УДК 532.591

Конфигурация очага, приводящая к концентрации волновой энергии цунами вокруг круглого острова*

Ан.Г. Марчук, Е.Д. Москаленский

Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

E-mails: mag@omzg.sscc.ru (Марчук Ан.Г.), edm@omzg.sscc.ru (Москаленский Е.Д.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале "Numerical Analysis and Applications" № 1, Vol. 16, 2023.

Марчук Ан.Г., Москаленский Е.Д. Конфигурация очага, приводящая к концентрации волновой энергии цунами вокруг круглого острова // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2023. — Т. 26, № 1. — С. 77–92.

Рассматривается двумерное уравнение эйконала, описывающее распространение волновых фронтов цунами. В работе представлена пространственная форма начального источника волн, которая вызывает концентрацию волновой энергии вдоль береговой линии круглого острова. Теоретические результаты подтверждены численным моделированием динамики волны цунами в рамках модели мелкой воды.

DOI: 10.15372/SJNM20230106

Ключевые слова: *уравнение эйконала, цунами, волновой фронт, уравнения мелкой воды, волновая энергия.*

Marchuk An.G., Moskalensky E.D. The source configuration leading to the accumulation of tsunami wave energy around the round island // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2023. — Vol. 26, № 1. — P. 77–92.

A two-dimensional eikonal equation which describes the propagation of tsunami wave fronts is considered. The paper presents the spatial form of an initial source of waves which causes accumulation of wave energy along the coastline of a round island. The theoretical results are confirmed by numerical simulation with a shallow water model of tsunami wave dynamics.

Keywords: *eikonal equation, tsunami, wave front, shallow water equations, wave energy.*

Введение

Волны цунами являются следствием начального отклонения водной поверхности от невозмущенного уровня вследствие движений дна сейсмического генезиса [1], подводного донного оползня [2] или обвала в воду масс грунта [3]. Как правило, в результате этих процессов генерируется волна, длина которой значительно превышает глубину акватории, что позволяет отнести цунами к категории длинных волн. Процесс распространения цунами (и других длинных волн) в океане корректно описываются дифференциальной моделью мелкой воды [4]. Двумерная линейная система таких уравнений, где не учитываются внешние силы (кроме гравитации), может быть записана в следующем виде:

*Исследование выполнено в рамках Государственной бюджетной программы с ИВМиМГ СО РАН (№ 0315-2019-0004).

© Ан.Г. Марчук, Е.Д. Москаленский, 2023

$$\begin{gathered}\eta_t + (Du)_x + (Dv)_y = 0,\\ u_t + g\eta_x = 0,\\ v_t + g\eta_y = 0.\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь u и v — компоненты горизонтальной скорости водного потока, постоянные во всём слое от поверхности до дна, η — смещение водной поверхности относительно нулевого уровня, g — ускорение свободного падения, D — глубина. А нелинейная система уравнений мелкой воды имеет вид [4]:

$$\begin{gathered}\eta_t + \big(u(D+\eta)\big)_x + \big(v(D+\eta)\big)_y = 0,\\ u_t + uu_x + vu_y + g\eta_x = 0,\\ v_t + uv_x + vv_y + g\eta_y = 0.\end{gathered} \tag{2}$$

В рамках этой математической модели скорость распространения **волнового фронта** не зависит от амплитуды и длины волны (периода) и выражается формулой Лагранжа [4]:

$$c(x,y) = \sqrt{gD(x,y)}. \tag{3}$$

Здесь фронтом волны является граница между подобластью, куда возмущение к данному моменту уже пришло, и остальной частью области. При этом вектор этой скорости направлен ортогонально линии волнового фронта. Зависимость скорости распространения длинной волны от глубины приводит к искривлению линии волнового фронта над неровным дном. В некоторых случаях сходящийся из-за рефракции волновой фронт приводит к локальному увеличению высоты цунами в области фокусировки. Кроме неровностей дна причиной фокусирования волновой энергии может служить конфигурация волнового фронта. Именно второй генезис фокусировки рассматривается в этой работе.

Для описания кинематики волнового фронта в двумерной области может быть также использовано уравнение эйконала [5]:

$$|\nabla\tau|^2 = \frac{1}{c^2(x,y)}, \tag{4}$$

где $c(x,y)$ — распределение скорости распространения возмущения (в частности волны) в области моделирования. Функция $f(x,y) = t$ описывает линию волнового фронта в момент времени t. Физический смысл уравнения эйконала (4) заключается в том, что точки волнового фронта продвигаются вдоль волновых лучей, ортогональных к линии этого фронта, со скоростью $c(x,y)$. В случае волны цунами эта скорость определяется формулой (3).

1. Кинематика фронта волны в однородной среде с заданным расположением источников

Задача о распространении волны в однородной среде есть задача Коши для уравнения эйконала $f_x^2 + f_y^2 = 1$ с начальным условием $f(x,y) = 0$ на заданной кривой. Если функция f — решение, то линии $f(x,y) = t$ дают положение фронта волны в момент времени t.

Общего подхода к решению этого уравнения нет. Знание отдельных, частных решений, не облегчает нахождение решения при других начальных данных. Не существует

соображений, позволяющих до проведения численных расчётов получить качественные оценки изучаемого волнового поля, такие как область распространения, наличие и форма каустик и тому подобные.

В статье предлагается геометрический подход к этой задаче, который во многих случаях позволяет найти изолинии функции f, т. е. положение фронта волны в любой момент времени, не находя явного выражения для функции f. В основе этого подхода лежат понятия *эволюты* и *эвольвенты* [6]. Напомним их. Кривая l называется *эвольвентой* кривой l_1, если l — ортогональная траектория касательных к кривой l_1. Кривая же l_1 в этом случае называется *эволютой* кривой l. Механическая интерпретация этих понятий представлена на рисунке 1. Кривая C_0C_1 является эволютой, в точке C_0 которой закреплён конец гибкой нерастяжимой нити. Если представить, что эта нить навёртывается на кривую C_0C_1, оставаясь в натянутом состоянии, то каждая точка этой нити опишет кривую, которая и будет эвольвентой исходной кривой C_0C_1. На рис. 1 такими эвольвентами будут линии MM_2, NN_3, PP_3. Из этой модели следует, что в каждой точке таких эвольвент угол между эвольвентой и нитью, проходящей через эту точку, равен $90\,^\circ$, а расстояние между "соседними" эвольвентами, т. е. длина их общего перпендикуляра, постоянно, например, $MN = M_1N_1 = M_2N_2$ на рис. 1.

