

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ*)

С. И. Кабанихин, О. И. Криворотько

Построен численный метод решения задачи Дирихле для волнового уравнения в двумерном пространстве. Проведен анализ некорректности задачи и построен алгоритм регуляризации. Первый этап регуляризации задачи состоит в разложении в ряд Фурье по одной из переменных и в переходе к конечной последовательности задач Дирихле для волнового уравнения в одномерном пространстве. Каждая из полученных задач Дирихле для волнового уравнения в одномерном пространстве сведена к обратной задаче $Aq = f$ по отношению к некоторой прямой (корректной) задаче. Проведен анализ степени некорректности обратной задачи на основе изучения характера убывания сингулярных чисел оператора A и его дискретного аналога A_{mn} . Для относительно небольших значений m и n разработан численный алгоритм построения r -решения обратной задачи. Для общего случая применен оптимизационный метод решения обратной задачи. Приведены результаты численных расчетов.

Ключевые слова: задача Дирихле, волновое уравнение, степень некорректности, сингулярное разложение.

Введение. Первые результаты по исследованию краевых задач с данными на всей границе области для гиперболических уравнений были получены в работах Ж. Адамара [1], А. Хубера [2], Д. Манжерона [3].

Д. Буржин и Р. Даффин [4, 5] рассмотрели задачу Дирихле в прямоугольнике $R : \{0 \leq t \leq T; 0 \leq x \leq S\}$ для уравнения затухающих колебаний струны $(D_t^2 - D_x^2 - k^2)u = 0$. Здесь и далее $D_t u = \frac{\partial u}{\partial t}$, $D_x u = \frac{\partial u}{\partial x}$, $D_t^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ и т. п. Они доказали, что если число T/S иррационально, то имеет место единственность решения задачи в классе функций, которые непрерывно дифференцируемы и имеют в R суммируемые по Лебегу вторые производные. Ими также доказано существование решения задачи Дирихле при некоторых ограничениях на параметры T, S и k .

С. Г. Овсепян [6] рассмотрел задачу

$$(1 + \lambda)D_x^2 u - (1 - \lambda)D_y^2 u = 0, \quad u|_{\Gamma} = \sigma(s), \quad (1)$$

для ограниченной многосвязной области D с границей Γ (здесь λ — действительный параметр, $|\lambda| < 1$). При некоторых ограничениях на границу Γ установлена единственность решения задачи (1) в первом классе Бэра. Показано, что задача (1) неустойчива относительно изменения области не только для односвязных областей, но и для произвольной ограниченной многосвязной области D с кусочно-гладкой границей Γ .

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 11-01-00105), Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (ГК № 14.740.11.0350).

Ю. М. Березанский [7], исследуя задачу Дирихле для уравнения

$$(D_t^2 - D_x^2)u = 0, \quad (2)$$

рассмотрел не гладкие решения, а решения из L_2 . В результате он смог построить примеры областей, для которых обобщенное решение задачи Дирихле устойчиво относительно малых возмущений границы.

В работах В. М. Борок и ее учеников [8–11] исследованы краевые задачи в слое $\{t, x : 0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^n\}$ для эволюционных уравнений и систем с постоянными коэффициентами. Установлены классы единственности и корректной разрешимости рассматриваемых задач. В частности, в работе [8] показано, что для уравнения (2) задача с условиями $u(x, 0) = u(x, T) = 0, -\infty < x < \infty$, имеет нетривиальные решения в классе ограниченных функций.

К исследованию краевых задач для гиперболических уравнений привело также изучение нестационарных задач для линейных систем дифференциальных уравнений, не разрешимых относительно старших производных по времени, начало теории которых было заложено в работах С. Л. Соболева [12, 13] (см. также Р. А. Александрян [14] и Р. Денчев [15]).

Т. И. Зеленьяк и М. В. Фокин [16–18] пришли к изучению разрешимости и спектральных свойств задачи Дирихле для волнового уравнения, исследуя асимптотическое поведение решения задачи:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + Au = 0, \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1,$$

где A — самосопряженный ограниченный положительный оператор в гильбертовом пространстве $W_2^1(D)$.

С. А. Алдашев [19] установил однозначную разрешимость задачи Дирихле в цилиндре для многомерного волнового уравнения.

Достаточно полный список литературы можно найти в монографиях Б. И. Пташника [20] и В. П. Бурского [21].

В данной статье в п. 1 сформулированы прямая и обратная задачи для волнового уравнения. В п. 2 установлены условия корректности задачи Дирихле для волнового уравнения и вычислены сингулярные числа оператора обратной задачи в случае постоянных коэффициентов. В п. 3 проведена дискретизация обратной задачи для переменных коэффициентов, сведение ее к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), а также вычислены дискретные сингулярные числа обратной задачи. В п. 4 приведены результаты численных расчетов, а также проведен сравнительный анализ методов сингулярного разложения и оптимизации (на основе статьи [22]).

