

Я. Л. Гурьева, В. П. Ильин, А. В. Петухов

## О МНОГОСЕТОЧНЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

### §1. ВВЕДЕНИЕ

Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) высокого порядка (до  $10^{10}$  и более) с разреженными плохо обусловленными матрицами, возникающими при аппроксимациях многомерных краевых задач методами конечных разностей, конечных объемов, конечных элементов и разрывных методов Галеркина различных порядков точностей на неструктурированных сетках, представляет собой актуальную проблему вычислительной алгебры, поскольку она является “узким горлышком” математического моделирования и требует компьютерных ресурсов (объемов как арифметических операций, так и памяти), увеличивающихся нелинейно с ростом размерности системы. Особую сложность представляют разномасштабные и многофазные задачи с контрастными материальными свойствами, в которых числа обусловленности могут быть  $10^{13}$  и выше, что является предельно допустимым при использовании стандартной двойной машинной точности. Помимо решения стационарных краевых задач, СЛАУ актуальны и при моделировании динамических процессов с помощью неявных устойчивых схем.

Современные подходы к решению СЛАУ базируются на предобусловленных методах в подпространствах Крылова, см. [1–3] и цитируемую там литературу. Актуальные вопросы масштабированного параллелизма алгоритмов решаются главным образом путем применения аддитивных методов декомпозиции областей, обзоры по которым можно найти в [3–5]. В теоретическом плане рекордные по оценкам

---

*Ключевые слова:* системы сеточных уравнений, двумерные задачи, алгебраические многосеточные подходы, итерационные методы, подпространства Крылова, чебышевское ускорение, численные эксперименты.

Работа поддержана грантом РФФИ № 18-01-00295.

объема вычислений результаты принадлежат, по-видимому, многосеточным алгоритмам, которые после пионерских работ Р. П. Федоренко и Н. С. Бахвалова получили активное развитие в исследованиях многочисленных авторов, содержательный анализ которых можно найти в монографиях [6–7], а также во многих публикациях, среди которых мы отметим [8–14]. Совокупность данных работ можно разбить на два основных направления – геометрические и алгебраические многосеточные методы (GMG и AMG – от Geometric & Algebraic MultiGrid). Если первое направление может эффективно использовать интерполяционные подходы на основе геометрических характеристик сетки, то второе является в некотором смысле более универсальным, поскольку базируется только на алгебраических свойствах СЛАУ. В целом эти подходы интерпретируются как построение многосеточного предобуславливателя для итерационного процесса крыловского типа. При этом один шаг, т.е. применение двухсеточного алгоритма, включает операции сглаживания, ограничения, продолжения и грубосеточной коррекции, которые реализуются итерационным образом в различных вариантах  $V$ -циклов или  $W$ -циклов. Переход к многосеточному варианту заключается в рекурсивном применении двухсеточного метода.

В данной работе предлагается новый вариант двухсеточного алгебраического метода, который рекурсивным применением может быть легко распространен на многосеточный вариант. Основная идея заключается в конструировании операторов ограничения и продолжения, осуществляющих в определенном смысле аппроксимацию дополнения Шура и имеющих сходство с алгоритмом Узавы. Основное изложение проводится на примере двумерных прямоугольных сеток, с учетом особенностей конкретной информационной структуры для соответствующих объектов, а также обсуждаются возможности переноса рассматриваемого подхода на вложенные треугольные сетки и на различные типы трехмерных сеток.

Настоящая работа построена следующим образом. В §2 мы описываем общую схему рассматриваемого многосеточного метода типа Узавы. Третий параграф содержит сравнение реализации алгоритма для двумерной краевой задачи с “классическими” многосеточными подходами, основанными на операциях сужения, сглаживания, грубосеточной коррекции и продолжения. В последнем параграфе приводятся и обсуждаются результаты численных экспериментов для модельных примеров.

## §2. ОБЩАЯ СХЕМА МНОГОСЕТОЧНОГО МЕТОДА ТИПА УЗАВЫ

Рассмотрим систему линейных пятиточечных симметричных сеточных уравнений

$$\begin{aligned} (Au)_{i,j} &\equiv -a_{i,j}u_{i-1,j} - b_{i,j}u_{i,j-1} - a_{i+1,j}u_{i+1,j} \\ &\quad - b_{i,j+1}u_{i,j+1} + e_{i,j}u_{i,j} = f_{i,j}, \\ i &= 1, \dots, L_1, \quad j = 1, \dots, M_1, \quad L_1M_1 = N_1, \end{aligned} \quad (1)$$

аппроксимирующих на прямоугольной сетке  $\Omega^h$  с числом узлов  $N_1$  краевую задачу для эллиптического уравнения в прямоугольной расчетной области с помощью методов конечных разностей, конечных объемов, конечных элементов или разрывных алгоритмов Галеркина, см. [15]. Пусть также задана последовательность из  $m$  вложенных сеток  $\hat{\Omega}_1 = \Omega^h, \hat{\Omega}_2 = \Omega^{2h}, \dots, \hat{\Omega}_m = \Omega^{2^{m-1}h}$ , каждая из которых содержит  $N_l = L_lM_l$  узлов, где  $L_l = (L_{l-1} - 1)/2 + 1 = (L_{l-1} - 1)/2^{l-1} + 1$ , все числа предполагаются целыми и  $l = 1, \dots, m-1$  (например,  $L_1 = M_1 = 2^m + 1$ ).