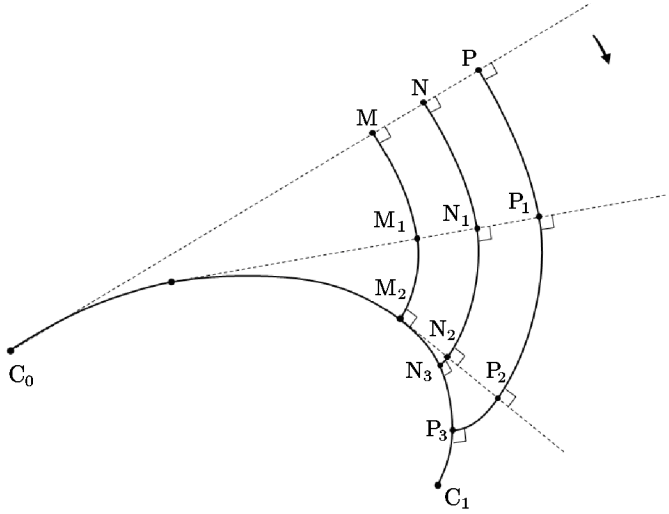


Рис. 1. Схема построения эвольвент, выходящих из разных точек кривой (эволюты) C_0C_1

Отметим также, что длина отрезка касательной от точки касания до точки пересечения с эвольвентой равна длине дуги эволюты от точки касания до точки пересечения эволюты и эвольвенты. Так, на рис. 1 отрезок C_0M равен длине дуги C_0M_2, отрезок C_0N равен длине дуги C_0N_3 и так далее.

Дадим истолкование изложенных понятий в терминах распространения волн в однородной среде. Если в такой среде источники волн расположены на эвольвенте MM_2, то распространение волн от источников (в направлении выпуклости MM_2) будет происходить по лучам, лежащим на касательных к эволюте C_0C_1, и значит, перпендикулярных к эвольвентам. Кроме того, время, затраченное волной на прохождение пути между "соседними" фронтами, будет одинаковым ($MN = M_1N_1 = M_2N_2$).

Итак, **если в однородной среде источники расположены на эвольвенте заданной кривой, то возмущения распространяются по лучам, являющимся касательными к этой кривой, а фронты волн являются её эвольвентами.**

Приведённое утверждение позволяет, в частности, составить качественную картину поведения поля, отвечающего выбранным начальным данным, ещё до проведения численных расчетов. Так, например, на рис. 2 показана окружность радиуса $\mathrm{OM} = R$ и её эвольвента, проходящая через точку $\mathrm{M}(R, 0)$. Если обеспечить условия, при которых волна распространяется от начальной эвольвенты только в одну сторону (по направлению нормали к ней или против нормали, как на рис. 2), то волна будет вращаться вокруг окружности. Этот процесс будет продолжаться неограниченное время.

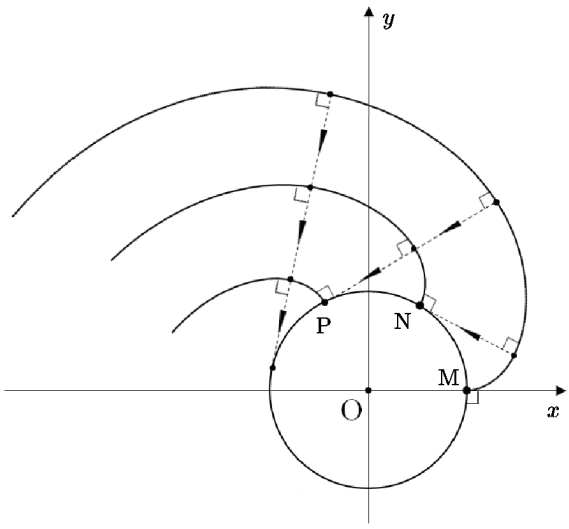


Рис. 2. Направление распространения различных сегментов волновых фронтов, представляющих собой эвольвенты

Если же распространение волны происходит в обе стороны от исходной эвольвенты, то фронт каждой из двух образовавшихся волн после полуоборота оказывается в положении, центрально-симметричном исходной эвольвенте. При дальнейшем распространении через время $\dfrac{\pi R}{\mathrm{c}}$ они оказываются в положении, занимаемом исходной эвольвентой. Затем процесс повторяется.

Согласно [7] уравнение исходной эвольвенты, проходящей через точку $\mathrm{M}(R, 0)$, в параметрической форме имеет вид

$$\begin{cases} x = R\cos t + R\,t\sin t, \\ y = R\sin t - R\,t\cos t, \end{cases} \tag{5}$$

где t — параметр, $t \in [0, +\infty]$, $t = \angle\mathrm{DOM}$ (рис. 3 а).

Выведем уравнение эвольвенты, проходящей через произвольную точку N окружности, такую что $\angle\ \mathrm{NOM} = \phi$ (рис. 3 б). В системе координат $\varsigma\,\mathrm{O}\,\eta$, показанной на рис. 3 б, координаты произвольной точки $\mathrm{Q}(\varsigma, \eta)$ эвольвенты имеют (как и выше) вид

$$\begin{cases} \varsigma = R\cos t + R\,t\sin t, \\ \eta = R\sin t - R\,t\cos t. \end{cases}$$

Координаты (x, y) той же точки в системе координат $x\,\mathrm{O}\,y$ получаются при повороте системы $\varsigma\,\mathrm{O}\,\eta$ на угол $-\phi$:

$$(x, y) = (\varsigma, \eta) \cdot \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

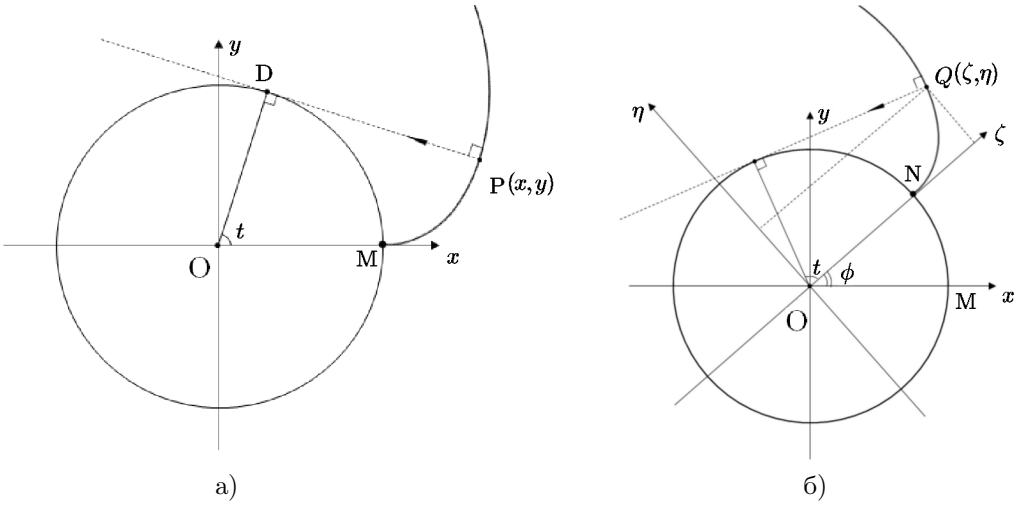


Рис. 3. а) схема нахождения параметрических формул для эволюты окружности; б) вывод уравнения эвольвенты, проходящей через произвольную точку N окружности