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу определения колебаний поверхности водоема в случае, когда в определенный момент времени $t = 0$ на дне водоема произошло смещение почвы, описываемое финитной функцией $f^{(1)}(x, y) = u(x, y, 0)$. Предполагается, что через определенный промежуток времени $t = T$ измерена форма поверхности водоема $f^{(2)}(x, y) = u(x, y, T)$. Предполагаем также, что за время T волна не успела дойти до берегов водоема и, следовательно, на границе водоема можно поставить однородные граничные условия. Используя приближение мелкой воды [23], обозначим $c(x, y) = \sqrt{gH(x, y)}$, где $g = 9,81 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ — ускорение свободного падения, $H(x, y) > 0$ — функция, описывающая рельеф дна (батиметрия). Таким образом, приходим к следующей задаче Дирихле для волнового уравнения:

$$\begin{aligned} D_t^2 u &= g[D_x(H(x, y)D_x u) + D_y(H(x, y)D_y u)], \quad (x, y) \in \Omega, \quad t \in (0, T); \\ u|_{t=0} &= f^{(1)}(x, y), \quad u|_{t=T} = f^{(2)}(x, y), \quad (x, y) \in \Omega; \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in (0, T), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\Omega = (0, L) \times (0, L)$.

Для однородности условий на $\partial\Omega$ потребуем достаточной малости носителя функции $f^{(1)}(x, y)$:

$$\text{supp}(f^{(1)}) \in \Omega(a) = (L/2 - a, L/2 + a) \times (L/2 - a, L/2 + a), \quad a \in (0, L/2),$$

и достаточной малости параметра $T \in (0, T_{\max})$, где $T_{\max} = (L/2 - a)/\|c\|_{C(0, L)}$.

Задача (3) некорректна (ее неустойчивость показана в [22]), поэтому для регуляризации сформулируем эту задачу как обратную по отношению к прямой (корректной) начально-краевой задаче для волнового уравнения (метод был предложен в работе [24])

$$\begin{aligned} D_t^2 u &= g[D_x(H(x, y)D_x u) + D_y(H(x, y)D_y u)], \quad (x, y) \in \Omega, \quad t \in (0, T); \\ u|_{t=0} &= f^{(1)}(x, y), \quad D_t u|_{t=T} = q(x, y), \quad (x, y) \in \Omega; \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in (0, T). \end{aligned} \quad (4)$$

В прямой задаче (4) по заданным функциям $q(x, y)$ и $H(x, y)$ требуется определить функцию $u(x, y, t)$.

Пусть теперь $q(x, y)$ неизвестна. Предположим, что относительно решения прямой задачи (4) известна дополнительная информация:

$$u(x, y, T) = f^{(2)}(x, y). \quad (5)$$

Обратная задача заключается в определении функции $q(x, y)$ из соотношений (4), (5) по заданным функциям $f^{(1)}(x, y)$, $f^{(2)}(x, y)$ и $H(x, y)$.

2. Исследование задачи в случае постоянных коэффициентов.

2.1. Теорема единственности. Продолжим все функции, входящие в задачу (4), (5), нечетным образом на промежуток $(-L, 0)$ по переменной y . Тогда после разложения в ряд Фурье функции

$$u(x, y, t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} u_k(x, t) \sin(\pi k y / L)$$

и всех остальных получим последовательность одномерных обратных задач:

$$D_t^2 u_k = (D_x^2 - k^2(\pi/L)^2)u_k, \quad x \in (0, L), \quad t \in (0, T), \quad (6)$$

$$u_k(x, 0) = f_k^{(1)}(x), \quad x \in (0, L), \quad (7)$$

$$D_t u_k(x, 0) = q_k(x), \quad x \in (0, L), \quad (8)$$

$$u_k(0, t) = u_k(L, t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (9)$$

$$u_k(x, T) = f_k^{(2)}(x), \quad x \in (0, L). \quad (10)$$

Здесь $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Продолжая нечетно функции $u_k(x, t)$, $f_k^{(1)}(x)$, $f_k^{(2)}(x)$, $q_k(x)$ по переменной x на промежуток $(-L, 0)$, разложим их в ряды Фурье $u_k(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_{k,n}(t) \sin \frac{n\pi x}{L}$

и т. д. Получим последовательность обратных задач

$$u_{k,n}'' + (\pi/L)^2(n^2 + k^2)u_{k,n} = 0, \quad u_{k,n}(0) = f_{k,n}^{(1)}, \quad u_{k,n}'(0) = q_{k,n}, \quad (11)$$

$$u_{k,n}(T) = f_{k,n}^{(2)}. \quad (12)$$

Решение прямой задачи (11) записывается следующим образом:

$$u_{k,n}(t) = f_{k,n}^{(1)} \cos p_{k,n} t + \frac{q_{k,n}}{p_{k,n}} \sin p_{k,n} t, \quad p_{k,n} = \frac{\pi}{L} \sqrt{k^2 + n^2}. \quad (13)$$

После подстановки $t = T$ в (13) получим

$$u_{k,n}(T) = f_{k,n}^{(2)} = f_{k,n}^{(1)} \cos p_{k,n} T + \frac{q_{k,n}}{p_{k,n}} \sin p_{k,n} T. \quad (14)$$

