УДК 519.6

Сингулярное разложение в задаче об источнике*

С.И. Кабанихин[1,2], О.И. Криворотько[2]

[1]Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

[2]Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090
E-mails: kabanikhin@sscc.nsc.ru (Кабанихин С.И.), krivorotko.olya@mail.ru (Криворотько О.И.)

Кабанихин С.И., Криворотько О.И. Сингулярное разложение в задаче об источнике // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2012. — Т. 15, № 2. — С. 101–107.

Рассматривается обратная задача определения источника в волновом уравнении по дополнительной информации, измеренной на различных частях границы области. Исследуется степень некорректности обратной задачи. Построен и исследован алгоритм регуляризации, основанный на сингулярном разложении дискретного аналога обратной задачи.

Ключевые слова: *обратная задача об источнике, сингулярное разложение, степень некорректности.*

Kabanikhin S.I., Krivorotko O.I. Singular value decomposition in the source problem // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2012. — Vol. 15, № 2. — P. 101–107.

The inverse source problem for the wave equation is considered. The additional information is measured on different parts of the boundary of the domain. The degree of ill-posedness of the inverse problem is investigated. The numerical algorithm which is based on the SVD of the discrete inverse problem is constructed and tested.

Key words: *inverse source problem, singular value decomposition, degree of ill-posedness.*

1. Постановка задачи

Рассматривается обратная задача **1** определения функции $q(x,y)$ из соотношений

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + g(t)q(x,y), & (x,y) \in \Omega,\ t \in (0,T), \\ u\,|_{t=0} = 0, & u_t\,|_{t=0} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{на } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

$$u(0,y,t) = f_1(y,t), \tag{2}$$

где $\Omega = \{(x,y) \in R^2 \mid 0 < x < L_1,\ 0 < y < L_2\}$, n — внешняя нормаль к $\partial\Omega$. Здесь функция $g(t)$ считается известной и $g(+0) \neq 0$. Подобные задачи возникают в сейсморазведке, электродинамике, акустике и в других процессах, описываемых волновыми уравнениями. Дополнительная информация (2) во многих случаях может быть дополнена измерениями на других частях границы, например,

$$u(L_1,y,t) = f_2(y,t), \tag{3}$$

*Работа поддержана грантом РФФИ (проект № 03-01-11111).

$$u(x, L_2, t) = f_3(x, t). \tag{4}$$

Обратной задачей **2** назовем задачу определения функции $q(x, y)$ из соотношений (1)–(3), а обратной задачей **3** — определения функции $q(x, y)$ из соотношений (1)–(4).

В данной работе мы покажем, что увеличение количества дополнительной информации, т. е. переход от обратной задачи **1** к обратной задаче **2**, а затем к обратной задаче **3** улучшает разрешающую способность обратной задачи. Основная идея работы заключается в исследовании дискретного аналога обратной задачи, построении явного вида оператора дискретной обратной задачи (матрицы A_{mn}) и в исследовании поведения сингулярных чисел оператора дискретной обратной задачи.

2. Дискретизация обратной задачи

После несложных преобразований, включающих деконволюцию и разложение в ряд Фурье по переменной y, обратную задачу **1** можно привести к последовательности одномерных обратных задач [1–3]:

$$\begin{cases} {u_{(k)}}_{tt} = {u_{(k)}}_{xx} - \dfrac{4\pi^2}{L_2^2} k^2 u_{(k)}, & x \in (0, L_1), t \in (0, T), \\ u_{(k)}(x, 0) = q_{(k)}(x), & {u_{(k)}}_t(x, 0) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

$${u_{(k)}}_x(0, t) = {u_{(k)}}_x(L_1, t) = 0, \tag{6}$$

$$u_{(k)}(0, t) = f^1_{(k)}(t), \tag{7}$$

здесь $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Дополнительная информация для обратных задач **2** и **3** принимает вид

$$u_{(k)}(L_1, t) = f^2_{(k)}(t), \tag{8}$$

$$u_{(k)}(L_2, t) = f^3_{(k)}(t). \tag{9}$$

Построение сингулярного разложения в нашем случае является сложной задачей [4]. Однако на практике линейные некорректные задачи сводятся к системам линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), поэтому мы рассмотрим дискретный аналог обратной задачи.

Пусть количество узлов равномерной сетки по переменной x на интервале $(0, L_1)$ четно: $N_x = 2p$. Выберем количество узлов равномерной сетки по переменной t из условия $N_t \geq N_x$, где N_t нечетно. Интервал измерения по t выберем из условия $T = \frac{N_t}{N_x} L_1$. Тогда $h_x = h_t = h$, где $h_x = L_1/N_x$, $h_t = T/N_t$.