Отсюда

$$\begin{aligned} x &= (R\cos t + R\,t\sin t)\cos\phi - (R\sin t - R\,t\cos t)\sin\phi \\ &= R(\cos t\cos\phi - \sin t\sin\phi) + R\,t(\sin t\cos\phi + \cos t\sin\phi) = R\cos(t+\phi) + R\,t\sin(t+\phi); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= (R\cos t + R\,t\sin t)\sin\phi + (R\sin t - R\,t\cos t)\cos\phi \\ &= R(\cos t\sin\phi + \sin t\cos\phi) + R\,t(\sin t\sin\phi - \cos t\cos\phi) = R\sin(t+\phi) - R\,t\cos(t+\phi). \end{aligned}$$

Получаем, что эвольвента, изображённая на рис. 3б, задаётся параметрически следующим образом:

$$\begin{cases} x = R\cos(t+\phi) + R\,t\sin(t+\phi), \\ y = R\sin(t+\phi) - R\,t\cos(t+\phi), \end{cases}$$

где t — параметр, $t \in [0, +\infty]$.

2. Циркуляция волны вокруг круглого острова

Кинематику волн цунами можно изучать и лучевыми методами [8–11], например, в точках области, куда одновременно приходят несколько сегментов волнового фронта, можно ожидать более высокую амплитуду волны, чем в других точках. Это называется фокусировкой волны.

Рассмотрим пример кинематики волнового фронта около круглого острова при модельной топографии дна. В прямоугольной области задан параболический рельеф дна с цилиндрической симметрией, т. е. глубина пропорциональна квадрату расстояния до точки S области, одновременно являющейся центром круглого острова. На рис. 4, где представлен модельный профиль дна (окрашено темным цветом) вокруг круглого острова.

Пусть точка S является началом полярных координат, где положение точки определяется удалением от точки S и азимутом ϕ. В нашем случае глубина не зависит от азимута и меняется с ростом расстояния r от центра острова следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&D(r) = -1 \quad (0 \le r \le R_1);\\
&D(r) = k\,r^2 \quad (R_1 \le r \le R_2);\\
&D(r) = D_2 = k\,R_2^2 \quad (r \ge R_2).
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Здесь R_1 — радиус круглого острова (может быть равен нулю), R_2 — расстояние от центра острова, где прекращается рост глубины и она становится постоянной и равной D_2, k — коэффициент, в данном случае равный 0.001.

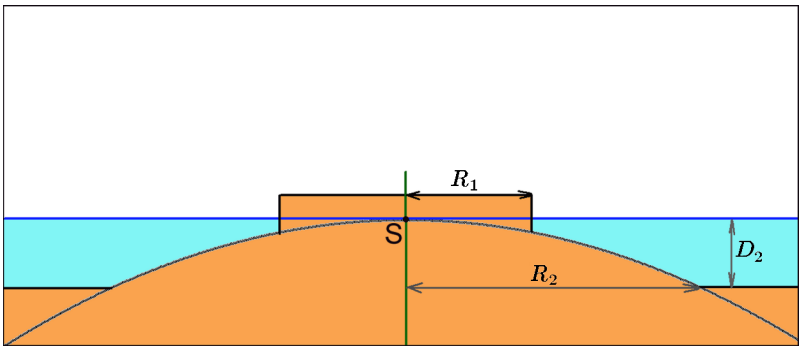


Рис. 4. Профиль параболического донного рельефа вокруг круглого острова

Отрицательная глубина означает, что точка находится внутри острова. Если начальный волновой фронт имеет вид отрезка прямой линии, выходящей из центральной точки (где глубина равна нулю), то теоретически этот отрезок волнового фронта будет бесконечно вращаться, как стрелка часов, вокруг центра симметрии, не теряя при этом прямолинейности и не увеличиваясь в длине (рис. 5). Это следует из формулы (3), дающей линейную зависимость тангенциальной скорости точек прямолинейного волнового фронта от расстояния до центра симметрии S. Здесь в начальный момент волновой фронт представлял собой отрезок между окружностями с радиусами R_1 и R_2, направленный вертикально вниз. При этом радиус острова R_1 может быть равным нулю.

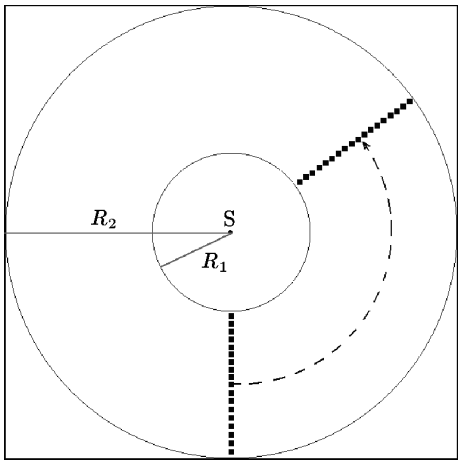


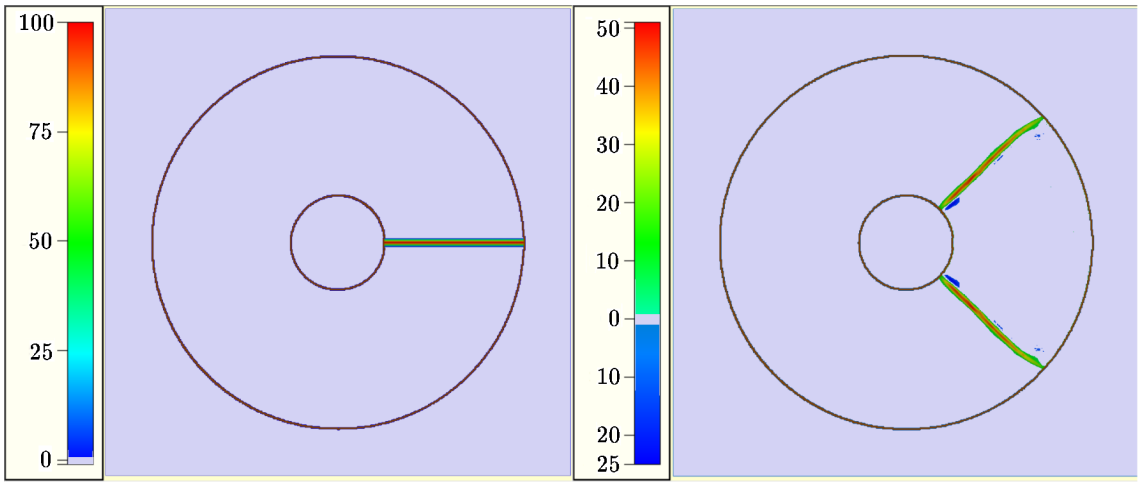
Рис. 5. Вращение волнового фронта, имеющего вид отрезка прямой линии, вокруг центра симметрии при параболическом рельефе дна; в начальный момент фронт направлен вертикально вниз

Результаты расчета кинематики такого начального фронта методом ортогонального продвижения [12], когда рельеф дна определяется формулами (6), полностью подтверждают теоретическое поведение волны при таком рельефе дна (рис. 5). При этом кинематическая картина качественно не зависит от значений R_1, R_2 и k (см. (6)).

