы (104) подчиняются теореме 10. С другой стороны, если с помощью формул (104) получить неизвестные коэффициенты, то разделив их согласно (105), можно по отдельности вычислить полоидальные и тороидальные поля от внутренних и внешних источников не только на поверхности S , но и в любых других точках, в том числе и между W и \bar{W} .

Теорема 11.

Для восстановления всего магнитного поля, включая и его тороидальную часть от источников внутри шара, достаточно иметь сплошные (или разреженные в приближенной теории) данные о нормальной к поверхности S компоненте полоидального магнитного поля H_{P_t} . (Аналог теоремы Гельмгольца б).

Следует заметить, что третий формализм, развитый автором, позволил положительно ответить на главный вопрос о том, способны ли тороидальные токи – бездивергентные токи $j(p)$, находящиеся в шаре, вызывать за его пределами, а именно в непроводящей области между W и \bar{W} , не потенциальное тороидальное магнитное поле. Согласно определениям (108) ответ однозначно

положителен. Это закрывает проблему наличия беспотенциальной части земного магнитного поля, например, в атмосфере, обнаруженное в [2, 3], ассоциируя эту беспотенциальную часть с всюду не потенциальным тороидальным магнитным полем, вихри которого возбуждают всюду полоидальное поле, а не электрический ток, который следовало бы получить, исходя из стандартных уравнений Максвелла. В атмосфере Земли непотенциальное магнитное поле присутствует, в то время как электрического тока в ней практически нет и это связано с наличием в атмосфере не потенциального тороидального магнитного поля.

Таким образом, исследование электродинамики источников магнитного поля в виде магнитных масс и замкнутых электрических токов, находящихся в шаре и за его пределами, показал коренное отличие электродинамики тороидальных электрических токов от электродинамики магнитных масс за счет появления в магнитном поле электрических токов всюду не потенциальной тороидальной его части. Ее появление вызвано сферичностью источника – электрического тока в шаре W и области \bar{W} . Влияние сферичности электрических токов подробно изучено в монографиях [10, 32].

Сходимость всех выше перечисленных разложений магнитных полей по сферическим функциям, как отмечено в [20], не хуже рядов Фурье, так как эти разложения в конечном итоге выражаются через комбинации тригонометрических функций.

Эксперименты

§11. Природные источники несилового магнитного и электрического поля на Земле

Со времени предсказания несиловых магнитных полей Чандрасекаром [1] было выполнено большое количество теоретических работ [списки литературы в работах [5, 6, 15]], в которых исследовались варианты

магнитных полей, конфигурация силовых линий которых турбулентно «закручивалась» самым причудливым образом. Такой путь исследования приводил к появлению тороидальных несиловых магнитных полей. Однако эксперименты на Земле с целью получения несилового магнитного поля на основе турбулентности исходного магнитного поля не давали положительного результата [30]. С нашей точки зрения это связано с малыми числами Рейнольдса Re_m для Земли из-за малых характерных размеров L в его определении §1.

Оказалось, что получить в технической физике в эксперименте несиловые электромагнитные поля на Земле можно только опираясь на теорему 4, утверждающую, что сферические тороидальные компоненты плотности тока и только они возбуждают одновременно тороидальные несиловые и полоидальные силовые магнитные поля.

Поэтому возникла проблема экспериментального обнаружения техническими средствами тороидальных несиловых магнитных полей в магнитном поле Земли. Следуя теореме 4, автор разработал алгоритмы, в которых была заложена возможность выделения тороидальных магнитных полей от природных сферических источников, размеры которых таковы, что число Рейнольдса для них оценивается числами 10^3 – 10^5 единиц. Их магнитное поле подчиняется уравнению (2), в котором одновременно присутствуют диффузия, индукция и гидромагнитные эффекты. Экспериментальный материал обильно представлен в отчётах по двум международным геофизическим годам 1933 и 1957/58 гг., а также в материалах всемирной магнитной съёмки 1964/65 гг.

Эти наблюдения осуществлены на поверхности шара-Земле, поэтому алгоритмы предыдущего параграфа как раз разработаны для осуществления интерпретации разреженных (станции наблюдения) и сплошных (магнитные карты) данных. Достаточно полная интерпретация названных наблюдений изложена в монографии [10]. В ней убедительно доказано, что наблюденные

на Земле магнитные поля (Главное геомагнитное поле и поля его вариаций), содержат в своём составе не только силовые полоидальные магнитные поля, но что наиболее важно ещё и тороидальную несиловую часть. В напряжённости Главного геомагнитного поля содержится до 10% напряжённости несилового магнитного поля. В напряжённости регулярных спокойных солнечно-суточных вариаций магнитного поля Земли содержится до 40% напряжённости несилового магнитного поля.

Таким образом, экспериментальное подтверждение существования в естественном магнитном поле несиловой части оправдывает всю изложенную выше теорию. Открытие автором существования в эксперименте с естественным магнитным полем его несиловой части ставит насущную задачу определения истинных источников Главного геомагнитного поля и полей его различных вариаций. Сферичность естественных источников доказана в связи с обнаружением тороидальной части в их магнитном поле. Естественные источники магнитного поля располагаются в сферических слоях Земли или на сферических поверхностях в ионосфере.

Решение задачи определения истинных источников земного магнитного поля состоит из нескольких самостоятельных и непростых этапов.

На первом этапе необходимо было решить задачу интерпретации сплошных, а также разреженных данных алгоритмами из предыдущего параграфа. Принципиальная трудность, которая автоматически возникала это обращение слабо обусловленных алгебраических матриц высокого порядка при определении коэффициентов разложения магнитного поля на сфере. Эта задача успешно решена в [32, п. 1.5.5] путём привлечения для обращения таких матриц методов Мура и Пенроуза [35, 36] с добавлением регуляризатора А.Н. Тихонова [34].

Разделение полей и вычисление главного показателя –коэффициента, μ_1^1 , представляющего главный момент произвольной токовой системы внутри шара использован при вычислении местонахождения и геометрических размеров электрического тока, вызывающего дипольное магнитное поле [32].

На втором этапе необходимо было преодолеть некорректность постановки обратной задачи определения источников внутри шара. Из классической математики известно, что такая обратная задача не имеет решения.

Чтобы подавить некорректность в постановке обратной задачи необходимо предварительно ввести в задачу дополнительную физическую информацию об источнике внутри шара.

В-первых, источник должен быть таким, чтобы его магнитное поле на поверхности шара своими силовыми линиями повторяло магнитное поле диполя (или было близко к нему). Магнитный момент источника внутри шара должен совпадать с магнитным моментом магнитного поля на его поверхности, а также с магнитным моментом кольцевого электрического тока, расположенного симметрично полю диполя где-то внутри шара. Силовые линии кольцевого тока должны совпадать с силовыми линиями наблюдаемого магнитного поля на поверхности шара и вне его.

В математической форме это выглядит следующим образом:

$$|M| = \mu_1^1 4\pi 10^{-3} R_0^3 = I\pi r_k^2, \quad [Am^2] \quad (113)$$

где M – магнитный момент, μ_1^1 – коэффициент при дипольном члене разложения внутреннего полоидального поля Земли из [10], I – сила тока в контуре с током, r_k – радиус контура, R – радиус шара, $4\pi 10^{-3}$ – переводной коэффициент от размерности в Гс к размерности в А/м.

Во-вторых, предполагается равенство напряженностей полей на оси контура, совпадающей с магнитной осью, соединяющей северный полюс Земли с южным. В первом приближении это можно выразить следующей формулой:

$$H_{Pr}^i(0, R_0) 4\pi 10^{-3} = \frac{2\pi I r_k^2}{(R_0^2 + r_k^2)^{3/2}}, \quad [A/m] \quad (114)$$

Исключая силу тока их формул (113) и (114), в результате получим:

$$2\mu_1^1 = H_{Pr}^i(0, R_0) \left(1 + \frac{r_k^2}{R_0^2} \right)^{3/2}. \quad (115)$$

Разлагая в ряд выражение в скобках правой части формулы (115) и ограничиваясь двумя первыми членами разложения, получим:

$$2\mu_1^1 = H_{Pr}^i(0, R_0) \left(1 + \frac{3r_k^2}{2R_0^2} \right). \quad (116)$$

Согласно расчетам, проведенным в [10], стали известны значения внутреннего полоидального магнитного поля на полюсе и коэффициент при дипольной его части:

$$\begin{aligned} H_{Pr}^i(0, R_0) &= 0,59473, & [\text{Гс}] \\ \mu_1^1 &= 0,32006. & [\text{Гс}] \end{aligned} \quad (117)$$

В этом случае:

$$1 + \frac{3r_k^2}{R_0^2} = 1,07632.$$

Откуда получаем:

$$r_k = R_0 \cdot 0,22557 = 1437 \text{ км.} \quad (118)$$

Глубина до источника, следовательно, равна:

$$h = 4934 \text{ км.} \quad (119)$$

Расчетный радиус источника с электрическим током с точностью до 4,6% совпадает с радиусом зоны F жидкого ядра, составляющим по литературным данным 1371 км. Это последнее значение радиуса зоны F жидкого ядра неоднократно сообщалось в различной геолого-геофизической литературе [26, 27]. Из научных литературных источников известна также «толщина-мощность» слоя F , равная примерно 100 км.

Конфигурация и электродинамические параметры природного источника Главного геомагнитного поля к эпохе 1964/65 гг. изображены на рис. 2, полученном по результатам работы [35]. Такой природный источник порождает в атмосфере Земли не только известное полоидальное магнитное

поле, но что наиболее важно его тороидальную часть, выделенную с помощью алгоритмов предыдущего параграфа.

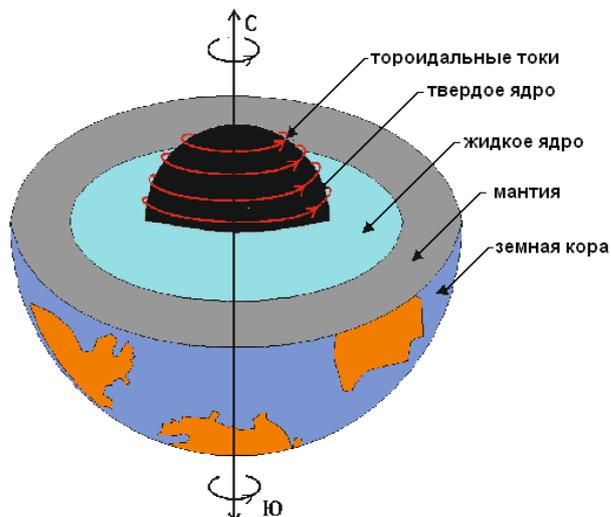


Рис. 2. Источник Главного геомагнитного поля Земли.

Параметры источника.

Расстояние до источника 4934 км; внутренний радиус тора с током 1437 км; поперечный размер тора 3 км; сила тока $1,7 \cdot 10^8 \text{ А}$; плотность тока $1,23 \cdot 10^{-2} \text{ А/м}^2$; напряженность электрического поля в источнике $2,5 \cdot 10^{-8} \text{ В/м}$; напряженность полоидального магнитного поля в источнике 60 Гс; напряженность тороидального магнитного поля в источнике 3,6 Гс.

Источник регулярных спокойных солнечно-суточных вариаций (S_q -вариаций) в результате применения алгоритмов из [32] к наблюдаемому магнитному полю во втором геофизическом году 1958/59 гг. Полномасштабная теория интерпретации S_q -вариаций приведена в [32]. Там же дан алгоритм построения токовой системы S_q -вариаций в ионосфере на высоте 120 км. Токовая система расположена на сферической ионосфере.

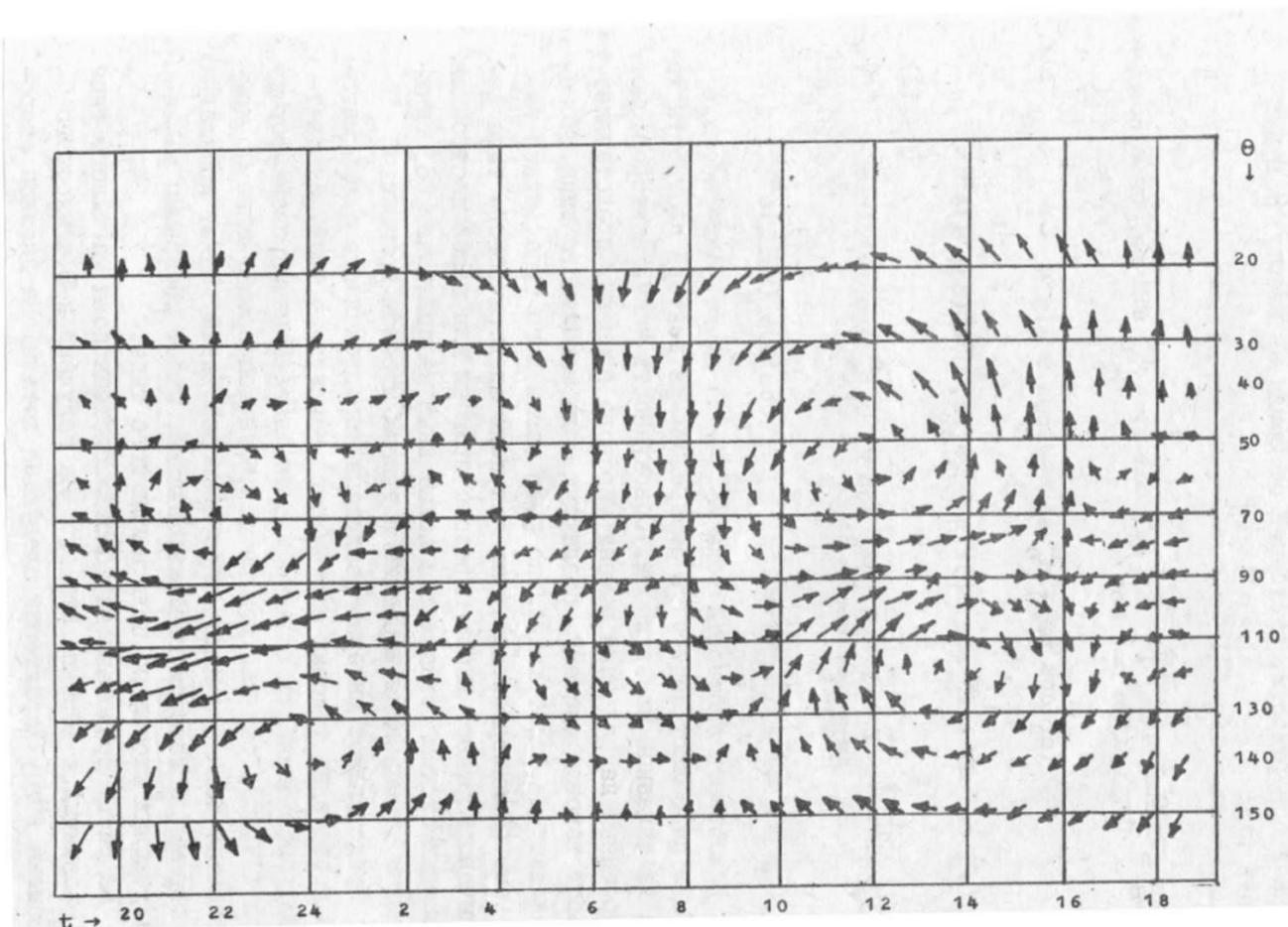


Рис. 3. Источник поля S_q вариаций при $UT = 6$ ч. (Каждый вектор соответствует направлению и величине поверхностного тока.)

Сферичность источника ответственна за возникновение тороидального несилевого магнитного поля в S_q -вариациях до 40% в его напряжённости.

Таким образом, природные источники несилевого тороидального магнитного поля, располагаясь на сферических поверхностях полностью отвечают теореме 4 и являются прямым доказательством присутствия в атмосфере Земли несилевого магнитного поля, согласно уравнению (2).

Источники естественного несилового электрического поля располагаются также в ионосфере или Земле. Их электрическое поле физически разбивается на две составляющие: индукционную и потенциальную. Согласно формулам (24), индукционная составляющая имеет две касательные к Земле компоненты. Вертикальная компонента индукционной составляющей компенсируется потенциальной, согласно теореме 1, но может быть восстановлена по результатам сферического анализа магнитных компонент, например, S_q -вариаций. В работе [10] такой анализ произведён по наблюдаемым данным об S_q -вариациях. Результатам этого анализа являются восстановленные на поверхности Земли индукционная ${}^e E_r^H$ – в мВ/км и потенциальная составляющая E_r в В/км электрического поля внешних источников S_q -вариаций рис.4.

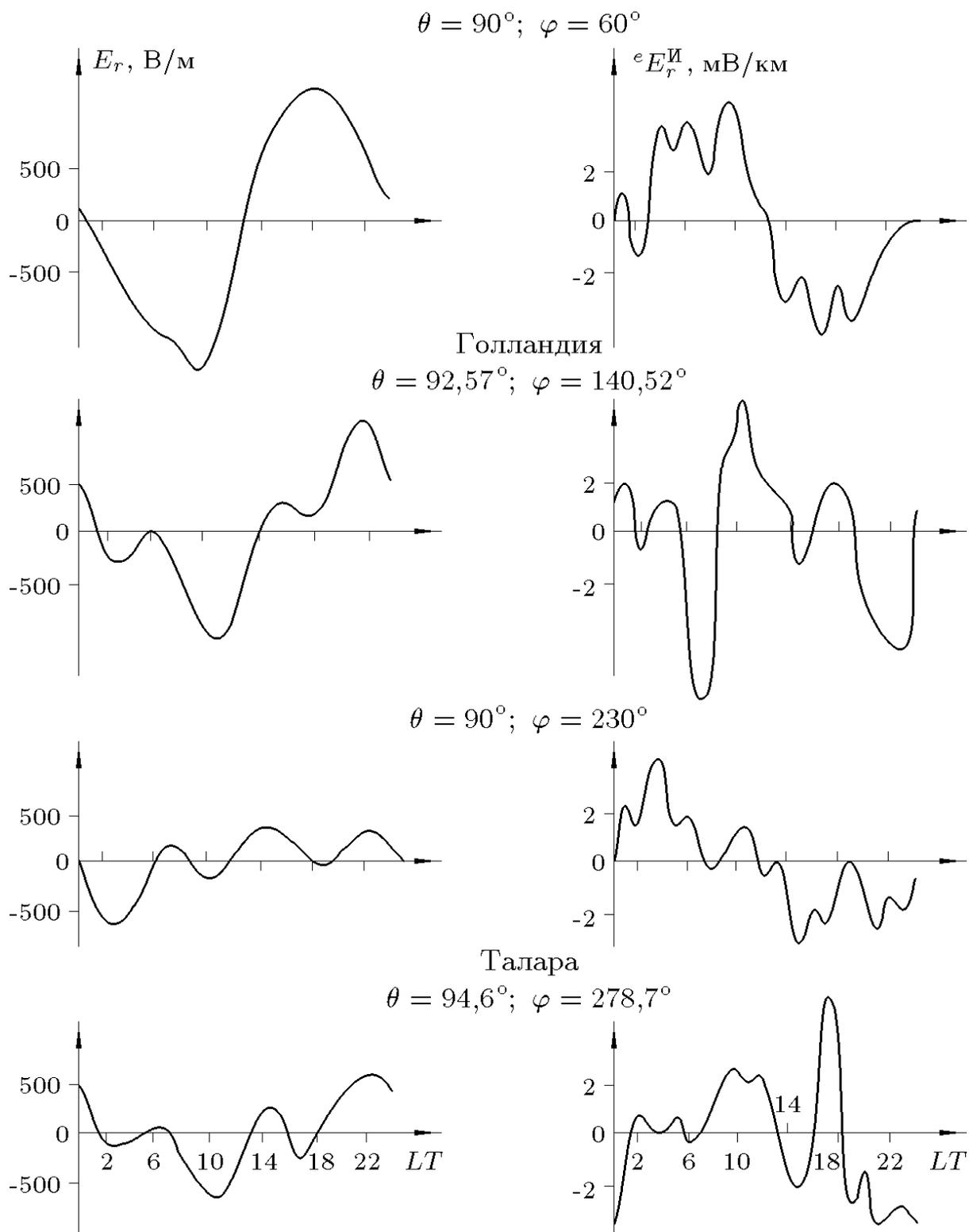


Рис. 4. Электрическое поле на экваториальных станциях.

Анализ графиков показывает, что потенциальная часть по напряжённости существенно выше индукционной части. Поэтому она экранирует индукционную составляющую. Наличие потенциальной части может быть

использовано в приложениях, одно из которых описано в следующем параграфе.

§12. Проявление несилового электрического поля в краткосрочных предвестниках землетрясений.

Поиск предвестника землетрясений в хорошо изученных физических полях не прекращается многие десятилетия. В специальной и научно - популярной литературе итоги этих поисков обсуждались многократно. Однако за последние годы накопился определенный скепсис в деле поиска предвестников в физических полях [38]. С этим можно согласиться только отчасти, так как еще недостаточно изучены электромагнитные и дилатансные предвестники, вероятно, возникающие на поверхности Земли до наступления разрушающего события. Возможности появления предвестников необходимо тщательно исследовать, тем более что в работах [39, 40] одна из них продемонстрирована с помощью известной ранее системы уравнений теплоэлектромагнитоупругости.

В этих работах утверждается, что до момента наступления события изменения в напряженном состоянии очага отражаются только в несиловом электрическом поле, так как все другие физические поля – температурное поле, сейсмические проявления и звук, магнитное и гравитационное поля – возникают при наличии перемещений горных пород в очаге. Следовательно, тогда, когда подвижка пород в очаге уже произошла и её проявление на поверхности Земли в виде землетрясения произойдет в ту же секунду. Это фиксируется в уравнениях теплоэлектромагнитоупругости. К сожалению, более общих уравнений пока не разработано. Естественно, задача состоит в том, чтобы чуть раньше узнать об этой возможной подвижке и принять меры до появления разрушающей волны на поверхности Земли. Эта во многом идеальная постановка проблемы востребована обществом, поэтому необходим адекватный ответ, найти который пытались и пытаются многие поколения учёных и практиков. Есть и положительные примеры.

За последнее время в этой области науки высказано несколько догадок. Среди которых самая радикальная утверждает, что каждое землетрясение уникально и происходит в своих специфических условиях, обязанных среде, в которой зарождается очаг землетрясения, и игре напряжений, причины которых могут быть самыми разнообразными. Похоже, что спусковой механизм событий также уникален и каждый раз свой, характерный только для произошедшего в данное время и в данном месте землетрясения.

Сложным вопросом также является выявление, в том числе глобальных причин возникновения землетрясений. По нашему мнению, причины возникновения землетрясений состоят в следующем [39]. Физико-химические и фазовые процессы с разной интенсивностью происходят под всей поверхностью Земли, с глубин от 5 км и до 700 км (судя по глубинам залегания очагов землетрясений). Это приводит к ослаблению и затем нарушению жесткости внутреннего скелета глубинного вещества Земли, появляются микротрещины, которые под воздействием давления создают поля трещиноватости, которые затем концентрируются на короткое время в глобальный разрыв, разрыв вызывает землетрясение [39].