Матрицу  $A$  считаем положительно полуопределенной, а все участвующие в системе (1) коэффициенты неотрицательными и обладающими свойством диагонального преобладания, т.е. удовлетворяющими неравенствам

$$e_{i,j} \geq a_{i,j} + b_{i,j} + a_{i+1,j} + b_{i,j+1}.$$

При этом в околограничных узлах часть коэффициентов “зануляется” вследствие учета граничных условий, т.е.  $a_{1,j} = b_{i,1} = a_{L+1,j} = b_{i,M+1} = 0$ .

Систему уравнений (1) нормализуем таким образом, чтобы диагональные коэффициенты все равнялись единице, в результате чего приходим к симметричной СЛАУ следующего вида:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{i,j} - \bar{a}_{i,j}\bar{u}_{i-1,j} - \bar{b}_{i,j}\bar{u}_{i,j-1} - \bar{a}_{i+1,j}\bar{u}_{i+1,j} - \bar{b}_{i,j+1}\bar{u}_{i,j+1} &= \bar{f}_{i,j}, \\ \bar{a}_{i,j} &= a_{i,j} \left( \frac{e_{i,j}}{e_{i-1,j}} \right)^{-1/2}, \quad \bar{b}_{i,j} = b_{i,j} \left( \frac{e_{i,j}}{e_{i,j-1}} \right)^{-1/2}, \\ \bar{u}_{i,j} &= u_{i,j} e_{i,j}^{1/2}, \quad \bar{f}_{i,j} = f_{i,j} e_{i,j}^{-1/2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Многосеточный метод представляется как последовательное применение двухсеточного алгоритма, который будем описывать в соответствии с обозначениями на Рис. 1. Здесь чёрные точки означают узлы редкой сетки  $\Omega^{2h}$ , а кружочки и крестики суть узлы густой сетки  $\Omega^h$ ,

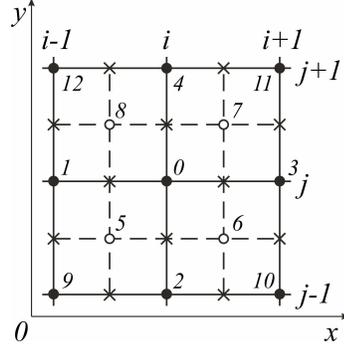


Рис. 1. Локальная нумерация узлов для многосеточного метода.

которые располагаются в серединах ячеек и центрах ребер  $\Omega^{2h}$ . Соответствующие подмножества узлов будем обозначать через  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$ , а получаемые геометрические типы точек по отношению к  $\Omega^{2h}$  называть узловыми, реберными и граневыми.

Предположим, что  $\bar{u}_{i,j}$  – значения решения СЛАУ (1) на густой сетке. Исключая реберные неизвестные СЛАУ (2) с помощью соотношений вида

$$\begin{aligned}\bar{u}_{i-1,j} &= \bar{f}_{i-1,j} + \bar{a}_{i-1,j}\bar{u}_{i-2,j} + \bar{b}_{i-1,j}\bar{u}_{i-1,j-1} + \bar{a}_{i,j}\bar{u}_{i,j} + \bar{b}_{i-1,j+1}\bar{u}_{i-1,j+1}, \\ \bar{u}_{i,j-1} &= \bar{f}_{i,j-1} + \bar{a}_{i,j-1}\bar{u}_{i-1,j-1} + \bar{b}_{i,j-1}\bar{u}_{i,j-2} + \bar{a}_{i+1,j-1}\bar{u}_{i+1,j-1} + \bar{b}_{i,j}\bar{u}_{i,j},\end{aligned}\quad (3)$$

(аналогичные выражения используются для  $\bar{u}_{i+1,j}$  и  $\bar{u}_{i,j+1}$ , где  $(i \pm 1, j)$ ,  $(i, j \pm 1) \in \Omega_3$ ), мы получаем следующую симметричную систему девятиточечных уравнений в узлах типа “кружочки”:

$$\begin{aligned}p_{i,j}^0\bar{u}_{i,j} - p_{i,j}^1\bar{u}_{i-2,j} - p_{i,j}^2\bar{u}_{i,j-2} - p_{i,j}^3\bar{u}_{i+2,j} - p_{i,j}^4\bar{u}_{i,j+2} \\ - p_{i,j}^5\bar{u}_{i-1,j-1} - p_{i,j}^6\bar{u}_{i+1,j-1} - p_{i,j}^7\bar{u}_{i+1,j+1} - p_{i,j}^8\bar{u}_{i-1,j+1} = \bar{f}_{i,j}, \\ (i, j) \in \Omega_2.\end{aligned}$$