Для подтверждения такого поведения волны над центрально-симметричным параболическим рельефом дна было проведено численное моделирование динамики распространения цунами в рамках модели мелкой воды методом MOST [13]. Опишем постановку задачи. В квадратной области 1000×1000 км с шагом расчётной сетки, равным 1000 м в обоих направлениях, глубина возрастает при удалении от центральной точки $(500, 500)$ в соответствии с формулами (6). В нашем случае $R_1 = 100$ км, $R_2 = 400$ км, $k = 6.25 \cdot 10^{-8}$. Источник волн представлял собой вертикальное поднятие полосы шириной $w_0 = 10$ км и высотой $\eta_0 = 1$ м с синусоидальным профилем, простирающейся от береговой линии острова (100 км вправо от центральной точки) и имеющий длину 300 км (рис. 6 а). Величина начального вертикального смещения водной поверхности задавалась формулой

$$\eta(t) = \frac{\eta_0}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi w}{w_0}\right)\right) \quad (0 \le w \le w_0/2). \tag{7}$$

Здесь w означает удаление точки от оси источника. Результаты расчёта визуализированы на рис. 6.



а) б)

Рис. 6. Расположение начального вытянутого прямоугольного источника (а) и результаты численного моделирования распространения волн над параболическим дном с центральной симметрией (б)

В процессе численного расчёта начальное смещение водной поверхности высотой 1 м распадается на две волны высотой 50 см, распространяющихся в разные стороны от источника и имеющих практически прямолинейные линии фронта. На рис. 6 б показана водная поверхность через 1000 с после момента генерации. Величина вертикального смещения водной поверхности видна из цветовой легенды в левой части рисунков 6 а и 6 б.

Проведённый вычислительный эксперимент показал, что сегмент волнового фронта над параболическим рельефом дна сохраняет прямолинейную форму и практически не теряет энергии (амплитуды).

3. Численное моделирование концентрации волновой энергии вокруг круглого острова

Сначала будут представлены результаты численного моделирования кинематики волнового фронта, начальное положение которого является эвольвентой, описанной в пункте 1. Моделирование кинематики волнового фронта цунами проводилось с помощью сеточного метода, базирующегося на принципе Гюйгенса [14], в прямоугольной области с шагом расчётной сетки, равным 100 м в обоих направлениях. Размеры области — 2000×2500 расчётных узлов (200×250 км). Круглый остров с центром в точке S с координатами $x_0 = 110$ км, $y_0 = 170$ км имеет радиус $R = 25$ км (рис. 6). Начало декартовой системы координат находится в левом нижнем углу области. Вне острова глубина постоянна и равна 1000 м. Источник волн представляет собой 500 точек вдоль эвольвенты (5) с начальной точкой M с координатами $x = 135$ км, $y = 170$ км, расположенной на одинаковой ординате с центром S на береговой линии (рис. 7). Координаты точек вдоль эвольвенты, являющейся источником волн, даются формулами

$$\begin{aligned} x &= R\cos(t) + R\,t\sin(t) + x_0, \\ y &= R\sin(t) - R\,t\cos(t) + y_0, \end{aligned} \tag{8}$$

где значения параметра t меняются от нуля до $2\pi{+}1$. На рис. 7 расположение линейного источника обозначено цифрой 0, означающей время, которому соответствует положение волнового фронта.

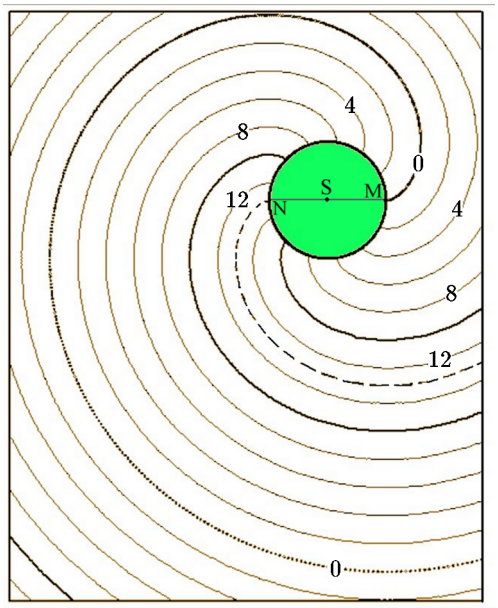


Рис. 7. Положения с интервалом 2 мин фронтов волн, генерированных источником, имеющим форму сегмента эвольвенты

В соответствии с используемым алгоритмом расчёта времён вступления в узлы сетки [15] фронт волны продвигается в обе стороны от линии источника. На рис. 7 изображён круглый остров и визуализированы изолинии поля времён вступления цунами в узлы расчётной сетки. Интервал между изохронами, некоторые из которых обозначены соответствующими им значениями времени, равен 2 мин. Волновые фронты движутся в

обе стороны от линейного источника и, как показано в первом пункте, сами являются эвольвентами в любой момент времени. Оба этих волновых фронта через 794 с (13 мин 14 с) встречаются друг с другом на эвольвенте, нарисованной на рис. 7 пунктирной линией. При этом точка N, где эта изохрона пересекается с береговой линией, находится на противоположной (от точки M) стороне круглого острова (рис. 7).

Таким образом, численный расчёт кинематики фронтов волн, генерированных источником, имеющим вид эвольвенты, подтвердил теоретические результаты первого пункта.

Теперь рассчитаем амплитуду волн цунами вокруг круглого острова радиусом $R = 100$ км в случае, когда источник имеет вид узкой полосы шириной 10 км в форме сегмента эвольвенты, пересекающей береговую линию в крайней её точке справа (рис. 8). Сегмент был ограничен значениями параметра $0 \le t \le \pi$ в формулах (8). Это значит, что нормаль к начальному волновому фронту в крайней точке L границы источника, где $t = \pi$, касается береговой линии в точке N на противоположной к точке M стороне (рис. 8). Шаг расчётной сетки в области 1000×1000 км был выбран равным 1000 м в обоих направлениях. Центр круглого острова располагался в центре расчётной области. Во всей области глубина постоянна и равна 1000 м, а в узлах расчётной сетки, представляющих остров, задавалось нулевое значение глубины, что препятствовало проникновению волны внутрь острова.