С этой точки зрения землетрясение может произойти в любой точке планеты Земля. Кроме того, на Земле имеются области, где наиболее часты землетрясения. Поэтому исследования сосредоточены на изучении сейсмичности таких областей, в которых в том числе возможно появление сильных землетрясений. Локализацией таких областей сейсмология занимается длительное время. Столь же длительное время исследуются очаги землетрясений, модели которых изучаются теоретически путем компьютерного моделирования, а также на геофизических полигонах, расположенных в сейсмоопасных районах.

Естественно, что при моделировании физических процессов в очаге желательно привлечь к исследованию самые общие уравнения для описания его состояния. Так и происходит при математическом моделировании поведения очага [39, 40]. При этом свойства среды очага входят в уравнения в

виде феноменологических параметров Ламе λ и μ . Однако эти параметры столь сильно усреднены, что невозможно с их помощью увидеть главные микрофизические свойства пород очага. Наиболее важным для прогноза процесса разрушения свойством пород очага, как нам представляется, является их возможная микротрещиноватость, а также наличие в них зерен и пор, способствующих развитию процесса трещинообразования. Поэтому с нашей точки зрения для описания состояния очага его среду лучше всего моделировать не параметрами Ламе, а параметрами Работнова–Ломакина [41]. Параметры Работнова–Ломакина задают разномодульную среду, в которой по определению из-за наличия трещин, зерен и пор модуль упругости при растяжении и сжатии разный. В геофизике к такому описанию горных пород впервые обратились авторы из [42]. Они проанализировали все ранее полученные результаты такого описания трещиноватых сред, и пришли к выводу о приемлемости описания параметров горных пород с трещинами, включениями и порами следующим образом:

$$\bar{\lambda} = \lambda - \nu \xi^{-1}, \quad \bar{\mu} = \mu - \nu \xi. \quad (120)$$

Параметр трещиноватости ξ в (120) можно определить двумя способами:

$$\xi = \bar{\sigma} / \bar{\sigma}_0; \quad \bar{\sigma} = \frac{1}{3} \sigma_{ii}; \quad \bar{\sigma}_0 = \left(\frac{3}{2} S_{ij} \cdot S_{ji} \right)^{1/2}; \quad \text{где}$$

$$S_{ij} = \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) - \text{девиатор напряжений.}$$

$$\xi = \frac{I_1}{\sqrt{I_2}}; \quad I_1 = U_{ii} - \text{первый инвариант тензора деформаций,}$$

$$I_2 = \left[\frac{1}{2} (U_{ij} + U_{ji}) \right]^2 - \text{второй инвариант тензора деформаций,}$$

U_{ij} и U_{ji} – компоненты тензора деформаций, ν – модуль упругости.

В этой постановке тензор напряжений Гука–Дюамеля–Неймана в трещиноватой среде очага можно записать следующим образом:

$$\sigma_{ij} = 2\bar{\mu}U_{ij} + \delta_{ij}(\bar{\lambda}U_{kk} - \nu\sqrt{I_2} + (3\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})\alpha(T - T_0)). \quad (121)$$

А уравнения теплоэлектромагнитоупругости в очаге (систему уравнений очага землетрясения) соответственно:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} &= \mathbf{e} \cdot \text{Div} \sigma_{ij} - (3\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})\alpha \text{grad} T + [\sigma \mathbf{E} \times \mu_e \mathbf{H}] - \rho \mathbf{g} - \mathbf{F}_c, \\ \sigma \mu_e \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \Delta \mathbf{H} + \sigma \mu_e (\mathbf{H} \text{grad}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \sigma \mu_e \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \text{grad} \right) \mathbf{H} - \sigma \mu_e \mathbf{H} \text{div} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}, \\ C_v \rho \frac{\partial T}{\partial t} &= \chi \Delta T - (3\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})\alpha T_0 \text{div} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \rho Q. \end{aligned} \quad (122)$$

Параметры очага:

\mathbf{U} – вектор смещений (перемещений), \mathbf{e} – единичный вектор, направленный вдоль максимального напряжения, \mathbf{H} – вектор напряженности магнитного поля, \mathbf{E} – вектор напряженности электрического поля, T – температура, \mathbf{g} – вектор ускорения, σ – удельная проводимость среды в очаге, μ_e – магнитная проницаемость среды в очаге, $\bar{\lambda}, \bar{\mu}$ – коэффициенты Работнова-Ломакина, ν – модуль упругости, ρ – плотность среды в очаге, σ_{ij} – тензор напряжений, $(3\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})/3$ – модуль всестороннего сжатия, приведенный к трещиноватости среды очага, 3α – коэффициент объемного расширения, χ – коэффициент теплопроводности, C_v – теплоемкость при постоянном объеме, T_0 – начальная температура в очаге, \mathbf{F}_c – вектор дополнительных объемных сил (в частности приливные силы и силы, возникающие в связи с фазовыми превращениями в горных породах очага, или силы сцепления скелета горных пород в очаге), Q – дополнительное тепло, U_{ij} – тензор деформаций, $I_1 = U_{ii} = \frac{\partial U_i}{\partial i}$ – первый инвариант тензора деформаций, $I_2 = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial j} + \frac{\partial U_j}{\partial i} \right) \right]^2$ – второй инвариант тензора деформаций, δ_{ij} – единичный тензор.

Система уравнений (122) описывает связанные эффекты в электро-

теплопроводных деформируемых телах (в нашем случае это объёмы в очаговой зоне землетрясений). В этих объёмах токи смещения малы, объёмный заряд незначителен, джоулевы тепловыделения малы. Система

составлена на основе фундаментальных законов сохранения и термодинамических неравенств.

Основной проблемой, обозначенной в названии статьи, является поиск предвестников землетрясений среди хорошо изученных и измеряемых на местности физических полей. В связи с этим в уравнение баланса сил вводятся силы температурного расширения (сжатия) среды под воздействием дополнительного тепла, силы Лоренца и гравитации, а также «сила сцепления скелета» и сила инерции объема пород в очаге. Введение в уравнение движения фактически прочностной силы (силы сцепления скелета) оправдано, с нашей точки зрения, той причиной, что нами изучается состояние сил и напряжений в очаге до появления движений (сдвига) в очаге, приводящего к возникновению ударной волны, вызывающей затем землетрясение. Уравнение баланса сил и напряжений записано для элементарного объема очага, равного 1 м^3 . Полный объем очага, который может быть достаточно большим, входит как в левую, так и в правую части уравнений (122), поэтому легко нормируется к единице. Физически это означает, что здесь допускается, что баланс сил достигается при равных условиях как для всего очага, так и для его элементарного объема (*предполагается фрактальность пород очага*). Поэтому моделированию подвергаются физические процессы в элементарном объеме очага, что существенно упрощает математическую сторону задачи.

Для описания баланса температур независимо вводится уравнение теплопроводности в сжимаемой разномодульной среде элементарного объема очага. Для описания магнитного поля вводится уравнение индукции в сжимаемой среде. Тем самым для моделирования физических полей, имеющих место в разномодульной среде очага, записываются уравнения (122), которые являются аналогичными уравнениям теплоэлектромагнитоупругости.

Граничные условия на свободной дневной поверхности Земли для системы (122) имеют традиционный вид:

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2|_S; \quad \sigma_{ij}|_S = 0; \quad \mathbf{E}_S^1 = \mathbf{E}_S^2; \quad E_n^1 = \frac{\sigma_\tau}{\sigma_0} E_n^2|_S; \quad \mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2|_S; \quad T_1 = T_2|_S. \quad (123)$$

Здесь нижние индексы: 1– воздух, 2– Земля, S – поверхность Земли, n – нормаль к поверхности Земли, σ_0 – удельная проводимость воздуха, σ_τ – удельная проводимость Земли.

Предлагается моделировать предвестники землетрясений в физических полях в том смысле, который бы отвечал на вопрос: в каких физических полях могут существовать краткосрочные или среднесрочные предвестники землетрясений. Ясно, что прямым источником информации об этом может выступить тензор напряжений Гука–Дюамеля–Неймана, приведенный к физическим параметрам трещиноватой среды (121) и уравнения теплоэлектромагнитоупругости (122), записанные в феноменологических параметрах Работнова–Ломакина.

Начальные данные при этом заданы следующим образом: поля $T, \mathbf{H}, \mathbf{E}$ в некоторый момент времени t (принимаемый за $t=0$) известны во всем пространстве и равны $T_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{E}_0$.

Землетрясение происходит тогда, когда накапливающиеся напряжения в одном из районов земной коры превосходят пороговое значение Y , за которым наступает разрушение скелета, мезерновых и межпоровых пространств в веществе очага. Возникают микротрещины, которые затем концентрируются в глобальный разрыв. Разрыв вызывает землетрясение.

Граничные условия (123) указывают на то, что дневная поверхность ведет себя как мощный усилитель вертикально направленного электрического поля с коэффициентом усиления σ_τ / σ_0 за счет огромной разницы проводимостей $\sigma_\tau \gg \sigma_0$. Поэтому особое внимание необходимо сконцентрировать на этой компоненте электрического поля.

Если представить себе, что в очаге отсутствуют все другие силы, кроме гравитационных, то из первого уравнения (122) следует, что:

$$e \cdot \text{Div} \sigma_{ij} - \rho g = 0. \quad (124)$$

Из этого уравнения легко получить уравнение равновесия для разномодульной среды. Его можно привести к стандартному виду:

$$\rho \mathbf{g} = \bar{\mu} \Delta \mathbf{U} + (\bar{\lambda} + \bar{\mu}) \text{grad div} \mathbf{U}. \quad (125)$$

Если в очаге есть лишь силы инерции и силы напряжения, то из первого уравнения (122) можно получить уравнение движения в разномодульной среде:

$$\rho \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{U}}}{\partial t^2} = \bar{\mu} \Delta \tilde{\mathbf{U}} + (\bar{\lambda} + \bar{\mu}) \text{grad div} \tilde{\mathbf{U}}. \quad (126)$$

Если считать деформации малыми, то рассматриваемые в теории упругости движения представляют собой малые упругие колебания и волны. Применяя стандартные преобразования к (126), можно получить уравнения для продольных и поперечных колебаний (волн) в разномодульной среде:

$$\frac{\partial^2 \tilde{U}_l}{\partial t^2} - c_l^2 \Delta \tilde{U}_l = 0, \quad \frac{\partial^2 \tilde{U}_t}{\partial t^2} - c_t^2 \Delta \tilde{U}_t = 0. \quad (127)$$

Здесь $c_l = ((\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) / \rho)^{1/2}$ – скорость продольной волны, $c_t = (\bar{\mu} / \rho)^{1/2}$ – скорость поперечной волны.

Волновые свойства окружающей очаг среды естественно проявляются в момент возникновения удара (разрыва) при землетрясении, а волны наблюдаются на поверхности Земли сейсмологическими станциями на достаточно больших расстояниях от очага. В настоящее время изучению сейсмичности сейсмоопасных районов занимаются многие институты и организации. Однако получить достаточно уверенно работающий предвестник этими методами не удастся. С нашей точки зрения это связано с тем, что сейсмичность вблизи очага или в нем самом проявляется в момент события, т. е. с появлением перемещений в среде очага. Форшоки, иногда предшествующие землетрясению, и афтершоки, появляющиеся после сильного удара, сами по себе являются такими же событиями, сопровождающимися перемещениями, в то время как необходимо знать напряженное состояние очага накануне события и сколь далеко оно от критического, приводящего к землетрясению. Из-за того, что на свободной поверхности Земли вертикальное напряжение обнуляется, измерить его на этой поверхности не удастся. Чтобы выяснить, в каких физических полях

измеряемые величины были бы напрямую связаны с тензором напряжений в очаге, необходимо сделать оценки этих связей, используя уравнения (122). Для этого следует воспользоваться упрощенными соотношениями (122) и (123) из [39], но записанными с использованием феноменологических параметров Работнова-Ломакина в представлении (120).

$$\begin{aligned} \frac{4\pi^2\rho}{t^2}\mathbf{U} &= \frac{\mathbf{e}}{L}|\sigma_{ij}| - \frac{(3\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})\alpha T}{L}\mathbf{e} + [\sigma\mathbf{E} \times \mu_e\mathbf{H}] - \rho\mathbf{g} - \mathbf{F}_c, \\ \frac{2\pi\sigma\mu_e}{t}\mathbf{H} &= \frac{\mathbf{H}}{L^2} + \frac{2\pi\sigma\mu_e|\mathbf{H}|}{Lt}\mathbf{U} - \frac{2\pi\sigma\mu_e|\mathbf{U}|}{Lt}\mathbf{H} + \frac{2\pi|\mathbf{U}|}{Lt}\mathbf{H}, \\ \frac{C_v 2\pi\rho}{t}T &= \frac{\chi}{L^2}T - \frac{2\pi(3\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})\alpha T_0|\mathbf{U}|}{Lt} + \rho Q. \end{aligned} \quad (128)$$

К уравнениям (128) следует добавить еще выражение для тензора напряжений (121). Упрощенная система уравнений (128) позволяет записать зависимости сейсмических, тепловых, электрических и магнитных полей от модулей перемещений. Из уравнения равновесия можно записать равенство для вектора перемещений в упругом варианте для трещиноватой среды:

$$\mathbf{U} = -\left(\frac{L^2}{\bar{\mu}}\rho\mathbf{g} + \frac{\bar{\lambda} + \bar{\mu}}{\bar{\mu}}|\mathbf{U}|\mathbf{e}\right). \quad (129)$$

Формула (129) указывает на то, что при отсутствии перемещений в очаге $|\mathbf{U}| = 0$, сейсмическое поле не содержит информации о поведении тензора напряжений, поэтому не будет содержать в себе предвестников землетрясений. Только поэтому многочисленные сейсмические станции, разбросанные по всему миру, фиксируют свершившиеся события при $|\mathbf{U}| \neq 0$ в очаге, не сообщая при этом о подготовке землетрясения.

Из уравнения для температуры есть возможность найти зависимость теплового поля от дополнительного тепла и модуля вектора перемещений в неупругом варианте для трещиноватой среды:

$$T = \frac{L^2\rho t Q - 2\pi(3\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})\alpha T_0 L|\mathbf{U}|}{C_v 2\pi\rho L^2 - \chi t}. \quad (130)$$

Анализируя выражение (130), в рамках нашего приближения можно сделать ряд важных выводов. Во-первых, температурное поле не зависит от напряжений. Поэтому при отсутствии перемещений ($|U|=0$) и дополнительного тепла Q оно не будет отличаться от первоначальной температуры T_0 . Во-вторых, и это самое главное, температурные предвестники, в связи с изложенным выше, маловероятны, так как температурное поле T не зависит от напряжений σ_{ij} .

Если считать, что температурное поле очага в среднем остается постоянным до наступления движений, т. е. самого землетрясения, то из первого уравнения (3) можно получить по существу единственный предвестник, а именно электромагнитное поле:

$$\left[\left(\rho \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} + \rho \mathbf{g} + \mathbf{F}_c \right) - e \text{Div} \sigma_{ij} \right] = \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} \sigma \mu_e \sin \zeta. \quad (131)$$

Здесь ζ – угол между векторами электрического и магнитного полей. Электромагнитное поле, согласно (131), как раз и должно содержать в себе информацию об изменении в напряженном состоянии очага, зафиксированного в левой части уравнения (131). Когда быстро нарастающие изменения, представленные в (131) напряжением $\mathbf{F}_n = e \cdot \text{Div} \sigma_{ij}$, сравняются и превзойдут сумму сил инерции, гравитации и силу сцепления скелета горных пород, произойдет землетрясение.

Второе уравнение из (128) для магнитного поля при $|U|=0$ даёт следующее выражение:

$$\mathbf{H} = \frac{2\pi\sigma\mu_e L |\mathbf{H}|}{(2\pi\sigma\mu_e L^2 - t)} \mathbf{U}.$$

(132)

Размерность магнитного поля в формуле (132) дана в А/м. Из (132) следует, что изменения магнитного поля, находясь на некотором уровне $|\mathbf{H}|$, например, на уровне, совпадающем с напряженностью Главного геомагнитного поля

(ГГП), зависит прямо пропорционально от перемещений. Подставляя (129) в (132), получим:

$$\mathbf{H} = -\frac{2\pi\sigma\mu_e|\mathbf{H}|}{(2\pi\sigma\mu_e L^2 - t)} \left(\frac{L^2}{\bar{\mu}} \rho \mathbf{g} + \frac{\bar{\lambda} + \bar{\mu}}{\bar{\mu}} |\mathbf{U}| \mathbf{e} \right). \quad (133)$$

Формула (133) позволяет утверждать, что при отсутствии перемещений изменения магнитного поля находятся на некотором постоянном уровне

$$\mathbf{H} = -\frac{2\pi\sigma\mu_e L^3 |\mathbf{H}|}{(2\pi\sigma\mu_e L^2 - t) \bar{\mu}} \rho \mathbf{g}, \quad (134)$$

поэтому не могут быть предвестником землетрясений, так как не содержат изменяющегося во времени и пространстве тензора напряжений, а могут появляться только при возникновении перемещений.

Согласно граничным условиям (123), наиболее интересной является нормальная к поверхности Земли компонента электрического поля E_z , которая резко усиливается в воздухе за счёт большой разницы проводимостей Земли σ_τ и воздуха σ_0 ($\sigma_\tau \gg \sigma_0$). Опуская промежуточные выкладки, выпишем зависимость E_z от параметров Земли и тензора напряжений в очаге [39]:

$$E_z = \gamma \frac{1}{\rho g_z} |\sigma_{xy}| + \delta, \quad (135)$$

где:

$$\gamma = -\frac{\bar{\mu}(2\pi L - \frac{t}{L\sigma\mu_e})}{2\pi\sigma\mu_e L^3 |\mathbf{H}| \sin \zeta}, \quad \delta = \frac{\bar{\mu}(2\pi L - \frac{t}{L\sigma\mu_e})}{2\pi\sigma\mu_e L^2 |\mathbf{H}| \sin \zeta}.$$

Здесь ζ – угол между векторами \mathbf{E} и \mathbf{H} . Размерность E_z в (135) дана в В/м. Если считать, что горные породы в районе очага пористы и заполнены проводящим флюидом, что бывает при мелкофокусных заложениях очага землетрясения, то удельная проводимость в них может быть в первом приближении оценена законом Арчи $\sigma = a\sigma_1 d_0^{-m}$, где a – постоянная, σ_1 – удельная проводимость флюида, d_0 – пористость, m – индекс консолидации (для горных пород он оценивается значениями $m = 1, 3; 3$). В этом случае коэффициенты γ и δ могут

быть приближенно записаны непосредственно через пористость пород в районе очага. Таким образом, для пористых пород можно записать:

$$\gamma \approx -\frac{\bar{\mu}td_0^{2m}}{a^2\sigma_1^2 2\pi L^4 \mu_e^2 |\mathbf{H}| \sin \zeta}, \quad \delta \approx -\frac{\bar{\mu}td_0^{2m}}{2\pi a^2 \sigma_1^2 \mu_e^2 L^3 |\mathbf{H}| \sin \zeta}. \quad (136)$$

Зависимость в (136) степенная, с достаточно высокой степенью влияния пористости, которую можно изучать, опираясь на изменения электрического поля в районе очага.

Анализ формулы (135) показывает, что вертикальная компонента электрического поля явно и линейно зависит от модуля тензора напряжений $|\sigma_{xy}|$. Естественно, что с ростом модуля напряжений она будет расти и усиливаться в воздухе на порядки, задаваемые коэффициентом усиления σ_τ / σ_0 . Поэтому рост E_z становится предвестником будущего события. Однако из упрощенной системы, к сожалению, нельзя найти те пороговые значения E_z , при которых наступает разгрузка, т. е. само землетрясение. Тем не менее, изучая формулу (135) в совокупности с формулой для напряжений σ_{ij} из (121), можно этот порог найти, оценив, при каком энерговыделении происходит разгрузка. Более того, по измеренным в заданном районе электрическим компонентам E_x, E_y, E_z можно оценить тензор напряжений, используя его прямую связь с этими компонентами. Это дает надежду на решение задачи, об оценке напряжений в Земле по измеренному на её поверхности физическому электрическому полю. До сих пор эта задача считалась неразрешимой из-за обнуления на поверхности Земли тензора напряжений (123). Спад электрического поля в момент события позволит оценить предельно допустимые напряжения для заданного сейсмоопасного района. Две другие компоненты электрического поля при отсутствующих перемещениях $|\mathbf{U}|=0$, дополнительного тепла $Q=0$, температуры $T=0$ и дополнительных сил \mathbf{F}_c можно найти аналогично (135).

$$E_x = \gamma \frac{1}{\rho g_x} |\sigma_{xy}| + \delta, \quad E_y = \gamma \frac{1}{\rho g_y} |\sigma_{xy}| + \delta. \quad (137)$$

Здесь γ и δ из (135) или из (136).

Согласно граничным условиям (123), касательные электрические компоненты непрерывны, поэтому в воздухе их напряженность не будет отличаться от напряженности этих компонент в Земле, пришедших от очага и претерпевших на пути, кроме геометрического затухания, еще и влияние различных помех. Поэтому проблема измерения электрических полей и их селекция весьма сложная. Следует заметить, что, согласно работе [10], вертикальная компонента E_z может быть только потенциальной, так как её индукционная часть компенсируется зарядами на поверхности Земли. Поэтому её измерение возможно поляриметром («вертушкой»).

Горизонтальные компоненты E_x и E_y имеют как потенциальную, так и индукционную (теллурическую) части, соотношения между которыми и способы измерения необходимо исследовать в дальнейшем. Тем не менее их зависимость от тензора напряжений и его изменений во времени делает задачу измерения электрического поля на поверхности Земли и выделение в нем части, зависящей только от напряжений в очаге, крайне заманчивой и сулящей решение крупнейшей проблемы современной геофизики, связанной с краткосрочным предсказанием наступления землетрясения. Электрическое поле, в особенности его вертикальная компонента, точнее резкие изменения в ней, могут служить краткосрочным предвестником, заметить который из-за усиления его дневной поверхностью Земли вполне возможно.