Введённые коэффициенты определяются по формулам:

$$\begin{aligned}
p_{i,j}^0 &= 1 - \bar{a}_{i,j}^2 - \bar{b}_{i,j}^2 - \bar{a}_{i+1,j}^2 - \bar{b}_{i,j+1}^2, \\
p_{i,j}^1 &= \bar{a}_{i,j}\bar{a}_{i-1,j}, \quad p_{i,j}^2 = \bar{b}_{i,j}\bar{b}_{i,j-1}, \quad p_{i,j}^3 = \bar{a}_{i+1,j}\bar{a}_{i+2,j} = p_{i+2,j}^1, \\
p_{i,j}^4 &= \bar{b}_{i,j+1}\bar{b}_{i,j+2} = p_{i,j+2}^2, \quad \bar{p}_{i,j}^5 = \bar{a}_{i,j}\bar{b}_{i-1,j} + \bar{a}_{i,j-1}\bar{b}_{i,j}, \\
p_{i,j}^6 &= \bar{a}_{i+1,j-1}\bar{b}_{i,j} + \bar{a}_{i+1,j}\bar{b}_{i+1,j}, \\
p_{i,j}^7 &= \bar{a}_{i+1,j}\bar{b}_{i+1,j+1} + \bar{a}_{i+1,j+1}\bar{b}_{i,j+1}, \quad p_{i,j}^8 = \bar{a}_{i,j}\bar{b}_{i-1,j+1} + \bar{a}_{i,j+1}\bar{b}_{i,j+1} \\
\bar{f}_{i,j} &= \bar{f}_{i,j} + \bar{a}_{i,j}\bar{f}_{i-1,j} + \bar{b}_{i,j}\bar{f}_{i,j-1} + \bar{a}_{i+1,j}f_{i+1,j} + \bar{b}_{i,j+1}f_{i,j+1}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Такого же типа девятиточечные уравнения получаются для узлов редкой сетки, т.е. при  $(i, j) \in \Omega_1$ . Рассмотрим теперь приведённые преобразования в матрично-векторной форме. Обозначая далее через  $u_1, u_2, u_3$  подвекторы, компоненты которых соответствуют узлам типа черных точек, кружочков и крестиков, т.е.

$$u_l = \{u_{i,j} : (i, j) \in \Omega_l, \quad l = 1, 2, 3\},$$

исходную СЛАУ записываем как

$$\begin{aligned}
A_{1,1}u_1 + A_{1,3}u_3 &= f_1, \\
A_{2,2}u_2 + A_{2,3}u_3 &= f_2, \\
A_{3,1}u_1 + A_{3,2}u_2 + A_{3,3}u_3 &= f_3.
\end{aligned} \tag{5}$$

Данную систему будем рассматривать далее как полученную после операций масштабирования вида (2). При этом диагональные матричные блоки являются единичными ( $A_{1,1} = A_{2,2} = A_{3,3} = I$ ), а внедиагональные элементы СЛАУ и компоненты подвекторов  $u_1, u_2, u_3$  суть величины  $\bar{a}_{i,j}, \bar{b}_{i,j}$  и  $\bar{u}_{i,j}$ , определяемые формулами (2).

Исключая в (5) подвектор  $u_3$  с помощью полученного из последнего уравнения соотношения

$$u_3 = f_3 - A_{3,1}u_1 - A_{3,2}u_2,$$

приходим к системе относительно подвекторов  $u_1, u_2$ :

$$\bar{A}u \equiv \begin{cases} \bar{A}_{1,1}u_1 + \bar{A}_{1,2}u_2 = \bar{f}_1, \\ \bar{A}_{2,1}u_1 + \bar{A}_{2,2}u_2 = \bar{f}_2. \end{cases} \tag{6}$$

Здесь новые матрицы и векторы определяются соотношениями

$$\begin{aligned}
\bar{A}_{1,1} &= I - A_{1,3}A_{3,1}, \quad \bar{A}_{1,2} = -A_{1,3}A_{3,2}, \quad \bar{f}_1 = f_1 - A_{1,3}f_3, \\
\bar{A}_{2,1} &= -A_{2,3}A_{3,1}, \quad \bar{A}_{2,2} = I - A_{2,3}A_{3,2}, \quad \bar{f}_2 = f_2 - A_{2,3}f_3.
\end{aligned} \tag{7}$$

Отметим, что элементы матриц  $\bar{A}_{1,1}$  и  $\bar{A}_{1,2}$  состоят из величин  $p_{i,j}^0, p_{i,j}^1, \dots, p_{i,j}^4$  и  $p_{i,j}^5, \dots, p_{i,j}^8$  соответственно, см. формулы (4), если  $(i, j) \in \Omega_1$ . Если же  $(i, j) \in \Omega_2$ , то указанные две группы коэффициентов относятся к матрицам  $\bar{A}_{2,2}$  и  $\bar{A}_{2,1}$  соответственно. Участвующие в этих соотношениях матрицы  $\bar{A}_{1,1}$  и  $\bar{A}_{2,2}$  являются пятидиагональными, и мы их будем называть декомпозицией Шура первого уровня.