Используя явную разностную схему второго порядка аппроксимации, получим дискретную задачу

$$\begin{cases} u_i^{j+1} = \frac{c_k}{2} u_{i+1}^j + \frac{c_k}{2} u_i^j - u_i^{j-1}, & \\ u_i^0 = q_i, & u_i^1 = \frac{c_k}{4}(u_{i+1}^0 + u_{i-1}^0), \\ u_0^{j+1} = c_k u_1^j - u_0^{j-1}, & u_{N_x}^{j+1} = c_k u_{N_x-1}^j - u_{N_x}^{j-1}, \end{cases} \tag{10}$$

где

$$c_k = 2 - k^2 h^2,$$

$$u_0^j = f_1^j, \tag{11}$$

$$u_{N_x}^j = f_2^j, \tag{12}$$

$$u_{N_y}^j = f_3^j. \tag{13}$$

Целью следующего подпункта 2.1 является представление обратной задачи (10)–(11) в виде $A^1_{m,n}q_n = f^1_m$, обратной задачи (10)–(12) в виде $A^{12}_{2m,n}q_n = f^2_{2m}$, обратной задачи (10)–(13) в виде $A^{123}_{3m,n}q_n = f^3_{3m}$.

2.1. Сведение обратных задач к СЛАУ

Пусть

$$v_1 = \left(u_0^2, u_2^2, \ldots, u_{N_x}^2\right)^\top, \qquad v_2 = \left(u_1^3, u_3^3, \ldots, u_{N_x-1}^3\right)^\top.$$

Положим

$$U^0 = \left(u_0^0, u_2^0, \ldots, u_{N_x}^0, u_1^1, u_3^1, \ldots, u_{N_x-1}^1\right)^\top, \qquad U^1 = \left(v_1, v_2\right)^\top,$$

$$Q = \left(q_0, q_2, \ldots, q_{N_x}\right)^\top.$$

В силу того, что $N_x = 2p$, векторы U^0 и U^1 имеют размерность $2p+2$. Векторы v_1 и v_2 можно записать следующим образом [1]:

$$v_1 = B_4 U^0, \quad v_2 = B_1 v_1 + B_2 B_3 U^0.$$

Здесь

$$B_1 = \begin{pmatrix} \frac{c_k}{2} & \frac{c_k}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{c_k}{2} & \frac{c_k}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{c_k}{2} & \frac{c_k}{2} \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix},$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & c_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & \frac{c_k}{2} & \frac{c_k}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & c_k \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Обратная задача* **1** *сводится к системе линейных алгебраических уравнений* $A^1_{m,n}q_n = f^1_m$, *где матрица* $A^1_{m,n}$ *имеет следующий вид*:

$$A^1_{m,n} = M_1 P, \quad M_1 = \begin{pmatrix} \text{1-я строка матрицы} \quad I \\ \text{1-я строка матрицы} \quad C \\ \text{1-я строка матрицы} \quad C^2 \\ \vdots \\ \text{1-я строка матрицы} \; C^{(N_t-1)/2} \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} B_4 \\ B_1 B_4 + B_2 B_3 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\dfrac{c_k}{4} & \dfrac{c_k}{4} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{c_k}{4} & \frac{c_k}{4} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\dfrac{c_k}{4} & \dfrac{c_k}{4} \end{pmatrix}.$$

Размерность матрицы P равна $(2p+1)\times(p+1)$.

Следствие 1. *Обратные задачи* **2** *и* **3** *сводятся к системам линейных алгебраических уравнений $A^{12}_{2m,n}q_n = f^2_{2m}$ и $A^{123}_{3m,n}q_n = f^3_{3m}$ соответственно, где*

$$A^{12} = \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1P \\ M_2P \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} (p+1)\text{-я строка матрицы } I \\ (p+1)\text{-я строка матрицы } C \\ (p+1)\text{-я строка матрицы } C^2 \\ \vdots \\ (p+1)\text{-я строка матрицы } C^{(N_t-1)/2} \end{pmatrix},$$

$$A^{123} = \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1P \\ M_2P \\ M_3P \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} (p+1)\text{-я строка матрицы } C^{(N_t-1)/2} \\ (p+2)\text{-я строка матрицы } C^{(N_t-1)/2} \\ (p+3)\text{-я строка матрицы } C^{(N_t-1)/2} \\ \vdots \\ (2p-1)\text{-я строка матрицы } C^{(N_t-1)/2} \end{pmatrix}.$$

Напомним, что матрицы A^1, A^{12}, A^{123} построены для конкретного значения k, т. е. $A^1 = A^1(k)$, $A^{12} = A^{12}(k)$, $A^{123} = A^{123}(k)$.

Исследуем сингулярные числа матриц.

2.2. SVD анализ матриц

Ниже приведены графики сингулярных чисел при различных значениях $k = 0$, 4, 15, 25.