Чтобы смоделировать предвестники землетрясения в разномодульной среде очага путём поиска отклика в электрическом поле на поверхности Земли, необходимо научиться моделировать напряжения в очаге

$$F_n = e \cdot \text{Div} \sigma_{ij}, \quad (138)$$

в зависимости от модуля трещиноватости ξ . Поведение напряжения определяет уровень электрических сигналов за счёт перераспределения

зарядов, возникающих на бортах микротрещин в разномодульной среде. Исходя из определения дивергенции тензора второго ранга, можно записать:

$$F_{ni} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}. \quad (139)$$

В декартовой системе координат запишем:

$$F_{nx} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}, \quad F_{ny} = \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}, \quad F_{nz} = \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}. \quad (140)$$

Необходимо выразить компоненты тензора напряжений через компоненты тензора деформаций в предположении его симметричности относительно индексов $U_{ij} = U_{ji}$. Принимая во внимание конструкцию тензора напряжений, представленную в (2), после несложных преобразований получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= (2\bar{\mu} - 2\xi + \bar{\lambda})U_{xx} + \bar{\lambda}(U_{yy} + U_{zz}) + (3\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})\alpha(T - T_0), \\ \sigma_{yy} &= (2\bar{\mu} - 2\xi + \bar{\lambda})U_{yy} + \bar{\lambda}(U_{xx} + U_{zz}) + (3\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})\alpha(T - T_0), \\ \sigma_{zz} &= (2\bar{\mu} - 2\xi + \bar{\lambda})U_{zz} + \bar{\lambda}(U_{xx} + U_{yy}) + (3\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})\alpha(T - T_0), \end{aligned} \quad (141)$$

$$\sigma_{xz} = (2\bar{\mu}U_{xz} - \nu U_{xx}), \quad \sigma_{xy} = (2\bar{\mu}U_{xy} - \nu U_{xx}), \quad \sigma_{yz} = (2\bar{\mu}U_{yz} - \nu U_{yy}).$$

Теперь подставим (141) в (140) и после несложных преобразований получим окончательные формулы для вычисления компонент напряжений в элементарном объеме очага землетрясения:

$$\begin{aligned} F_{nx} &= 2\bar{\mu}\left(\frac{\partial U_{xx}}{\partial x} + \alpha \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial U_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial U_{xz}}{\partial z}\right) + \bar{\lambda}\left(\frac{\partial U_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial U_{yy}}{\partial x} + \frac{\partial U_{zz}}{\partial x} + 3\alpha \frac{\partial T}{\partial x}\right) - \\ &\quad - \xi\left(2\frac{\partial U_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial U_{xx}}{\partial y} + \frac{\partial U_{xx}}{\partial z}\right), \\ F_{ny} &= 2\bar{\mu}\left(\frac{\partial U_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial U_{yy}}{\partial y} + \alpha \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial U_{yz}}{\partial z}\right) + \bar{\lambda}\left(\frac{\partial U_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial U_{xx}}{\partial y} + \frac{\partial U_{zz}}{\partial y} + 3\alpha \frac{\partial T}{\partial y}\right) - \\ &\quad - \xi\left(2\frac{\partial U_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial U_{yy}}{\partial x} + \frac{\partial U_{yy}}{\partial z}\right), \\ F_{nz} &= 2\bar{\mu}\left(\frac{\partial U_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial U_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial U_{zz}}{\partial z} + \alpha \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \bar{\lambda}\left(\frac{\partial U_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial U_{xx}}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial z} + 3\alpha \frac{\partial T}{\partial z}\right) - \\ &\quad - \xi\left(\frac{\partial U_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial U_{yy}}{\partial y} + 2\frac{\partial U_{zz}}{\partial z}\right). \end{aligned} \quad (142)$$

Формулы (142) позволяют моделировать компоненты напряжений в элементарных объемах очага путем моделирования компонент тензора деформаций в них. Синус угла между магнитным и электрическим полями из правой части формулы (131) можно найти следующим образом. Согласно известной формуле из [14], сила Лоренца может быть представлена в виде:

$$\sigma\mu_e\mathbf{H}\mathbf{E}\sin\zeta = \frac{1}{\mu_e}(\mathbf{B}\cdot\text{grad})\mathbf{B} - \text{grad}\left(\frac{B^2}{2\mu_e}\right). \quad (143)$$

Из формулы (143), имея в виду, что $\mathbf{E} = \frac{1}{\sigma}\text{rot}\mathbf{H}$, находим:

$$\sin\zeta = \frac{\frac{1}{\mu_e}(\mathbf{B}\cdot\text{grad})\mathbf{B} - \text{grad}\frac{B^2}{2\mu_e}}{\mu_e\mathbf{H}\text{rot}\mathbf{H}}. \quad (144)$$

Теперь формулу (144) можно преобразовать, заменив дифференциальные операторы на их аналоги с использованием размера очага L и выбирая вертикальное направление для магнитного поля:

$$\sin\zeta = \frac{|\mathbf{B}|\mathbf{H}\frac{1}{L} - \frac{1}{2L}(\mathbf{H}\cdot\mathbf{B})}{\mu_e\mathbf{H}\frac{1}{L}\mathbf{H}} = \frac{|\mathbf{H}|}{H_z} - 0,5. \quad (145)$$

Формула (145) позволяет использовать при моделировании любые начальные уровни магнитного поля $|\mathbf{H}|$ и любые его текущие состояния, вычисленные по формулам (133) или (134). Таким образом, численному моделированию должна быть подвергнута следующая формула:

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}_n / (\sigma\mu_e\mathbf{H}\sin\zeta) = \mathbf{F}_n / (\sigma\bar{\mu}\mathbf{H}(|\mathbf{H}|/H_z - 0,5)). \quad (146)$$

Размерность электрического поля в (146) дана в В/м. При этом предвестник необходимо искать в вертикальной компоненте электрического поля $E_z^1 = E_z^2\sigma_\tau / \sigma_0$. В последней формуле E_z^2 задается выражением (146). В этой формуле еще нужно учесть хотя бы геометрическое затухание, возникающее из-за передвижения поля E_z^2 с глубины очага к поверхности Земли:

$$E_z^1 = E_z^2 \frac{\sigma_\tau}{\sigma_0 h^3} = \frac{\sigma_\tau F_{nz}}{\sigma_0 \sigma \mu_e H_z (|\mathbf{H}|/H_z - 0,5) h^3}. \quad (147)$$

Здесь h – число, отражающее отношение глубины очага H к линейному размеру элементарного объема в очаге $l=1\text{м}$, тогда $h = H/l$. Напряженность магнитного поля H_z в (147) лучше задать на уровне напряженности Главного геомагнитного поля Земли, так как это поле наверняка присутствует в очаге независимо от имеющегося напряженного состояния в нем. Возникающее электрическое поле должно контролироваться разностью:

$$\left| \left(\rho \frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2} + \rho g_z + F_c \right) - F_{nz} \right| \leq 0. \quad (148)$$

Электрическое поле должно «обрываться» разностью (148), которая в момент землетрясения должна «обнулиться», так как при землетрясении происходит одномоментный сброс напряжений до некоторого уровня, при котором возникает новый баланс сил и напряжений в очаге. Этот сброс обычно повторяется несколько раз и сопровождается ударами, вызывающими перемещения U , от которых (или при которых) поведение электрического поля подчиняется другим законам и уравнениям и может испытывать существенный скачок.

Моделирование электрического поля по формуле (147) не может быть осуществлено без разработки способа моделирования новых параметров $\bar{\lambda}$ и $\bar{\mu}$. В эти параметры входит модуль упругости ν , который лучше задать экспертно в широком диапазоне величин с тем, чтобы изучить поведение напряжения F_n и электрического поля E_z^1 в зависимости от него. Кроме того, в $\bar{\lambda}$ и $\bar{\mu}$ входит параметр трещиноватости ξ , моделировать который также необходимо, например $\xi = I_1 / \sqrt{I_2}$. Как известно первый инвариант тензора деформаций I_1 совпадает с диагональным элементом тензора деформаций $I_1 = U_{ii}$. Поэтому при всестороннем сжатии элементарного объема $U_{ii} = -P/K$, где P – давление на единицу поверхности элементарного объема среды, K – модуль сжатия сдвига, а $\sqrt{I_2} = U_{ij}$ в изотропной среде. Сложное воздействие на элементарный объем среды можно разложить на всестороннее сжатие и сдвиг:

$$U_{ij} = \frac{1}{9K} \delta_{ij} \sigma_{ii} + \frac{1}{2\mu} (\sigma_{ij} - 1/3 \delta_{ij} \sigma_{ii}). \quad (149)$$

Имея в виду изучаемый элементарный объем очага при всестороннем давлении, величину σ_{ij} можно выразить как $\sigma_{ij} = -P\delta_{ij}$, а число $\delta_{ij} = 3$. В этих предположениях необходимое отношение будет иметь вид

$$U_{ii} / U_{ij} = \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{9\lambda^2 + 12\lambda\mu + 4\mu^2}. \quad (150)$$

В формуле (150) использовано известное соотношение между модулем сжатия сдвига и параметрами Ламе $K = (\lambda + 2/3\mu)$.

Таким образом, для моделирования параметров $\bar{\lambda}$ и $\bar{\mu}$ в первом приближении можно использовать следующие формулы:

$$\bar{\lambda} = \lambda - \nu \frac{9\lambda^2 + 12\lambda\mu + 4\mu^2}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}, \quad \bar{\mu} = \mu - \nu \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{9\lambda^2 + 12\lambda\mu + 4\mu^2}. \quad (151)$$

Из (151) следует, что новые параметры сложным образом зависят от классических параметров Ламе λ и μ .

Чтобы найти величины электрического поля в разномодульной среде очага, необходимо смоделировать компоненты напряжений в очаге: F_{nx}, F_{ny}, F_{nz} .

Для этого предназначены формулы (142), в которых необходимо задать тем или иным способом компоненты тензора деформаций. Одним из самых простых способов *математического* моделирования является представление компонент тензора деформаций одномерными по координатам линейными функциями и квадратичной функцией времени:

$$U_{xx} \approx ax^2, \quad U_{yy} \approx by^2, \quad U_{zz} \approx cz^2, \quad U_{xy} \approx dyt^2, \quad U_{xz} \approx ezt^2, \quad U_{yz} \approx fzt^2. \quad (152)$$

При этом сделаем следующие допущения:

$$d \approx 0,5a; \quad e \approx 0,5b; \quad f \approx 0,5c. \quad (153)$$

В этом случае остаются не заданными коэффициенты a, b, c , найти которые можно после экспертной оценки возможных сил F_{nx}, F_{ny}, F_{nz} на начальной

стадии накопления напряжений. Предварительно находятся все нужные производные в случае $T = const$.

Затем записываются компоненты напряжений с использованием формул (142):

$$\begin{aligned} F_{nx} &= (3\bar{\mu} + \bar{\lambda} - 2\nu)at^2 + \bar{\mu}bt^2, \\ F_{ny} &= -vat^2 + (2\bar{\mu} + \bar{\lambda} - \nu)bt^2 + \bar{\mu}ct^2, \end{aligned} \quad (154)$$

Чтобы вычислить неизвестные коэффициенты a, b, c , необходимо представить себе начальное состояние очага землетрясения с параметрами $F_n, \nu, t, \lambda, \mu$, экспертно задать их и после этого определить неизвестные коэффициенты a, b, c , а по ним коэффициенты d, e, f .

При выборе для расчета модели среды и геометрии очага лучше всего воспользоваться известным из литературы примером, подвергнутым всестороннему обсчету. Параметры верхней мантии Земли в примере таковы: $\lambda = 50 \times 10^9$ Па, $\mu = 30 \times 10^9$, $\nu = 10^9$, $|F_n| = 10^6$ Па, $|H| = 39,8$ А/м, $\sigma_r / \sigma_0 = 10^3$,

$$h = 2 \times 10^4, \quad g_z = 9,8 \text{ м/с}^2, \quad \rho = 2800 \text{ кг/м}^3.$$

Параметры в очаге следующие: $H = 20$ км, $\sigma = 0,1$ См/м, $\rho = 4800$ кг/м³.

Начальные параметры вмещающей среды, представленные здесь, позволили вычислить коэффициенты a, b, c, d, e, f , необходимые для моделирования напряжений F_n в зависимости от модуля трещиноватости ξ . В табл. 1 приведены их значения.

Таблица 1

$F_{nx} = F_{ny} = F_{nz} = 10^6; \nu = 10^9; \lambda = 50 \times 10^9; \mu = 30 \times 10^9; t = 10$					
a	b	c	d	e	f
$5,85 \times 10^{-8}$	$6,81 \times 10^{-8}$	$9,60 \times 10^{-8}$	$2,93 \times 10^{-8}$	$3,40 \times 10^{-8}$	$4,80 \times 10^{-8}$

Чтобы увидеть изменения напряжений в очаге и электрического поля на поверхности Земли в зависимости от модуля трещиноватости ξ в очаге, приведены расчеты этих величин и сведены в таблицу 2.

Таблица 2

$\xi \times 10^9$	$\bar{\lambda} \times 10^{10}$	$\mu \times 10^{10}$	F_{nx}	F_{ny}	F_{nz}	E_z^1
1	4,97	2,97	$1,00 \times 10^6$	$1,02 \times 10^6$	$1,02 \times 10^6$	167,59
10	4,71	2,71	$8,22 \times 10^5$	$8,27 \times 10^5$	$7,37 \times 10^5$	120,62
20	4,43	2,43	$6,21 \times 10^5$	$6,18 \times 10^5$	$4,19 \times 10^5$	68,50
30	4,14	2,14	$4,21 \times 10^5$	$4,08 \times 10^5$	$1,00 \times 10^5$	16,39
40	3,86	1,86	$2,20 \times 10^5$	$1,99 \times 10^5$	$-2,18 \times 10^5$	-35,70
50	3,57	1,57	$1,87 \times 10^5$	$-1,10 \times 10^4$	$-5,37 \times 10^5$	-87,84
60	3,29	1,29	$-1,82 \times 10^5$	$-2,21 \times 10^5$	$-8,56 \times 10^5$	-139,96
70	3,00	1,00	$-3,83 \times 10^5$	$-4,30 \times 10^5$	$-11,7 \times 10^5$	-192,07
80	2,71	0,71	$-5,84 \times 10^5$	$-6,40 \times 10^5$	$-14,9 \times 10^5$	-244,19

Анализ табл. 2 показывает, что напряжения существенно зависят от модуля трещиноватости разномодульной среды, хотя параметры Работнова-Ломакина и не столь сильно реагируют на поведение этого модуля. Напряжения в некоторый момент меняют знак, что указывает на существенное влияние разномодульности. При «сильной» разномодульности всестороннее давление может изменить знак, что повлечет за собой сдвиг. Это предопределяет появление удара за счёт возможного сдвига. Электрическое поле на поверхности Земли E_z^1 при этом также меняет знак, и это может оказаться существенным характерным признаком в поведении электрического поля в зависимости от развития трещиноватости. Величины электрического поля при этом вполне измеримы. Хотя надо признать, что проблема селекции сигнала от землетрясения на фоне других многочисленных источников потенциального электрического поля в атмосфере здесь даже не ставится. Для решения проблемы селекции электрического поля от очага требуется поставить не только теоретические, но и полевые исследования. В монографии

[10] приводятся графики наблюдаемого на местности электрического поля за несколько часов перед землетрясением. Эти измерения осуществлены и опубликованы турецкими учеными [43] и являются первыми полевыми экспериментами в русле предлагаемых в данной статье идей и оценок электрического поля над очагом реального землетрясения.

Моделирование поведения напряжений в очаге землетрясения указывает на то, что изменения в напряженном состоянии очага можно зафиксировать дистанционно с поверхности Земли путем измерения и отслеживания поведения несилового потенциального электрического поля. Это поле при тщательном исследовании (в том числе и на местности) может стать предвестником наступающего землетрясения. Все другие физические поля, измеряемые на Земле: сейсмическое, тепловое, магнитное и гравитационное не содержат в себе предвестников землетрясений, так как реагируют только на произошедшее событие.

§13. Несиловое магнитное поле в эксперименте Ааронова-Бома.

Кроме природных явлений, так или иначе содержащих в себе тороидальные несиловые электромагнитные поля, эти поля возникают и в лабораторных экспериментах. Самым ярким из них является упомянутый выше эффект Ааронова-Бома [44]. В этом эксперименте квантовая частица, пролетая мимо бесконечно длинного соленоида с электрическим током, испытывает отклонение в траектории, несмотря на то, что за пределами такого соленоида магнитное поле при классическом его определении равно нулю ($\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} = 0$) [44], рис. 5.

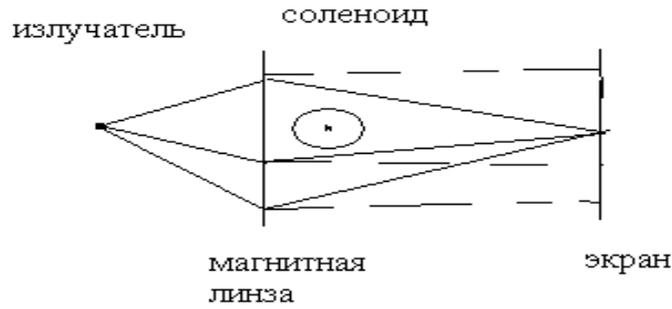


Рис. 5. Эффект Ааронова-Бома.

Считается, что взаимодействие частиц идёт с векторным потенциалом из-за $A = \nabla\varphi$, хотя скалярный потенциал φ не является физическим объектом. Согласно предложенной здесь электродинамике квантовая частица в эффекте Ааронова-Бома испытывает взаимодействие не с математической функцией – скалярным потенциалом φ , а с несилевым тороидальным магнитным полем. Поэтому нас интересует следующее. Остаётся ли в пространстве за пределами источника какой-либо физический объект в случае $\nabla \times A = 0$, а с другой – остаётся ли верной теорема Стокса о циркуляции вектора A по замкнутому контуру, если $\nabla \times A = 0$. В работе [45] дан отрицательный ответ. По нашему мнению, теорема Стокса справедлива и в этом случае. Более того, в пространстве за пределами источника остаётся физический объект – тороидальное несилевое магнитное поле, определённое с помощью (6). Действительно.

$$\oint (A \cdot dl) = \oint (\nabla \times A \cdot ds) = \oint (H_T \cdot ds) + \oint (H_p \cdot ds). \quad (155)$$

Пусть теперь $\nabla \times A = 0$, тогда $\nabla \times [(Qr) + \nabla \times (Qr)] = 0$. Отсюда $\nabla \varphi = [(Qr) + \nabla \times (Qr)]$.

Это то же самое, что:

$$H_T = \nabla \varphi - (Qr). \quad (156)$$

Здесь φ и Q – отличные от нуля произвольные скалярные функции класса C^∞ .

Пусть теперь за пределами источника полоидальное магнитное поле равно нулю ($\mathbf{H}_p = 0$). В этом случае с учётом формулы (156) получим:

$$\oint (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}) = \oint (\nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}) = \oint (\mathbf{H}_T \cdot d\mathbf{s}) + \oint (\nabla \varphi - (Qr)) \neq 0. \quad (157)$$

Из (157) следует, что возможна ситуация, когда, несмотря на то что $\mathbf{H}_p = 0$, тороидальное несилловое поле \mathbf{H}_T может оказаться не равным нулю в связи с изначально отличными от нуля скалярными потенциалами φ и Q или отличной от нуля их разностью в (157). При этом теорема Стокса остаётся справедливой в связи со (157) и вопреки анализу из [45].

Действительно, пусть в пространстве \mathfrak{R}^3 вдоль координаты z прямоугольной системы координат x, y, z расположен бесконечно длинный соленоид с плотной намоткой, в центре цилиндра которого закреплена кроме прямоугольной ещё и сферическая система координат r, θ, φ . В проводе соленоида циркулирует постоянный электрический ток с плотностью \mathbf{J} или переменный с плотностью $\mathbf{J}e^{i\omega t}$. Согласно стандартным уравнениям Максвелла эти токи связаны с векторным потенциалом уравнениями $\nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J}$ или $\nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} + \chi^2 \mathbf{A} = \mathbf{J}$, где $\chi = (i\omega\mu\sigma)^{1/2}$. Множитель $e^{i\omega t}$ в последнем уравнении опущен. Ясно, что в соленоиде циркулирует только φ -товая компонента плотности тока \mathbf{J}_φ . Спроектируем первое уравнение на φ -товую ось сферической системы координат:

$$-j_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r A_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta A_\varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial \theta \partial \varphi} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}. \quad (158)$$

Если спроектировать второе уравнение, то к (158) добавиться ещё слагаемое $\chi^2 A_\varphi$. Нетрудно заметить, что, согласно определению (6), последнее слагаемое в (158) есть как раз делённая на координату r удвоенная напряжённость $\mathbf{H}_{T\theta}$ –

компоненты несилowego магнитного поля $\mathbf{H}_T \frac{2\partial A_r}{r^2 \sin \theta \partial \varphi} = \frac{2}{r \sin \theta} \frac{\partial Q}{\partial \varphi} = \frac{2}{r} H_{T\theta}$.

Поэтому выражение (158) есть прямое доказательство генерирования током проводимости (J_φ – компонентной) несиловой компоненты магнитного поля $\mathbf{H}_{T\theta}$, которая, согласно формуле (157), остаётся в пространстве \mathfrak{R}^3 даже при $\nabla \times \mathbf{A} = 0$. Это обстоятельство обеспечивает взаимодействие квантовой частицы с несилowym тороидальным магнитным полем, а не с векторным потенциалом.

Квантовый эффект Ааронова-Бома вызван всё тем же магнитным полем, только его несиловой частью. При этом теорема Стокса остаётся верной и в этом случае. Дуализм векторного потенциала \mathbf{A} в его нестандартном определении (5) подтверждается эффектом Ааронова-Бома.

§14. О взаимной генерации несилowych и силowych магнитных полей в токамаках и её подавлении.

Обзор [46] посвящён истории разработок и экспериментальной проверке идеи осуществления управляемой термоядерной реакции в токамаках. Как следует из обзора теперь уже многочисленные эксперименты в токамаках не привели пока к ожидаемому результату. Основной причиной такого неуспеха называется неустойчивое поведение плазмы в «бублике» токамака. Причины неустойчивости исследовались многократно [46].

С нашей точки зрения основной причиной неустойчивости плазмы (она вторична) в «бублике» токамака является взаимная генерация тороидального двухкомпонентного магнитного поля напряженностью 5 Тл и более, созданного внутри токамака, с полоидальным полем проводников, расположенных с внешней стороны токамака, создающих полоидальное поле с целью «поджатия» нагретой плазмы к центру тороидальной полости токамака и «отжатия» плазмы от стенок токамака. В этой принципиальной конструкции, как нам представляется, не учтено одно немаловажное

обстоятельство, подробно описанное в работах [9, 12]. Это обстоятельство вызывается, как упоминалось выше, возможной самогенерацией основного тороидального магнитного поля \mathbf{H}_T внутри «бублика» токамака с полоидальным полем \mathbf{H}_P .

Действительно, если определить \mathbf{H}_P и \mathbf{H}_T , как это предложено выше, с помощью цепочки равенств:

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = (Q\mathbf{r}) + \nabla \times (Q\mathbf{r}), \quad \mathbf{H}_T = \nabla \times (Q\mathbf{r}), \quad \mathbf{H}_P = \nabla \times \nabla \times (Q\mathbf{r}). \quad (159)$$

То из (159) следует соотношение (10):

$$\nabla \times \mathbf{H}_T = \mathbf{H}_P, \quad \nabla \times \mathbf{H}_P = \chi \mathbf{H}_T, \quad (160)$$

где \mathbf{H}_T – тороидальное магнитное поле, изначально созданное в «бублике» токамака, \mathbf{H}_P – полоидальное нормальное \mathbf{H}_T поле внешних проводников,

$\chi = \frac{\gamma}{\eta}$, где γ – скорость диффузии магнитного поля, $\eta = \frac{1}{\mu\sigma}$ – магнитная вязкость.