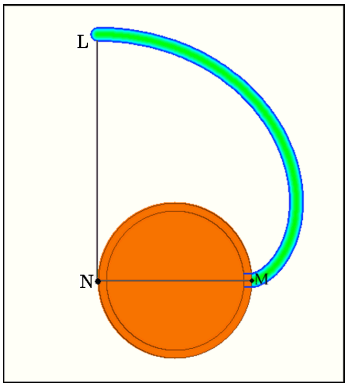


Рис. 8. Взаимное расположение круглого острова и вытянутого источника в форме сегмента эвольвенты

В начальный момент времени во всей расчётной области, кроме точек внутри источника, задано нулевое смещение водной поверхности и нулевые компоненты скорости течения. В источнике начальное возвышение поверхности задавалось в соответствии с формулой (7). При этом ширина w_0 источника была равна 10 км, а максимальное возвышение η_0 было равно 1 м.

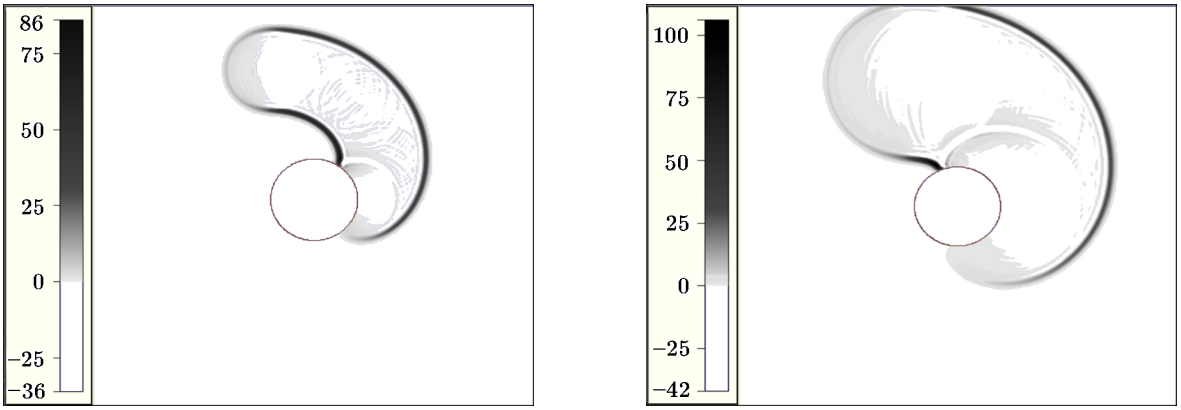
После старта процесса генерации начальное смещение водной поверхности в источнике распадается на две волны высотой 0.5 м, распространяющиеся в противоположных направлениях ортогонально оси вытянутого источника. Из-за изогнутой формы очага и конечной длины волны, движущейся в направлении береговой линии, в точки около берега одновременно будут приходить волны от нескольких соседних сегментов волнового фронта, что должно приводить к росту амплитуды в этих точках. Прямолинейные волновые лучи от разных сегментов начального фронта показаны на рис. 2. На рис. 9 представлена водная поверхность через 1000 с (9 а) и 2000 с (9 б) после начала процесса.

Из рис. 9 видно, что область более высокой амплитуды волны в процессе численного моделирования движется вдоль береговой линии от точки M к точке N (см. рис. 8). В этих местах высота цунами существенно превышает начальную высоту волн (0.5 м), сформи-

рованных очагом. Следует заметить, что область повышенной амплитуды “пробегает” вдоль береговой линии верхней половины острова от точки M до точки N (рис. 8). При этом своего максимума, равного 107 см, высота волны около берега достигает примерно через 2000 с после начального момента (рис. 9 б).

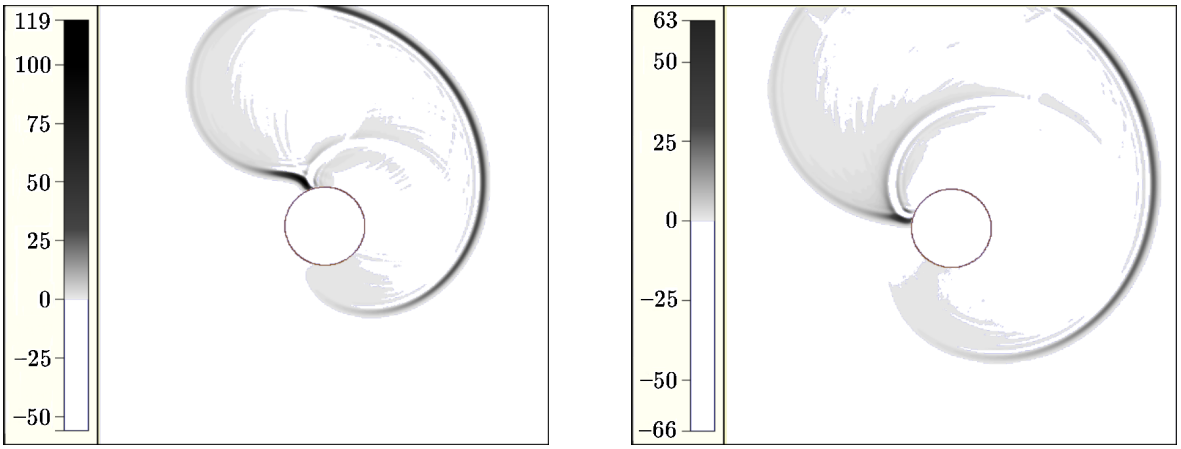
Теперь выясним, что изменится, когда вместо резкого (за один шаг расчётной сетки) изменения глубины от 0 м до 1000 м вокруг круглого острова имеется узкая “переходная зона”, где глубина возрастает по формулам (6) с коэффициентом $k = 10^{-7}$. В нашем случае радиус острова R_1 был равен 90 км, а возрастание глубины прекращалось на расстоянии $R_2 = 100$ км от центра острова (см. рис. 4). Как было показано в п. 2, изначально радиально ориентированный сегмент волнового фронта над этой переходной зоной будет подобно стрелке часов вращаться вокруг круглого острова, теряя энергию лишь из-за дифракции (см. рис. 5 и 6). Над описанным выше центросимметричным рельефом дна численно решалась задача распространения волны цунами от того же вытянутого источника, что и в ранее рассмотренном случае с постоянной глубиной вокруг острова. Ввиду того, что радиус острова уменьшился на 10 км, источник в виде полосы, имеющей осью эвольвенту (7) с “радиусом” $R = 100$ км, был дополнен прямолинейным горизонтально ориентированным сегментом от береговой линии до начальной точки M эвольвенты, где параметр t равен нулю (рис. 8). На том же рис. 8 береговая линия в новой задаче (с “переходной зоной”) представлена окружностью меньшего радиуса. Состояние водной поверхности через 2000 с и 3000 с по результатам численного моделирования представлено на рисунках 10 а и 10 б соответственно. Как и ранее, для численного решения нелинейной системы уравнений мелкой воды (2) был использован алгоритм MOST [13].