Теорема 1 (единственность решения обратной задачи). *Предположим, что для всех $k, n \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{Z}$ параметр $T \in (0, T_{\max})$ удовлетворяет условию $T \neq \pi m/p_{k,n}$ (например, $T = r_1/r_2$ — рациональное число из промежутка $(0, T_{\max})$). Тогда если решение обратной задачи (6)–(10) существует в $C^1[0, L]$, то оно единственно и его коэффициенты Фурье выражаются формулой:*

$$q_{k,n} = \frac{f_{k,n}^{(2)} - f_{k,n}^{(1)} \cos p_{k,n}T}{\sin p_{k,n}T} p_{k,n}.$$

2.2. *Сингулярные числа оператора обратной задачи.* Определим оператор $A(k) : L_2(0, L) \rightarrow L_2(0, L)$. Пусть $q_k \in L_2(0, L)$. Подставим $q_k(x)$ в (8) и решим прямую задачу (6)–(9). Известно [25], что если $f_k^{(1)} \in H^1(0, L)$ и $q_k \in L_2(0, L)$, то существует единственное решение $u_k \in H^1((0, L) \times (0, T))$ задачи (6)–(9). По теореме о следах [24] существует $u_k(x, T) \in L_2(0, L)$. Полагаем $A(k)q_k := u_k(x, T)$. Таким образом, оператор $A(k) : L_2(0, L) \rightarrow L_2(0, L)$ определен корректно.

Теорема 2. *Сингулярные числа оператора $A(k)$ имеют следующий вид: $\sigma_n(A(k)) = |\sin p_{k,n}T|/p_{k,n}$, $n \in \mathbb{N}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу уравнения (14) результат действия оператора $A(k)$ на элемент q_k можно записать следующим образом:

$$(A(k)q_k)(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\sin p_{k,n}T}{p_{k,n}} q_{k,n} \sin \frac{\pi nx}{L}. \quad (15)$$

Известно, что $\sigma_n^2(A(k)) = \lambda_n(A^*(k)A(k))$, где $\lambda_n(A^*(k)A(k))$ — собственные числа оператора $A^*(k)A(k)$. Найдем сопряженный оператор $A^*(k) : L_2(0, L) \rightarrow L_2(0, L)$. По определению,

$$\langle A(k)q_k, \psi \rangle_{L_2(0,L)} = \langle q_k, A^*(k)\psi \rangle_{L_2(0,L)}, \quad \psi(x) \in L_2(0, L). \quad (16)$$

Определение (16) можно переписать следующим образом:

$$\int_0^L (A(k)q_k)(x)\psi(x) dx = \int_0^L q_k(x)(A^*(k)\psi)(x) dx. \quad (17)$$

Продолжим ψ нечетным образом на промежуток $(-L, L)$, разложим в ряд Фурье

$$\psi(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \psi_n \sin(\pi nx/L) \quad (18)$$

и преобразуем соотношение (17):

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\sin p_{k,n}T}{p_{k,n}} q_{k,n} \sin \frac{\pi nx}{L} \right) \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} \psi_m \sin \frac{\pi mx}{L} \right) dx = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\sin p_{k,n}T}{p_{k,n}} q_{k,n} \psi_n \\ & \times \int_0^L \sin^2 \frac{\pi nx}{L} dx = \int_0^L \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} q_{k,m} \sin \frac{\pi mx}{L} \right) \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\sin p_{k,n}T}{p_{k,n}} \psi_n \sin \frac{\pi nx}{L} \right) dx. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$(A^*(k)\psi)(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\sin p_{k,n}T}{p_{k,n}} \psi_n \sin \frac{\pi n x}{L}. \quad (19)$$

Отметим, что в силу (15) и (19) оператор $A(k)$ является самосопряженным.

Используя (15) и (19), получим разложение самосопряженного оператора $A^*(k)A(k)$:

$$\begin{aligned} A^*(k)(A(k)q_k)(x) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\sin p_{k,n}T}{p_{k,n}} (A(k)q_k)_n \sin \frac{\pi n x}{L} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{\sin p_{k,n}T}{p_{k,n}} \right)^2 q_{k,n} \sin \frac{\pi n x}{L}. \end{aligned}$$

Следовательно, собственные числа оператора $A^*(k)A(k)$ имеют вид

$$\lambda_n(A^*(k)A(k)) = \left(\frac{\sin p_{k,n}T}{p_{k,n}} \right)^2.$$

Тогда сингулярные числа оператора $A(k)$ записываются следующим образом: $\sigma_n(A(k)) = |\sin p_{k,n}T|/p_{k,n}$.

На рис. 1 видно, что с ростом n сингулярные числа оператора $A(k)$ убывают. Отметим также, что с ростом k значение сингулярных чисел с одинаковыми номерами n уменьшается.