Нестационарность в токамаке возникает в момент включения электрического поля для создания движения образованной плазмы вдоль «бублика» токамака. В этот момент фактически происходит самовозбуждение и бесконтрольное нарастание магнитного поля различной топологии (отличной от тороидальной) за счёт самого магнитного поля, находящегося внутри токамака, при наличии внутри токамака проводящей плазмы и при достаточной величине проводимости плазмы ($\chi \neq 0$). Это и приводит к появлению (вторичной) неконтролируемой неустойчивости плазменного шнура.

Оценка самовозбуждения в большой модели МТР из [46], согласно определениям (159,160), выглядит следующим образом. Если принять, что $\nabla \times \approx \frac{1}{L}$, где L – линейный размер плазменного шнура внутри токамака, то:

$$\frac{1}{L} \mathbf{H}_P \approx \frac{\gamma}{\eta} \mathbf{H}_T, \quad \frac{1}{L} \mathbf{H}_T \approx \mathbf{H}_P. \quad (161)$$

Пусть малый радиус плазменного шнура равен $R=2$ м, тогда $L=2\pi R=4\pi$ м, а напряжённость тороидального поля $|\mathbf{H}_T| \approx 5$ Тл. Тогда возбуждаемая тороидальным магнитным полем напряжённость дополнительного полоидального магнитного поля будет порядка:

$$|\mathbf{H}'_P| = \frac{5}{4\pi} \approx 0,4 \text{ Тл.} \quad (162)$$

Оценка скорости диффузии по первичным полям составит:

$$\gamma = \frac{\eta}{L} \frac{|\mathbf{H}'_P|}{|\mathbf{H}_T|}. \quad (163)$$

Дополнительное тороидальное магнитное поле будет прирастать на величину:

$$\mathbf{H}'_T = \frac{\eta}{\gamma L} \mathbf{H}'_P. \quad (164)$$

Процесс самовозбуждения будет нарастать за счёт взаимной генерации магнитных полей, в результате которого происходит тот самый «срыв». При этом с ростом температуры внутри токамака скорость диффузии также будет нарастать (163) за счёт падения проводимости в плазменном шнуре и роста полоидального поля внутри токамака.

В настоящее время электродинамика в токамаке описывается известными классическими уравнениями Максвелла, которые несколько отличаются по своей сути от уравнений (160).

Исходя из выше изложенного, напрашивается решение проблемы подавления самогенерации путём непрерывного исключения сильного полоидального магнитного поля внутри токамака внешним полоидальным магнитным полем, наводимым в противофазе, возникающему путём самогенерации в «бублике» токамака магнитному полю [12].

В современных токамаках полоидальное (поперечное тороидальному) магнитное поле создаётся изначально [46]. Внешнее полоидальное магнитное поле необходимо, в том числе для подавления возникающего за счёт самогенерации сильного полоидального магнитного поля. В токамаке при удержании плазмы необходимо сохранять изначально тороидальное

магнитное поле и слабое полоидальное. Необходимо при удержании плазмы не создавать сильное поперечное (полоидальное магнитное поле), а любыми способами уменьшать поперечное поле, чтобы не способствовать самогенерации названных магнитных полей [9, 12]. Это многократно уменьшит проникновение частиц к стенкам токамака. Частицы плазмы будут «наворачиваться» только на «силовые» линии тороидального магнитного поля параллельно стенкам. Аналогичные физические явления возникают и в пробкотронах.

§15. Несиловые переменные электромагнитные поля токов смещения в конденсаторах.

Токи смещения, введённые в уравнения электромагнитного поля в позапрошлом веке Максвеллом, наглядно реализуются в электрических конденсаторах. Их неперенное наличие в конденсаторах колебательных контуров (индукционная катушка – конденсатор) интересует физиков не только с точки зрения реализации конденсаторов в различных технических устройствах, но и с точки зрения возникающих электромагнитных полей в конденсаторах с переменным электрическим током [47].

Самая, пожалуй, интересная проблема, занимающая многих: есть ли у токов смещения в конденсаторах магнитное поле, и если есть, то какова его природа. На этот счёт существуют две противоположные точки зрения: одна из них отрицает существование магнитного поля, другая опирается на экспериментально зафиксированное магнитное поле [47]. Если согласиться с экспериментом, проведённом в исследовании [47], то можно посчитать решённой проблему существования магнитного поля токов смещения в конденсаторах. Однако скептики приводят простое опровержение эксперимента, ссылаясь на то, что конденсаторы, в отличие от катушек индуктивности, не принято экранировать от магнитного поля токов смещения. И это верно.

Оказалось, что всё дело в природе тех электромагнитных полей, которые, по-видимому, всё-таки существуют и вызываются токами смещения.

Чтобы выяснить природу электромагнитных полей токов смещения в конденсаторах, необходимо изучить природу электромагнитных полей токов смещения, возможно существующих не только в конденсаторах.

На этот счёт физическая литература, а также всё изложенное в предыдущих параграфах, указывают на то, что в природе могут существовать как силовые электромагнитные поля в трактовке Лоренца, так и несиловые электромагнитные поля, уравнения для которых несколько отличаются от привычных стандартных уравнений Максвелла (36).

Основные свойства несиловых электромагнитных полей выяснены в предыдущих параграфах. Их существование важно для понимания природы электромагнитного поля токов смещения как таковых, так и токов смещения в конденсаторах, в частности. Это понимание сводится к двум достаточно простым фактам. Вихри несилового магнитного поля \mathbf{H}_T не возбуждают электрический ток, а переходят в силовое полоидальное магнитное поле за счёт $\nabla \times \mathbf{H}_T = \mathbf{H}_p$. Несиловое полоидальное электрическое поле не обладает э.д.с. индукции из-за $\nabla \times \mathbf{E}_p = 0$. Его присутствие в конденсаторах вызывается изменяющимися (в том числе на обкладках конденсатора) электрическими зарядами. Оно потенциально по определению.

Чтобы привести пример и понять, какими напряженностями обладают несиловые электромагнитные поля, рассмотрим пример конденсатора, экспериментально изученного в работе [1]. Плотность тока смещения, согласно ([3], формула 20) имеет вид:

$$\mathbf{j}_{\bar{m}} = \frac{\partial \mathbf{D}_p}{\partial t} = \chi \mathbf{H}_T = -(\mu \omega^2 \varepsilon)^{1/2} \mathbf{H}_T. \quad (165)$$

С другой стороны, в конденсаторе, согласно [47] ток смещения равен:

$$\mathbf{j}_{\bar{m}} = -\varepsilon \frac{U_0}{d} \omega \sin \omega t. \quad (166)$$

Здесь U_0 – напряжение на обкладках конденсатора, направленное от одной пластины к другой, d – расстояние между пластинами. Из (165) и (166) можно получить:

$$(\varepsilon\omega^2\mu)^{1/2} \mathbf{H}_T = \varepsilon \frac{U_0}{d} \omega \sin \omega t. \quad (167)$$

Отсюда получаем величину тороидального несилового магнитного поля в эрстедах:

$$|\mathbf{H}_T| = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{|U_0|}{d} 4\pi 10^{-3} |\sin \omega t|. \quad (168)$$

В воздушном конденсаторе магнитное поле будет иметь вид:

$$|\mathbf{H}_T| = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{|U_0|}{d} 4\pi 10^{-3} |\sin \omega t|. \quad (169)$$

Далее примем за параметры конденсатора параметры из [47]. Тогда:

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} = 2,7 \cdot 10^{-3}, \quad |U_0| = 20 \text{ [V]}, \quad d = 5 \cdot 10^{-2} \text{ [л]}, \quad |\sin \omega t| \approx 1. \quad (170)$$

В этих параметрах несиловое магнитное поле будет равно:

$$|\mathbf{H}_T| \approx 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ [Э]}. \quad (171)$$

Столь небольшое магнитное поле в конденсаторе из [47] само по себе не представляет никакой опасности из-за его несилового характера. Оно, согласно формуле (2), не возбуждает электрический ток в окружающей среде и приборах, окружающих конденсатор. Поэтому конденсаторы обычно не экранируют от магнитного поля. Электрическое поле этого конденсатора $|\mathbf{E}_p| = \frac{|U_0|}{d} \approx 400 \text{ [V/л]}$ также не представляет никакой опасности из-за не возбуждения им э.д.с. в окружающей среде и приборах его окружающих. Пользователю не следует прикасаться к работающему конденсатору из-за наличия в нем напряжения.

Поэтому есть возможность примерить противоположные мнения физиков и инженеров. Магнитное поле в конденсаторах создается токами смещения, но оно несиловое и малой напряженности, не возбуждающей в

окружающем пространстве электрический ток. Электрическое поле конденсатора также не возбуждает э.д.с. индукции, несмотря на переменный во времени характер. Это поле есть поле изменяющихся на обкладках конденсатора зарядов, что способствует непрерывному протеканию электрического тока в цепи, содержащей конденсатор. Магнитная стрелка не реагирует на быстро изменяющуюся напряженность несилового магнитного поля из-за присущей ей инерционности.

В природе несиловое магнитное поле фиксируется магнетометрами мировой сети магнитных станций, где магнетометры измеряют постоянное магнитное поле и медленные его вариации (изменения во времени). Стрелочные (и подобные стрелочным, включая протонные) приборы успевают зафиксировать эти медленные изменения суммарного (силового и несилового) магнитного поля. Подробный анализ несиловых природных электромагнитных полей можно прочесть в [10].

§16. Несиловые переменные магнитные поля и скин-эффект.

Решение проблемы повышения глубинности исследования земных недр переменным электромагнитным полем (ЭМП) является одной из приоритетных задач в геофизической разведке.

Однако глубинность исследования земной коры переменным ЭМП ограничивается влиянием скин-эффекта, возникающего при повышении частоты ЭМП.

Скин-эффект и его воздействие на электрическое поле и токи подробно изучены в [14], и заключается в том, что ЭМП вторичного электрического тока наводится в среде в противофазе первичному, и поэтому компенсирует первичное ЭМП, не позволяя ему проникать в проводник на значительную глубину. Поэтому высокочастотные методы электроразведки, имеющие большую разрешающую способность, применяются лишь в мало глубинной геофизике, например, в методах, использующих георадар.

Преодолеть эту принципиальную трудность, как нам представляется, можно с помощью применения в геофизической разведке несиловых переменных электромагнитных полей, свойства которых по отношению к скин-эффекту принципиально отличаются от известных силовых ЭМП, зафиксированных в уравнениях Максвелла.

В научной литературе часто встречаются сведения о создании лабораторных источников несилового ЭМП. Здесь достаточно напомнить о попытках Булларда создать такой источник с помощью однодисковой конструкции [48]. Т. Рикитакки попытался создать источник несилового ЭМП на основе двухдисковой конструкции [49]. Однако теоретические эксперименты пока не нашли технического воплощения.

Автором найдены *природные источники* несилового ЭМП. Было доказано, что электрические токи, располагающиеся на сферических поверхностях (например, в ионосфере) или в сферических слоях Земли, наряду с силовым ЭМП, одновременно возбуждают и несиловую часть ЭМП. Интерпретация мировых данных по ЭМП в МГГ (1933, 1957/58гг.) алгоритмами, созданными на основе (36), дала возможность проверить (на экспериментальных данных) наличие несилового ЭМП в природных источниках [10]. Положительный результат проверки позволил автору указать на необходимость учитывать несиловую часть ЭМП при интерпретации данных в известных методах геофизической разведки (МТЗ и ЗСБ на больших временах).

В таких данных в обязательном порядке присутствует несиловое ЭМП из-за расплывания источников по сферической ионосфере и Земле – сказывается влияние сферичности Земли. Влияние сферичности источников воплощается в появление несиловой части ЭМП, которая, если её не учитывать, играет роль неустранимой ошибки при интерпретации данных измерений.

Обнаружение природных источников, тем не менее, стимулирует создание искусственных источников несилового ЭМП для целей разведки.

Такая возможность, как нам представляется, обосновывается одним из уравнений (36). Данное уравнение:

$$\frac{\partial \mathbf{D}_p(\cdot)}{\partial t} = -\chi \mathbf{H}'_T(\cdot). \quad (172)$$

показывает путь к созданию такого искусственного источника путем, например, возбуждения конденсатором с сильно поляризующимся материалом между обкладками быстро изменяющейся во времени электрической индукции полоидального поля. Согласно (172), эти изменения приведут к возникновению тороидального несилового магнитного поля \mathbf{H}_T , распространение которого в окружающее пространство как раз и даст ожидаемый эффект возникновения управляемого распространения несилового ЭМП.

Главное, что, согласно (36), несиловое магнитное поле не возбуждает в пространстве его распространения электрических токов. Это избавляет от влияния скин-эффекта. Поэтому есть вероятность того, что несиловое ЭМП проникнет в окружающую проводящую среду на значительно большую глубину, чем силовое ЭМП [10].

Скин-эффект существенно ограничивает проникновение переменного ЭМП в проводящую среду [14]. Его влияние оценивается глубиной проникновения переменного ЭМП в проводящую и магнитную среду формулой [14]:

$$\delta^c = \left(\frac{2}{\omega \mu \sigma} \right)^{1/2}, \quad (173)$$

где: δ^c – глубина проникновения силового поля, ω – круговая частота возбуждаемого магнитного поля, μ – магнитная проницаемость, σ – проводимость среды, в которую проникает ЭМП. Формула (173) оценивает глубину проникновения ЭМП до той точки, в которой амплитуда электрического вектора поля равна $1/e$ от величины на поверхности ($e = 2,7182$).

Пусть на поверхности проводника амплитуда силового ЭМП A^c равна амплитуде несилового ЭМП A^{nc} . При распространении магнитного поля его убывание подчиняется еще и геометрическому закону. Для силового поля амплитуда уменьшается следующим образом $A^c / (h^3 e)$, h – глубина геометрического затухания. Для несилового поля в связи с отсутствием скин-эффекта амплитуда уменьшается на A^{nc} / h^3 . Тогда отношение глубин проникновения несилового ЭМП к силовому составит:

$$\delta^{nc} / \delta^c = e. \quad (174)$$

Эта достаточно грубая оценка означает, что несилосоое ЭМП проникает в среду почти в три раза глубже, что существенно увеличивает возможности разведки недр с помощью несилового ЭМП на высоких частотах.

Следует еще раз отметить, что измерение медленно изменяющегося несилового ЭМП необходимо осуществлять так: магнитометром – магнитного, электрометром – электрического в связи с основным свойством, зафиксированным уравнениями (36).

Таким образом, возникающая перспектива увеличения глубинности геофизических исследований с помощью несилового ЭМП должна стимулировать интерес к созданию аппаратуры, способной обеспечить применение несилового ЭМП в геофизической практике, в том числе и в геофизической разведке.

§17. Сверхглубинное зондирование Земли несильным магнитным полем.

Сверхглубинное зондирование Земли магнитным полем спокойных солнечно-суточных вариаций осуществлялось неоднократно. Однако обнаружались большие перепады глубин до проводящего слоя, определённых по экспериментальным данным в различных точках земного шара, в то время как временные частоты при этом не различались. Более того, в магнитном поле

S_q – вариаций, а также в поле КПК были зафиксированы эффекты, явно противоречащие первому уравнению Максвелла. В предыдущих параграфах эти эффекты подробно рассмотрены: эффект Van Vleuten ($\nabla \times \mathbf{H} = j$, при $j = 0, \nabla \times \mathbf{H} \neq 0$), эффект Четаева Д.Н. ($j_z = 0, \sigma \neq 0, E_z \neq 0$).

Поэтому с целью найти объяснение столь необычному поведению естественных электромагнитных полей на Земле, необходимо обратить внимание на тот факт, что Земля является, в том числе, космическим объектом, для которого гидромагнитные эффекты магнитных полей, наблюдаемые в космосе [5], наверняка присущи.

Земному электромагнитному полю и Земле в целом, как космическому объекту, присущи гидромагнитные эффекты в магнитном поле, за тем исключением, что несилевое тороидальное магнитное поле создаётся в атмосфере Земли тороидальными электрическими токами, расположенными либо в ионосфере Земли, например, источники S_q – вариаций, либо электрические токи, обтекающие твёрдое ядро в зоне F жидкого ядра [10]. При этом названные выше эффекты обязаны всюду не потенциальному несилевому магнитному полю \mathbf{H}_T . Согласно $\nabla \times \mathbf{H}_T = \mathbf{H}_p$, это магнитное поле не возбуждает электрический ток, поэтому существует в практически непроводящей атмосфере Земли и измеряется вместе с полоидальным силовым магнитным полем \mathbf{H}_p . Полоидальное несилевое электрическое поле \mathbf{E}_p также присутствует в атмосфере Земли и объясняет появление его в эффекте Четаева, являясь частью второй несилевой модификации электромагнитного поля вариаций, существующей в атмосфере Земли: $\mathbf{H}_T, \mathbf{E}_p$ – несилевая модификация электромагнитного поля Земли, $\mathbf{H}_p, \mathbf{E}_T$ – силовая модификация. Для этих модификаций на регулярных границах характерны следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_p^1 - \mathbf{H}_p^2 \Big|_{r=R} = 0, \quad \mathbf{H}_T^1 - \mathbf{H}_T^2 \Big|_{r=R} = 0, \quad \mathbf{E}_T^1 - \mathbf{E}_T^2 \Big|_{r=R} = 0, \quad E_{Tn} = 0, \\ \mathbf{E}_{Pt}^1 - \mathbf{E}_{Pt}^2 \Big|_{r=R} = 0, \quad E_{Pn}^1 = \frac{\sigma}{\sigma_1} E_{Pn}^2. \end{aligned} \quad (175)$$

В этом случае формулы для двумодульного зондирования Земли полем земных вариаций можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} Z^{MT} = \frac{i E_\theta^{MT}}{i H_\varphi^{MT}}, \quad Z^{MT} = \frac{i E_\varphi^{MT}}{i H_\theta^{MT}}, \quad Z^{ET} = \frac{E_r^i}{i H_\theta^{ET}}, \quad Z^{ET} = \frac{E_r^i}{i H_\varphi^{ET}}, \\ \rho_k(\omega) = \frac{1}{\omega\mu} |Z^{MT} \cdot Z^{ET}| = \frac{1}{\omega\mu} Z_0^2. \end{aligned} \quad (176)$$

i – означает принадлежность полей внутренним источникам, Z_0 – импеданс электрически однородной Земли, E_r^i – восстановленная индукционная часть вертикального электрического поля. Результат приложения формул (176) к экспериментальным данным продемонстрирован в таблице.

Таблица 3.

Станция	Координаты		Гармоника					Удельное сопротивление (среднее), Ом	Глубина, км
			1	2	3	4	5		
Ленинград	30,05	30,70	45	35	23	7	67	24	336
			22	9	5	38	3		
Москва	34,52	37,32	73	46	10	1	222	64	555
			14	10	4	263	4		
Свердловск	33,27	61,07	61	23	28	26	33	23	329
			26	2	3	20	15		
Казань	34,17	48,85	70	52	25	26	74	31	381
			17	5	4	31	12		
Киев	39,28	30,30	39	56	6	2	49	25	343
			13	11	6	67	6		

Плещеницы	45,50	27,90	17	77	5	2	19	22	322
			14	11	10	61	10		
Львов	40,10	23,73	27	120	5	4	20	25	343
			28	8	16	7	22		
Одесса	43,22	30,90	32	57	6	2	43	25	343
			11	12	6	80	5		
Тбилиси	47,92	44,70	35	17	10	74	39	20	307
			8	6	3	3	6		
Среднее								29	362

Анализ таблицы 3 показывает, что учёт несилевой части наблюдаемого в атмосфере магнитного поля длиннопериодных спокойных солнечно-суточных вариаций (S_q - вариаций) существенно сглаживает значения глубин до проводящего слоя Земли на этих временных частотах. Это, как раз, и есть проявление несилевого электромагнитного поля в эксперименте с природными электромагнитными полями.

§18. Алгоритм выделения переменных несилевых электромагнитных полей из наблюдаённых данных на шаре.

Пусть внутри шара и вне его расположены источники переменного гармонического ($e^{-i\omega t}$) электромагнитного поля. Тогда уравнение для векторного потенциала (73) для $t > 0$ распадается на два:

$$\Delta A^i + \bar{\alpha}^2 A^i = j_i^{CT}, \quad \Delta A^e + \bar{\alpha}^2 A^e = j_e^{CT}. \quad (177)$$

Решения этих уравнений в воздухе имеют вид:

$$A^i(p) = \frac{1}{4\pi} \int_w j_i^{CT}(q) \frac{e^{-i\bar{\alpha}R(p,q)}}{R(p,q)} dw_q, \quad r \geq R_0;$$

$$A^e(q) = \frac{1}{4\pi} \int_G j_e^{CT}(p) \frac{e^{i\bar{\alpha}R(p,q)}}{R(p,q)} dw_p, \quad r \leq R_0 + h. \quad (178)$$

Здесь: p – точка вне шара, q – точка в шаре, h – высота до внешнего источника, $j_i^{CT}(q)$ – электрические токи в шаре, $j_e^{CT}(p)$ – электрические токи за пределами шара, R_0 – радиус шара.

Первый интеграл представляет потенциал внутренних источников. Он аналитичен во всех точках p при $r \geq R_0$. Во внутренних точках шара W при $R \rightarrow 0$ имеет особенность типа $1/R$, которая исключается соответствующим выбором сферической Бесселевой функции полуцелого индекса, стремящейся в нуле к нулю. Это будет соответствовать и физике дела, так как источники большинства вариаций, например, земного магнитного поля с глубиной затухают вследствие влияния скин-эффекта, поскольку являются индуцированными полем внешнего происхождения. На бесконечности интеграл обеспечивает выполнение условия излучения для полей внутренних источников. Вторым интеграл (178) представляет потенциал внешних источников. Он аналитичен во всех точках q при $r \leq R_0 + h$, за исключением точек, где $R = 0$. В них он имеет особенность также типа $1/R$. Она исключается соответствующим выбором Бесселевой функции. Этот интеграл имеет особенность на бесконечности, что позволяет с его помощью обеспечить заданный рост поля при приближении к внешнему источнику. Поскольку данный интеграл применяется в ограниченной области, то особенность, возникающая на бесконечности, на расчет поля между W и G влияет опосредованно.

По аналогии с известными разложениями функции $1/R$ (77), здесь необходимо разложить по сферическим функциям фундаментальные решения $\exp(\pm i\bar{\alpha} R)/R$. Ясно, что эти разложения в силу симметрии должны отличаться от разложений К.Ф. Гаусса только законом изменения по сферическим координатам r и r' , причем так, как этого требует физика источников. Немаловажным является также выполнение условия перехода новых

разложений в разложения К.Ф. Гаусса, соответственно, для полей внешних и внутренних источников при $\bar{\alpha} \rightarrow 0$.