Визуальное сравнение рисунков 9 и 10 показывает схожесть картин распределения высот образовавшихся волн в рассмотренных случаях (при отсутствии прибрежной зоны с параболическим рельефом дна и при наличии таковой). Однако сравнение водной поверхности в обоих случаях после 2000 с распространения (рис. 9 б и 10 а) показывает существенную разницу (более 10 %) в максимальной высоте волны на расстоянии 100 км от центра острова. Это обусловлено влиянием сегмента волнового фронта, движущегося как стрелка часов над описанной выше переходной зоной, шириной 10 км между берегом и областью постоянной глубины. Эта разница увеличивается до 36 % (63 см против 40 см) после 3000 с распространения волны.



а) б)

Рис. 9. Водная поверхность через 1000 с (а) и 2000 с (б) после старта распространения волны; круг — область острова, радиусом 100 км; шкала в левой части каждого рисунка показывает соответствие цвета уровню водной поверхности в см



а) б)

Рис. 10. Водная поверхность через 2000 с (а) и 3000 с (б) после старта распространения волны в области с параболической переходной зоной от береговой линии до глубины 1000 м; круг — область острова, радиусом 90 км

Несколько слов о том, как связана энергия длинной волны, в частности цунами, с её амплитудой. Из уравнений мелкой воды (1) следует, что скорость распространения волны в линейном случае определяется формулой (3) и формулой

$$c = \sqrt{g(D+\eta)} \tag{9}$$

для случая нелинейной системы (2) дифференциальных уравнений мелкой воды [4]. Представим смещение в плоской волне, фронт которой параллелен оси ординат, в виде гармонической функции

$$\eta(x,y) = a\cos(kx - \omega t), \tag{10}$$

описывающей волну высотой a, распространяющуюся со скоростью c=ω/k в сторону возрастания x координаты. Подставив выражение для смещения водной поверхности (10) во второе уравнение системы уравнений (1), имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = gka\sin(kx - \omega t). \tag{11}$$

После интегрирования по t обеих частей уравнения (11), получается зависимость скорости водного потока в волне от её амплитуды и глубины:

$$u = \int \frac{gk}{-\omega} a\sin(kx-\omega t)\, d(kx-\omega t) = \frac{g}{c}\big(a\cos(kx-\omega t)\big) = \frac{g}{\sqrt{gD}}\,\eta = \eta\sqrt{\frac{g}{D}}. \tag{12}$$

Таким образом, скорость водного потока в гармонической волне вида (10) связано с глубиной и высотой волны формулой (12). В силу линейности процесса эта формула будет справедлива для любой длинной волны, которая может быть представлена в виде суперпозиции гармонических волн разной частоты, являющихся решением системы дифференциальных уравнений мелкой воды (1). А для квазилинейной системы уравнений мелкой воды (2), где, согласно формуле (9), скорость фронта и гребня волны несколько различаются, горизонтальная скорость потока в движущейся волне выразится в виде

$$u \approx \eta\sqrt{\frac{g}{D+\eta}}, \tag{13}$$

где η — высота волны, D — глубина, g — ускорение силы тяжести. Теперь рассмотрим составляющие энергии движущейся волны цунами. С учётом формулы (13) выражение для кинетической энергии одномерной волны цунами запишется в виде интеграла по длине волны L:

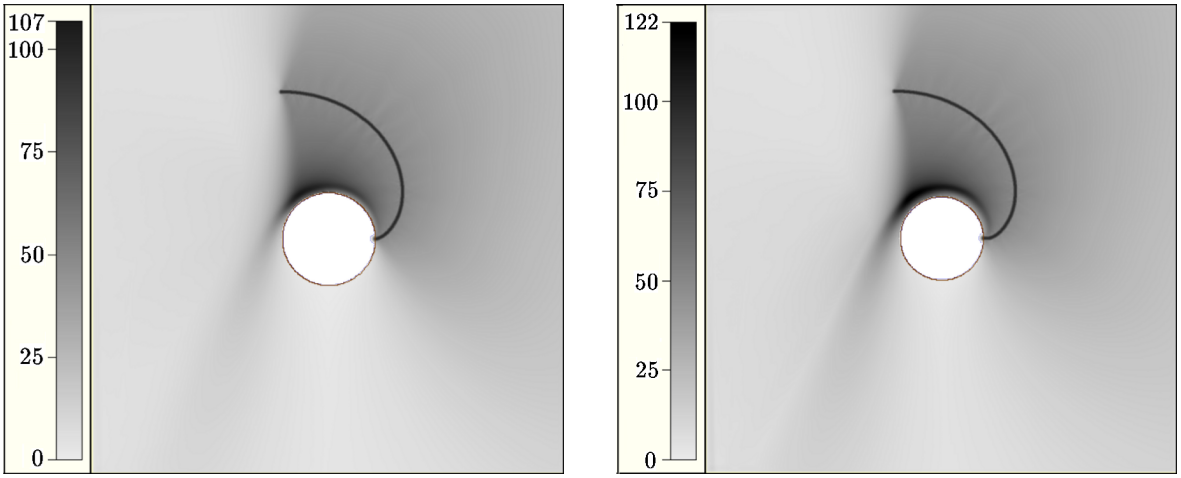
$$E_K = \int\limits_0^L \frac{\rho u^2}{2}(D+\eta)\,dx = \int\limits_0^L \frac{\rho\eta^2}{2}\frac{g}{(D+\eta)}(D+\eta)\,dx = \int\limits_0^L \frac{\rho\eta^2 g}{2}\,dx, \tag{14}$$

где ρ — плотность жидкости. Запишем также выражение для потенциальной энергии (считая, что потенциальная энергия покоящейся жидкости равна нулю):

$$E_P = \int\limits_0^L \frac{\rho g\eta^2}{2}\,dx. \tag{15}$$

Если сравнить подынтегральные выражения в формулах для кинетической (14) и потенциальной (15) энергии движущейся волны цунами, то видим их тождественное равенство. В двумерном случае вектор скорости горизонтального водного потока является двухкомпонентным, и при подсчёте кинетической энергии волны по формуле (14) под скоростью u следует понимать модуль вектора скорости. Итак, в каждом сегменте распространяющейся длинной волны кинетическая энергия движения воды во всём слое от поверхности до дна равна потенциальной энергии вертикального смещения воды относительно нулевого уровня. Отсюда следует, что энергия волны пропорциональна квадрату её амплитуды. Представленные в этом разделе энергетические оценки подтверждены численными расчётами [16].

Общую картину концентрации волновой энергии можно увидеть на рис. 11, где представлено распределение максимумов высоты цунами (в см) во всех точках области за все 2000 шагов по времени (10000 с распространения) для обоих описанных выше вычислительных экспериментов. Круги в центре обеих частей этого рисунка — области островов, а шкалы в левых частях показывают цветовое соответствие максимумам высот волн.