Отметим, что диагональные блоки  $\bar{A}_{l,l}$  в (7) являются пятидиагональными матрицами с конечным числом обусловленности, т.е. не зависящим от шага сетки  $h$ . Например, для модельной задачи, соответствующей аппроксимации оператора Лапласа на квадратной сетке, когда все ненулевые внедиагональные элементы матрицы  $A$  равны  $1/4$ , собственные числа  $\lambda$  матриц  $\bar{A}_{l,l}$  расположены внутри интервала  $[\lambda_{min} = 1/2, \lambda_{max} = 1]$ .

В алгебраической системе (6) произведем дальнейшее исключение неизвестных. А именно, выражая из второго уравнения подвектор

$$u_2 = \bar{A}_{2,2}^{-1}(\bar{f}_2 - \bar{A}_{2,1}u_1)$$

и подставляя его в первое уравнение, получаем следующую СЛАУ для узлов редкой сетки:

$$\hat{A}u_1 \equiv (\bar{A}_{1,1} - \bar{A}_{1,2}\bar{A}_{2,2}^{-1}\bar{A}_{2,1})u_1 = \hat{f} \equiv \bar{f}_1 - \bar{A}_{1,2}\bar{A}_{2,2}^{-1}\bar{f}_2. \quad (8)$$

Отметим, что здесь матрица  $\hat{A}$ , представляющая собой дополнение Шура второго уровня, является плотной. Однако умножение вектора на эту матрицу может быть сделано достаточно экономично, самая трудоёмкая операция здесь — решение СЛАУ с хорошо обусловленной матрицей  $\bar{A}_{2,2}$ , что легко выполнимо с помощью чебышевского ускорения.

Для решения СЛАУ (8) рассмотрим предварительно стационарный блочный метод типа Якоби, модифицированный с помощью согласования строчных сумм:

$$\begin{aligned} B(u^{n+1} - u^n) &= \hat{f} - \hat{A}u^n \equiv r^n, \\ B &= \text{five} - \text{diag}\{\bar{A}_{1,1} - \theta D\}, \quad \theta \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $D$  — диагональная матрица, выбираемая по условию

$$Be = \hat{A}e \quad \text{при} \quad \theta = 1, \quad \text{т.е.} \quad De = \bar{A}_{1,2}\bar{A}_{2,2}^{-1}\bar{A}_{2,1}\bar{e},$$

где  $e$  есть вектор с единичными компонентами, а параметр  $\theta$  подбирается с целью оптимизации предобуславливающей итерации  $B$ , т.е. минимизации числа обусловленности  $B^{-1}\hat{A}$  и количества итераций в алгоритме (9) (данный интересный вопрос – это пока тема для дальнейших исследований). Здесь и далее в качестве критерия окончания итераций мы выбираем выполнение следующего неравенства для вектора невязки:

$$\|r^n\|_2^2 \equiv (r^n, r^n) \leq \varepsilon^2(f, f), \quad \varepsilon \ll 1. \quad (10)$$

Ускорение итерационного процесса (9) может быть осуществлено с помощью предобусловленных методов сопряженных направлений в подпространствах Крылова или спектрального алгоритма чебышевского типа, которые могут быть записаны в следующей единообразной форме, см. [16] (далее для удобства вектор  $f$  и матрицу  $A$  записываем без символа "hat"):

$$\begin{aligned} r^0 &= f - Au^0, \quad p_0 = B^{-1}r^0, \\ n &= 1, 2, \dots: \\ u^n &= u^{n-1} + \alpha_{n-1}p^{n-1}, \\ r^n &= r^{n-1} - \alpha_{n-1}Ap^{n-1}, \\ p^n &= B^{-1}r^n + \beta_n p^{n-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь коэффициенты  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  в чебышевском алгоритме определяются формулами

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \tau, \quad \alpha_n = \gamma_n \tau, \quad \beta_n = (\gamma_n - 1)\alpha_{n-1}/\alpha_n, \quad \tau = 2/(\lambda_1 + \lambda_N), \\ \gamma_n &= 4/(4 - \gamma_{n-1}\gamma^2), \quad \gamma_0 = 2, \quad \gamma = (c - 1)/(1 + c), \quad c = \lambda_N/\lambda_1, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_N$  – минимальное и максимальное собственные числа матричного произведения  $B^{-1}A$ . Для крыловских методов вместо формул (9) используются следующие:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \sigma_n/\rho_n, \quad \sigma_n = (B^{-1}r^n, A^\gamma r^n), \\ \rho_n &= (Ap^n, A^\gamma p^n), \quad \beta_n = \sigma_{n+1}/\sigma_n, \end{aligned} \quad (13)$$

причем  $\gamma = 1$  соответствует алгоритму сопряженных невязок, а  $\gamma = 0$  – сопряженных градиентов.