Итак, запишем разложения нужных функций, используя в качестве радиальных сферические функции Бесселя в определении Морзе:

$$\exp(-i\bar{\alpha} R) / R = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \bar{c}_n^m \cos m\varphi \cos m\varphi' P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta') K_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) I_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r'}{R_0} \right) +$$

$$\bar{c}_n^m \sin m\varphi \sin m\varphi' P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta') K_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) I_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r'}{R_0} \right), \quad r \geq R_0. \quad (179)$$

Аналогично для функций с положительной экспонентой

$$\exp(i\bar{\alpha} R) / R = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \bar{c}_n^m \cos m\varphi \cos m\varphi' P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta') I_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) K_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r'}{R_0} \right) +$$

$$\bar{c}_n^m \sin m\varphi \sin m\varphi' P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta') I_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) K_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r'}{R_0} \right), \quad r \leq R_0 + h. \quad (180)$$

В формулах (179) и (180) коэффициент \bar{c}_n^m означает число сочетаний из n по m . Если устремить волновое число α к нулю, то, в связи с асимптотическим поведением сферических Бесселевых функций при малых аргументах, произведения этих функций первого и второго родов дают нужное отношение радиусов, а выражения в целом переходят в разложения К.Ф. Гаусса для функции $1/R$.

Разложение (179) применяется при интегрировании по области W , поэтому функции от координат со штрихом, входящие в него, исключают особенность в нуле. Функции с не штрихованными координатами эту особенность не реализуют, так как разложение по ним применяется только при $r \geq R_0$.

Разложение (180) используется при интегрировании по области G , поэтому функции от координат со штрихом, по которым осуществляется интегрирование, исключают особенность на бесконечности. Функции от координат без штриха заданы при $r \leq R_0 + h$, поэтому их особенность в бесконечности не реализуется, в нуле они стремятся к нулю.

Сходимость разложений (179) и (180) при $r=R_0$ не хуже сходимости рядов Фурье [20], которые сходятся абсолютно и равномерно, поэтому подстановка этих рядов в интегралы (178) и перемена местами интегрирования и суммирования возможны. Воспользуемся этой возможностью без дальнейших оговорок.

В прямоугольной системе координат, закрепленной в центре шара, интегралы (178) можно разложить на составляющие по осям координат:

$$\begin{aligned}
A_x^i(p) &= \frac{1}{4\pi} \int_W j_{ix}^{CT}(q) \frac{e^{-i\bar{\omega} R(p,q)}}{R(p,q)} dw_q, \\
A_y^i(p) &= \frac{1}{4\pi} \int_W j_{iy}^{CT}(q) \frac{e^{-i\bar{\omega} R(p,q)}}{R(p,q)} dw_q, \\
A_z^i(p) &= \frac{1}{4\pi} \int_W j_{iz}^{CT}(q) \frac{e^{-i\bar{\omega} R(p,q)}}{R(p,q)} dw_q, \quad r \geq R_0, \\
A_x^e(q) &= \frac{1}{4\pi} \int_G j_{ex}^{CT}(p) \frac{e^{i\bar{\omega} R(p,q)}}{R(p,q)} dw_p, \\
A_y^e(q) &= \frac{1}{4\pi} \int_G j_{ey}^{CT}(p) \frac{e^{i\bar{\omega} R(p,q)}}{R(p,q)} dw_p, \\
A_z^e(q) &= \frac{1}{4\pi} \int_G j_{ez}^{CT}(p) \frac{e^{i\bar{\omega} R(p,q)}}{R(p,q)} dw_p, \quad r \leq R_0 + h.
\end{aligned} \tag{181}$$

Теперь необходимо подставить разложения (179) и (180) в (181), собрать под интегралами функции от координат со штрихом. Это позволит обозначить интегралы постоянными. Для постоянных внутренних источников справедливы следующие представления:

$$\begin{aligned}
\alpha_n^m &= \frac{\bar{c}_n^m}{4\pi} \int_W j_{ix}^{CT}(q) \cos m\varphi' P_n^m(\cos \theta') I_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r'}{R_0} \right) dw', \\
\rho_n^m &= \frac{\bar{c}_n^m}{4\pi} \int_W j_{ix}^{CT}(q) \sin m\varphi' P_n^m(\cos \theta') I_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r'}{R_0} \right) dw', \\
\mu_n^m &= \frac{\bar{c}_n^m}{4\pi} \int_W j_{iy}^{CT}(q) \cos m\varphi' P_n^m(\cos \theta') I_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r'}{R_0} \right) dw', \\
\nu_n^m &= \frac{\bar{c}_n^m}{4\pi} \int_W j_{iy}^{CT}(q) \sin m\varphi' P_n^m(\cos \theta') I_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r'}{R_0} \right) dw',
\end{aligned} \tag{182}$$

$$u_n^m = \frac{\bar{c}_n^m}{4\pi} \int_W j_{iz}^{CT}(q) \cos m\varphi' P_n^m(\cos \theta') I_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r'}{R_0} \right) dw',$$

$$v_n^m = \frac{\bar{c}_n^m}{4\pi} \int_W j_{iz}^{CT}(q) \sin m\varphi' P_n^m(\cos \theta') I_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r'}{R_0} \right) dw'.$$

Для произвольных постоянных внешних источников необходимо ввести аналогичные представления:

$$a_n^m = \frac{\bar{c}_n^m}{4\pi} \int_G j_{ex}^{CT}(p) \cos m\varphi' P_n^m(\cos \theta') K_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r'}{R_0} \right) dw',$$

$$b_n^m = \frac{\bar{c}_n^m}{4\pi} \int_G j_{ex}^{CT}(p) \sin m\varphi' P_n^m(\cos \theta') K_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r'}{R_0} \right) dw',$$

$$c_n^m = \frac{\bar{c}_n^m}{4\pi} \int_G j_{ey}^{CT}(p) \cos m\varphi' P_n^m(\cos \theta') K_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r'}{R_0} \right) dw', \quad (183)$$

$$d_n^m = \frac{\bar{c}_n^m}{4\pi} \int_G j_{ey}^{CT}(p) \sin m\varphi' P_n^m(\cos \theta') K_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r'}{R_0} \right) dw',$$

$$e_n^m = \frac{\bar{c}_n^m}{4\pi} \int_G j_{ez}^{CT}(p) \cos m\varphi' P_n^m(\cos \theta') K_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r'}{R_0} \right) dw',$$

$$f_n^m = \frac{\bar{c}_n^m}{4\pi} \int_G j_{ez}^{CT}(p) \sin m\varphi' P_n^m(\cos \theta') K_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r'}{R_0} \right) dw'.$$

С учетом обозначений (182) и (183), а также формул перевода прямоугольных компонент в сферические (99) путем подстановки разложений (179) и (180) в (181) можно получить разложения для потенциалов внутренних и внешних источников:

$$r \geq R_0$$

$$A_\theta^i(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [(\alpha_n^m \cos m\varphi + \rho_n^m \sin m\varphi) \cos \theta \cos \varphi + (\mu_n^m \cos m\varphi + \nu_n^m \sin m\varphi) \cos \theta \cos \varphi -$$

$$(u_n^m \cos m\varphi + v_n^m \sin m\varphi) \sin \theta] P_n^m(\cos \theta) K_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right),$$

$$A_\varphi^i(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [-(\alpha_n^m \cos m\varphi + \rho_n^m \sin m\varphi) \sin \varphi + (\mu_n^m \cos m\varphi + \nu_n^m \sin m\varphi) \cos \varphi] \times$$

$$P_n^m(\cos \theta) K_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right), \quad (184)$$

$$A_r^i(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [(a_n^m \cos m\varphi + \rho_n^m \sin m\varphi) \sin \theta \cos \varphi + (\mu_n^m \cos m\varphi + \nu_n^m \sin m\varphi) \sin \theta \sin \varphi + (u_n^m \cos m\varphi + v_n^m \sin m\varphi) \cos \theta] P_n^m(\cos \theta) K_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right),$$

$$r \leq R_0 + h$$

$$A_\theta^e(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [(a_n^m \cos m\varphi + b_n^m \sin m\varphi) \cos \theta \cos \varphi + (c_n^m \cos m\varphi + d_n^m \sin m\varphi) \cos \theta \sin \varphi - (e_n^m \cos m\varphi + f_n^m \sin m\varphi) \sin \theta] P_n^m(\cos \theta) I_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right),$$

$$A_\varphi^e(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [-(a_n^m \cos m\varphi + b_n^m \sin m\varphi) \sin \varphi + (c_n^m \cos m\varphi + d_n^m \sin m\varphi) \cos \varphi] \times P_n^m(\cos \theta) I_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right),$$

$$A_r^e(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [(a_n^m \cos m\varphi + b_n^m \sin m\varphi) \sin \theta \cos \varphi + (c_n^m \cos m\varphi + d_n^m \sin m\varphi) \sin \theta \sin \varphi + (e_n^m \cos m\varphi + f_n^m \sin m\varphi) \cos \theta] P_n^m(\cos \theta) I_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right),$$

Анализ разложений потенциалов внутренних и внешних источников (184) показывает, что в данном подходе все три компоненты потенциала как внутренних, так и внешних источников выражаются через одни и те же коэффициенты, которые являются интегралами от соответствующих компонент плотности тока, порождающего как полоидальную, так и тороидальную части наблюдаемого поля. Полученные разложения потенциалов содержат 12 типов, подлежащих определению постоянных коэффициентов. Для их определения естественно требуется больше информации о наблюдаемом поле, т.е. в большем количестве точек. Ниже можно будет убедиться в том, что проигрыш в количестве точек дает ощутимый выигрыш в необходимых для измерения компонентах поля. В данном случае достаточно будет измерить две компоненты магнитного поля – одну вертикальную и одну касательную, чтобы восстановить все магнитные и все электрические компоненты поля, разделить поля от внешних и внутренних источников, о чем доказана соответствующая теорема.

Для сегодняшней геофизической практики этот факт имеет принципиальное значение, так как на мировой сети большинство станций измеряют только магнитные компоненты поля.

Чтобы получить разложения электромагнитного поля внутренних источников, необходимо подставить первые три компоненты потенциала из (184) в (11) и (24). В результате получим:

$$\begin{aligned}
H_{P\theta}^i &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [(\alpha_n^m \cos m\varphi + \rho_n^m \sin m\varphi) \sin \varphi - (\mu_n^m \cos m\varphi + \nu_n^m \sin m\varphi) \cos \varphi] \times \\
&\quad P_n^m(\cos \theta) \left(\frac{n-1/2}{r} K_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) - \frac{\alpha}{R_0} K_{n-1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) \right), \\
H_{P\varphi}^i &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [(\alpha_n^m \cos m\varphi + \rho_n^m \sin m\varphi) \cos \theta \cos \varphi + (\mu_n^m \cos m\varphi + \nu_n^m \sin m\varphi) \cos \theta \sin \varphi - \\
&\quad (u_n^m \cos m\varphi + v_n^m \sin m\varphi) \sin \theta] P_n^m(\cos \theta) \left(\frac{n-1/2}{r} K_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) - \frac{\alpha}{R_0} K_{n-1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) \right), \\
H_{Pr}^i &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [\alpha_n^m \left(\cos m\varphi \sin \varphi \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} - m \sin m\varphi \cos \varphi \operatorname{ctg} \theta P_n^m(\cos \theta) \right) + \quad (185) \\
&\quad \rho_n^m \left(\sin m\varphi \sin \varphi \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} + m \cos m\varphi \cos \varphi \operatorname{ctg} \theta P_n^m(\cos \theta) \right) - \\
&\quad \mu_n^m \left(\cos m\varphi \cos \varphi \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} + m \sin m\varphi \sin \varphi \operatorname{ctg} \theta P_n^m(\cos \theta) \right) - \\
&\quad \nu_n^m \left(\sin m\varphi \cos \varphi \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} - m \cos m\varphi \sin \varphi \operatorname{ctg} \theta P_n^m(\cos \theta) \right) - \\
&\quad (v_n^m \cos m\varphi - u_n^m \sin m\varphi) m P_n^m(\cos \theta)] \frac{1}{r} K_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right), \\
E_{T\theta}^i &= -i\omega\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [(\alpha_n^m \cos m\varphi + \rho_n^m \sin m\varphi) \cos \theta \cos \varphi + \\
&\quad (\mu_n^m \cos m\varphi + \nu_n^m \sin m\varphi) \cos \theta \sin \varphi - \\
&\quad (u_n^m \cos m\varphi + v_n^m \sin m\varphi) \sin \theta] P_n^m(\cos \theta) K_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right), \\
E_{T\varphi}^i &= i\omega\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [(\alpha_n^m \cos m\varphi + \rho_n^m \sin m\varphi) \sin \varphi -
\end{aligned}$$

$$(\mu_n^m \cos m\varphi + \nu_n^m \sin m\varphi) \cos \varphi] P_n^m(\cos \theta) K_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right),$$

Поле электрического тапа внутренних источников имеет следующие разложения:

$$H_{T\theta}^i = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [-\alpha_n^m (m \sin m\varphi \cos \varphi + \cos m\varphi \sin \varphi) + \rho_n^m (m \cos m\varphi \cos \varphi - \sin m\varphi \sin \varphi) -$$

$$\mu_n^m (m \sin m\varphi \sin \varphi - \cos m\varphi \cos \varphi) + \nu_n^m (m \cos m\varphi \sin \varphi + \sin m\varphi \cos \varphi) +$$

$$(\nu_n^m \cos m\varphi - u_n^m \sin m\varphi) m \cot \theta] P_n^m(\cos \theta) \frac{1}{r} K_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right),$$

$$H_{T\varphi}^i = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[\alpha_n^m \cos m\varphi \cos \varphi \left(\cos \theta P_n^m(\cos \theta) + \sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) + \right. \\ \rho_n^m \sin m\varphi \cos \varphi \left(\cos \theta P_n^m(\cos \theta) + \sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) + \\ \mu_n^m \cos m\varphi \sin \varphi \left(\cos \theta P_n^m(\cos \theta) + \sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) + \\ \nu_n^m \sin m\varphi \sin \varphi \left(\cos \theta P_n^m(\cos \theta) + \sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) + \\ \left. u_n^m \cos m\varphi \left(-\sin \theta P_n^m(\cos \theta) + \cos \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) + \right. \\ \left. \nu_n^m \sin m\varphi \left(-\sin \theta P_n^m(\cos \theta) + \cos \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) \right] \frac{1}{r} K_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right), \quad (186)$$

$$E_{P\theta}^i = \frac{-1}{\sigma' r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[\alpha_n^m \cos m\varphi \cos \varphi \left(\cos \theta P_n^m(\cos \theta) + \sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) + \right. \\ \rho_n^m \sin m\varphi \cos \varphi \left(\cos \theta P_n^m(\cos \theta) + \sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) + \\ \mu_n^m \cos m\varphi \sin \varphi \left(\cos \theta P_n^m(\cos \theta) + \sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) + \\ \nu_n^m \sin m\varphi \sin \varphi \left(\cos \theta P_n^m(\cos \theta) + \sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) + \\ \left. u_n^m \cos m\varphi \left(-\sin \theta P_n^m(\cos \theta) + \cos \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) + \right.$$

$$\left. \nu_n^m \sin m\varphi \left(-\sin \theta P_n^m(\cos \theta) + \cos \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) \right]$$

$$\left(\cos \theta P_n^m(\cos \theta) + \sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) +$$

$$\left(\cos \theta P_n^m(\cos \theta) + \sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) +$$

$$\left(-\sin \theta P_n^m(\cos \theta) + \cos \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) +$$

$$v_n^m \sin m\varphi \left[-\sin \theta P_n^m(\cos \theta) + \cos \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right] \times$$

$$\left(\frac{n-3/2}{r} K_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) + \frac{\alpha}{R_0} K_{n-1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) \right),$$

$$E_{P\varphi}^i = \frac{-1}{\sigma' r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left\{ [-\alpha_n^m (m \sin m\varphi \cos \varphi + \cos m\varphi \sin \varphi) + \rho_n^m (m \cos m\varphi \cos \varphi - \sin m\varphi \sin \varphi) - \right.$$

$$\left. \mu_n^m (m \sin m\varphi \sin \varphi - \cos m\varphi \cos \varphi) + v_n^m (m \cos m\varphi \sin \varphi + \sin m\varphi \cos \varphi) \right] P_n^m(\cos \theta) -$$

$$(-v_n^m \cos m\varphi + u_n^m \sin m\varphi) m \operatorname{ctg} \theta P_n^m(\cos \theta) \left. \right\} \left(\frac{n-3/2}{r} K_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) + \frac{\alpha}{R_0} K_{n-1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) \right),$$

$$E_{Pr}^i = \frac{1}{\sigma' r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [(\alpha_n^m \cos m\varphi + \rho_n^m \sin m\varphi) \sin \theta \cos \varphi +$$

$$(\mu_n^m \cos m\varphi + v_n^m \sin m\varphi) \sin \theta \sin \varphi + (u_n^m \cos m\varphi + v_n^m \sin m\varphi) \cos \theta] P_n^m(\cos \theta) \times$$

$$\left[\left(-\bar{\alpha}^2 r^2 + n^2 - 9/4 + \frac{\alpha^2 r^2}{R_0^2} \right) \frac{1}{r} K_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) - \frac{\alpha}{R_0} K_{n-1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) \right].$$

Анализ последних формул показывает, что оба типа поля выражаются через одни и те же коэффициенты. При этом коэффициенты разложений (185) и (186) указывают на то, что достаточно измерить вертикальную компоненту магнитного поля H_{Pr}^i , чтобы восстановить все электромагнитное поле тороидальных и полоидальных полей внутренних источников. Это существенно усиливает ценность теоремы 7, так как она решает, в том числе, и проблему восстановления переменных периодических во времени электромагнитных полей. На поверхности шара при $r=R_0$ электрическое полоидальное поле потенциально. Индукционная часть радиальной компоненты E_{Tr}^i скомпенсирована.

Поля \mathbf{H}_p и \mathbf{E}_T от внешних источников в разложениях запишутся в следующем виде.

Поле при $r \leq R_0 + h$:

$$\begin{aligned}
H_{p\theta}^e &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [(a_n^m \cos m\varphi + b_n^m \sin m\varphi) \sin \varphi - (c_n^m \cos m\varphi + d_n^m \sin m\varphi) \cos \varphi] \times \\
&\quad P_n^m(\cos \theta) \left(-\frac{n-1/2}{r} I_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) + \frac{\alpha}{R_0} I_{n-1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) \right), \\
H_{p\varphi}^e &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [(a_n^m \cos m\varphi + b_n^m \sin m\varphi) \cos \theta \cos \varphi + (c_n^m \cos m\varphi + d_n^m \sin m\varphi) \cos \theta \sin \varphi - \\
&\quad (e_n^m \cos m\varphi + f_n^m \sin m\varphi) \sin \theta] P_n^m(\cos \theta) \left(-\frac{n-1/2}{r} I_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) + \frac{\alpha}{R_0} I_{n-1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) \right), \\
H_{pr}^e &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [a_n^m \left(\cos m\varphi \sin \varphi \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} - m \sin m\varphi \cos \varphi \operatorname{ctg} \theta P_n^m(\cos \theta) \right) + \\
&\quad b_n^m \left(\sin m\varphi \sin \varphi \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} + m \cos m\varphi \cos \varphi \operatorname{ctg} \theta P_n^m(\cos \theta) \right) - \\
&\quad c_n^m \left(\cos m\varphi \cos \varphi \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} + m \sin m\varphi \sin \varphi \operatorname{ctg} \theta P_n^m(\cos \theta) \right) - \\
&\quad d_n^m \left(\sin m\varphi \cos \varphi \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} - m \cos m\varphi \sin \varphi \operatorname{ctg} \theta P_n^m(\cos \theta) \right) - \\
&\quad (f_n^m \cos m\varphi - e_n^m \sin m\varphi) m P_n^m(\cos \theta)] \frac{1}{r} I_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right), \tag{187}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{T\theta}^e &= -i\omega\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [(a_n^m \cos m\varphi + b_n^m \sin m\varphi) \cos \theta \cos \varphi + \\
&\quad (c_n^m \cos m\varphi + d_n^m \sin m\varphi) \cos \theta \sin \varphi - \\
&\quad (e_n^m \cos m\varphi + f_n^m \sin m\varphi) \sin \theta] P_n^m(\cos \theta) I_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{T\varphi}^e &= i\omega\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [(a_n^m \cos m\varphi + b_n^m \sin m\varphi) \sin \varphi - \\
&\quad (c_n^m \cos m\varphi + d_n^m \sin m\varphi) \cos \varphi] P_n^m(\cos \theta) I_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right),
\end{aligned}$$

Поле внешних источников вычисляется аналогично при $r \leq R_0 + h$:

$$\begin{aligned}
H_{T\theta}^e &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[-a_n^m (m \sin m\varphi \cos \varphi + \cos m\varphi \sin \varphi) + b_n^m (m \cos m\varphi \cos \varphi - \sin m\varphi \sin \varphi) - \right. \\
&\quad c_n^m (m \sin m\varphi \sin \varphi - \cos m\varphi \cos \varphi) + d_n^m (m \cos m\varphi \sin \varphi + \sin m\varphi \cos \varphi) - \\
&\quad \left. (f_n^m \cos m\varphi - e_n^m \sin m\varphi) m c t g \theta \right] P_n^m(\cos \theta) \frac{1}{r} K_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right), \\
H_{T\varphi}^e &= - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[a_n^m \cos m\varphi \cos \varphi \left(\cos \theta P_n^m(\cos \theta) + \sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) + \right. \\
&\quad b_n^m \sin m\varphi \cos \varphi \left(\cos \theta P_n^m(\cos \theta) + \sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) + \\
&\quad c_n^m \cos m\varphi \sin \varphi \left(\cos \theta P_n^m(\cos \theta) + \sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) + \\
&\quad d_n^m \sin m\varphi \sin \varphi \left(\cos \theta P_n^m(\cos \theta) + \sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) + \\
&\quad e_n^m \cos m\varphi \left(-\sin \theta P_n^m(\cos \theta) + \cos \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) + \\
&\quad \left. f_n^m \sin m\varphi \left(-\sin \theta P_n^m(\cos \theta) + \cos \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) \right] \frac{1}{r} I_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right),
\end{aligned} \tag{188}$$

$$\begin{aligned}
E_{P\theta}^e &= \frac{-1}{\sigma' r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[a_n^m \cos m\varphi \cos \varphi \left(\cos \theta P_n^m(\cos \theta) + \sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) + \right. \\
&\quad b_n^m \sin m\varphi \cos \varphi \left(\cos \theta P_n^m(\cos \theta) + \sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) + \\
&\quad c_n^m \cos m\varphi \sin \varphi \left(\cos \theta P_n^m(\cos \theta) + \sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) + \\
&\quad d_n^m \sin m\varphi \sin \varphi \left(\cos \theta P_n^m(\cos \theta) + \sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) + \\
&\quad e_n^m \cos m\varphi \left(-\sin \theta P_n^m(\cos \theta) + \cos \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) + \\
&\quad \left. f_n^m \sin m\varphi \left(-\sin \theta P_n^m(\cos \theta) + \cos \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) \right] \times
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{n-3/2}{r} I_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) - \frac{\alpha}{R_0} I_{n-1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) \right),$$

$$E_{Pr}^e = \frac{-1}{\sigma' r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [-a_n^m (m \sin m\varphi \cos \varphi + \cos m\varphi \sin \varphi) + b_n^m (m \cos m\varphi \cos \varphi - \sin m\varphi \sin \varphi) -$$

$$c_n^m (m \sin m\varphi \sin \varphi - \cos m\varphi \cos \varphi) + d_n^m (m \cos m\varphi \sin \varphi + \sin m\varphi \cos \varphi) -$$

$$(-f_n^m \cos m\varphi + e_n^m \sin m\varphi) m \operatorname{ctg} \theta] P_n^m(\cos \theta) \left(\frac{n-3/2}{r} I_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) - \frac{\alpha}{R_0} I_{n-1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) \right),$$

$$E_{Pr}^e = \frac{1}{\sigma' r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [(a_n^m \cos m\varphi + b_n^m \sin m\varphi) \sin \theta \cos \varphi + (c_n^m \cos m\varphi + d_n^m \sin m\varphi) \cos \theta] P_n^m(\cos \theta) +$$

$$(e_n^m \cos m\varphi + f_n^m \sin m\varphi) \cos \theta] P_n^m(\cos \theta) \times$$

$$\left[\left(-\bar{\alpha}^2 r^2 + n^2 - 9/4 + \frac{\alpha^2 r^2}{R_0^2} \right) \frac{1}{r} K_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) - \frac{\alpha}{R_0} K_{n-1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) \right].$$

Поле внешних источников также выражается через те же коэффициенты. Электрическое поле полностью полоидально, индукционная часть радиальной компоненты электрического поля на поверхности Земли при $r=R_0$ скомпенсирована, так как $\bar{\alpha}^2 R_0^2 = \alpha^2$.