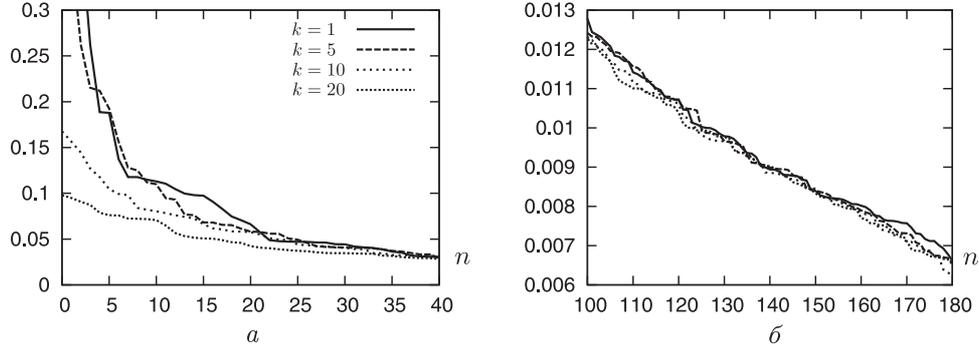


Рис. 1. Графики $\sigma_n(A(k))$ при $k = 1, 5, 10, 20$, $T = 3$:
а) $n = 0, \dots, 40$; б) $n = 100, \dots, 180$

3. Дискретизация обратной задачи в случае $c = c(x)$. В численных расчетах мы рассмотрим дискретный аналог обратной задачи. (обратная задача (4), (5) исследуется аналогично, но требует намного более громоздких вычислений):

$$\begin{aligned} D_t^2 u_k &= c^2(x)(D_x^2 - k^2(\pi/L)^2)u_k, \quad x \in (0, L), \quad t \in (0, T), \\ u_k(x, 0) &= f_k^{(1)}(x), \quad D_t u_k(x, 0) = q_k(x), \quad x \in (0, L), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} u_k(0, t) &= u_k(L, t) = 0, \quad t \in (0, T); \\ u_k(x, T) &= f_k^{(2)}(x), \end{aligned} \quad (21)$$

полученной путем разложения в ряды Фурье функций, входящих в задачу

$$\begin{aligned} D_t^2 u &= c^2(x)(D_x^2 + D_y^2)u, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t \in (0, T), \\ u|_{t=0} &= f^{(1)}(x, y), \quad D_t u|_{t=0} = q(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in (0, T); \end{aligned} \quad (22)$$

$$u|_{t=T} = f^{(2)}(x, y). \quad (23)$$

Пусть N_x — количество узлов равномерной сетки по переменной x на интервале $(0, L)$. Выберем количество узлов равномерной сетки по переменной t из условия $N_t \geq N_x$, N_t нечетное. Шаг по пространственной переменной x равен $h_x = L/N_x$ и шаг по времени $h_t = T/N_t$. Обозначим $r_i = c_i(h_t/h_x)$ и $a_{k_i} = (\pi/L)^2(c_i k h_t)^2/2$, $i = 0, 1, \dots, N_x$.

Используя явную разностную схему второго порядка аппроксимации, получим дискретную задачу

$$\begin{aligned} u_{k_i}^{j+1} &= r_i^2(u_{k_{i+1}}^j - 2u_{k_i}^j + u_{k_{i-1}}^j) - a_{k_i}(u_{k_{i+1}}^j + u_{k_{i-1}}^j) + 2u_{k_i}^j - u_{k_i}^{j-1}, \\ u_{k_i}^0 &= f_{k_i}^{(1)}, \quad u_{k_i}^1 = \gamma(f_{k_i}^{(1)}) + h_t q_{k_i}, \quad i = 0, 1, \dots, N_x, \\ u_{k_0}^j &= u_{k_{N_x}}^j = 0, \quad j = 0, 1, \dots, N_t; \end{aligned} \quad (24)$$

$$u_{k_i}^{N_t} = f_{k_i}^{(2)}. \quad (25)$$

Здесь $\gamma(f_{k_i}^{(1)}) = f_{k_i}^{(1)} + r_i^2(f_{k_{i+1}}^{(1)} - 2f_{k_i}^{(1)} + f_{k_{i-1}}^{(1)})/2 - a_{k_i}(f_{k_{i+1}}^{(1)} + f_{k_{i-1}}^{(1)})/2$.

Целью следующего раздела является представление обратной задачи (24), (25) в виде $A_{ll}(k)q_k = F_k$, где F_k — вектор данных задачи, $l = N_x + 1$.

3.1. Сведение обратной задачи к СЛАУ. Пусть $v_1 = (u_{k_0}^2, u_{k_1}^2, \dots, u_{k_{N_x}}^2)^T$, $v_2 = (u_{k_0}^3, u_{k_1}^3, \dots, u_{k_{N_x}}^3)^T$.

Положим $U^0 = (u_{k_0}^0, u_{k_1}^0, \dots, u_{k_{N_x}}^0, u_{k_0}^1, u_{k_1}^1, \dots, u_{k_{N_x}}^1)^T$, $U^1 = (v_1, v_2)^T$, $Q = (q_{k_0}, q_{k_1}, \dots, q_{k_{N_x}})^T$. Векторы U^0 , U^1 имеют размерность $2N_x + 2$. Векторы v_1 , v_2 можно записать следующим образом: $v_1 = B_1 U^0$, $v_2 = B_2 v_1 + B_3 U^0$.