Количество итераций, необходимых для выполнения неравенств (8), в обоих случаях оценивается величиной

$$n(\varepsilon) \leq 1 + |\ln(\varepsilon/2)|\sqrt{c}/2, \quad c = \lambda_N/\lambda_1. \quad (14)$$

В случае вырождения матрицы  $A$  для методов сопряженных направлений в (14)  $c$  обозначает эффективное число обусловленности, а  $\lambda_1$  есть минимальное ненулевое собственное число, см. [17]. Однако при этом для сходимости метода (11), (13) и справедливости оценки (14) решаемая алгебраическая система должна быть совместной, т.е. равенство  $Au = f$  обязано выполняться хотя бы для одного вектора  $u$ .

Отметим, что реализация одной итерации вида (8) требует решения алгебраических систем с матрицами  $B$  и  $\bar{A}_{2,2}$ , каждая из которых имеет порядок примерно вчетверо меньший, чем исходная СЛАУ (1). Поскольку границы спектра  $\lambda_{min}$ ,  $\lambda_{max}$  у этих хорошо обусловленных при  $\theta < 1$  матриц можно оценить, например, с помощью теоремы о кругах Гешгорина [16], здесь целесообразно применить экономичный метод чебышевского ускорения, не требующий вычисления скалярных произведений векторов и хорошо распараллеливающийся. Получаемый двухуровневый итерационный процесс может быть оптимизирован за счет выбора соответствующих параметров  $\theta$  и порядка используемого полинома Чебышева, т.е. количества внутренних итераций, которые в принципе могут быть переменными.

Заметим, что внешний и внутренний итерационные процессы для решения СЛАУ с матрицами  $\hat{A}$  и  $\bar{A}_{2,2}$  соответственно можно проводить с различными значениями  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  в условии (14). Очевидно, что вычисление подвекторов  $u_2$  и  $u_3$  достаточно делать только один раз после окончания итераций для СЛАУ (8). Здесь следует ещё заметить, что если на обоих уровнях рассматриваемого итерационного процесса применять методы сопряженных направлений, то это приводит, строго говоря, к необходимости использования “гибких” (flexible) технологий предобуславливания вида [18] с длинными рекурсиями даже для симметричных СЛАУ, что существенно “удорожает” алгоритм.

Рассмотренный метод в определенном смысле аналогичен алгоритму Узавы, поскольку он основан на предварительном исключении подвекторов. Его также можно интерпретировать как нестандартный двухсеточный подход, включающий решение подсистем для векторов  $u_1$  и  $u_2$ , соответствующих двум редким сеткам  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  с шагами  $2h$ .

Важно подчеркнуть, что если “редкую” систему (8) решить с достаточной итерационной точностью, то подвекторы  $u_1$ ,  $u_2$  и  $u_3$  будут уже хорошим приближением для искомого решения СЛАУ (1), в отличие от традиционного многосеточного метода.

На основе описанного двухсеточного метода рекурсивным образом легко может быть построен многосеточный итерационный алгоритм. Действительно, в решении СЛАУ (8) для подвектора  $u_1$  может быть использована более редкая сетка с шагом  $4h$ . При этом каждая из подсистем с матрицами  $B$  и  $\bar{A}_{2,2}$  сводится к двум подсистемам половинного порядка, и далее процесс разрежения сеток с удвоением количества подсистем может быть продолжен. Таким образом, при использовании  $m$  уровней алгоритма на самой грубой сетке требуется решить  $2^m$  алгебраических подсистем, что целесообразно выполнять синхронно на разных процессорах, увеличивая таким образом степень параллелизма вычислений.

Аналогичный иерархический подход переносится и на вложенные треугольные сетки, в том числе при использовании конечно-элементных аппроксимаций с лагранжевыми базисными функциями высокого порядка. При этом блочная структура исходной матрицы  $A$  для двухсеточного варианта сохраняет вид (5), а подвекторы  $u_1$ ,  $u_2$  и  $u_3$  также соответствуют узловым, реберным и граневым типам неизвестных, обозначаемых выше символами  $\cdot$ ,  $\circ$ ,  $\times$ . Поэтому запись итерационного алгоритма в матрично-векторном виде (8) остается в силе. При переходе к трехмерным вложенным полигональным сеткам различного типа (с конечными элементами вида “параллелепипед”, “тетраэдр”, “призма” и т.д.) принципы классификации неизвестных и структурирования матриц остаются теми же: при иерархическом измельчении грубой сетки к трем типам новых узлов добавляются “объемные”, так что блочный порядок исходной матрицы увеличивается на единицу.

### §3. СРАВНЕНИЕ С МНОГОСЕТОЧНЫМИ КЛАССИЧЕСКИМИ ПОДХОДАМИ

В современной трактовке достаточно общего вида двухсеточный метод AMG может быть представлен следующими этапами, см. [8–10].