Суммарное поле получается наложением полей внутренних и внешних источников. В результате возникают уравнения, разделяющие неизвестные коэффициенты:

$$\begin{cases} \alpha_n^m \frac{1}{r} K_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) + a_n^m \frac{1}{r} I_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) = i_n^m, \\ -\alpha_n^m \frac{\alpha}{R_0} K_{n-1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) + a_n^m \frac{\alpha}{R_0} I_{n-1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) = \bar{i}_n^m; \\ \rho_n^m \frac{1}{r} K_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) + b_n^m \frac{1}{r} I_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) = j_n^m, \\ -\rho_n^m \frac{\alpha}{R_0} K_{n-1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) + b_n^m \frac{\alpha}{R_0} I_{n-1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) = \bar{j}_n^m; \end{cases}$$

$$\begin{cases}
\mu_n^m \frac{1}{r} K_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) + c_n^m \frac{1}{r} I_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) = k_n^m, \\
-\mu_n^m \frac{\alpha}{R_0} K_{n-1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) + c_n^m \frac{\alpha}{R_0} I_{n-1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) = \bar{k}_n^m;
\end{cases} \quad (189)$$

$$\begin{cases}
\nu_n^m \frac{1}{r} K_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) + d_n^m \frac{1}{r} I_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) = l_n^m, \\
-\nu_n^m \frac{\alpha}{R_0} K_{n-1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) + d_n^m \frac{\alpha}{R_0} I_{n-1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) = \bar{l}_n^m;
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
u_n^m \frac{1}{r} K_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) + e_n^m \frac{1}{r} I_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) = q_n^m, \\
-u_n^m \frac{\alpha}{R_0} K_{n-1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) + e_n^m \frac{\alpha}{R_0} I_{n-1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) = \bar{q}_n^m;
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
v_n^m \frac{1}{r} K_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) + f_n^m \frac{1}{r} I_{n+1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) = p_n^m, \\
-v_n^m \frac{\alpha}{R_0} K_{n-1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) + f_n^m \frac{\alpha}{R_0} I_{n-1/2} \left(\frac{\alpha r}{R_0} \right) = \bar{p}_n^m;
\end{cases}$$

Суммарное поле МТ моды на поверхности Земли при $r=R_0$ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
H_{P\theta} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [(\bar{i}_n^m - (n-1/2)i_n^m) \cos m\varphi \sin \varphi + (\bar{j}_n^m - (n-1/2)j_n^m) \sin m\varphi \sin \varphi - \\
&\quad (\bar{k}_n^m - (n-1/2)k_n^m) \cos m\varphi \cos \varphi - (\bar{l}_n^m - (n-1/2)l_n^m) \sin m\varphi \cos \varphi] P_n^m(\cos \theta), \\
H_{P\varphi} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [(\bar{i}_n^m - (n-1/2)i_n^m) \cos m\varphi \cos \varphi \cos \theta + (\bar{j}_n^m - (n-1/2)j_n^m) \sin m\varphi \cos \varphi \cos \theta + \\
&\quad (\bar{k}_n^m - (n-1/2)k_n^m) \cos m\varphi \sin \varphi \cos \theta + (\bar{l}_n^m - (n-1/2)l_n^m) \sin m\varphi \sin \varphi \cos \theta - \\
&\quad (\bar{q}_n^m - (n-1/2)q_n^m) \cos m\varphi \sin \theta - (\bar{p}_n^m - (n-1/2)p_n^m) \sin m\varphi \sin \theta] P_n^m(\cos \theta), \\
H_{Pr} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n i_n^m \left(\cos m\varphi \sin \varphi \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} - m \sin m\varphi \cos \varphi \operatorname{ctg} \theta P_n^m(\cos \theta) \right) +
\end{aligned} \quad (190)$$

$$\begin{aligned}
& j_n^m \left(\sin m\varphi \sin \varphi \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} + m \cos m\varphi \cos \varphi \operatorname{ctg} \theta P_n^m(\cos \theta) \right) - \\
& k_n^m \left(\cos m\varphi \cos \varphi \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} + m \sin m\varphi \sin \varphi \operatorname{ctg} \theta P_n^m(\cos \theta) \right) - \\
& l_n^m \left(\sin m\varphi \cos \varphi \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} - m \cos m\varphi \sin \varphi \operatorname{ctg} \theta P_n^m(\cos \theta) \right) - \\
& (p_n^m \cos m\varphi - q_n^m \sin m\varphi) m P_n^m(\cos \theta),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{T\theta} = -i\omega\mu_0 R_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (i_n^m \cos m\varphi \cos \varphi \cos \theta + j_n^m \sin m\varphi \cos \varphi \cos \theta + \\
k_n^m \cos m\varphi \sin \varphi \cos \theta + l_n^m \sin m\varphi \sin \varphi \cos \theta - \\
q_n^m \cos m\varphi \sin \theta - p_n^m \sin m\varphi \sin \theta) P_n^m(\cos \theta),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{T\varphi} = i\omega\mu_0 R_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (i_n^m \cos m\varphi \sin \varphi + j_n^m \sin m\varphi \sin \varphi - \\
k_n^m \cos m\varphi \cos \varphi - l_n^m \sin m\varphi \cos \varphi) P_n^m(\cos \theta).
\end{aligned}$$

Суммарное поле на поверхности шара при $r = R_0$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
H_{T\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [-i_n^m (m \sin m\varphi \cos \varphi + \cos m\varphi \sin \varphi) + j_n^m (m \cos m\varphi \cos \varphi - \sin m\varphi \sin \varphi) - \\
k_n^m (m \sin m\varphi \sin \varphi - \cos m\varphi \cos \varphi) + l_n^m (m \cos m\varphi \sin \varphi + \sin m\varphi \cos \varphi) - \\
(-p_n^m \cos m\varphi + q_n^m \sin m\varphi) m \operatorname{ctg} \theta] P_n^m(\cos \theta),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{T\varphi} = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[i_n^m \cos m\varphi \cos \varphi \left(\cos \theta P_n^m(\cos \theta) + \sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) + \right. \\
j_n^m \sin m\varphi \cos \varphi \left(\cos \theta P_n^m(\cos \theta) + \sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) + \\
k_n^m \cos m\varphi \sin \varphi \left(\cos \theta P_n^m(\cos \theta) + \sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) + \\
l_n^m \sin m\varphi \sin \varphi \left(\cos \theta P_n^m(\cos \theta) + \sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) + \\
\left. q_n^m \cos m\varphi \left(-\sin \theta P_n^m(\cos \theta) + \cos \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$p_n^m \sin m\varphi \left[-\sin \theta P_n^m(\cos \theta) + \cos \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right], \quad (191)$$

$$E_{p\theta} = \frac{1}{\sigma'_3 R_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[(\bar{i}_n^m - (n-3/2)i_n^m) \cos m\varphi \cos \varphi \left(\cos \theta P_n^m(\cos \theta) + \sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) + \right. \\ (\bar{j}_n^m - (n-3/2)j_n^m) \sin m\varphi \cos \varphi \left(\cos \theta P_n^m(\cos \theta) + \sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) + \\ (\bar{k}_n^m - (n-3/2)k_n^m) \cos m\varphi \sin \varphi \left(\cos \theta P_n^m(\cos \theta) + \sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) + \\ (\bar{l}_n^m - (n-3/2)l_n^m) \sin m\varphi \sin \varphi \left(\cos \theta P_n^m(\cos \theta) + \sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) + \\ (\bar{q}_n^m - (n-3/2)q_n^m) \cos m\varphi \left(-\sin \theta P_n^m(\cos \theta) + \cos \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) + \\ \left. (\bar{p}_n^m - (n-3/2)p_n^m) \sin m\varphi \left(-\sin \theta P_n^m(\cos \theta) + \cos \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) \right],$$

$$E_{p\varphi} = \frac{1}{\sigma'_3 R_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [-(\bar{i}_n^m - (n-3/2)i_n^m)(m \sin m\varphi \cos \varphi + \cos m\varphi \sin \varphi) + \\ (\bar{j}_n^m - (n-3/2)j_n^m)(m \cos m\varphi \cos \varphi - \sin m\varphi \sin \varphi) - \\ (\bar{k}_n^m - (n-3/2)k_n^m)(m \sin m\varphi \sin \varphi - \cos m\varphi \cos \varphi) + \\ (\bar{l}_n^m - (n-3/2)l_n^m)(m \cos m\varphi \sin \varphi + \sin m\varphi \cos \varphi) - \\ (\bar{q}_n^m - (n-3/2)q_n^m)m \sin m\varphi \operatorname{ctg} \theta + \\ (\bar{p}_n^m - (n-3/2)p_n^m)m \cos m\varphi \operatorname{ctg} \theta] P_n^m(\cos \theta),$$

$$E_{Pr} = \frac{1}{\sigma'_3 R_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [(\bar{i}_n^m + (n^2 - 9/4)i_n^m) \cos m\varphi \sin \theta \cos \varphi + \\ (\bar{j}_n^m + (n^2 - 9/4)j_n^m) \sin m\varphi \cos \varphi \sin \theta + \\ (\bar{k}_n^m + (n^2 - 9/4)k_n^m) \cos m\varphi \sin \varphi \sin \theta + \\ (\bar{l}_n^m + (n^2 - 9/4)l_n^m) \sin m\varphi \sin \varphi \sin \theta + \\ (\bar{q}_n^m + (n^2 - 9/4)q_n^m) \cos m\varphi \cos \theta + \\ (\bar{p}_n^m + (n^2 - 9/4)p_n^m) \sin m\varphi \cos \theta] P_n^m(\cos \theta).$$

Суммарное поле вариаций, наблюдаемое на поверхности шара, получается наложением полей магнитного и электрического типов. При осуществлении такого наложения необходимо учесть еще два немаловажных обстоятельства.

Первое состоит в том, что на практике (на станциях) H_θ компонента наблюдается с обратным знаком (измерительная установка обычно ориентируется на север) и значения напряженности в наблюдаемых компонентах заданы в нанотеслах (нТ).

Второе обстоятельство состоит в том, что напряженности электрических компонент измеряются в вольтах на метр (В/м), поэтому выше полученные для них формулы необходимо помножить на переводной коэффициент $10^{-2} / 4\pi$. Нужно также помнить, что все формулы здесь получены для одной временной гармоник. Наблюдаемое поле содержит таких временных гармоник бесконечное множество, поэтому перед сферическим анализом, для которого получены все формулы, проводится гармонический анализ Фурье, описание которого опускается ввиду его относительной простоты.

Итак, компоненты суммарного наблюдаемого поля глобальных электромагнитных вариаций на шаре имеют следующие разложения:

$$\begin{aligned}
 H_\theta = & - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [\bar{i}_n^m \cos m\varphi \sin \varphi + \bar{j}_n^m \sin m\varphi \sin \varphi - \bar{k}_n^m \cos m\varphi \cos \varphi - \bar{l}_n^m \sin m\varphi \cos \varphi - \\
 & i_n^m (m \sin m\varphi \cos \varphi + (n+1/2) \cos m\varphi \sin \varphi) + \\
 & j_n^m (m \cos m\varphi \cos \varphi - (n+1/2) \sin m\varphi \sin \varphi) + \\
 & k_n^m (m \sin m\varphi \sin \varphi - (n+1/2) \cos m\varphi \cos \varphi) + \\
 & l_n^m (m \cos m\varphi \sin \varphi + (n+1/2) \sin m\varphi \cos \varphi) + \\
 & (p_n^m \cos m\varphi - q_n^m \sin m\varphi) m \cot \theta] P_n^m(\cos \theta), \\
 H_\varphi = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [\bar{i}_n^m \cos m\varphi \cos \theta \cos \varphi + \bar{j}_n^m \sin m\varphi \cos \theta \cos \varphi + \bar{k}_n^m \cos m\varphi \cos \theta \sin \varphi \\
 & + \bar{l}_n^m \sin m\varphi \sin \theta \cos \varphi - \\
 & (\bar{p}_n^m \sin m\varphi + \bar{q}_n^m \cos m\varphi) \sin \theta] P_n^m(\cos \theta) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& i_n^m \left(\sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} + (n+1/2) \cos \theta P_n^m(\cos \theta) \right) \cos m\varphi \cos \varphi - \\
& j_n^m \left(\sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} + (n+1/2) \cos \theta P_n^m(\cos \theta) \right) \sin m\varphi \cos \varphi - \\
& k_n^m \left(\sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} + (n+1/2) \cos \theta P_n^m(\cos \theta) \right) \cos m\varphi \sin \varphi - \\
& l_n^m \left(\sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} + (n+1/2) \cos \theta P_n^m(\cos \theta) \right) \sin m\varphi \sin \varphi - \\
& p_n^m \left(\cos \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} - (n+1/2) \sin \theta P_n^m(\cos \theta) \right) \sin m\varphi - \\
& q_n^m \left(\cos \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} - (n+1/2) \sin \theta P_n^m(\cos \theta) \right) \cos m\varphi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_r = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n i_n^m \left(\cos m\varphi \sin \varphi \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} - m \sin m\varphi \cos \varphi \operatorname{ctg} \theta P_n^m(\cos \theta) \right) + \\
& j_n^m \left(\sin m\varphi \sin \varphi \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} + m \cos m\varphi \cos \varphi \operatorname{ctg} \theta P_n^m(\cos \theta) \right) - \\
& k_n^m \left(\cos m\varphi \cos \varphi \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} + m \sin m\varphi \sin \varphi \operatorname{ctg} \theta P_n^m(\cos \theta) \right) - \\
& l_n^m \left(\sin m\varphi \cos \varphi \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} - m \cos m\varphi \sin \varphi \operatorname{ctg} \theta P_n^m(\cos \theta) \right) - \\
& (p_n^m \cos m\varphi - q_n^m \sin m\varphi) m P_n^m(\cos \theta),
\end{aligned} \tag{192}$$

$$\begin{aligned}
E_\theta = & \frac{10^{-2}}{4\pi\sigma'_3 R_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[-i_n^m \left((\varrho^2 + n - 3/2) \cos \theta P_n^m(\cos \theta) + (n - 3/2) \sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) + \right. \\
& \left. \bar{i}_n^m \left(\cos \theta P_n^m(\cos \theta) + \sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) \right] \cos m\varphi \cos \varphi + \\
& \left[-j_n^m \left((\varrho^2 + n - 3/2) \cos \theta P_n^m(\cos \theta) + (n - 3/2) \sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) + \right. \\
& \left. \bar{j}_n^m \left(\cos \theta P_n^m(\cos \theta) + \sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) \right] \sin m\varphi \cos \varphi +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [-k_n^m \left((\alpha^2 + n - 3/2) \cos \theta P_n^m(\cos \theta) + (n - 3/2) \sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) + \\
& \bar{k}_n^m \left(\cos \theta P_n^m(\cos \theta) + \sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right)] \cos m\varphi \sin \varphi + \\
& \left[-l_n^m \left((\alpha^2 + n - 3/2) \cos \theta P_n^m(\cos \theta) + (n - 3/2) \sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) + \right. \\
& \left. \bar{l}_n^m \left(\cos \theta P_n^m(\cos \theta) + \sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) \right] \sin m\varphi \sin \varphi + \\
& \left[q_n^m \left((\alpha^2 + n - 3/2) \sin \theta P_n^m(\cos \theta) - (n - 3/2) \cos \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) + \right. \\
& \left. \bar{q}_n^m \left(-\sin \theta P_n^m(\cos \theta) + \cos \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) \right] \cos m\varphi + \\
& \left[p_n^m \left((\alpha^2 + n - 3/2) \sin \theta P_n^m(\cos \theta) - (n - 3/2) \cos \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) + \right. \\
& \left. \bar{p}_n^m \left(-\sin \theta P_n^m(\cos \theta) + \cos \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) \right] \sin m\varphi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_\varphi = \frac{10^{-2}}{4\pi\sigma'_3 R_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [& i_n^m ((n - 3/2)m \sin m\varphi \cos \varphi + (\alpha^2 + n - 3/2) \cos m\varphi \sin \varphi) + \\
& \bar{i}_n^m (m \sin m\varphi \cos \varphi + \cos m\varphi \sin \varphi) + \\
& \bar{j}_n^m (m \cos m\varphi \cos \varphi - \sin m\varphi \sin \varphi) + \\
& j_n^m (-(n - 3/2)m \cos m\varphi \cos \varphi + (\alpha^2 + n - 3/2) \sin m\varphi \sin \varphi) - \\
& \bar{k}_n^m (m \sin m\varphi \sin \varphi - \cos m\varphi \cos \varphi) - \\
& k_n^m (-(n - 3/2)m \sin m\varphi \sin \varphi + (\alpha^2 + n - 3/2) \cos m\varphi \cos \varphi) + \\
& \bar{l}_n^m (m \cos m\varphi \sin \varphi + \sin m\varphi \cos \varphi) - \\
& l_n^m ((n - 3/2)m \cos m\varphi \sin \varphi + (\alpha^2 + n - 3/2) \sin m\varphi \cos \varphi) - \\
& (\bar{q}_n^m - (n - 3/2)q_n^m)m \sin m\varphi \cos \theta + \\
& (\bar{p}_n^m - (n - 3/2)p_n^m)m \cos m\varphi \sin \theta] P_n^m(\cos \theta),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_r = \frac{10^{-2}}{4\pi\sigma'R_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [(\bar{i}_n^m + (n^2 - 9/4)i_n^m) \cos m\varphi \sin \theta \cos \varphi + \\
(\bar{j}_n^m + (n^2 - 9/4)j_n^m) \sin m\varphi \cos \varphi \sin \theta + \\
(\bar{k}_n^m + (n^2 - 9/4)k_n^m) \cos m\varphi \sin \varphi \sin \theta + \\
(\bar{l}_n^m + (n^2 - 9/4)l_n^m) \sin m\varphi \sin \varphi \sin \theta + \\
(\bar{q}_n^m + (n^2 - 9/4)q_n^m) \cos m\varphi \cos \theta + \\
(\bar{p}_n^m + (n^2 - 9/4)p_n^m) \sin m\varphi \cos \theta] P_n^m(\cos \theta).
\end{aligned}$$

Анализ данных разложений показывает, что все компоненты наблюдаемого электромагнитного поля пронизывает один и тот же набор неизвестных постоянных. На мировой сети станций обычно измеряют три магнитные компоненты, а на некоторых тороидальные электрические. Поэтому в сферический анализ необходимо включить всю имеющуюся в наличии наблюдаемую информацию о компонентах поля. В этом случае можно существенно сгладить влияние случайных ошибок измерения при обращении основной матрицы.

Из (192) следует, что электрические компоненты поля глобальных электромагнитных вариаций можно и не измерять. Их можно вычислить по результатам сферического анализа лишь магнитных компонент. Это существенно, так как практика измерений нацелена на регистрацию только магнитных компонент.

Согласно (192) вертикальная электрическая компонента поля на поверхности Земли потенциальна. Ее индукционная часть скомпенсирована потенциальной. Анализ (189) и (192) позволяет сформулировать следующую теорему для переменного электромагнитного поля:

Теорема 12.

Полное разделение наблюдаемых электромагнитных полей на тороидальные и полоидальные, а также на внешние и внутренние поля в них,

разрешима единственным образом при известной вертикальной и одной из горизонтальных компонент магнитного поля.

Алгоритм решения полной задачи разделения состоит в следующем. По измеренным на мировой сети магнитным компонентам поля вариаций методом сферического анализа вычисляется некоторое количество (до заданного верхнего предела суммирования n в (192)) коэффициентов с чертой и без черты. Затем с помощью этих коэффициентов по (192) производится синтез суммарного поля. Если в каждой точке синтез поля мало отличается от наблюдаемого (на заданную ε), то получившееся при анализе количество названных коэффициентов считается достаточным для представления наблюдаемого поля на сфере.

Затем решают уравнения (189) и по получившимся коэффициентам синтезируют тороидальные и полоидальные компоненты внешнего и внутреннего полей. H_p и H_T можно вычислить по формулам (190) и (191) и в суммарном поле по тем же коэффициентам с чертой и без черты, которые получаются методом сферического анализа.

Метод сферического анализа данных наблюдений по К.Ф. Гауссу-А. Шмидту является приближенным для вычисления коэффициентов. Степень приближения зависит от обрывания бесконечных сумм разложений (192) на некотором наперед заданном номере n . Величина возможного для обрыва номера n зависит от количества имеющихся точек наблюдения на поверхности шара. Чем их больше, тем до больших n можно разложить поле. Достаточность для интерполяции поля выбранного номера n определяется методом сопоставления наблюдаемого поля и его синтеза.

§19. Алгоритм восстановления переменных тороидальных электрических токов на сфере, возбуждающих несиловые электромагнитные поля.