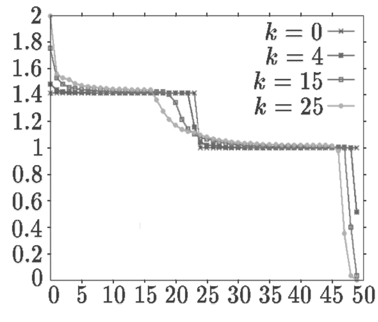


Рис. 1. $\sigma_j(A^1)$

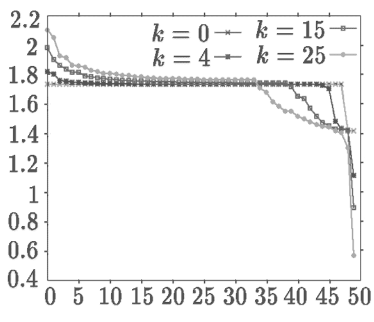


Рис. 2. $\sigma_j(A^{12})$

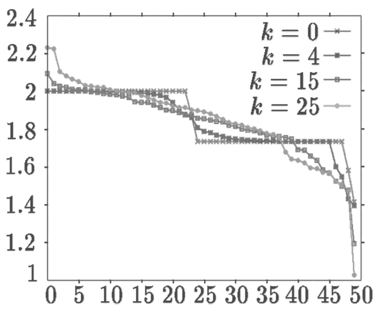


Рис. 3. $\sigma_j(A^{123})$

На рис. 1 приведены сингулярные числа матрицы A^1, $\sigma_j(A^1)$, на рис. 2 — сингулярные числа матрицы A^{12}, $\sigma_j(A^{12})$, на рис. 3 — сингулярные числа матрицы A^{123}, $\sigma_j(A^{123})$, $j = 0, 1, 2, \ldots, 50$.

Анализ графиков на рис. 3 показывает, что у задачи (10)–(13) сингулярные числа $\sigma_j(A^{123})$ медленнее стремятся к нулю, чем у задачи (10)–(12). В свою очередь, у задачи (10)–(12) сингулярные числа $\sigma_j(A^{12})$ медленнее стремятся к нулю, нежели у задачи (10)–(11). С ростом k сингулярные числа во всех трех случаях стремятся к нулю, т. е. степень некорректности задачи растет [1].

Таким образом, количество измерений на границе области непосредственно влияет на характер убывания сингулярных чисел матрицы, соответствующей оператору задачи.

2.3. Алгоритм построения нормального псевдорешения и r-решения

Рассмотрим задачу $A_{mn}q_n = f_m$. В силу теоремы о сингулярном разложении существуют ортогональные матрицы U_{mm} и V_{nn} и набор неотрицательных чисел $\{\sigma_j\}$, что

$$A_{mn} = U_{mm}\Sigma_{mn}V_{nn}^{\top}.$$

Здесь

$$\Sigma_{mn} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_m & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{j+1} \le \sigma_j.$$

Задача $A_{mn}q_n = f_m$ переписывается в виде

$$U_{mm}\Sigma_{mn}V_{nn}^{\top}q_n = f_m.$$

Положим $z_n = V_{nn}^{\top}q_n$. Тогда $q_n = V_{nn}z_n$. В силу того, что $U_{mm}^{\top} = U_{mm}^{-1}$, получаем

$$\Sigma_{mn}z_n = U_{mm}^{\top}f_m = g_m.$$

Следовательно, $z_j = g_j/\sigma_j$, если $\sigma_j \ne 0\,(j = 1, 2, \dots, m)$. При $\sigma_j = 0$ полагаем $z_j = 0$. Тем самым построено *нормальное псевдорешение* $q_{\text{нп}} = V_{nn}z_n$ [2].

В силу невозрастания последовательности $\{\sigma_j\}$ ошибки измерения могут возрастать, поскольку $z_j = g_j/\sigma_j$. В этом случае при определении z_j может получиться большая погрешность. Во избежание накопления погрешности необходимо предусмотреть операцию зануления малых сингулярных чисел, которую можно интерпретировать как специальную процедуру регуляризации.

Наиболее естественно полагать z_j равным нулю, начиная с некоторого номера r (т. е. строить r-решение). Важным является вопрос: при каком номере r обрыв сингулярных чисел σ_j, $j = 1, \dots, r$, будет оптимальным? При слишком малом номере r мы сильно изменим исходную систему, а при при слишком большом номере r найденное решение будет обладать слишком большой погрешностью (ввиду деления на очень малое число).

Регуляризация в данном случае состоит в согласовании номера r с уровнем погрешности ϵ.