а) б)

Рис. 11. Пространственное распределение максимумов высот волн в результате численного моделирования распространения цунами от вытянутого источника в форме эвольвенты в случае круглого острова, радиусом 100 км (а), и в случае острова, радиусом 90 км с параболическим дном в его окрестности (б)

Анализ рис. 11 показывает, что в обоих случаях около острова (вдоль верхней половины береговой линии) возникает область аномально высокой амплитуды волн. Усиление волн возникает вследствие фокусировки волновой энергии из-за формы вытянутого источника. В случае узкой прибрежной полосы с параболическим рельефом дна к прибрежной амплитуде волн приплюсовывается добавка от сегмента волнового фронта, циркулирующего вокруг острова над этой прибрежной полосой. При этом, как указывалось ранее, разница в амплитуде составила от 15 % для абсолютного максимума до 33 % на левой оконечности острова (точка N на рис. 8). Для волновой энергии эта разница ещё больше.

Для сравнения были проведены ещё два вычислительных эксперимента, моделирующих генерацию и распространение длинных волн от "ленточных" источников с аналогичной (как и в случае источника в форме эвольвенты) шириной и амплитудой. В первом случае источник представлял собой полосу, шириной 20 км, ось которой представляла собой прямую линию от левой до правой границы области (рис. 12). Как и раньше, профиль начального смещения водной поверхности в ортогональном к оси направлении задавался формулой (7). В остальном постановка задачи осталась прежней. В левой части рисунка дана цветовая легенда соответствия цвета высотам волны в сантиметрах.

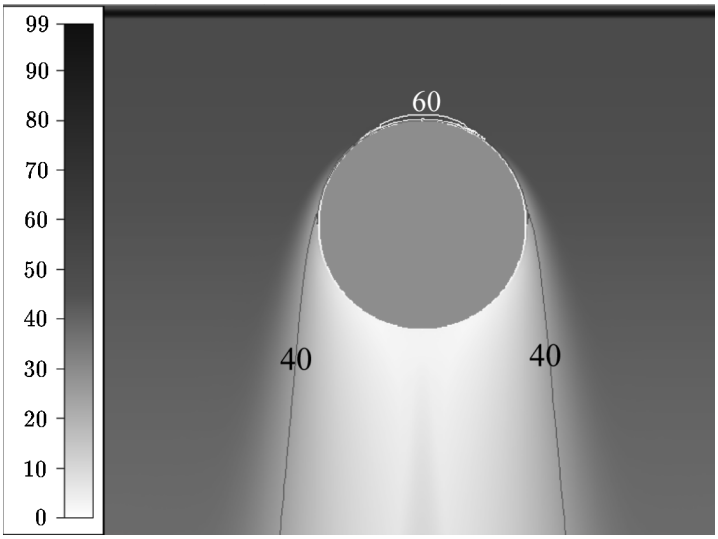


Рис. 12. Распределение максимумов высот цунами вокруг круглого острова в результате воздействия на него плоской волны высотой 50 см. На рисунке приведены изолинии уровней 60 и 40 см

Из рис. 12 видно, что образовавшиеся волны, имеющие прямолинейный фронт, распространяются в обе стороны от источника, слабо уменьшаясь в амплитуде (от 50 см до 45 см) из-за диссипативного свойства разностной схемы. Локальное повышение высоты цунами наблюдается у фронтальной части круглого острова вследствие граничных условий, реализующих отражение от вертикальной стенки. Там высота волны достигает 72 см, что значительно меньше значений, зарегистрированных у этого участка побережья в случае источника в форме эвольвенты. Эта задача больше соответствует воздействию волны не на остров, а на конструкцию, типа цилиндрической сваи. Обычно вокруг острова имеется зона, где глубина возрастает от нуля до некоторой величины, соответствующей глубине окружающей акватории. В этом случае из-за рефракции и столкновения встречных волн в тыльной части острова может возникать локальное увеличение

высот цунами. Это подтверждено лабораторными экспериментами и численными расчётами [17].

Во втором вычислительном эксперименте моделировалась фокусировка волновой энергии в окрестности точки, расположенной у побережья того же круглого острова. В этом случае "ленточный" источник цунами имел форму сегмента окружности с радиусом 200 км и растром 60°, что обеспечивало схождение волнового фронта в точку у берега, являющуюся центром этой окружности. Начальное расположение источника окрашено светлым тоном на рис. 13. На этом же рисунке представлено распределение максимумов высот волны в сантиметрах во всей расчётной области и вокруг острова.

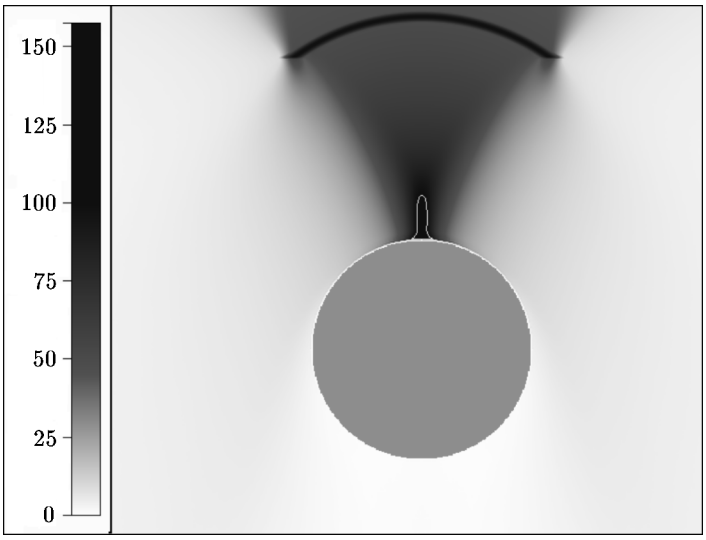


Рис. 13. Максимальные высот волны в окрестности круглого острова в результате фокусировки цунами, генерированной "ленточным" источником в виде сегмента окружности. Белая изолиния у верхнего края острова ограничивает акваторию с максимальными высотами более 100 см

Из рис. 13 видно, что при рассмотренной конфигурации источника в точке фокусировки, расположенной посередине верхней полуокружности, представляющей часть береговой линии острова, предсказуемо зарегистрированы максимальные высоты цунами. В окрестности этой точки они достигли 125 см, что примерно в два с половиной раза больше высоты волны, генерированной описанным источником. В этом случае зарегистрированный максимум высоты волны примерно соответствует высотам у побережья в случае источника в форме сегмента эвольвенты (рис. 11). Но в отличие от кругового источника, дающего высокую амплитуду лишь в одной точке (рис. 13), в случае источника в форме эвольвенты высокие амплитуды цунами наблюдаются не в окрестности одной точки, а, практически, вдоль половины всей береговой линии круглого острова (рис. 11).