1. На густой сетке  $\Omega_1$  по заданному произвольному начальному вектору  $u_1^0$  вычисляется невязка

$$r_1^0 = f - A_1 u_1^0, \quad A_1 = A.$$

2. Для вектора  $r_1^0$  производится препроцессинг (предварительное сглаживание), как правило, путем проведения нескольких итераций с помощью какого-либо простого алгоритма:

$$r_1^1 = S_1 r_1^0, \quad (15)$$

где  $S_1$  – оператор, или матрица, этого этапа (presmoothing). Более конкретно, данный этап реализуется за два шага. На первом вычисляется направляющий вектор

$$\tilde{A}_1 p_1^0 = r_1^0, \quad (16)$$

где  $\tilde{A}_1$  – некоторая аппроксимация матрицы  $A$ , а на втором определяется соответствующая невязка

$$r_1^1 = f - A p_1^0. \quad (17)$$

3. По определенному на густой сетке  $\Omega_1$  вектору  $r_1^1$  формируется вектор невязки  $r_2^1$  на редкой сетке  $\Omega_2$ :

$$r_2^1 = R r_1^1, \quad R \in \mathcal{R}^{N_1, N_2}, \quad r_2^1 \in \mathcal{R}^{N_2}, \quad (18)$$

где  $R$  есть некоторый оператор сужения (этап restriction).

4. На редкой сетке вычисляется направляющий вектор  $p_2^1$  из решения СЛАУ

$$A_2 p_2^1 = r_2^1, \quad A_2 \in \mathcal{R}^{N_2, N_2}, \quad p_2^1, r_2^1 \in \mathcal{R}^{N_2}, \quad (19)$$

где  $A_2$  – некоторая матрица СЛАУ для сетки  $\Omega_2$ .

5. Найденный из решения системы (12) вектор  $p_2^1$  продолжается с редкой сетки  $\Omega_2$  на густую сетку  $\Omega_1$  (этап prolongation):

$$p_1^1 = P p_2^1, \quad P \in \mathcal{R}^{N_1, N_2}, \quad p_1^1 \in \mathcal{R}^{N_1}. \quad (20)$$

6. Для вектора  $p_1^1$  определяется соответствующий вектор невязки на густой сетке (residual update)

$$r_1^2 = r_1^1 - A p_1^1, \quad r_1^1 \in \mathcal{R}^{N_1}. \quad (21)$$

7. Производится “пост-процессинг” для вновь полученного вектора невязки на густой сетке  $\Omega_1$  с одновременным вычислением нового направляющего вектора  $p_1^2$  из решения вспомогательной СЛАУ с матричной аппроксимацией  $\tilde{A}_2$  (этап postsmoothing):

$$\tilde{A}_2 p_1^2 = r_1^2. \quad (22)$$

8. Итоговый направляющий вектор определяется как сумма

$$p_1 = p_1^0 + p_1^1 + p_1^2 = B r_1^0,$$

где  $B$  есть предобуславливающая матрица данного двухсеточного метода.

Конкретные реализации многосеточных подходов, ставшие уже классическими, отличаются способами выбора матричных операторов, определяющих последовательные этапы приведенной вычислительной схемы. В общем случае, предобуславливающая матрица для двухсеточного метода решения СЛАУ (1) может быть представлена в виде

$$B = S_2 P A_c^{-1} R S_1 \in \mathcal{R}^{N_1, N_1}, \quad (23)$$

где  $S_1$  и  $S_2$  суть определенные в  $\Omega^h$  операторы предварительного и повторного сглаживания (presmoothing & postsmoothing),  $R \in \mathcal{R}^{N_1, N_2}$  и  $P \in \mathcal{R}^{N_2, N_1}$  – матрицы сужения (restriction) и продолжения (prolongation),  $A_c \in \mathcal{R}^{N_2, N_2}$  – матрица для определения грубосеточной коррекции (coarse grid correction),  $N_1, N_2$  – размерности векторов, определенных на густой и редкой сетках  $\Omega^h, \Omega^{2h}$  соответственно. Если матрица  $A$  исходной СЛАУ является симметричной, то естественно пытаться построить и симметричную же предобуславливающую матрицу  $B$ . В таком случае, целесообразно определить  $P = R^T$ ,  $A_c = A_c^T$  и  $S_1 = S_2^T = S = S^T$ . В частном случае так называемой галеркинской аппроксимации, полагают также  $A_c = P^T A P$ , в результате чего предобуславливающая матрица записывается как

$$B = S P (P^T A P)^{-1} P^T S. \quad (24)$$

В качестве примера мы рассмотрим следующий вариант, основанный на предложенном в работе [12] подходе.