Моделирование источников геоэлектромагнитных вариаций осуществляется по результатам сферического анализа их поля, наблюдаемого

на сферической поверхности шара (в первом приближении Земля считается сферической). Полное разделение полей вариаций при этом способствует решению проблемы моделирования, обеспечивая выделение поля внешнего происхождения в обеих модификациях. В теории токовых систем достаточно давно был введен принцип моделирования эквивалентных источников, в основу которого был положен переход от магнитного поля внешних источников к двойному слою зарядов, мощность которого отождествлялась с силой эквивалентного тока. Контуры равной силы тока образуют токовую систему, эквивалентную существующей в природе. Исследованию эквивалентных токовых систем посвящены многочисленные научные работы.

Однако, в связи с существованием тороидального магнитного поля необходимо решить несколько новых проблем.

Первая состоит в разработке физических основ способа построения токовой системы, адекватной наблюдаемому полю. Путь к этому лежит через разделение двух модификаций поля (тороидального и полоидального) и разработку физически обоснованного способа перехода от наблюдаемого поля к его источнику.

Вторая проблема состоит в выводе всех необходимых для этого формул, пригодных для численного расчета.

Третья в применении теории к конкретному материалу наблюдений и выявлении новых особенностей источников, существование которых предопределяется существованием ранее неучтенного в теории тороидального поля.

При моделировании источников полоидального магнитного поля необходимо исходить из нескольких допущений.

Во-первых, Землю считаем шарообразной, электрические токи, генерирующие тороидальное и полоидальное магнитные поля, считаем сосредоточенными в тонком E слое ионосферы, отстоящем от поверхности Земли на высоту $h = 120$ км.

Во-вторых, из физических соображений и того факта, что тороидальное поле заранее исключено, следует, что тонкий слой – носитель токовой системы – сферически симметричен Земле. В противном случае возникло бы тороидальное поле, которое заранее исключено. При этом естественно предполагается, что взаимодействие токов произошло до разделения полей, так что полоидальное поле отражает окончательную картину в распределении тока в источнике.

Следующее важное допущение состоит в том, что поверхность – носитель тока – предполагается бесконечно тонкой, выше и ниже все пространство заполнено воздухом с проводимостью σ' или пусто $\sigma' = 0$.

В том случае, когда ток сосредоточен на тонкой поверхности, касательные к ней компоненты магнитного поля удовлетворяют на этой поверхности граничному условию следующего вида:

$$\mathbf{j}(p) = [n, (\mathbf{H}^+(p) - \mathbf{H}^-(p))]. \quad (193)$$

Здесь $\mathbf{H}^+(p)$ – магнитное поле в точке p над слоем с током, $\mathbf{H}^-(p)$ – магнитное поле в точке p под слоем с током, $\mathbf{j}(p)$ – поверхностный ток, n – внешняя нормаль. В оговоренной выше постановке свойства среды выше и ниже слоя с током считаются одинаковыми, поэтому компоненты магнитного поля будут отличаться лишь знаком. Коэффициенты разложений поля под слоем и над ним совпадают на слое. Для того, чтобы убедиться в этом, рассмотрим простейший пример. Пусть выше и ниже слоя проводимость равна нулю $\sigma' = 0$, тогда можно применить упрощенные разложения для полоидального поля. Коэффициенты этих упрощенных разложений выражаются через интегралы. С внешней стороны поверхности возьмем для примера один коэффициент:

$$\alpha_n^m = \frac{\bar{c}_n^m}{4\pi\tilde{R}^{n+2}} \int_W r'^n j_{x'}^{CT}(x', y', z') \cos m\varphi' P_n^m(\cos\theta') dw', \quad (194)$$

где W – слой над Землей, \tilde{R} – расстояние от центра Земли до слоя W . С внутренней стороны слоя соответствующий коэффициент будет иметь вид

$$a_n^m = \frac{\bar{c}_n^m \tilde{R}^{n-1}}{4\pi} \int_W \frac{1}{r'^{m+1}} j_{x'}^{CT}(x', y', z') \cos m\varphi' P_n^m(\cos \theta') dw'. \quad (195)$$

Здесь r' – текущий радиус. Если толщину слоя устремить к нулю, то радиусы преобразуются следующим образом:

$$\tilde{R} = R_0 + h; \quad r' = R_0 + h, \quad (196)$$

где R_0 – радиус шара, h – высота до поверхности с током от поверхности Земли.

В интегралах (194) и (195) при этом объемный ток нужно заменить поверхностным. Объемное интегрирование необходимо заменить на поверхностное. В результате получим:

$$\begin{aligned} a_n^m &= \frac{\bar{c}_n^m}{4\pi(R_0 + h)^2} \int_{\Sigma} j_{x'}^{CT}(x', y', z') \cos m\varphi' P_n^m(\cos \theta') ds', \\ a_n^m &= \frac{\bar{c}_n^m}{4\pi(R_0 + h)^2} \int_{\Sigma} j_{x'}^{CT}(x', y', z') \cos m\varphi' P_n^m(\cos \theta') ds', \end{aligned} \quad (197)$$

где Σ – поверхность с током, ds' – элемент поверхности.

Нетрудно видеть, что в (197) коэффициенты по разные стороны бесконечно тонкой поверхности с током описываются одними и теми же выражениями. Аналогичные операции можно проделать и с остальными коэффициентами и убедиться, что они так же совпадают, т. е. действительно при переходе тонкого слоя с электрическим током касательные компоненты меняют лишь знак, коэффициенты по обе стороны слоя с током совпадают. Таким образом, при конструировании формул для плотности поверхностного тока можно воспользоваться разложениями поля ниже поверхности с током.

С внешней стороны поверхности с током касательные компоненты будут иметь вид:

$$\begin{aligned} H_{P\theta}^+ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [(a_n^m \cos m\varphi + b_n^m \sin m\varphi) \sin \varphi - (c_n^m \cos m\varphi + d_n^m \sin m\varphi) \cos \varphi] P_n^m(\cos \theta) \times \\ &\quad \left(- \frac{n-1/2}{R_0 + h} I_{n+1/2}(\alpha \frac{R_0 + h}{R_0}) + \frac{\alpha}{R_0} I_{n-1/2}(\alpha \frac{R_0 + h}{R_0}) \right), \end{aligned} \quad (198)$$

$$H_{P\varphi}^+ = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [(a_n^m \cos m\varphi + b_n^m \sin m\varphi) \cos \theta \cos \varphi + (c_n^m \cos m\varphi + d_n^m \sin m\varphi) \cos \theta \sin \varphi -$$

$$(e_n^m \cos m\varphi + f_n^m \sin m\varphi) \sin \theta] P_n^m(\cos \theta) \left(-\frac{n-1/2}{R_0+h} I_{n+1/2}(\alpha \frac{R_0+h}{R_0}) + \frac{\alpha}{R_0} I_{n-1/2}(\alpha \frac{R_0+h}{R_0}) \right),$$

С внутренней стороны поверхности с электрическим током выражения для касательных компонент магнитного поля записываются так:

$$H_{P\theta}^- = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [(a_n^m \cos m\varphi + b_n^m \sin m\varphi) \sin \varphi - (c_n^m \cos m\varphi + d_n^m \sin m\varphi) \cos \varphi] P_n^m(\cos \theta) \times \left(-\frac{n-1/2}{R_0+h} I_{n+1/2}(\alpha \frac{R_0+h}{R_0}) + \frac{\alpha}{R_0} I_{n-1/2}(\alpha \frac{R_0+h}{R_0}) \right), \quad (199)$$

$$H_{P\varphi}^- = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [(a_n^m \cos m\varphi + b_n^m \sin m\varphi) \cos \theta \cos \varphi + (c_n^m \cos m\varphi + d_n^m \sin m\varphi) \cos \theta \sin \varphi - (e_n^m \cos m\varphi + f_n^m \sin m\varphi) \sin \theta] P_n^m(\cos \theta) \left(-\frac{n-1/2}{R_0+h} I_{n+1/2}(\alpha \frac{R_0+h}{R_0}) + \frac{\alpha}{R_0} I_{n-1/2}(\alpha \frac{R_0+h}{R_0}) \right).$$

Теперь выражения (198) и (199) необходимо подставить в формулу (193).

При этом ее удобнее расписать на компоненты:

$$j_{\theta}^{\Pi} = H_{P\varphi}^+ - H_{P\varphi}^-; \quad j_{\varphi}^{\Pi} = H_{P\theta}^+ - H_{P\theta}^-. \quad (200)$$

Для радиальной функции можно ввести обозначение

$$\psi_n(\alpha, h) = \left(-\frac{n-1/2}{R_0+h} I_{n+1/2}(\alpha \frac{R_0+h}{R_0}) + \frac{\alpha}{R_0} I_{n-1/2}(\alpha \frac{R_0+h}{R_0}) \right) \quad (201)$$

В окончательные формулы для расчета необходимо ввести множитель $10^{-2}/4\pi$, переводящий значения коэффициентов, полученные в нТ, в А/м. Поскольку требуется изучать поведение токовых систем во времени, то здесь удобно восстановить зависимость плотности тока от времени, всюду опущенную ранее. С учетом всего выше изложенного компоненты электрического тока на бесконечно тонкой поверхности, отстоящей от шара на высоту h , будут иметь вид:

$$j_{\theta}^{\Pi} = \frac{-10^{-2}}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [(a_n^m \cos m\varphi + b_n^m \sin m\varphi) \cos \theta \cos \varphi + (c_n^m \cos m\varphi + d_n^m \sin m\varphi) \cos \theta \sin \varphi -$$

$$(e_n^m \cos m\varphi + f_n^m \sin m\varphi) \sin \theta]_k \psi_n(\alpha, h) P_n^m(\cos \theta) e^{i\omega k t},$$

$$j_{\varphi}^{\Pi} = \frac{10^{-2}}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [(a_n^m \cos m\varphi + b_n^m \sin m\varphi) \sin \varphi - (c_n^m \cos m\varphi + d_n^m \sin m\varphi) \cos \varphi]_k P_n^m(\cos \theta) \psi_n(\alpha, h) e^{ik\alpha t}. \quad (202)$$

Компоненты поверхностной плотности тока в (202) имеют размерность в А/м и позволяют построить распределение векторов плотности тока на заданной поверхности. Совокупность таких векторов, построенных на заданный момент мирового времени, представляет собой токовую систему, создающую полоидальное поле. Токовая система, построенная по полоидальному полю, будет заведомо бездивергентной, так как тороидальное поле исключено заранее. Выбор мирового времени для целей построения токовых систем объясняется доказанным на практике [3] синхронным изменением вариаций в едином мировом времени. Адекватность источника наблюдаемому полю здесь гарантирована формулой (200), так как электрический ток вычисляется непосредственно по компонентам поля без каких-либо преобразований.

Пакет прикладных программ, разработанный нами, имеет программы расчета токовых систем по полоидальному полю. На рис.3 представлена токовая система поля S_q вариаций к 1958/59 гг. Эта система получена к 6 часам мирового времени.

Характерны следующие детали. На дневной стороне присутствуют известные контуры тока, южный с вращением по часовой стрелке, северный – против. Разделены контуры электрическим током восточного направления, который течет в районе экватора и соответствует известному электроджету. Линия, соединяющая центры вихрей на дневной стороне, тяготеет к направлению силовых линий Главного геомагнитного поля. Этот факт ранее не отмечался. Ночная сторона имеет аналогичные дневной северный и южный вихри, но противоположного направления вращения и разделенные током западного направления. Линия, соединяющая центры ночных вихрей, также

близка к направлению силовых линий Главного геомагнитного поля. Важным результатом является то, что ночные вихри с течением мировых суток могут смещаться ближе к утренней или вечерней сторонам. Столь симметричная картина токовых вихрей поля магнитного типа ранее не отмечалась. С нашей точки зрения, она больше всего соответствует физике источников и адекватна наблюдаемому полю.

Таким образом, предложенный способ построения модели источника полоидального поля позволил выявить достаточно простую морфологическую структуру источника солнечно-суточных вариаций. Токовая система S_q вариаций представляет собой совокупность из двух симметричных на дневной и ночной сторонах (или на утренней и вечерней) и противоположно вращающихся систем токов, разделенных электроджетами соответственно восточного и западного направлений. Никаких других контуров, кроме названных, источник S_q вариаций не имеет. Симметричная картина расположения токовых вихрей соответствует морфологии суточных ходов S_q вариаций, наблюдаемых на земной поверхности, и согласуется с электродинамикой явления.

Далее в экваториальной области за счет анализа невидимой части вертикального электрического поля выявлены электроджеты с вертикальными втеканиями на утренней и вечерней сторонах суток. Ясно, что эти вертикальные токи могут быть только в пределах ионосферы, где есть горизонтальная и вертикальная проводимости. Тем не менее факт наличия втеканий хорошо прослеживается по аномальному поведению в утренние и вечерние часы индукционной части вертикального электрического поля (см. рис. 3), восстановленного по результатам сферического анализа магнитных компонент солнечно-суточных вариаций. Совокупный анализ всех новых фактов, возникающих после разделения тороидального и полоидального полей в S_q вариациях и в каждой из них на поля внешних и внутренних источников, позволил автору предложить свою модель источника S_q

вариаций, которая, как нам кажется, существенно дополняет известную классическую модель токов S_q вариаций в ионосфере (рис. 6).

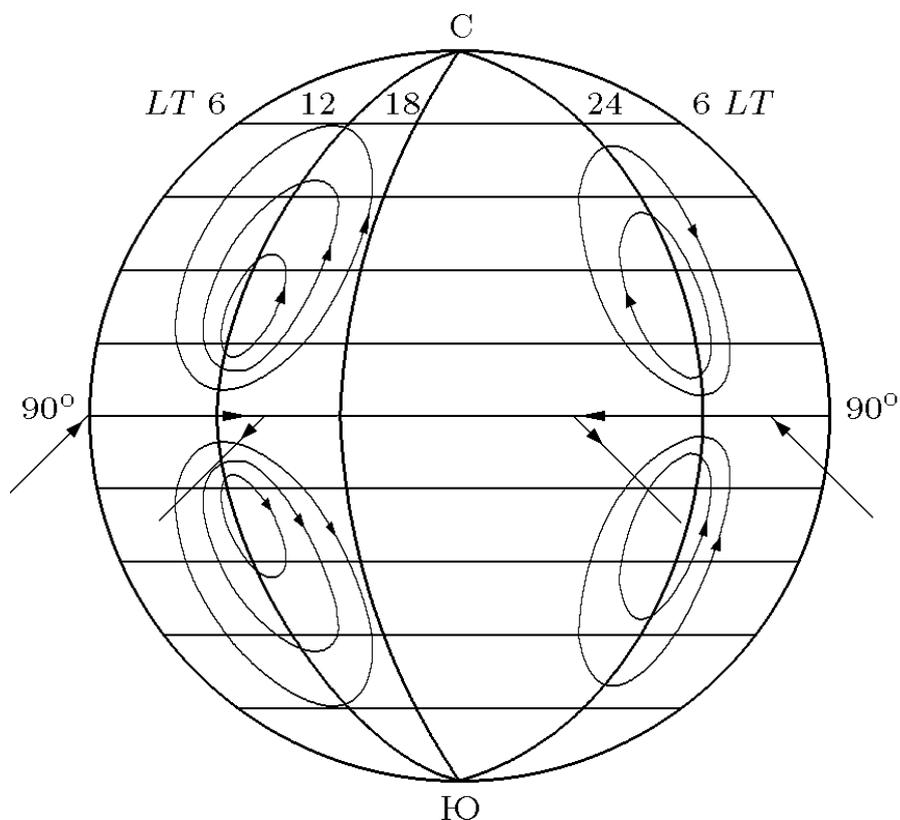


Рис. 6. Внешний источник S_q вариаций, смоделированный по тороидальным несилковым и полоидальным силковым полям к МГГ-1957/58 (LT – местное время в часах).

Генерация такой токовой системы S_q вариаций, какая приведена на рис. 6, по-видимому, должна зависеть от ветров на высоте E слоя ионосферы, дрейфа плазмы в ней на экваторе днем на запад, ночью на восток (ток течет в обратном направлении), стационарной конвекции в нижней магнитосфере. Степень вклада того или другого механизма в создании регулярных S_q токов еще должна быть выявлена. Механизм появления вертикального тока на экваторе на утренней и вечерней сторонах суток, который сам по себе чрезвычайно интересен, представляется совершенно неясным. Тем не менее, факт появления вертикальных втеканий на экваторе нам кажется бесспорным.

Таким образом, исследование источника только S_q вариаций, позволило получить ряд новых интересных фактов. Аналогичные по интересу факты могут быть выявлены в источниках всех других типов вариаций, необходимо только применить к их исследованию разложения (192), в которых учтены все известные на сегодня электродинамические сведения о глобальном электромагнитном поле вариаций.

§20. Алгоритм расчёта электродинамических параметров источника несилового магнитного поля в ядре Земли.

В параграфе 11, посвященном природным источникам несилового магнитного поля на Земле, приведён расчёт расстояния до источника Главного геомагнитного поля (ГГП) и его основные электродинамические параметры. В данном параграфе приводится алгоритм расчёта этих электродинамических параметров.

Расчёт напряжённости тороидального и полоидального магнитных полей Земли в зоне F жидкого ядра начинается с констатации вычисленного ранее в параграфе 11 значения радиуса источника тока, равное 1437 км.

Вычислить значение магнитного момента тороидального магнитного поля на этом радиусе и на радиусе 1371 км (радиус 1371 км приводится в научной литературе) можно по формуле:

$$H_{TF} \cdot R_F^3 = M_{TF}, \quad (203)$$

где H_{TF} – напряженность тороидального магнитного поля в зоне F , M_{TF} – магнитный момент, R_F – радиус зоны F .

На поверхности Земли магнитный момент тороидального поля вычисляется по формуле:

$$H_T \cdot R_0^3 = M_T. \quad (204)$$

Поскольку магнитный момент ГГП постоянен, то сравнивая (203) и (204), можно определить соотношение магнитных полей в зоне F по отношению к магнитному полю на поверхности:

$$|\mathbf{H}_{TF}| = |\mathbf{H}_T| \left(\frac{R_0}{R_F}\right)^3 = |\mathbf{H}_T| \left(\frac{6371}{1437}\right)^3 \approx |\mathbf{H}_T| \cdot 90 \Big|_{r=1437}, \quad (205)$$

$$|\mathbf{H}_{TF}| = |\mathbf{H}_T| \left(\frac{6371}{1371}\right)^3 = |\mathbf{H}_T| \cdot 100 \Big|_{r=1371}.$$

Таким образом, тороидальное поле в зоне F жидкого ядра, при известном из научной литературы его радиусе, в 100 раз больше значений напряженности на поверхности Земли и в 90 раз больше на глубине, вычисленного здесь расстояния до источника.

Абсолютное значение напряженности тороидального поля в источнике радиусом 1437 км с учетом формулы (205) равно:

$$|\mathbf{H}_T| = |\mathbf{H}_P| \cdot 0,06 = 3,1 \text{ Гс},$$

на радиусе 1371 км получим:

$$|\mathbf{H}_T| = |\mathbf{H}_P| \cdot 0,06 = 3,6 \text{ Гс}. \quad (206)$$

Можно полагать, что в зоне F жидкого ядра напряженность тороидального магнитного поля Земли не превышает 3-4 Гс.

Напряженность полоидального магнитного поля, рассчитанная по такой же методике сравнения магнитных моментов на поверхности Земли и в зоне F ядра, дает следующие величины:

$$|\mathbf{H}_P| \Big|_{1371} = 60 \text{ Гс}, \quad |\mathbf{H}_P| \Big|_{1437} = 52,3 \text{ Гс}. \quad (207)$$

Эти значения \mathbf{H}_P и \mathbf{H}_T магнитных полей на глубине будут в дальнейшем использованы при расчете параметров электрического тока – источника ГПП.

Как выяснено в параграфе 11, тороидальное магнитное поле присутствует в атмосфере Земли. Сферический анализ наблюдаемого на

поверхности Земли ГГП и отделение тороидального магнитного поля от полоидального дает только 0,035 Гс для $|H_r|$ на поверхности Земли. Используя свойство непрерывности магнитного поля, его удалось вычислить в источнике: формулы (205, 206). Там его напряженность не превосходит 3-4 Гс. Тем не менее, слабое тороидальное поле присутствует на поверхности Земли и в ядре Земли, поэтому его природу необходимо выяснить. Автор в [10] показал, что для создания такого тороидального магнитного поля в атмосфере Земли, достаточно сферичности источника, представляющего собой электрический ток. Уравнение для полного тока в источнике известно:

$$-j^{\Pi} = \nabla \nabla \cdot A - \nabla \times \nabla \times A. \quad (208)$$

Компоненты векторного потенциала A , согласно (31) и (32), выражаются через скалярную функцию Q следующим образом:

$$A_{\theta} = \frac{\partial Q}{\sin \theta \partial \varphi}; \quad A_{\varphi} = -\frac{\partial Q}{\partial \theta}; \quad A_r = rQ. \quad (209)$$

Здесь r, θ, φ – сферические координаты. Компоненты тороидального поля, по определению из (32), имеют вид:

$$H_{r\theta} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Q}{\partial \varphi}; \quad H_{r\varphi} = -\frac{\partial Q}{\partial \theta}; \quad H_{rr} \equiv 0. \quad (210)$$

Если спроектировать уравнение для полного тока на оси сферической системы координат, закрепленной в центре Земли, то можно получить следующие проекции компонент электрического тока, в том числе и в источнике:

$$\begin{aligned}
-j_{\theta}^{\Pi} &= \frac{\partial^2 A_{\theta}}{\partial r^2} + \frac{2\partial A_{\theta}}{r\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 A_{\theta}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_{\theta}}{\partial \theta^2} - \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_{\theta}}{\partial \theta} - \frac{A_{\theta}}{r^2 \sin^2 \theta} - \\
&- 2 \frac{\cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2\partial A_r}{r^2 \partial \theta};
\end{aligned}
\tag{211}$$

$$\begin{aligned}
-j_{\varphi}^{\Pi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 A_{\varphi}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r A_{\varphi}}{\partial r^2} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_{\theta}}{\partial \varphi} - \\
&- \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta A_{\varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_{\varphi}}{\partial \theta \partial \varphi} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}.
\end{aligned}$$

Здесь выражения:

$$\frac{2\partial A_r}{r^2 \sin \theta \partial \varphi} = \frac{2}{r \sin \theta} \frac{\partial Q}{\partial \varphi} = \frac{2}{r} H_{r\theta}; \quad \frac{2\partial A_r}{r^2 \partial \theta} = \frac{2}{r} \frac{\partial Q}{\partial \theta} = -\frac{2}{r} H_{r\varphi},$$

с учетом формул (209 и 210) есть, как раз, удвоенные компоненты тороидального магнитного поля, отнесенные к текущему радиусу, что дает им размерность плотности тока. Таким образом, сферический электрический ток своими сферическими компонентами всегда «порождает» тороидальное магнитное поле, которое появляется на поверхности Земли, согласно граничным условиям из (35), и измеряется на Мировой сети магнитных обсерваторий магнитометрами, фиксирующими непосредственно напряженность наблюдаемого ГГП. В монографии [10] доказано наличие и H_r , и H_T в ГГП эпохи 1964 г. Отсюда следует однозначный вывод о том, что ГГП вызывается сферическим электрическим током, полоидальное и тороидальное магнитные поля возбуждаются этим током, присутствуют в атмосфере и содержатся в измеренных его значениях, в том числе и в данных, получаемых Мировой сетью магнитных обсерваторий и любых других магнитометрических измерениях, за исключением магниторазведки, в которой источником магнитного поля являются магнитные массы.