Обозначим $b_{k_i} = r_i^2 - a_{k_i}$, $i = 0, 1, \dots, N_x$. Здесь

$$\begin{aligned} B_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & b_{k_1} & 2 - 2r_1^2 & b_{k_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & b_{k_{N_x-1}} & 2 - 2r_{k_{N_x-1}}^2 & b_{k_{N_x-1}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ B_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{k_1} & 2 - 2r_1^2 & b_{k_1} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_{k_2} & 2 - 2r_2^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{k_{N_x-1}} & 2 - 2r_{k_{N_x-1}}^2 & b_{k_{N_x-1}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ B_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Теорема 3. Обратная задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений $A_{ll}(k)q_k = F_k$, $l = N_x + 1$, где матрица $A_{ll}(k)$ имеет следующий вид: $A_{ll}(k) = MP$, $M = (C_{[N_x+2]}^{(N_t-1)/2}, C_{[N_x+3]}^{(N_t-1)/2}, \dots, C_{[2N_x+2]}^{(N_t-1)/2})^T$, где $C_{[i]}^{(N_t-1)/2}$ —

i -я строка матрицы $C^{(N_t-1)/2}$, где

$$C = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 B_1 + B_3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & h_t & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h_t & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Размерность матрицы P равна $(2N_x + 1) \times (N_x + 1)$. Вектор правых частей $F_k = F_k^{(2)} - MKF_k^{(1)}$, где $F_k^{(p)} = (f_{k_0}^{(p)}, f_{k_1}^{(p)}, \dots, f_{k_{N_x}}^{(p)})^T$, $p = 1, 2$, и

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{k_1}/2 & 1 - r_1^2 & b_{k_1}/2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_{k_2}/2 & 1 - r_2^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{k_{N_x-1}}/2 & 1 - r_{N_x-1}^2 & b_{k_{N_x-1}}/2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.2 Сингулярные числа матрицы $A_{ll}(k)$. Для постоянного и переменного коэффициента c исследуем графики сингулярных чисел матрицы $A_{ll}(k)$.

Отметим, что сингулярные числа матрицы $A_{ll}(k)$ (рис. 2) имеют схожий характер убывания с сингулярными числами оператора $A(k)$ (см. рис. 1).

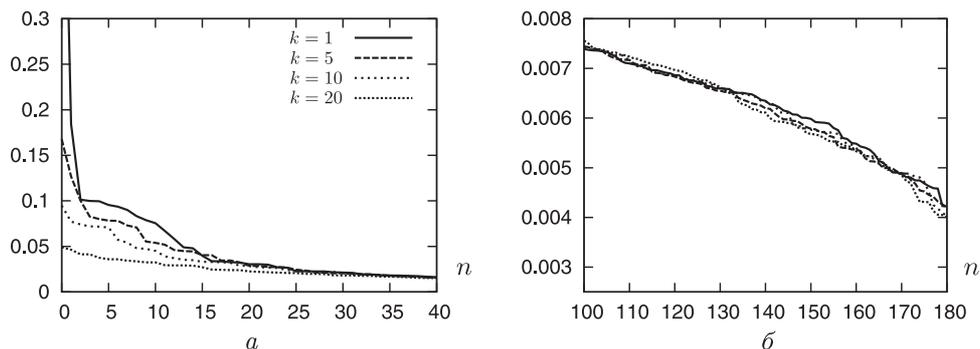


Рис. 2. Сингулярные числа $\sigma_n(A_{ll}(k))$ при $k = 1, 5, 10, 20$, $T = 3$ и $c = 1$:
а) $n = 0, \dots, 40$; б) $n = 100, \dots, 180$

Для построения скорости $s(x)$ мы полагали, что рельеф дна описывается функцией

$$H(x) = \left(g \left(\frac{9\beta}{10\pi^2} x^2 - \beta \right)^2 \right)^{-1}, \quad \beta = 5.$$

Тогда $c(x) = \left(\frac{9\beta}{10\pi^2}x^2 - \beta\right)^{-1}$. Расположение сингулярных чисел матрицы $A_{ll}(k)$ показано на рис. 3.

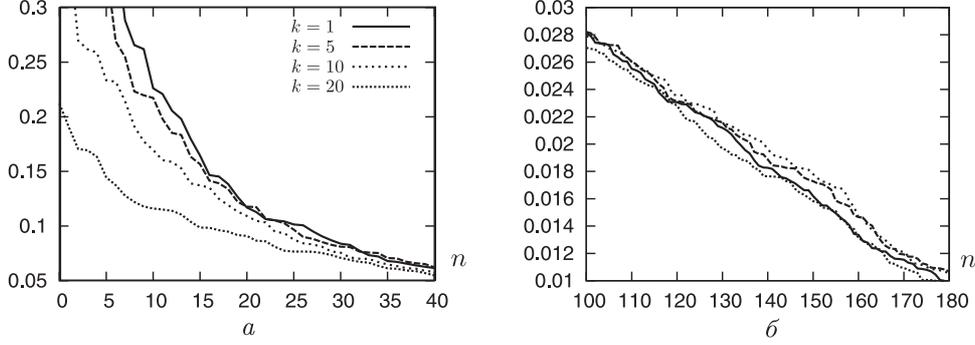


Рис. 3. Сингулярные числа $\sigma_n(A_{ll}(k))$ при $k = 1, 5, 10, 20, T = 3$ и $c = c(x)$:
 а) $n = 0, \dots, 40$; б) $n = 100, \dots, 180$

3.3 Алгоритм построения нормального псевдорешения и r -решения. Рассмотрим задачу $A_{mn}q_n = f_m$, где $A_{mn} \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ — прямоугольная матрица, $q_n \in \mathbb{R}^n, f_m \in \mathbb{R}^m$ — векторы. В силу теоремы о сингулярном разложении существуют ортогональные матрицы U_{mm} и V_{nn} и набор неотрицательных чисел $\{\sigma_j\}$ такие, что $A_{mn} = U_{mm}\Sigma_{mn}V_{nn}^T, \sigma_{j+1} \leq \sigma_j$,

$$\Sigma_{mn} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_m & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача $A_{mn}q_n = f_m$ переписывается в следующем виде: $U_{mm}\Sigma_{mn}V_{nn}^Tq_n = f_m$.