**Алгоритм 1.** Для решения девятиточечной симметричной СЛАУ, аппроксимирующей двумерную краевую задачу для эллиптического уравнения на прямоугольной сетке, в качестве сглаживателя применяется итерационный метод Iteration Line LU (ILLU), фактически представляющий собой неявный алгоритм неполной факторизации, предложенный в [19, 20]. Для операции продолжения редкой сетки на густую используется билинейная интерполяция для соседних узлов сетки, а оператор сужения определяется по правилу  $R = P^T$ . Матрица для редкой сетки формируется в виде  $A_c = P^T A P$ , в результате чего предобуславливающая матрица имеет вид (24). Многосеточный метод определяется как рекурсивное применение (заданное число  $\tilde{m}$  раз) двухсеточного алгоритма. Внешний итерационный процесс осуществляется как метод Якоби (без крыловского ускорения). СЛАУ с

матрицей  $A_c$  решается на самой грубой сетке прямым или итерационным алгоритмом, что для больших  $m$  практического значения не имеет.

#### §4. ПРИМЕРЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

В данном параграфе мы рассмотрим результаты предварительных экспериментальных исследований для алгебраических двухсеточных и многосеточных подходов на простых методических примерах, содержащих реализацию описанных итерационных алгоритмов при конечно-разностном решении уравнения Пуассона в квадратной расчетной области на равномерной прямоугольной сетке. Расчеты проводились при относительно небольшом числе узлов  $N = 64^2, 128^2, 256^2, 512^2, 1024^2$ , так что целью в данном случае было не достижение максимальной производительности, а анализ математической эффективности методов при использовании различных значений параметров задачи и алгоритмов. Все расчеты проводились в арифметике со стандартной двойной точностью представления вещественных чисел. Для экспериментов использовался компьютер Intel(R) Core(TM) i7-770HQ CPU @ 2.80GHz 2.80GHz.

В таблице 1 мы приведем результаты численного решения модельной задачи Неймана для уравнения Пуассона в квадратной расчетной области  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ , аппроксимируемой с помощью стандартной пятиточечной схемы [16] на квадратных сетках с количествами ячеек  $N = 64^2, 128^2, 256^2, 512^2, 1024^2$ . В качестве тестового использовалось одномерное решение  $u = \sin \pi x$ , а для начального итерационного приближения бралось  $u = 0$ . В данном случае, в соответствии с работой [12], применялся алгоритм 1 с использованием различного количества вложенных сеток  $m = 2, 3, 4, 5, 6$ . В каждом варианте СЛАУ на самой грубой сетке решалась с помощью итерационного метода сопряженных невязок при значении  $\varepsilon = 10^{-8}$  в критерии окончания итераций (10). Внешний итерационный процесс (метод Якоби) также завершался по выполнению этого условия. В каждой клетке данной таблицы приведены два числа: общее время вычислений (включая подготовительные операции) и количество внешних итераций.

Как видно из приведенных данных, число внешних итераций практически не зависит от размерности задачи и от количества используемых сеток, что говорит в пользу качества итерационного процесса. Общее время вычислений с увеличением числа сеток уменьшается, но

Таблица 1. Результаты расчетов для Алгоритма 1.

$m \setminus N$	$64^2$	$128^2$	$256^2$	$512^2$	$1024^2$
2	0.028 6	0.152 5	0.968 5	7.41 5	62.2 5
3	0.010 6	0.052 5	0.341 5	2.45 5	20.4 5
4	0.008 6	0.042 6	0.256 5	1.78 5	15.0 5
5	0.007 6	0.04 6	0.246 5	1.68 5	14.3 5
6	0.007 6	0.04 6	0.249 6	1.82 5	14.3 5

лишь до определенного уровня (в приведенных расчетах более пяти сеток применять уже нецелесообразно).

Заметим, что абсолютные времена вычислений в таблице достаточно большие, так как в них большой вклад вносят подготовительные действия. Общая эффективность рассматриваемого алгоритма значительно увеличилась бы при решении серии СЛАУ с одинаковой матрицей, но с большим количеством различных правых частей.

В таблице 2 мы даем аналогичные экспериментальные результаты по применению двухсеточного варианта алгоритма типа Узавы, представленного в §2 формулами (6)–(13). В данном случае, внешний итерационный процесс также осуществлялся методом сопряженных невязок, а на каждой такой итерации решение вспомогательных СЛАУ с матрицами  $B$  и  $\bar{A}_{2,2}$  проводилось с помощью чебышевского ускорения (при фиксированных порядках используемых полиномов и границах итерационных спектров, определяемых численно через круги Гершгорина).

В каждой клетке таблицы также приводятся время вычислений в секундах и число внешних итераций. Рассматриваются те же размеры сеток, но величины  $m$  в данном случае означают порядки полиномов, используемых в чебышевском ускорении. Значение компенсирующего итерационного параметра  $\theta$  подбиралось экспериментально и в приведенных расчетах почти везде было равно  $\theta = 0.975$  (строго говоря, его оптимальная величина приближается к единице при увеличении  $N$ ).

Таблица 2. Результаты экспериментов для алгоритма типа Узавы.