4. Заключение

Представленная в работе пространственная форма начального источника волн цунами в виде сегмента эвольвенты вызывает концентрацию волновой энергии вдоль всей верхней половины береговой линии. Это происходит из-за одновременного прихода к береговой линии круглого острова волны от сегмента эвольвенты и волны, захваченной параболическим склоном дна вокруг острова. Численные расчёты показали, что обычная

фокусировка вследствие конфигурации волнового фронта в виде сегмента окружности влечёт за собой повышенную амплитуду лишь в окрестности одной точки (фокуса). При этом максимальная высота там практически не больше, чем в случае источника в форме сегмента эвольвенты.

Литература

1. **Мурти Т.С.** Сейсмические морские волны цунами. — Ленинград: Гидрометеоиздат, 1981.
2. **Fryer G.J., Watts P., Pratson L.F.** Source of the tsunami of 1 April 1946: A landslide in the upper Aleutian forearc // J. Marine Geology. — 2004. — Vol. 203. — P. 201–218.
3. **Mader C.** Modeling the 1958 Lituya bay mega-tsunami // Science of Tsunami Hazards. — 1999. — Vol. 17, № 1. — P. 57–67.
4. **Стокер Дж.Дж.** Волны на воде. — М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
5. **Боровских А.В.** Двумерное уравнение эйконала // Сиб. мат. журнал. — 2006. — Т. 47, № 5. — С. 993–1018.
6. **Рашевский П.К.** Курс дифференциальной геометрии. — М.: Изд-во ЛКИ, 2008.
7. **Савелов А.А.** Плоские кривые. Систематика, свойства, применение. — М.: ЛИБРОКОМ, 2010.
8. **Иконникова Л.Н., Ярошеня Р.А.** Расчет рефракции волн цунами для Тихоокеанского побережья СССР // Теоретические и экспериментальные исследования по проблеме цунами. — М.: Наука, 1977. — С. 420–427.
9. **Доброхотов С.Ю., Жевандров П.Н.** Расчет волновых движений в океане над переменным дном методом Маслова // Исследования цунами. — Москва, 1986. — № 1. — С. 73–79.
10. **Satake K.** Effects of bathymetry on tsunami propagation: Application of ray tracing to tsunamis // Pure and Applied Geophysics. — 1988. — Vol. 126, № 1. — P. 27–36.
11. **Марчук Ан.Г.** Методы расчёта прямых и обратных задач кинематики цунами. — Новосибирск: Наука, 2019.
12. **Marchuk An.G., Vasiliev G.S.** The fast method for a rough tsunami amplitude estimation // Bull. Novosibirsk Comp. Center. Ser. Math. Model. in Geoph. — Novosibirsk, 2014. — Iss. 17. — P. 21–34.
13. **Titov V.V., Gonzalez F.** Implementation and Testing of the Method of Splitting Tsunami (MOST) Model // NOAA Technical Memorandum ERL PMEL-112. — Washington DC, 1997.
14. **Dantzig G.** On the shortest route through a network // Management Science. — 1960. — Vol. 6, № 2. — P. 187–190.
15. **Марчук Ан.Г.** Численные методы расчета кинематики волн цунами // Математические проблемы геофизики: Численные исследования геофизических задач. — Новосибирск, 1988. — С. 69–90.
16. **Марчук А.Г.** Волновая энергия цунами // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. — 2020. — Т. 18, № 4. — С. 39–53. — DOI: 10.25205/1818-7900-2020-18-4-39-53.
17. **Fujima K., Yuliadi D., Goto C., et al.** Characteristics of long waves trapped by conical island // Coastal Engineering in Japan. — 1995. — Vol. 38, № 2. — P. 111–132.

Поступила в редакцию 08 августа 2020 г.
После исправления 22 сентября 2022 г.
Принята к печати 23 ноября 2022 г.

Литература в транслитерации

1. **Murti T.S.** Seismicheskie morskie volny cunami. — Leningrad: Gidrometeoizdat, 1981.
2. **Fryer G.J., Watts P., Pratson L.F.** Source of the tsunami of 1 April 1946: A landslide in the upper Aleutian forearc // J. Marine Geology. — 2004. — Vol. 203. — P. 201–218.
3. **Mader C.** Modeling the 1958 Lituya bay mega-tsunami // Science of Tsunami Hazards. — 1999. — Vol. 17, № 1. — P. 57–67.
4. **Stoker Dzh.Dzh.** Volny na vode. — M.: Izd-vo inostr. lit., 1959.
5. **Borovskikh A.V.** Dvumernoe uravnenie eikonala // Sib. mat. zhurnal. — 2006. — T. 47, № 5. — S. 993–1018.
6. **Rashevskii P.K.** Kurs differencial'noi geometrii. — M.: Izd-vo LKI, 2008.
7. **Savelov A.A.** Ploskie krivye. Sistematika, svoistva, primenenie. — M.: LIBROKOM, 2010.
8. **Ikonnikova L.N., Yaroshenya R.A.** Raschet refrakcii voln cunami dlya Tikhookeanskogo poberezh'ya SSSR // Teoreticheskie i eksperimental'nye issledovaniya po probleme cunami. — M.: Nauka, 1977. — S. 420–427.
9. **Dobrokhotov S.Yu., Zhevandrov P.N.** Raschet volnovykh dvizhenii v okeane nad peremennym dnom metodom Maslova // Issledovaniya cunami. — Moskva, 1986. — № 1. — S. 73–79.
10. **Satake K.** Effects of bathymetry on tsunami propagation: Application of ray tracing to tsunamis // Pure and Applied Geophysics. — 1988. — Vol. 126, № 1. — P. 27–36.
11. **Marchuk An.G.** Metody rascheta pryamykh i obratnykh zadach kinematiki cunami. — Novosibirsk: Nauka, 2019.
12. **Marchuk An.G., Vasiliev G.S.** The fast method for a rough tsunami amplitude estimation // Bull. Novosibirsk Comp. Center. Ser. Math. Model. in Geoph. — Novosibirsk, 2014. — Iss. 17. — P. 21–34.
13. **Titov V.V., Gonzalez F.** Implementation and Testing of the Method of Splitting Tsunami (MOST) Model // NOAA Technical Memorandum ERL PMEL-112. — Washington DC, 1997.
14. **Dantzig G.** On the shortest route through a network // Management Science. — 1960. — Vol. 6, № 2. — P. 187–190.
15. **Marchuk An.G.** Chislennye metody rascheta kinematiki voln cunami // Matematicheskie problemy geofiziki: Chislennye issledovaniya geofizicheskikh zadach. — Novosibirsk, 1988. — S. 69–90.
16. **Marchuk An.G.** Volnovaya energiya cunami // Vestnik NGU. Seriya: Informacionnye tekhnologii. — 2020. — T. 18, № 4. — S. 39–53. — DOI: 10.25205/1818-7900-2020-18-4-39-53.
17. **Fujima K., Yuliadi D., Goto C., et al.** Characteristics of long waves trapped by conical island // Coastal Engineering in Japan. — 1995. — Vol. 38, № 2. — P. 111–132.