Положим $z_n = V_{nn}^Tq_n$. Тогда $q_n = V_{nn}z_n$. В силу того, что $U_{mm}^T = U_{mm}^{-1}$, получаем $\Sigma_{mn}z_n = U_{mm}^Tf_m = g_m$. Следовательно $z_j = g_j/\sigma_j$, если $\sigma_j \neq 0, j = 1, 2, \dots, m$. При $\sigma_j = 0$ полагаем $z_j = 0$. Тем самым построено нормальное псевдорешение $q_{nr} = V_{nn}z_n$ [26].

В силу невозрастания последовательности $\{\sigma_j\}$ ошибки измерения могут возрастать, поскольку $z_j = g_j/\sigma_j$. В этом случае при определении z_j может получиться большая погрешность. Во избежание накопления погрешности необходимо предусмотреть операцию зануления малых сингулярных чисел, которую можно интерпретировать как специальную процедуру регуляризации.

Наиболее естественно полагать z_j равным нулю, начиная с некоторого номера r (т. е. строить r -решение). Важным является вопрос, при каком номере r обрыв сингулярных чисел $\sigma_j, j = 1, \dots, r$, будет оптимальным. При слишком малом номере r мы сильно изменим исходную систему, а при слишком большом номере r найденное решение будет обладать слишком большой погрешностью (ввиду деления на очень малое число).

Регуляризация в данном случае состоит в согласовании номера r с уровнем погрешности ε .

Теорема 4. Пусть q_r^ε — решение системы $Aq = f^\varepsilon, |f - f^\varepsilon| \leq \varepsilon$. Тогда справедлива следующая оценка:

$$\|q_{nr} - q_r^\varepsilon\|^2 \leq \frac{b^2}{3r^3} + \varepsilon^2 \sum_{j=1}^r \frac{1}{\sigma_j^2},$$

здесь r — решение уравнения $-b^2/r^4 + \varepsilon^2(1/(\sigma_r^2) - 1/(\sigma_1^2)) = 0$, $b = \|q\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проводится по стандартной схеме. Известно разложение для нормального псевдорешения задачи $Aq = f$ [26]:

$$q_{np} = \sum_{j=1}^{\infty} q_j v_j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\langle f, u_j \rangle}{\sigma_j} v_j. \quad (26)$$

Здесь q_j — коэффициенты Фурье функции q , $\{v_j\}$ и $\{u_j\}$ — ортонормированные последовательности функций (правые и левые сингулярные векторы соответственно), $\{\sigma_j\}$ — невозрастающая последовательность неотрицательных чисел.

Пусть r — оптимальный номер обрыва последовательности сингулярных чисел $\{\sigma_j\}$. Тогда

$$\|q_{np} - q_r^\varepsilon\|^2 \leq \|q_{np} - q_r\|^2 + \|q_r - q_r^\varepsilon\|^2. \quad (27)$$

Без ограничения общности предположим, что $q(x) = \sum_j q_j e^{ijx}$, $q(x) \in C^2[0, L]$. Тогда справедлива оценка $|q_j| \leq b/|j|^2$, $b = \|q\|_{C^2[0, L]}$.

Таким образом, первое слагаемое в неравенстве (27) оценивается следующим образом:

$$\|q_{np} - q_r\|^2 \leq \sum_{j=r}^{\infty} q_j^2 \leq \sum_{j=r}^{\infty} \frac{b^2}{j^4},$$

где по интегральному признаку справедливо

$$\sum_{j=r}^{\infty} \frac{b^2}{j^4} \leq b^2 \int_r^{\infty} \frac{1}{x^4} dx = \frac{b^2}{3r^3}.$$

Для второго слагаемого из (27) получаем оценку

$$\|q_r - q_r^\varepsilon\|^2 \leq \sum_{j=1}^r \frac{\langle f - f^\varepsilon, u_j \rangle^2}{\sigma_j^2} = \sum_{j=1}^r \frac{\varepsilon^2}{\sigma_j^2}.$$

Итого, имеем

$$\|q_{np} - q_r^\varepsilon\|^2 \leq \frac{b^2}{3r^3} + \varepsilon^2 \sum_{j=1}^r \frac{1}{\sigma_j^2}. \quad (28)$$

Таким образом, оптимальный номер обрыва r — это номер, минимизирующий правую часть в оценке (28), т. е. $r = \min_{l \in \mathbb{N}} \left(\frac{b^2}{3l^3} + \varepsilon^2 \int_1^l \frac{dx}{\sigma^2(x)} \right)$. Это эквивалентно тому, что r — решение уравнения $-b^2/r^4 + \varepsilon^2(1/(\sigma_r^2) - 1/(\sigma_1^2)) = 0$, что и требовалось доказать.