Теорема 2. *Пусть q_r^{ϵ} — решение системы $Aq = f^{\epsilon}$, $\|f - f^{\epsilon}\| \le \epsilon$. Тогда справедлива следующая оценка:*

$$\|q_{нп} - q_r^{\epsilon}\|^2 \le \frac{c^2}{3r^3} + \epsilon^2\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{\sigma_j^2}, \tag{14}$$

здесь c — некоторая постоянная, а r — решение уравнения

$$-\frac{c^2}{r^4} + \epsilon^2\frac{1}{\sigma_r^2} = 0. \tag{15}$$

3. Численные эксперименты

В численных экспериментах полагалось: $L_1 = L_2 = \pi$, $T = \frac{3}{2}\pi$, $N_x = 100$, $N_t = 151$. В качестве пробного решения была рассмотрена функция

$$q_T(x,y) = 0.1 + \frac{\cos 8y + 1}{8}\,\frac{\cos 8x + 1}{8}, \quad x, y \in \left(\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right) \times \left(\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right). \tag{16}$$

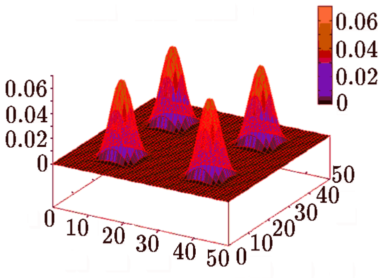


Рис. 4. График точного решения $q_T(x,y)$

На рис. 4 представлен график точного решения $q_T(x,y)$.

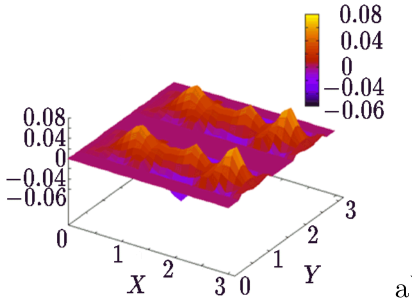
В качестве дополнительной регуляризации использовался прием С.К. Годунова [5]. В случае возникновения малых сингулярных чисел для использования регуляризующего алгоритма задавалась дополнительная информация о решении. Для рассматриваемой задачи естественно предполагать гладкость рассматриваемых функций, поэтому в качестве априорной информации о решении рассматривались два условия:

$$\frac{q_{i+1} - q_i}{h} < M, \tag{17}$$

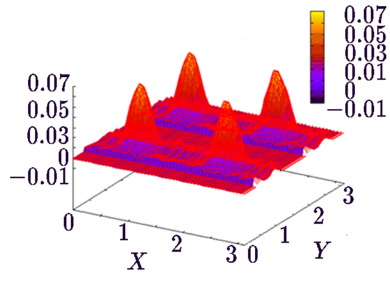
то есть ограниченность первой производной;

$$\frac{q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}}{h^2} < M, \tag{18}$$

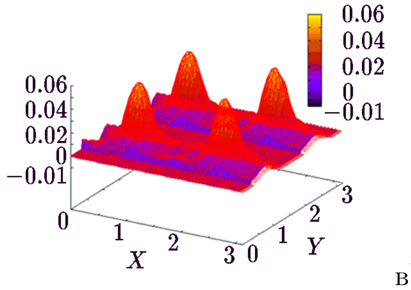
то есть ограниченность второй производной. Здесь M — некоторая постоянная.



а)



б)



в)

Рис. 5. Графики восстановленного решения q: а) обратная задача **1**, дополнительная информация о решении (17); б) обратная задача **2**, дополнительная информация о решении (18); в) обратная задача **3**

При использовании приема С.К. Годунова параметр α выбирался из условия минимальности относительной нормы $\frac{\|q_T - q_r\|}{\|q_T\|}$ относительно α. Всюду далее ошибка в правой части $\epsilon = 2\%$.

Таким образом, увеличение количества измерений позволяет достигнуть лучшей точности восстановления решения (в случае трех измерений дополнительная информация о решении не использовалась). Однако и при меньшем количестве измерений (случай двух измерений) регуляризованное решение достаточно точно восстанавливается (даже при зашумленных данных). Причем, чем точнее априорная информация о решении, тем устойчивее восстановленное решение (сравните рис. 5а и рис. 5б).

Литература

1. **Кабанихин С.И., Криворотько О.И.** Исследование обратной задачи термоакустики методом сингулярного разложения // Сибирские электронные математические известия. — 2011. — (В печати).
2. **Кабанихин С.И.** Обратные и некорректные задачи. — Новосибирск: Сибирское научное изд-во, 2008.
3. **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики. Издание: четвертое. — М.: Наука, 1981.
4. **Годунов С.К., Гордиенко В.М.** Сингулярные числа краевой задачи на полупрямой для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Сибирский математический журнал. — 1989. — Выпуск № 4. — С. 5–12.
5. **Годунов С.К., Антонов А.Г., Кирилюк О.И., Костин В.И.** Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах. — Новосибирск: Наука, 1992.

Поступила в редакцию 6 октября 2011