Вращение Земли естественно приводит к вращению заряженных частиц при их наличии в жидкой части ядра, а именно в зоне F ядра. Для оценки скорости вращения заряженных частиц в жидком ядре в [10] использованы оценки по паре уравнений:

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \text{grad}) \mathbf{U} + 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{U}) \right] &= \nu \rho \Delta \mathbf{U} + \text{grad} P' + [\mathbf{j} \times \mathbf{B}] + \mathbf{f}, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= (\mathbf{B} \text{grad}) \mathbf{U} - (\mathbf{U} \text{grad}) \mathbf{B} - \eta \Delta \mathbf{B}, \end{aligned} \quad (212)$$

где \mathbf{U} – линейная скорость потока, \mathbf{B} – магнитная индукция, \mathbf{j} – плотность тока, ρ – плотность вещества, P' – давление за вычетом гидростатического давления, ν, η – кинематическая и магнитная вязкости соответственно, $\boldsymbol{\omega}$ – вектор скорости углового вращения. Опуская громоздкие промежуточные выкладки, приведенные в [10], запишем окончательную формулу для компонент линейной скорости потока:

$$\begin{aligned} U_{\varphi}^{1,2} &= \pm \left[\left(\frac{P'}{\rho} - gh \right) \frac{H_{\varphi}}{|\mathbf{H}|} \right]^{1/2} \mp 2L\omega_{\varphi}, \\ U_r^1 &\approx -\frac{P'}{2L\rho\omega_{\varphi}} + 2L\omega_{\varphi}, \quad U_{\theta}^1 \approx \frac{P'}{2L\rho\omega_{\varphi}} - 2L\omega_{\varphi}. \end{aligned} \quad (213)$$

Если подставить в формулы (213) значения известных параметров для жидкого ядра и зоны F равные:

$$\begin{aligned} P &= 2,445 \cdot 10^{12} \frac{\Gamma}{\text{см} \times \text{с}^2}, \quad g = 226 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}, \quad \rho = 11,4 \frac{\Gamma}{\text{см}^3}, \quad h = 4,9 \cdot 10^8 \text{ см}, \\ L &= 2,9 \cdot 10^8 \text{ см}, \quad \nu = 10^3 \frac{\text{М}^2}{\text{с}}, \quad \omega_{\varphi} = 7,3 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{с}}, \quad T = 1,8 \cdot 10^{15} \text{ с}, \quad \eta = 2,6 \frac{\text{М}^2}{\text{с}}, \\ \frac{H_{\varphi}}{|\mathbf{H}|} &= 0,0216, \quad \frac{H_r}{|\mathbf{H}|} = 0,8, \quad \frac{H_{\theta}}{|\mathbf{H}|} = 0,5, \end{aligned}$$

то числовая оценка для компонент абсолютной линейной скорости потока принимает значения:

$$U_{\varphi} \approx 50 \frac{\text{М}}{\text{с}}, \quad U_r, U_{\varphi} \approx 10^{-4} \frac{\text{М}}{\text{с}}. \quad (214)$$

Эти значения явно подчеркивают следящее за вращением движение потока. Две другие компоненты в (214) «подавляются» вращением. Угловая скорость вращения вычисляется по известной формуле и составляет:

$$\omega_{U_{\varphi}} = \frac{U_{\varphi}}{R_F} = 3,4 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{с}}. \quad (215)$$

Эта угловая скорость потока несколько меньше угловой скорости вращения Земли равной $\omega_{\varphi} = 7,3 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{с}}$. Это важнейшее обстоятельство позволяет, согласно принципу относительности, существовать электрическому полю в потоке. Наблюдатель, жестко связанный с равномерно вращающейся Землей, не «видит» электрического поля потока, если вращение потока совпадает с вращением Земли. Необходимо опережение или запаздывание потока. В нашем примере в наличии явное запаздывание, что обеспечивает наличие электрического поля в потоке. А это напрямую подтверждает наличие электрического тока в зоне F жидкого ядра Земли, электродинамические параметры которого вычислим позже.

Исследование природы и напряженности тороидального магнитного поля в жидком ядре, точнее в зоне F ядра, где расположен источник ГГП, в явном виде продемонстрировало, что это поле вызвано сферичностью источника – электрического тока. Поэтому возникает вопрос о способе возникновения электрического тока в зоне F жидкого ядра. Ясно, что это поток заряженных частиц, скорее всего, судя по направлению силовых линий ГГП, электронов, увлекаемых вращением Земли с запада на восток. Магнитное поле имеет привычные северный и южный полюса.

Ясно, что должно быть некое внешнее магнитное поле, которое обеспечило «затравку» в момент возникновения, например, индукционного электрического тока.

Чтобы вычислить величину первоначального внешнего поля, необходимо знать числа Рейнольдса: кинематическое и магнитное [10]. Кинематическое число Рейнольдса для жидкого ядра выбирается на уровне 100-150 ед., исходя из того, что эти значения определяют границу между ламинарностью и турбулентностью потока в жидком ядре [26]. Приведенные здесь магнитные числа Рейнольдса $10^3 \div 10^5$ ед. не запрещают возникновению турбулентности возможно в локальных температурных аномалиях на фоне общего ламинарного потока заряженных частиц. Такое допущение, вообще говоря, является неким компромиссом между ламинарностью потока и локальной турбулентностью, возможно имеющей место, что отражает наблюдаемые в ГПП вековые аномалии. Как бы то ни было, кинематическое число Рейнольдса позволяет оценить мощность – ширину потока заряженных частиц, исходя из соотношения:

$$R_e = \frac{U_\varphi \cdot l}{\nu}; \quad l = 150 \cdot 10^3 / 50 = 3 \cdot 10^3 \quad \text{м}, \quad (216)$$

где ν – кинематическая вязкость из (213).

Столь малая мощность потока, равная трем километрам, вызвана относительно небольшой кинематической вязкостью, которая существенно сужает поток, несмотря на относительно большое кинематическое число Рейнольдса, которое, в свою очередь, приводит к «уширению» мощности потока. Взаимодействие противоположных тенденций стабилизирует поток, что приводит к устойчивому его существованию, подтверждаемому стабильностью ГПП.

Известная мощность (ширина) потока заряженных частиц позволяет оценить магнитное число Рейнольдса Re_m по формуле:

$$Re_m = l \cdot \sigma_F \cdot \mu_0 \cdot U_\varphi = 3 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^5 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 50 = 9,42 \cdot 10^4, \quad (217)$$

где σ_F – удельная проводимость в зоне F ядра.

Столь большое магнитное число Рейнольдса позволяет пренебречь омическими потерями. В этом случае индукционное возбуждение будет

определяться лишь реактивной составляющей. Тогда начальное магнитное поле «затравку» можно вычислить, исходя из формулы:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \cdot \text{Re}_m; \quad |\mathbf{H}_0| = \frac{|\mathbf{H}|}{R_m} = \frac{60}{9,42 \cdot 10^4} = 6,37 \cdot 10^{-4} \text{ Гс},$$

$$|\mathbf{H}_0| \approx 64 \text{ нТ}. \quad (218)$$

Столь малое по напряженности затравочное поле для индукции вполне могло существовать на заре возникновения ГПП, с одной стороны, и оно же поддерживает ГПП сейчас в связи с воздействием постоянной составляющей магнитного поля Солнца через «солнечный ветер», – с другой. Пока есть Солнце, будет существовать и ГПП. Его устойчивость по отношению к внешним и внутренним воздействиям задается формулой (213). Устойчивость достигается за счет обратной пропорциональности между скоростью потока и напряженностью магнитного поля. Размагничивание ведет к возрастанию скорости потока, усиление магнитного поля ведет к падению скорости потока, которая затем выравняется стабильным вращением Земли. Стабильное вращение Земли – залог стабильности ГПП в целом. Фокусировка земных полюсов осуществляется слабым тороидальным магнитным полем, согласно формуле:

$$[\mathbf{H}_T \times \mathbf{H}_P] = H_{Pr} H_{T\varphi} e_\theta - H_{Pr} H_{T\theta} e_\varphi + (H_{T\theta} H_{P\varphi} - H_{T\varphi} H_{P\theta}) e_r \quad (219)$$

Максимальные значения полоидального поля в полюсах усиливаются компонентами тороидального магнитного поля, «наворачивающегося» на силовые линии полоидального поля, согласно формуле (8). Это и приводит к фокусирующему эффекту ГПП в полюсах. В данной модели источника ГПП смена полярности в ГПП, о которой так много пишут геологи, может произойти только за счет изменения направления вращения Земли на обратное, с одной стороны, и ликвидации по каким-либо причинам фокусировки полюсов ГПП, – с другой. Такие события для Земли, как планеты, маловероятны.

Чтобы оценить, исходя из полученных данных, электродинамические параметры источника, необходимо предварительно оценить геометрические параметры потока, а именно его площадь поперечного сечения и занимаемый им объем. Исходя из того факта, что источник генерирует измеряемое на всей поверхности Земли тороидальное магнитное поле, будем считать, что источник распределен в сферическом слое от полюса до полюса «толщиной» в три километра (216). Тогда площадь поперечного сечения полуслоя будет равна:

$$S_F = \frac{\pi}{2} (R_2^2 - R_1^2) = 13,5 \cdot 10^9 \quad \text{м}^2, \quad (220)$$

где $R_2 = 1,437 \cdot 10^6 \text{ м}$; $R_1 = 1,434 \cdot 10^6 \text{ м}$.

Объем слоя в кубических метрах будет равен:

$$V_F = \frac{4}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3) = 7,8 \cdot 10^{16} \quad \text{м}^3. \quad (221)$$

Исходя из равенства магнитных моментов, выраженных через магнитное поле и через силу тока по формуле:

$$|H_F| \cdot R_F^3 = S_F \cdot I \quad (\text{Ам}^2),$$

можно вычислить силу тока в источнике. Она равна:

$$I = \frac{|H_F| \cdot R_F^3}{S_F} = \frac{60 \cdot 4\pi \cdot 10^{-3} \cdot (1,437)^3 \cdot 10^{18}}{13,5 \cdot 10^9} = 1,66 \cdot 10^8 \quad \text{А}. \quad (222)$$

Сила тока в источнике, таким образом, порядка 166 миллионов ампер.

Плотность тока в источнике можно оценить следующим образом:

$$|j| = \frac{I}{S_F} = \frac{1,66 \cdot 10^8}{13,5 \cdot 10^9} = 1,23 \cdot 10^{-2} \quad \text{А/м}^2. \quad (223)$$

Число частиц в метре кубическом в источнике оценивается через плотность тока и скорость потока:

$$j_\varphi = neU_\varphi. \quad (224)$$

Количество заряда в кубическом метре равно:

$$ne = \frac{j_{\varphi}}{U_{\varphi}} = \frac{1,23 \cdot 10^{-2}}{50} = 2,46 \cdot 10^{-4} \quad \text{Q/м}^3,$$

где Q – количество заряда.

Если считать, что в источнике электрический ток создается потоком электронов, то количество частиц (электронов) будет равно:

$$n = \frac{2,46 \cdot 10^{-4}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 15 \cdot 10^{14} \text{ частиц/м}^3, \quad (225)$$

здесь $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ – заряд электрона.

Из научной литературы известна максимальная удельная проводимость жидкого ядра [26]. Она порядка $\sigma_F = 5 \cdot 10^5 \left[\frac{\text{См}}{\text{м}} \right]$, тогда электрическое поле можно оценить по формуле:

$$|E_F| = \frac{|j_F|}{\sigma_F} = \frac{1,23 \cdot 10^{-2}}{5 \cdot 10^5} = 2,46 \cdot 10^{-8} \quad \text{В/м.} \quad (226)$$

Такое электрическое поле обеспечивается запаздыванием потока электронов по отношению к угловой скорости вращения Земли.

Количество заряда в слое оценивается по количеству заряда в метре кубическом умноженном на объем слоя (221), а именно:

$$neV_F = 2,46 \cdot 10^{-4} \cdot 7,8 \cdot 10^{16} = 1,92 \cdot 10^{13} \quad \text{Q.} \quad (227)$$

Заряд в слое вращается с угловой скоростью (215), поэтому создаваемая им сила тока в одном из направлений будет равна половине заряда, умноженной на угловую скорость вращения потока:

$$I = \frac{1}{2} neV_F \omega_{U_{\varphi}} = 0,5 \cdot 1,92 \cdot 10^{13} \cdot 3,4 \cdot 10^{-5} = 3,26 \cdot 10^8 \quad \text{А,} \quad (228)$$

или $6 \cdot 10^8$ А по полному заряду, имеющемуся в слое.

Эти значения силы тока по порядку величины совпадают с силой тока, рассчитанной, исходя из равенства моментов, вычисленных по магнитному полю (222).

Таким образом, электродинамические параметры источника ГГП, представляющего собой электрический ток проводимости, обеспеченный

потоком свободных электронов в зоне F жидкого ядра, возбуждает наблюдаемые на Земле величины полоидального и тороидального магнитных полей рис 2. Электрический ток поддерживается стабильным вращением Земли и очень малой индукционной затравкой, которая задается магнитным полем Солнца и межпланетным магнитным полем. Пока названные довольно слабые в районе Земли магнитные поля будут существовать, будет устойчиво существовать стабильное Главное геомагнитное поле Земли. Своей стабильностью ГГП обеспечило длительную эволюцию биосферы Земли.

Заключение.

Полномасштабный анализ возникновения несиловых электромагнитных полей в пределах Земли в технической физике и в физике естественного электромагнитного поля, приведённый в теоретической части данной работы, показал, что новое физическое явление поддается физико-математическому обоснованию. Не противоречит известным уравнениям Максвелла с небольшой доработкой. Удовлетворяет известным классическим теоремам Гельмгольца, Гаусса-Шмидта, Каулинга. Подтверждается известными экспериментами во время мировых магнитных съёмок и проведенных ранее мировых геофизических годов. Проявляется в физико-технических экспериментах с квантовыми частицами, в токамаках и конденсаторах, позволяет преодолевать известный скин-эффект и скачкообразное поведение глубин при свехглубинном зондировании и др.

Автор надеется на понимание выявленных им новых физических проблем и способов их объяснения и разрешения.

Литература

1. Chandrasekhar S. On force-free magnetic fields // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. 1956. Vol. 42. No. 1, pp. 1–5.
2. Van Vleuten A. Over de dagelijksche variatie van het Ardmagnetisme // Koninklijk Ned. Meteor. Instit. No. 102, Utrecht. 1917. – pp. 5–30.
3. Benkova N.P. Solar Diurnal variations of Terrestrial Magnetism // The Hydrometeorological service of USSR Transactions of Scientific Institutions. Terrestrial Magnetism. Series VI. L.-M.: 1941.–75 p. (In Russian)
4. Aksenov V.V. Toroidal field in the Earth's atmosphere // Novosibirsk. Russian Academy of Science Siberian Branch. 1997.–133 p. (In Russian)
5. Parker E.N. Cosmical Magnetic Fields // Clarendon Press Oxford. 1997. Vol. 1. – 608 p. Vol. 2. – 479 p.
6. Moffat H.K. Generation of magnetic field in conducting medium // Cambridge University Press. 1978. – 339 p.
7. Aksenov V.V. On three Kinds of Electrodynamics on the Earth and in Space // The Way of Science. 2017. No. 7 (41), pp. 8–15. (In Russian)
8. Larmor J. How could a rotating body such as the Sun become a magnet // Rep. Brit. Assoc. SCI. 1919, pp. 60–159.
9. Aksenov V.V. The Toroidal Decomposition of the Vector Potential of a Magnetic Field and its Applications // Moscow University Physics Bulletin Physics of Earth, Atmosphere and Hydrosphere. 2015. Vol. 70. No. 6, pp.558–565.
10. Aksenov V.V. The Earth's Electromagnetic Field. – Novosibirsk. Inst. Of Math. and Math. Geophysics. Publ. 2010. – 268 p. (In Russian)
11. Aksenov V.V. On mutual generation of magnetic fields in tokamaks and its suppression // Russian Physics Journal, 2018. Vol. 61. No. 9, pp. 171-172.
12. Aksenov V.V. Non-Force and Force Electromagnetic Fields // Russian Physics Journal, 2016. Vol. 59. No. 3, pp. 319-327.

13. Aksenov V.V. Adaptation of Maxwell-Parker-Moffat electrodynamics to electromagnetic Fields Observed in the Earth's Atmosphere // Russian Physics Journal, 2017. Vol. 60. No. 3, pp. 389-98.
14. Stratton J. Ad. Electromagnetic Theory. Mc. Graw-Hill Book Company. New York and London. 1941. – 539 p.
15. Marsh G.E. Force-Free Magnetic Fields: Solution, Topology and Applications // Singapore: World Scientific Publishing Co. PTL. Ltd. 1966.– 157 p.
16. Cowling T.G. Mgnethydrodynamics. John Willey and Sons, New York. 1957. – 139 p.
17. Zeldovich Ya., Ruzmikin A., Socoloff D. Magnetic field in astrophysics. Gordon and Breach, New York. 1983. – 483 p.
18. Alfven H. Cosmical Electrodynamics. Oxford: University Press. 1950. – 240 p.
19. Korn G.A., Korn T.M. Mathematical Handbook for Scientist and Engineers Definitions, Theorems and Formulas for Reference and Review. McGaw-Hill Book Company, INC, New York Toronto London. 1961. – 720 p.
20. Tikhonov A. N., Samarsky A.A. Equations of Mathematical Physics. M.: Nauka. 1972.–735 p. (In Russian)
21. Gauss K.F. Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus // Werke, 1838-1839, T.5, S. 119.
22. Gauss K.F. Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die in verkehrten verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehung und Abstossungskrafte // Werke, 1839-1840, T.4, S. 195.
23. Schmidt A. Besitzt die tagliche erdmagnetische Schwankung in der Erdoberfläche ein Potential // Physik. Zeitschrift. 1918. Bd 19, s. 349–355.
24. Aksenov V.V. On Some Solenoidal Vector Fields in Spherical Domains // Differential Equations. 2012. Vol. 48. No. 7, pp. 1042 – 1045.
25. Aksenov V.V. On methodology and methods of Applied Geomagnetism // Geology and Rasvedka. 2016. No. 6, pp. 50–55. (In Russian)

26. Parkinson W.D. Introduction to Geomagnetism. Scottish Academic Press. Edinburg and London. 1983. – 520 p.
27. Yanovsky B.M. Telluric Magnetism. Leningrad: GITTL. 1978. Parts I,II. – 591 p. (In Russian)
28. Gauss R.F. Isbrannie trudi po semnomu magnetizmu. L: Izd AN SSSR. 1952. – 343 p. (In Russian)
29. Chetaev D.N. O structure polya korotkoperiodicheskoy geomagnitnoy variazii and magnitotelluricheskom sondirovanii // Physics of the Earth.1970. No. 2, pp.52–55. (In Russian)
30. Sokolov D.D., Stepanov P.A., Frik P.G. Dinamo na puti ot astrophisicheskikh modeley k laboratornomu experimentu // UFN. 214. T. 184. No.3. S. 313–335. (In Russian)
31. Aksenov V.V. Modeling of a Magnetic Field of Sources Localized within a sphere and beyond // Mathematical Modeling. 2015. Vol. 27. No. 8, pp.111–126. (In Russian)
32. Aksenov V.V. The Foundations of Geomagnetism. Bulletin of the Novosibirsk Computing Center. Series: Mathematical Modeling in Geophysics. Special Issue: 15. 2012. – 100 p. (In Russian)
33. Stern D.P. Representation of magnetic field in Space // Rev. Geophys. 1976, pp. 199 – 214.
34. Tikhonov A.N., Arsenin B. Ya. Metody resheniya nekorrektnih sadach. Nauka. 1974. – 223 p. (In Russian)
35. Aksenov V.V. Ob Istochnike Glavnogo Geomagnitnogo Polya. Part 2 // Geologiya and exploration. 2012. No. 5, pp.54-60. (In Russian)
36. Moore E.H. General analysis // Memoirs Phi. Soc. 1935. Vol.1, pp.1-231.
37. Penrose R. A Generalized inverse for matrices // Proc. Camb. Phil. Soc. 1955. Vol. 51, pp.406–413.
38. Geller R.J., Jackson D.D., Kagan Y.Y., Mulagria F. // Earthquakes Cannot be Predicted. Science. 1997, pp. 1616–1617.

39. Alekseev A. S., Aksenov V.V. Ob elektricheskome pole v ochagovoi sone semletryasenie // DAN. 2003. T. 392. No. 1, pp.106–110. (In Russian)
40. Aksenov V.V. O modelirovanii and assessment elektromagnitnih and teplovih polei kak predvestnikov semletryasenie // Geofisicheskii journal. 2003. Vol. 25. No. 3, pp. 20–25. (In Kiev)
41. Rabotnov J.H., Lomakin E.B. Sootnosheniya teorii uprugosti dlya isotropnogo rasnomodulnogo tela // AN SSSR. MTT. 1978. No. 6, pp.29–34. (In Russian)
42. Lyahovskii V.A., Myasnikov B.G. O povedenii uprugoi sredi s micro-narusheniyami // Phisika Semli. 1984. No. 10, pp. 71–75. (In Russian)
43. Ustundag B., Ozerden S. Earthquake prediction using a new monopolar electric field probe // European Seismological Congress (ESC 2002). Genoa, September, 2002.
44. Aaronov V., Bohm D. Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory // Phys. Rev. 1959. Vol. 115. No. 3, pp.485–491.
45. Chirkov A.G., Ageev A.H. O prirode effecta Aaronova-Bohma // JTF. 2001. T. 71. Vip. 2, pp. 16–22. (In Russian)
46. Azizov E.A. Tokamaks from A.D. Sakharov to nowadays (the 60 year tokamak history) // UFN. 2012. Vol. 182. No. 2, pp. 202–215. (In Russian)
47. Dyrdin V.V., Elkin I.S., Lozhkin K.V., Sosnov F.S. Magnitnoe pole tokov smeshcheniya // Vestnik of Kuzbass State Technicfl University. 2004. ISS. 5. pp. 36–37. (In Russian)
48. Bullard E.C. The magnetic Field within the Earth // Proc. Roy. Soc. Lond. 1949, pp. 433–453.
49. Rikitaki T. Electromagnetism and Vnutrennee stroenie Zemli. M.: Nauka. 1968. -236 p. (In Russian)