4. Численные эксперименты. Зададим точное решение обратной задачи (22), (23) в виде

$$q_T(x, y) = \sum_{k=1}^N q_{T_k}(x) \sin ky, \quad x \in \left(\frac{7\pi}{16}, \frac{9\pi}{16} \right), \quad y \in \left(\frac{3\pi}{10}, \frac{7\pi}{10} \right), \quad (29)$$

где

$$q_{T_k} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos 16x + 1}{20} \frac{\sin 5y + 1}{5} \sin ky dy.$$

График точного решения (29) изображен на рис. 4.

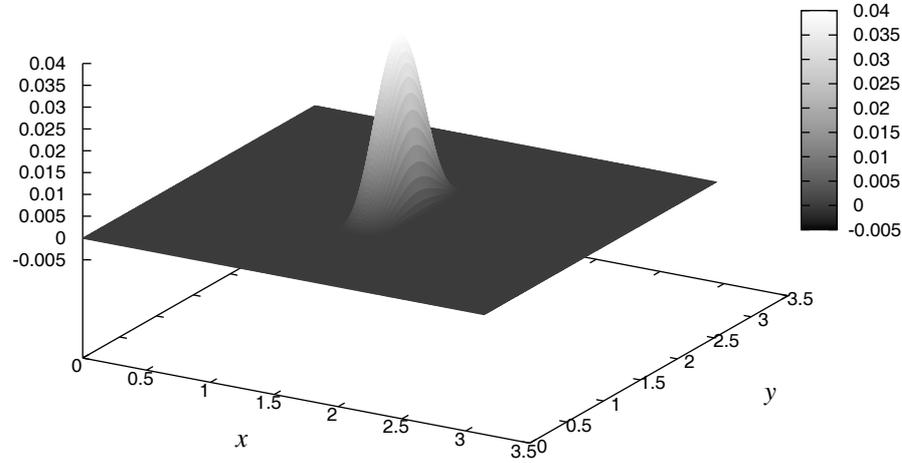


Рис. 4. Точное решение $q_T(x, y)$

В качестве известной функции $f^{(1)}(x, y)$ задачи (22) была рассмотрена функция

$$f^{(1)}(x, y) = \frac{\cos 16x + 1}{20} \frac{\sin 5y + 1}{20}, \quad x \in \left(\frac{7\pi}{16}, \frac{9\pi}{16}\right), \quad y \in \left(\frac{3\pi}{10}, \frac{7\pi}{10}\right).$$

В численных экспериментах методом сингулярного разложения были решены обратные задачи (20), (21) для каждого коэффициента Фурье $N = 1, 2, \dots, 50$ в области $L = \pi$, $T = 3$ на сетке $N_x = 250$, $N_y = 200$, $N_t = 591$.

На рис. 5 показаны восстановленная скорость смещения дна $q_r^\varepsilon(x, y)$ и разность точного $q_T(x, y)$ и r -решений.

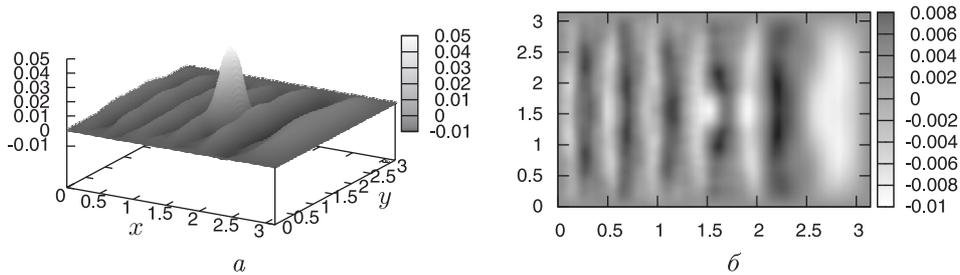


Рис. 5. График r -решения $q_r^\varepsilon(x, y)$ с ошибкой в данных $\varepsilon = 30\%$ и $r = 198$ (а); разность точного $q_T(x, y)$ и r -решения $q_r^\varepsilon(x, y)$ (б)

4.1. r -Решение в качестве начального приближения для метода итерации Ландвебера. В [22] обратная задача (22), (23) была решена градиентными методами. Проведем сопоставление методов сингулярного разложения и итерации Ландвебера. Пусть начальное приближение q_0 в методе итерации Ландвебера есть полученное r -решение обратной задачи для $T = 3$ с ошибкой в данных 30%. На рис. 6 изображены полученное решение для метода итерации Ландвебера $q_{500}(x, y)$, разность точного $q_T(x, y)$ и полученного $q_{500}(x, y)$ решений.