$m \setminus N$	$64^2$	$128^2$	$256^2$	$512^2$	$1024^2$
4	0.021 23	0.122 31	0.576 57	4.9 106	50.3 198
8	0.020 17	0.112 22	0.454 37	3.37 64	35.4 118
12	0.022 15	0.078 21	0.472 34	2.84 48	30.5 89

Приведенные предварительные результаты экспериментальных исследований свидетельствуют о перспективности применения итерационного алгоритма типа Узавы. Однако вопросы оптимизации итерационных параметров пока остаются открытыми и требуют дополнительного исследования.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Y. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, 2nd edn. SIAM, 2003.
2. В. П. Ильин, *Методы и технологии конечных элементов*, Изд. ИВМ и МГ СО РАН, Новосибирск, 2007.
3. М. А. Olshanskii, Е. Е. Tyrtshnicov, *Iterative Methods for Linear Systems. Theory and Applications*. SIAM, Philadelphia, 2014.
4. V. Dolean, P. Jolivet, F. Nataf, *An Introduction to Domain Decomposition Methods: Algorithms, Theory and Parallel Implementation*. SIAM, Philadelphia, 2015.
5. В. П. Ильин, *О проблемах параллельного решения больших СЛАУ*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **439** (2015), 112–127.
6. W. Hackbusch, *Multi-Grid Methods and Applications*. Springer Ser. Comput. Math. **4**, Berlin, 1985.
7. V. V. Shaidurov, *Some estimates of the rate of convergence for the cascadic conjugate-gradient method*. — Comput. Math. Appl. **31**, No. 4/5 (1996), 161–171.
8. G. Lu, X. Jiao, N. A. Missirlis, *Hybrid geometrical algebraic multigrid method with semi-iterative solution*. — Numer. Linear. Algebra Appl. **21**, No. 2 (2014), 2212–258.
9. Y. Notay, A. Napov, *Further comparison of additive and multiplicative coarse grid correction*. — Appl. Numer. Math. **65** (2013), 53–62.
10. A. Napov, Y. Notay, *An efficient multigrid method for graph Laplacian systems II: Robust Aggregation*. — SIAM J. Sci. Comput. **39**, No. 5 (2017), 379–403.
11. Y. Notay, *Analysis of two-grid methods. The nonnormal case*. Universite Libre de Bruxelles, Report GANMN 18-01 (2018).
12. P. M. de Zeeuw, *Matrix-dependent prolongations and restrictions in a blackbox multigrid solver*. — J. Comput. Appl. Math. **33** (1990), 1–27.

13. Y. Shapira, M. Israeli, A. Sidi, *Towards automatic multigrid algorithms for spd, nonsymmetric and indefinite problems*. — SIAM J. Sci. Comput. **17**, No. 2 (1996), 439–453.
14. Y. Notay, *Algebraic two-level convergence theory for singular systems*. — SIAM J. Matrix Anal. Appl. **37** (2016), 1419–1439.
15. В. П. Ильин, *Математическое моделирование. Часть 1. Непрерывные и дискретные модели*. Новосибирск, изд. СО РАН, 2017.
16. В. П. Ильин, *Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений*. Новосибирск, изд. ИВМиМГ СО РАН, 2001.
17. R. Nabben, C. Vuik, *A comparison of deflation and coarse grid correction applied to a porous media flows*. — SIAM J. Numer. Anal. **42** (2004), 1631–1647.
18. Y. Notay, *Flexible conjugate gradients*. — SIAM J. Sci. Comput. **22**, No. 4 (2000), 1444–1460.
19. O. Axelsson, S. Brinkemper, V. P. Il'in, *On some versions of incomplete block-matrix factorization iterative method*. Nijmegen: Catholic Univ., preprint 8392, 1983.
20. P. Concus, G. H. Golub, G. Meurant, *Block preconditioning for the conjugate gradient method*. — SIAM J. Sci. Statist. Comput. **6**, No. 1 (1985), 220–252.

Gurieva Ya. L., Il'in V. P., Petukhov A. V. Multigrid methods for solving two-dimensional boundary-value problems.

Various methods for constructing algebraic multigrid type methods for solving multidimensional boundary-value problems are considered. Two-level iterative algorithms in Krylov subspaces based on the approximate Schur complement obtained by eliminating the edge nodes of the coarse grid are described on an example of two-dimensional rectangular grids. Some aspects of extending the methods proposed to the multilevel case, to nested triangular grids, and also to three-dimensional grids are discussed. A comparison with the classical multigrid methods based on using smoothing, restriction (aggregation), coarse-grid correction, and prolongation is provided. The efficiency of the algorithms suggested is demonstrated by numerical results for some model problems.

Институт вычислительной математики и  
математической геофизики СО РАН;  
Новосибирский государственный университет  
*E-mail*: [ilin@sscc.ru](mailto:ilin@sscc.ru)

Поступило 17 октября 2019 г.

Институт вычислительной математики  
и математической геофизики СО РАН  
*E-mail*: [yana@lapasrv.sccc.ru](mailto:yana@lapasrv.sccc.ru)  
*E-mail*: [petukhov@lapasrv.sccc.ru](mailto:petukhov@lapasrv.sccc.ru)