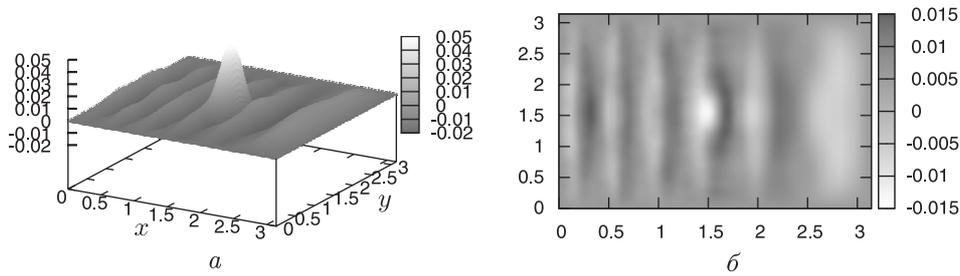


Рис. 6. График восстановленного решения $q_{500}(x, y)$ при 500 итерациях (а); разность точного $q_T(x, y)$ и полученного методом итерации Ландвебера решений (б)

Заметим, что применение оптимизации не улучшает r -решение (сравните рис. 5, б и 6, б).

ЛИТЕРАТУРА

1. Hadamard J. Equations aux derivees partielles, le cas hyperbolique // Enseign. Math. 1936. V. 35, N 1. P. 25–29.
2. Huber A. Die erste Randwertaufgabe für geschlossene Bereiche bei der Gleichung $u_{xy} = f(x, y)$ // Monatsh. Math. Phys. 1932. V. 39. P. 79–100.
3. Mangeron D. Sopra un problema al contorno per un'equazione differenziabile alle derivate parziali di quarto ordine con le caratteristiche realidoppie // Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli. 1932. V. 2. P. 29–40.
4. Bourgin D. G. The Dirichlet problem for the damped wave equation // Duke Math. J. 1940. V. 7. P. 97–120.
5. Bourgin D. G., Duffin R. The Dirichlet problem for the vibrating string equation // Bull. Amer. Math. Soc. 1939. V. 45. P. 851–858.
6. Овсепян С. Г. О порождающем множестве граничных точек в задаче Дирихле для уравнения колебания струны в многосвязных областях // Докл. АН АрмССР. 1964. Т. 39, № 4. С. 193–200.
7. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наук. думка, 1965.
8. Борок В. М. Классы единственности решения краевой задачи в бесконечном слое // Докл. АН СССР. 1968. Т. 183, № 5. С. 995–998.
9. Борок В. М. Классы единственности решения краевой задачи в бесконечном слое для систем линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Мат. сборник. 1969. Т. 79, № 2. С. 293–304.
10. Борок В. М. Корректно разрешимые краевые задачи в бесконечном слое для систем линейных уравнений в частных производных // Докл. АН СССР. Математика. 1971. Т. 35, № 1. С. 185–201.
11. Борок В. М., Антышко И. И. Критерий безусловной корректности краевой задачи в слое // Теория функции, функционального анализа и их приложения. 1976. Т. 26. С. 3–9.
12. Соболев С. Л. Об одной новой задаче математической физики // Докл. АН СССР. Математика. 1954. Т. 18, № 1. С. 3–50.
13. Соболев С. Л. О движение симметрического волчка с полостью, наполненной жидкостью // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1960. Т. 3. С. 20–55.
14. Александрян Р. А. К вопросу о зависимости почти периодичности решений дифференциальных уравнений от вида области: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1949.
15. Денчев Р. О спектре одного оператора // Докл. АН СССР. 1959. Т. 126, № 2. С. 259–262.
16. Зеленьяк Т. И. Избранные вопросы качественной теории уравнений с частными производными. Новосибирск: изд. НГУ, 1970.
17. Зеленьяк Т. И., Фокин М. В. О некоторых качественных свойствах решений уравнений С. Л. Соболева // Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к некоторым задачам математической физики. Новосибирск: Наука, 1973. С. 121–124.

18. Фокин М. В. О задаче Дирихле для уравнения колебания струны // Корректные начально-краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: изд. НГУ, 1981. С. 178–182.
19. Aldashev S. A. The Well-Posedness of the Dirichlet Problem in the Cylindric Domain for the Multidimensional Wave Equation // Math. Problems in Engineering. 2010. V. 2010. Article ID 653215. 7 p.
20. Пташник Б. И. Некорректные краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. Киев: Наук. думка, 1984.
21. Бурский В. П. Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. Киев: Наук. думка, 2002.
22. Kabanikhin S. I., Bektemesov M. A., Nurseitov D. B., Krivorotko O. I., Alimova A. N. Optimization Method in Dirichlet Problem for Wave Equation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2012. V. 20, N 2. P. 193–211.
23. Zhang C., Knepley M. G., Yuen D. A., Shi Y. Two New Approaches in Solving the Nonlinear Shallow Water Equations for Tsunamis. Argonne, 2007. 16 p. (Preprint/Elsevier).
24. Kabanikhin S. I., Karchevsky A. L. Method for solving the Cauchy Problem for an Elliptic Equation // J. Inverse Ill-posed Prob. 1995. V. 3, N 1. P. 21–46.
25. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
26. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009.

Статья поступила 18 июня 2012 г.

Кабанихин Сергей Игоревич

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН

пр. Акад. Лаврентьева, 6

Криворотько Ольга Игоревна

Новосибирский государственный университет

ул. Пирогова, 2

630090 г. Новосибирск

E-mail: kabanikhin@sscc.ru; krivorotko.olya@mail.ru